UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PENSAMIENTO VARIACIONAL EMERGENTE: UNA EXPERIENCIA EN CÁLCULO INICIAL DESDE UNA PRIMERA CATEGORÍA DE ANÁLISIS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Tesis Doctoral

MARVIN ROBERTO MENDOZA VALENCIA

Director: Dr. Carlos Cabezas

Santiago, chile. 2016

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PENSAMIENTO VARIACIONAL EMERGENTE: UNA EXPERIENCIA EN CÁLCULO INICIAL DESDE UNA PRIMERA CATEGORÍA DE ANÁLISIS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Tesis Doctoral presentada por **Marvin Roberto Mendoza Valencia** dentro del programa de Doctorado en Educación Matemática para aspirar al grado de **Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos**, dirigida por el **Dr. Carlos Cabezas,** académico de la Universidad de Los Lagos.

____

Marvin Roberto Mendoza

____

Dr. Carlos Cabezas

A mis padres: Carlos Rubén Mendoza Montoya, Nuvia Minerva Valencia Pérez, quienes en todo momento han sido pilares en mi vida y fuente de inspiración.

A mis hermanos Álvaro Antonio, Carlos René, José Lizandro y Roberto Carlos quienes han sido los mejores amigos, críticos y colaboradores de todos los proyectos que he emprendido. Gracias por sus consejos, palabras, alientos y llamados de atención. He crecido en todo gracias a ello.

Gracias a mi tíos y tías, primos y primas, en especial, a Vilma Consuelo Mendoza, Gilma Valencia, Justa Valencia, Belinda Valencia porque su amistad, consejos, apoyo emocional y económico ha permitido que este gran desafío se haya cristalizado.

A cuatro mujeres importantes en mi vida: tía Vilma gracias por estar allí cuando necesité su apoyo. A la memoria de mis abuelas, Julia Montoya y Cristobalina Pérez, fueron las mejores. Mary Loany, has sido la compañera ideal, la mejor amiga, la cómplice de todos mis proyectos académicos y los nuestros.

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento a Dios porque ha estado conmigo en todo momento. Me ha dado la fuerza necesaria para seguir adelante y me ha iluminado con su sabiduría para no perder de vista mi norte.

Mi especial agradecimiento, admiración y respeto al Doctor Carlos Cabezas Manríquez, por su amistad, apoyo y dirección para realizar este proyecto en donde ha invertido una alta cuota de tiempo personal y múltiple esfuerzo que se ve reflejado en esta producción científica, pretendido que sea una obra original, crítica, innovadora, y de aporte a la didáctica del Cálculo.

A las autoridades de la Universidad de Los Lagos, en especial, al director del Programa de Doctorado en Educación Matemática, Ph.D. Álvaro Poblete Letelier, a los profesores de los diferentes cursos del doctorado: Dra. Verónica Díaz Quezada, Dra. Ismenia Guzmán Retamal, Dra. Leonora Díaz Moreno, Dr. Edmundo Mancilla, Dr. Raúl Pizarro, Dr. Jaime Arrieta Vera, Dr. Eduardo Carrasco, y Dr. Luis Pino Fan por sus enseñanzas brindadas y por las experiencias compartidas.

Gracias a los compañeros del doctorado en Educación Matemática de la Universidad de los Lagos del I y II Cohorte, quienes formamos parte de este programa innovador, el cual persigue entre sus objetivos, consolidar la formación de investigadores en Educación Matemática de Chile y de Latinoamérica. Gracias, amigos, por todo el tiempo compartido en diferentes jornadas y eventos, tanto en Universidad de Los Lagos, como en otras latitudes; además de las conversaciones, sueños e ilusiones exteriorizados.

Un reconocimiento especial a Gastón, Verónica, Wilson, quienes con su amistad incondicional hicieron más ligero el camino y los momentos en que se extrañaba la patria. Ustedes son héroes anónimos, que gracias a sus consejos y aportes constructivos siempre se hicieron presente en todos los momentos.

Gracias, Alba Marina Osorto, por ser más que una amiga, la hermana que no tuve y la persona que me reforzó el creer y cumplir los sueños, y aplicar los buenos valores. Tu sabiduría y tu consejo siempre vivieron y me ayudaron en diferentes situaciones.

Águeda Chávez, tus consejos, prudencia y apoyo han sido importantes y se han valorado en diferentes momentos.

Sixmenia Raudales, gracias por ser una excelente amiga. Tus actos siempre reflejaron una alta estima. Tus pláticas positivas ayudaron a creer en el proyecto propuesto.

Oswaldo Cubas, gracias por el apoyo incondicional brindado en cada momento que lo requerí, esta ayuda fue imprescindible para la culminación de esta meta.

A la Institución educativa, Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH), específicamente, al Centro Regional en Danlí (UNAH-TEC Danlí) entidad en la cual me desempeño desde el 2008. Mi gratitud personal, a la directora M.Sc. Carla Garcés Rivera quien avaló el proyecto desde el principio. De igual manera, al Secretario de este Centro Ph. D. Raúl Orlando Figueroa Soriano, por el apoyo incondicional brindado y sus muestras de aprecio.

A la Dirección de Capacitación y Desarrollo, Dirección de Investigación Científica y Postgrado de la UNAH las cuales aportaron los recursos económicos para culminar este trabajo de investigación.

A todas las demás personas, amigos de Chile, Honduras, Panamá y otros países, quienes me alentaron a culminar la meta propuesta.

“Todos los programas de investigación que admiro tienen una característica común. Todos ellos predicen hechos nuevos, hechos que previamente ni siquiera habían sido soñados o que incluso habían sido contradichos por programas previos o rivales”

Imre Lakatos

ÍNDICE

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 5

CAPÍTULO 6

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Los estudios desarrollados respecto al pensamiento variacional atienden en su mayoría a una perspectiva teórica, denominada una aproximación Socioepistemológica, y otros, en menor proporción se enfocan al estudio del pensamiento variacional desde una perspectiva dinámica centrada en el proceso cognitivo de generación de modelos mentales que dan cuenta de covariación de variables en una situación particular, siendo la visualización un eslabón del proceso.

En esta investigación hemos adoptado la segunda perspectiva para el pensamiento variacional, partiendo, además, de las ideas pre matemáticas que traen los estudiantes al ingresar al nivel terciario. Argumentamos este aspecto, puesto que, nuestros estudiantes poseen experiencias vividas que en diferentes situaciones y podrían constituirse en un eslabón de construcción de conocimiento formal. Los niños desde temprana edad conocen las relaciones de diferentes sonidos asociados a diferentes animales; de igual manera escuchamos conversaciones cotidianas de nuestros estudiantes relativas a magnitudes como la distancia y velocidad sin ser esta, una idea formal de lo que define una métrica.

Se ha considerado de pertinencia desarrollar la investigación en el cálculo inicial, puesto que, en la génesis de esta rama matemática, la variación y el cambio -conceptos medulares del pensamiento variacional- han desempeñado un rol en la generación de nuevas ideas y conceptos, ya que en cada etapa histórica de la evolución del cálculo, se han desarrollado distintos e importantes esfuerzos para comprender el cambio de diferentes situaciones y fenómenos (fluxiones, fluxaciones, indivisibles, infinitésimos, etc.).

En ese sentido, por la importancia y la pertinencia que sigue teniendo la variación y el cambio en nuestra sociedad en diferentes contextos, esta investigación aborda el pensamiento variacional emergente en estudiantes de ingeniería que se inician en el estudio del cálculo.

La investigación persiguió entre sus objetivos, caracterizar y categorizar las producciones, identificando características de las mismas que dieran cuenta de diversas formas de manifestación de pensamiento variacional. Para lograr este propósito, la investigación fue desarrollada en tres etapas: revisión de literatura pertinente al tema, planificación – ejecución y, análisis de resultados.

En cada una de las fases de la investigación, se propusieron ciertas tareas acordes a los objetivos. En una revisión minuciosa de la literatura relacionada con el pensamiento variacional se constató la originalidad del tema que se desarrolla en esta investigación.

En la planificación y recolección de la información se observaron y transcribieron cada una de las producciones de los estudiantes que propuso el profesor de la clase. Luego se analizaron las producciones escritas de los estudiantes y los registros (fílmicos y fotográficos) de sus sesiones de estudio, generando categorías de manifestaciones de pensamiento variacional de acuerdo a un primer nivel de análisis provisto por el enfoque ontosemiótico.

ABSTRACT

The studies developed related to the variational thought deal mainly with a theoretical perspective known as called as Socioepistemologic approximation. Other studies in lesser proportion have as a focused the study of the variational thought from a dynamic perspective, which is centered on the cognitive process of generation of mental models that show covariation of variables in a particular situation having visualization as a link of the process.

In this investigation, we have adopted the second perspective for the variational thought, also taking into account the pre mathematical ideas students have when they entered post-secondary education. We argue this aspect, because our students have different experiences that could become the link in formal knowledge construction. Children from early age know the relation between sounds associated with different animals. We can also listen to students' conversations related to magnitude such as distance and speed without being this, a formal idea to what defines a metric.

It has been considered relevant to develop the investigation in the Calculus I since, in the beginning of this mathematical branch, the variation and the change - fundamental concepts of the variational thought - have played a role in generating of new ideas and concepts, because in every historical period of the evolution of the calculus, different and important efforts have being developed to understand the change in different situations and phenomena (fluxions, indivisible, infinitesimal, etc.).

In this sense, due the importance and the relevancy that continues to have the variation and the change in our society in different contexts, this investigation approaches the emergent variational thought in engineering students who begin the study the Calculus.

The investigation follow among its objectives to characterize and to categorize the productions, identifying characteristics of the same ones that were realizing of diverse forms of manifestation of variational thought. To achieve this intention, the investigation was developed in three stages: review of pertinent literature to the topic, planning - execution and, analysis of results. In each of the phases of the investigation, they proposed certain identical tasks to the aims.

The investigation had as objectives characterizing and categorizing productions, identifying their characteristics, which showcase various, forms of the variational though.

Every student production proposed by the class professor was observed and transcribed during planning and data recollection.
Students' written productions and audio sessions records (filmed and photographed) were then analyzed, generating categories of manifestations of variational thoughts in accordance with the first level of analysis under the ONTOSEMANTIC approach
which generated.

INTRODUCCIÓN GENERAL

En la génesis y desarrollo del cálculo, diferentes ideas y aproximaciones a los objetos matemáticos (límite, derivada, funciones, integral, entre otros) se desarrollaron en diferentes contextos: aritmético, geométrico, algebraico a partir de fenómenos en contextos físicos, geométricos, y en alguna medida algebraica, siendo las ideas dinámicas las verdaderas gestoras de los trabajos de los padres del cálculo: Newton y Leibnitz. En este sentido, la variación y el cambio han sido aspectos explicativos de muchos fenómenos naturales y cotidianos en diferentes situaciones. Un gran desafío actual es encontrar maneras de utilizar este conocimiento acumulado, en distintos espacios de enseñanza y aprendizaje.

La Educación Matemática ha abordado este desafío desde la comprensión de la cognición humana, de cómo el individuo logra desarrollar competencias, habilidades de pensamiento matemático de manera significativa, para que puedan ser puestos en escena al resolver problemas y obtener logros significativos en los aprendizajes. El pensamiento variacional se orienta a desarrollar habilidades de orden superior, partiendo de diferentes situaciones, sean estas cercanas o no al sujeto, bajo la premisa que el cambio y la variación se encuentran presentes en la mayoría de los procesos, fenómenos y situaciones que ocurren a nuestro alrededor sin importar el contexto en que nos situemos.

Esta investigación está focalizada en conocer las manifestaciones de pensamiento variacional que emergen en los estudiantes de Cálculo en diferentes tareas propuestas por el profesor a lo largo del curso, y que constituyen el sustrato de este trabajo de investigación. Para una mejor presentación y comprensión de la investigación se presenta el desarrollo en seis capítulos que se describen a continuación.

En el capítulo 1 denominado ANTECEDENTES Y ÁREA PROBLEMÁTICA se presenta una revisión de los trabajos de investigación relativos al pensamiento variacional, tanto la problemática como los objetivos y algunas conclusiones. Se ha hecho una categorización de las investigaciones consultadas, de acuerdo al foco de interés que atiende su estudio. Con base en la revisión de las investigaciones se pudo realizar una aproximación al problema de investigación planteado, así como también a la formulación de ciertas preguntas que conducirían nuestra investigación.

El capítulo 2 está constituido por aspectos teórico-conceptuales relativos a la conceptualización del pensamiento variacional. Se presentan algunas miradas convergentes del pensamiento variacional que dan luces y que aportan elementos para la comprensión de este tipo de pensamiento matemático. Hemos adoptado una mirada para este pensamiento desde una perspectiva dinámica (Vasco, 2003, 2006), ya que desde esta perspectiva este pensamiento requiere de la generación de modelos mentales para detectar y establecer correlación entre variables mediante la visualización (Arcavi, 1999, 2003; Torregrosa & Quesada, 2007) como un medio de enlace para distintas representaciones, sean estas, ostensibles o no ostensibles (Duval, 1999). La mirada adoptada para el pensamiento variacional nos proporciona elementos para analizar el pensamiento emergente en los estudiantes de cálculo inicial.

Finaliza el capítulo con los planteamientos metodológicos indispensables para la comprensión del objetivo general propuesto en la investigación, del cual se desprenden las preguntas de investigación y los objetivos de la investigación que dirigen este trabajo.

El capítulo 3 contiene un recorrido histórico-epistemológico del cálculo desde la matemática griega hasta la época contemporánea, relevando hechos, sucesos, matemáticos que destacaron en cada época y cuyos trabajos trascendieron y han significado un aporte valioso en la construcción del análisis matemático. Este capítulo se focaliza en las producciones matemáticas a la luz del pensamiento variacional, ya que este aspecto ha dado luces para la comprensión de las necesidades y motivaciones de los matemáticos en los diferentes períodos históricos y la importancia de que ha gozado este pensamiento matemático a lo largo de la historia.

En el capítulo 4 se presentan la descripción de los diferentes instrumentos (pruebas escritas, sesiones de estudio, prueba evaluativa) que utilizó el profesor a lo largo del curso de Cálculo inicial en los diferentes momentos del semestre, convirtiéndose estas producciones estudiantiles en uno de los sustratos del cual se nutre esta investigación.

En el capítulo 5, se presentan los resultados cualitativos del análisis de los instrumentos aplicados a los estudiantes que participaron en la investigación. Los resultados fueron analizados con las herramientas provistas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) en un primer nivel de análisis (configuración cognitiva). Se caracterizó el pensamiento variacional emergente en las producciones estudiantiles.

Finaliza esta investigación con el capítulo 6 referido a las conclusiones obtenidas después del proceso de investigación. Se plantean en consonancia con las respuestas a las preguntas de investigación planteadas en el capítulo.

Para ello, además, se describe en qué medida se lograron los objetivos específicos planteados.

CAPÍTULO 1

Antecedentes y Área Problemática

1.1. INTRODUCCIÓN

El pensamiento es un aspecto fundamental de la cognición humana y el tratar de comprenderlo ha sido abordado desde diferentes áreas, psicología, neurociencias, pedagogía, didáctica, entre otros. ¿Es relevante y pertinente para el campo de la investigación comprender qué es el pensamiento? ¿Hay redes que lo estructuran? ¿En qué aspectos se evidencia cuando un ser humano está pensando? Estas y otras preguntas se podrían realizar para lograr el intento por comprender diferentes aspectos del pensamiento humano.

El pensamiento se ha clasificado atendiendo a diferentes perspectivas o miradas que tratan de definirlo, comprenderlo, categorizarlo, etc. Se habla de pensamiento complejo, pensamiento divergente, pensamiento en paralelo, pensamiento matemático, pensamiento numérico, pensamiento algebraico, pensamiento matemático

avanzado, etc.

Uno de los intereses de este trabajo de investigación es intentar comprender cómo se estructura y cómo se desarrolla el pensamiento, en particular el pensamiento matemático; cuáles son los elementos indicativos de su génesis, potenciación y evolución. En lo específico, nos interesa conocer algunas de las clasificaciones del pensamiento matemático al interior de la Educación

Matemática, y en particular el pensamiento variacional que desde una de las perspectivas teóricas consideradas en este trabajo sirve como eslabón de articulación con los otros pensamientos matemáticos, ya que la variación y el cambio están presentes en todas las ramas o áreas de la matemática.

Para abrir el tema que nos interesa en este estudio presentamos tres apartados. Primero, uno referente al pensamiento matemático, un segundo apartado referido al pensamiento matemático avanzado, y, por último, un tercero dedicado a aspectos relativos al pensamiento variacional, tema central de esta investigación. Los antecedentes expuestos nos permiten tener en mente distintas perspectivas relacionadas con el pensamiento variacional, investigaciones y trabajos que se han venido realizando en esta área, temas abiertos y sus proyecciones.

1.2. PENSAMIENTO MATEMÁTICO (JEAN PIAGET, POLYA, SCHOENFELD, MIGUEL DE GUZMÁN, CANTORAL)

Desde un punto de vista psicológico, el pensamiento es una actividad intelectual producto de procesos racionales del intelecto que se ejecuta en la mente producto de ciertos estímulos y/o operaciones vinculadas a la actividad intelectual, tales como el análisis, la generalización, la comparación, y la abstracción, de acuerdo a exigencias y/o necesidades del individuo en diferentes momentos, y que se exterioriza mediante el lenguaje. El pensamiento matemático es la sistematización y reflexión de todos los actos vinculados al conocimiento matemático. Para comprender el pensamiento matemático recurrimos a ciertas posturas teóricas que describen algunos aspectos del mismo.

Para Piaget (Piaget & Cevasco, 1978; Piaget & Inhelder, 1975) el pensamiento matemático está presente en la vida cotidiana del niño, puesto que cuenta con un entorno de mucha riqueza por descubrir, y utilizar en su desarrollo mental. Piaget en su teoría constructivista plantea que el desarrollo mental de un niño pasa por una serie de estadios: una primera etapa de inteligencia sensorio motriz, una segunda de pensamiento pre operacional, una tercera de operaciones intelectuales concretas, y una cuarta de operaciones formales o abstractas. La visión constructivista del desarrollo cognitivo de Piaget se fundamenta en una visión genética ideal del desarrollo humano, tanto en lo físico como en lo mental, esto último involucra su pensamiento. Piaget sostiene que para lograr el desarrollo de cada etapa es necesario tener conflictos internos en su pensamiento, luego superarlos y asimilarlos y acomodarlos en estructuras cognitivas.

Polya (1945) en su libro *How to Solve it*, también desde una mirada constructivista, enfatiza la resolución de problemas como una metodología que permite que el pensamiento matemático se construya y fortalezca mediante situaciones problemas, y propone un camino para hacerlo, un tránsito que incluye cuatro etapas:

> *Comprender un problema, elaborar un plan, poner en ejecución el plan y resolver el problema, proponiendo finalmente una verificación de la resolución del problema desde una mirada retrospectiva.*

Por su parte, Schoenfeld (1987) hace hincapié en el rol docente de centrar la actividad matemática del aula en tareas que respondan a las preguntas ¿Qué pensar? ¿Cómo pensar? ¿Por qué pensar? ¿Para qué pensar?

Guzmán (1994) argumenta la importancia del estudio y análisis del pensamiento matemático y lo expresa en los siguientes términos:

> *El pensamiento matemático representa hoy día un componente muy influyente en prácticamente cada uno de los aspectos de la cultura humana, pero su espíritu va a ejercer en un futuro próximo un impacto aún más importante*.

Cantoral (2000) se refiere al pensamiento matemático en los siguientes términos:

> *una función cognitiva superior que caracteriza al modo de pensar de los sujetos que se dedican profesionalmente a las matemáticas, y los que investigan el pensamiento matemático dirigen su mirada a comprender como entienden las personas un contenido particular de matemáticas, de modo de caracterizar rasgos que distingan la comprensión de conceptos y de procesos.*

Por último, se cita a Mason, Burton, & Stacey (1982), cuyo libro "Thinking Mathematically" es un referente en lo que a pensamiento matemático se refiere. Los autores de la obra sostienen que explorar cuestionar, trabajar de manera sistemática, visualizar, conjeturar, explicar, generalizar, justificar, probar son actividades centrales del pensamiento matemático.

Por la literatura revisada, se aprecia que el pensamiento matemático es un elemento esencial que fomenta e impulsa el desarrollo de la imaginación y la creatividad, además del razonamiento lógico, y que se fortalece y se desarrolla por el uso de ciertas capacidades tales como: *pensar, razonar, argumentar, comunicar, modelar, representar, usar el lenguaje simbólico, plantear y resolver problemas.*

Todos los investigadores señalados anteriormente y otros más (Bruner & Linaza, 1984; Ferreras, 2003; León, 2006) han argumentado la importancia de intentar comprender la cognición humana y todos los aspectos vinculados a ésta. Evidencia de ello, lo constituye el aumento de los estudios relativos al pensamiento matemático (Guzmán, 2006; Cantoral, 2000; Villareal, 2000).

La cognición y el pensamiento matemático se consolidan como una línea de investigación en diferentes programas de postgrado tanto en Educación Matemática como en psicología, tales como CINVESTAV, Universidad de

Salamanca, Universidad de Granada, entre otros. También las producciones presentadas en Congresos, revistas científicas y la conformación de nuevos grupos de investigación en el área (Cubero, Rubio, & Barragán, 2005; Radford, 2006; Radford & André, 2009; Witt, 2010) dan cuenta de la importancia del estudio de esta temática.

1.2.1. Pensamiento Matemático Avanzado (PMA)

Es una línea de investigación en Educación Matemática que se orienta al estudio de habilidades cognitivas de orden superior tales como la abstracción y la generalización en diferentes contenidos y contextos matemáticos donde se requieran su uso, tal es el caso del análisis matemático donde además se requiere de otros procesos cognitivos como definir, analizar y formalizar (Azcárate, 1998; Cantoral, 2000; Gómez, 2009).

El PMA atiende procesos cognitivos de mayor exigencia respecto a otras áreas de menor exigencia dentro de la matemática (Giménez & Machín, 2003; Hitt, 2003; Tall, 2002), de allí se deriva la distinción de pensamiento matemático avanzado de pensamiento elemental.

Uno de los antecedentes de esta línea de investigación en Educación Matemática se remonta a 1985 al interior de *Psychology of Mathematics Education* (PME) con la formación de un grupo cuyo objetivo fue precisar y delimitar los aspectos relacionados con el pensamiento matemático avanzado, los procesos cognitivos requeridos para el estudio del cálculo infinitesimal.

Las problemáticas iniciales de este grupo se focalizaron en las dificultades de la enseñanza del Cálculo. Desde la constitución del grupo de enseñanza de la matemática, diferentes estudios se han realizado para atender temáticas centradas en el análisis matemático. En efecto, una revisión de carácter general de las investigaciones a partir de 1985 muestra importantes investigaciones centradas en la didáctica del análisis (Artigue, 1995, 1998; Dreyfus, 1990, Dreyfus & Eisenberg 1996; Cantoral, Cordero, Farfán, & Imaz, 1990; Tall, 1991; Tall & Vinner, 1981; Sierpinska, 1985, 1987) que se han enfocado en la consideración del estatus de los conceptos matemáticos: *número, infinito, límite, función, derivada, e integral como entidades con naturaleza propia, y medulares en la comprensión del análisis matemático.*

Algunas de las siguientes investigaciones, realizadas por los investigadores anteriormente citados, nos muestran el énfasis puesto en el estudio del análisis matemático durante las primeras décadas de la conformación de grupos de investigación para el estudio del pensamiento matemático avanzado. Los trabajos en su mayoría se orientan en tres grandes vertientes: la dicotomía entre imagen del concepto-definición y del concepto, la dialéctica entre proceso y objeto y, los obstáculos epistemológicos.

Tall (1980) presenta resultados de una investigación con estudiantes universitarios para comprender la problemática que relaciona el límite y el infinito. Tall se detiene en la construcción de los conceptos de infinito potencial y de infinito actual entendiéndose éstos como la posibilidad de ir más lejos, es decir continuación indefinida y, como la toma de conciencia simultánea de todos los elementos de un conjunto, respectivamente. Este proceso de comprensión de los infinitos manifiesta conflictos cognitivos.

Para Tall la maduración de estos procesos de configuración de la noción de infinito es individual, sin embargo, el docente debe evocar paulatinamente al acercamiento entre dos nociones de infinito, una noción primaria, que el estudiantado evoca desde su contexto cultural y otra noción secundaria, promovida por la escuela, de modo que puedan conducir a las nociones de éstos.

Desde esta doble perspectiva que presenta Tall el concepto de infinito no precisa ser globalmente coherente y puede presentar conflictos en los estudiantes que sólo serán percibidos si se evocan simultáneamente.

Un avance significativo para la distinción de procesos ligados a la comprensión de objetos matemáticos lo constituyen dos distinciones para referirse a un objeto matemático, *"Concept Image" y "Concept Definition".*

(Tall & Vinner, 1981) el primero referido a toda la estructura cognitiva en la mente de una persona asociada a un concepto dado; es decir todas las figuras mentales que pueden ser representaciones visuales, impresiones o experiencias asociadas al concepto) propiedades y procesos asociados, conscientes o inconscientes, y, el segundo, a una definición verbal para especificar un concepto. Estas distinciones fueron utilizadas en sus investigaciones con diferentes objetos matemáticos, tales como funciones, límites, derivadas, etc.

Por otro lado, esfuerzos por comprender aspectos ligados a la comprensión de objetos matemáticos, Sierpinska (1985) desarrolló con estudiantes de nivel medio y universitario en Canadá, investigaciones en cálculo. Entre sus resultados ella encuentra obstáculos que presentaron sus estudiantes en una tarea relacionada con el límite matemático. Estos obstáculos fueron categorizados. Una primera categoría de obstáculos que denominó *"Horror Infiniti"* clasifica los aspectos relativos al concepto del infinito en sí, el problema del paso al límite donde se rechaza el estatus de operación matemática.

En esta categoría, además están los obstáculos referidos a razonamientos con falta de rigor, excesivo rigor o falso rigor, como la inducción incompleta, obstáculos de tipo algebraico, uso de los mismos métodos para cantidades finitas como para cantidades infinitas, la transferencia de propiedades de los términos de una sucesión convergente a su límite y el obstáculo que asocia el paso al límite con un movimiento físico o aproximación indefinida. En un segundo grupo, están los obstáculos relativos al concepto de función, en un tercer grupo están los obstáculos relativos a la concepción geométrica de la noción de límite. En cuarto lugar, se refiere a obstáculos lógicos, en particular al uso adecuado de los cuantificadores, que a juicio de Sierpinska (1985), no surge como una necesidad natural para resolver los problemas propuestos. Por último, plantea el obstáculo referido al símbolo de la operación de paso al límite. Dubinsk. Desde esta mirada, los números, variables, funciones, límite, derivada, anti derivada etc. pueden considerarse como objetos. En esta perspectiva, los procesos se componen de operaciones sobre los objetos; ellos, transforman los objetos y las estructuras pueden o no preservarse bajo las transformaciones.

Otra de las orientación de las investigaciones del análisis matemático fue el obstáculo epistemológico introducido por Bachelard (Bachelard, 1981; Brousseau, 2007) al estudio de la didáctica de las matemáticas, y se refiere a los obstáculos que tiene un concepto por sí mismo para ser aprendido; por ejemplo, un estudiante posee cierto conocimiento para atender un problema, pero que es insuficiente para resolver otro tipo de problema, entonces en ese momento el conocimiento anclado en el estudiante se vuelve un obstáculo epistemológico. A manera de ejemplo, un estudiante que ha abordado temas en una faceta algebraica, principalmente las ecuaciones y se le solicita que interprete la definición formal del límite matemático.

Siempre en la línea de la didáctica del análisis matemático, Cornu (1983, 1986, 1991) reportan obstáculos epistemológicos que no provienen estrictamente de la noción de límite matemático pero que están relacionados, tal es caso de la idea de que una suma infinita debe ser infinita, que toda convergencia es monótona y otras ideas creadas por las concepciones espontáneas o por el empleo coloquial de la palabra ‘límite’ (generalmente como algo que no se puede alcanzar, aproximación sin sobrepasar, o simplemente quedarse alejado o, incluso, semejanza sin ninguna idea de variación, como en la afirmación 'este azul tiende a violeta').

Cornu, afirma que la noción de límite fue introducida en la comunidad matemática para resolver tres tipos de problemas:

a) Geométricos (cálculo de áreas con método de exhaución, por ejemplo),
b) Convergencia de series; y
c) *Diferenciación o razones de cambios del orden de cero (relación entre dos cantidades que simultáneamente tienden a cero).*

Este investigador identifica, en relación a estos problemas, cuatro grandes obstáculos epistemológicos:

a) La falta de vínculo entre el aspecto geométrico y el numérico (haciendo especial referencia a problemas clásicos de la matemática griega),
b) La noción de las cantidades infinitamente pequeñas o infinitamente grandes,
c) Los aspectos metafísicos de la noción de límite vinculados con los del infinito,
d) El debate sobre si el límite es o no alcanzado.

Artigue (1998) hace una sistematización de los estudios didácticos referidos al análisis y, se refiere a distintos tipos o categorías de dificultades, un primer tipo denominado *"dificultades vinculadas al campo conceptual del cálculo"*, se refiere a la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo, la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y su tratamiento en la enseñanza y, a la ruptura álgebra / cálculo.

Esta categoría conceptual incluye además subcategorías:

> *Dificultades para los campos de números reales, funciones, identificar lo que realmente es una función, dificultades para el reconocimiento que las sucesiones son funciones, dificultades para identificar la dicotomía de proceso y de objeto en una función, dificultades en el uso de diferentes registros de representación semiótica, dificultades para lograr trascender del registro numérico y algebraico a otros registros.*

Un segundo tipo corresponde a dificultades con el límite matemático y a los aspectos que subyacen alrededor del mismo y que fueron enunciados por Sierpinska (1988), Cornu (1983,1985), Tall & Vinner (1981**)** y otros. Un tercer grupo de dificultades que propone Artigue es la que está vinculada con la ruptura del pensamiento algebraico con el pensamiento analítico tal como propone Legrand (1993) propone desarrollar estrategias para desarrollar el paso de igualdades a desigualdades, temáticas propias del cálculo inicial en el caso del límite matemático. Otra perspectiva teórica difundida en el estudio del análisis matemático es la teoría APOE. J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schmwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. en 1996. Este enfoque teórico, en inglés APOS, acrónimo de *Actions, Processes, Objects and Schemas* describe la construcción de cualquier conocimiento matemático en tres etapas fundamentales:

> Acción: "*Una acción es una transformación de un objeto, el cual es percibido por el individuo, hasta cierto punto, como algo externo"*
>
> *(Asiala, et al., 1996); es decir, cuando es una reacción a estímulos, "los cuales pueden ser físicos o mentales. Una acción puede consistir en una simple respuesta o en una secuencia de respuestas. En cada caso el efecto es transformar en forma física o mental uno o varios objetos" (Dubinsky, 1997, pág. 96).*
>
> Proceso: *"Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción*

interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo... En contraste con una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control, en lugar de algo que se hace como respuesta a señales externas" (Dubinsky, 1996).

"Nos referimos a la construcción de un proceso desde una acción como una interiorización. Una vez que un individuo tiene construido un proceso, varias cosas son posibles. Por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados para obtener un nuevo proceso" (Dubinsky, 1997, pág. 96).

Objeto: *"Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. En el curso de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo con el fin de usar sus propiedades al manipularlo" (Dubinsky, 1996, pág.96).*

Esquema: *"un esquema para una parte específica de las matemáticas se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas. Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo.*

De acuerdo a los autores anteriormente citados, se pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. Ante una misma situación diferentes estudiantes utilizan los mismos conceptos y diferentes relaciones entre ellos. El tipo de relaciones que cada sujeto establece entre los conceptos que utiliza, así como el tipo de construcción del concepto que muestra, dependen de su conocimiento matemático.

A través de las acciones, procesos, objetos y esquemas la construcción del conocimiento matemático se lleva a cabo. "Las acciones son transformaciones de objetos que se efectúan como respuesta a un estímulo que es percibido por el individuo como algo hasta cierto punto externo. Una acción es interiorizada en un proceso en el cual la transformación es controlada de forma consciente por el individuo… El proceso es encapsulado en un objeto a través de acciones repetitivas y una reflexión sobre él" (Dubinsky, 1997, pág. 98).

En resumen "las acciones son construidas por respuestas repetitivas a un estímulo; los procesos son construidos ya sea al interiorizar acciones o al transformar procesos existentes; los objetos son construidos al encapsular los procesos; y, en la desencapsulación de un objeto, los únicos procesos que un individuo puede obtener son los procesos que fueron encapsulados para construir este objeto" (Dubinsky, 1997).

Los investigadores anteriormente mencionados proponen para el límite matemático desde su perspectiva teórica un esquema formado por dos procesos coordinados (cuando $x \to a, f(x) \to L$) se reconstruye para obtener el proceso si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Éste, que es a su vez un proceso mental consistente en ir de la hipótesis a la tesis, es encapsulado en un objeto que permite construir un esquema en un segundo nivel (para todo ε positivo, existe un δ positivo tal que si $0 < |x - a| < \delta$

entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$). Esta breve descripción de lo que los autores denominan *"descomposición genética"* del concepto de límite explica la manera en que lo conceptualizan, como un proceso dinámico, diferenciándose en este sentido de la concepción tradicional. En esta investigación se plantea que uno de los grandes obstáculos en el aprendizaje del concepto es la consideración de que el límite no se alcanza nunca, ya que es visto como un proceso de aproximación (aquí subyace la noción de infinito potencial) y no como un objeto en sí mismo. Esto último para los investigadores significa poder seguir aproximándose tan cerca del punto como fuese posible y no lograr dar el paso de capturar el límite.

Las investigaciones anteriores nos abren una ventana y nos brindan una perspectiva general de la preocupación de las investigaciones del pensamiento matemático avanzado en sus primeras décadas del estudio intencionado del cálculo infinitesimal. En el siguiente apartado presentamos algunos elementos y antecedentes del pensamiento variacional desde una perspectiva de una línea emergente en Educación Matemática.

1.3. PENSAMIENTO VARIACIONAL

El Pensamiento Variacional, constituye una línea de investigación en Educación Matemática que tiene su génesis en el análisis y reflexión de los trabajos de cálculo infinitesimal de Newton, Leibnitz y de sus antecesores en los que el cambio se consideró un punto medular en aras de responder a diferentes necesidades de la época, de brindar solución a problemas de movimiento que relacionaban aritmética, geometría y mecánica, entre otras áreas. (Caballero & Cantoral, 2013; Castaño, García, Luján, Medina, & Ruíz, 2008; Marmolejo, 2014; Mendoza, 2013).

Las tendencias actuales en Educación Matemática adjudican importancia y dedican especial atención a la perspectiva histórica-epistemológica (Anacona, 2003; Godino, 2003, 2010) como un medio de comprensión de los distintos procesos que gestaron el nacimiento y desarrollo de diferentes nociones y objetos matemáticos, ya que la matemática es una producción humana situada en una época y contexto determinados, además influida por las culturas. Algunas obras que se refieren al desarrollo histórico-epistemológico del cálculo (Bagni, 2005; Ferrante, 2009; Molfino, 2010), exponen que hubo mezcla de ideas estáticas y dinámicas para conceptualizar algunos objetos matemáticos.

En la primera etapa del desarrollo del cálculo, la idea de límite aparece a través de la exhaución en un solo contexto, el geométrico; sin embargo, las ideas que utilizan tanto Newton como Leibnitz, germinaron a partir de fenómenos en contextos físicos, geométricos y, en alguna medida algebraicos, siendo las ideas dinámicas las verdaderas gestoras de los trabajos de los padres del cálculo.

En este sentido la variación y el cambio han sido aspectos explicativos de muchos fenómenos naturales, cotidianos en diferentes situaciones. Un gran desafío actual es encontrar maneras de utilizar este conocimiento acumulado, en distintos espacios de enseñanza.

La Educación Matemática lo ha abordado desde la comprensión de la cognición humana, de cómo el individuo logra desarrollar competencias, habilidades de pensamiento matemático de manera significativa, para que puedan ser puestos en escena al resolver problemas y obtener logros significativos en los aprendizajes.

El pensamiento variacional, se orienta a desarrollar habilidades de orden superior, partiendo de diferentes situaciones, sean estas cercanas o no al sujeto, bajo la premisa que el cambio y la variación se encuentran presentes en la mayoría de los procesos, fenómenos y situaciones que ocurren a nuestro alrededor sin importar el contexto en que nos situemos.

Una de las perspectivas del Pensamiento Variacional (Vasco, 2003), señala que "El objeto del pensamiento variacional es la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente –pero no exclusivamente– las variaciones en el tiempo. Una manera equivalente de formular su propósito rector es pues tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad".

Si, en coherencia con esta concepción del pensamiento variacional, nos situamos en contextos cercanos a los estudiantes, en los cuales puedan investigar sobre los procesos de cambio que viven a diario, éstos podrán poner en evidencia sus concepciones pre matemáticas y, a través de un currículum adecuado, conducirlos a un aprendizaje más significativo de los conceptos matemáticos que el sistema educativo busca entregar, sistematizar y formalizar.

En este punto y, desde una perspectiva que trasciende el pensamiento variacional, afirmamos que la matemática no se comienza a aprender en la sala de clases. Esta afirmación es coherente con la descripción que Cantoral (Cantoral, 2000) hace del pensamiento matemático:

> *"Por un lado se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otra, se entiende al pensamiento matemático como una parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; finalmente, una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas."*

Desde ésta perspectiva, se convierte en una necesidad didáctica, conocer las pre concepciones y experiencias pre matemáticas que los estudiantes traen cuando llegan a la sala de clases. Conocer estas preconcepciones, forma, entonces, parte del quehacer docente, pero también del quehacer del investigador en didáctica de la matemática , tal como afirma Godino (2011), comentando la posición de ciertos autores (Wittman, 1995; Hjalmarson & Lesh, 2008; Lesh & Sriraman, 2005), acerca del enfoque de la Didáctica de las Matemáticas como una “ciencia de diseño”.

Adhiriendo a esta última posición y considerando la falta de propuestas explícitas para enfrentar el problema del aprendizaje y enseñanza del fenómeno del cambio y la variación, particularmente con el fin de aportar al surgimiento de una propuesta de enseñanza del cálculo en el nivel inicial de la educación superior, nos interesa poner en evidencia las manifestaciones que, a pesar de un sistema educativo que no ha puesto atención en el particular, hayan podido desarrollar los estudiantes que llegan a este estadio en su proceso educativo.

1.4. INVESTIGACIONES EN TORNO AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO VARIACIONAL

A continuación, presentamos algunos resultados de investigaciones que nos pondrán en perspectiva las líneas de interés de este pensamiento, y las respectivas producciones científicas. Estas investigaciones indagan respecto al pensamiento variacional en el nivel medio y en el nivel universitario. Se ha categorizado las investigaciones revisadas relativas al pensamiento variacional atendiendo a su foco de interés.

Estas se orientan al análisis de la presentación del discurso escolar en los textos, diseño de estrategias variacionales, formación de profesores con ideas variacionales, estrategias empleadas respecto a la variación, uso de la tecnología para el desarrollo de pensamiento variacional y, aspectos histórico-epistemológicos de la variación.

1.4.1. Investigaciones relativas al discurso escolar de la variación

González (1999) y Salinas (2003) analizan algunas fuentes bibliográficas respecto a la presentación de la variación en algunos libros de texto utilizados en los primeros cursos de cálculo. Sus aportes radican en su reflexión sobre diferentes situaciones que implican cambio e incorporan a la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje variacional (Pylvar) estrategia variacional y situación variacional que posteriormente se convertiría en base para posteriores trabajos.

Salinas (2003) propone una caracterización para estrategias variacionales. Esta, a su vez se compone de:

a) Comparación *que consiste en obtener diferencias entre dos estados sucesivos,*
b) Seriación *que se refiere a buscar relaciones y diferencias entre dos estados sucesivos,*
c) Estimación *que analiza los estados previos y con base en ello se propone nuevos estados y comportamientos a corto plazo, y*
d) Predicción *es la capacidad de poder estimar un nuevo estado después del análisis de diferentes estados previos.*

Salinas sostiene la importancia de generación de estrategias variacionales para generar pensamiento variacional.

Reséndiz (2006) realiza una investigación con tres profesores (dos matemáticos y un físico) de una universidad mexicana con el objetivo de analizar el discurso escolar que transmitían los maestros respecto a la variación, y para ello, consideraron las funciones y las derivadas, puesto que consideró que ambos contenidos son pertinentes al tema variacional.

Después de analizar el discurso que utilizaban los profesores en sus clases, obtuvo resultados respecto al uso específico de la variación como una herramienta para sus clases. En este sentido, la variación fue concebida como un medio empleado en la tabulación numérica de distintos valores como una herramienta para construir gráficos y ver la variación desde un punto referencial, desde situaciones cotidianas mediante expresiones verbales, mediante el empleo de parámetros para hacer referencia a variables principales, y en ciertos casos la derivada se consideró como la covariación o la comparación entre dos magnitudes a y b.

Para la investigadora, la variación desde el discurso escolar que emplean los docentes en su práctica, se basa en cinco modelos: *numérico, geométrico, algebraico, comparación y de lenguaje natural.* Reséndiz (2006) sostiene que la variación no es objeto que necesariamente se explicita en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, pero sí forma parte del empleo a que algunos docentes recurren para referirse a alguna situación en particular, tal es el caso del crecimiento y decrecimiento de las funciones.

La investigadora considera el rol que debería jugar el discurso del profesor para instituir y fortalecer la variación como un eje medular en los cursos de análisis matemático y en los posteriores. Para ello la investigadora propone que el docente incorpore en su epistemología otros tipos de actividades y no enfatice únicamente en el currículo tradicional. Además, ella considera que proponer otras situaciones creadas en diferentes contextos y con dosis de creatividad, le permitirá al estudiante explorar y desarrollar nuevas ideas, habilidades y visiones de la variación.

En la profundización de la importancia del discurso de los profesores en el tema de la variación, Reséndiz (2010) realizó un estudio etnográfico con tres profesores durante un semestre para analizar el desarrollo de la clase de cálculo respecto a la variación en temas de funciones y derivadas.

El objetivo principal de su investigación fue analizar cómo se introduce el concepto de variación en un curso de matemática superior. Dada la complejidad del tema, la investigadora analizó distintas y complejas interacciones entre profesor, estudiante y contenido curricular.

Entre los resultados de su investigación figura la variación desde una perspectiva de uso en distintos contextos y modelos (Reséndiz, 2003, 2006). Ella hizo énfasis en la variación numérica en un registro tabular y el concepto de función fue utilizado desde sus distintas representaciones.

Otro de sus hallazgos en la investigación, fue el tipo de interacción compleja y multidireccional docente, estudiante, saber. La investigadora llamó *"acuerdos sociales"* al medio que permite el aceptar o no, las visiones, conocimientos, ideas, perspectivas relativas a una temática, la variación en este caso. Esta construcción en el aula se realizó por el discurso, tanto de estudiantes como profesores y la naturaleza especifica del saber en juego.

1.4.2. Investigaciones referidas al diseño de estrategias variacionales

González (1999) realizó una investigación con profesores que impartían clases a bachillerato y que abordaban el tema de derivada en sus clases. En una de las actividades propuestas a los docentes les solicitó que a partir de una gráfica de una función f(x) decidieran el signo de la primera, segunda y tercera derivada.

Los profesores lograron responder para la primera y segunda derivada anclados en los conceptos teóricos de pendiente y concavidad, pero para la tercera derivada no respondieron de manera adecuada y presentaron dificultades. El investigador sostiene que estos conocimientos teóricos de primera y segunda derivada fueron extrapolados hasta la tercera derivada. Si por el contrario ellos hubiesen desarrollado un pensamiento de tipo variacional recurrirían a la variación como una estrategia de decisión para el signo de la tercera derivada.

Por su parte, Aparicio (2003) desarrolló una investigación con ocho estudiantes de ingeniería de una universidad mexicana; propusieron una secuencia de actividades que combinó pizarra, papel y computadora con el uso de un software de geometría dinámica. El objetivo de la investigación fue caracterizar las producciones estudiantiles y, a la luz de éstas, realizar distintas mediaciones con el software geométrico que pudiesen permitir un acercamiento y posibles resignificaciones a la noción de continuidad y discontinuidad en un punto.

La investigación aportó significativamente a la comprensión de continuidad de la función en un punto porque le permitió al estudiante realizar interacciones, utilizar el software dinámico, desarrollar estrategias de visualización. Entre los hallazgos de la investigación, el autor sostiene que el diseño de secuencias de actividades se deben considerar muchos aspectos: el contexto y si es el adecuado, lo epistemológico, que variables pueden influir en lo cognitivo del estudiante, etc.

Vrancken, Engler, Gregorini, Müller, Hecklein, & Henzenn (2008). Realizaron una investigación a 72 universitarios de Argentina en un curso de cálculo. Las investigadoras proponen diez reactivos diseñados en diferentes registros, geométricos, algebraicos, gráfico las cuales les solicitan ciertas consignas específicas que responder y todas ellas orientadas a la variación, en contextos de funciones y derivadas. La investigación fue desarrollada en un ambiente colaborativo, interacción y reflexión; además, representó un desafío para desarrollar habilidades tales como conjeturar, analizar, representar, discriminar, sintetizar, visualizar. Los objetivos de la investigación propuesta fueron desarrollar habilidades relacionadas con las variables, las funciones y la variación, además, de las dificultades y los errores más frecuentes que los estudiantes muestran al enfrentarse a diferentes situaciones relacionadas con el Cálculo.

Las investigadoras sostienen que Las nociones de variable, función y derivada tienen su génesis y consolidación, en la comprensión que implica los procesos de cambio, sustantivos para el desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional. La poca o escasa comprensión de procesos de cambio tendrá incidencia en las concepciones que se logren relativas al cálculo. Este desarrollo no se logra de manera instantánea, es necesaria una preparación adecuada.

1.4.3. Investigaciones concernientes a la formación de profesores con ideas variacionales

Engler, Vrancken, & Müller (2011) realizaron una investigación con siete profesores argentinos en una modalidad mixta (virtual, presencial) con el propósito de analizar las ideas que tienen los profesores, respecto a la variación y el cambio. La investigación se realizó en el marco de un curso de cálculo diferencial a través de un enfoque intuitivo, en el cual se compartieron las producciones de los diferentes participantes, luego se discutieron y en un espacio de diálogo se consolidaron las ideas de variación y cambio que surgieron en las actividades

En una primera actividad de la investigación se indagó en los profesores algunos de sus concepciones relativas: magnitud, variable e intervalo. En este sentido se les preguntó a los profesores lo siguiente: ¿En qué piensa usted cuando escucha, lee o utiliza en la vida cotidiana, magnitud, variable, intervalo? ¿Cómo expresaría usted el significado de magnitud, variable e intervalo en palabras ante sus estudiantes?, se les sugirió a los docentes utilizar distintas representaciones en caso de considerarlo apropiado. Por su parte, en la segunda actividad indagó ideas relacionadas con la diferencia y con la razón. En este sentido se les solicitó responder a las siguientes interrogantes: ¿En qué piensa usted cuando escucha, lee o utiliza en la vida cotidiana el concepto de diferencia y el de razón?, ¿Cómo explicaría a sus estudiantes el significado de diferencia, razón? Puede utilizar distintas representaciones si lo tiene a bien.

Los resultados obtenidos en la investigación evidenciaron que un gran número de profesores posee concepciones no aceptables en lo relativo a la variación y el cambio, y otros profesores en menor porcentaje manifestaron concepciones erróneas de la variación y el cambio. Las investigadoras expresaron la importancia de lo que antecede a la formación de ideas variacionales, planteándose cuestionamientos respecto a ¿cómo se construye cada noción?, ¿qué procesos favorecen su construcción?, ¿qué actividades son apropiadas para desarrollar esta noción?

Los resultados de la investigación realizada por Engler et.al (2011) dirigida a los docentes pusieron de relieve la necesidad de desarrollar nociones a partir de situaciones cotidianas, significativas y que tengan un sentido de pertenencia al sujeto, complementándose con otras situaciones matemáticas que contribuyan a desarrollar habilidades cognitivas, de modo que ambas perspectivas puedan combinarse y contribuir al desarrollo de pensamiento variacional.

Cabrera (2009), Cabrera & Cantoral (2011) en el marco de la reforma curricular en México desarrollaron una investigación relativa a la formación socio epistemológica del profesorado de media superior mexicano, en su investigación indaga respecto a las habilidades, competencias, conocimientos, metodología de enseñanza que profesor de educación media posee. En su indagación encontró dificultades, falencias en muchos aspectos, la variación, uno de ellos.

Producto de sus investigaciones y de otras más, Cabrera (2009) propone al Pensamiento y Lenguaje Variacional (Plyvar) como una estrategia para la formación de profesores de matemática del nivel medio y medio superior, ya que investigaciones relativas a la formación docente en México, han recomendado a diferentes entidades educativas, una perspectiva teórica que atienda diferentes planos: cognitivo, epistemológico, didáctico, considerando la práctica de los sujetos.

1.4.4. Investigaciones orientadas a distintas estrategias para el desarrollo de la variación

Cantoral, Sánchez, & Molina (2005) realizan investigación con profesores respecto a tareas escolares con el objetivo de analizar las estrategias de predicción que emergían de las producciones docentes. Una de las actividades del taller estuvo conformado por tres tablas numéricas, y se les solicitó a los participantes que determinaran cual tabla correspondía a una función lineal, a una cuadrática y a una cúbica. Una vez determinada las relaciones correspondientes se les solicitó que encontraran una expresión algebraica para cada situación. La siguiente figura da cuenta de las tablas proporcionadas.

Tabla 1.1. Valores de x e y correspondientes a tres situaciones a, b, c

X	Y
-3	-78
-2	-57-75
-1	-40.5
0	-26.25
1	-15
2	-6.75
3	-1.5

X	Y
-3	624
-2	404.25
-1	243
0	131.25
1	60
2	20.25
3	3

X	Y
-3	-29.25
-2	96
-1	221.25
0	346.5
1	471.75
2	597
3	722.25

Los investigadores indagaron respecto a las estrategias que los profesores utilizaron en el desarrollo de la consigna. La mayoría de ellos utilizaban la construcción de gráficas, y otros, utilizaron sistemas de ecuaciones. Ninguno de ellos utilizó alguna estrategia de tipo variacional respecto a los cambios de las variables de las tablas. Los profesores después de realizar sus trabajos escritos, podían apoyarse en la tecnología. La figura 1.1 da cuenta de ello.

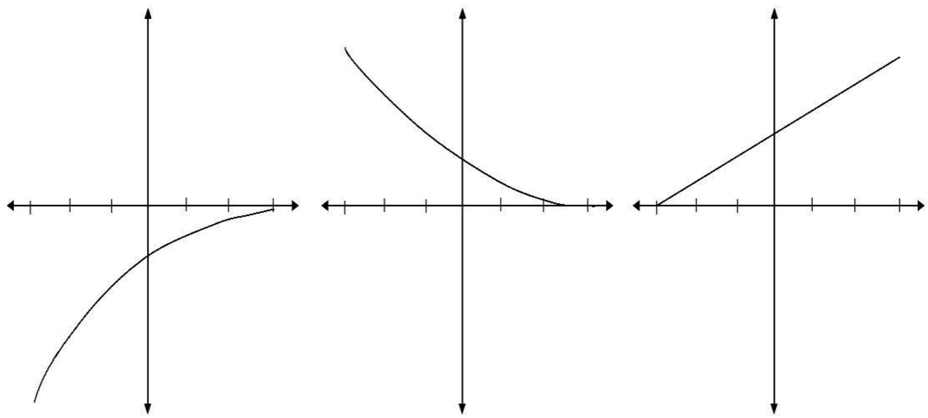


Figura 1.1. Representación gráfica propuestas para las situaciones a, b, c.

Una conjetura a priori con respecto a la naturaleza de las relaciones que establecerían los profesores fue la utilización de las diferentes variaciones de cada una de las variables como un medio plausible de identificar el tipo de relación, sin embargo, esta conjetura no se verificó en las producciones de los participantes. Se esperaba que los participantes realizaran acciones como las que ilustra la tabla.

Tabla 1.2 valores para x, y, $\triangle$y, Δy^2

x	y	Δy	Δy^2
-3	-78		
-2	-57-75	20.25	
-1	-40.5	17.25	-3
0	-26.25	14.25	-3
1	-15	11.25	-3
2	-6.75	8.25	-3
3	-1.5	5.25	-3

En esta investigación surgieron ciertas categorías o distinciones específicas de ciertos elementos pertinentes al pensamiento variacional, por ejemplo, la diferencia entre cambio y variación. En este sentido, cambio para Cantoral, Molina, & Sánchez (2005) se refiere a la modificación de un estado, de una apariencia, de un comportamiento o de la condición de un cuerpo, de un sistema u objeto, y variación es la cuantificación de ese cambio; es decir, cuánto, y cómo cambia en el sistema.

En este marco de pensamiento variacional, una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias variacionales cuando esta mediante explicaciones, maniobras o técnicas, expresa el cambio desde una doble perspectiva: *cuantitativa y cualitativa al interior del sistema u objeto en estudio.* Los investigadores consideran la predicción como pieza fundamental en la génesis de conceptos matemáticos en el área del cálculo, y la variación está ligada a la predicción, puesto que para predecir hay que cuantificar cuál es cambio, y bajo qué condiciones se da el mismo. Para los investigadores la variación es una herramienta necesaria para predecir.

1.4.5. Investigaciones empleando tecnología como medio para desarrollar la variación

Villa & Ruiz (2010) realizaron una investigación con estudiantes universitarios colombianos, utilizando el software geogebra como un medio para el diseño, visualización y de colaboración en situaciones relacionadas con la variación. La investigación tuvo entre sus objetivos específicos indagar por el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse a una interpretación variacional de la derivada.

La investigación estuvo constituida por situaciones en las que los estudiantes debieron analizar la naturaleza de la variación entre las magnitudes que intervinieron en la situación. Para enfrentar las diferentes situaciones propuestas, desarrollaron una herramienta utilizando el software geogebra. En uno de los interfaces de la herramienta que construyeron, mediante geogebra graficaron la parábola $f(x) = x^2$, luego graficaron de modo conveniente dos puntos sobre la parábola y construyeron un triángulo rectángulo de manera que este se pudiera interpretar como el cociente incremental que representa la tasa de variación en un punto (F), luego utilizaron intervalos cada vez más pequeños de modo que La figura 1.2 a y 1.2 b muestran la situación descrita

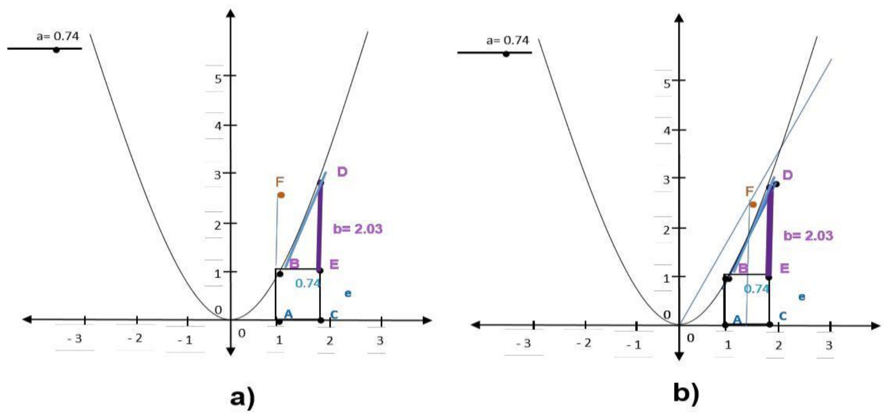


Figura 1.2. Representación dinámica de la construcción de la recta tangente

Los investigadores obtienen resultados de la derivada de una forma dinámica en el valor medio de un intervalo para una función lineal o cuadrática, esto es:

Sea I el intervalo en el cual una función f (lineal o cuadrática) $[x_1, x_2]$ está definida; sea $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, 0\right)$ entonces la derivada de la función es el lugar geométrico de todos los puntos $F\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{f(_{x_2}) - (f_{x_1})}{x_{2-x_1}}\right)$. En la figura 1.3, los investigadores muestran la relación dinámica construida.

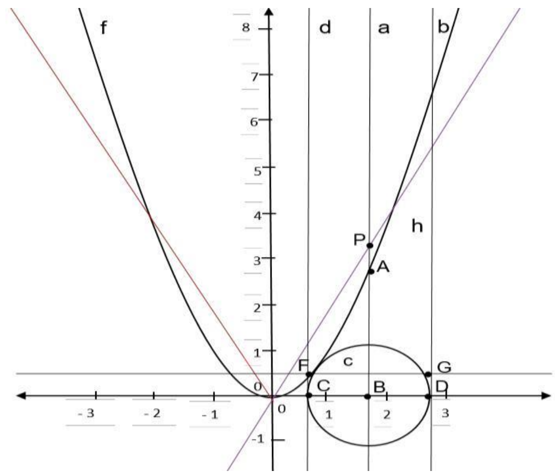


Figura 1.3. Representación gráfica y construcción de la derivada mediante geogebra, en el punto medio de [x_1, x_2]

Finalmente, utilizando argumentos visuales y realizando algunas conjeturas desarrollan una aproximación al concepto de derivada de la función tasa de variación. En la siguiente figura se observa la construcción realizada y la relación establecida.

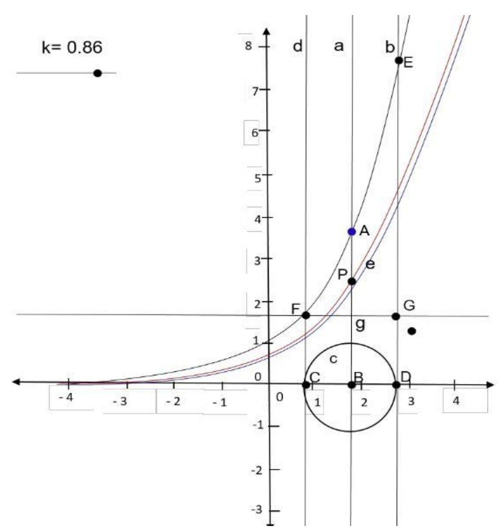


Figura 1.4 Representación gráfica y construcción de una aproximación a la derivada mediante la tasa de variación con apoyo de geogebra

Los investigadores consideran que el desarrollo de pensamiento variacional (empleando el software) fue emergiendo en distintos momentos, mediante ciertas acciones cognitivas tales como: relaciones y su naturaleza, diseño y empleo de una estrategia, construcción de herramientas, formulación de conjeturas, utilización de distintas representaciones (gráficas, algebraicas), demostración formal de conjeturas.

También Villa-Ochoa (2012) realiza una investigación apoyándose en la tecnología como un medio que potencia el desarrollo de pensamiento variacional vía visualización. La investigación se realizó mediante estudio de caso, y tuvo como objetivo explorar el nivel de evolución del razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. Una de las situaciones que se le propuso a un estudiante participante, fue diseñada con el software Cabri II, y consistió en la descripción de la variación del rectángulo inscrito en un cuadrado dado, a medida que uno de sus vértices (A), se movía de forma continua recorriendo el cuadrado.

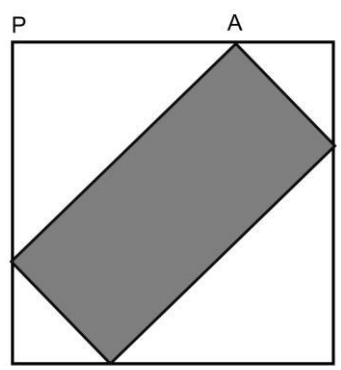
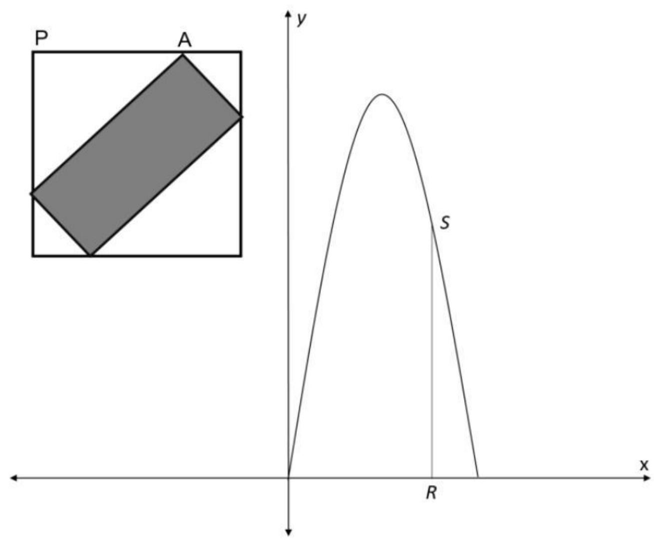


Figura 1.5. Rectángulo inscrito en un cuadrado

El objetivo de la actividad propuesta tuvo triple propósito: a) el estudiante pudiese reconocer y describir la variación, ¿Qué cambia?, b) el estudiante presente cuantificación de lo que cambia, ¿cuánto cambia?, c) el estudiante realice construcción gráfica, ¿hay alguna relación entre dos variables? La metodología aplicada consideró la observación, con un diálogo fluido entre el observador y el estudiante observado.



Lado del cuadrado= 7.00 cm

Longitud= 4.61 cm Area= 22.06 cm^2

	Longitud=	Área=
1	0.50	6.50
2	1.00	12.00
3	1.50	16.50
4	2.00	20.00
5	2.50	22.50
6	3.00	24.00
7	3.50	24.50
8	4.00	24.00
9	4.50	22.50
10	5.00	20.00
11	5.50	16.50
12	6.00	12.00
13	6.50	6.50
14	7.00	--
15		
16		

Figura 1.6. Representación gráfica y valores de x e y, asociadas a una situación variacional propuesta

Como conclusión de la investigación se reporta que la evolución del razonamiento covariacional es un proceso no lineal, más bien recursivo que pasa por diferentes momentos, que se consolida por la utilización de medios visuales, uso de distintas representaciones y la interacción dialogada con el estudiante. Se propone el uso de la metodología mediada con diferentes materiales, tanto concretos, como el apoyo de la tecnología de modo que se puedan complementar para el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes.

1.4.6. Investigaciones que vinculan la importancia de lo histórico-epistemológico en el desarrollo de la variación

Una de las perspectivas que investiga el pensamiento matemático avanzado, se desarrolla en Latinoamérica y se ha expandido a otros contextos. Este se ha denominado Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) y tiene sus bases teóricas en desarrollos matemáticos realizados en momentos históricos específicos, y con ciertas prácticas que dieron origen a los mismos. En lo que sigue, hacemos una descripción que ilustra alguna de las prácticas.

Farfán (1997) sostiene que preliminarmente al cálculo se requiere de un lenguaje gráfico. En este sentido, la investigadora propone operar gráficas en analogía con los números o variables. $-f(x)$ y $f(-x)$ reflexión respecto del eje x y del eje y respectivamente, $f(x+a)$ y $f(x-a)$ para la traslación en la dirección del eje x, $f(x)+a$, y $f(x)-a$ traslación en la dirección del eje y, a $f(x)$ contracción o dilatación con respecto al eje y, $f^{-1}(x)$ reflexión respecto de la recta $y=x$, $1/f(x)$, inversión de ceros en asíntotas y viceversa, las regiones donde $|y|>1$ se mandan hacia $|y|<1$, $|f(x)|$ y $f(|x|)$. Respectivamente reflexión de las imágenes negativas al simétrico positivo respecto del eje x y reflexión de sustitución del lado de la gráfica con ordenadas negativas por la reflexión del lado de la gráfica con ordenadas positivas.

El Otro aspecto que consideró Farfán (1997) para la construcción de gráficas fue que algunas de las funciones se podrían construir a partir de tres funciones de referencia, $f(x)=x$, $f(x)=a^x$, $f(x)=sen(x)$ que sirven de base para construir otras funciones elementales en el sentido de Cauchy. Sirviendo las anteriores funciones para construir funciones algebraicas, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas.

La investigadora ha propuesto en el contexto gráfico en sus investigaciones que dada una gráfica $f(x)$ marquen la porción en que $f(x)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, y $f'''(x)>0$. Resultados de su investigación mostraron dificultades para responder las consignas si se eleva el orden de la derivada involucrada. Para ello, la investigadora propone el desarrollo de variación: descifrar códigos variacionales y articularlos en signos variacionales.

Cantoral & Farfán (1998) exponen respecto a la práctica de predicción que atiende el binomio de Newton y la Serie de Taylor. Para ambos investigadores la exposición del teorema de Newton en su primera versión $(P + PQ)^{m/n}$ y no $(a + b)^n$ obedece a un programa orientado a modelar fenómenos, predecir fenómenos con una herramienta matemática, por ejemplo, el estudio de la cinemática, o el estudio de la cuerda vibrante.

Ambos investigadores han desarrollado su línea de investigación de pensamiento y lenguaje variacional considerando a la predicción, una de las nociones que sustentan las prácticas científicas relacionadas con el cambio.

Los investigadores sostienen además que el pensamiento variacional debería desarrollarse aprovechando diferentes escenarios y contextos de las personas partiendo de reflexionar respecto a las prácticas que dan origen a una idea, noción, concepto, y no exclusivamente que se construya el objeto matemático a partir desde una perspectiva axiomática del objeto como un saber pre existente.

Por su parte Ramírez (2013) realizó una investigación de carácter histórico-epistemológico respecto al rol de la variación y el cambio en las diferentes epistemologías por las cuales ha transitado la derivada. El investigador considera que fueron seis epistemologías diferentes para la concepción de la derivada desde una perspectiva variacional y de rigurosidad. Los tres primeros momentos atienden la primera perspectiva, y los otros tres, a la segunda.

En un primer momento Arquímedes estudió variaciones en la mecánica y en otros aspectos de la física, logrando medir áreas y volúmenes utilizando cierta rigurosidad diferente a la de la griega tradicional, fundamentada en el uso de regla y compás. Arquímedes utilizó tanto el método heurístico mecánico como exhauscion y la reducción al absurdo.

Un segundo momento lo marcan los trabajos de Galileo quien encontró la aceleración de cuerpos en caída libre producto de una fuerza constante independiente de la masa, que hoy día conocemos como fuerza de gravedad. Galileo basado en la intuición, observación y la experimentación, encontró que esa fuerza correspondía a un valor constante, hecho que no pudo demostrar por no contar con las herramientas matemáticas necesarias. Los trabajos de Galileo son fundamentales para etapas posteriores referidas al cálculo

infinitesimal. Una tercera etapa estuvo marcada por el trabajo de Newton y Lebnitz quienes continuaron los trabajos de sus antecesores:

Arquímedes, Galileo, Barrow, Descartes, Newton, Leibniz y otros afrontaron los problemas que constituyeron desafíos para esa época, recta tangente, movimiento, áreas y máximos y mínimos.

Un cuarto momento aparece con cierto rigor matemático, Lagrange introduce la teoría de funciones analíticas, y la derivada entendida como el coeficiente lineal del desarrollo en serie de potencias de una función en torno a un punto dado. Esto es:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f'(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots + \cdots$$

Y, si se desarrolla esta serie en torno al punto $x = a$ se tiene que:

$$f(x+h) = f(a) + f'(a)(x-a) + f'(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + \cdots$$

Los trabajos de Bolzano, Wierstrauss, Cantor y Dedekin marcan el quinto momento de epistemología de cálculo con la construcción de los números reales, las cortaduras, conjuntos, la eliminación de los infinitésimos, los cuales contribuyeron a la construcción de números reales, y sobre estos se logran la formalización de la derivada que conocemos hoy día.

Por último, el sexto momento está marcado por los trabajos de Cauchy sobre series convergentes. La derivada en este momento fue concebida como el límite del cociente incremental que conocemos hoy día en las diferentes fuentes bibliográficas.

Ramírez (2012) sostiene la importancia de conocer las diferentes epistemologías que subyacen a los objetos matemáticos, con el propósito de conocer las complejidades a lo largo de la historia, de la conceptualización o definición de una noción, idea, concepto matemático y su evolución.

1.5. APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La revisión de diferentes trabajos relativos al pensamiento variacional nos muestra la complejidad del mismo y la necesidad de seguir profundizando en esta temática y en su desarrollo en los distintos niveles de escolaridad, así lo revelan investigaciones recientes (Marmolejo, 2014; Maury & Cárcamo, 2012; Villa-Ochoa, 2010; Vergel, 2015; Yemen-Karpuzcu, Ulusoy, & Işıksal-Bostan, 2015).

La revisión del estado del arte nos muestra que el pensamiento variacional se sigue investigando desde diferentes aristas, desde la comprensión y la construcción de objetos matemáticos desde diferentes facetas, sean estas: cognitivas, histórico-epistemológicas, con el apoyo en la tecnología, entre otros, de modo que se pueda complementar una y otra faceta.

Las perspectivas teóricas para el pensamiento variacional convergen en la premisa que el cambio, y la cuantificación del mismo (variación) ha estado presente en prácticas de predicción en el desarrollo histórico del cálculo.

Consideramos de mucho valor conocer las pre concepciones que traen nuestros estudiantes al aula de clases, y que no necesariamente han sido formalizadas desde la matemática, y tal vez, formen parte de su cognición, puesto que han sido producto de una experiencia vivida en contextos cotidianos y pudieran constituir ejemplos de expresiones pre matemáticas. Tales expresiones aparecen en el diálogo de los jóvenes cuando se refieren, por ejemplo, a desplazamiento, sin interpretar la distancia como un concepto matemático, no se sitúan en un contexto métrico, sino que hablan de la distancia entre dos objetos de manera aislada.

Hemos encontrado muy pocos trabajos de investigación relacionados con el pensamiento variacional que atiendan a analizar concepciones que tienen los estudiantes de primer año universitario respecto a ciertas tareas, acciones, procesos en situaciones variacionales (Carlson, Jacobs, Coe, & Hsu, 2002; Grozdev & Todorka, 2010). Una de las razones de nuestro interés es el desarrollo de una investigación en una nueva dirección que pueda proporcionar un nuevo aporte a la investigación didáctica del cálculo. En este sentido, es oportuno y pertinente preguntarse:

> ¿Es posible explorar algunos aspectos y/o elementos de pensamiento variacional en los estudiantes de primer año universitario que cursan cálculo inicial?, ¿De qué manera se puede potenciar el desarrollo del pensamiento variacional?, Preguntas que nos ayudan a plantear nuestro trabajo de investigación, - pensamiento variacional emergente en estudiantes de Cálculo Inicial, sustentado en que hay pocos trabajos que exploren el pensamiento variacional emergente.

Esta situación sugiere y justifica la realización de una investigación que permita explorar e indagar elementos indicativos de pensamiento variacional que poseen y/o logran desarrollar los estudiantes de primer año de ingeniería de la Universidad Católica del Maule(UCM) cuando se enfrentan a diferentes situaciones relacionadas con la variación en un curso de Cálculo inicial, analizando de forma sistémica el desarrollo del pensamiento variacional, desde las pluri interacciones estudiante- saber-profesor.

También aportamos elementos para el discernimiento de posibles articulaciones entre un pensamiento *"pre variacional"* adquirido en el transcurso de la enseñanza escolar y un pensamiento variacional superior, cuya adquisición podría caracterizar los objetivos de aprendizaje de los primeros cursos de cálculo universitario.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico, Problema de Investigación y Metodología

2.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo se ha estructurado en tres apartados. En el primero se exponen los elementos teóricos y algunos aspectos metodológicos respecto al pensamiento variacional, principalmente aquellos que ayudan a comprender, articular y delimitar la importancia y algunos de los alcances del pensamiento variacional imbricados en esta investigación.

Un segundo apartado presenta elementos relativos al problema de investigación que se atiende. Se plantean las preguntas de investigación con sus respectivos objetivos para delimitar el problema y el rumbo a seguir en la investigación y, los alcances del mismo.

Finalmente, el tercer apartado muestra aspectos metodológicos que se han considerado durante el proceso, es decir, antes, durante y después de la investigación en lo relativo a población, muestra, actividades a realizar y sus instrumentos, técnica para la recolección de datos y el análisis de los datos.

2.2. PENSAMIENTO VARIACIONAL: PERSPECTIVAS TEÓRICAS, CONCEPTUALIZACIÓN Y ELEMENTOS

Entre las clasificaciones del pensamiento matemático en Educación Matemática se sitúa una perspectiva que clasifica el pensamiento matemático desde una perspectiva que incluye a otros cinco pensamientos que caracterizan la reflexión cognitiva de la matemática (MEN, 2006).

Esta mirada teórica clasifica el pensamiento matemático en: numérico, espacial, métrico, estocástico y el variacional. El numérico, se vincula con procesos aritméticos; el espacial, con ubicación y forma; métrico, con la cuantificación de la medida; estocástico, a la toma de decisiones, y el variacional, al análisis y la comprensión de cambio y variación.

El pensamiento variacional es conceptualizado desde distintas perspectivas de acuerdo a ciertos elementos, su génesis intrapersonal o extra personal y los indicadores de desarrollo. Una primera mirada afirma que uno de los propósitos del pensamiento variacional es articular la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral & Farfán, 1998) y a situaciones que involucran variación, en contextos; ya sean estos, realistas, fantasistas, intra o extramatemáticos.

Desde esta mirada, un saber no se estudia únicamente desde lo cognitivo, ya que las creaciones humanas, las matemáticas en este caso, se han desarrollado en contextos históricos, culturales y sociales situados, y es a través de las prácticas sociales que los seres humanos le dan sentido a lo que hacen, comparten códigos, utilizan diferentes estructuras y lenguajes (Cantoral & Farfán, 2003).

En palabras de Cantoral:

Este pensamiento y lenguaje variacional estudia […] fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida, pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando para ello diferentes estructuras y lenguajes variacionales. (Cantoral, 2004, p. 1).

Otros investigadores de esta perspectiva del Pensamiento Variacional (Cabrera, 2009; Engler, Vrancken, Hecklein, Gregorini, Müller & Henzenn, 2010) sostienen que este pensamiento involucra elaboración de estrategias, formas de razonamiento, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación. Argumentan, además, que los objetivos del pensamiento variacional se orientan a desarrollar estructuras de pensamiento que permitan identificar, analizar e interpretar, de manera natural, situaciones relacionadas con el cambio y, a su vez, modelarlos y transformarlos en otros más simples.

Una segunda referencia teórica, que es de especial interés en este estudio, considera que el pensamiento variacional combina lo cognitivo y lo didáctico para propiciar su génesis, potenciación y desarrollo. En este orden de ideas, se plantea que el pensamiento matemático variacional debe considerarse como la base sobre la cual se estructure el currículo matemático, ya que este es un pilar y eje de los otros pensamientos matemáticos (numérico, espacial o geométrico, estocástico, métrico) figurando como un eje articulador de estos; los cuales en conexión e interrelación deberían promover el desarrollo de habilidades matemáticas en diferentes contextos matemáticos.

Ello implica que el pensamiento variacional (MEN, 2006) se estructure en base a ciertos procesos generales: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos y, a la vez, sobre ciertos estándares de medición que se constituyen en un medio de desarrollo de habilidades, y de cada uno de los pensamientos matemáticos.

En esta mirada del pensamiento matemático, cada uno de estos está ligado a los demás pensamientos, y uno se potencia en la medida que se desarrolla el otro.

El pensamiento variacional es concebido como una forma dinámica de pensar que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que cavarían en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (Vasco, 2003, p.6).

Para Vasco (2006) el objetivo fundamental del pensamiento variacional es la modelación matemática de procesos cotidianos y significativos a los estudiantes, donde puedan poner en escena, modelos que relacionen covariación de magnitudes.

A Juicio de Vasco, el desarrollo del pensamiento variacional requiere de:

a) captación de patrones de variación, proceso que incluye identificar lo que cambia y lo que permanece constante,
b) creación de un modelo mental,
c) puesta en escena del modelo,
d) comparación de resultados con el proceso modelado,
e) revisión del modelo.

En la definición de pensamiento variacional, Vasco distingue dos momentos: uno en que se diferencia lo que varía de lo que permanece constante y se identifican patrones de regularidad en los procesos y, un segundo momento que requiere acciones cognitivas para la producción de sistemas mentales para reproducir covariaciones entre magnitudes. Para este autor, la cognición de cada sujeto ayuda a crear sistemas mentales, que a su vez ejecuta, revisa, refina y, de ser necesario, descarta.

En esta última acción, se inicia un nuevo proceso de génesis de modelos. Desde esta mirada, los modelos mentales se afinan y se convierten en representaciones mentales (Duval, 1999) los cuales son exteriorizados mediante representaciones semióticas que pueden ser palabras, dibujos, letras, números.

Pensar variacionalmente desde este enfoque es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, poder interpretarlas y tener la capacidad de analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación, si se modifica una condición particular.

Esto es un proceso activo en el que nuestra mente genera secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariación de las variables involucradas manifestada por los estudiantes en algún tipo de soporte material (registro ostensivo).

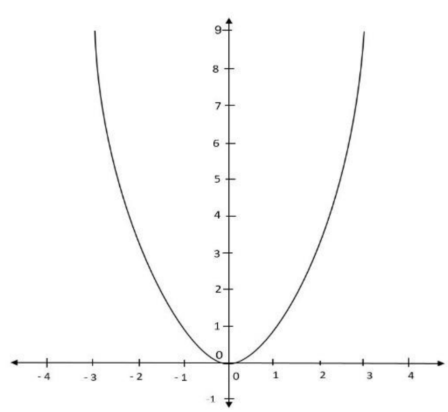


Figura 2.1. Representación gráfica para $y=x^2$

A manera de ejemplo, en la función $f(x) = x^2$ de la figura anterior, Vasco (2006) hace una reflexión de lo que es o no es, pensar variacionalmente. El manejo de la construcción de gráficas no es pensamiento variacional, pero reflexionar respecto a la gráfica anterior, en donde el cero y el uno se mantienen estáticos, que los reales negativos saltan al lado de los positivos, que los números mayores que uno se expanden y que se expanden cada vez más drásticamente en la medida en que son más grandes; que los menores que uno se contraen y que se reducen cada vez más drásticamente en la en que son positivos más pequeños, a este tipo de análisis dinámico es que Vasco categoriza como pensamiento variacional.

Por lo reportado en la literatura, el pensamiento variacional exige para su desarrollo combinar distintas áreas y contenidos matemáticos. Con el pensamiento numérico, identificar situaciones donde se relacionan patrones de variación de los números y sus operaciones, por ejemplo, entre los pares, impares, cuadrados perfectos, etc.

Con el pensamiento espacial, aprovechar recursos tecnológicos dinámicos que ilustren movimientos en el plano como rotaciones y traslaciones, con el métrico, establecer diferenciación entre magnitudes, cuantificación de magnitudes a numéricas y numéricas, además de ordenación de las mismas.

Otros recursos, como las correlaciones, las representaciones gestuales, las representaciones de máquinas y circuitos, las reinterpretaciones dinámicas de gráficas y tablas, la tecnología electrónica debería constituirse en un medio para propiciar el pensamiento variacional.

Consideramos al pensamiento variacional, catalizador de los otros pensamientos matemáticos, puesto que en diferentes contextos matemáticos o extramatemáticos, se requiere del análisis de las causas del cambio y la variación de magnitudes, ya sean estas: *ubicación, medida, incertidumbre o cuantificación.*

Pensar variacionalmente desde este enfoque es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular. Se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía procesos de visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariaciòn de las variables involucradas, manifestada en algún tipo de soporte material (registro ostensivo).

En este mismo orden de ideas, Carlson et. al (2002) expresan con otras palabras, para referirse al pensamiento variacional y lo denominan razonamiento covariacional, definiéndolo como una actividad cognitiva que considera la coordinación del cambio conjunto entre dos variables, cuantificando lo que sucede en una variable, si la otra variable cambia. Los autores realizaron una investigación con estudiantes universitarios, y proponen cinco acciones mentales asociadas a ciertos niveles para determinar la covariacion entre dos cantidades, atendiendo al grado de desarrollo iniciando desde un nivel básico hasta el superior.

En este sentido, proponen:

a) coordinación de los valores de las variables, cuando hay cambio en una y en otra,
b) coordinación de la dirección del cambio,
c) coordinación de la cuantificación del cambio en una y en la otra variable,
d) coordinación de la razón de cambio, y
e) coordinación de la razón instantánea de cambio en valores en el dominio de la función.

Por su parte, Grozdev & Todorka, (2010) sostienen que las funciones concretas del pensamiento variacional se orientan al descubrimiento de las propiedades ocultas, determinar las conexiones y correlaciones de una situación mediante la adquisición de nuevos hechos sólo a través de pensamiento conceptual y visual-figurativo se hace difícil o imposible. Diferentes investigaciones (Zorn, Judson, Kota, Okabe, Kiuchi, & Becker, 2004) sostienen la importancia de utilizar diferentes experiencias, metodología, contextos y representaciones para desarrollar diferentes nociones y objetos matemáticos.

Es relevante señalar que muchas acciones de los sujetos en su cotidianeidad son pre matemáticas, entendiéndose éstas como una manifestación que desde el lenguaje verbal y puramente cotidiano (no matemático en la concepción del alumno), encierra potencialmente un concepto matemático expresable en algún registro de representación, ya sea geométrico, algebraico, numérico, tabular u otro. Ejemplos de expresiones pre matemáticas aparecen en el diálogo de los estudiantes cuando hablan, por ejemplo, de distancias sin interpretar la distancia como un concepto matemático, no se sitúan en un contexto métrico, sino que hablan de la distancia entre dos objetos de manera aislada.

En la edad preescolar los niños juegan a relacionar objetos con características de lo que representan, animales con sus expresiones fónicas, por ejemplo. Aquí los niños no perciben que estén haciendo matemática, sin embargo, ubicados en contextos funcionales ellos están construyendo relaciones susceptibles de formalización matemática. A estos últimos se les conoce como conceptos pre numéricos por su proyección hacia los conceptos de ordinal y cardinal. En nuestra interpretación, son de manera genérica manifestaciones pre matemáticas (Warren, Miller, & Cooper, 2011). El desarrollo temprano de ciertas nociones y relaciones pre matemáticas que los niños manifiestan colaboran para el desarrollo de posteriores procesos abstractos, también en el desarrollo de la cantidad, en el pre-algebra, y el desarrollo de un pensamiento covariacional (Blanton, 2010).

Por su parte, Isoda (1996) también propone el desarrollo del pensamiento matemático en contextos cercanos y ricos en experiencias desde tempranas edades, procurando que el ingenio y la creatividad ayuden a establecer relaciones para que pueda desarrollarse.

Otro elemento considerado en este trabajo es la visualización matemática puesto que es el puente requerido para conectar lo ostensivo o perceptible con lo no ostensivo (imágenes mentales). De acuerdo con Torregrosa & Quesada (2007), la definición y caracterización de los procesos de visualización y razonamiento, es un avance en la línea de conocimiento del fenómeno cognitivo, ya que separa la acción cognitiva (proceso) de las distintas representaciones e imágenes mentales.

Según Arcavi (1999), la visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino también es reconocida como un componente clave del razonamiento (profundamente unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo) en la resolución de problemas e incluso en los procesos de demostración. Por esta razón, concordamos con Torregrosa y Quesada que afirman: “vemos a los procesos de visualización y de razonamiento, junto con su coordinación, como elementos esenciales de un modelo conceptual que nos permite conocer la actividad de los alumnos; en la línea abierta por Bishop (1983), para conocer en la medida de lo posible el interfaz de la actividad matemática cuando se enfrentan a la resolución de problemas en geometría.”

En nuestro caso, cuando se enfrentan al análisis de situaciones dinámicas en las que intervienen correlaciones de variables.

Se propone, además, la visualización, en concordancia con Arcavi (2003) como una primera instancia de comprensión de diferentes situaciones vinculadas con la variación, como un medio para el desarrollo y la potenciación de habilidades visuales y de otros sentidos. Desde esta óptica, la visualización es un requisito indispensable para desarrollar pensamiento variacional puesto que es el canal receptor de lo visual y de otros sentidos para la posterior comprensión de los procesos cognitivos que involucra una situación.

Esta investigación está dirigida a indagar y caracterizar las manifestaciones de pensamiento variacional, que emergen de la interacción personal con sus pares y con el docente en diferentes situaciones que se han preparado para el desarrollo de un curso de cálculo. Interesa estudiar diferentes momentos del curso y reflexionar respecto a cada uno de ellos, a la luz de un análisis didáctico que incorpore distintos elementos teóricos propios desde un enfoque global del asunto en cuestión.

2.2.1. Elementos teóricos de Pensamiento Variacional

Caballero & Cantoral (2013) consideraron las investigaciones de González (1999), Salinas (2003) y otras más para caracterizar los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional, su articulación y desarrollo. En este sentido, los investigadores definen algunos conceptos relativos a elementos del pensamiento variacional, su interrelación y desarrollo.

Situación Variacional es un tipo de problema donde se requiere de una estrategia variacional para ser afrontado, y que, además, se requiere cuantificar el cambio, conocer el crecimiento relativo del fenómeno en cuestión, es decir, cómo y cuánto cambian las variables.

Argumentos Variacionales son explicaciones a las que acuden las personas para analizar el cambio y su cuantificación y las expresan mediante distintos procedimientos que dan cuenta de manera cualitativa y cuantitativa del cambio en el sistema en cuestión.

Códigos Variacionales son modos de expresar el cambio y la variación, que a su vez contribuyen en la generación de argumentos variacionales. Los códigos pueden ser cualquier dibujo, tabla, frases, gesticulaciones, etc.

Estructura Variacional Específica se compone de herramientas, procesos y procedimientos en el ámbito matemático y científico para explicar el estudio del cambio y la variación de situaciones variacionales.

Estrategia Variacional (EV) es una manera específica de razonamiento que permite poner en escena despliegue de acciones ante una situación variacional, y generar argumentos variacionales que explican la situación. Entre las estrategias variacionales caracterizada por Salinas (2003) figuran comparación, seriación, estimación, y predicción.

Tareas Variacionales están conformadas por actividades, acciones y ejecuciones al interior de una situación variacional que tienen semejanzas en los objetivos y contextos en que se desarrollan. Las tareas variacionales utilizan distintas estrategias variacionales para organizar la situación variacional de acuerdo al contexto y objetivo planteado. Entre las tareas variacionales que Caballero & Cantoral (2013) hacen referencia están: tabulación como variación numérica, análisis de datos en tablas numéricas, construcción de gráficas con la variación como punto de referencia, análisis gráfico con la variación como punto de referencia.

En la figura se muestra un diagrama de los elementos que caracterizan el pensamiento variacional y que desde la perspectiva de Caballero & Cantoral (2013), ofrece una visión holística que explica el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar)

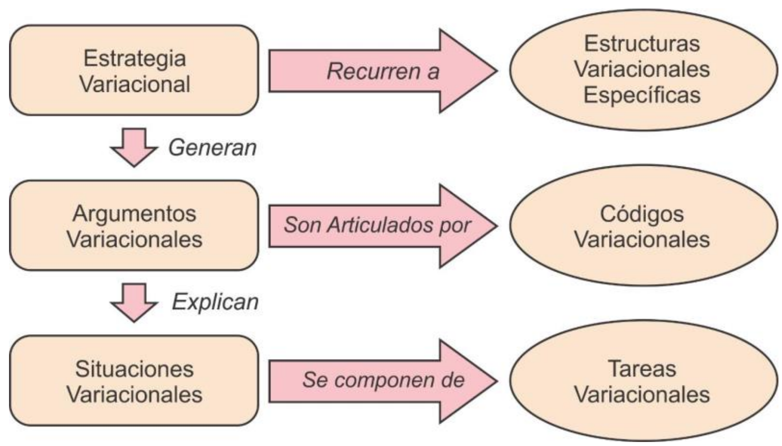


Figura 2.2 Modelo de la interacción de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional

2.3. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La revisión de la literatura respecto al pensamiento variacional expuesta en el capítulo 1, ha abierto una perspectiva de la importancia de atender la naturaleza del pensamiento variacional, la importancia de caracterizar y analizar cómo emerge y cómo se evidencia en los estudiantes este tipo de pensamiento matemático en los primeros cursos de Cálculo.

En este sentido, este trabajo de investigación se propone distintos elementos que dan cuenta del pensamiento variacional desde las prácticas estudiantiles

(faceta epistémica) en consonancia con las prácticas institucionales que se proponen durante un semestre. El punto medular entonces se orienta a caracterizar los significados personales que los estudiantes exponen de las situaciones variacionales que se les propone, además reflexionar acerca de la importancia del rol de distintas interacciones surgidas durante el curso. Por otro lado, interesa analizar la investigación, sus producciones e interacciones desde el nivel de prácticas y el nivel de configuraciones.

Desde un punto de vista epistemológico, es pertinente plantearse algunas interrogantes ¿Qué elementos caracterizan al pensamiento variacional estudiantil?, de manera análoga ¿Qué significa pensar variacionalmente y cómo se explicita esta manera de pensar?, y desde un punto de vista cognitivo ¿cómo abordan los estudiantes y cómo expresan sus estrategias y sus desarrollos ante una situación variacional, en un momento curricular especifico?

Lo ideal en didáctica es que lo cognitivo se aproxime a lo epistémico, esto es lo que trata la didáctica que el saber sabio se convierta en un saber objeto al servicio del estudiante (Chevallard, 1991), sin embargo, sabemos que, al interior del aula, los procesos de construcción de saberes son complejos, por la multiplicidad, riqueza y complejidad intrínseca de los significados personales de los objetos matemáticos que emergen en el aula por un lado, y por otro la manera como otras experiencias fuera del aula han influido en la construcción de los objetos.

De esta manera, y por la naturaleza del tema, el problema de investigación se puede expresar con las siguientes preguntas:

¿Es posible caracterizar los elementos de pensamiento variacional que emergen en los estudiantes universitarios durante un curso de cálculo? ¿De qué manera?

Para abordar de manera clara y ordenada nuestro problema, en el siguiente apartado se enuncian las preguntas y objetivos de investigación, cuyo propósito es dar respuesta a esta problemática.

2.3.1. Preguntas y objetivos de investigación

Sobre la base del marco teórico de referencia para esta investigación, nos planteamos preguntas que describen de manera más precisa, aquellas que resumen de manera general, la problemática en el apartado anterior.

Por otro lado, enumeramos los objetivos que orientan el itinerario de la investigación y que conducen a dar respuesta a las preguntas planteadas.

Preguntas de investigación (PI):

PI-1 ¿Qué reportan las perspectivas teóricas en Educación Matemática referente al pensamiento variacional y en qué se focalizan las investigaciones respecto a este pensamiento matemático?

PI-2 ¿Qué reporta la revisión bibliográfica de tipo histórica documental referente a la génesis y el desarrollo del cálculo en torno al pensamiento variacional, la variación y el cambio, entre otros aspectos?

PI-3 ¿Cómo se define el pensamiento variacional desde una concepción dinámica, y cómo se evidencia su presencia y su desarrollo?

PI-4 ¿Qué elementos aluden al pensamiento variacional emergente en estudiantes de cálculo inicial, y cómo se pueden describir desde una primera categoría de análisis didáctico del enfoque ontosemiótico?

Objetivos generales

OG-1 Conocer los elementos que conforman el pensamiento variacional emergente de estudiantes universitarios, puestos en escena ante diferentes situaciones relacionadas con el cambio y la variación.

Objetivos específicos

OE-1 Caracterizar de manera reflexiva las investigaciones relativas al pensamiento variacional, en particular aquellas que aportan distintos elementos de la emergencia de pensamiento variacional en distintos contextos y contenidos.

OE-2 Describir algunas etapas de la génesis y desarrollo del Cálculo relativas a la conceptualización de ideas, nociones, objetos matemáticos, en donde está involucrado el cambio y la variación.

OE-3 Analizar algunas razgos distintivos en las producciones estudiantiles de los diferentes instrumentos aplicados en la investigación, que se podrían asociar a un pensamiento variacional.

OE-4 Analizar desde ciertas categorías de análisis didáctico que propone EOS, cómo emergen distintos elementos de pensamiento variacional en diferentes instrumentos: prueba diagnóstica, secuencias.

Los objetivos específicos están construidos de manera que exista una articulación entre cada una de las acciones y las fases de esta investigación, a su vez, que todo ello coadyuve al logro de cada uno de los objetivos propuestos durante la investigación. Además, que estos objetivos respondan al objetivo general de la investigación y a cada una de las preguntas de la investigación que se han planteado en los distintos momentos de la investigación. Esto implica que las PI-1, PI-2, PI-3, PI-4 se deberían responder mediante el logro de OE-1, OE-2, OE-3, OE-4 respectivamente. Más adelante se presentan las tareas específicas para el logro de estos objetivos.

2.4. METODOLOGÍA

Una investigación de tipo cualitativa (Hernández, Fernández & Baptista, 2010) reflexiona las situaciones de estudio desde la naturaleza de sus datos y sus características respecto a cualidades y desde esta mirada de análisis de la información que proporciona los datos se levantan categorías o unidades de análisis que permiten la comprensión del fenómeno o situación en cuestión desde una mirada holística.

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo de corte interpretativo pues busca conocer el núcleo de las significaciones que grupos de estudiantes manifiestan en las respectivas sesiones de estudio propias del curso en el cual se realiza la investigación. Es cualitativo por la naturaleza de sus datos.

Los aspectos cualitativos de esta investigación se orientan a la exploración, observación e interpretación de fenómenos didácticos en un contexto educativo formal, en nuestro caso, determinar y caracterizar los rasgos sobresalientes, los elementos que caracterizan y dan cuenta de pensamiento variacional emergente en estudiantes universitarios durante un curso regular de Cálculo inicial.

2.4.1. Fases y tareas de la investigación

Para el logro de los objetivos específicos propuestos anteriormente, nos proponemos realizar las siguientes fases de la investigación.

Fase 1

<u>Tarea de investigación para OE-1</u>

Revisión y caracterización de los trabajos en Educación Matemática, específicamente los que enfatizan su estudio en el pensamiento variacional, y los diferentes focos de sus investigaciones (contextos, contenidos, población, entre otros).

Fase 2

<u>Tarea de investigación para OE-2</u>

Estudio reflexivo y orientado a conocer la naturaleza del pensamiento variacional, la concepción de cambio y variación y el rol que este ha desempeñado durante diferentes periodos históricos.

Tarea de investigación para OE-3

Reconstrucción de la evolución de la concepción del pensamiento variacional a lo largo de la historia.

Fase 3

Tareas de investigación para OE-3, OE-4

Interacción con el docente respecto a la planificación de su curso, los objetivos y los instrumentos que ha considerado implementar durante un semestre para un curso de Cálculo inicial.

Participar como observador no participante del trabajo planificado por el profesor durante un semestre para un curso de cálculo universitario. De igual manera, recabar si fuese posible información adicional que pueda colaborar con los objetivos propuestos.

Reflexionar respecto EOS en su primer nivel y con base en este enfoque realizar el análisis y la categorización de la información suministrada en las producciones estudiantiles de cada de los instrumentos aplicados.

2.4.2. Población y muestra

Esta investigación fue desarrollada el primer semestre del 2013, y se consideró como población a los estudiantes de Ingeniería Civil Informática de la región del Maule, Chile, y como muestra un grupo de 40 estudiantes de la misma carrera que matricularon el curso de cálculo. Los estudiantes participantes poseían características relativamente homogéneas respecto a su edad que oscilaba entre 18 y 20 años, algunos de ellos repitentes del curso.

Para la realización de la investigación se contó con la autorización del Director de Escuela, del Profesor del curso y la conformidad de los estudiantes. Este curso realizó las actividades propias de la programación que establece el respectivo programa, sin intervención externa y, se eligió por disponibilidad del mismo. Las actividades, objeto de análisis de la investigación se organizaron de modo que pudieran ser observadas y analizadas por el equipo.

Los estudiantes se constituyeron en grupos de estudio por afinidad lo que significó que no todos los grupos tenían el mismo número de alumnos, sin embargo, ninguno llegó a tener más de 7 integrantes ni menos de 4. Los grupos se constituyeron para la realización de trabajos en la modalidad de sesiones de estudio los que eran evaluados con nota y, sesiones de estudio sin nota, pero, de acuerdo a la participación activa de los alumnos, influirían conceptualmente si las notas logradas en las pruebas llegaran a estar ligeramente bajo los niveles de aprobación.

Se tuvo acceso a los resultados de las pruebas de diagnóstico, producciones de los estudiantes en las sesiones de estudio y filmación de las mismas, las cuales fueron realizadas por los alumnos en diversos lugares en los que los estudiantes preferían estudiar. Con esta modalidad, el profesor del curso pretendía que los estudiantes se potenciarán entre ellos, tuvieran espacios de libertad en los cuales pudieran expresar, sin la presencia de una figura institucional sus ideas, sus aportes, sin temor al error y así, generaran razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos proporcionados, en cualquier tipo de lenguaje que manifestara una comunicación ya fuese verbal, gráfica, algebraica o de otro tipo.

2.4.3 Variables

Como se mencionó anteriormente, la investigación se enmarca dentro de la metodología cualitativa en la que hemos considerado variables cualitativas las cuales son propias del primer nivel de análisis del enfoque ontosemiótico.

Las variables cualitativas corresponderán a los elementos indicativos caracterizados desde un sistema de prácticas y objetos matemáticos (previos y emergentes). Estos elementos primarios de acuerdo al EOS corresponden al lenguaje, formas de argumentación, criterios de inferencia, uso de definiciones, estrategias y proposiciones, que ponen en escena los estudiantes de ingeniería ante situaciones variacionales.

2.4.4 Instrumentos para la recolección de datos

Para la recolección de la información se usaron las filmaciones y fotografías de las sesiones de estudio. También fueron considerados los trabajos escritos producto de estas sesiones y de la prueba evaluativa.

El método utilizado, se describe a continuación:

1. Se tomó una prueba de diagnóstico.

2. En base a las respuestas de la prueba de diagnóstico y las consideraciones teóricas de Vasco (2003, 2006) y Duval (1999), se establecieron categorías de análisis.

1. Se construyeron situaciones de estudio para los grupos, en base a procesos dinámicos, que permitieran observar en sus procesos de razonamiento, la presencia de pensamiento variacional de acuerdo a las categorías de análisis.

2. Se construyeron situaciones problemáticas para la realización de las sesiones de estudio.
3. Se filmaron las actividades de las sesiones de estudio.
4. Se analizaron los videos y las producciones escritas, tanto en las sesiones de estudio como en la prueba evaluativa.
5. Se hicieron las conclusiones.

Con el empleo de esta metodología se pretendía que los estudiantes se potenciarán entre ellos, tuvieran espacios de libertad en los cuales pudieran expresar, sin la presencia de una figura institucional sus ideas, sus aportes, sin temor al error y así, generaran razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos registrados, en cualquier tipo de lenguaje que manifestara una comunicación ya fuese verbal, gráfica, algebraica o de otro tipo y que pudiera ser interpretada como una manifestación de pensamiento matemático o pre matemático, en particular como pensamiento variacional o pre variacional.

2.4.5. Técnicas para análisis de datos

Para reflexionar respecto de las producciones estudiantiles presentamos algunos elementos de un primer nivel de análisis que propone el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (Godino & Batanero, 1994; Godino & Batanero 1998; Godino, Batanero, & Font, 2007; Font, Godino, & Gallardo, 2013). En este enfoque del conocimiento e instrucción matemática se plantean diferentes categorías para comprender de manera sistémica el desarrollo de una tarea, una actividad didáctica en fase de diseño o en ejecución. Un primer nivel de análisis didáctico, que es de interés en este trabajo atiende al reconocimiento de un sistema de prácticas que realizan los estudiantes de manera individual, grupal, ya sean éstas mediadas por sus conocimientos previos, o por otra razón externa, que puede ser de carácter institucional (curricular, bibliográfica, institucionalizada, entre otros).

Desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) una práctica matemática, es una actuación o una manifestación (lingüística o no) con la intencionalidad de resolver algún problema intra o extra matemático, compartir una posible solución y validarla para extrapolarla a otras realidades. En esta práctica matemática intervienen objetos tangibles (ostensivos) y otros no tangibles (no ostensibles). Los primeros, compuestos por el uso del lenguaje, símbolos, gráficos, etc., y los segundos se refieren a la utilización de conceptos, propiedades, proposiciones.

El enfoque ontosemiótico propone además otros niveles o categorías de análisis que no serán atendidos en este estudio, ya que extrapola a nuestros objetivos de investigación, sin embargo, para otras investigaciones convergentes queda el espacio abierto para seguir indagando respecto al pensamiento variacional, lo cual es una de las proyecciones que se pretende con esta investigación.

2.5. CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo hemos presentado los elementos teórico-conceptuales, y metodológicos que proporcionan el sustrato para esta investigación. El planteamiento del problema, la formulación de preguntas, objetivo general, preguntas concretas y objetivos de la investigación marcan pautas operativas para el desarrollo de la investigación, además de las tareas planteadas para cada fase que proporcionan el camino por el cual va a transitar la investigación. Todos los aspectos que se han considerado en este capítulo contribuyen para el logro de los objetivos planteados y para dar respuesta a las preguntas de investigación que se han formulado

CAPÍTULO 3

El Pensamiento Variacional desde una Perspectiva Histórica-Epistemológica

3.1. INTRODUCCIÓN

Para conocer los fundamentos y orígenes de una noción, idea, concepto u objeto matemático, es necesario remitirnos a la raíz histórica de su surgimiento: conocer los contextos, desafíos y problemáticas propios de ese momento (Anacona, 2003; Godino, 2003, 2010).

Los saberes considerados para institucionalizarse de manera formal a un contexto escolar han pasado una serie de etapas de construcción, perspectivas e interpretaciones y su manera de transmitirse. Esto último, implica que la manera que se enseña hoy día, no necesariamente obedece al desarrollo que tuvo el concepto durante la historia.

La Educación Matemática durante los últimos años ha dotado de relevancia al estudio del surgimiento y evolución histórica de los objetos matemáticos que forman parte de la currícula de la matemática a desarrollarse en los distintos ámbitos. Dada la importancia de una revisión histórico- epistemológica en el desarrollo del cálculo, presentamos aspectos x al pensamiento variacional y sus manifestaciones en cada etapa histórica.

Para una mejor descripción y desarrollo del capítulo, se han estructurado dos apartados: uno que atiende al rol del pensamiento variacional en el desarrollo histórico del cálculo, y un segundo apartado referido a la reconstrucción cronológica del pensamiento variacional y a la reflexión de la utilidad y trascendencia de este pensamiento desde la antigüedad hasta hoy día.

Farfán (1997), Cantoral & Farfán (1998), Cantoral (2000), Bagni (2005), Anaconda (2003), Ferrante (2009), Díaz (2009), Molfino (2010), Ramírez (2012) exponen elementos que ayudan a comprender la naturaleza, la finalidad del pensamiento variacional en diferentes épocas, y el rol que este desempeñó para atender un problema y el desafío de la resolución que este implicaba. También los estudios realizados por Pino (2014), Medrano & Fan (2016), Dos Santos (2013) Nos proporcionan diferentes elementos de análisis de la génesis y evolución de distintos objetos matemáticos. En este sentido, a la derivada, al límite finito y a la antiderivada respectivamente.

3.2. ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO SOBRE EL PENSAMIENTO VARIACIONAL

A continuación, presentamos el desarrollo histórico del cálculo, algunos de sus problemas y desafíos a la luz del pensamiento variacional, puesto que sabemos que las nociones de cambio y variación fueron germinadoras en el desarrollo del análisis y son fundamentos para la perspectiva teórica del pensamiento variacional.

Iniciamos este apartado, con la descripción de las etapas, que a criterio de los historiadores de la matemática y especialistas en Educación Matemática ha transitado el Cálculo en su evolución histórica. En este sentido, se ha dividido en seis periodos históricos: matemática griega, época medieval, constitución de fundamentos teóricos, transformación del análisis infinitesimal, aritmetización del análisis, contemporánea.

3.2.1. Matemática griega

Los desafíos de la matemática griega se orientaron a resolver situaciones concretas de su contexto y de su diario vivir, que a su juicio no tenían explicación o no conocían un procedimiento inmediato, y sus esfuerzos por resolverlos tenían objetivos orientados a buscar relaciones entre magnitudes dadas ciertas condiciones, por ejemplo, encontrar espacio en función de tiempo y; además, obtener el cálculo de la velocidad y de la aceleración instantánea y viceversa, cálculo de la tangente a una curva, estudio y análisis de máximos y mínimos de curvas, y el cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de curvas, centros de gravedad y atracción gravitatoria.

Las preocupaciones que tuvieron los griegos estuvieron focalizadas en resolver situaciones contextuales, situaciones geométricas y algunos fenómenos físicos, sin embargo, sus herramientas y sus desarrollos para resolverlos se limitaron al uso de lo geométrico, ya que la geometría plana de Euclides era su fundamento para solventar diferentes situaciones y problemas.

En esta primera etapa del desarrollo del cálculo, tuvo notoriedad el empleo de la exhaución como un método resolutivo que atendió diferentes tipos de problema. De acuerdo a Díaz (2009) se le atribuye a Eudoxo, sin embargo, su uso fue utilizado por Arquímedes en la esfera, cilindro y en la cuadratura de la parábola. Este método principalmente se aplicó al cálculo de áreas de diferentes figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc.

La exhaución consistía en aproximar la figura por otras en las que se pueda medir la correspondiente magnitud, de manera que esta vaya acercándose a la magnitud buscada. Por ejemplo, para estimar la superficie del círculo se inscriben y circunscriben polígonos regulares de " n " lados cuya superficie se conoce (en definitiva, es la de "n" triángulos isósceles), luego se duplica el número de lados de los polígonos inscriptos y circunscriptos hasta que la diferencia queda exhausta. Arquímedes halló la superficie del círculo con este método llegando a polígonos de noventa y seis lados.

En este método empleado por los griegos, se menciona a Antifonte (430 a. C.) quien realizó varios intentos en determinar el área del círculo inscribiendo en él un mayor número de triángulos, cada vez más pequeños, hasta que su área se agotara. Se emplearon los siguientes procedimientos: el método de agotamiento, inscribiendo polígonos regulares en una circunferencia de radio unitario; y, el método de compresión, circunscribiendo polígonos a la circunferencia.

De este modo, al aumentar el número de lados de los polígonos, las figuras tenderán a acercarse a la forma de la circunferencia, intentos que conllevaron a Arquímedes a obtener una medida bastante precisa y cercana del número "π".

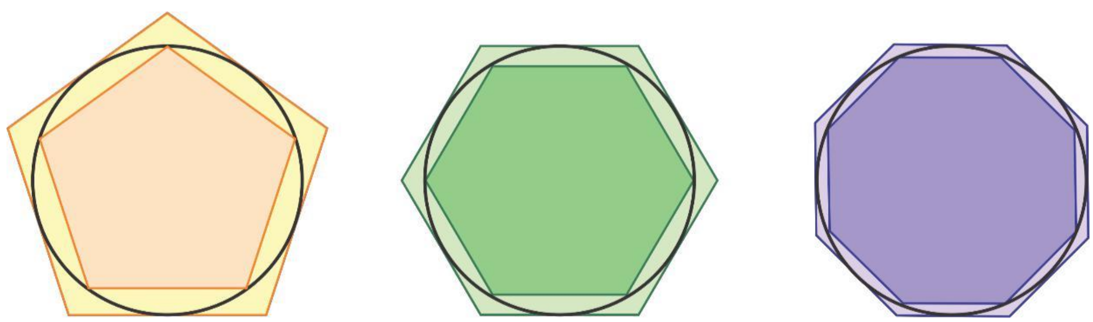


Figura 3.1. Método de la exhaución ilustrado con varios polígonos

A manera de ejemplo, Antifón creyó resolver uno de los problemas clásicos de la geometría griega "la cuadratura del círculo", que lo describe así: si se va inscribiendo un polígono regular (triángulo o cuadrado) luego, se duplican progresivamente los lados de este primer polígono con lo que se disminuye con cada operación la superficie de los segmentos circulares exteriores a los polígonos.

Continuando el proceso, al cabo de un número muy grande (pero finito) de operaciones de este tipo, se obtendría un contorno poligonal que denomina la circunferencia. Antifón pensaba que por el procedimiento descrito, el área del círculo se agotaría, obteniendo un polígono inscrito cuyos lados a causa de su pequeñez coincidirían con la circunferencia.

Consideró la posibilidad de construir un cuadrado equivalente a un polígono cualquiera, ese cuadrado sería equivalente en área al círculo, y de esa forma se podría cuadrar el círculo.

Durante este período histórico se observa que la preocupación de los matemáticos se orientó a resolver los problemas clásicos y que los procedimientos empleados para desarrollarlos fueron rigurosos, extensos y con cierta dosis de intuición necesaria. Medrano (2016) sostiene que la evolución del límite finito inicia en el período de la matemática griega con el método de exhaución.

A la luz del conocimiento matemático de hoy día, se observa que los problemas clásicos griegos, tanto en el planteamiento de sus problemas, como en las estrategias para afrontarlo poseían intrínsecamente ideas variacionales; por ejemplo, el agotamiento del área al ampliar los lados del polígono regular se visualiza un proceso dinámico que muestra covariación de las variables en algunos casos. Sin embargo, la idea de cambio y de variación en la matemática griega no se explicita como tal en su desarrollo logrado; sin embargo, estas aproximaciones de los griegos se traducen en fundamentos de lo que define y caracteriza el pensamiento variacional.

Los trabajos matemáticos realizados por los griegos fueron antecedentes a las ideas germinadoras del análisis matemático, por ejemplo, el primer acercamiento a la idea del límite se encuentra relacionado en el agotamiento de las áreas que se recurría al inscribir polígonos de mayor cantidad de lados al que recurría el Método de Exhaución.

Los Elementos de Euclides es una de las primeras evidencias de escritos antiguos, que revelan la utilización de procesos que hoy en día los reconocemos como procesos de límites. Para Ferrante (2009), la evolución del concepto de límite desde la matemática griega hasta el siglo XIX se desplegó por la necesidad de expresar y formalizar la noción. Por su parte Medrano(2016) propone siete estadios para la comprensión del límite finito.

Esta noción se utiliza de forma implícita hasta que Weierstrass, en el siglo XIX, logra formalizar la definición de límite generando, por una parte, la validación de algunos resultados ya obtenidos, tales como acercamientos y aproximación (D´Alembert, Newton, Leibnitz, entre otros) y, por otra, para demostrar resultados más generales, tales como el cálculo de área.

Este autor devela la necesidad por la cual un objeto matemático se formaliza y transita en diferentes momentos, y la importancia de considerar las ideas antecedentes para la consolidación de objetos posteriores, o cómo diferentes perspectivas se cohesionan para desarrollar nuevas ideas.

En la matemática griega, en el Método de la Exhaución, se encuentra un primer hito de los elementos que caracterizan el pensamiento variacional. En el interior del método de la exhaución se observa que hay inmersos conceptos como el cambio y la variación, puesto que uno es un estado y el otro es la cuantificación al transitar de un estado a otro; ejemplo, un polígono regular inscrito posee un área específica, mientras que otro polígono inscrito de mayor número de lados, tendrá área mayor que la que posee el polígono inscrito anterior. Pino (2014) indagó en su investigación respecto a la génesis y evolución de la derivada que coincide que los autores antes mencionados que la matemática griega es un punto de partida para los objetos matemáticos que se han formalizado.

Otro punto medular que nos proporciona el Método de Exhaución desde la perspectiva de esta investigación desde el pensamiento variacional como una *"forma dinámica de pensar"* es la dinámica del proceso. Esta se ve reflejada en los esfuerzos por desarrollar una nueva cuantificación, y lograr la que más se aproxime para agotar del área del polígono inscrito respecto al área de la circunferencia. Esto implica un proceso de inscribir polígonos de mayor número de lados y el efecto sobre el área que cubre dicho polígono.

El Método de Exhaución es un buen principio para el desarrollo de ideas variacionales de diferentes procesos, aquellos referidos a construcciones indefinidas que nos permite reflexionar respecto a la variación de magnitudes en diferentes momentos de acuerdo a las condiciones de las situaciones y a una posible covariación que vincule a las magnitudes.

3.2.2. Época Medieval

Un segundo momento del desarrollo del cálculo es la Época Medieval donde los esfuerzos se concentraron en la comprensión de fenómenos físicos, astronómicos, geométricos, entre otros, los cuales fueron abordados desde el desarrollo de distintos métodos que se orientaron al estudio de las cantidades pequeñas y la influencia de las mismas en la comprensión de la naturaleza de los fenómenos en sus distintos contextos.

Los aportes de Galileo, Kepler, Cavalieri, Barrow, Fermat, entre otros, marcaron la pauta para el desarrollo del análisis matemático durante esta época histórica, que posteriormente ayudaron a Newton y a Leibnitz a la consolidación de las bases teóricas del análisis matemático.

A continuación, se exponen de manera general, los aportes desarrollados por los matemáticos antes señalados para sentar las bases para el análisis matemático y que nos proporcionan un panorama del pensamiento variacional prevaleciente durante esta época histórica.

Kepler (1571-1630).

Se le atribuye el Método de los infinitésimos. Este método se utilizó para resolver problemas que involucran el cálculo de volúmenes y áreas. El procedimiento empleado por Kepler partía de la premisa que todos los cuerpos se podrían descomponer en infinitas partes, infinitamente pequeñas de áreas o de otros volúmenes ya conocidos.

Los trabajos realizados por Kepler aparecen en *Nova Stereometria Doliolum Vinatorum* en 1615 posteriormen por Galileo utiliza un método semejante que construyó para mostrar que el área encerrada bajo la curva tiempo-velocidad es el espacio.

En este método utilizado por Kepler se aprecia que el uso de pensamiento variacional esta explicitado de una manera más tangible que en la matemática griega, puesto que hay un dinamismo en la descomposición de los cuerpos en otras partes diminutas. Se infiere que hay una movilización de conceptos, respecto al conocimiento de ciertas áreas y volúmenes que constituyen la base para el cálculo de las desconocidas. En este método está explícito el concepto de cambio y variación y de manera implícita el concepto de variable. Como era de esperarse en esta época los métodos para solucionar las situaciones problemas estaban fundamentados en geometría plana y algunos otros elementos de aritmética en su desarrollo.

Cavalieri (1598-1647).

Se le atribuye autor del Método de los indivisibles que forma parte del desarrollo infinitesimal de la época. Este método fue utilizado para calcular áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos. Cavalieri representaba estos objetos mediante una superposición de elementos cuya dimensión era una unidad menor que aquella a evaluar. A pesar de no considerarse un antecesor directo del cálculo, intuyó ya que un infinitésimo es un “cero pequeño”.

Cavalieri fue uno de los primeros en decir que la tangente a una curva estaba definida por dos puntos sucesivos sobre la misma, dado que es como un collar de cuentas muy pequeñas, una al lado de otra. Sostuvo, además que una Superficie estaba conformada por líneas sin ancho y que un volumen por un montón de superficies sin espesor *(Ferrante, 2009).*

Al igual que en el método de Kepler, la manifestación de pensamiento variacional se ve reflejado en el Método de Cavalieri ya que en la división de objetos superponiendo elementos, está explicitado la idea de cambio y de variación. En Cavalieri, los requisitos del método exigido son más rigurosos.

Fermat (1601-1665)

Se le atribuye la invención de dos métodos conocidos como Método de Fermat y el Método de las tangentes. El primer método fue usado para encontrar extremos de curvas en representaciones conocidas como “parábolas e hipérbolas de Fermat”.

El primer método parte en considerar que en una “cumbre” o en un “valle” de la curva, cuando E es pequeño, los valores de la función $f(x)$ y $f(x+E)$ están tan próximos que se pueden tomar iguales. Esto implica hacer $f(x+E) = f(x)$, dividirlo por E y tomar $E = 0$. No obstante que Fermat no habla de límite explícitamente, la noción de su método está bastante cerca del concepto actual de límite que se conoce.

El segundo método de Fermat alude al trazo de tangentes, esto implica un procedimiento para calcular tangentes en un punto de cualquier curva, sin embargo, Fermat sólo lo utiliza con la parábola, y es Descartes quien amplía el método de Fermat y, considera que la curva y su tangente en un punto coinciden en un entorno pequeño de dicho punto.

Lo que pretende Descartes con la ampliación del método de Fermat es dibujar la recta tangente en el punto $P = \left(x, f(x)\right)$ y, para ello, calcula la subtangente utilizando un criterio de semejanza de triángulos. En la práctica, para obtener los segmentos necesarios se considera $f(x+E) - f(x)$, luego se dividía por E y se tomaba $E = 0$, lo que equivale para la matemática actual hallar el límite funcional en la abscisa de un punto P.

En ambos métodos de Fermat, uno de ellos ampliado por Descartes se refleja la manifestación de pensamiento variacional, puesto que las nociones de cambio y variación están implícitas en las referencias a entornos muy pequeños tanto que el valor E se puede considerar cero. Estos métodos se sustentan en ideas infinitesimales.

Isaac Barrow (1630-1677)

Destacado matemático que desarrollo un procedimiento análogo al que usó Fermat, su método es conocido como Método de Barrow en el cual introduce dos incrementos en x, y equivalentes a los Δx, Δy que utilizamos actualmente.

Los diferentes métodos empleados durante este periodo histórico ayudan a construir las bases del análisis matemático, desde la noción de la cantidad desde una mirada infinitesimal como un ente para la comprensión de los distintos contextos y situaciones a los que se enfrentaron, y por las exigencias de la mecánica, astronomía y física.

Los procedimientos utilizados en esta época para afrontar las situaciones problemas fueron abordados desde la geometría plana en su mayoría, sin embargo, el álgebra inició un importante desarrollo con el método de coordenadas que facilitó el estudio de las curvas. Los métodos que funcionaban de maneras individuales fueron paulatinamente con el paso del tiempo adquiriendo una cohesión y armonía.

En este segundo periodo del desarrollo del Cálculo, la preocupación se focaliza al igual que en la primera etapa, atender situaciones de física, mecánica, astronomía, geometría con la diferencia que los desafíos en este período histórico se intentan desde un análisis muy particular, desde cantidades muy pequeñas. La manifestación de elementos de pensamiento variacional está presente en el planteamiento de los problemas y en la solución de los mismos, puesto que el denominador común de los distintos métodos desarrollados era buscar una manera de calcular el valor de un área, obtener un volumen, calcular tangentes. Todo ello, a partir de la descomposición de una figura, cuerpo, en otros y, a partir de estas pequeñas unidades, realizar la cuantificación.

En Pino (2014) se indaga respecto al objeto matemático de derivada y en ese tránsito el autor releva la importancia de la variación durante la edad media. El autor presenta en su trabajo los esfuerzos por establecer formalizaciones de la noción de derivada, sin embargo fue necesario establecer cierto rigor.

3.2.3. Constitución de los fundamentos del análisis

Durante esta etapa el desarrollo del análisis matemático se logró consolidar por los trabajos de las etapas preliminares, el desarrollo de nuevas herramientas y por el ingenio de dos grandes matemáticos que trabajaron de manera paralela y utilizaron contextos diferentes logrando resultados similares que marcaron la base del cálculo diferencial e integral.

A continuación, presentamos algunos de los aportes de Newton y Lebnitz, cuyos trabajos marcaron un hito en el desarrollo histórico del cálculo, y nos proporcionan una perspectiva de las manifestaciones de pensamiento variacional de esa época.

Newton (1648-1727)

Creador de la teoría o el método conocido como “fluxiones”. Este método tiene su enfoque en la naturaleza geométrico-mecánica para tratar de forma general los problemas del análisis infinitesimal.

Newton propone el método de las fluxiones, para estudiar las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuó denominadas fluentes.

Según Newton, todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común: el tiempo. Posteriormente Newton introduce las velocidades de la corriente de los fluentes a las que denominó fluxiones. La teoría de fluxiones se origina para resolver dos problemas: la determinación de la relación entre fluxiones. Esta teoría establece que conocidas la relación entre fluentes y el recíproco o dada la relación entre fluxiones, se pueden encontrar las fluentes.

Para resolver estos problemas, Newton aplicó métodos basados en el uso de cantidades infinitamente pequeñas. Estos trabajos de Newton se exponen en la obra *Methodus Fluxionum Et Serierum Infinitorum* que se publicó en 1736.

Newton publica en 1704 su obra *Tractatus Quadratura Curvarum*, la cual explicita el método de las razones primeras y últimas, en la que el incremento de la variable se anula, lo que supone la explicitación de una idea de límite un tanto metafísica. A manera de ejemplo, se resuelve el siguiente problema “Fluya una cantidad x uniformemente; ha de encontrarse la fluxión de la cantidad x_n. En este tiempo, la cantidad x, al fluir, se convierte en $x+0$, la cantidad x_n resultará $(x+0)_n$; que por el método de las series infinitas es $x_n + nox_{n-1} +$ $((n_2 - n)\ /2)\ o_2x_{n-2}$+ etc. Y los incrementos o y $nox_{n-1} + ((n_2 - n)\ /2)\ o_2x_{n-2}$+

etc., estarán entre sí como 1 y $nx_{n-1} + ((n_2 - n)\ /2)\ o_2x_{n-2}$ + etc. Desvanézcanse ahora aquellos incrementos, y su última razón será 1 a nx_{n-1}. Y por eso, la fluxión de la cantidad x es a la fluxión de la cantidad x_n como 1 a nx_{n-1}".

Newton publica en su obra *Principia Mathematica* una definición del concepto de límite, donde se refiere como: cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales.

Los trabajos de Newton reflejan el empleo de la variable desde una manera dinámica y que esta a su vez afecta a otra variable, en esta interacción de ambas variables se aprecia manifestaciones de pensamiento variciacional, reconocimiento de cambio e intención de cuantificar ese cambio, y establecer una covariación de las variables. A la luz del pensamiento variacional que atiende este trabajo de investigación, se observa que en los trabajos de Newton hay valiosos aportes en muchos sentidos que marca un hito para el desarrollo del cálculo.

En este sentido, el lenguaje que introduce y su significación, los argumentos de sus procedimientos, los significados de las variables, por el tipo de contexto y por las herramientas matemáticas que aplica, los objetos matemáticos que desarrolla en sus trabajos (límite, derivada, integral, entre otros) reflejan intentos por desarrollar pensamiento matemático desde diferentes situaciones en contexto de la sociedad que obedecieron a demandas específicas de su época.

Leibnitz (1646-1716)

Padre del cálculo junto con Newton, cuya preocupación fue establecer la claridad de los conceptos y desarrollar el aspecto formal de la matemática. Leibnitz contribuye al nacimiento del análisis infinitesimal con su teoría de las diferenciales.

Este matemático encontró que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas.

También Leibnitz usa la notación que se utiliza actualmente para referirse a diferenciales, pero no aclara lo que, para él significa infinitamente pequeño. Uno de los desarrollos de esta época es conceptualizar una idea a lo que hoy se conoce como el límite matemático.

La concepción del límite que desarrolló Leibnitz es de índole geométrica, y su idea acerca del límite está vinculada a una aproximación que debe cumplir ciertas condiciones. Esto es que la aproximación debe ser indefinida, es decir, que exista la posibilidad de tomar aproximaciones cada vez mejores. La diferencia de la concepción de límite con Newton radica en que los objetos se han de aproximar más que cualquier diferencia dada, lo cual implica que el límite debe ser la mejor de todas las aproximaciones posibles.

En los trabajos de este matemático se observa la manifestación de pensamiento variacional enmarcado a identificar un estado de una variable, además cuantificar su cambio (variación) mediante una notación específica (diferenciales que utilizamos hoy día), establecer el valor de la pendiente como la razón entre dos diferencias. Los trabajos de Leibnitz muestran mucha rigurosidad en cuanto al formalismo en el lenguaje, sin embargo, hay un uso de elementos de pensamiento variacional y la perspectiva de la cantidad desde el análisis infinitesimal está ligado al pensamiento en cuestión.

3.2.4. Transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal

Esta cuarta etapa se caracteriza por el uso de infinitésimos pequeños y grandes surgidos de la teoría de las razones primeras y últimas de Newton en su perspectiva del análisis infinitesimal.

Este periodo presentó dificultades para los matemáticos de la época, siendo una ellas, la necesidad de extender las operaciones del análisis a un mayor número de funciones y lograr establecer una idea clara de dependencia funcional. Uno de los desafíos de ese momento fue establecer un significado para el concepto de función y sus manipulaciones algebraicas. Los matemáticos del siglo XVIII que se preocuparon de la fundamentación del análisis, intentaron clarificar algunos matices místicos propios de la época.

Presentamos a continuación algunos de los aportes que realizaron Euler, D'Alembert y Lagrange en el desarrollo evolutivo del cálculo y, además las manifestaciones de pensamiento variacional presentes en esta cuarta etapa.

Euler (1707-1743)

Los trabajos desarrollados por Euler tomaron como punto de partida el cálculo diferencial de Leibnitz y el método de fluxiones de Newton, siendo integrados en una rama más general de las matemáticas que conocemos como análisis, el cual centra su estudio en los procesos infinitos. Euler plantea la regularidad de las funciones, introduciendo la función continua como sumas, productos y composiciones de funciones elementales.

Los trabajos de Euler se nutren de lo desarrollado por Newton y Leibnitz, sin embargo, hay una cuota de aporte personal en lo que respecta al estudio de los procesos infinitos, fundamentación teorica de variable, función, nuevos conceptos relativos a la función y el desarrollo de operaciones entre estas. El pensamiento variacional en los trabajos de Euler se manifiesta con cierta rigurosidad y dinamismo a la vez. El primer aspecto en el sentido de establecer un lenguaje propio en el análisis, y el segundo, evidenciado en los procesos infinitos que son expresados mediante sumas, productos y composición de funciones.

D'Alembert (1717-1783)

Su aporte en el análisis más notable fue la creación de la Teoría de los límites realizando modificaciones al método de las primeras y últimas razones propuesto por Newton. D´Alembert propuso una definición de límite funcional en los siguientes términos:

"Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante, la cantidad que se aproxima pueda sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente asignable".

En esta definición de límite, las variables son monótonas y el límite unilateral, es decir, la magnitud que se aproxima no le puede superar, y así, aunque la aproximación es objetiva no se puede tener un control completo de la misma.

La definición de limite propuesta por D'Alembert refleja una movilización en las aproximaciones bajo ciertas condiciones, y desde esta perspectiva los conceptos dinámicos están condicionados. Cabe señalar que el cambio, cuantificación de ese cambio están implícitos en la perspectiva del límite de D'Alembert. Esto implica que el pensamiento variacional esta evidenciado de alguna manera en sus trabajos.

Lagrange (1736-1813)

Su aporte en el análisis se ve reflejados en sus trabajos relacionados con el desarrollo de funciones en series de potencias, por ejemplo, funciones analíticas expresadas con series y sin utilizar límites en sus desarrollos.

Lagrange introduce la teoría de funciones analíticas, y la derivada entendida como el coeficiente lineal del desarrollo de series de potencias de una función en torno a un punto dado. Esto es:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f'(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots + \cdots$$

Y, si se desarrolla esta serie en torno al punto $x = a$ se tiene que:

$$f(x+h) = f(a) + f'(a)(x-a) + f'(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + \cdots$$

Los trabajos de Lagrange se orientaron a formalizar las funciones analíticas desde el desarrollo de series, al igual para la derivada introduce el desarrollo de una serie. Las manifestaciones del trabajo de pensamiento variacional aparecen implícitos en la perspectiva de Lagrange, específicamente en el uso de las funciones analíticas como un instrumento de predicción que es uno de los elementos del pensamiento variacional que hicimos mención en el capítulo dos de este trabajo.

3.2.5. Aritmetización del Análisis

Esta etapa se caracteriza por la gran cantidad de obras matemáticas orientadas a la formalización de ciertos objetos matemáticos, por ejemplo, la Teoría de límites. Los matemáticos de esa época se propusieron darle otros fundamentos a la base del análisis matemático desarrollado en otras épocas. Clarificar el concepto de función, la aparición de nuevos problemas matemáticos y físicos, y la evolución de la enseñanza de las matemáticas fueron algunas de las propuestas de sus trabajos.

La matemática posterior a la Revolución Francesa pasa a ser una disciplina obligatoria en ciertas universidades, y los matemáticos se ven obligados a enseñar análisis matemático y, por tanto, tienen que apoyarse en unas bases rigurosas.

Durante esta quinta etapa de evolución del cálculo, destacamos algunos de los aportes de Cauchy, Bolzano y Weierstrass que han trascendido en la enseñanza de esta disciplina en los diferentes contextos. Además destacamos manifestaciones de pensamiento variacional que se distinguen en sus aportes.

Cauchy (1789-1857)

Retoma el concepto de límite de D'Alembert, rechazando el planteamiento de Lagrange, prescinde de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, dándole un carácter más aritmético, más riguroso, pero aún impreciso. Cauchy reconoce a los infinitésimos como una cantidad variable que converge a cero.

Cauchy aboca el análisis en el concepto de límite, para el cual propone la siguiente definición: “cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás”.

En la definición que propone Cauche observamos dinamismo, y se explicita el concepto de variable, cambio y variación al referirse aproximarse y diferir tan poco como se quiera. La manifestación de estos elementos de pensamientos variacionales queda evidenciado en su propuesta.

Bolzano (1781-1848)

Su aporte al análisis es la definición de continuidad basada en la de límite. De hecho la obra de Bolzano se desarrolla de forma paralela a la de Cauchy, basada en la misma idea de límite.

Bolzano desarrolla una idea dinámica del límite matemático similar a la de Bolzano y la manifestación de pensamiento variacional se explicita en los elementos de cantidad, cambio y variación al igual que Cauchy. Bolzano además proporciona la formalización de continuidad fundamentada en el límite matemático.

Weierstrass (1815-1897)

Su aporte más significativo es la definición formal de límite con la que contribuyó con notoriedad a la aritmetización del análisis. Weierstrass criticó la expresión la variable se acerca a un límite puesto que, según él, esto requiere tiempo y movimiento, y dio una formulación métrica, puramente estática, definición bastante cercana a la que se utiliza hoy en día. La definición que introduce Weierstrass es:

"Si, dado cualquier ε, existe un n_0, tal que para $0 < n < n_0$, la diferencia $f(x_0 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$".

La noción de límite es ya, en esta etapa, una noción matemática que sirve como soporte a otras como la continuidad, la derivada y la integral, hecho que ha contribuido a un uso universalizado de la misma.

Sin embargo, esta definición, que evoluciona desde la concepción dinámica de Cauchy a una concepción estática, no es el final de un largo proceso evolutivo, ya que en el siglo XX surgen concepciones de tipo topológico, ligadas a la generalización de los conceptos del cálculo a conjuntos no necesariamente numéricos, lo que constituye un nuevo desarrollo del concepto.

La perspectiva de Weierstrass se enfoca en aspectos métricos en términos lógicos y formales. Al interior de su perspectiva hay elementos de pensamiento variacional inmersos tales como variables, vecindades, entornos, y por consiguiente la cuantificación de esas cantidades ε, δ y la relación que pueda darse entre esas cantidades.

CAPÍTULO 4

Instrumentos diseñados e Implementados para caracterizar y categorizar el pensamiento variacional emergente en estudiantes que inician cálculo

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los instrumentos que fueron tanto diseñados y utilizados para recolectar la información de la población y muestra provista por estudiantes de Cálculo inicial de la Universidad Católica del Maule. Todo ello fue descrito con más detalle, en el apartado de metodología del capítulo anterior. Los instrumentos fueron validados por profesores de Didáctica de la Matemática de la Universidad Católica del Maule, quienes se desempeñan como profesores de asignaturas relacionadas con el cálculo, y que además, poseen amplia experiencia en los programas de Magíster de la Universidad Católica del Maule.

Este capítulo se ha dividido en tres apartados: el primero hace referencia a los aspectos relativos a la prueba de diagnóstico; el segundo apartado alude a las secuencias de aprendizaje que se diseñaron; y, finalmente en el tercer apartado presenta una prueba escrita que tuvo un doble propósito, mostrar tanto cualitativamente, como cuantitativamente la evolución que presentaron los estudiantes en elementos de pensamiento variacional.

4.2. PRUEBA DE DIAGNÓSTICO

La primera actividad que se consideró en la investigación fue la aplicación de una prueba de diagnóstico (anexo1) elaborada por docentes especialistas en cálculo que imparten clases en la Universidad Católica del Maule y que poseen tanto conocimientos disciplinares como en didáctica de la matemática.

La prueba diseñada fue construida sobre la base que los alumnos que ingresan a un primer año de la universidad han cubierto ciertas temáticas matemáticas específicas y han desarrollado habilidades cognitivas que les permiten enfrentar diferentes situaciones, sean de carácter matemático o extramatemático. En este sentido, y en consonancia con los objetivos del curso de Cálculo, se elaboró un instrumento para conocer la emergencia de elementos de pensamiento variacional en posibles situaciones que los alumnos pudieran interpretar como dinámicas, e intentaran establecer relaciones entre variables que les permitieran conjeturar comportamientos covariacionales, a la vez que pudieran describirlos o representarlos mediante diversos tipos de expresiones.

La prueba diagnóstica se conformó de siete ítems, la cual consideró diferentes situaciones, contextos, registros de representación, niveles de dificultad y exigencias cognitivas. Todo ello, desde lo curricular propio para estudiantes de primer año de universidad.

A continuación, se presenta la descripción de cada uno de los ítems que conformó la prueba.

Problema 1. La figura que se muestra a continuación, está formada por una sucesión de hexágonos regulares construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados, tal como se ilustra en la figura 4.1. La consigna se compone de:

a) Haga todos los comentarios que considere pertinentes si el proceso de construcción de la figura continúa de manera indefinida y,

b) agregue otros comentarios que estime pertinentes, si supone que el lado del primer hexágono de la figura mide 1 metro.

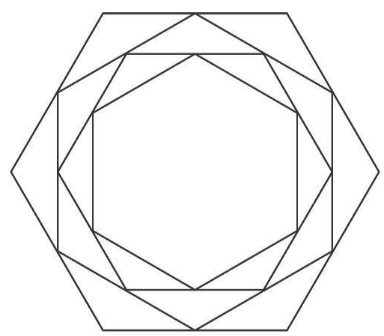


Figura 4.1. Sucesión de polígonos regulares Inscritos

Problema 2. Se proporciona un modelo matemático constituido por dos variables, el cual está expresado por la representación algebraica $E(t) = 5 + 3^{-t}$.

El modelo matemático corresponde a una función exponencial que describe la evolución de una especie en el tiempo. La tarea solicita a los estudiantes presentar argumentaciones respecto a la evolución de la especie durante el tiempo.

Problema 3. Se presenta un modelo matemático que corresponde a una función racional, expresada en un registro algebraico, $A(t) = \frac{6t}{t+9}$ litros por hora, la cual está asociado a cierto estanque que tiene capacidad para contener 6000 litros de agua, e inicialmente el estanque está vacío y se vierte agua en él a razón $A(t)$. La tarea para los estudiantes consiste en determinar:

a) ¿Cuánto tiempo deberá esperar para que el agua vertida supere los 5.000 litros?

b) ¿Cuándo llegará a llenarse el estanque?

Este modelo está asociado al llenado de un estanque con cierta capacidad inicial, en cual se vierte agua en el tanque, a razón de litros por hora, de acuerdo al modelo algebraico que se les proporciona. Se les solicita a los estudiantes calcular el valor del tiempo para dos condiciones específicas.

Problema 4. Se proporcionan tres gráficas, cada una con dos variables, la independiente referida al tiempo y la dependiente asociada al efecto de permanencia de un medicamento en la sangre.

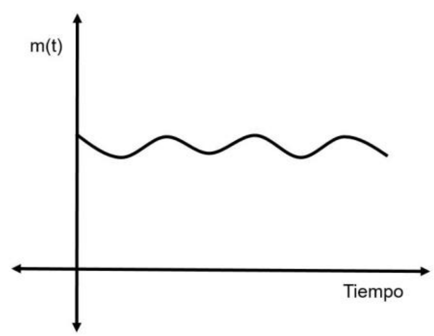


Figura 4.2. Gráfico asociado a una curva con variaciones en intervalos

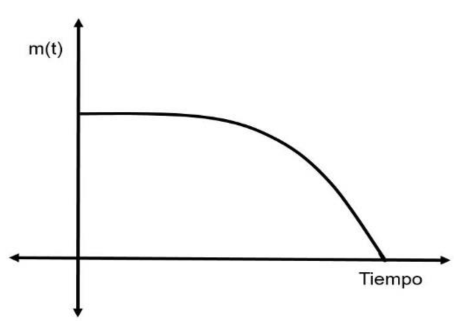


Figura 4.3. Gráfico asociado a una curva descendente con una variación acentuada

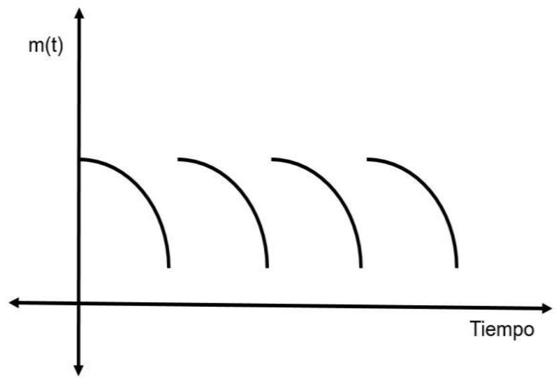


Figura 4.4. Gráfico asociado a una función a trozos y con variación en cada intervalo

Esta actividad contiene tres situaciones expresadas en lenguaje natural referidos a la permanencia de distintos medicamentos en el torrente sanguíneo. Se les solicita a los estudiantes que asocien cada gráfica a cada situación particular, y a su vez que describan los argumentos del por qué seleccionaron una gráfica con una determinada situación.

La primera gráfica corresponde a una función continua en un intervalo, con algunas fluctuaciones en el crecimiento y en el decrecimiento. La segunda gráfica, no inicia en el eje de las abscisas, sin embargo, muy cercano a este y, es decreciente en todo el intervalo. La tercera es una gráfica que corresponde a una función discontinua definida a trozos, y cuya representación gráfica está constituida por cuatro curvas descendentes.

Problema 5. Se le presentan 6 frascos y 9 gráficas. Elige la gráfica correcta a para cada frasco. Dibuja cómo deberían de ser los frascos que corresponden a las dos gráficas restantes. Dé la justificación que usted considera para cada una de las gráficas asociadas al frasco respectivo. De igual forma si consideras que alguna (s) de las gráficas que se te proporcionan no describen de la mejor manera la situación para el recipiente puedes proponer una o puedes hacer un diseño para la gráfica que se te ha proporcionado. En estos casos, escribe las justificaciones pertinentes.

Presentar argumentos de la escogencia de cada gráfica asociada a un frasco, seleccionar la gráfica adecuada, presentar otras gráficas que consideres apropiada.

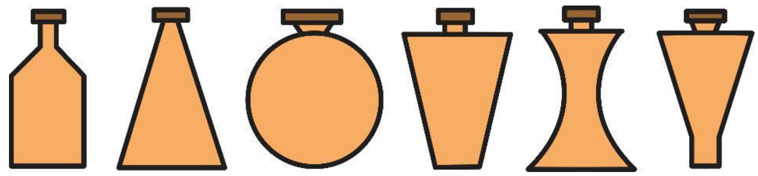


Figura 4.5. Diagramas relativos a diferentes recipientes

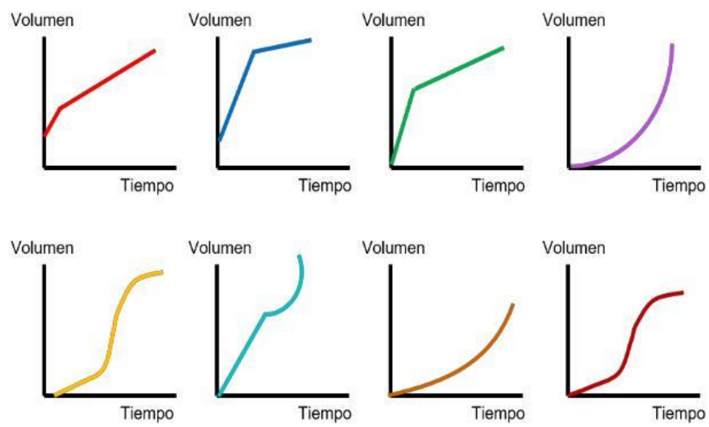


Figura 4.6 Gráficas asociadas a diferentes recipientes

Se proporcionan seis frascos de distintas formas geométricas, y nueve gráficas que tienen el tiempo como su variable independiente y el volumen como su variable dependiente.

Las gráficas proporcionadas modelan el llenado de recipientes, estas presentan distintas características; unas presentan combinaciones de dos líneas rectas con diferentes pendientes, y otras presentan combinaciones de curvas y rectas. Se les solicita a los estudiantes que asocien el llenado de los frascos de la figura 4.5 con una gráfica proporcionada con figura 4.6. Además que diseñen otros frascos para las gráficas faltantes, y/o que propongan otros gráficos para alguno(s) de los gráficos que se les brindó.

Problema 6 La actividad proporciona tres diferentes situaciones en lenguaje natural que se ilustren mediante una gráfica que las represente. Se solicita bosquejar la altura de los rebotes de una pelota que cae desde la azotea de una casa con respecto al tiempo, la altura con respecto al tiempo de izar manualmente una bandera en una asta y, la altura que alcanza el líquido en el recipiente que se muestra en relación con el tiempo.

Las tres situaciones planteadas requieren que el estudiante pueda modelar mediante un gráfico cada una de ellas, atendiendo a su experiencia previa y atendiendo a la naturaleza de las situaciones antes señaladas.

Problema 7 Se presenta una situación descrita mediante una gráfica que está asociada a dos variables: la independiente el tiempo, y la dependiente la velocidad de acuerdo a la siguiente figura.

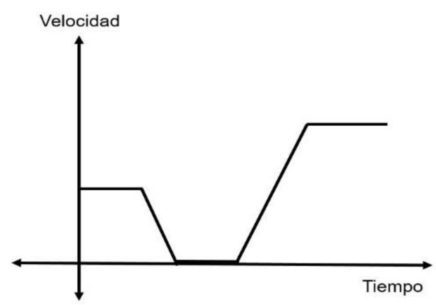


Figura 4.7 Gráfica asociada a una situación problema

La gráfica proporcionada corresponde una función definida a continua en todo su intervalo y se refleja un comportamiento de la siguiente manera: en un primer intervalo se mantiene constante la velocidad, luego en otro intervalo de tiempo menor al primero, disminuye la velocidad para luego detenerse por un intervalo de tiempo similar al primero, luego aumenta la velocidad en un intervalo considerable de tiempo con aceleración constante en ese intervalo; para finalmente, mantener la última velocidad alcanzada en el otro intervalo de tiempo.

Con base a cuatro enunciados expresadas en lenguaje natural y referidas a ciertos contextos dinámicos de índole extra matemático, pero que pueden modelarse mediante un proceso intramatemático, se les solicita a los estudiantes que seleccionen a su criterio el enunciado que se ajusta de mejor manera a la gráfica proporcionada anteriormente, y, que además, presenten los argumentos del por qué seleccionan o no un enunciado específico.

Los cuatro enunciados son:

a) Ricardo salió a caminar cerca de una pendiente y le tomó menos tiempo bajar por el lado más bajo que por el más alto.

b) Maribel manejaba su coche a cierta velocidad, un policía le dijo que se detuviera y después de recibir una infracción y de que el policía se retiró, ella manejó más rápido. Llegó a una velocidad mayor a la que venía circulando y mantuvo esa velocidad durante cierto tiempo para recuperar el tiempo perdido por la infracción.

c) En un tanque había cierta cantidad de agua que quedó de la noche anterior. Pedro se empezó a bañar e hizo que la velocidad del flujo de salida de agua se redujera a cero. Tiempo después llegó el agua al tanque hasta que quedó lleno.

d) Beatriz vive en una casa a desniveles. Se encuentra sentada en la cocina de su casa durante cierto tiempo. Sube las escaleras hacia la sala de su casa y se queda viendo la televisión durante algún tiempo. Finalmente sube las escaleras hacia su recámara y se queda dormida.

4.3. SESIONES DE ESTUDIO

La segunda actividad se presentó mediante el diseño de tres secuencias de aprendizaje elaboradas por el profesor del curso que participó durante todo el proceso de investigación.

Estas consignas propuestas fueron pensadas para ser desarrolladas en equipos de trabajo, tanto en el aula como fuera de ella. Se privilegió lo segundo para evitar algún tipo de presión producto del entorno, u otro distractor.

Con esta modalidad, el profesor del curso pretendía que los estudiantes se potenciarán entre ellos, tuvieran espacios de libertad en los cuales pudieran expresar sin la presencia de una figura institucional sus ideas, sus aportes, sin temor al error y así, generaran razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos proporcionados en cualquier tipo de lenguaje que manifestara una comunicación ya fuese verbal, gráfica, algebraica o de otro tipo. Además que pudiera ser interpretada como una manifestación de pensamiento matemático o pre matemático, en particular como pensamiento variacional o pre variacional.

Los estudiantes debían hacer sus reportes, ya fueran de audio, audio video, escritos o subirlos a la plataforma. Los desarrollos presentados por los equipos se compartieron y se discutieron en la sala de clase una vez se venciera el plazo estipulado por el consenso de profesor y estudiantes para el desarrollo de la actividad.

A continuación, presentamos la descripción y las consignas de cada una de las sesiones de estudio implementadas durante la investigación.

Primera Sesión

La sesión se expresa con la combinación del registro escrito con el figural y se orientó a explorar conocimientos, habilidades y procedimientos en situaciones que requieren el uso de visualización en un primer momento y luego la movilización de otras habilidades cognitivas y habilidades matemáticas específicas. La sesión propuesta persiguió además a caracterizar elementos emergentes de pensamiento variacional en las producciones efectuadas por los estudiantes.

La sesión se dividió en tres partes, la primera enfocada en la visualización de propiedades que muestran algunos seres vivos de nuestro entorno que a su vez están ligados a ciertos objetos matemáticos. La segunda actividad también orientada a la visualización y a la deducción de algunos procesos y su relación con el aspecto uno y, la tercera consistió en formalizar las partes una y dos y obtener conclusiones de estas para deducir ciertas propiedades de ciertos objetos matemáticos.

Se presenta la sesión dos y sus consignas involucradas.

- **Primera parte**

Las imágenes que se muestran a continuación se encuentran con frecuencia en la naturaleza. Se trata de encontrar en ellas, propiedades que puedan ser interpretadas como regularidades matemáticas (geométricas, algebraicas o aritméticas). Es decir, comportamientos que se “repiten de alguna forma” en el objeto de observación. Estas interpretaciones sirven para elaborar modelos matemáticos mediante los cuales se pueden estudiar sus propiedades.

Descubra el máximo de propiedades de los objetos que se muestran y haga una lista de ellas.

Figura 4.8. Planta de sábila

Figura 4.9. Los pétalos de girasol

Figura 4.10. Estructura de un caracol

Figura 4.11. El fruto de la piña

Segunda parte

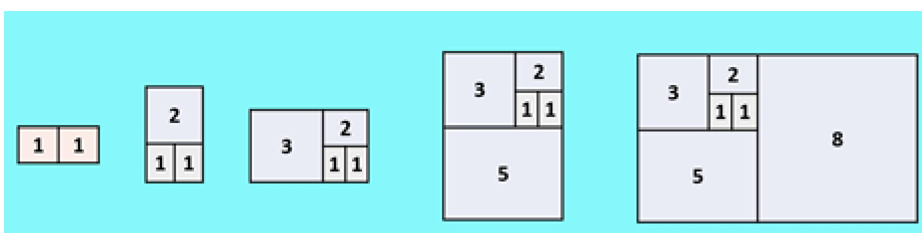


Figura 4.12. Diferentes sucesiones de rectángulos.

¿Hay propiedades que sean comunes a todas las imágenes observadas en la primera parte del trabajo?

¿Qué tienen en común? Comente con su grupo de trabajo.

¿Tienen propiedades que se puedan expresar en términos matemáticos? ¿Cuáles?

En la figura 5 se muestra una sucesión de rectángulos ¿tiene alguna relación con las figuras 1, 2, 3 y 4?

Si esta sucesión de rectángulos continúa indefinidamente ¿cuál es el rectángulo siguiente?

Considerando que la sucesión sea infinita, exprese en lenguaje corriente un método para seguir construyendo cada rectángulo de la sucesión.

¿Se puede asociar alguna sucesión de números a la sucesión de rectángulos?

- **Tercera parte**

1. Escriba los primeros 15 términos de cada una de las sucesiones encontradas como respuesta a la pregunta anterior.
2. Con cada una de las sucesiones encontradas como base, construya una nueva sucesión de la siguiente manera: los términos de la nueva sucesión se determinan dividiendo cada término de la sucesión base por el término anterior.
3. Analice cuidadosamente las sucesiones construidas ¿Hay alguna sucesión “interesante”? ¿Cómo podría llamar a la propiedad que la hace interesante?
4. Exprese las “propiedades” interesantes de manera formal desde el punto de vista del cálculo

Segunda Sesión

Esta actividad esta expresada mediante un registro escrito y, a su vez, de un registro figural que ilustra dos consignas de la situación problema planteada (anexo dos). La actividad se aboca a una situación real en un parque y aprovecha ciertas condiciones para que los estudiantes creen una situación problema que involucre funciones trigonométricas. Una segunda tarea planteada se orienta a indagar la variación de los lados y ángulos bajo ciertas condiciones de variación o de modificación de sus estados. La tercera exigencia del problema se asemeja a la segunda consigna con la diferencia que en la tercera se proporcionan ciertos valores numéricos y en base a ellos se les pide reflexionen en la variación.

Se presenta esta sesión y sus consignas a desarrollar.

- **Primera parte**

Inspirado en las siguientes imágenes, cree una situación problema que involucre funciones trigonométricas.

Figura 4.13. Ilustración para crear Una situación problema(a)

Figura 4.14. ilustración para crear una situación problema (b)

- **Segunda parte**

De un triángulo rectángulo ABC, se conocen las longitudes b y c de los respectivos lados.

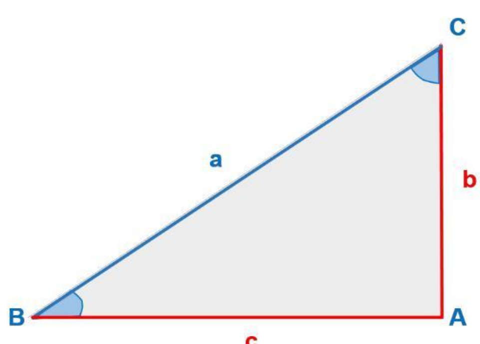


Figura 4.15. Triangulo rectángulo y sus elementos

Describa la variación del ángulo B en los casos siguientes: c disminuye

c crece

Describa la variación del ángulo C en los mismos casos anteriormente considerados.

Describa las posibles variaciones del triángulo en caso que ambos lados, b y c, varían simultáneamente.

¿Qué relación o relaciones algebraicas puede establecer entre los distintos elementos del triángulo?

Determine el valor de las funciones seno, coseno y tangente en los ángulos del triángulo dado, si b = 3 y c = 4

Imagine una situación real en que las situaciones descritas puedan suceder

- **Tercera parte**

Estudie todas las posibles variaciones de los ángulos del triángulo y combinaciones de ellas (incluso de A), y describa el efecto producido por estas, sobre los otros ángulos.

¿Qué efecto tiene una variación de B, sobre el valor de las funciones trigonométricas evaluadas en los otros ángulos?

¿Qué sucedería con las funciones trigonométricas en los otros ángulos si el ángulo A varía dejando de ser recto?

Cuando el ángulo C está aumentando ¿Qué le ocurre al ángulo B?

¿Qué sucede en el caso anterior, con las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente del ángulo B, si el ángulo A comienza a aumentar (disminuir) dejando de ser recto?

Tercera Sesión

Se propuso tres situaciones en la actividad que difieren en el registro que se plantea cada una de ellas, pero todas orientadas a situaciones que involucran variación (anexo cuatro). El propósito de las mismas, al igual que en las sesiones anteriores es indagar respecto a los elementos de pensamiento variacional emergente que se evidencian en las producciones estudiantiles. Presentamos las consignas propuestas en esta sesión.

La primera situación se refiere a una carretera con dirección norte sur en todo su trayecto, se encuentra sin pavimento en un tramo de 800metros entre un punto A y un punto B. Antes del punto A la carretera es horizontal y, después de B, tiene una subida en línea recta con una inclinación de 20º (es decir una pendiente de 1/5). Si se desea pavimentar de modo que en ese trecho la carretera tenga una curvatura de una parábola, describa algebraicamente la parábola.

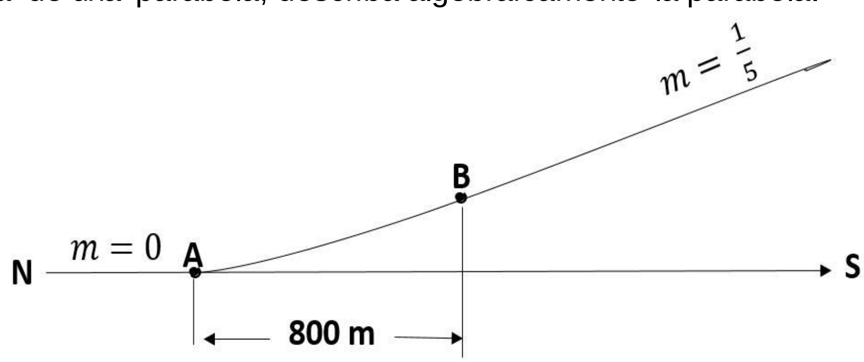


Figura 4.16. Diferentes trayectos de una carretera

La situación dos señala que los puntos de inflexión del gráfico de una función son aquellos puntos donde el gráfico, desde el punto de vista geométrico, cambia de cóncavo a convexo o de convexo a cóncavo ¿Cómo lo describiría desde un punto de vista variacional? ¿Cómo describiría el movimiento de automóvil cerca de un punto de inflexión de su trayectoria? ¿Podría utilizar la derivada de una función para detectar sus puntos de inflexión? ¿Por qué?

La situación tres propone dos funciones f y g, son tales que

$$\lim_{t \to 0} f(t) = 0 \; y \; \lim_{t \to 0} g(t) = 0$$

¿Qué puede afirmar de ella si $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$? ¿Y si $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$?

¿Y si $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \infty$?

De ejemplos para ilustrar cada caso. En cada caso, haga una comparación de tipo geométrico y de tipo variacional de las funciones involucradas

4.4. PRUEBA EVALUATIVA ESCRITA

La prueba diseñada y que fue aplicada a los estudiantes tuvo un doble propósito, evaluar de manera cualitativa y cuantitativa la evolución que muestran los estudiantes en sus producciones escritas en este caso respecto a los elementos de pensamiento variacional emergente (anexo cinco).

La prueba fue conformada por tres problemas expresados en diferentes registros y las tareas solicitadas tuvieron algunos componentes similares, puesto que el centro de los problemas se orientó a indagar diferentes elementos de pensamiento variacional en cada situación propuesta. Enunciamos cada uno de los problemas de la prueba.

Problema 1. Dada la función f de ecuación $f(x) = 2x - x^2$. Determine en qué punto, la recta tangente es paralela a $x + y = 3$. Además, determine la ecuación de la recta encontrada. Represente en la manera que usted considere adecuada, los objetos utilizados.

Problema 2. Un ave migratoria que vuela en dirección norte-sur es observada por un observador que registra su trayectoria. En un tiempo t_0, el ave alcanza una altitud de 1500 metros, justo después de haber seguido por unos instantes, una trayectoria ascendente en línea recta de pendiente m**.** En un mismo tiempo t_0**,** el ave queda oculta por una nube, apareciendo nuevamente a la vista de un observador y después de T segundos, siendo su altitud, en ese instante, la misma que en t_0 y su dirección, ascendente en línea recta, con una misma pendiente m (ver figura demostrativa).

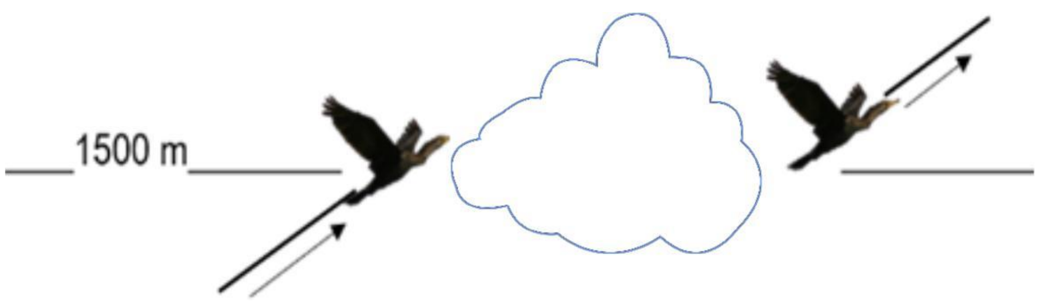


Figura 4.17. Trayecto de vuelo de una especie migratoria

Imagine dos posibles recorridos para el ave durante el intervalo de tiempo $[t_{0,} t_0 + T]$**.** Coméntelos desde un punto de vista variacional.

Suponga que, en el caso ya descrito, $m = 1$, $t_0 = 0, T = 2\pi$. Describa una posible trayectoria del ave empleando una función definida en el intervalo $[t_{0,} t_0 + T]$ de modo que la trayectoria resulte derivable en un intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + T + \varepsilon)$, siendo ε un número positivo pequeño.

Problema 3. Un barco se propone viajar en línea recta desde el puerto A al puerto B, que se encuentra a 150 km. Al zarpar se desvía 15º de su ruta y viaja 50 km antes de descubrir su error ¿Cómo debería corregir la dirección que lleva en ese momento y qué distancia tendrá que viajar para llegar a su destino?

Haga un análisis de la variación de la distancia recorrida después de corregir el rumbo, en función de la distancia recorrida en la dirección equivocada.

CAPÍTULO 5

Análisis de resultados de investigación

5.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo recopila y sintetiza los resultados de la información de los datos obtenidos durante la investigación utilizando diferentes técnicas para la presentación, análisis e interpretación de la información obtenida de los datos recabados a lo largo del proceso de esta investigación.

El capítulo se ha dividido en cuatro apartados. Un primer apartado aporta elementos teórico- procedimentales del Enfoque ontosemiótico (EOS) que abre una perspectiva de este marco teórico como una herramienta de análisis didáctico al servicio tanto en la fase de diseño de actividades, como en implementación en el aula, este último es el caso que atañe a nuestra investigación. Así, EOS constituye nuestro instrumento de análisis cualitativo para caracterizar las producciones estudiantiles en torno al pensamiento variacional emergente, temática a la cual se aboca nuestro trabajo.

El segundo apartado alude al análisis de cada una de las actividades implementadas durante la investigación (prueba de diagnóstico, sesiones de estudio, prueba evaluativa) mediante el análisis sistémico desde un primer nivel de análisis que nos proporciona EOS.

Finalmente, la cuarta sección presenta una reflexión de los resultados obtenidos reconociendo la vinculación de estos y los aspectos convergentes que evidencian la emergencia o no de elementos de pensamiento variacional.

5.2. ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO COMO UNA HERRAMIENTA DE ANÁLISIS DIDÁCTICO EN MATEMÁTICA

Para reflexionar respecto de las producciones estudiantiles presentamos los elementos de un primer y segundo nivel de análisis que propone el enfoque Onto semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). En este enfoque se plantean diferentes categorías de análisis para comprender de manera sistémica el desarrollo de una tarea y una actividad didáctica en fase de diseño o en ejecución.

Un primer nivel de análisis didáctico que es de interés en este trabajo atiende al reconocimiento de un sistema de prácticas que realizan los estudiantes de manera individual o grupal, ya sean estas mediadas por sus conocimientos

previos o por otra entidad externa que puede ser de carácter institucional (curricular, bibliográfica, u otra).

Desde el EOS una práctica matemática, es una actuación o una manifestación (lingüística o no) con la intencionalidad de resolver algún problema intra o extra matemático, compartir una posible solución y validarla para extrapolarla a otras realidades.

En esta práctica matemática intervienen objetos tangibles (ostensivos) y otros no tangibles (no ostensivos). Los primeros compuestos por el uso del lenguaje, símbolos, gráficos u otros, y los segundos referidos a la utilización de conceptos, propiedades, proposiciones, entre otros.

Consideramos relevante reflexionar respecto a cómo las prácticas matemáticas están influenciadas por la experiencia del individuo y cómo son comprendidas por éste, qué objetos matemáticos emergen de las mismas y cómo el objeto emergente adquiere un status derivado de las prácticas precedentes.

El primer nivel de análisis didáctico del EOS propone los elementos constituyentes o primarios en los sistemas de prácticas (Godino, Batanero, & Font, 2007): a) Lenguaje (términos utilizados, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros de representación), b) Situaciones/problemas (descripción de la naturaleza del problema, tarea, ejercicio y si la situación hace referencia a un problema intra o extra matemático, y si este atiende a una situación realista o fantasista), c) Conceptos/Definiciones (empleo o acercamiento a base teórica mediante el uso de definiciones, axiomas, teoremas, propiedades, etc.), d) Procedimientos (empleo de algoritmos, operaciones, técnicas, etc.), e) Argumentos (Sustento teórico explicitado para validar o explicar sus proposiciones y procedimientos).

En la figura 5.1 (Font & Godino, 2006) se ilustran los elementos de este primer nivel de análisis propuesto por el EOS y de pertinencia a esta investigación.

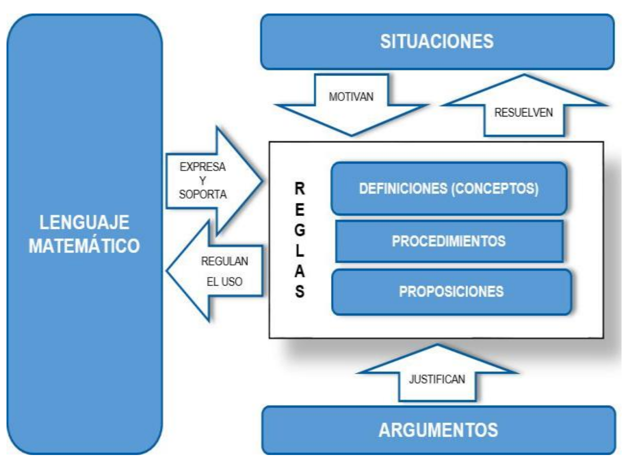


Figura 5.1. Configuración de objetos matemáticos primarios

Interesa en nuestra investigación desde una mirada sistémica, describir, caracterizar y categorizar situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, propiedades y argumentos que utilizan los estudiantes en producciones escritas, o en audio y/o videos tanto en una fase previa como en una fase de proceso que den cuenta de elementos emergentes de pensamiento variacional.

5.3. ANÁLISIS CUALITATIVO DE LAS PRODUCCIONES ESTUDIANTILES

5.3.1 Primer Nivel de Análisis de EOS

5.3.1.1. Prueba de Diagnóstico

5.3.1.1.1 Problema uno

La figura que se muestra a continuación, está formada por una sucesión de hexágonos regulares construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados, tal como se ilustra en la fig. 5.3. La consigna se compone de: a) Haga todos los comentarios que considere pertinentes si el proceso de construcción de la figura continúa de manera indefinida y, b) agregue otros comentarios que estime pertinentes, si supone que el lado del primer hexágono de la figura mide 1 metro.

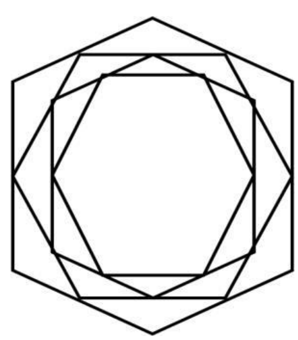


Figura 5.2. Hexágonos Inscritos

De acuerdo al primer nivel de análisis con que aporta el EOS, abordamos de manera sistémica esta tarea, considerando las respectivas categorías: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas en la ejecución del curso y analizadas en este trabajo. Las preguntas que guían nuestro análisis son las siguientes ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de instrucción analizado? ¿Cómo se secuencian o se relacionan? ¿Qué lenguaje específico utilizan? ¿Cómo argumentan? ¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados? ¿Cuáles son los elementos emergentes que son inducidos por los enunciados de los reactivos y cuáles son propios y responden al uso de sus conocimientos y concepciones previas en respuesta a los requerimientos de la actividad planteada?

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de instrucción analizado? ¿Cómo se secuencian o se relacionan? La actividad se presenta en un registro figural que muestra cuatro hexágonos regulares construidos, cada uno en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La actividad plantea que los hexágonos se construyen de manera indefinida atendiendo a ese patrón.

La consigna se compone de dos partes: a) Haga todos los comentarios que considere pertinentes si el proceso de construcción de la figura continúa de manera indefinida y, b) agregue otros comentarios que estime pertinentes, si supone que el lado del primer hexágono de la figura mide 1 metro. La tarea está planteada de modo general, pues se trata de analizar si en el desarrollo de la misma, los estudiantes manifiestan alguna forma de pensamiento variacional sin que esta sea inducida en el enunciado de la tarea. La actividad lleva a los estudiantes a hacerse preguntas acerca de las propiedades que tendrán los hexágonos en el proceso de construcción de la figura. En este punto los estudiantes pueden visualizar las propiedades de cada hexágono de manera individual o secuencial, en el segundo caso surge la posibilidad de que detecten la presencia de variables, busquen y establezcan dependencias entre las mismas.

Las respuestas a las cuestiones planteadas requieren la explicación del proceso de construcción las que podrán ser dadas en términos de covariaciones entre las variables o en términos descriptivos de los hexágonos vistos de manera individual. Ambas consignas planteadas en la situación exigen poner en juego procedimientos y dominio en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además del empleo de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, conjeturar, representar y comunicar entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo elemental permite generar modelos matemáticos de la situación planteada en diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros).

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total

E1: “siempre el hexágono interior va a ser más pequeño que el exterior y sus lados sean la mitad del hexágono del hexágono antes definido”.

E3: “considera que para que el proceso de construcción continúe indefinidamente, todo depende de sus variables (como pueden ser sus medidas)”.

E5: “El proceso de tomar un pentágono de un tamaño, este se irá achicando, es decir, la medida de sus lados irá disminuyendo hasta llegar a un punto que no se puede sacar más distancias”.

E8: “A medida que existan más hexágonos dentro del inicial, el área de estos irá decreciendo a medida que avanza. Lo mismo ocurre con sus perímetros y la longitud de sus lados… si el proceso de construcción continuara llegaría un momento que la figura deberá ser microscópica ya que el hexágono se construye con los puntos medios del anterior como estos son medidas numéricas siempre existirá la mitad de un número por más pequeño que sea”.

E20: “A medida que existan más hexágonos dentro del inicial, el área de estos irá decreciendo a medida que avanza. Lo mismo ocurre con sus perímetros y la longitud de sus lados”.
E30: “Si el proceso de construir indefinidamente, la cantidad de hexágonos irá creciendo con hexágonos cada vez más pequeños, la cantidad de hexágonos crece indefinidamente”.” Si el hexágono grande mide 1metro de lado(a)…entonces el lado del hexágono inmediatamente menor será$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y el que vendrá será $\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$ y el otro $\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2}$ $=\frac{3}{8}\sqrt{3}$, y el otro $\frac{3}{8}\sqrt{3}.\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{16}$ y así sucesivamente”. “Todos los hexágonos van presentando un decrecimiento que puede ser establecido por medio de una función”. “Se puede conocer el área de cada uno de los hexágonos al saber la medida del lado del hexágono inicial y al tener la medida de sus ángulos y los ángulos que se forman en los puntos que se trazan los hexágonos podemos determinar la medida de los lados de los hexágonos más pequeños por medio de trigonometría”.

E18: “Continúa indefinidamente”. “Se puede decir que las primera gráficas al ser un metro, en la siguiente será 0,5, luego 0,25, después 0,125. Se puede decir en este caso la función es: $f(x)=\frac{1}{2x}$., x: es el exponente creciente que parte desde 0 hasta el infinito”.

E23: “La figura será indefinida veces y cada vez el lado de cada hexágono disminuirá a la mitad”. “Si el lado fuera un metro el siguiente sería la mitad y así sucesivamente como podría mostrarla esta fórmula h(x)=$\frac{1}{2}x$, con x número de hexágonos dentro de la primera figura”.

E32: “Es posible que el hexágono siga dibujándose infinitamente hacia dentro a medida que avanza. Lo mismo ocurre con sus perímetros y la longitud de sus lados”.

E19: “Cada vez los hexágonos serán más grandes, el primero siempre será el más pequeño, da una sensación de que fueran un círculo y los hexágonos generan”.

E8: “Al continuar agregando hexágonos regulares, el hexágono regular el cual se empezó versus los que están dentro de el, van disminuyendo su tamaño, mientras más hexágonos, cada hexágono va disminuyendo sus medidas”. “El diámetro de las circunferencias es cada vez más pequeño”.

E9: “El Proceso de construcción continúa indefinidamente al ser un fractal. Si el lado es l podemos declarar la fórmula del hexágono en función del triángulo de lado l. Ya despejada la fórmula del área en función del área de los triángulos solo nos falta deducir en cuanto se reduce el lado del triángulo para obtener la función del fractal”.

E15: “La imagen representa un fractal el cual estará indefinidamente repitiéndose no con el mismo tamaño, pero si la figura”.

E3: Todos los hexágonos van presentando un decrecimiento que puede ser establecido por medio de una función”. “Se puede conocer el área de cada uno de los hexágonos al saber la medida del lado del hexágono inicial y al tener la medida de sus ángulos y los ángulos que se forman en los puntos que se trazan los hexágonos podemos determinarla medida de los lados de los hexágonos más pequeños por medio de trigonometría”.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

Figura, sucesión, construcción geométrica, polígono regular, hexágono, longitud, medida, interior, vértice, punto medio, lado, proceso.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):
Hexágono interior, hexágono exterior, decrecimiento, tamaño, achicando, (hexágono) grande, microscópica, pequeño, (hexágono) exterior, variable, tamaño, achicando (la medida de sus lados irá disminuyendo), área, perímetro, dentro, microscópica (figura), indefinidamente, gráfica, función, indefinida, sucesión, infinitamente hacia dentro, razón, círculo, diámetro, circunferencia, fractal, ángulo, fórmula, trigonometría.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que la mayoría de ellos atendió las dos consignas planteadas en la situación, sin embargo, un estudiante propuso un nuevo problema a partir de la situación inicial: Tenemos una sucesión de hexágonos continua hacia afuera.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

Siempre el hexágono interior va a ser más pequeño que el exterior y sus lados sean la mitad del hexágono del hexágono antes definido.

Para que el proceso de construcción continúe indefinidamente, todo depende de sus variables (como pueden ser sus medidas).

El proceso de tomar un pentágono de un tamaño, este se irá achicando, es decir, la medida de sus lados irá disminuyendo hasta llegar a un punto que no se puede sacar más distancias.

A medida que existan más hexágonos dentro del inicial, el área de estos irá decreciendo a medida que avanza. Lo mismo ocurre con sus perímetros y la longitud de sus lados…

Si el proceso de construcción continuara llegaría un momento que la figura deberá ser microscópica ya que el hexágono se construye con los puntos medios del anterior como estos son medidas numéricas siempre existirá la mitad de un número por más pequeño que sea.

Si el proceso de construir indefinidamente, la cantidad de hexágonos irá creciendo con hexágonos cada vez más pequeños, la cantidad de hexágonos crece indefinidamente.

Si el hexágono grande mide 1metro de lado(a)…entonces el lado del hexágono inmediatamente menor será($\frac{\sqrt{3}}{2}$) y el que vendrá será$\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$ y el otro $\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2}$ =$\frac{3}{8}\sqrt{3}$, y el otro $\frac{3}{8}\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{16}$ y así sucesivamente.

La figura será indefinida veces y cada vez el lado de cada hexágono disminuirá a la mitad. Si el lado fuera un metro el siguiente sería la mitad y así sucesivamente.

Se puede calcular el área de alguno de los hexágonos dibujados en el interior. Se forman triángulos entre cada hexágono dibujado… También se puede hacer una función algebraica que determine la medida de los triángulos en cuestión.

Se crearán infinitos triángulos bajo la razón $6(n+1)$ el perímetro de los hexágonos bajará mediante la misma fórmula.

El segundo hexágono tendrá distinta área siempre menor que el hexágono menor al hexágono n°1.

Cada vez los hexágonos serán más grandes, el primero siempre será el más pequeño. Da una sensación de que fueran un círculo y los hexágonos generan.

Al continuar agregando hexágonos regulares, el hexágono regular el cual se empezó versus los que están dentro de él, van disminuyendo su tamaño, mientras más hexágonos, cada hexágono va disminuyendo sus medidas. El diámetro de las circunferencias es cada vez más pequeño.

El Proceso de construcción continúa indefinidamente al ser un fractal.

La imagen representa un fractal el cual estará indefinidamente repitiéndose no con el mismo tamaño, pero si la figura.
Todos los hexágonos van presentando un decrecimiento que puede ser establecido por medio de una función.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

En general los estudiantes hacen afirmaciones basados en aspectos visuales e intuitivos, sin embargo presentan también argumentos con características variacionales:

Si el proceso de construcción continuara, llegaría un momento en que la figura deberá ser microscópica, ya que el hexágono se construye con los puntos medios del anterior. Al ser estas medidas numéricas, siempre existirá la mitad de un número por más pequeño que sea (…) cada vez el lado de cada hexágono disminuirá a la mitad. Si el lado fuera un metro el siguiente seria la mitad.

Los estudiantes utilizan argumentos algebraicos para justificar la construcción de una secuencia de medidas asociadas a los elementos de los hexágonos.

Mientras más hexágonos, cada hexágono va disminuyendo sus medidas.

Un estudiante usa el hecho de que la figura sea un fractal para argumentar la infinitud del proceso de construcción de hexágonos.

Algunos estudiantes argumentan la posibilidad de construir indefinidamente los hexágonos con el hecho de que medidas numéricas siempre pueden dividirse.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan

¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: En relación a los objetos matemáticos involucrados en el enunciado de la actividad, tales como hexágono regular, sucesión, construcción, interior (de una figura), vértice, lado, punto medio, proceso, medida, los estudiantes tienen las concepciones clásicas y una buena comprensión de ellos; de hecho,

esto les permite abordar la actividad sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos.

Emergentes:

Fractal: Lo mencionan dos estudiantes del grupo de estudio, tienen concepciones confusas asociadas a este objeto geométrico y la percepción de

que la figura representa un fractal proviene del proceso (infinito) de construcción, sin considerar la propiedad visual de auto similitud; sin embargo, esta confusión no obsta para los objetivos de la investigación.
Expresan, además, el concepto de “función del fractal”, sin que quede clara la concepción que tienen del mismo.

Función: la mayoría de los estudiantes usa funciones para expresar las áreas o longitudes de figuras o segmentos y caracterizar las formas de decrecimiento de estas cantidades. Muestran un buen dominio del álgebra involucrada en los cálculos; sin embargo, salvo en pocos casos, hacen interpretaciones erradas de las relaciones entre las variables involucradas, logrando modelos que no interpretan adecuadamente el proceso. Asociado al concepto de función, y reconocen variables, pero en la interpretación de la función como modelo, muestran no considerar su variación dentro de un proceso dinámico, quedándose únicamente con la relación biunívoca estática pre imagen-imagen.

Los estudiantes en su mayoría hablan de decrecimiento y crecimiento (expresado en distintos términos) para describir lo que ocurre en el proceso de construcción de hexágonos y elementos asociados a estos.
Descubren como elementos variables, las medidas asociadas a los perímetros, áreas, radios de circunferencias, etc., mostrando tener una idea clara de estos conceptos.

Los estudiantes realizan procesos de visualización pues atribuyen propiedades a los objetos geométricos en sus representaciones gráficas.

“A medida que existan más hexágonos dentro del inicial, el área de estos irá decreciendo”. En su mayoría los estudiantes construyen funciones para relacionar los hexágonos con expresiones numéricas que describan su forma de decrecimiento, sin embargo, las funciones que encuentran están mal calculadas y no modelan efectivamente el proceso.

De manera particular, E3 enuncia el procedimiento de construir funciones como un procedimiento general y plantea la posibilidad de usar funciones trigonométricas para efectuar ciertos cálculos. E8 valida como procedimiento de construcción de hexágonos el presentado en el enunciado de la actividad pues "(…) como estos son medidas numéricas siempre existirá la mitad de un número por más pequeño que sea.", expresando de manera implícita el hecho que los hexágonos llegarán a ser muy pequeños. Este es el único caso en que un estudiante muestra un procedimiento basado en elementos abstractos y da una razón teórica para justificar el procedimiento de construcción de los hexágonos.

Un número menor de estudiantes hacen algunos cálculos, descomponen las figuras y encuentran un patrón de construcción de los hexágonos, E30 encuentra los primeros términos de un patrón aritmético y no llega a determinar una fórmula algebraica general.

Los estudiantes en su mayoría reconocieron que el proceso de construcción de hexágonos es infinito. Esto fue expresado mediante diferentes argumentaciones discursivas.

En este particular hicieron referencia a la construcción de hexágonos inscritos y a que fue realizada mediante la unión de los puntos medios del hexágono circunscrito anterior, lo que muestra que comprendieron los procedimientos constructivos. A este respecto, los estudiantes sostuvieron que "siempre existirá otro hexágono inscrito, construido en los puntos medios del hexágono circunscrito anterior".

5.3.1.1.2 Problema dos

La población de cierta especie evoluciona en el tiempo de acuerdo al modelo representado por la fórmula: $E(t) = 5 + 3^{-t}$. Haga un análisis de la evolución de la población.

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas

Se responde a las preguntas ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de instrucción analizado? ¿Cómo se secuencian o se relacionan?

Se proporciona un modelo matemático constituido por dos variables, el cual está expresado en un registro de representación algebraico. El modelo matemático corresponde a una función exponencial que describe la evolución de una especie. La tarea de esta actividad solicita que los estudiantes presenten distintos argumentos respecto a la evolución de la especie durante el tiempo.

La tarea está planteada de modo general, pues se trata de analizar si en el desarrollo de la misma, los estudiantes manifiestan alguna forma de pensamiento variacional sin que esta sea inducida en el enunciado de la tarea.

La actividad lleva a los estudiantes a hacerse preguntas acerca de si es posible la evolución de una especie en un lapso de tiempo. ¿Es posible que ocurra? ¿Cómo es que ocurre? y, si ocurre la evolución de la especie ¿Presenta estas fronteras o un valor límite? En esta actividad se requiere que los estudiantes reflexionen, analicen, argumenten y movilicen otras habilidades cognitivas.

En este punto, los estudiantes pueden visualizar que se trata de una función exponencial que está asociada a la evolución de la especie, y, en este sentido, detecten la presencia de variables, busquen y establezcan dependencias entre las mismas. Las respuestas a la cuestión planteada requieren la explicación del proceso de evolución en la medida que el tiempo se modifica. Es posible que los estudiantes logren establecer en términos de covariaciones entre las variables o en términos descriptivos de la evolución de la especie visto de manera individual en un valor puntual.

La consigna planteada en la situación exige poner en juego procedimientos y dominio en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico; además del empleo de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, conjeturar, representar y comunicar, entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo elemental permiten generar modelos matemáticos de la situación planteada en otros registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, tablas u otros).

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total

E18: “Podemos decir que la fórmula tiende a 5 puesto que si “t” va en aumento, y el mismo es negativo, su valor será cada vez más pequeño y se acercará a 5. Entonces podemos decir que la evolución es de 6 a 5”.

E14: “Al ir aumentando el tiempo (' t ') el resultado va disminuyendo por lo tanto la especie va disminuyendo”.

E17: “La población inicial será de 6 e irá disminuyendo a medida que avanza el tiempo”.

E2: “La evolución de la especie va decreciendo, puesto que, a mayor tiempo, su variable 3^{-t} será menor”.

E3: “Primero reemplazo ‘t’ por un valor cualquiera y luego resuelvo la ecuación para determinar la evolución de la población, es decir, si tomamos ‘t’ como la variable tiempo, quiere decir que la población de cierta especie evoluciona en el tiempo dependiendo del tiempo".

E9: "La población va aumentar cada cierto tiempo, ya que al estar elevado a un número negativo provocaría que fuese fracción y las poblaciones no pueden aumentar en decimal, tiene que ser en números enteros".

E21: "La especie tiene una evolución creciente, quiere decir que la población es cada vez mayor, pero su crecimiento es cada vez menor".

E22: "La evolución de la población va disminuyendo, ya que a medida que el

E29: "La población siempre irá creciendo, pero no de manera constante (comprobando con el cambio de variable 't' al conjunto con los valores 1, 2, 3, 4".

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

Población, tiempo, fórmula, evolución, especie, modelo.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica): Tiende a, función, tabla de valores, variables, disminuyendo, menor, decrece exponencialmente, valores positivos, aumenta, tiempo, negativo, pequeño, gráfica, representa, decreciente, menos intensidad, mayor magnitud, tiene origen, base de cinco, grandes cantidades, unidad de tiempo, límite inferior, pasos agigantados, constante, decimales, exponente, velocidad, aumentando considerablemente, bajar, 0, 1, 2, 3, 4,5, fracción, 3^{-t}.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que la mayoría de ellos atendió las consignas planteadas en la situación, sin embargo, dos estudiantes propusieron un nuevo problema a partir de la situación inicial.

Ambos consideraron la posibilidad de la evolución de la especie en tiempos negativos, sosteniendo que en ese caso la evolución seria considerable o crecería a pasos agigantados.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

Podemos decir que la fórmula tiende a 5… Entonces podemos decir que la evolución es de 6 a 5.

Al ir aumentando el tiempo (t) el resultado va disminuyendo. La población inicial será de 6 e irá disminuyendo.

La evolución de la especie va decreciendo.

Quiere decir que la población de cierta especie evoluciona en el tiempo. La población va aumentar cada cierto tiempo

La especie tiene una evolución creciente.

La especie tiene una evolución creciente.

La población siempre irá creciendo, pero no de manera constante.

Se dice que ocurre una evolución en la población... La evolución de $E(t)$, no solo se va acercando a 5.

Como la función de evolución “$E(t)$” usa el valor de “t” como exponente de un número… pero si “t” se usa negativamente,

El comportamiento decrece exponencialmente sin bajar de 5.

Esta función representa a una función exponencial decreciente, en contraste a la evolución de la población.

La población en el tiempo 0 es de 6, a partir de los siguientes tiempos el aumento es en 5… a partir de los siguientes tiempos el aumento es en 5… la variación no disminuirá de 5.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

(…) puesto que si t va en aumento y el mismo es negativo su valor será cada vez más pequeño y se acercará a 5.

(…) por lo tanto la especie va disminuyendo.

(…) a medida que el tiempo avanza.

(…) puesto que, a mayor tiempo, su variable 3^{-t} será menor.

(…) dependiendo del tiempo.

(…) ya que al estar elevado a un número negativo provocaría que fuese fracción y las poblaciones no pueden aumentar en decimal tiene que ser números enteros.

(…) quiere decir que la población es cada vez mayor, pero su crecimiento es cada vez menor.

(…) ya que a medida que el tiempo pasa disminuye la evolución.

(…) comprobando con el cambio de variable “t” al conjunto con los valores 1, 2, 3, 4.

(…) $E(t) = 5 + 3^{-t}$ tenemos que a medida aumente t en $E(t)$ disminuirá el valor de 3^{-t} ... esto ocurre a medida que t va aumentando ya que el tiempo es positivo.

(…) podemos decir que mientras mayor será el número ' t ' menor será la velocidad y capacidad… entonces la velocidad y capacidad de evolución crecerían enormemente.

(…) esto decrece en función del tiempo.

(…) cabe agregar que entre aumente el tiempo seguirá siendo 5…con una gran cantidad de decimales.

(…) si toma valores positivos la t … si t toma valores negativos.

(…) A medida que aumente el tiempo… llegó un punto en que empieza a disminuir con menos intensidad hasta llegar al 5.

(…) por lo que la población en vez de evolucionar, disminuye. cabe agregar que entre aumente el tiempo seguirá siendo 5, …con una gran cantidad de decimales.

(…) cabe agregar que entre aumente el tiempo seguirá siendo 5(…) con una gran cantidad de decimales.

(…) si toma valores positivos la t (…) si t toma valores negativos.

(…) A medida que aumente el tiempo (…) llegó un punto en que empieza a disminuir con menos intensidad hasta llegar al 5.

(…) por lo que la población en vez de evolucionar, disminuye.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan

Previas: En relación a los objetos matemáticos involucrados en el enunciado de la actividad, tales como variable, función, elementos de una función de variable real (dominio, rango), clasificación de las funciones (polinomiales, trascendentes, trigonométricas, etc.), representación de las funciones en diferentes registros (tabular, grafica, algebraica), propiedades de las funciones (intervalos de crecimiento, decrecimiento, intersecciones con los ejes coordenados), cálculo de asíntotas, entre otros, los estudiantes tienen las concepciones clásicas y una buena comprensión de ellos, de hecho esto les permite abordar la actividad sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos.

Emergentes: **No delimitación del dominio de la función**. La situación-problema propuesta se plantea mediante un modelo algebraico que requiere restringir la variable continua tiempo a valores no negativos, por la naturaleza de la situación propuesta que obedece a un crecimiento de una población durante un lapso de tiempo. Dos estudiantes del grupo de estudio, tienen concepciones confusas asociadas al dominio de la función a pesar de realizar cálculos aritméticos coherentes.

E32 argumenta que “Como la función de evolución “$E(t)$” usa el valor de “t” como exponente de un número, pero “t” se usa negativamente, podemos decir que mientras mayor será el número “t” menor será la velocidad y capacidad. Si de evolución en el tiempo. Si “t” tomara un valor negativo, entonces la velocidad y capacidad de evolución crecerían enormemente”. E27: “Dentro del tiempo de evolución de esta especie, si tomamos valores positivos como el constante tiempo dentro de la función $E(t)$, se pueden observar que el crecimiento (por así llamar su evolución) disminuye en el tiempo e incluso podría mantenerse en el tiempo sin ningún cambio, pero si tomamos valores negativos como constante, la evolución aumenta a pasos agigantados, aumentando considerablemente”. Otros estudiantes presentaron argumentos tabulares considerando valores negativos para el tiempo.

Función: la mayoría de los estudiantes usa diferentes representaciones (tabular, gráfica, argumentos escritos) para expresar la evolución de la población y caracterizar el comportamiento de la misma en diferentes tiempos. Muestran un buen dominio del álgebra involucrada en los cálculos, sin embargo, salvo en pocos casos, hacen interpretaciones erradas de las relaciones entre las variables involucradas, logrando conclusiones que no interpretan adecuadamente el proceso. Asociado al concepto de función reconocen variables, pero en la interpretación de la función como modelo, muestran no considerar su variación dentro de un proceso dinámico, quedándose únicamente con la relación biunívoca estática pre imagen-imagen.

Los estudiantes en su mayoría hablan de decrecimiento y crecimiento (expresado en distintos términos) para describir lo que ocurre en el proceso de evolución de la especie y elementos asociados a ésta. Descubren como elementos variables, la cantidad de especies en valores específicos de tiempo de manera discreta, salvo algunos casos que logran predecir la evolución de la especie en el tiempo de manera continúa mostrando tener una idea clara situaciones que involucran variables continuas.

Procedimientos

La mayoría de los estudiantes realizan el cálculo de la evolución de la especie, asignándole valores a la variable ' t ', incluso algunos le asignan valores negativos a la variable ' t ' y presentan los datos en una tabla de valores, y en base a los cálculos obtenidos presentan sus argumentos en lenguaje escrito. E8 asigna los valores de t =0, 1, 2, 3, 4 y obtiene los valores para cada uno de estos, luego argumenta que “La población en el tiempo 0 es de 6, a partir de los siguientes tiempos el aumento es en 5 considerando el resultado como los enteros positivos, cabe agregar que entre aumente el tiempo seguirá siendo 5, …con una gran cantidad de decimales, en conclusión, la variación no disminuirá de 5”. E11 asigna valores a ' t '= -2,-1,0, 1,2 y, argumenta además de la siguiente manera: “Dentro del tiempo de evolución de esta especie, si tomamos valores positivos como la constante tiempo dentro de la función $E(t)$, se pueden observar que el crecimiento (por así llamar su evolución) disminuye en el tiempo e incluso podría mantenerse en el tiempo sin ningún cambio, pero si tomamos valores negativos como constante, la evolución aumenta a pasos agigantados, aumentando considerablemente”.

En algunos otros casos, algunos estudiantes utilizan una gráfica como un medio de visualización para describir y modelar la situación. El estudiante E9 presenta argumentos tabulares, ya que elaboró tabla para t=0, 1, 2, 3, 4, 5, y representó una curva que inicia en E (0) =6 y luego decrece hasta valores próximos al 5. También en estudiante presentó argumentos en forma discursiva:
“realizando el gráfico podemos determinar que dicha especie se está extinguiendo o no está evolucionando”.

Un estudiante E15 presenta sus procedimientos en diferentes registros de representación (tabular, grafica con una asíntota horizontal en E (t)=5, y argumentos discursivos) que evidencian dinamismo en el proceso y dan cuenta de elementos emergentes de pensamiento variacional) este estudiante expresa: “Es una población que tiene origen a base de 5 y decrece exponencialmente a grandes cantidades por unidad de tiempo que tiene como límite inferior 5”.

5.3.1.1.3 Problema tres

Se presenta un modelo matemático que corresponde a una función racional, expresada en un registro algebraico, $A(t) = t + 9^{6t}$ litros por hora, la cual está asociado a cierto estanque que tiene capacidad para contener 6.000 litros de agua, e inicialmente el estanque está vacío y se vierte agua en é. l a razón $A(t)$. La tarea para los estudiantes consiste en determinar en:

a) ¿Cuánto tiempo deberá esperar para que el agua vertida supere los 5.000 litros?
b) ¿Cuándo llegará a llenarse el estanque?

Etapa 1 Se responde a las preguntas básicas

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de instrucción analizado? ¿Cómo se secuencian o se relacionan?

Se les presenta una situación que involucra el llenado de un recipiente que está vacío en su inicio, y que tiene una capacidad total específica. Se vierte agua a razón de un modelo algebraico que corresponde a una función racional y que está definida para dos variables ' t ' y " $E(t)$" que corresponde al tiempo en horas y, litros por hora respectivamente.

Las consignas requieren determinar dos tiempos específicos: uno para que el estanque supere cierta cantidad de litros, y el segundo el momento en que el estanque se llena completamente. Para abordar este problema, lo estudiantes deben movilizar ciertas habilidades cognitivas, en especial la visualización, el análisis y la síntesis para articular correctamente los datos con el modelo para formular una ecuación o una inecuación de acuerdo a los casos propuestos, y luego, determinar un posible conjunto solución que tenga sentido de acuerdo al problema propuesto.

Esto implica que los estudiantes puedan combinar distintos procedimientos, aritméticos, algebraicos y gráficos de modo que puedan complementarse entre sí y, establecer valores adecuados que den cuenta de una posible solución de la situación propuesta.

Los estudiantes deberían atender la situación sin mayor problema, puesto que se trata de temáticas que pudieron ser abordados en su ciclo de escolaridad anterior al universitario, y se conjetura que los estudiantes a este nivel han desarrollado competencias y habilidades que les permitirán enfrentar situaciones problemas cuando ingresan al nivel de educación terciario.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total

E9: “5000 litros se demorarían 16 horas aproximadamente”.

E22: “El tiempo que se debe esperar para que se superen los 500 litros es el tiempo mayor a 45”.

E14: “Para que el agua vertida supere los 5000 litros, debe esperar más de 45000/4994, y para que llegue a 6000 debe esperar 54000/5994”.

E25: “Se supone ‘t’ (que supone es la variable tiempo ya sea en segundos etc. Se despeja igualando a 6000 litros con lo que debería tener el tiempo de ' t ' cuando se llena el estanque con 6000 litros”.

E29: “El estanque estará con la capacidad de 5000 litros de agua cuando llegue al tiempo (t), $t = 9$ (aproximado de tiempo) (Puede ser expresada en segundos, minutos u horas según se indique). Para superar los 5000 l el tiempo deberá ser mayor a 624,25. “Para llenar el estanque (6000 l) se deberá esperar un tiempo aproximado de $t = 9$ aprox”.

E31: “Considero que el estanque llegue a los 5000 litros, primero debemos considerar el tiempo (segundos, minutos, horas, días)”.” El tiempo no es negativo así que no se me ocurre nada más”. Tengo una nueva sospecha porque me habló de volumen (metros cúbicos), sin embargo, no conozco las unidades de medida y sus transformaciones”.

E21: “No se puede determinar ya que no se especifican las unidades de llenado del estanque”.

E1: “El Llenado del estanque en función de tiempo será trabajado en horas y litros”.

E2: “Realizando la tabla de valores pude concluir que el estanque supera los 5000 litros al transcurrir 1,5 segundos, horas, etc. En una gráfica representa una función lineal constante”.

E6: “Se demora 9000't' en que sean 5000 litros”. “1 Se demora 10.800 en que el estanque esté lleno”.

E8: “Jamás llegará a llenarse, tiene que ver con límites”.

E12: “El tiempo que demora en llenarse de 5000 litros a 6000 litros es muy poco, por lo que asumo que la cantidad de agua que entra al estanque aumenta con el tiempo”.

E13: “El estanque al parecer puede superar o igualar los 6 litros de volumen, eso es la fórmula está incorrecta”.

E24: “El estanque se llenará a las 9,001 y superará a los 5000 litros a las 9,001 de ' t '.

E26: “La gráfica es asíntota a las 6 de A por tanto el estanque nunca pasará de los 6 litros”.

E14: “Si tomamos por cada número una aproximación de números primos para llegar a los 5000 litros se toma un tiempo aproximado de 225000 horas y para llenar el estanque se necesitan aproximadamente 300000 horas”.

E13: “El estanque no se llenará más porque ya estaba lleno y de hecho se llenó hace 9009 segundos.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

Estanque, capacidad, litros, agua, inicialmente, vacío, vierte, razón, litros por hora, tiempo, supere, llenarse.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

Demoraría, aproximadamente, horas, tiempo mayor, esperar más, debe esperar, despeja, igualando, considerar tiempo (segundo, minutos, horas), volumen, unidades de medida, sospecha, transformaciones, límites, muy poco, tiempo, gráfica, asíntota, fórmula, aproximación, números primos.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que la mayoría de ellos atendió las dos consignas planteadas en la situación, sin embargo, dos estudiantes propusieron un nuevo problema a partir de la situación inicial.

Situación que involucre volumen en metros cúbicos.

Situación problema sin solución coherente desde un punto de sus propiedades físicas.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

5000 litro se demoraría 16 horas aproximadamente.

El tiempo que se debe esperar para que se superen los 500 litros es el tiempo mayor a 45.

Para que el agua vertida supere los 5000(…) y para que llegue a 6000(…) con lo que debería tener el tiempo de t cuando se llena el estanque con 6000 litros.

El estanque estará con la capacidad de 5000 litros de agua cuando llegue al tiempo (t), $t = 9$ (aproximado de tiempo) (Puede ser expresada en segundos, minutos u horas según se indique).

Considero que el estanque llegue a los 5000, primero debemos considerar el tiempo (segundos, minutos, horas, días).

No se puede determinar (…)

El Llenado del estanque en función de tiempo será trabajado en horas y litros.

Pude concluir que el estanque supera los 5000 l al transcurrir 1,5 segundos, horas, etc.

Representa una función lineal constante”.

Se demora 9000 t en que sean 5000litros. Se demora 10.800 en que el estanque esté lleno.

Jamás llegará a llenarse…

El tiempo que demora en llenarse de 5000lt a 6000lt es muy poco (…)

El estanque al parecer puede superar o igualar los 6 litros de volumen

El estanque se llenará a las 9,001 y superará a los 5000 litros a las 9,001 de ' t '.

La gráfica es asíntota a las 6 de A

Para llegar a los 5000 lts se toma un tiempo aproximado de 225000 horas y para llenar el estanque se necesitan aproximadamente 300000 horas

El estanque no se llenará más

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Debe esperar más de 45000/4994(…) debe esperar 54000/5994.

Se supone 't' (que supone es la variable tiempo ya sea en segundos etc.

(…) el tiempo deberá ser mayor a 624,25… se deberá esperar un tiempo aproximado de $t = 9$ aproximadamente.

El tiempo no es negativo así que no se me ocurre nada más". Tengo una nueva sospecha porque me habló de volumen (metros cúbicos), sin embargo, no conozco las unidades de medida y sus transformaciones.

(…) ya que no se especifican las unidades de llenado del estanque.

Realizando la tabla de valores.

Tiene que ver con límites.

(…) Por lo que asumo que la cantidad de agua que entra al estanque aumenta con el tiempo.

Eso es la fórmula está incorrecta.

(…) por tanto el estanque nunca pasará de los 6 litros.

Si tomamos por cada número una aproximación de números primos (…).

Porque ya estaba lleno.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan
¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: En relación a los objetos matemáticos involucrados en el enunciado de la actividad, tales como uso de modelo algebraico, identificación de variables, elaboración de una tablas de valores, construcción de gráficas, determinación de ciertos elementos de las funciones, los estudiantes tienen las concepciones clásicas y una buena comprensión de ellos; de hecho esto les permite abordar la actividad, lo cual hace que la mayoría de los estudiantes enfrenten la situación problema sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos.

Emergentes: No delimitación adecuada del dominio. Muchos estudiantes utilizan valores negativos para asignarles al tiempo, lo que implica que no hay una comprensión absoluta del dominio de una función desde un punto de vista lógico en coherencia con una situación del entorno, y no desde un punto de vista matemático; sin embargo, esta confusión no obsta para los objetivos de la investigación. Otros expresan confusión respecto a las unidades que involucra el problema, aunque estas se explicitaron en la situación planteada, pareciera que el manejo de diferentes unidades se constituye en un obstáculo para la comprensión y desarrollo de la situación problema planteada.

Función: la mayoría de los estudiantes usan valores negativos en una de las variables de la función para calcular el valor del volumen del estanque determinado. Muestran un buen dominio del álgebra involucrada en los cálculos; sin embargo, en pocos casos, hacen interpretaciones erradas de las relaciones entre las variables involucradas, logrando modelos que no interpretan adecuadamente el proceso. Asociado al concepto de función reconocen variables, pero en la interpretación de la función como modelo, muestran no considerar su variación dentro de un proceso dinámico, quedándose únicamente con la relación biunívoca estática pre imagen-imagen.

Procedimientos

Algunos estudiantes realizan procesos de visualización, pues atribuyen algunas propiedades de la situación problema planteada a los objetos geométricos en sus representaciones gráficas. E26 sostiene que “la gráfica es asíntota a las 6 de A, por tanto, el estanque nunca pasará de los 6 litros”. E2 da otro argumento y presenta su procedimiento incorporando lo gráfico. Este sostiene que una gráfica representa una función lineal constante, para referirse la relación tiempo y llenado del estanque.

En su mayoría, los estudiantes construyen tablas de valores para relacionar las dos variables con expresiones numéricas que describan la evolución del llenado del recipiente; sin embargo, la mayoría de los estudiantes no considera el dominio de la situación planteada. En este sentido, la mayoría dan soporte a sus argumentos mediante cálculo numéricos de los valores de la capacidad del tanque haciendo una tabla de valores. De manera particular, E2 expresa que “realizando la tabla de valores pude concluir que el estanque supera los 5000 litros al transcurrir 1,5 segundos, horas, etc. En una gráfica representa una función lineal constante”. De igual forma E6: “Se demora 9000 t en que sean 5000litros”. “Se demora 10.800 en que el estanque esté lleno”.

Otro procedimiento que se reflejó en las producciones estudiantiles está vinculadas con la formulación de ecuaciones. E25 expresa que si “Se supone ‘t’ (que supone es la variable tiempo ya sea en segundos etc. Se despeja igualando a 6000 litros con lo que debería tener el tiempo de 't' cuando se llena el estanque con 6000 litros”.

Otros procedimientos observados en la producción se expresan por la combinación de elementos aritméticos, algebraicos y gráficos que dan cuenta de la comprensión de la situación problema propuesta.

5.3.1.1.4 Problema cuatro

Relacione cada una de las siguientes gráficas con el texto que mejor describe la información proporcionada por ésta. Si alguna de las situaciones planteadas no se refleja en alguna de las gráficas que se le presentan, haga una gráfica que a su criterio represente la situación. Además, explique la razón del por qué considera cada caso.

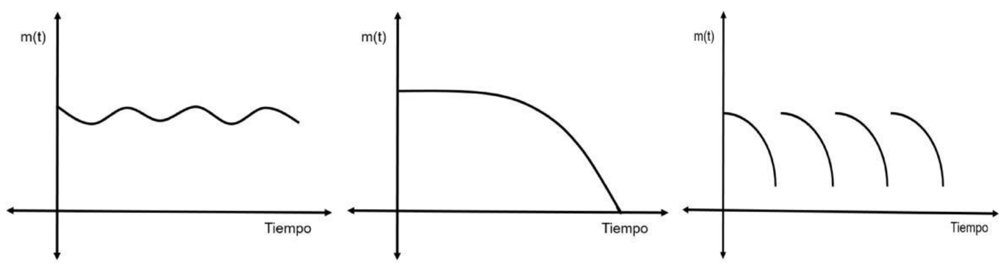


Figura 5.3.

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de instrucción analizado? ¿Cómo se secuencian o se relacionan?

Esta actividad está compuesta por tres situaciones que se presentan en lenguaje natural que hacen referencia a la permanencia de tres medicamentos en la sangre. Las tres situaciones propuestas requieren que los estudiantes asocien el gráfico a una situación específica, y, además que presenten sus argumentos del por qué seleccionaron una gráfica específica asociada a una determinada situación. Para afrontar un primer desafío, los estudiantes deben asociar una gráfica a una situación problema. Se requiere la movilización de ciertas habilidades y conocimientos que permitan visualizar e identificar aspectos específicos de cada gráfica y cada situación propuesta.

En este sentido se hace necesario caracterizar, describir e interpretar cada gráfica. Una primera gráfica corresponde a una función continua en un intervalo que posee algunas fluctuaciones en el crecimiento y en el decrecimiento en ciertas vecindades. La segunda gráfica es continua y decreciente en todo el intervalo y; la tercera, es una representación que corresponde a una función discontinua definida a trozos, y cuya representación está conformada por cuatro curvas descendentes.

Otro momento crucial en la resolución de la situación lo constituye la reflexión y una experiencia previa respecto a ¿cómo los medicamentos se comportan en nuestro torrente sanguíneo?, ¿cómo se incorporan en la sangre? y ¿cuánto es el tiempo aproximado de su disolución en nuestro organismo. Modelar, representar, argumentar, visualizar, analizar son habilidades que los estudiantes necesitan articular para comprender y resolver la situación propuesta.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

E13: “Gráfico 1 con 'a' la permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de una inyección.

La razón de relacionar el gráfico 1 con el enunciado ‘a’ es la constancia del gráfico, su poca variación, no sube bruscamente, ni tampoco baja del mismo modo. Al medicar un individuo por vía intravenosa o inyección su efecto es más prolongado y rara vez su efecto decae rápido como es en el caso de las pastillas, por lo tanto, su efecto es más constante. Gráfico 3 con 'b', la permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de píldoras cada cierto tiempo. La razón por la cual se relaciona el grafico 3 con el enunciado b) es que cada gráfica del plano salta distancias entre sí, similar al efecto de píldoras, los cuales comienzan su efecto, luego disminuyen hasta tomar otra píldora para así volver al efecto óptimo. Gráfica 2 con 'c', tome una gráfica constante para el enunciado c ya que hay por lo menos un medio intravenoso, lo que es un mejor efecto intravenoso, lo que es un mejor efecto del medicamento y más continuo".

E9: "Referencia de texto 'c' del gráfico 1, ya que el paciente está conectado por vía intravenosa, esto produce que la medicina se mantenga constantemente en el paciente pero con algunas variaciones. Gráfico 2 corresponde al texto 'a' ya que el paciente se le inyecta una dosis de medicina la cual al pasar el tiempo es consumida por el cuerpo hasta que la medicina es consumida en 100%.

Gráfico 3 corresponde al texto 'b' ya que es una píldora que se está consumiendo cada cierto tiempo mandando el efecto de esta".

E12: " a con gráfica 2, porque dice que solo se administra 1 vez, lo que supone que solo decae la medicina en el tiempo, 'b' con gráfico 3 porque se administra varias veces, una vez que el efecto de la medicina se acaba se administra otra y 'c' con gráfica 1 porque la medicina es constante en el tiempo".

E4: a con el gráfico 2, porque la inyección solo dura un tiempo limitado. b) con el gráfico 3, porque la píldora se suministra cada ciertas horas, según cuanto dure el efecto de esta y tendrá el mismo efecto inicial y c) con el gráfico 1, porque la idea de mezcla de medicamento y vía intravenosa es que este sea siempre constante, entonces cuando se le esté pasando el efecto al paciente

(Aunque sea poca la disminución del efecto) se le ingerirá más de esta mezcla".

E5: "gráfico 1 con c) muestra la mezcla del medicamento, por eso el gráfico tiene esos valles. Gráfico 2 con a) la inyección es más prolongada en el tiempo y se realiza una sola vez, y gráfico3 con b) ya que la medicina se administra cada cierto tiempo".

E6: “El gráfico 1 con la c, porque la medicina al ser una dosis constante se mantendrá entre algunos parámetros alrededor del tiempo. El gráfico 2 con la 'a'; porque claramente que es una inyección y esto se ha diluyendo dependiendo del caso del tiempo. El gráfico3 con la b) porque la medicina va saliendo del cuerpo del paciente el valor a tomar una nueva dosis esta volverá aparecer”.

E9: “Considero que la opción 'c' para el gráfico 1, ya que, al estar administrando por suero, cada vez va ir recibiendo una nueva dosis sin dejar que el efecto de la dosis anterior se acabe completamente”. Considero que la opción 'b' para el gráfico 3 por motivo de pie al estar administrando una nueva dosis cada cierto tiempo el efecto de la píldora nueva provocará un intervalo nuevamente y no esto lo que provoca que no es constante el efecto. Considero el gráfico 2 con la opción a) ya pues al ser una sola inyección provoca que el efecto sea solamente una vez y se va ir debilitando su efecto a medida que pasa el tiempo”

E15: “a) La gráfica que mejor representa el texto es la 2, ya que la medicina en el cuerpo va disminuyendo con el tiempo. b) La gráfica que mayor representa el texto es la 3 ya que la medicina es llevada al comienzo de cada dosis y disminuye con el tiempo, pero al consumir nuevamente la medicina vuelve a estar presente en el organismo. c) Lo asocio al gráfico 1 solo por descarte”.

E24: “a) esta alternativa está relacionada con el gráfico 2, ya que mientras pasa el tiempo la medicina va perdiendo su efecto. b) el gráfico de esta alternativa es similar a la gráfica 3. La diferencia que existe es que el gráfico 3 nunca es igual a 0 (en algún momento tiene que ser igual a cero mientras transcurre el tiempo). La alternativa 'c' es similar a la alternativa 'a' pero con 'm' y 't' más prolongadas, por el hecho que la alternativa c contiene suero además de la medicina.

E28: “Situación a) con el gráfico 2 ya que una vez que se inyecta medicina tiene cierto tiempo de permanencia. Inicialmente este se mantendría constante, después el cuerpo comienza a absorberlo o eliminarlo del organismo hasta que este ya no esté. Situación b) con el gráfico 1 siempre y cuando "ese cierto tiempo" no sea cuando la medicina ya haya desaparecido del organismo. La tercera situación no puedo explicarla ya que no sé cómo actúa el organismo por medio de este tipo de administración de medicina vía intravenosa. Solo puedo pensar si dicho paciente está hospitalizado por un largo período, la permanencia del medicamento sería así (…)

E16: "A gráfico 2, B al gráfico 3, C al gráfico 1 mientras el medicamento es administrado con suero la permanencia es constante y luego decae como en la gráfica. Para mí la gráfica de la situación está mejor representado de la siguiente manera: (…) Donde 's' es el tiempo que se le administra el suero con el medicamento".

E5: "a gráfico 2, porque la medicina tiene un valor inicial y decrece siempre, el gráfico 2 es el único que nunca el valor de 'y' a medida que 'x' crece y vuelve a crecer. El gráfico 3 con 'b', como la medicina se administra cada cierto tiempo, este debe ser una copia del gráfico 2, pero repetido 'n' veces donde 'n' es las píldoras tomadas".

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

Gráficas, texto, información, situaciones, criterio, razón, tiempo, permanencia, medicina, cuerpo, píldora, inyección, suero, intravenosa.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

Constancia del gráfico, poca variación, no sube bruscamente, ni baja bruscamente, efecto, más constante, salta distancias, disminuyen, efecto optimo, descarte, diferencia, perdiendo, inicialmente, mantendría, nunca, largo período, decrece, repetido n veces, prolongada en el tiempo, intervalo.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que todos los estudiantes se abocaron a la situación propuesta sin emerger otro tipo de situación, ya sea vinculada a la situación propuesta u otra en un nuevo contexto.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

- Gráfico 1 con a la permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de una inyección(…) Gráfico 3 con b, la permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de píldoras cada cierto tiempo(…) Gráfica 2 con c.
- Tome una gráfica constante para el enunciado c (…).
- La gráfica que mejor representa el texto es la 2(…) b) La gráfica que mayor representa el texto es la 3(…) c) lo asocio al gráfico 1…
- Esta alternativa está relacionada con el gráfico 2(…) b) el gráfico de esta alternativa es similar a la gráfica 3(…) c la alternativa c es similar a la alternativa a pero con m y t más prolongadas (…).
- Situación a) con el gráfico 2(…) Situación b) con el gráfico 1(…) La tercera situación no puedo explicarla
- Gráfico 2, B al gráfico 3, C al gráfico 1
- a gráfico 2(…) el gráfico 2 es el único que nunca el valor de y a medida que x crece y vuelve a crecer. El gráfico 3 con b (…)

- Referencia de texto 'c' del gráfico 1(…) Gráfico 2 corresponde al texto 'a'(…) Gráfico 3 corresponde al texto 'b'(…).
- 'a' con gráfica 2(…) 'b' con gráfico 3(…) 'c' con gráfica 1(…)

  Gráfico 1 con c) muestra la mezcla del medicamento… Gráfico 2 con a) … gráfico3 con b)
- Considero que la opción c para el gráfico 1(…) Considero que la opción b para el gráfico 3(…) Considero el gráfico 2 con la opción a.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

(…) La razón de relacionar el gráfico 1 con el enunciado 'a' es la constancia del gráfico, su poca variación, no sube bruscamente, ni tampoco baja del mismo modo. Al medicar un individuo por vía intravenosa o inyección su efecto es más prolongado y rara vez su efecto decae rápido como es en el caso de las pastillas, por lo tanto, su efecto es más constante (…).

La razón por la cual se relaciona el grafico 3 con el enunciado b) es que cada gráfica del plano salta distancias entre sí, similar al efecto de píldoras, los cuales comienzan su efecto, luego disminuyen hasta tomar otra píldora para así volver al efecto óptimo… tome una gráfica constante para el enunciado c ya que hay por lo menos un medio intravenoso, lo que es un mejor efecto intravenoso, lo que es un mejor efecto del medicamento y más continuo (…).

(…) ya que la medicina en el cuerpo va disminuyendo con el tiempo(…) ya que la medicina es llevada al comienzo de cada dosis y disminuye con el tiempo, pero al consumir nuevamente la medicina vuelve a estar presente en el organismo (…) solo por descarte…

(…) ya que mientras pasa el tiempo la medicina va perdiendo su efecto (…) La diferencia que existe es que el gráfico 3 nunca es igual a 0 (en algún momento tiene que ser igual a cero mientras transcurre el tiempo (…) por el hecho que la alternativa c contiene suero además de la medicina (…).

(…) ya que una vez que se inyecta medicina tiene cierto tiempo de permanencia. Inicialmente este se mantendría constante, después el cuerpo comienza a absorberlo o eliminarlo del organismo hasta que este ya no esté (…) siempre y cuando “ese cierto tiempo” no sea cuando la medicina ya haya desaparecido del organismo… ya que no sé cómo actúa el organismo por medio de este tipo de administración de medicina vía intravenosa. Solo puedo pensar si dicho paciente está hospitalizado por un largo período, la permanencia del medicamento sería así (…).

(…) mientras el medicamento es administrado con suero la permanencia es constante y luego decae como en la gráfica. Para mí la gráfica de la situación está mejor representado de la siguiente manera (…) Donde 's' es el tiempo que se le administra el suero con el medicamento (…).

(…) porque la medicina untado un valor inicial y decrece siempre…como la medicina se administra cada cierto tiempo, este debe ser una copia del gráfico 2 pero repetido 'n' veces donde 'n' es las píldoras tomadas (…).

(…) ya que el paciente está conectado por vía intravenosa, esto produce que la medicina se mantenga constantemente en el paciente, pero con algunas variaciones… ya que el paciente se le inyecta una dosis de medicina la cual al pasar el tiempo es consumida por el cuerpo hasta que la medicina es consumida en 100%... ya que es una píldora que se está consumiendo cada cierto tiempo mandando el efecto de esta (…).

(…) porque dice que solo se administra 1 vez lo que supone que solo decae la medicina en el tiempo (…) porque se administra varias veces, una vez que el efecto de la medicina se acaba se administra otra y (…) porque la medicina es constante en el tiempo (…).

(…) La razón de relacionar el gráfico 1 con el enunciado a es la constancia del gráfico, su poca variación, no sube bruscamente, ni tampoco baja del mismo modo. Al medicar un individuo por vía intravenosa o inyección su efecto es más prolongado y rara vez su efecto decae rápido como es en el caso de las pastillas, por lo tanto, su efecto es más constante (…).

La razón por la cual se relaciona el grafico 3 con el enunciado b) es que cada gráfica del plano salta distancias entre sí, similar al efecto de píldoras, los cuales comienzan su efecto, luego disminuyen hasta tomar otra píldora para así volver al efecto óptimo… tome una gráfica constante para el enunciado c ya que hay por lo menos un medio intravenoso, lo que es un mejor efecto intravenoso, lo que es un mejor efecto del medicamento y más continuo…

(…) por eso el gráfico tiene esos valles… la inyección es más prolongada en el tiempo y se realiza una sola vez…ya que la medicina se administra cada cierto tiempo (…).

(…) porque la medicina al ser una dosis constante se mantendrá entre algunos parámetros alrededor del tiempo. El gráfico 2 con la a; porque claramente que es una inyección y estos e ha diluyendo dependiendo del caso del tiempo… porque la medicina va saliendo del cuerpo del paciente el valor a tomar una nueva dosis esta volverá aparecer (…).

(…) ya que al estar administrando por suero cada vez va ir recibiendo una nueva dosis sin dejar que el efecto de la dosis anterior se acabe completamente… por motivo de pie al estar administrando una nueva dosis cada cierto tiempo el efecto de la píldora nueva provocará un intervalo nuevamente y no esto lo que provoca que no es constante el efecto (…) ya pues al ser una sola inyección provoca que el efecto sea solamente una vez y se va ir debilitando su efecto a medida que pasa el tiempo (…).

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan

¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: En relación a los objetos matemáticos involucrados en el enunciado de la actividad tales como funciones, su representación gráfica, lectura, interpretación de situaciones que se modelan desde un contexto intramatemático los estudiantes tienen las concepciones clásicas y una buena comprensión de ellos, de hecho esto les permite abordar la actividad, lo cual hace que la mayoría de los estudiantes enfrenten la situación problema sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos.

Emergentes: Crecimiento, decrecimiento y comportamiento constante. Los estudiantes logran reconocer intervalos que involucran el decrecimiento o crecimiento de una función y el comportamiento constante en un dominio.

La asociación de las representaciones gráficas a las situaciones planteadas no presentó mayor dificultad, lo que evidencia que hay un conocimiento previo respecto al modelamiento de situaciones y un conocimiento previo, además de un manejo de las representaciones gráficas, su lectura e interpretación.

Función: La mayoría de los estudiantes muestran un buen dominio en la lectura, representaciones e interpretaciones de las gráficas asociadas a tres funciones, además de los elementos que involucran las funciones representadas (dominio, rango, intervalo de crecimiento, intervalo de decrecimiento, intervalo constante, etc.).

Asociado al concepto de función reconocen variables y una relación dinámica de las variables involucradas en cada situación propuesta. En esta actividad se mostró cierta movilización de habilidades y elementos de pensamiento variacional que se aprecia en los argumentos escritos que proporcionaron los estudiantes en las textualidades.

Procedimientos

Algunos estudiantes realizan procesos de visualización, pues asocian propiedades de la situación problema propuesta a cada una de las gráficas asociadas. Los procedimientos utilizados se evidenciaron mediante argumentos escritos que reflejan un nivel adecuado de conocimientos previos y de ciertos procesos de modelamiento.

En este punto, dos estudiantes expresan E9: “Referencia de texto 'c' del gráfico 1, ya que el paciente está conectado por vía intravenosa, esto produce que la medicina se mantenga constantemente en el paciente pero con algunas variaciones. Gráfico 2 corresponde al texto 'a' ya que el paciente se le inyecta una dosis de medicina la cual al pasar el tiempo es consumida por el cuerpo hasta que la medicina es consumida en 100%. Gráfico 3 corresponde al texto 'b' ya que es una píldora que se está consumiendo cada cierto tiempo mandando el efecto de esta”. E12: 'a' con gráfica 2, porque dice que solo se administra 1 vez lo que supone que solo decae la medicina en el tiempo, 'b' con gráfico 3 porque se administra varias veces, una vez que el efecto de la medicina se acaba se administra otra, y 'c' con gráfica 1 porque le medicina es constante en el tiempo”.

Los procedimientos expresados son de tipo argumentativo y denotan un buen nivel de comprensión e interpretación de las variables involucradas en cada situación. E13 sostiene que “gráfico 1 con a la permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de una inyección. La

razón de relacionar el gráfico 1 con el enunciado 'a' es la constancia del gráfico, su poca variación, no sube bruscamente, ni tampoco baja del mismo modo. Al medicar un individuo por vía intravenosa o inyección su efecto es más prolongado y rara vez su efecto decae rápido como es en el caso de las pastillas, por lo tanto, su efecto es más constante. Gráfico 3 con 'b', la permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es
administrada por medio de píldoras cada cierto tiempo.

La razón por la cual se relaciona el grafico 3 con el enunciado b) es que cada gráfica del plano salta distancias entre sí, similar al efecto de píldoras, los cuales comienzan su efecto, luego disminuyen hasta tomar otra píldora para así volver al efecto óptimo. Gráfica 2 con 'c', tome una gráfica constante para el enunciado 'c' ya que hay por lo menos un medio intravenoso, lo que es un mejor efecto intravenoso, lo que es un mejor efecto del medicamento y más continuo.

5.3.1.1.5 Problema cinco

Se presentan 7 frascos y 6 gráficas. Asocie una gráfica con cada frasco y explique el criterio utilizado para ello.

Si considera que, de acuerdo al criterio utilizado, alguna (s) de la(s) gráfica(s) no puede (n) asociarse a frasco alguno, o viceversa, puede diseñar un frasco o proponer una gráfica para completar las asociaciones. En estos casos, escriba las justificaciones pertinentes.

Figura 5.4.

Figura 5.5.

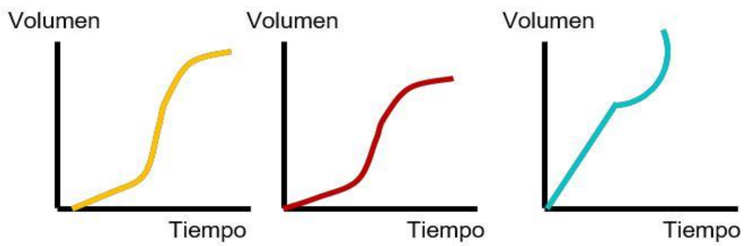


Figura 5.6.

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas

Se responde a las preguntas ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de instrucción analizado? ¿Cómo se secuencian o se relacionan?

Se proporcionan seis frascos de distintas formas geométricas y nueve gráficas que tienen el tiempo como su variable independiente y el volumen como su variable dependiente. Las gráficas proporcionadas modelan el llenado de recipientes, estas presentan distintas características; unas presentan combinaciones de dos líneas rectas con diferentes pendientes, y otras presentan combinaciones de curvas y rectas. Se les solicita a los estudiantes que asocien los llenados de los frascos con una gráfica proporcionada, que diseñen otros frascos para las gráficas faltantes, y/o que propongan otros gráficos para alguno(s) de los gráficos que se les brindó.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total

E4: “Todos se llenan con este gráfico (…) porque el volumen de agua alojado depende de la llave que yo utilizo, si le echo agua con la misma llave, todos se llenan a la misma velocidad”.

E6: “No creo que los frascos con las gráficas tengan relación alguna, porque en los gráficos representa tiempo y volumen, pero en los frascos solo se puede hablar de volumen”.

E12: “Todos los gráficos están asociados pensando en lo rápido que subirá el agua en el frasco si se llena con un flujo de agua constante. Gráfico 1 con frasco 6, gráfico 2 con recipiente 4, gráfico 3 con recipiente 7, gráfico 4 con recipiente 5, gráfico 5 con recipiente 3, gráfico 6 con recipiente 1 y gráfico(…) con recipiente 4.

E5: “Todos se llenan con este gráfico (…) porque el volumen de agua alojado depende de la llave que yo utilizo, si le echo agua con la misma llave, todos se llenan a la misma velocidad”.

E6: “No creo que los frascos con las gráficas tengan relación alguna, porque en los gráficos representa tiempo y volumen, pero en los frascos solo se puede hablar de volumen”.

E12: “Todos los gráficos están asociados pensando en lo rápido que subirá el agua en el frasco si se llena con un flujo de agua constante. Gráfico 1 con frasco 6, gráfico 2 con recipiente 4, gráfico 3 con recipiente 7, gráfico 4 con recipiente 5, gráfico 5 con recipiente 3, gráfico 6 con recipiente 1 y gráfico: … con recipiente 4.

E23: “El gráfico 1 está asociado a la figura (…) ya que en primera instancia el volumen de su base es pequeña luego de un tiempo su volumen aumente a razón de tiempo”.

E29: “Gráfica 1 con el frasco 4 ya que va creciendo de manera proporcional, gráfica 2 con frasco 6, gráfica 3 con frasco 5, gráfica 4 con frasco 1, gráfica 5 con frasco 2, gráfica 6 con frasco 7”.

E20: “El recipiente 3 con la gráfica 5, a mi parecer a medida que yo lleno el frasco con algún líquido, el comportamiento descrito en la gráfica 5 es más correcto o apropiado para el frasco3. El recipiente 5 con la gráfica 4al igual que el anterior al verter un líquido al interior del frasco el comportamiento del volumen respecto del tiempo transcurrido es de la gráfica 4. El recipiente 7 con la gráfica 3 por ser una figura compuesta el comportamiento también lo es, el comportamiento descrito en la figura 4 se divide en dos partes lineales, que pueden relacionarse con la forma del frasco 7. La gráfica 2ª mi parecer el gráfico no refleja el comportamiento de ningún frasco predispuesto para ello, por lo que un frasco por lo que un frasco pudiese tener el comportamiento descrito. La gráfica 1 describe un comportamiento similar a la anterior pero su volumen ya tiene un valor descrito desde antes que comienza el tiempo por lo que podría suponer que en el interior posee un sólido el tiempo comenzó a contar tiempo después que comenzó el llenado del frasco. La gráfica 6 muestra una parte lineal y otra parte curva exponencial por lo que quizás el frasco describa este comportamiento similar a(…) Para el frasco1 el comportamiento sería(…) para el frasco 2 el comportamiento sería(…) para el 4 sería(…).

E17: Recipiente 6 con gráfica 1, como sube el volumen es más lento que el gráfico 3, y el volumen no sube de golpe. Recipiente 7con gráfica 3 el volumen sube un poco más brusco que el gráfico uno, y la figura tiene también características más bruscas. El recipiente 3 con la gráfica 5, al principio el llenado de ña figura será más rápido, pero a medida se va acercando a la parte ancha, el volumen de la figura aumentará cada vez menos y después volverá a crecer cada vez más cuando llega a la boca de la figura. Recipiente 5 con gráfica 4, al principio el llenado será más lento, pero a medida que vaya llegando a la parte más estrecha, el volumen crecerá mucho más rápido, pero al volver con un crecimiento mucho menor hacia la boca de la botella. El recipiente 1 con la siguiente gráfica (…) Recipiente 2 con la siguiente gráfica (…) y recipiente 4 con la siguiente gráfica (…).

E10: Yo creo que el frasco 1 la gráfica 3 es la mejor representación ya que tiene un crecimiento ya al llegar arriba empieza a decrecer. Frasco 2 con gráfica 1 el paso del tiempo decrece la velocidad de decrecimiento del volumen. Frasco 3 y gráfica 4 en el centro es donde alcanza su mayor volumen en menor tiempo. Frasco 5 y gráfica 5 en el centro del frasco es más lento su crecimiento de volumen, pero después crece muy rápidamente. Frasco 7 y gráfica 2 crece muy rápidamente. Frasco 6 y gráfica 6 crece constante y luego crece muy rápidamente por tanto frasco y gráfica la cual debería de ser así (…).

E13: “Recipiente 1 con gráfico 6 debido que cuando se va llenando el volumen es” uniforme” se llena igual hasta llegar a la “boca” donde es más rápido.

Reciente 3 con gráfico 5 ya que las primeras unidades de tiempo se originan más volumen, a la mitad es poco volumen, y ya llenándose más volumen. Recipiente 5 con gráfico 4 porque en el medio es cuando más volumen se origina. Recipiente 7con gráfico 3 porque al principio el aumento de volumen es mayor que cuando pasa a la parte más ancha. Reciente 4 con el siguiente gráfico (…) ya que de primero es poco el volumen, a medida se llena más volumen se origina.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

Gráfico, frasco, criterio, diseñar, proponer, asociaciones, justificaciones.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

Todos, llenan, volumen, depende, misma, velocidad, relación, alguna, representa, tiempo, flujo, constante, Figura, base, pequeña, aumente, a, razón, de, tiempo.
Más, se divide, en, dos, partes, lineales, comportamiento, similar, interior, una, parte lineal, otra, curva, exponencial, sube, más, lento, características, bruscas, aumentará, cada, vez, menos, volverá, crecer, boca, parte, estrecha, un, crecimiento, arriba, decrecer, crece, constante, muy, rápidamente, llenando volumen uniforme, línea recta, ovalada, curvas, poco, máximo, declinar, crecimiento, paulatinamente, mantiene, parte, superior, mayor, máximo, decreciente, gran, decrecimiento, es, menos, brusco, cambio, principio, incrementa, mitad, reducir, un cambio, repentino, forma, aumentaría, demasiado, rápido, ancho, abajo, arriba, angostito, decrece, de apoco.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que todos los estudiantes se abocaron a la situación propuesta sin emerger otro tipo de situación ya sea vinculada a la situación propuesta u otra en un nuevo contexto.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

- Todos se llenan con este gráfico.
- No creo que los frascos con las gráficas tengan relación alguna.

- Todos los gráficos están asociados pensando en lo rápido que subirá el agua en el frasco…gráfico 1 con frasco 6, gráfico 2 con recipiente 4, gráfico 3 con recipiente 7, gráfico 4 con recipiente 5, gráfico 5 con recipiente 3, gráfico 6 con recipiente 1 y gráfico (…) con recipiente 4.
- El gráfico uno está asociado a la figura
- Gráfica 1 con el frasco 4(…) gráfica 2 con frasco 6, gráfica 3 con frasco 5, gráfica 4 con frasco 1, gráfica 5 con frasco 2, gráfica 6 con frasco 7.
- El recipiente 3 con la gráfica 5(…) el comportamiento descrito en la gráfica 5.
- Es más correcto o apropiado para el frasco3. El recipiente 5 con la gráfica 4 al igual que el anterior al verter un líquido al interior del frasco el comportamiento del volumen respecto del tiempo transcurrido es de la gráfica 4. El recipiente 7 con la gráfica 3… La gráfica 2 a mi parecer el gráfico no refleja el comportamiento de ningún frasco predispuesto para ello (…) pero su volumen ya tiene un valor descrito desde antes que comienza el tiempo (…).
- La gráfica 6 muestra una parte lineal y otra parte curva exponencial.
- Recipiente 6 con gráfica 1(…) recipiente 7con gráfica 3(…) El recipiente 3 con la gráfica 5(…) recipiente 5 con gráfica 4… El recipiente 1 con la siguiente gráfica (…) Recipiente 2 con la siguiente gráfica (…) y recipiente 4 con la siguiente gráfica (…).
- Yo creo que el frasco 1 la gráfica 3 es la mejor representación… Frasco 2 con gráfica (…) Frasco 3 y gráfica (…) Frasco 5 y gráfica 5(…) Frasco 7 y gráfica 2(…) Frasco 6 y gráfica 6(…).
- Recipiente 1 con gráfico 6(…) Reciente 3 con gráfico 5(…) Recipiente 5 con gráfico 4(…) Recipiente 7con gráfico 3(…) Reciente 4 con el siguiente gráfico.

- Recipiente 2 con el siguiente gráfico (…) lo mismo que lo anterior. Recipiente 6 gráfico con el siguiente gráfico (…).
- La parte superior presenta poco volumen, luego llega a su máximo y para finalizar el volumen comienza a declinar (…) crece paulatinamente para luego mantiene su crecimiento (…) Crece paulatinamente para luego mantiene su crecimiento.
- El segundo frasco de izquierda a derecha con el gráfico 4 y el gráfico 5 con el cuarto frasco de izquierda a derecha (son los mismo, pero al revés). Gráfico 3 con el frasco (…) Gráfica 6 frasco 5, por lo mismo que el anterior.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

(…) porque el volumen de agua alojado depende de la llave que yo utilizo, si le echo agua con la misma llave, todos se llenan a la misma velocidad.

(…) porque en los gráficos representa tiempo y volumen, pero en los frascos solo se puede hablar de volumen.

(…) si se llena con un flujo de agua constante.

(…) ya que en primera instancia el volumen de su base es pequeña luego de un tiempo su volumen aumente a razón de tiempo.

(…) ya que va creciendo de manera proporcional.

(…) a mi parecer a medida que yo lleno el frasco con algún líquido, (…) por ser una figura compuesta el comportamiento también lo es, el comportamiento descrito en la figura 4 se divide en dos partes lineales, que pueden relacionarse con la forma del frasco 7 (…) por lo que un frasco por lo que un frasco pudiese tener el comportamiento descrito por lo que podría suponer que en el interior posee un sólido el tiempo comenzó a contar tiempo después que comenzó el llenado del frasco (…) por lo que quizás el frasco describa este comportamiento similar a:… Para el frasco1 el comportamiento sería (…) para el frasco 2 el comportamiento sería (…) para el 4 sería(…).

(…) como sube el volumen es más lento que el gráfico 3, y el volumen no sube de golpe… el volumen sube un poco más brusco que el gráfico uno, y la figura tiene también características más bruscas (…) al principio el llenado de la figura será, as rápido pero a medida que se va acercando a la parte ancha, el volumen de la figura aumentará cada vez menos y después volverá a crecer cada vez más cuando llega a la boca de la figura (…) al principio el llenado será más lento, pero a medida que vaya llegando a la parte más estrecha, el volumen crecerá mucho más rápido, pero al volver con un crecimiento mucho menor hacia la boca de la botella.

Ya que tiene un crecimiento ya al llegar arriba empieza a decrecer (…) el paso del tiempo decrece la velocidad de decrecimiento del volumen (…) en el centro es donde alcanza su mayor volumen en menor tiempo (…) en el centro del frasco es más lento su crecimiento de volumen, pero después crece muy rápidamente crece muy rápidamente (…) crece constante y luego crece muy rápidamente por tanto frasco y gráfica la cual debería de ser así (…).

(…) debido que cuando se va llenando el volumen es” uniforme” se llena igual hasta llegar a la “boca” donde es más rápido (…) ya que las primera unidades de tiempo se originan más volumen, a la mitad es poco volumen, y ya llenándose más volumen (…) porque en el medio es cuando más volumen se origina(…) porque al principio el aumento de volumen es mayor que cuando pasa a la parte más ancha(…) ya que de primero es poco el volumen, a medida se llena más volumen se origina.

(…) una recta en el principio de la figura, después una curva. Si la figura es recta (…) el gráfico es con línea recta, si la figura es ovalada (…) la gráfica son curvas.

Mantiene constante su crecimiento (…) Es lo contrario del primero, en la parte superior su mayor volumen, después menos y luego vuelve al máximo (…) Su volumen es, pero luego sufre un brusco cambio.

Al principio incrementa el volumen, pero en la mitad se empieza a reducir…

(…) Porque hay un cambio repentino de la forma entonces el volumen aumentaría demasiado rápido. Porque es más ancho abajo y arriba de angostito. Porque el volumen decrece de apoco.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan

¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: Los estudiantes poseen las concepciones clásicas de funciones y sus representaciones gráficas, así como el cálculo de otros elementos relacionados con las funciones como la pendiente, la obtención de distancias, intervalos reales y algunos conocimientos relacionados con el modelamiento de situaciones. Al afrontar esta actividad los estudiantes ponen de manifiesto los conceptos relacionados con las propiedades de diferentes sólidos geométricos, el cálculo de su volumen y la construcción e interpretación de gráficas asociadas a una situación particular.

Emergentes: La tarea propuesta en esta actividad puso en evidencia la necesidad de visualización y reflexión de la situación problema y articulación de elementos previos. En las exigencias cognitivas de la actividad emerge caracterización de la variación e identificación de elementos asociados a las condiciones de una posible gráfica que modela el llenado de un frasco específico de acuerdo a su forma.

Variación: fue recurrente la asociación adecuada de la gráfica con el llenado de un recipiente de acuerdo a las características geométricas del mismo. Las formas geométricas y el llenado fueron interpretadas mayormente de manera adecuada, y en las producciones realizadas por los estudiantes se observa que los estudiantes combinan diferentes rectas, curvas que difieren por su crecimiento. En algunos casos, los estudiantes proponen una gráfica para los otros recipientes propuestos.

En la interpretación del llenado de los recipientes, los estudiantes logran identificar algunas condiciones del mismo que les permite construir y/o identificar una representación adecuada que modela el llenado propuesto de acuerdo a la forma del recipiente.

Procedimientos

Los procedimientos que se explicitan en las textualidades de los estudiantes son de tipo argumentativo en su mayoría, combinando otros registros de representación que dan cuenta de interpretación de la situación problema propuesta, además proporcionan una gráfica que modela otros recipientes. E20 da cuenta de ello, en este sentido expresa asociaciones. “El recipiente 3 con la gráfica 5, a mi parecer a medida que yo lleno el frasco con algún líquido, el comportamiento descrito en la gráfica 5 es más correcto o apropiado para el frasco3. El recipiente 5 con la gráfica 4al igual que el anterior al verter un líquido al interior del frasco el comportamiento del volumen respecto del tiempo transcurrido es de la gráfica 4. El recipiente 7 con la gráfica 3 por ser una figura compuesta el comportamiento también lo es, el comportamiento descrito en la figura 4 se divide en dos partes lineales, que pueden relacionarse con la forma del frasco 7. La gráfica 2ª a mi parecer, el gráfico no refleja el comportamiento de ningún frasco predispuesto para ello, por lo que un frasco por lo que un frasco pudiese tener el comportamiento descrito. La gráfica 1 describe un comportamiento similar a la anterior pero su volumen ya tiene un valor descrito desde antes que comienza el tiempo por lo que podría suponer que en el interior posee un sólido el tiempo comenzó a contar tiempo después que comenzó el llenado del frasco. La gráfica 6 muestra una parte lineal y otra parte curva exponencial por lo que quizás el frasco describa este comportamiento similar a(…) Para el frasco1 el comportamiento sería (…) para el frasco 2 el comportamiento sería (…) para el 4 sería (…).

Otros estudiantes aportan otros elementos relativos a caracterizar la variación, E5 expresa que “Porque la parte superior presenta poco volumen, luego llega a su máximo y para finalizar el volumen comienza a declinar”. Mantiene constante su crecimiento. Crece paulatinamente para luego mantener su crecimiento. Es lo contrario del primero, en la parte superior su mayor volumen, después menos y luego vuelve al máximo. Su volumen es decreciente. La parte superior con gran volumen y luego su decrecimiento es menor. Su volumen es constante pero luego sufre un brusco cambio.

5.3.1.1.6 Problema seis

Bosqueje una gráfica que represente cada una de las siguientes situaciones:

a) La altura de los rebotes de una pelota que cae desde la azotea de una casa con respecto al tiempo.
b) La altura con respecto al tiempo de izar manualmente una bandera en una asta.

Etapa 1 Se responde a las preguntas básicas

Se responde a las preguntas ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de instrucción analizado? ¿Cómo se secuencian o se relacionan?

La actividad está compuesta por dos situaciones expresadas mediante lenguaje natural. La primera referida a una pelota que lanza desde una azotea, y la otra a una bandera que se iza. En ambas consignas propuestas se les solicita a los estudiantes bosquejar mediante una representación gráfica que modele de manera adecuada cada situación.

La tarea está planteada de modo general, pues se trata de analizar si en el desarrollo de la misma, los estudiantes manifiestan alguna forma de pensamiento variacional sin que ésta sea inducida en el enunciado de la tarea. La actividad lleva a los estudiantes a hacerse preguntas acerca de las características de las situaciones planteadas y realizar representaciones graficas de cada una de ellas.

En este punto los estudiantes pueden visualizar las situaciones y la posibilidad de declarar variables, buscar y establecer dependencias entre las mismas. Ambas tareas planteadas en la situación exigen poner en juego procedimientos y dominio en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además del empleo de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, conjeturar, representar y comunicar entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo elemental permite generar modelos matemáticos de la situación planteada en diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros).

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

E10: “Tomando en cuenta que la bandera nunca está en el suelo y que debe durar todo el himno nacional”.
E13: “Al igual que los rebotes de la pelota” “escaleras, ya que en una izada sube la bandera y después tiempo en bajar las manos y volver izar”.

E15: “Mientras más alto es del todo la pelota, más tiempo demora un par de dos botes” “la bandera una vez izada, sale desde cero y aumenta la altura completamente”.

E17: “Depende bastante de la velocidad de la persona si lo hace por intervalos o continuamente”.

E18: “Los lapsos desde la altura no avanza, pero el tiempo sí, cuando la persona se detiene para hacer la siguiente subida”.

E20: “Q es el tiempo que permanece en el suelo, t el tiempo que permanece en el aire, t y q a medida que avanza el tiempo tienden a cero” Si se iza de manera constante es (…) y si no (…).

E27: “Si consideramos una altura inicial de 5metros, podríamos decir que la altura que toma la pelota en cada rebote será la mitad de la altura anteriormente tomada”.

E6: “No son rectas porque la velocidad no es constante decrece a medida que sube y crece a medida que baja con respecto a la altura. Este gráfico es válido si se sube la bandera con velocidad constante”.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

Bosqueje, gráfica, situaciones, altura, rebotes, pelota, tiempo, izar, bandera, manualmente, asta.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

Sube, bajar, rectas, constantes, decrece, altura inicial, 5 metros, rebote, mitad, velocidad, crece, baja, tienden, cero, permanece, suelo, nunca, durar, lapsos, no avanza, detiene, subida, intervalos, continuamente, escaleras.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que la mayoría de ellos atendió las dos consignas planteadas en la situación, sin embargo, varios estudiantes propusieron representaciones gráficas parabólicas y otras con valor absoluto, argumento para reflexionar y proponer situaciones vinculadas a las anteriores u otras.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

- Tomando en cuenta que la bandera nunca está en el suelo (…)
  Al igual que los rebotes de la pelota… escaleras (…).
- Mientras más alto es del todo la pelota (…).
- Depende bastante de la velocidad de la persona (…).
- Los lapsos desde la altura no avanza pero el tiempo sí (…).
- Q es el tiempo que permanece en el suelo, 't' el tiempo que permanece en el aire (…).
- (…) Podríamos decir que la altura que toma la pelota en cada rebote será la mitad de la altura anteriormente tomada.
- No son rectas (…) este gráfico es válido si se sube la bandera con velocidad constante (…).

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Ya que en una izada sube la bandera y después tiempo en bajar las manos y volver izar (…).

Más tiempo demora un par de dos botes (…) la bandera una vez izada, sale desde cero y aumenta la altura completamente (…).

Si lo hace por intervalos o continuamente (…).

Cuando la persona se detiene para hacer la siguiente subida (…).

(…) a medida que avanza el tiempo tienden a cero (…).

Si consideramos una altura inicial de 5metros (…).

(…) porque la velocidad no es constante decrece a medida que sube y crece a medida que baja con respecto a la altura.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan

Previas: En relación a los objetos matemáticos involucrados en el enunciado de la actividad, tales como representación gráfica de una situación problema los estudiantes tienen en su mayoría presentaron evidencia de concepciones clásicas y una buena comprensión de ellos, de hecho, esto les permite abordar la actividad sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos.

Emergentes: **Representación gráfica de otras funciones** (cuadráticas, valor absoluto): lo mencionan algunos estudiantes quienes proveen algunos elementos o argumentos que evidencia concepciones confusas asociadas a interpretación de la situación problema propuesta. Los estudiantes realizan representaciones cuadráticas de diferentes parábolas y en algunos otros casos de funciones de valor absoluto sin presentar muchos argumentos que den cuenta de su concepción. Las textualidades expresadas por algunos estudiantes dan cuenta de la necesidad de desarrollo de modelamiento de diferentes situaciones en contexto.

Función: En general, un gran número de estudiantes evidencian un buen dominio del algebra y de las representaciones de funciones, salvo algunos casos en los que hacen interpretaciones erradas de las relaciones entre las variables involucradas, logrando modelos que no interpretan adecuadamente el proceso. Asociado al concepto de función reconocen variables, pero en la interpretación de la función como modelo, muestran no considerar su variación dentro de un proceso dinámico, quedándose únicamente con la relación biunívoca estática pre imagen-imagen.

Los estudiantes en su mayoría hablan de la velocidad como un factor determinante en la construcción de ambas graficas de las situaciones propuestas.

Procedimientos

Los estudiantes en general hacen una gráfica cartesiana para ambas situaciones y presentan en general recta y curva para cada una de las situaciones, en general presentan algunos argumentos escritos de cada esbozo que ellos presentan. Otros estudiantes en menor escala presentan en registro figural para referirse al comportamiento de cada una de las situaciones propuestas en este.

5.3.1.1.7 Problema siete

Seleccione el texto que mejor describe la siguiente gráfica. Presente argumentos para justificar su selección o rechazo de cada texto.

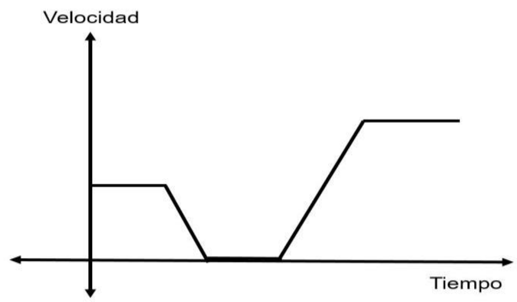


Figura 5.7.

a) Ricardo salió a caminar cerca de una pendiente y le tomó menos tiempo bajar por el lado más bajo que por el más alto.

b) Maribel manejaba su coche a cierta velocidad, un policía le dijo que se detuviera y después de recibir una infracción y de que el policía se retiró, ella manejó más rápido, llegó a una velocidad mayor a la que venía circulando y mantuvo esa velocidad durante cierto tiempo para recuperar el tiempo perdido por la infracción.

c) En un tanque había cierta cantidad de agua que quedó de la noche anterior. Pedro se empezó a bañar e hizo que la velocidad del flujo de salida de agua se redujera a cero. Tiempo después llegó el agua al tanque hasta que quedó lleno.

d) Beatriz vive en una casa con desniveles. Se encuentra sentada en la cocina de su casa durante cierto tiempo. Sube las escaleras hacia la sala de su casa y se queda viendo la televisión durante algún tiempo, finalmente sube las escaleras hacia su recámara y se queda dormida.

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de instrucción analizado? ¿Cómo se secuencian o se relacionan?

La actividad propuesta se describe mediante una gráfica que está asociada a dos variables, el tiempo y la velocidad. La representación gráfica es una función continua en todo su intervalo y con ciertos comportamientos particulares en cinco intervalos. El primer intervalo mantiene la velocidad constante, luego en el segundo intervalo (menor tiempo respecto al primero) disminuye la velocidad, el tercer intervalo (tiempo similar al primero) se detiene, luego el cuarto intervalo aumenta la velocidad (mayor tiempo) y, finalmente el quinto intervalo, mantiene la última velocidad constante durante un intervalo de tiempo menor que el cuarto intervalo. La consigna de esta actividad propone que los estudiantes seleccionen de cuatro situaciones propuestas la que mejor puede describirse con base a la gráfica proporcionada.

La tarea está planteada de modo general, pues se trata de analizar si en el desarrollo de la misma, los estudiantes manifiestan alguna forma de pensamiento variacional sin que esta sea inducida en el enunciado de la tarea. La actividad lleva a los estudiantes a hacerse preguntas acerca de la naturaleza de las situaciones planteadas y la asociación de cada una de ellas con una posible representación gráfica. En este punto los estudiantes pueden visualizar las situaciones y la posibilidad de declarar variables, buscar y establecer dependencias entre las mismas, y realizar representaciones que modelen los diferentes enunciados. La tarea planteada en esta actividad exige poner en juego procedimientos y dominio en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además del empleo de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, conjeturar, representar y comunicar entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo elemental permite generar modelos matemáticos de la situación planteada.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total

E4: “a) el texto no concuerda con la gráfica ya que se mide la velocidad con respecto del tiempo y no lo contrario. El texto 'b' concuerda perfectamente con el gráfico ya que el auto va circulando a cierta velocidad, después se detiene, y, finalmente, acelera hasta alcanzar una velocidad mayor y se mantiene ahí”.

E6: “b) porque viene con una velocidad constante y cuando el carabinero la detiene tiene que disminuir su velocidad luego la aumenta para recuperar el tiempo perdido y la mantiene”.

E7: “El 'b' ya que lleva una velocidad constante, disminuye, se detiene, avanza nuevamente y mantiene una velocidad mayor”.

E9: “El texto que representa el gráfico es el 'b' ya que está en torno a la velocidad y tiempo según lo descrito en el enunciado, manejaba a cierta velocidad, la policía le dijo que se detuviera, recibía infracción, aceleró llegando a una velocidad mayor de la que poseía”.

E13: Mejor b) “Maribel maneja, porque en el gráfico se ve lo que ella le ocurrió viene a cierta velocidad (…) (gráfico constante), le dicen que se detenga (…) gráfico descendente) y velocidad cuando llega es 0 por detenerse, y como frena para detenerse, la velocidad baja gradualmente, ocurre un momento de 0 velocidad cuando le sacan la infracción, después acelera rápido (gráfico ascendente) y se va a velocidad constante. La 'd' no porque debería ser un gráfico así: está sentado, sube escaleras, sentada, sube escaleras. La 'a' no porque el gráfico muestra un aumento de velocidad y después un aumento mayor, a se ha recorrido después debería de estar corriendo. La 'c' no porque dice “tanque” pensé que era error y se refería a un “estanque” pero 2 veces dice tanque, por lo visto es para pillarnos”.

E16: “La historia se asemeja a la situación descrita en el gráfico. Maribel irá a velocidad constante, después se detuvo, la velocidad se mantiene constante es cero, y luego aumento su velocidad sobrepasando lo que llevaba inicialmente y luego mantiene una nueva velocidad constante”.

E17: “De acuerdo al gráfico dado a) no puede ser, porque en la gráfica no señala la bajada de lo más alto, solo de los más bajo, en verdad el primer verso no tiene nada que ver. Lo 'b' lo puedo asociar correctamente con el gráfico, porque claramente Maribel tiene a una velocidad constante, después “la partearon” y se detuvo por un tiempo y cuando el carabinero o policía se fue, tomó una velocidad mucho mayor que el principio, como se muestra en el gráfico. La 'c' no puede ser porque no tiene el mismo volumen como se muestra en el gráfico. La 'd' no puede ser, no tiene absolutamente nada que ver”.

E23: “La gráfica representa mayor a Maribel, puesto que ella comienza con una velocidad mantenida luego se detiene y posteriormente aumenta su velocidad inicial”.

E16: “La historia se asemeja a la situación descrita en el gráfico. Maribel irá a velocidad constante, después se detuvo, la velocidad se mantiene constante es cero, y luego aumento su velocidad sobrepasando lo que llevaba inicialmente y luego mantiene una nueva velocidad constante.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

Texto, gráfica, argumentos, justificar, selección, rechazo, pendiente, menos, tiempo, bajar, lado, más, bajo, alto, velocidad, más rápido, llegó, velocidad, mayor, mantuvo, cierto, tiempo, recuperar, perdido, tanque, cierta, cantidad, velocidad del flujo, salida, redujera, a, cero, tiempo, después, quedó, lleno, desniveles, cierto, tiempo, sube, queda.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

se detiene, acelera, velocidad mayor, mantiene ahí, disminuir su velocidad, aumenta, para recuperar el tiempo perdido, mantiene, velocidad constante, disminuye, se detiene, avanza nuevamente y mantiene una velocidad mayor, velocidad constante, disminuye, se detiene, avanza nuevamente, mantiene una velocidad mayor, poseía, cierta velocidad, se detenga , gráfico descendente , velocidad 0, por detenerse , frena, para detenerse, la velocidad baja gradualmente, acelera rápido(gráfico ascendente) velocidad constante, aumento de velocidad, se detuvo, la velocidad, se mantiene constante, es cero, aumento su velocidad, sobrepasando lo que llevaba inicialmente, mantiene una nueva velocidad constante, la bajada de lo más alto, solo de los más bajo, constante, velocidad mucho mayor el principio, absolutamente, las variables del gráfico, describe, yo asumo, desciende, el tiempo hasta ser 0, velocidad mantenida, cierta velocidad significa velocidad constante, sin variaciones.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que los estudiantes en su mayoría atendieron únicamente a la consigna planteada en la situación propuesta, sin embargo, la vinculación con la cinemática emergió en las producciones estudiantiles, conceptos como velocidad, aceleración fueron citados reiteradamente.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

- El texto no concuerda con la gráfica… El texto b concuerda perfectamente con el gráfico (…).
- b

- El texto que representa el gráfico es el 'b'(…)
- Mejor 'b'(…) La 'a' no (…) La 'c' no (…).
- La historia se asemeja a la situación descrita en el gráfico (…).
- De acuerdo al gráfico dado a) no puede ser… Lo b lo puedo asociar correctamente con el gráfico… La c no puede ser (…) La 'd 'no puede ser.
- El texto que mejor representa es el 'b'(…) por lo que el texto c no lo describe (…) Tampoco representa al texto 'd'(…) El texto a no queda representado (…) El texto (b) trabaja con velocidad. Se dice que Maribel maneja a cierta velocidad (…).
- La gráfica representa mayor a Maribel (…).
- 'A' es errónea esta afirmación (…) 'b' podría ser correcto (…) 'c' es falso (…).
- En el gráfico dice que inicialmente la velocidad es constante pero mayor que 0, 'd' falso (…).

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

(…) ya que se mide la velocidad con respecto del tiempo y no lo contrario…ya que el auto va circulando a cierta velocidad, después se detiene y finalmente acelera hasta alcanzar una velocidad mayor y se mantiene ahí.

Ya que lleva una velocidad constante, disminuye, se detiene, avanza nuevamente y mantiene una velocidad mayor.

Porque viene con una velocidad constante y cuando el carabinero la detiene tiene que disminuir su velocidad luego la aumenta para recuperar el tiempo perdido y la mantiene.

Ya que está en torno a la velocidad y tiempo según lo descrito en el enunciado, manejaba a cierta velocidad, policía le dijo que se detuviera, recibía infracción, aceleró llegando a una velocidad mayor de la que poseía.

Porque en el gráfico se ve lo que ella le ocurrió viene a cierta velocidad (…) (gráfico constante), le dicen que se detenga (…) (gráfico descendente) y la velocidad cuando, llega a 0 por detenerse, y como frena para detenerse, la velocidad baja gradualmente, ocurre un momento de 0 velocidad cuando le sacan la infracción, después acelera rápido (gráfico ascendente) y se va a velocidad constante. La 'd' no porque debería ser un gráfico así: está sentado, sube escaleras, sentada, sube escaleras (…) porque el gráfico muestra un aumento de velocidad y después un aumento mayor, se ha recorrido después debería de estar corriendo (…) porque dice" tanque" pensé que era error y se refería a un "estanque", pero 2 veces dice tanque, por lo visto es para pillarnos.

Maribel irá a velocidad constante, después se detuvo, la velocidad se mantiene constante es cero, y luego aumento su velocidad sobrepasando lo que llevaba inicialmente, y luego mantiene una nueva velocidad constante.

Porque en la gráfica no señala la bajada de lo más alto, solo de los más bajo, en verdad el primer verso no tiene nada que ver (…) porque claramente Maribel tiene a una velocidad constante, después "la partearon" y se detuvo por un tiempo y cuando el carabinero o policía se fue, tomó una velocidad mucho mayor que el principio, como se muestra en el gráfico (…) porque no tiene el mismo volumen como se muestra en el gráfico (…) no tiene absolutamente nada que ver.

(…) Para empezar las variables del gráfico son velocidad y tiempo (…) ya que trabaja con volumen y tiempo… ya que en este caso según mi opinión trabaja con desplazamiento o altura y tiempo (…) ya que trabaja con distancia y tiempo. En el texto no se describe que Ricardo se detuvo (…) por lo que yo asumo que es constante hasta que la policía le obliga a detenerse. Por lo que esta velocidad desciende con el tiempo hasta ser 0 y mantenerse constante por el tiempo en que es tomada la infracción. Luego aumenta su velocidad hasta cierto punto y mantenerla constante.

Puesto que ella comienza con una velocidad mantenida luego se detiene y posteriormente aumenta su velocidad inicial.

(…) porque si dice que bajó una vez por el lado más bajo y la otra por el lado más alto las velocidades deberían ser respectivamente menor y mayor pero en ningún caso negativo ni cero(…) solo si es que Maribel manejaba a velocidad constante antes de que el policía lo detuviera pero solo dice que manejaba a cierta velocidad, nunca dijo que era constante, es verdadero ya que le pregunté al profesor y me dijo que "cierta velocidad" significa velocidad constante(…) ya que sí en el estanque había cierta cantidad de agua la noche anterior sin variaciones la velocidad sería constante pero no positiva ni negativa sino 0(…) ya que no dice a qué velocidad subía cada escalera.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan

¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: En relación a los objetos matemáticos involucrados en la interpretación de las cuatro situaciones propuestas en la actividad, y en la lectura y asociación de los cuatro enunciados con los estudiantes en su mayoría, presentaron evidencia de concepciones clásicas y una buena comprensión de ellos, de hecho esto les permite abordar la actividad sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos.

Emergentes: Interpretación de gráficas: algunos estudiantes, quienes presentaron argumentos relacionados con la cinemática, tales como velocidad, aceleración, además de volúmenes de cuerpos lo que es un elemento indicativo que los estudiantes interpretan en general de manera adecuada una situación propuesta y dan cuenta de ello mediante una representación gráfica o viceversa. Las textualidades expresadas por algunos estudiantes dan cuenta de la necesidad de desarrollo de modelamiento de diferentes situaciones en contexto.

Función: En general, un gran número de estudiantes evidencian un buen dominio del algebra y de las representaciones de funciones, salvo algunos casos en los que hacen interpretaciones erradas de las relaciones entre las variables involucradas, logrando modelos que interpretan adecuadamente el proceso, sin embargo, solo se observan algunos indicios de una perspectiva variacional de las funciones.

Procedimientos

Los estudiantes presentaron sus argumentos de manera escrita atendiendo a las consignas planteadas, salvo algunos escasos casos que presentaron un esbozo gráfico para proporcionar alternativas de solución a la situación propuesta. Además, se observa que los estudiantes realizan procesos de visualización respecto a las condiciones de cada situación problema. Es recurrente los argumentos que expresan el por qué seleccionar o no un inciso determinado. En este particular, E17: “De acuerdo al gráfico dado a) no puede ser, porque en la gráfica no señala la bajada de lo más alto, solo de los más bajo, en verdad el primer verso no tiene nada que ver. Lo 'b' lo puedo asociar correctamente con el gráfico, porque claramente Maribel tiene a una velocidad constante, después “la partearon” y se detuvo por un tiempo y cuando el carabinero o policía se fue, tomó una velocidad mucho mayor que el principio, como se muestra en el gráfico. La 'c' no puede ser porque no tiene el mismo volumen como se muestra en el gráfico. La 'd' no puede ser, no tiene absolutamente nada que ver”.

E28: “El texto que mejor representa es el b. Para empezar las variables del gráfico son velocidad y tiempo, por lo que el texto c no lo describe ya que trabaja con volumen y tiempo. Tampoco representa al texto 'd' ya que en este caso según mi opinión trabaja con desplazamiento o altura y tiempo. El texto a no queda representado ya que trabaja con distancia y tiempo. En el texto no se describe que Ricardo se detuvo. El texto 'b' trabaja con velocidad. Se dice que Maribel maneja a cierta velocidad por lo que yo asumo que es constante hasta que la policía le obliga a detenerse. Por lo que esta velocidad desciende con el tiempo hasta ser 0 y mantenerse constante por el tiempo en que es tomada la infracción. Luego aumenta su velocidad hasta cierto punto y mantenerla constante.

5.3.1.1.8. Reflexión y discusión de resultados de los problemas en la prueba diagnóstica

Una mirada sistémica a los elementos recogidos en las distintas categorías de análisis de los diferentes problemas propuestos en la prueba de diagnóstico nos muestra que los estudiantes hacen un buen uso del lenguaje en el que está expresada la actividad propuesta (lenguaje previo) cuando utilizan formas de visualización para interpretar el proceso de construcción de la figuras, y en algunos casos en la interpretación adecuada de una situación problema enunciada, sea esta expresada en forma verbal o mediante una representación ostensiva(algebraica, figural o de otra índole).

En este lenguaje expresan adecuadamente sus análisis y realizan afirmaciones que muestran la emergencia de conceptos pre variacionales cuando describen los fenómenos de decrecimiento de áreas, de longitudes y otros elementos expresados mediante un lenguaje emergente que muestra que han comprendido adecuadamente la actividad planteada. Aunque surgen algunos elementos que confunden la claridad de las concepciones iniciales cuando se refieren al concepto de fractal, este hecho es aislado y no obsta para tener una clara interpretación de sus producciones. En este sentido las producciones de los estudiantes en su generalidad revelan un buen grado de comprensión, hecho que permite hacer un adecuado análisis y detectar las manifestaciones emergentes de pensamiento variacional. Las afirmaciones de los estudiantes respecto a los procesos de decrecimiento y crecimiento y a las formas de representación gráfica, textual y funcional de los mismos, muestran un nivel básico de pensamiento variacional que emerge al enfrentarse al estudio y descripción de la figura mostrada y su forma de construcción, y a la interpretación de situaciones problemas en diferentes ámbitos.

Algunos elementos que se apreciaron en las producciones estudiantiles de los diferentes problemas expuestas en las textualidades, y otras complementarias, reflejan que los estudiantes tuvieron diversas visiones respecto a la construcción de una figura geométrica, interpretación de una representación gráfica y de un problema expresado en un lenguaje verbal o en forma algebraica. Las textualidades estudiantiles aportaron diferentes estrategias y puntos de vista para enfrentar una situación problema particular y contestar las consignas propuestas. En el problema uno propuesto en la prueba los estudiantes expresaron algunas conclusiones particulares en torno a la construcción de figuras, En este sentido, algunas producciones se expresa que el proceso de construcción se podrá continuar hasta que un lado del hexágono llegue a cero y siga manteniendo la forma de hexágono, lo que indica claramente un pensamiento variacional emergente.

Otros estudiantes sostuvieron que la longitud del lado será próxima a cero pero no llegará a serlo mostrando la emergencia de un proceso de convergencia y, por lo tanto la manifestación de un proceso variacional. La afirmación “las dimensiones de algunos hexágonos serán microscópicas” también revela la emergencia de un pensamiento variacional que conduce a pensar en la definición

ε–δ de los procesos de convergencia. Otra afirmación destacable desde el punto de vista de los objetivos de la investigación es "…la medida de su lado se hará tan pequeña hasta un punto que "no se puedan sacar más distancias".

Una situación nueva la propuso un estudiante al mencionar que el proceso de construcción de hexágonos es "infinito hacia dentro", con la posibilidad que el proceso de construcción podría generar una sucesión de hexágonos hacia "afuera del primero"; esta afirmación revela una apertura de pensamiento de los estudiantes que miraron desde otra perspectiva la construcción de la figura.

En general todos los problemas propuestos en la prueba diagnóstica presentan una riqueza en torno a diferentes tipos de estrategias, ideas, maneras de razonar y establecer algunas relaciones entre diferentes magnitudes lo que nos brinda una perspectiva que el pensamiento variacional debe ser abordado desde niveles preescolares y desde los contextos estudiantiles familiares, de modo que la variación y el cambio pueda ser parte del imaginario común de cada ciudadano, articulándose con los diferentes espacios académicos y desarrollándose de manera adecuada

5.3.1.2. Sesiones de Estudio

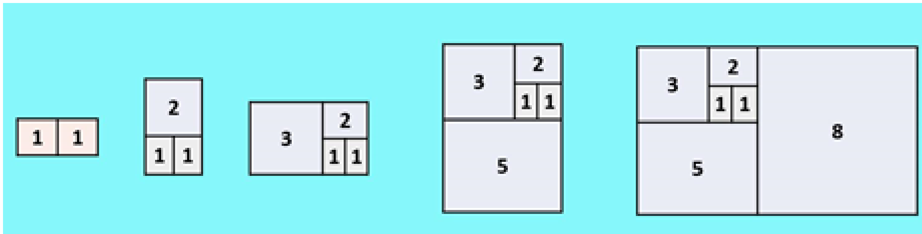
La sesiones de estudio que se propusieron para el curso fueron diseñadas por el profesor del curso de Cálculo para ser desarrolladas en equipos de trabajo (3 a 5 estudiantes). Para el desarrollo de las mismas se les sugirió es que estas fuesen realizadas de acuerdo sus intereses, tanto en el espacio físico, como en el temporal que consideraran más conveniente, pero los resultados debían presentarse en el aula. Como evidencia del desarrollo del proceso, se les solicitó que compartieran sus avances tanto escritos, como en audio-video. Todo ello, fue transcrito totalmente, tanto de cada una de las etapas de discusión, como de los consensos logrados por los miembros del grupo en la sesión de trabajo correspondiente.

5.3.1.2.1. Sesión de estudio uno

Esta sesión se conformó por tres partes expresadas en lenguaje natural acorde a situaciones que contienen implícitos algunos teoremas, definiciones, propiedades, axiomas de ciertos objetos matemáticos, además se complementó con representaciones figurales para la primera parte, y algunas representaciones geométricas para la segunda.

En la primera parte se les presentó cuatro imágenes referidas a los pétalos de una sábila, la formación de una planta de caracol, la estructura de un caracol y el fruto de una piña. Uno de los propósitos de esta parte es que los estudiantes pudiesen reflexionar respecto a similitudes y diferencias de algunas regularidades matemáticas que pudiesen observarse en las cuatro imágenes.

La segunda parte fue presentada mediante una secuencia de rectángulos que fue creciendo paulatinamente de acuerdo a cierta regularidad en la construcción de los mismos.



Con ello se les solicitó a los estudiantes la contestación de ciertas preguntadas derivadas de la visualización y reflexión de la situación propuesta. Las siguientes imágenes fueron proporcionadas.

La tercera parte solicitó resultados obtenidos en la primera y segunda, además de formalizar el concepto de sucesión encontrado en las relaciones anteriores y proponer otras sucesiones que pudiesen construirse con las relaciones observadas.

A continuación presentamos la actividad uno, desde una mirada de EOS como una herramienta de análisis didáctico.

Etapa 1 Se responde a las preguntas básicas

Se responde a las preguntas ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

En la primera parte de la actividad, los estudiantes utilizan ciertas habilidades cognitivas, ya que visualizan las figuras y observan en ellas ciertas analogías (forma, crecimiento). Algunos de ellos argumentan que las imágenes propuestas son fractales. Otros por su parte, visualizan y relacionan las imágenes propuestas a ciertas propiedades de figuras geométricas tales como:

paralelogramos, circunferencias, etc. Un grupo menor de estudiantes afirma que en las cuatro figuras se puede encontrar una proporción Aurea.

Los estudiantes en general concluyen que las secciones crecen proporcionalmente, y que se observan espirales en cada figura.

Para la segunda parte, los estudiantes en su mayoría han encontrado propiedades en las imágenes y presentan distintos argumentos en lenguaje natural, representaciones gráficas asociadas a funciones de tipo exponencial que muestra el crecimiento asociado al tiempo, representaciones de más rectángulos a los proporcionados en esta parte, listado numérico de términos, argumentos expresado en lenguaje natural respecto a los patrones encontrados de la longitud de las figuras geométricas, perímetros y áreas.

La tercera parte fue sustentada en gran medida por las partes precedentes y los argumentos para sustentarla fueron expresados mediante lenguaje natural, representaciones de tipo aritmético, algebraico, geométrico, figural, entre otras. Algunos estudiantes pudieron establecer sucesiones y formalizarlas de un punto de vista matemático.

Etapa 2: Producciones de los estudiantes del grupo que son representativas de las interacciones surgidas al enfrentar la situación problema

Primera parte

E1**: "**Es un fractal triangular, en el cual el área de los triángulos se va dividiendo en forma indefinida en la figura 1".

E2: "5 líneas de paralelogramos superpuestos…pirámides de base cuadrada en líneas de forma de semicírculos, seguidas unas de otras formando un Círculo, el área de la figura es igual a la suma de las áreas de las 2 figuras geométricas anteriores, seguidas en forma espiral, en otras palabras esta es la figura es de la 1 como consecuencia de la dos (…) romboides sobrepuestos en forma creciente".

E4: "En la imagen número 1 y número 3 crecen de manera proporcional. La figura 4 presenta una forma de parábola. En las imágenes tienen una forma predefinida de crecimiento que crece o decrece de manera proporcional. En la figura 1 y 2 cada curva proviene de su centro".

E5: "Fig1 el crecimiento proporcional, las figuras son constantes, tienen relación estructural (comparte gran parte de su estructura). Fig2. Está relacionado por la fig. 1 y 3 por su fórmula estructural creciente. Fig3 el crecimiento de esta figura es de forma exponencial y forma un espiral. Fig4 tiene forma cónica se va desarrollando con espirales".

E6: "Suponemos que los segmentos que conforman la figura1 son semejantes los espirales que conforman la figura tienen el mismo punto de origen y cada uno tiene una curvatura y su crecimiento es proporcional hasta cierto límite".

E7: "Fig1 se puede apreciar que forman dos espirales en distintos sentidos alrededor del mismo centro, pero diferentes tamaños. Fig2 se aprecia semi espirales en distintos sentidos y del mismo tamaño. Fig3 se forma una espiral y se va alejando cada vez más rápido de su eje o punto inicial. Fig4 veo una figura cónica que está formada por semi espirales".

E8: "Fig1. Tiene forma de espiral. Crece proporcionalmente, a medida que sale del centro hacia el borde son fractales. Fig2 tiene semicircunferencias salientes del centro, los pétales tiene forma elíptica, son fractales, tiene forma espiral. Fig3 tiene la forma de espiral envolvente. Fig4 crece en forma de espiral". |

E9: "Teselación de un círculo, gráfica desde el origen de las circunferencias (curvas), proporciones graduales. Todas están formadas por figuras semejantes que parten desde el centro de la figura, y están ordenadas en formas curvas. Un origen del cual parte la figura y curvas que se trazan desde. Sí, usando una gráfica de una función exponencial. Si existe relación entre las figuras 1, 3, y 4, ya que en la figura 2 se observará una semejanza de figuras internas, pero no se observan que estas crezcan".

Segunda parte

E1**:** "Que todas crecen en forma de espiral y lo hacen proporcionalmente. Todas las figuras se relacionan de manera geométrica y biológica. El crecimiento es exponencial. La relación que tiene con las figuras 1, 2, 3,4, es que cada figura formada (geométrica) está presente en el crecimiento de las figuras 1, 2, 3,4. La sucesión de rectángulos es la suma de uno de sus lados de cuadrados anteriores".

E2**:** "Que se repiten determinadas figuras que están formadas por curvas. Que son curvas que están presentes en cada imagen. El girasol presentaría alguna propiedad que se puede expresar en términos matemáticos, ya que si calculamos el perímetro que une una circunferencia podemos formar su centro.

Creemos que la relación puede coincidir más con la imagen. Los crecimientos crecen exponencialmente. El rectángulo siguiente sería de 13x13".

E3**:** "Las propiedades en común que tienen estas imágenes con las de la parte 1 son que estos también se forman espirales o semi espirales siguiendo el orden numérico. Tienen en común las formas de espirales crecientes o semi espirales en distintas direcciones. Una propiedad matemática es el crecimiento proporcional de cada figura. En estas figuras se suman los 2 números anteriores para formar el cuadrado siguiente y seguir el crecimiento proporcional".

E4: "Cada nuevo rectángulo está formado por el anterior. Para formar la nueva parte del rectángulo sucesor va en la medida de sus dos rectángulos anteriores, sus dos últimos rectángulos. 1-1 2, 1-2 3, 2-3 5, 5,3 8. El largo de un rectángulo es proporcional al ancho de su rectángulo sucesor. El Largo del primer rectángulo forma el cuadrado del segundo, el largo da la medida de los 4 lados del siguiente cuadrado dentro del rectángulo. 5 y 8 forman el siguiente rectángulo, 13 medidas de los 4 lados del siguiente cuadrado dentro del mismo rectángulo".

E5: "Si tienen relación de todo para seguir construyendo cada rectángulo de la sucesión. De los de todos es siempre sumar las dos figuras mayores (más grandes) resultando de ellas una nueva figura, a la cual después se sumará con la anterior dando paso a una nueva figura, así de forma sucesiva. Se puede asociar alguna sucesión de números a la sucesión de rectángulos. Un ejemplo de esto es 1+1+2+3+5+8+13, al aplicarlo tenemos que $1 + 1 \rightarrow 2$, luego $2 + 1 \rightarrow 3, 2 + 3 \rightarrow 5, 3 + 5 \rightarrow 8, 5 + 8 \rightarrow 13, 8 + 13 \rightarrow 21$".

E6: "El crecimiento proporcional continuo, de una materia pequeña al transcurso del tiempo va aumentando. Crecimiento con el tiempo. Sí la sucesión de rectángulos es indefinida, el cuadrado siguiente es el 13. El crecimiento de los rectángulos. El rectángulo que se agrega corresponde a la suma de los 2 rectángulos anteriores mayores que existen".

E7: "Son sumas de las figuras geométricas. Son secuencias de figuras y se asimilan a las propiedades de la figura 3. Área y perímetro. Solo tienen relación con la figura 2 y 3".

E10: "$a_4 = 5, a_5 = 8, a_6 = 13, a_x = n - 1, a_y = n - 2, a_z = (n - 2) + (n - 1)$. La suma de las dos áreas de los 2 rectángulos anteriores=área del rectángulo".

E8**:** "Al sumar desde el primer rectángulo el lado de dos cuadrados más grandes, da como resultado el lado del nuevo cuadrado, ej. $1+1=2, 1+2=3, 3+2=5, 5+3=8\ldots$ y así sucesivamente. Otra relación es que al crear un nuevo cuadrado en el rectángulo siguiente se mantiene por completo el rectángulo anterior. Al sumar el lado de los 2 cuadrados más grandes del rectángulo sucesivamente cumple el patrón de que el primer rectángulo suma un número par y las dos siguientes sumas impares. Al sumar el lado de cada uno de los cuadrados del rectángulo los 2 primeros rectángulos dan par y el área del también da par y el rectángulo siguiente al hacer lo mismo da impar. Método para construir un nuevo rectángulo, $n1$ = lados del cuadrado mayor, $n2$ = lados del cuadrado menor, $n1 + n2 =$ lado del nuevo rectángulo, $(n1 + n2) + n1 =$ otro lado del nuevo rectángulo".

Tercera parte

E1**:** "$n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 5, n_5 = 8, n_6 = 13, n_7 = 21, n_8 = 34, n_9 = 55, n_{10} = 89, n_{11} = 144, n_{12} = 233, n_{13} = 377, n_{14} = 610, n_{15} = 987$".

E2: "15 términos 2-4-7-12-23-33-54-88-143-232-376-609-986-1596-2583".

E3: "15 primeros términos 1-2-3-5-8-13-21-34-55-89-144-233-377-610-987".

E4**:** "Cada sucesión el número siguiente contiene 3 veces el número anterior y luego el 2, 1,1, luego para el que sigue se adhiere al número anterior al 2, 1,1".

E6**:** "Los términos son 1,2,3,5,8,13, 21, 34, 55,89,144, 233, 377, 610,987,".

E7**:** "$n_1 + n_2 =$ lado, n_2+lado=lado L"

E8: "1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 98".

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes): propiedades, regularidades matemáticas, geométricas, algebraicas, objetos, términos matemáticos, sucesión, rectángulos, números, nueva sucesión, dividiendo, sucesión base.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

Fractales, perímetros, áreas, fórmulas, crecimiento, aumento del área, iguales, proporción aurea, construyendo, nueva figura, sumará, teselación, circunferencia, proporciones graduales, figuras semejantes, función exponencial, espiral, espiral envolvente, crece, proporcionalmente, elíptica, centro de origen, distintos sentidos, tamaño, segmentos, elipses, curvas, repiten, imagen, perímetro,

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

En general los estudiantes se abocaron a la situación problema, sin embargo, dos grupos expresaron en la parte dos un esbozo de representación gráfica de una curva exponencial continua con crecimiento positivo y cuya variable independiente lo asociaron al tiempo. Otra situación emergente la planteó un grupo que asoció a la manera de la formación de una piña con parábolas.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

(**…**) Es un fractal triangular

(**…**)5 líneas de paralelogramos superpuestos…pirámides de base cuadrada en líneas de forma de semicírculos, seguidas unas de otras formando un círculo…el área de la figura es igual a la suma de las áreas de las 2 figuras geométricas anteriores, seguidas en forma espiral, en otras palabras esta es la figura es de la 1.

(**…**) imagen 1: creciente desde su centro hacia afuera… Imagen 2: Una serie de curvas en distintos sentidos, cruzadas entre ellas… Imagen 3: Una espiral envolvente, que origina un cilindro curvo compuesto por curvas

(**…**) En la imagen número 1 y número 3 crecen de manera proporcional. La figura 4 presenta una forma de parábola.

(**…**) Fig1 el crecimiento proporcional, las figuras son constantes (**…**) Fig2. Está relacionado por la fig. 1 y 3… Fig3 el crecimiento de esta figura es de forma exponencial y forma un espiral. Fig4 tiene forma cónica (**…**).

(**…**) Suponemos que los segmentos que conforman la figura1 son semejantes los espirales que conforman la figura tienen el mismo punto de origen y cada uno tiene una curvatura.

(**…**) Teselación de un círculo.

(**…**) Todas están formadas por figuras semejantes que parten desde el centro de la figura.

(**…**) Todas están formadas por figuras semejantes que parten desde el centro de la figura, Sí, usando una gráfica de una función exponencial. Si existe relación entre las figuras 1, 3, y 4, ya que en la figura 2 se observará una semejanza de figuras internas (**…**) Que todas crecen en forma de espiral y lo hacen proporcionalmente. Todas las figuras se relacionan de manera geométrica y biológica. El crecimiento es exponencial. La relación que tiene con las figuras 1, 2, 3,4, es que cada figura formada (geométrica) está presente en el crecimiento de las figuras 1, 2, 3,4.

(…) Que se repiten determinadas figuras que están formadas por curvas El girasol presentaría alguna propiedad que se puede expresar en términos matemáticos. Las propiedades en común que tienen estas imágenes con las de la parte 1 son que estos también se forman espirales o semi espirales siguiendo el orden numérico.

(…) Que se repiten determinadas figuras que están formadas por curvas. El girasol presentaría alguna propiedad que se puede expresar en términos matemáticos. Las propiedades en común que tienen estas imágenes con las de la parte 1 son que estos también se forman espirales o semi espirales siguiendo el orden numérico.

(…) En estas figuras se suman los 2 números anteriores para formar el cuadrado siguiente y seguir el crecimiento proporcional.

(…) Cada nuevo rectángulo está formado por el anterior.

(…) De todos es siempre sumar las dos figuras mayores (más grandes) resultando de ellas una nueva figura, a la cual después se sumará con la anterior dando paso a una nueva figura, así de forma sucesiva. Se puede asociar alguna sucesión de números a la sucesión de rectángulos. Un ejemplo de esto es $1+1+2+3+5+8+13$, al aplicarlo tenemos que $1+1\rightarrow 2$, luego $2+1\rightarrow\ 3, 2\ +3\rightarrow\ 5, 3+5\rightarrow 8, 5+8\rightarrow\ 13, 8+13\rightarrow 21$.

(…) El crecimiento proporcional continuo, de una materia pequeña al transcurso del tiempo va aumentando. Crecimiento con el tiempo.

(…) Son sumas de las figuras geométricas (…).

(**…**) Al sumar desde el primer rectángulo el lado de dos cuadrados más grandes, da como resultado el lado del nuevo cuadrado, ej. $1+1=2, 1+2=3, 3+2=5, 5+3=8\ldots$ y así sucesivamente.

(**…**) Al sumar el lado de los 2 cuadrados más grandes del rectángulo sucesivamente cumple el patrón de que el primer rectángulo suma un número par y los dos siguientes suma impar. Al sumar el lado de cada uno de los cuadrados del rectángulo los 2 primeros rectángulos dan par y el área también da par y el rectángulo siguiente al hacer lo mismo da impar.4

(**…**)$n_1=1, n_2=2, n_3=3, n_4=5, n_5=8, n_6=13, n_7=21, n_8=34, n_9=55, n_{10}=89, n_{11}=144, n_{12}=233, n_{13}=377, n_{14}=610, n_{15}=987.$

(**…**)15 primeros términos 1-2-3-5-8-13-21-34-55-89-144-233-377-610-987.

(**…**)Los términos son 1,2,3,5,8,13, 21, 34, 55,89,144, 233, 377, 610,987,…,.

(**…**)Cada sucesión el número siguiente contiene 3 veces el número anterior.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

(**…**) En el cual el área de los triángulos se va dividiendo en forma indefinida en la figura 1.

(**…**) Como consecuencia de la dos… romboides sobrepuestos en forma creciente.

(**…**) A medida que crece sus escamas crecen… que son imagen de una circunferencia (**…**).

En las imágenes tienen una forma predefinida de crecimiento que crece o decrece de manera proporcional.

Tienen relación estructural (comparte gran parte de su estructura)… por su fórmula estructural creciente (**…**) se va desarrollando con espirales.

(**…**) Y su crecimiento es proporcional hasta cierto límite.

(**…**) Pero no se observan que estas crezcan.

(**…**) La sucesión de rectángulos es la suma de uno de sus lados de cuadrados anteriores.

(**…**) Que son curvas que están presentes en cada imagen(**…**) ya que si calculamos el perímetro que une una circunferencia podemos formar su centro.

(**…**) El largo de un rectángulo es proporcional al ancho de su rectángulo sucesor. El Largo del primer rectángulo forma el cuadrado del segundo, el largo da la medida de los 4 lados del siguiente cuadrado dentro del rectángulo. 5 y 8 forman el siguiente rectángulo, 13 medidas de los 4 lados del siguiente cuadrado dentro del mismo rectángulo.

Si tienen relación de todo para seguir construyendo cada rectángulo de la sucesión.

(**…**) Sí la sucesión de rectángulos es indefinida, el cuadrado siguiente es el 13.

La suma de las dos áreas de los 2 rectángulos anteriores=área del rectángulo.

Otra relación es que al crear un nuevo cuadrado en el rectángulo siguiente se mantiene por completo el rectángulo anterior…. Método para construir un nuevo rectángulo, $n1 =$lados del cuadrado mayor, n2=lados del cuadrado menor, $n1 +$

$n2 =$ lado del nuevo rectángulo, $(n1 + n2) + n1 =$ otro lado del nuevo rectángulo.

(…) Y luego el 2, 1,1, luego para el que sigue se adhiere al número anterior al 2, 1,1.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas

Los desarrollos de cada una de las partes de la consigna reflejan en su mayoría que los estudiantes poseen, generalmente, concepciones adecuadas a los objetos matemáticos en cuestión, además pusieron de manifiesto la evolución y madurez de ciertas habilidades cognitivas que fueron desplegadas tales como la visualización, representar formular, conjeturar, además del uso de diferentes representaciones.

Emergentes

Durante se fue desarrollando las partes de la actividad los estudiantes identificaron ciertos patrones y regularidades matemáticas asociados a ciertas imágenes en contexto que coadyuvaron a cierta formalización matemática de sucesiones, aunque cabe señalar que fueron muy pocos grupos que lograron transitar hasta la formulación de una sucesión, sin embargo fue notable el esfuerzo desplegado por los estudiantes ante las tareas propuestas. Cabe señalar que un grupo de estudiantes asoció una regularidad de las áreas, un modelo discreto a una función continua exponencial creciente que además de acuerdo al esbozo de la gráfica realizada dependía del tiempo. Los estudiantes en su mayoría desplegaron algunos indicios de pensamiento variacional cuando lograron establecer relaciones entre las figuras construidas respecto a las anteriores y articularon una dinámica de construcción.

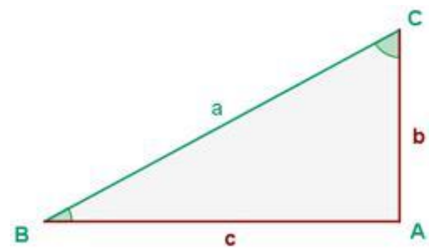
Procedimientos

Los estudiantes plasmaron sus desarrollos atendiendo a argumentos visuales, descomposición de las figuras en algunos casos, formulación de tablas, representaciones gráficas, algebraicas en menor medida, argumentos escritos en lenguaje natural, figural específicamente diferentes dibujos y diagramas como un recurso valioso para plasmar la situación y visualizarla desde otra perspectiva.

5.3.1.2.2. Sesión de estudio dos

Esta segunda sesión se compuso de tres consignas. La primera de estas, solicitó crear una situación problema que involucrara las dos imágenes presentadas y que utilizara funciones trigonométricas (ver figuras).

La segunda parte de la actividad solicitó responder ciertos aspectos relacionados con lo que acontecía con los elementos del triángulo, cuando al menos uno de estos modifica su valor (ángulo, lados). Para este propósito se les proporcionó la imagen siguiente.



La tercera consigna solicitó las posibles variaciones de los ángulos de un triángulo rectángulo ante ciertas situaciones preestablecidas.

Al igual que la prueba diagnóstica para su análisis se reflexionó cada una de las prácticas cognitivas que emergieron en las producciones estudiantiles de algunos grupos que participaron en la investigación desde la mirada de EOS.

Grupo uno (G1)

Etapa 1 Se responde a las preguntas básicas

Se responde a las preguntas ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

Los estudiantes de este grupo proponen una situación problema de carácter fantasista, donde involucran a una persona, un árbol, y una mascota, y le asignan de manera arbitraria, ciertos valores numéricos a algunos elementos (distancias) que intervinieron en este problema, esta acción de adjudicar valores obedece quizás a la experiencia acumulada de otras vivencias de situaciones análogas. En este sentido, los estudiantes manifestaron en sus textualidades que se explicitan más adelante.

Los alumnos desarrollaron cálculos y obtuvieron valores, aplicando su conocimiento de trigonometría de triángulo rectángulo. En este sentido, ellos manifestaron cierto dominio operacional de los algoritmos relativos al cálculo de las funciones trigonométricas. En su creación de la situación asignaron valores para lados, y para un ángulo que denominaron de visión. Esto refleja que ellos intentaron asemejar esta situación fantasista a un problema real.

Etapa 2: Producciones de los estudiantes del grupo representativas de las interacciones surgidas al enfrentar la situación problema

A lo largo de las etapas se enunciarán textualidades relacionadas con una etapa en particular.

E1: Expresa que una persona que iba pasando por una plaza y frente a él había un poste a 12 metros de distancia, detrás del poste había un árbol y arriba del árbol había un gato. El hombre sabía que desde él hacia el árbol había 15 metros de distancia y él quería saber a qué distancia se encontraba el gato.

Ahora para hacer el cálculo se debe hacer con la altura de la persona, ésta debe ser 1,80 aproximadamente. Pero mirando el ángulo para calcular desde la perspectiva del ojo de la persona, 1,70 aprox. El ángulo de visión de la persona hacia el poste habían 20°, ahora la altura del poste. Primero hay que calcular la medida del poste.

E2: Muestra el dibujo y expresan: Ahí está el dibujito, el ángulo alfa por teorema de Thales mide 70° ya que aquí hay una proporción (mostrando los elementos de los triángulos). Hacen más cuentas y deducen la altura del árbol.

Respecto a la variación los estudiantes discuten y expresan algunas ideas, E3 menciona: Analizando las situaciones de variación planteadas comentan: Cuando 'c' disminuye el ángulo 'B' aumenta para que se mantenga la igualdad de estos triángulos y se mantenga la igualdad de todos los lados interiores de (murmullo)…

E4: Si el lado 'c' disminuye, el ángulo 'C' también disminuye,

Todos: murmullos (**…**).

E1: Es que estoy diciendo ángulo y ángulo, ahí hay un error (**…**).

Todos: murmullos (**…**).

E2: Si pregunta por 'c' esta es una distancia del ángulo 'A' al ángulo 'B'(…).

E3: Ah! está preguntando por este c, c lado ya, si c, este c aumenta, el ángulo 'C' también aumenta, para mantener la igualdad de los ángulos interiores que deben sumar 180. Porque si el ángulo 'B' está aumentando el ángulo 'C'' debe estar disminuyendo.

E2: Si 'b' y 'c' varían simultáneamente, por ejemplo si 'c'' crece y 'b' disminuye, a2) deberían hacerlo en la misma proporción.

E3: claro para que no se alterara el triángulo dentro deberían aumentar y disminuir juntos, si lo hacen por separado varían las medidas del triángulo.

E2: para que se mantenga la propiedad de ser un triángulo rectángulo a1) hummmm cuatro.

E4: seno (pausa)…aaah aquí la craneamos toda la… (No se entiende) seno (murmullos) seno…seno del ángulooo 'c' e igual aaa opuesto partido por a, murmullos.

E2: Seno de éste llega…silencio…eeehhh, con los catetos opuestos la adyacente y la hipotenusa dependiendo de cada ángulo se pueden calcular todas las demás funciones trigonométricas que hay en el triángulo.

E3: El seno de C sería 3, no, sería, cuatro quintos y, a ver la tangente dee,

E4: Espérate, de B, la tangente de B es cuatro tercios…murmullos…

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

Triángulo rectángulo ABC, longitudes, b y c variación del ángulo B, c disminuye, c crece, la variación, ángulo C, b y c, varían simultáneamente, relación o relaciones algebraicas, elementos del triángulo, funciones seno, coseno y tangente b = 3 y c = 4, situación real, posibles variaciones, efecto producido, variación de B, funciones trigonométricas, ángulo A varía, dejando de ser recto, ¿Qué le ocurre al ángulo B?

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

Aproximadamente, hipotenusa, visión de la persona, razón, altura del poste, ángulo alfa, Teorema de Thales, Teorema de senos, cateto adyacente, cateto opuesto, igualdades del triángulo, distancia mayor.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que la mayoría de ellos atendió las tres consignas planteadas en la situación y no figuró ninguna situación emergente en este grupo durante las prácticas.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

E3: Desde la perspectiva del ojo de la persona, que esto es desde aproximadamente como un metro setenta… eh, en el ángulo de visión hacia el poste, eh, o sea, del ángulo de la persona hacia el poste habían 20 grados, eh.

E3: Eh, ya, ahora, primero hay que calcular la altura del poste (…).

E3: Ahí está el dibujito, no se ve muy bien pero, este es el ángulo alfa, por teorema de Thales este es igual a 70 grados

E1: Yo creo que hay que usar el teorema de senos.

E2: Lo vamos a ver el… con el seno y el coseno porque seno de 20 es este y coseno de(…) de(…) 20 es eso (…).

E2: Lo vamos a ver el… con el seno y el coseno porque seno de 20 es este y coseno de… de… 20 es eso (…).

E1: Ya, ya (…) entonces lo primero que sacamos, sacamos el coseno, no si, sacamos el coseno, el coseno de 20 grados y sabemos que el coseno de esto es igual a, el cateto adyacente partido en la hipotenusa

E1: Para conocer la altura del árbol, entonces vamos a tener que el seno de 20, vale cero coma 34, y vamos a tener que.

E1: Si 'C', este 'C', la distancia aumenta el ángulo 'C' también aumenta.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

En general los estudiantes hacen argumentaciones basados en aspectos visuales e intuitivos, sin embargo presentan también argumentos con algunas características que incorporan algunos elementos de lo variacional.

(…) Eh, por lo tanto la parte superior del poste conformado con la hipotenusa desde la visión de la persona son 70 grados.

(…) Aquí esto forma una proporción y siempre este ángulo sigue siendo recto y aunque esto agranda la proporción es la misma, sigue siendo la misma.

(…) Aquí esto forma una proporción y siempre este ángulo sigue siendo recto y aunque esto agranda la proporción es la misma, sigue siendo la misma.

(…) Eh, como ya conocíamos el cateto adyacente despejamos la hipotenusa y la hipotenusa nos queda igual a 12 coma 9, que sería este pedazo.

(…) y que y como ya conocemos la hipotenusa multiplicamos cero coma 34 por 16 coma 12 y eso nos va a dar la altura de la persona.

(…) para mantener la relación dentro de los ángulos dentro de un triángulo que es que son 180 grados.

(…) porque el, la distancia mayor y el ángulo 'B' va disminuyendo entonces para mantener la igualdad de los ángulos inferiores que suman 180 el ángulo 'C' debería aumentar y hace que el 'B' disminuye y el caso contrario cuando 'C' se achica la distancia 'C' se hace menor, el ángulo 'C' también se hace menor porque el ángulo 'B' está aumentando su tamaño.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: Respecto a los objetos matemáticos involucrados los estudiantes tienen el manejo de los mismos en la mayoría de los caso, tal es el caso de funciones trigonométricas, elementos de un triángulo rectángulo, propiedades de los ángulos de un triángulo rectángulo, sin embargo no fueron capaces de realizar una formalización respecto a cómo varían los ángulos en un triángulo rectángulo. Los estudiantes además desplegaron concepciones geométricas de las propiedades de los ángulos de un triángulo rectángulo.

Emergentes

Durante la práctica algunos estudiantes aludieron a la Ley de Senos y de Cosenos, como un complemento a la resolución de un triángulo rectángulo, sin embargo no se observó de manera directa la variación de manera simultánea de elementos del triángulo.

Procedimientos

Los estudiantes de manera intuitiva asignan valores que se ajustan a posible problema real que se pensó desde una tipología fantasista, y desde esa lógica ellos calculan valores desconocidos mediante funciones trigonométricas apropiadas. Los siguientes diálogos dan cuenta de ello.

E3: Eh, en la breve anterior nosotros habíamos planteado la situación de que había una persona que iba pasando por una plaza y frente a él se encontraba un poste a 12 metros de distancia, al ras de ese porte se encontraba un árbol donde arriba del árbol había un gato y la persona sabia que de ir hacia el árbol habían 15 metros de distancia y lo que él quería saber era quien pudiese encontrar el gato(…) ahora para hacer el cálculo esto se debe hacer con la altura de la persona

E1: Era un metro ochenta aproximado

E3: Un metro ochenta aproximado pero mirando el ángulo para calcular desde (…).

E2: Desde la perspectiva del ojo.

E3: Desde la perspectiva del ojo de la persona, que esto es desde aproximadamente como un metro setenta… eh, en el ángulo de visión hacia el poste, eh, o sea, del ángulo de la persona hacia el poste habían 20 grados, eh, por lo tanto la parte superior del poste conformado con la hipotenusa desde la visión de la persona son 70 grados.

E2: ¿Qué estas tomando?

E3: La altura del poste.

E2: Eh, tenemos que usar una razón (…).

E3: ¿Tres metros era?

E2: Trigonométrica.

E1: dale 3 metros

E1: esto media 12 ¿cierto?

E3: si esto media 12

E2: si

E3: eh, ya, ahora, primero hay que calcular la altura del poste…

E3: ahora para calcular la altura del árbol, ¿qué hacemos?

E1: yo creo que hay que usar el teorema de senos

E3: Teorema de senos, ¿Qué dice el teorema de senos?

E1: Qué sería, ahí seria seno de 20

E3: Seno de 20…

E1: Ah, no, no, no… seno de 70
E3: Seno de 70

E1: Por (…)

E3: ¿Por?

E1: ¿Por cuánto? Ah por (…) por 12.

E3: ¿Podrías mencionar porque?

E1: ¿Por qué? Porque quiere avanzar el resto del árbol (…) pero, ah (…).

E2: Lo vamos a ver el (…) con el seno y el coseno porque seno de 20 es este y coseno de (…) de (…) 20 es eso (…) esto es una distancia, la suma de esto más esto, entonces tenga una parte que, seno dividido en coseno, entonces si sacamos coseno de 20 y el seno de 20. Ah no, pero esta malo eso (…).

E1: ¿Seno de 20?

E2: ¿El coseno de 70?

E1: ¿El coseno de (…)? coseno de 70 por 15… da 14

E3: ¿14?, ah (…).

E1: Sí

E3: Como otra vez nos había dado eso.

E2: Qué cómo lo hiciste?

E1: Es que (…) espérame, espérame (…) seno (…) no, voy a sacar el cuaderno (…).

E1: Entonces de nuevo, haber, el triángulo ¿cierto?, eso mide 70, eso media 20.
E2: Mide 20, esto mide 12.

E1: Mide 12, eso mide 15. Entonces vamos a tener que, lo vamos a sacar por seno.

E2: Por seno.

E1: Es por seno de 20, seno de 20 da cero coma 93. Ya, sabemos bien que eso va a dar cero coma 93, Sabemos que el coseno es el cateto adyacente (…).

E2: Dividido en la hipotenusa (…) tenemos cateto adyacente y el coseno, entonces cero coma 93 es igual a cateto, adyacente dividido en eso. Dividido en hipotenusa.

E1: Entonces, la (…) ah sí, pasa dividiendo el cero coma 93, quedaría hipotenusa.

E2: Igual (…).

E1: Igual a cero puntos (…) si a 12 coma 7(…) ah ah ya y eso va a medir 12 coma 7.

E2: ¿Seguro?... ¿y porque haces todo eso?

E1: Esto va ser… 12 coma 9… eso

E2: coma 9

E1: Eso, eso sería así también 12 coma 9.

E2: Esto

E1: La hipotenusa es la versión al costo.

E3: Sí, la versión al costo.

Grupo dos (G2)

Etapa 1 Se responde a las preguntas básicas

Se responde a las preguntas ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

La primera práctica que emergió en los desarrollos estudiantiles atendió a la creación de una situación problema que involucrara las imágenes proporcionadas, y que, además, utilizara a las funciones trigonométricas. En este sentido, la primera práctica que emergió se describe a continuación:

Los estudiantes plantean una situación similar para ambas imágenes. Ellos plantearon un problema en cierto contexto real y para ello proponen ciertos elementos: un foco, el piso y la proyección del foco, luego asignaron valores a estos elementos (longitudes), y otro que consideraron, el ángulo. Los estudiantes mencionaron la altura y el ángulo que se forma con el piso y la proyección del foco y, con estos elementos calcular la distancia que hay desde el foco hasta donde termina la proyección. Un valor adjudicado al ángulo fue 60º, para referirse al ángulo entre el piso y la proyección del foco, un valor a la altura del foco que no aparece expresado cuánto es. Sin embargo, se tiene el conocimiento que estos dos datos son suficientes para calcular los demás elementos.

La segunda práctica que emergió se refiera a las variaciones de los diferentes ángulos y su efecto en los lados y viceversa. Esta práctica proporcionó interesantes diálogos y discusiones entre los estudiantes del grupo, los cuales se muestran más adelante.

La tercera práctica emergente atiende a la reflexión de algunas de las variaciones posibles que podrían suscitarse en un triángulo rectángulo. Ellos incluso hacen alusión que el triángulo podría dejar de ser rectángulo y convertirse en otro tipo de triángulos (incluso isósceles). La tercera práctica se caracteriza por una riqueza en los diálogos orientados a la argumentación de la variación y a la búsqueda de caminos encaminados a formalizar algún tipo de relación existente en los elementos de un triángulo, fuese este rectángulo o no, y si es posible que un triángulo rectángulo al sufrir modificaciones en algunos de sus elementos se transforme en otro triángulo. Los diálogos para esta práctica los señalan posteriormente.

Etapa 2: Producciones de los estudiantes del grupo que son representativas de las interacciones surgidas al enfrentar la situación problema.

Diálogos surgidos de la primera práctica

E2: Dos fotos y como que estuviera una sombra ahí supuestamente

E1: Lo que pasa es que lo que hay que hace aquí es que hay que hacer una pregunta, un problema donde tengamos que implementar las funciones trigonométricas pa (…) yo digo que(…).

E2: Pudimos que, claro que calculemos que (…) para que nos dé(…) y ese ángulo deberíamos usar con(…).

E1: Yo digo que por ejemplo primero lo que hay que tener es más datos que los que aparecen aquí para ocupar por ejemplo funciones seno coseno para encontrar la proyección que tiene el foco con el piso, entonces podríamos crear un problema donde demos los datos de la por ejemplo la altura y el ángulo que se forma con el piso y la proyección del foco y así podríamos la distancia que hay desde el foco hasta donde termina la proyección. En cualquiera de las dos imágenes, ya hace la, escríbelo aquí (…) por ejemplo, tu sigue escribiendo más, si le damos un valor al ángulo y le damos un valor a la altura del foco podríamos hacer que la tangente de ese ángulo que tendríamos por ejemplo la tangente de 60 grados sería igual al opuesto que sería la altura del foco que también la daríamos, partido en el adyacente que sería la distancia que hay entre la base del foco y hasta donde termina la proyección de la línea blanca, entonces sería así como que la tangente de ese ángulo sería igual a la altura y ahí podríamos despejar la distancia que hay desde la base del foco hasta donde termina la línea, ese sería un problema que involucre funciones trigonométricas.

E2: Aja

E1: Ya

Diálogo de la segunda práctica

E2: el triángulo A B C

E1: déjale la parte uno a ese… De un triángulo rectángulo ABC, se conocen las longitudes b y c de los respectivos lados. O sea, lo rojo se conoce y lo, y el A no se conoce, dice la uno dice Describa la variación del ángulo B en los casos siguientes:

a. 'c' disminuye.
b. 'c' crece.

E2: Haber, la variación del ángulo, si 'C' disminuye va a aumentar el ángulo 'B' po.

E1: ¿Porqué decís que aumenta ese ángulo?

E2: ¿Porqué esto se va a hacer más pa acá po y esta línea va a estar más inclinada o sea que el ángulo va a ser más (…) estas entendiendo?

E1: Sí po pero lo que pasa es que mira, yo creo que no po, yo creo que aquí es igual si se (…).
E2: No, po el ángulo B no.

E1: Yo creo que si man.

E2: No.

E1: Porqué decís el ángulo B, po.

E2: Porqué mira esta es la línea que va de aquí a aquí va, cachay, si esta la cerras más entonces el ángulo se va a hacer más pequeño.

E1: Pero es que este mira, este ángulo se forma.

E2: O sea, este va a disminuir y este va a aumentar.

E1: Segurin.

E2: Seguro.

E1: Que lo que yo pienso es que al estar ese ángulo se forma, ¿ese ángulo es de 90 siempre, crezca o disminuya? Y este ángulo de acá, eh (…).

E2: A claro, me están diciendo que la longitud de 'C'(…).

E1: Sí ese ángulo tendría que aumentar el 'B'.

E2: Sí po.

E1: cuando 'C' disminuye el ángulo 'B' tendría que aumentar porque como este ángulo, al hacer este pa acá, vamos a disminuir entonces este tiene que aumentar para cumplir los 180 grados.

E2: Sí por el 'C' po.

E1: Sí por el 'C'(…) y si 'C' crece debería de ser al revés.

E2: Sí, po, 'B', el ángulo 'B' disminuye y el 'C' aumenta porque se abriría más y este se cerraría más.

E1: Sí, po, tenes razón.

Diálogo de la tercera práctica

E1: Estudie todas las posibles variaciones de los ángulos del triángulo y combinaciones de ellas (incluso de A), y describa el efecto producido por éstas, sobre los otros ángulos.

E2: ¿Cómo? ¿Todas las posibles variaciones de los ángulos del triángulo?

E1: Y combinaciones (…).

E2: Ah o sea, en el rectángulo al principio, si todas las posibles variaciones pero viste que había una que era si variaba 'C' y 'B' que eran los catetos, ahora todo po incluso si varia el ángulo este.

E1: Ah dale.

E2: O sea que el triángulo dejaría de ser rectángulo y se inclinaría, se haría un ángulo así, tiene que variar también este ángulo (…) eh tantas posibilidades que hay (…).

E1: Veámoslo en los cuadernos si po, cada uno en su (…).

E2: Ah no pero él dijo que podíamos subir varias.

E1: Sí porque se nos cortó (…) acaban de llamar y se cortó y ahora vamos a mandar dos grabaciones.

E2: jejeje.

E1: Es que llaman (…) Estudie todas las posibles variaciones de los… bueno lo que pasa es que esto son problemas de mucho análisis entonces si dice estudie todas las posibles variaciones de los ángulos del triángulo y combinaciones de ellas, entonces estamos dibujando aquí en los cuadernos y nos damos cuenta que si variamos los ángulos.

E2: Cualquiera.

E1: Cualquiera de los ángulos.

E2: Van a haber muchas posibilidades.

E1: Son muchas, claro es como vayamos tirando nósticos de triángulos cada vez que cambiamos el, el(…) porque tenemos un triángulo rectángulo, si variamos el ángulo A que es de 90 grados vamos a transformar eh, ya va a dejar de ser un triángulo rectángulo y vamos a hacer un equilátero o un isósceles po, depende de(…) de cómo quede el triángulo.

E2: De la distancia.

E1: Sí po, de la distancia de sus lados.

E2: Sí abrís más el ángulo A va a quedar un ángulo muy grande ahí, si lo achicas podría quedar un equilátero.

E1: Sí, yo creo que esos son, como todas las posibles variaciones que puede tener son, por ejemplo, eh, para que quede más claro, si cambiamos el ángulo A va a dejar de ser triangulo rectángulo, eso está más que claro(…) si cambiamos el ángulo, si por ejemplo cambiamos el ángulo 'C' yo creo que ahí podríamos formar un triángulo equilátero, porque ahí podríamos dejar un triángulo de todos los lados iguales, yo creo, no sé, si es que no estoy seguro(…).

E2: Sí se pueden dejar todos iguales.

E1: Sí se pueden dejar todos iguales decís vos, pero habría que cambiar también la distancia de los lados

E2: El 'A' se estaría inclinando para acá, este correría aquí y este aquí, cachay, este formaría, este tendría como que aumentar este e inclinarlo para acá y(…).

E1: Aparte de trabajar con los ángulos tenemos que cambiar la longitud de los lados y ahí podríamos formar nuevos triángulos, esas son las modificaciones que… ¿Qué efecto tiene una variación de 'B', sobre el valor de las funciones trigonométricas evaluadas en los otros ángulos?

E2: ¿Cómo?

E1: Pero 'B' dice que, el otro, dice(…) que efecto tiene una variación de B, del ángulo B, ve el ángulo po(…) sobre el valor de las funciones trigonométricas en los otros ángulos(…) yo creo que ninguno.

E2: Como no.

E1: No porque si me varia, ah claro (…) si varia el ángulo 'B' lo más probable es que la distancia, la longitud perdón de los lados varíe po, entonces cuando nosotros sacamos de los otros ángulos sacamos el coseno, la tangente o cualquier cosa así trabajamos con la longitud que tienen los lados po, entonces si cambiamos el ángulo van a cambiar también la longitud de los lados, entonces en eso están relaciones en los lados.

E2: Pero dice(…).

E1: Por ejemplo si, por ejemplo mira, está claro que si cambia en ángulo.

E2: Solo tienes que cambiar el ángulo ahí nomás, solo el ángulo.

E1: Sí, sí, dice, que efecto tiene una variación de 'B' sobre el valor de las funciones, y como 'B' alta influye sobre 'B' corta entonces depende de ese ángulo la longitud que va a tener la 'B' corta.

E2: Claro, pero eso ya lo habíamos analizado.

E1: Entonces por ejemplo, si cambia esa 'B' cuando saquemos la tangente por ejemplo del ángulo 'C' vamos a tener otro valor en 'B' po, entonces va a ser distinto al que tenía(…) hay ta, po(…) cachaste.

E2: Sí.

E1: Ahí ta(…).

E2: 'C' no cambiaría nada.

E1: ¿Cómo?

E2: Nada, si varía este lado y 'B'.

E1: Pues si varía “y” B, pero es que mira dice que efecto tiene la variación, pero que tiene, sobre el valor dice de las funciones trigonométricas evaluadas en otro ángulo… por ejemplo en otro ángulo colocar una función trigonométrica, un seno, coseno o cualquier cosa y ver si varia y siempre va a variar, po.

E2: Ah sí va.

E1: Si cambias este ángulo porque 'B' va a cambiar, 'B' corta va cambiar, entonces si cambias ese ángulo va a cambiar 'B' corta y cuando saques el coseno, seno o tangente.

E2: La 'a' minúscula también.

E1: Claro, cuando sea el opuesto partido en el adyacente, o sea, cuando saques el seno solamente ahí no va a variar, porque ahí no trabaja “y” con ese lado pero la tangente y el coseno por ejemplo ahí varían… la tres dice ve.

¿Qué sucedería con las funciones trigonométricas en los otros ángulos si el ángulo 'A' varía dejando de ser recto?

E2: Ah eso es lo que decíamos po, que si el ángulo A deja de ser recto van a empezar a convertirse en otros triángulos (…).
E1: Seria las funciones trigonométricas, también cambiarían.

E1: También cambiarían porque al cambiar ese 'A' se supone que el ángulo 'B' y 'C' también van a cambiar ya sea uno o los dos, que si cambias el 'A' lo más probable es que cambien el ángulo 'C', ese es el que cambia, pero, entonces, seguramente (…) y si cambia en ángulo 'C'.

E2: Entonces existirá este triángulo así, también va a cambiar el ángulo 'B'.

E1: Y también van a cambiar la longitud, entonces esta es la que más varia porque el 'B' siempre (…) si (…) porque este influye sobre dos, si uno cambia el ángulo A va a cambiar la distancia del 'A' minúscula y va a cambiar la distancia del 'c' minúscula porque el ángulo 'C' también va a cambiar entonces cuando tú quieres sacar 'B' que es el único ángulo que no cambia.

E2: También cambiaría.

E1: no, Po, no cambia.

E2: Sí, Po.

E1: No, Po.

E2: Sí, Po, depende vo(…) si mira si este ángulo deja de ser recto y esta línea, si este lado lo expandís pa acá, la línea va a estar aquí vo esta hasta el más pequeño, cachay, hasta el más bajo, o sea, que este ángulo también va a ser menor.

E1: Ah si si si, entonces sí.

E2: Cambia totalmente el triángulo.

E1: Seguía las funciones trigonométricas de los otros ángulos(…) si también eh, al sacar un seno, coseno cualquier cosa también va a variar porque al cambiar un ángulo, como está todo, como leíamos antes en la teoría del seno, eso está todo, complementado por ejemplo, los ángulos influyen en los lados del triángulo en la longitud que tenga, si cambiamos los ángulos para(…).

E2: Y como el ángulo 'A' es recto si deja de ser recto ya es un cambio (…).

E1: Sí, Po, porque van a cambiar dos ángulos y va a cambiar la longitud de los lados… entonces dice encuentre una variación de B sobre la función trigonométrica evaluadas en otros ángulos(…) no que será eso… varia el ángulo A(…) si eso(…) dice cuando el ángulo 'C' está aumentado(…).

E2: Aumentando (…) ¿Qué le ocurre al ángulo B? (...) 'C' aumenta (…).

E1: Si el ángulo 'C' aumenta.

E2: Entonces se expande así.

E1: Pero (…).

E2: Esta línea empieza (…).

E1: Lo que hace es que te pregunto, solamente es al ángulo 'B', Po.

E2: Pero este sigue siendo recto.

E1: Sigue siendo recto.

E2: Entonces (…).

E1: Ah, pero es fácil po (…) es fácil, sabes porque es fácil (…).

E2: Ah, también va crecer.

E1: No, no puede crecer.

E2: Porque no.

E1: Porque mira, tenés ahora que por ejemplo que el ángulo 'C'.

E2: Te dice que aumenta po.

E1: Si pero mira tenía el ángulo 'C' cierto, más el ángulo 'A', más el ángulo 'B', y sabemos que ángulo 'A' vale 90.

E2: Ya.

E1: Y tenemos 'C', y 'A'(…) 'C' y 'B'(…) y eso tiene que ser igual a 180, cierto

E2: Ya.

E1: Entonces si 'C' crece, por ejemplo pongámosle valores, por ejemplo, 60, 90 y 30 así te da 180 cierto, entonces si nuestro ángulo 'C' que vale 60 aumenta a 90, tiene que disminuir para que le siga dando 180 po por un asunto matemático no más.

E2: Que imbécil jejeje.

E1: Je, je, je.

E2: Es que si es un ángulo recto va disminuir y viceversa.

E1: Es como la clave que estamos trabajando con un triángulo (…) como se llama (…).

E2: Rectángulo.

E1: Rectángulo, entonces si tenemos un ángulo recto que vale 90 en la suma de los otros dos ángulos tiene que dar 90, entonces si uno aumenta el otro disminuye para que la suma de 180(…) o sea, que por ejemplo si nos dijeran que, en la 4, si nos dijeran que el ángulo 'A' varia puede dejar de ser recto ahí podríamos decir, no sé, que se mantienen iguales, porque ahí podríamos modificar el A, pero como no solamente están preguntando si 'C' aumenta y no nos dicen nada sobre el 'A'.

E2: Hay que asumir que (…).

E1: Hay que asumir que si uno aumenta el otro tiene que disminuir para que la suma de 90, si los aumentan claramente va a dar más de 90(…) entonces nos faltaría la número 5(…) dice ¿Qué sucede en el caso anterior, con las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente del ángulo 'B', si el ángulo 'A' comienza a aumentar (disminuir) dejando de ser recto?(...) esto es como la primera pregunta que(…).

E2: Ah, no la escuche (…).

E1: Léela tú.

E2: ¿Qué sucede en el caso anterior, con las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente del ángulo 'B', si el ángulo 'A' comienza a aumentar (disminuir) dejando de ser recto? Ah dale (…).

E1: Tenés en dibujo.

E2: Sí (…).

E1: si el ángulo a comienza a aumentar dejando de ser recto, que pasaría con 'B'(…) Analicémoslo caso por caso por ejemplo el seno, como sabemos que el seno y el coseno tienen relación con lo que es la hipotenusa, el seno es opuesto partido por hipotenusa y el coseno es el adyacente partido en la hipotenusa, entonces si el, este, el ángulo a aumenta o deja de ser recto, aumenta o disminuye.

E2: Claro deja de ser recto.

E1: El lado 'a' que es la hipotenusa (…) a no po (…) cuando el ángulo no es… a no po… ah, ahí está la clave po (…) porque cuando un triángulo deja de ser recto el A deja de ser, ya no tenemos hipotenusa po(…).

E2: Ah, no tenemos tres lados.

E1: Sí po, tenemos tres lados (…).

E2: Que pueden ser isósceles, dos iguales otro no, o pueden ser tres lados distintos.

E1: Ah, que mal porque como sabemos el seno de un triángulo que no sea rectángulo.

E2: No sé po, no me acuerdo de esas cosas (…).

E1: Es que mira, si tenemos, por ejemplo, uno así y debemos sacar ese, el opuesto, adyacente hipotenusa no (…) o como sabemos si este es el adyacente (…).

E2: Claro porque si deja de ser recto no sé si se pueden seguir aplicando.

E1: Si po ese es el asunto, no pero yo creo que no se puede.

E2: Porque ¿Cuál sería el cateto?

E1: Si no se puede (…).

E2: Ah, ahí está po, si deja de ser rectángulo habría que hacer una partición a la mitad del triángulo o algo para que fuera recto igual, y quedara como una mitad así medio recto me entendés, esa sería una altura, ahí quedarían en línea recta y se formaría un ángulo recto y ahí se podría hacer po(…).

E1: Sí, pero déjame ver si hay otra forma (…).

E2: Mitad y mitad po.

E1: Aquí hay otro que lo parte a mitad y forma ángulos rectos

E2: Sí siempre hay que buscar eso po(…) sss aww(…).

E1: ¿Qué paso?

E2: Me pinche en esta cosa

E1: Esto es con lo que podríamos preguntarle al profe no, los otros no estaban tan difíciles pero este… ¿Qué sucede en el caso anterior, con las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente del ángulo B, si el ángulo A comienza a aumentar o disminuir dejando de ser recto?(...) o sea, vamos a formar otro triángulo, de hecho.

E2: Claro, y dejaría de ser recto entonces no podrían ocupar seno, coseno, tangente po, a menos que hagamos una partidura del triángulo.

E1: Ah, entonces lo que tenemos que hacer es que tengamos que dejar una altura, como lo hacen en los dibujos que estábamos viendo.

E2: Tenemos que buscar un lado al que ponerle el lado recto.

E1: Va a ser en 'C'(…) por ejemplo si este crece así.

E2: Claro.

E1: Ahí hay que marcar una línea como la del que esta 'B' ahora pero va a estar para el otro lado, cachay, por ejemplo si fuera así (…).

E2: Sí, se formarían dos triángulos

E1: Sí, se formarían dos triángulos (…).

E2: Cualquiera de los casos y habría que sacarla así, o sea (…).

E1: Pero igual lo que nos queda acá (…) que pasa con este ángulo si este varia… si este ángulo B cambia o no (…) este B va a seguir siendo el mismo, si lo, por ejemplo si es así, B va a seguir teniendo el mismo valor(…).

E2: Claro si 'A' crece pa acá (…).

E1: Va a tener el mismo valor, y también po.

E2: Si 'A' aumenta (…).

E1: Entonces no varía.

E2: Este agarra para acá.

E1: Sí, pero es que no va a variar po, porque si dividís el triángulo… por ejemplo, vení, este (…) ahí 'C', el ‘A’ varia seria Así, no po ahí (…) así (…) jejeje.

E2: Je, je, je.

E1: Así por ejemplo ¿cierto? Este era el que teníamos antes, era el triángulo que teníamos antes (…) entonces cambien como cambien va a quedar igual que como estaba antes po

E2: Ah, verdad (…).

E1: si, po.

E2: Es que aquí está el 90.

E1: Si po, aquí está el 90, entonces va a estar como estaba antes(…) lo único que este ya no va a ser 'A,' pero va medir lo mismo que media antes, entonces sacar, por ejemplo, este que es 'B', este ángulo de 'B', este va a ser 'A', va a ser este que era 'B', este que es 'C', y ese que es 'A'(…) entonces, yo pienso que seguiría siendo igual.

E2: Y cuando se forma este de 90 ahí (…).

E1: Pero quedaría lo mismo po.

E2: Y ese volvería a ser de 90.

E1: Ah, pero es que no es necesario que sea de 90, no sabemos.

E2: No, pero en el caso que llegara a eso.

E1: Pero ahí sería otro triangulo rectángulo, pero si no nos dices que es rectángulo, aunque este asi, si tenemos tres dibujos y no nos dicen que es rectángulo, no podemos asumirlo.

E2: Claro

E1: Entonces cuando tenes un triángulo que no es rectángulo, no se pueden sacar el coseno, la tangente ni el seno y lo que tenemos que aplicar ahí es modificar el triángulo, buscar la formar que, entre comillas (…) que quede.

E2: Dividido

E1: Sí, que queden dos triángulos, donde, que sean rectángulos, en la división (…), ¿sí?

E2: Tomar el ángulo de arriba, tirar una línea recta así (…).

E1: Y en este caso en particular no sufre mayor modificación el ángulo 'B', ya que si (…) haber y si el 'A'(…).

E2: Y ¿si 'A' disminuye?

E1: Y ¿si 'A' disminuye?

Tenemos claro que si A aumenta no tiene(…) si A aumenta no tiene variación el ángulo B, pero si A disminuye, ahí si po(…) porque si A aumenta al dividirlo nos va a quedar el mismo triangulo que teníamos antes pero si A disminuye eh(…)

A va a ser más pequeño, A minúscula, la longitud de A minúscula, de ese lado va ser más pequeño creo yo no(…).

E2: Es que mira, tenés aquí no, este triángulo.

E1: Sí.

E2: Si este lo corres hasta aquí.

E1: No, pero es que ahí no aumentaste el ángulo, ahí lo que hiciste fue aumentar la longitud (…) lo que tenes que hacer es que hacer que (…).

E2: Disminuirlo

E1: si po tenes que disminuirlo, lo aumentaste no… porque si tenes un ángulo de 90 y lo haces así (…).

E2: Adelante lo disminuimos po (…).

E1: Ah, po es lo que hicimos adelante po, adelante lo disminuimos (…).

E2: si po, adelante lo disminuimos(…) no po no deja de(…) no se mueve(…) igual que este si movimos A nomas, si C y B seguían intactos todos los movía A nomas(…) tenia esta A que siempre va a ser igual po(…) van a salir una nueva C y una nueva B pero A(…).

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

Triángulo rectángulo ABC, longitudes, b y c variación del ángulo B, c disminuye, c crece, la variación, ángulo C, b y c, varían simultáneamente, relación o relaciones algebraicas, elementos del triángulo, funciones seno, coseno y tangente b = 3 y c = 4, situación real, posibles variaciones, efecto producido, variación de B, funciones trigonométricas, ángulo A varía, dejando de ser recto, ¿Qué le ocurre al ángulo B?

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

Sombra, calculemos, foco, altura, cateto, opuesto, 60º,90º, 180º, proyección, funciones, base, valor, problema, altura del foco, distancia del foco, proyección, despejar, más inclinado, más pequeño, disminuir, aumentar, abrirá más, cerrará más, inversa, cambios, ángulos iguales, hipotenusa, transformaría, triángulo rectángulo, tamaño del triángulo, dejaría, teoremas del seno, teorema del coseno, teorema de la tangente, escalera, árbol, triángulo equilátero, subir más, se inclinaría, cambia totalmente, partición, partitura del triángulo, recto.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

Los estudiantes en el siguiente diálogo, presentan una situación emergente en un contexto real para ilustrar posibles variaciones de diferentes elementos de un triángulo.

E1: Ya, ahora 6 casi parte 2(…) Imagine una situación real en que las situaciones descritas puedan suceder… ¿cuáles son las situaciones descritas?

E2: Ah, todo lo de ah (…).

E1: Todo lo anterior.

E2: Una escalera.

E1: Una escalera puede ser, o también la sombra que proyecta un árbol.
E2: Claro o la sombra que proyecta cualquier cochinada jejeje.

E1: Sí, haber imagine una situación real (…).

E2: El ángulo que se forma… ¿qué más dice? Eso es tenemos que imaginar je,je,je.

E1: Si po, nos pide que imaginemos, por ejemplo en la vida real, por ejemplo un portón proyecta una sombra en el piso y sabemos el ángulo que tiene desde la parte de arriba hasta el piso, cachay, es una diagonal.

E2: Y ¿el ángulo recto?

E1: Y el triángulo recto, entonces sería un triángulo equilátero, donde tendríamos un ángulo y asi sabiendo la altura de la reja podríamos saber por ejemplo, teniendo el seno y la altura de la reja podríamos saber la sobra, cuanto mide la sombra.

E2: ¿Por qué es equilátero?, el equilátero es de todos los lados iguales.

E1: ¿Pero cómo se llama este?

E2: Rectángulo.

E1: Ese je, je, je.

E2: Je, je, je.

E1: Entonces sabiendo cómo, sabríamos la altura del portón, sabríamos el ángulo que tiene, y así podríamos sacar la distancia (…) y ahí podríamos sacarlo con las distancias po, el ángulo podríamos sacarlo con las distancias que tenemos, que tendríamos como dos lados que sabemos las distancias midiéndolas y ahí podríamos sacar eh, depende po, depende lo que necesitamos y así ocupamos seno, coseno o la tangente.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Los estudiantes presentan sus afirmaciones fundamentadas en la intuición, conocimientos previos y en la visualización de la situación propuesta. En las siguientes textualidades presentamos evidencia de estas.

(…)Podríamos crear un problema donde demos los datos, por ejemplo la altura y el ángulo que se forma con el piso y la proyección del foco y así podríamos la distancia que hay desde el foco hasta donde termina la proyección.

(…) Sería igual al opuesto que sería la altura del foco que también la daríamos, partido en el adyacente que sería la distancia que hay entre la base del foco y hasta donde termina la proyección de la línea blanca

(…) Entonces sería así como que la tangente de ese ángulo sería igual a la altura.

(…) Haber, la variación del ángulo, si C disminuye va a aumentar el ángulo B Po.

(…) Ah o sea, en el rectángulo al principio, si todas las posibles variaciones pero viste que había una que era si variaba C y B que eran los catetos, ahora todo po incluso si varia el ángulo este.

(…) Bueno lo que pasa es que esto son problemas de mucho análisis entonces si dice estudie todas las posibles variaciones de los ángulos del triángulo y combinaciones de ellas, entonces estamos dibujando aquí en los cuadernos y nos damos cuenta que si variamos los ángulos.

Van a haber muchas posibilidades.

(…) Si abrís más el ángulo A va a quedar un ángulo muy grande ahí, si lo achicas podría quedar un equilátero.

(…) Si yo creo que esos son, como todas las posibles variaciones que puede tener son, por ejemplo, eh, para que quede más claro, si cambiamos el ángulo A va a dejar de ser triangulo rectángulo, eso está más que claro(…) si cambiamos el ángulo, si por ejemplo cambiamos el ángulo 'C' yo creo que ahí podríamos formar un triángulo equilátero.

(…) el 'A' se estaría inclinando para acá, este correría aquí y este aquí, cachay, este formaría.

(…) Aparte de trabajar con los ángulos tenemos que cambiar la longitud de los lados.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Los estudiantes presentan sus argumentaciones en general en un registro de lenguaje natural, sus argumentos expresados son apoyados en la intuición, conocimiento previo y en la visualización de las situaciones problemas.

(…)Yo digo que, por ejemplo, primero lo que hay que tener es más datos que los que aparecen aquí para ocupar, por ejemplo, funciones seno coseno para encontrar la proyección que tiene el foco con el piso.

(…)Entonces sería así como que la tangente de ese ángulo sería igual a la altura y ahí podríamos despejar la distancia que hay desde la base del foco hasta donde termina la línea, ese sería un problema que involucre funciones trigonométricas.

(…)Porque esto se va a hacer más pa acá po y esta línea va a estar más inclinada o sea que el ángulo va a ser más (…) estas entendiendo.

(…)Porque mira esta es la línea que va de aquí a aquí va, cachay, si esta la cerras más entonces el ángulo se va a hacer más pequeño.
(…) Porque como este ángulo, al hacer este pa acá, vamos a disminuir entonces este tiene que aumentar para cumplir los 180 grados.

(…) O sea que el triángulo dejaría de ser rectángulo y se inclinaría, se haría un ángulo así, tiene que variar también este ángulo… eh tantas posibilidades que hay (…).

(…) Porque tenemos un triángulo rectángulo, si variamos el ángulo A que es de 90 grados vamos a transformar eh, ya va a dejar de ser un triángulo rectángulo y vamos a hacer un equilátero o un isósceles po, depende de (…) de cómo quede el triángulo.

(…) Porque ahí podríamos dejar un triángulo de todos los lados iguales, yo creo, no sé, si es que no estoy seguro (…).

(…) Pero habría que cambiar también la distancia de los lados.

(…) Este tendría como que aumentar este e inclinarlo para acá y (…).

(…) Ahí podríamos formar nuevos triángulos, esas son las modificaciones que (…).

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan

¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas. Respecto a los objetos matemáticos involucrados los estudiantes tienen el manejo de las funciones trigonométricas y el cálculo de los elementos de un triángulo rectángulo, propiedades de la suma de los ángulos de un triángulo rectángulo, sin embargo no fueron capaces de realizar una formalización respecto a cómo varían los ángulos en un triángulo rectángulo, si se modifica uno u otro elemento, cómo es la covariación entre las variables involucradas. Los estudiantes además desplegaron concepciones geométricas, y mostraron el desarrollo de visualización de la situación problema.

Emergentes

Los estudiantes plantearon situaciones problemas en contexto con algunos elementos fantasistas que fueron modelados por una situación matemática para su solución. La creación de estas situaciones problema proporciona evidencia de la creatividad y además refleja el dominio conocimiento consistente de la trigonometría del triángulo rectángulo. Durante el desarrollo de la actividad se observaron ciertos intentos por modificar un triángulo rectángulo y convertirlo en otro tipo de triángulo al modificar alguno de sus elementos, se hizo el intento respecto a modificar el ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Procedimientos

Los estudiantes de manera intuitiva asignan valores que se ajustan a un posible problema real, pensado desde una tipología fantasista. Desde su mirada ellos proporcionan una solución procedimental fundamentada en asignación de valores a unos de los elementos que consideraron en la situación problema y en base a ello, obtienen algunos resultados, en lo que respecta a la primera práctica de la actividad. Para la segunda y tercer práctica los estudiantes recurren a investigar para contar con elementos de juicio más consistentes que fortalecieran la formalización de la variación de lados y ángulos de un triángulo. En las siguientes textualidades presentamos algunos procedimientos empleados a lo largo de las prácticas que emergieron durante la actividad.

En cualquiera de las dos imágenes, ya hazla, escríbelo aquí(…) por ejemplo, tu sigue escribiendo más, si le damos un valor al ángulo y le damos un valor a la altura del foco podríamos hacer que la tangente de ese ángulo que tendríamos por ejemplo la tangente de 60 grados sería igual al opuesto que sería la altura del foco que también la daríamos, partido en el adyacente que sería la distancia que hay entre la base del foco y hasta donde termina la proyección de la línea blanca, entonces sería así como que la tangente de ese ángulo sería igual a la altura y ahí podríamos despejar la distancia que hay desde la base del foco hasta donde termina la línea, ese sería un problema que involucre funciones trigonométricas.

Bueno lo que pasa es que esto son problemas de mucho análisis entonces si dice estudie todas las posibles variaciones de los ángulos del triángulo y combinaciones de ellas, entonces estamos dibujando aquí en los cuadernos y nos damos cuenta que si variamos los ángulos

E2: Cualquiera.

E1: Cualquiera de los ángulos.

E2: Van a haber muchas posibilidades.

E1: Son muchas, claro es como vayamos tirando nósticos de triángulos cada vez que cambiamos el, el (…) porque tenemos un triángulo rectángulo, si variamos el ángulo 'A' que es de 90 grados vamos a transformar eh, ya va a dejar de ser un triángulo rectángulo y vamos a hacer un equilátero o un isósceles po, depende de(…) de cómo quede el triángulo.

E2: De la distancia.

E1: Si po, de la distancia de sus lado.

E2: Si abrís más el ángulo 'A' va a quedar un ángulo muy grande ahí, si lo achicas podría quedar un equilátero.

E1: Si yo creo que esos son, como todas las posibles variaciones que puede tener son, por ejemplo, eh, para que quede más claro, si cambiamos el ángulo A va a dejar de ser triangulo rectángulo, eso está más que claro(…) si cambiamos el ángulo, si por ejemplo cambiamos el ángulo 'C' yo creo que ahí podríamos formar un triángulo equilátero, porque ahí podríamos dejar un triángulo de todos los lados iguales, yo creo, no sé, si es que no estoy seguro (…).

E2: Si se pueden dejar todos iguales.

E1: Si se pueden dejar todos iguales decís vos, pero habría que cambiar también la distancia de los lados.

E2: El 'A' se estaría inclinando para acá, este correría aquí y este aquí, cachay, este formaría, este tendría como que aumentar este e inclinarlo para acá y (…).

E1: Aparte de trabajar con los ángulos tenemos que cambiar la longitud de los lados y ahí podríamos formar nuevos triángulos, esas son las modificaciones que… ¿Qué efecto tiene una variación de 'B', sobre el valor de las funciones trigonométricas evaluadas en los otros ángulos?

E2: ¿Cómo?

E1: Pero 'B' dice que, el otro, dice (…) que efecto tiene una variación de 'B', del ángulo B, ve el ángulo po(…) sobre el valor de las funciones trigonométricas en los otros ángulos(…) yo creo que ninguno.

E2: Como no.

E1: no porque si me varía, ah, claro (…) si varia el ángulo 'B' lo más probable es que la distancia, la longitud (perdón) de los lados varíe po, entonces cuando nosotros sacamos de los otros ángulos sacamos el coseno, la tangente o cualquier cosa así trabajamos con la longitud que tienen los lados po, entonces si cambiamos el ángulo van a cambiar también la longitud de los lados, entonces en eso están relaciones en los lados.

E2: Pero dice (…).

E1: Por ejemplo si, por ejemplo mira, está claro que si cambia en ángulo.

E2: Solo tienes que cambiar el ángulo ahí nomás, solo el ángulo.

E1: Sí, sí, dice, que efecto tiene una variación de 'B' sobre el valor de las funciones, y como 'B' alta influye sobre 'B' corta entonces depende de ese ángulo la longitud que va a tener la 'B' corta.

E2: Claro, pero eso ya lo habíamos analizado.

E1: Entonces, por ejemplo, si cambia esa 'B' cuando saquemos la tangente por ejemplo del ángulo 'C' vamos a tener otro valor en 'B' po, entonces va a ser distinto al que tenía (…) hay ta po (…) cachaste.

E1: Ahí ta (…).

E2: 'C' no cambiaría nada

E1: ¿Cómo?

E2: Nada, si varía este lado y 'B'

E1: Pues si varía 'B', pero es que mira dice que efecto tiene la variación, pero que tiene, sobre el valor dice de las funciones trigonométricas evaluadas en otro ángulo(…) por ejemplo, en otro ángulo colocar, una función trigonométrica, un seno, coseno o cualquier cosa y ver si varia y siempre va a variar po.

E2: Ah, sí va.

E1: Si cambias este ángulo porque 'B' va a cambiar, 'B' corta va cambiar, entonces si cambias ese ángulo va a cambiar 'B' corta y cuando saques el coseno, seno o tangente.

E2: La 'a' minúscula también.

E1: Claro, cuando sea el opuesto partido en el adyacente, o sea, cuando saques el seno solamente ahí no va a variar, porque ahí no trabaja y con ese lado, pero la tangente y el coseno por ejemplo ahí varían (…) la tres dice ve ¿Qué sucedería con las funciones trigonométricas en los otros ángulos si el ángulo 'A' varía dejando de ser recto?

E2: Ah, eso es lo que decíamos po, que si el ángulo 'A' deja de ser recto van a empezar a convertirse en otros triángulos (…).

E1: Sería las funciones trigonométricas, también cambiarían.

E1: También cambiarían porque al cambiar ese 'A' se supone que el ángulo 'B' y 'C' también van a cambiar ya sea uno o los dos, que si cambias el 'A lo más probable es que cambien el ángulo 'C', ese es el que cambia pero, entonces, seguramente… y si cambia en ángulo 'C'.

E2: Entonces existirá este triángulo así, también va a cambiar el ángulo 'B'.

E1: Y también van a cambiar la longitud, entonces esta es la que más varia porque el 'B' siempre (…) si (…) porque este influye sobre dos, si uno cambia el ángulo 'A' va a cambiar la distancia del 'A' minúscula y va a cambiar la distancia del 'C' minúscula porque el ángulo 'C' también va a cambiar entonces cuando tú quieres sacar B que es el único ángulo que no cambia.

E2: También cambiaria.

E1: no po no cambia.

E2: Sí po.

E1: No, po.

E2: Si po, depende vo(…) si mira si este ángulo deja de ser recto y esta línea, si este lado lo expandís pa acá, la línea va a estar aquí vo esta hasta el más pequeño, cachay, hasta el más bajo, o sea, que este ángulo también va a ser menor.

E1: Ah, si si si, entonces sí.
E2: Cambia totalmente el triángulo.

E1: Seguía las funciones trigonométricas de los otros ángulos (…) si también eh, al sacar un seno, coseno cualquier cosa también va a variar porque al cambiar un ángulo, como está todo, como leíamos antes en la teoría del seno, eso está todo, complementado, por ejemplo, los ángulos influyen en los lados del triángulo en la longitud que tenga, si cambiamos los ángulos para (…).

E2: Y como el ángulo 'A' es recto si deja de ser recto ya es un cambio (…).

E1: Si po, porque van a cambiar dos ángulos y va a cambiar la longitud de los lados (…) entonces dice encuentre una variación de 'B' sobre la función trigonométrica evaluadas en otros ángulos… no que será eso… varia el ángulo 'A'(…) si eso(…) dice Cuando el ángulo 'C' está aumentado(…).

E2: Aumentando… ¿Qué le ocurre al ángulo B? (...) 'C' aumenta (…).

E1: Si el ángulo 'C' aumenta.

E2: Entonces se expande así (…).

E1: Pero (…).

E2: Esta línea empieza (…).

E1: Lo que hace es que te pregunto, solamente es al ángulo 'B' po

E2: Pero, este sigue siendo recto

E1: Sigue siendo recto

E2: Entonces (…).

E1: Ah, pero es fácil po (…) es fácil, sabes porque es fácil (…).

E2: Ah, también va crecer.

E1: No, no puede crecer

E2: Porque no.

E1: Porque mira, tenes ahora que por ejemplo que el ángulo 'C'.

E2: Te dice que aumenta po

E1: Sí, pero mira tenía el ángulo 'C' cierto, más el ángulo 'A', más el ángulo 'B', y sabemos que ángulo 'A' vale 90.

E2: Ya.

E1: Y tenemos 'C', y 'A'(…) 'C' y 'B'(…) y eso tiene que ser igual a 180, cierto.

E2: Ya.

E1: Entonces, si 'C' crece, por ejemplo pongámosle valores, por ejemplo, 60, 90 y 30 asi te da 180 cierto, entonces si nuestro ángulo 'C' que vale 60 aumenta a 90, tiene que disminuir para que le siga dando 180 por un asunto matemático no más.

E2: Que imbécil jejeje.

E1: Je,je,je.

E2: Es que si es un ángulo recto va disminuir y viceversa.

E1: Es como la clave que estamos trabajando con un triángulo (…) como se llama.

E2: Rectángulo.

E1: Rectángulo, entonces si tenemos un ángulo recto que vale 90 en la suma de los otros dos ángulos tiene que dar 90, entonces si uno aumenta el otro disminuye para que la suma de 180(…) o sea, que por ejemplo si nos dijeran que, en la 4, si nos dijeran que el ángulo 'A' varía puede dejar de ser recto ahí podríamos decir, no sé, que se mantienen iguales, porque ahí podríamos modificar el A, pero como no solamente están preguntando si 'C' aumenta y no nos dicen nada sobre el 'A'.

E2: hay que asumir que…

E1: hay que asumir que si uno aumenta, el otro tiene que disminuir para que la suma de 90, si los aumentan claramente va a dar más de 90(…) entonces nos faltaría la numero 5(…) dice ¿Qué sucede en el caso anterior, con las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente del ángulo B, si el ángulo A comienza a aumentar (disminuir) dejando de ser recto?... esto es como la primera pregunta que (…).

E2: Ah, no la escuche (…).

E1: Léela tú.

Grupo tres

Etapa 1 Se responde a las preguntas básicas

Se responde a las preguntas ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

Los estudiantes propusieran como una primera práctica una situación problema que involucra el sol, un faro y la sombra que proyecta el faro de acuerdo a la posición del sol, en esta primera práctica asignan valores a ciertos elementos y luego a partir de estos obtienen los otros valores faltantes mediante el despeja de un valor desconocido de una ecuación. En las siguientes prácticas que emergieron de las consignas propuestas los estudiantes utilizan para la segunda parte de la sesión, el problema que crearon relacionado con la posición del sol, un faro y la sombra proyectada. Asignaron valores a ciertos elementos, tales como las longitudes y algunos valores de los ángulos, obteniendo con ello algunas conclusiones del efecto de cómo varió el valor de algunos de los elementos al ser afectado por otro elemento que ha sido modificado su valor inicial. Los estudiantes proponen situaciones familiares quizás por experiencias que son más significativas para ellos, ante ciertas demandas cognitivas que requieren de mucho análisis y reflexión.

Las actividades propuestas exigen a los estudiantes poner de manifiesto habilidades matemáticas especifica tales como conjeturar, demostrar, representar, analizar, sintetizar, entre otras, las cuales en sinergia permite resolver las diferentes situaciones que se han planteado.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total

Diálogo de la primera práctica

E1: Aunque ahí podríamos hacer cualquiera guiita, implicando la sombra.

E2: Esta arista, ¿tiene algún ángulo?

E1: Sí.

E2: ¿Cuánto es?

E1: 90, ángulo recto, pero dice nosotros tenemos que crear el problema ¿o no?

E2: Sí, po.

E1: Tenemos que aquí tengo un cuaderno de (…) ah (…) vamos a ver cómo hacer (…).

E1: Tenemos que hacer un problema y resolverlo, esto podría ser.

E2: O la forma del lado opuesto, y el lado adyacente y al lado adyacente darle un valor, y con un ángulo.

E1: Lado adyacente, ¿a cuál ángulo?...

E2: El opuesto al lado adyacente.

E1: ¿Pero con respecto a cuál ángulo?

E2: Tendríamos que darle un valor.

E1: Al de noventa.

E2: No, no se…

E1: ¿Al de arriba?

E2: No al de abajo… le das un valor al ángulo y al final la tangente.

E1: Entonces po, hagámoslo (…).

E2: Y también hallamos el lado opuesto, hallamos la tangente de este ángulo opuesto (…).

E1: Y este que, es el borrador, para después entregárselo al profesor, que es tan simpático.

E2: Je, je (…) entonces la incógnita sería el lado opuesto y el lado adyacente al ángulo tendría un valor de 25 y el ángulo tendría un valor de 30 grados, con esto podemos usar la función trigonométrica que involucre el lado opuesto que es la incógnita con el lado adyacente que tiene un largo de 25, para esto utilizamos la función tangente que sería la tangente de 30 grados, sería igual al lado opuesto que es la incógnita x, dividido por el valor del lado adyacente que cuesta, que vale 25, ahí despejamos la incógnita, o sea, el lado opuesto, y nos daría que, 25 por la tangente de 30.

E1: Oye, pero dice, cree una situación problema. Tu situación problema no, no la veo, debe ser tomándose un x que quiere que, obtengamos, es que, digamos por ejemplo, eh, el, el sol está ubicado a, a unos 30 o 40 grados así por ejemplo, de la horizontal de un faro de luz.

E2: Ya.

E2: 30.

E1: 3 metros.

E2: Noo, no sé.

E1: Pero si es un faro de luz.

E2: Yaa.

E1: Ya pues, y después el ángulo del sol cambia, por ejemplo, y su cuestión, su sombra cuánto mide por ejemplo (…).

E2: No, pero se está buscando la opuesto de que (…).

E1: Para ir a busca el cateto de abajo, po, claro, con este ángulo.

E2: O sea, tendríamos que usar el opuesto de la hipotenusa, ¿cierto?, porque estamos queriendo encontrar el adyacente, o sea ¿qué función trigonométrica tenemos que usar?

E1: Haber, espérate (…).

E2: Opuesto por hipotenusa, seno.

E1: Opuesto por hipotenusa, pero, este sería el opuesto (…).

E2: Si po, por la hipotenusa esa porque está queriendo encontrar el adyacente.

E1: Y la hipotenusa donde la hecho, tampoco nos sirve hipotenusa. Lo único que conocí aquí, el alto de esto y el ángulo que hay desde la horizontal hasta la luz del sol supuestamente ¿Qué relaciona el cateto con un ángulo?

E2: Es que a un lado tendríamos que ponerle una incógnita, no darte ningún valor, por ejemplo ¿qué lado te dieron ahí? te dieron el opuesto ¿cierto?, y ¿qué quiero encontrar? la hipotenusa.

E1: No hay que encontrar el largo

E2: Ya po, a este largo le colocaría una incógnita

E1: Parece que tiene escrito algo o lo imaginare, ¿será imaginación mía?

E2: Sí, en blanco.

E1: Sí.

E2: Cinco u ocho.

E1: Aquí tiene escrito hache, pues mira.

E2: Si po, y la altura es 5 o 8.

E1: Ocho, pucha profe, je,je,je (…) lo que tiene es que con la(…).

E2: Mira haber.

E1: El teorema del seno o el coseno podemos hacer aquí.

E2: Ya tenemos hache, ¿Cuánto vale este ángulo?

E1: No sé.

E2: ¿Este?

E1: 90.

E2: ¿Y este? ¿5 o 8? No veo (…).

E1: ¿No lo tenías en tu computadora?, aquí, haber si se ve más claro (…) cero.

E2: Sí.

E1: Allá arriba (…).

E2: Son la incógnita (…) es que yo creo que aquí nos falta un valor y yo creo que era para que nosotros nos formáramos el problema que estamos haciendo.

E1: ¿Qué es lo que te estaba diciendo desde el inicio?

E2: Si po, solo (…).

E1: La teoría del seno o el coseno.

E2: ¿La teoría es?

E1: Teorema es, ah (…) jejeje Teorema del seno aquí está, ley de los senos, el seno de A partido por A, el seno de B partido por B (…) por el teorema de los senos podemos hacerlo… seno de A partido por A, ah ah aha ha…

E1: Que más podemos relacionar, porque con, seno, coseno tangente se puede relacionar, ángulo con catetos, si relacionamos el lado (…).

E2: Aquí nos falta una medida.

E1: Pero si tenemos (…).

E2: Ya, esa es la incógnita.

E1: ¡…Perdón, la incógnita…!

E1: Cuánto mide esto, pongámosle 3 metros (…) ya.

E2: Ya entonces la altura, 3 metros.

E1: Este mide 90.

E2: El alto.

E2: Un ángulo(…) el de abajo.

E1: Pongámosle que este mide (…).

E2: 5.

E1: ¿5?

E2: Son los mismos 5.

E1: (…) Esto es raíz de 7.

E2: Vas a usar Pitágoras.

E1: Cierto

E2: Eso se eleva al cuadrado más los dos (…).

E1: Haber, cinco al cuadrado más 3 al cuadrado, igual (…).

E2: Pero (…).

E1: ¿Qué?

E2: No, nada (…).

E2: Porque ahí sale encontrando los lados y no salía usando ninguna función trigonométrica (…).

E1: No.

E2: Ahora sí, si quisiera saber para por ejemplo (…) las funciones trigonométricas (…) entonces le damos valor a este ángulo y ahí vamos sacando el seno, coseno, y las 6 funciones (…).

E1: Haber… se puede hacerlo.

E2: Lol, ¿qué valor le damos al ángulo?... ¿45?

E1: ¿Cómo es el resultado?

E2: ¿Ah?

E1: ¿Cómo es el resultado de esta?

E2: da lo mismo, que todos…y como tenemos tres lados, nos está dando las funciones (…) seno de 45 ¿Cuánto seria?, opuesto por hipotenusa, ¿cuánto vale el opuesto?

E1: El opuesto 3.

E2: 3 ya, ¿Cuánto vale la hipotenusa?

E1: 5.

E2: 5.

E2. Y en el otro (…) y en el otro (…).

E1: Cambia la hipotenusa.

E1: (…) Ah pues no entiendo, aquí esta seno, coseno de la tangente, la hipotenusa, que el arco seno y el arco coseno (…).

E2: Ya po, aquí los estoy sacando, ¿el coseno de 45? El ángulo seria el adyacente divido por hipotenusa, ¿y el adyacente cuánto vale?

E1: 5

E2: 5, y ¿la hipotenusa cuánto?... ¿cuánto?... déjame ver…yo decía así, le damos valor de 45 grados, la atura, eh, ¿la altura la damos? La altura son 3, y vamos a dar el adyacente que es 5 metros

E1: Sí.

E2: O ya, vamos a tener como incógnita, ¿la sombra es esta?

E1: El lado de la sombra

E2: El lado de la sombra, y la hipotenusa en cuanto la dejamos, ¿8?

E1: Porque la tangente relaciona el ángulo, o sea, el cateto adyacente con el opuesto.

E2: Ah sí pero, pero ya los tenemos… ah ya entonces sería la tangente de 45, es igual a (…).

E1: A la altura.

E2: A la altura que es tres dividida por la (…).

E1: Equis.

E2: El largo de la (…).

E1: Equis es lo que no sé(…).

E2: Ya, ahora despejamos equis y nos quedaría que (…).

E1: 'x' igual a 45.

E2: No, tres dividido en la tangente de 45, si po porque ese…

E1: Paso po el tres.

E2: Por la tangente de 45.

E1: Sí.

E2: Okey, cuánto seria eso.

E1: Cuánto mediría, tres.

E2: Dividido por la tangente de 45.

E1: Esto da 3 jejeje.

E2: ¿3? 3 metros, entonces

E1: Ya, de ahí que pasa como podes imaginarte si el ángulo se cambia, o sea que el sol cambio de posición y el ángulo ahí, por la imagen que se ve.

E2: Va aumentando.

E1: Disminuye.

E2: Disminuye, y ¿qué aumenta, entonces? ¿El valor de los lados?

E1: Aumenta el largo, mientras más abajo está el sol, más larga se hace la sombra.

E2: Mmm(…) la equis se saca entonces, en función de eso(…) si aumenta el largo va disminuyendo el ángulo.

E1: No, pero hacelo tú, po.

E2: ¿Qué? ¿También va cambiando el valor de la función?, haber hagamos un ejercicio y le cambiamos.

E1: El ángulo, así como sale ahí en la imagen.

E2: Ya, venite… 25.

E1: Aquí es 22 coma uno.

E2: ¿Porqué a ti te da la gana? Cierto.

E1: Sí.

E2: Ya.

E1: Porque a mí me da la gana.

E2: La altura es la misma, cierto.

E1: Y tenemos que calcular la nueva (…) hipotenusa.

E2: Ahí sería.

E1: Lo mismo, es tangente de 22 coma uno.

E2: Tangente, de 22 coma uno, es igual a la altura (…) despejamos la x, aquí queda 3, 22 coma uno y cuánto hace.

E1: 7 coma 38 metros.

E2: O sea, disminuyo el ángulo.

E1: Y aumento el largo de ese cateto.

E2: O sea que todo va, variando proporcionalmente.

E1: Con buen genio ya, pasemos a la parte 2, terminamos ese.

E2: Lo haces tú, lo lees tú.

E1: ¿Ah?

E2: ¿Lo lees tú?

E1: No, ahora es tu turno querida María José.

Diálogo de la segunda práctica

E1: y ya, analicemos eso y ya, tenemos ese triángulo, dibújalo, coloca parte dos ahí

E2: Ya (…) la hipotenusa es 'A', listo.

E1: 'A (…) 'B', jejeje, ¿qué?

E2: Ya, pero dice se conoce la longitud de 'B' y 'C', o sea, que sabemos el lado del opuesto y del adyacente.

E1: Entonces porque no le pones 'A', 'B' y 'C'.

E2: Ya.

E1: Ya pues, dice que pasa con el ángulo 'B' o sea con ese, si 'C' disminuye.

E2: Y cuando 'C'(…) vamos dándole, demos le un valor al ángulo.

E1: No pero es que es obvio po.

E2: Ya ¿cuál es?

E1: Si 'C' disminuye el ángulo 'B' crece (…) ya entendiste porque (…) dale pues nota (…).

E2: Pero es necesario decirlo, o explicarlo.

E1: No, si lo entendemos solo con esto (…) ya ves que no hay números ni nada implicados pues dice que se conoce no más, mira pues si 'C' disminuye B crece porque se acerca más al ángulo recto que es 'A' y si 'C' crece, o sea se alarga se aleja más del ángulo A del ángulo recto por lo tanto se va achicando (…) anota eso (…).

E2: Cuando 'C'(…).

E1: Si 'C' disminuye, ángulo 'B' crece.

E2: Y el otro al revés (…).

E2: Dale (…) ahí están los dos.

E1: Ya, describa la variación del ángulo 'C' en los mismos casos anteriores considerados (…) Es lo mismo pero al revés, en este caso si 'C' disminuye, el ángulo 'C' también disminuye el ángulo 'C' también crece.

E2: Ah, es como que el primero es indirectamente proporcional y este es como que directo porque los dos crecen o los dos disminuyen.

E1: Sí, anote eso, hay que hacer constancia de que los hicimos.

E2: Ya, ese ya esta.

E1: Describa las variaciones del triángulo en caso de que ambos lados varíen simultáneamente, lo que no entiendo aquí es si varían (…).

E2: Como lo hicimos en el otro.

E1: ¿Cómo?

E2: Le creo

E1: Y porque no.

E2: Porque, porque no, porque arriba dice en los casos anteriores hay que considerarlos… porque por eso no los fue repitiendo.

E1: Pero es que hay varias posibilidades, por ejemplo, que 'C' crezca y 'B' disminuya, o que 'C' disminuya y 'B' crezca, o que las dos crezcan o las dos disminuyan.

E2: Sí, voy a hacer probabilidades.

E1: No, posibilidades.

E2: Ah, ya, jejeje.

E1: Haber yo pienso que es que si 'B' y 'C' crecen proporcionalmente a la misma velocidad, pueda que se mantengan los ángulos.

E2: Pero hay que ver el caso de los dos ángulos, en 'B' y en 'C'.

E1: Sí.

E2: Aquí dice las posibles variaciones del triángulo, o sea, un ejemplo si 'B' y(…) 'B' y 'C' aumentan así en forma proporcional el triángulo no va a ver afectados su ángulos, siempre va a seguir con los mismos ángulos, el mismo ángulo recto, el mismo ángulo 'B' y el ángulo 'C' siempre y cuando sean, sean, crezcan proporcionalmente el cateto 'B' y el 'C', lo mismo si se achican proporcionalmente, los ángulos 'A', 'B' y 'C' se van a mantener con las mismas medidas aunque no serían los mismos triángulos serían triángulos equivalentes… ¿No crees, tú?

E2: (…) si (…)

E1: ¿Lo escribes tú?

E2: Si yo.

E1: Eso podrías escribir.

E2: Bueno

E1: Okey después de mi escriba.

E2: Ah jeje (…).

E1: Nos queda poquito (…) ahí tiene dos partes más, parte una parte 2, parte dos… entonces, compañera, parta usted el inicio, o lo escribo yo(…).

E2: No, yo.

E1: Ya voy sí, 'C' y 'B' deben crecer proporcionalmente (…) los ángulos se van a mantener iguales, lo mismo si disminuyen proporcionalmente… porque aunque sean, triángulos de diferentes medidas serían equivalentemente iguales.

E2: Ya

E1: Ya, vamos con la 4(…) que relación o relaciones algebraicas puede establecer entre los distintos elementos del triángulo.

E2: Las relaciones algebraicas son en las operaciones que hacemos con el lado 'a', con el lado 'b' porque son algebraicas… ¿o no?

E1: Yo creo que si, como dices tú (…) un momento, ¿algebraicas?

E2: Y ¿cuáles son esas relaciones?

E1: No se po, porque la sumas de sus ángulos interiores da 180.

E2: ¿No es así?

E1: Ah?

E2: ¿no es así?... ah sí po, eso… por ejemplo una relación algebraica seria… ¿cuál es el opuesto ahí?

E1: ¿Con respecto a cuál?

E2: Al ángulo ese (…).

E1: ¿A cuál?

E2: Al de abajo, ángulo 'B', con respecto al ángulo 'B'.

E1: El opuesto es 'B'.

E2: Sería 'B' multiplicación 'A', esa es una relación, algebraica

E1: ¿Qué relación algebraica es?

E2: La del (…) seno.

E1: Esa es relación trigonométrica.

E2: Sí po, pero es que así es que se forman, algebraicas (…) créeme (…).

E1: Acuérdate de lo que explicaba el profe en clase, que, decía que, que por ejemplo si crece cualquiera de los lados proporcionalmente con otro, y se hace la división de esos lado siempre va a dar el mismo valor(…) vamos a ver, que clase de relación trigonométrica hay aquí(…) no como lo que decía antes porque si los triángulos son semejantes pueden existir en sus mismos lados iguales, no necesariamente, o sea, sus ángulos iguales no necesariamente sus ángulos, entonces la división de sus lados con la función trigonométrica debería dar exactamente lo mismo porque son semejantes.

E2: Jejeje

E1: ¿Qué pasa?

E2: Nada, estaba pensando… estaba pensando si tenías razón o no, o si tenía alguna duda (…).

E1: ¿Sí tenía razón?

E2: Yo aquí estoy haciendo la comparación entre los triángulos… ¿sí o no?

E1: ¿Comparación entre triángulos? ¿Semejantes?

E2: Sí.

E1: Sí.

E2: Ah ya (…) ¿son las relaciones entre los lados y todo eso?

E1: Sí.

E2: Te falto decir eso.

E1: Decir jeje.

E2: Decir eso, te falto.

E1: Mmm, yo me entendí clarito.

E2: Tú, pero yo te preguntaba si había que encontrarlo para triángulos semejantes(…) se haría más fácil así(…) si fuera verdad jejeje.

E1: Jejeje… ¿si hacemos una pausa para guardar este archivo de audio y continuamos enseguida?

E2: Bueno.

E1: ¿Insertar, o mantener?

Diálogo de la tercera práctica

E2: Estudie todas las posibles variaciones de los ángulos del triángulo y combinaciones de ellas (incluso de 'A'), y describa el efecto producido por éstas, sobre los otros ángulos.

E1: (…) ya (…).

E2: Pero son demasiadas combinaciones (…) porque tengo que, hay que variar el ángulo de 'B', de 'C' y de 'A' po (…) y después uno aumenta otro disminuye.

E1: Si (…) casi infinitas las variaciones.

E2: ¿Pero lo hago?...

E1: Ya (…) Estudie todas las posibles variaciones de los ángulos del triángulo y combinaciones de ellas (incluso de 'A'), y describa el efecto producido por éstas, sobre los otros ángulos… bueno, haber, después hacemos esto pasemos a la otra… ¿Qué efecto tiene una variación de 'B', sobre el valor de las funciones trigonométricas evaluadas en los otros ángulos?... pasemos a la otra (…).

E2: Jajaja.

E1: ¿Qué sucedería con las funciones trigonométricas en los otros ángulos si

el ángulo 'A' varía dejando de ser recto?(...).

E2: Calculemos esto (…).

E1: Pasemos de vuelta (…) Cuando el ángulo 'C' está aumentando ¿Qué le ocurre al ángulo 'B'?... ah esta fácil po, lo que hicimos antes (…).

E2: Uh(…).

E1: Lo mismo que hicimos antes, cuando el ángulo, cuando el ángulo 'C' está aumentando se agranda, ti ti ti ti ti ti ti(…).

E2: ¿El otro disminuye?

E1: No, es que el lugar donde lo deja es(…) mirémoslo(…) ihhhh, si po, el ángulo B va disminuyéndose(…) ya siguiente(…).

E2: ¿La 5?

E1: ¿Qué sucede en el caso anterior, con las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente del ángulo B, si el ángulo A comienza a aumentar (disminuir) dejando de ser recto?

E2: Si el ángulo aumenta las funciones trigonométricas acaban disminuyendo (…) déjame ver (…) aquí hicimos un ejemplo parecido que cuando disminuía hasta acá la tangente esta aumentaba (…).

E1: Mmm.

E2: Es cuando disminuía (...) disminuí al sacar la tangente el 'C' aumentaba (...) pero probemos cuando el ángulo 'A' no sea mayor.

E1: Que sea 89(…).

E2: Me queda una, cuando vale 90 y otro con cuanto… ¿cuál es la variación?

E1: Hay que sacarlo correctamente con el ángulo de la tangente (…).

E2: A ver cuánto te sale en álgebra es la tangente.

E1: Este (…).

E2: 1.

E1: De álgebra… ¿uno dices tú?

E2: Sí.

E1: Es que de álgebra 1, si usamos calculo, 2.

E2: Y porque a mí me sale uno, algo de la materia.

E1: Algo como, todo ¿por ejemplo?

E2: Jejeje.

E2: Ya haber este(…) A(…) y esteee(…) cual era(…).

E1: Este.

E2: El 'B'(…) jejeje.

E1: Este es 'C'.

E2: ¿Este es 'C'?

E1: Este es, 'A' sobre 'C', entonces 'C' es los dos puntos

E2: Y hagamos otro cuando el ángulo A vale (…).

E1: Debemos probar que 'B' es ciento (…) cien.

E2: ¿Cuánto? ¿110?

E1: Mmm cien digo yo.

E2: Ya entonces (…) tanteemos la tangente pa probar, del ángulo A, con lo (…) vale 90 en el A. Esto sería (…) vamos a darle una medida al, opuesto, ya. Le colocamos que vale 120, lo dividimos por el adyacente (…) ¿Dónde está la calculadora?

E1: ¿Ah?

E2: ¡La Calculadora! (...).

E1: Perdón ahí está la calculadora, ahí hay una (…).

E2: Cuánto es la tangente de (…).

E1: ¿Tangente de quién?

E2: Jejeje (…) bueno, o sea, 120 dividido por la tangente de 90 grados (…).

E1: Error en tangente de 90(…).

E2: Ve, y porque no lo usamos en (…).

E1: ¿Pero por qué da error en tangente de 90?

E2: Pero y si nos funciona con división de la tangente con 120(…) saca ahí tangente de 90.

E1: No se puede.

E2: Error.

E1: Es que no se puede, analicemos esto (…) esto presenta un problema de (…) ah.

E2: Si po, porque, porque sale error en la tangente de 90.

E1; ¿Ahmmm?

E2: Ya pero igual… hay que probar cuando el ángulo sea mayor po, a 90… ¿haber que estas sacando?

E1: Que haber, ¿porque no existe la tangente en el ángulo de 90 grados?

E2: Hay que analizarlo.

E1: Sí, haber yo lo voy a analizarlo.

E2: ¡Esa po! por mientras cuando aumenta (…).

E1: Ahhh, ya caché porque po(…).

E2: ¿Por qué?

E1: Porque la definición de tangente es con relación al seno y el coseno po, por lo tanto, la tangente de 90 no sería nada más que el seno de 90 entre el coseno de 90.

E2: Ya.

E1: Y cómo el seno de 90 es 1 y el coseno de 90 es igual a cero queda una división, 1 partido por cero y por eso da

E2: error.

E1: Da la calculadora error.

E2: Ya y, me sale que si aumentamos el valor del ángulo A mayor a 90 me da los resultados negativos, lo comprobé con varios métodos, o sea, que de error, en la otra te valores negativos.

E1: ¿Con superiores de 90 negativos?, vamos a ver, esto es porque el seno o el coseno da negativo, haber seno de (…) cuanto, que ¿tangente de cuanto habías probado?

E2: Eh de 110.

E1: 110(…) ese el seno.

E2: Ya po (…).

E2: Y ¿el coseno?

E1: estoy viendo cuales de los dos da negativo po

E2: ah sí, sí sé.

E1: no, no sabía.

E2: Sí, sé.

E1: No sabía, porque la tangente, de seno cuanto iba a ser, seno (…) y uno de los dos tenía que ser negativo, eso estaba viendo.

E1: Pero eso estaba viendo te lo dije vos escuchaste, te lo dije coseno iba a ser negativo, por eso da negativo con valores superiores a 90(…) María (…) tenemos que seguir (…).

E2: ¿Qué más decía el (…) punto 1?

E1: Estudie todas las posibles variaciones de los ángulos del triángulo y combinaciones de ellas (incluso de A), y (…).

E2: Estamos haciendo la 5.

E1: ¿Cuál? Ah esta (…) que sucede en el caso anterior, con las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente del ángulo 'B', si el ángulo 'A' comienza a aumentar o a disminuir dejando de ser recto.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

Triángulo rectángulo ABC, longitudes, b y c variación del ángulo B, c disminuye, c crece, la variación, ángulo C, b y c, varían simultáneamente, relación o relaciones algebraicas, elementos del triángulo, funciones seno, coseno y tangente b = 3 y c = 4, situación real, posibles variaciones, efecto producido, variación de B, funciones trigonométricas, ángulo A varía, dejando de ser recto, ¿Qué le ocurre al ángulo B?

Lenguaje emergente

(Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

Altura, guiita, sombra, arista, lado opuesto, lado adyacente, noventa, ángulo opuesto, incógnita, valor de 25, un valor de 30 grados, despejamos, el sol, 30 o 40 grados, la horizontal de un faro de luz, el ángulo del sol, cambia, la hipotenusa, Pitágoras, 6 funciones, Teorema del Seno, Teorema del Coseno, el arco seno, el arco coseno, el ángulo se cambia, el sol cambio de posición, si aumenta el largo va disminuyendo el ángulo, variando proporcionalmente, indirectamente proporcional, crecen proporcionalmente a la misma velocidad, forma proporciona, afectados su ángulos, se achican proporcionalmente, triángulos equivalentes, la diagonal, calcular la distancia, demasiadas combinaciones, tamaño del triángulo, semejantes, dibujarla, medida, triángulo isósceles, mantenerse.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

Las situaciones fueron abordadas por los estudiantes desde las consignas propuestas, sin embargo, en los diálogos estudiantiles proponen algunos ejemplos fantasistas que los tratan de asociar a posibles situaciones reales que podrían resolverse utilizando funciones trigonométricas, en este grupo los estudiantes hacen referencia a problemas de Alí Babá, Torres, veleros, entre otras situaciones que podrían resolverse en un contexto matemático conociendo algunos elementos.

En el siguiente diálogo se muestra evidencia de lo antes señalado:

E1: Entonces tocamos la 6(…) Imagina una situación real en que las situaciones descritas puedan suceder (…) ¿Qué situación?

E2: Una torre jejeje, una bandera, cuando una persona está observando algo.

E1: No pero dice que hay que imaginar, no po (…) es que imaginémosla(…).

E2: Jejeje.

E1: Ya, ponte a imaginar, imaginemos, listo. Terminamos de imaginar jejeje.

E2: Jejeje (…) que te imaginaste.

E1: Me imagine a Alíbaba y los 40 ladrones que estaban haciendo una torre, y se había creado una sombra con una ángulo de 46 grados en la, en diagonal así (…).

E2: Jejeje desde la cima jejeje.

E1: Desde la punta con respecto a la diagonal y que estaba parado en la torre, entonces necesitaban saber a qué distancia está en lugar al que iban a parar, y sabían que, el ángulo cuanto era entonces(…).

E2: Pero (…).

E1: Tenían que usar funciones trigonométricas para poder calcular la distancia a donde ir directo a dar.

E2: Ah.

E1: Pa calcular cuanta medicina tiene que darle a los camellos pa poder llegar.

E2: ¿Medicina a los camellos? Jejeje

E1: Jejeje (…).

E2: Ya.

E1: Ya (…) ahora esto.

E2: Parte dos, dos.

E1: Ya jejeje hagamos la 6 jejeje (…).

E2: Es que cuando uno le dice a una (…) por ejemplo que cuando esta largo, por ejemplo un edificio y hay una persona observando arriba.

E1: Que rara es usted.

E2: ¡ay! (...) hay unas personas observando, por ejemplo en un edificio y una persona está arriba y observa que viene un velero o algo así y quiere calcular la distancia ahí tenemos que sacar también la altura de la persona y la altura del edificio, y ahí usar las funciones trigonométricas y ahí se forma el ángulo de línea después el ángulo del edificio.

E1: Ahora sigo sin (…) es que el que hicimos en delante o ¿qué?

E2: Si po, cuando estoy mirando hacia el mar viendo no sé, cualquier objeto un velero o algo así y quiere calcular la distancia a la cual está.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Los estudiantes presentan en lenguaje escrito basados en sus experiencias previas, la intuición, la reflexión de la situación propuesta y algunos procedimientos son desarrollados en sus cuadernos apoyados por la calculadora. Algunas afirmaciones surgidas durante las prácticas se mencionan a continuación:

(…) con esto podemos usar la función trigonométrica que involucre el lado opuesto que es la incógnita con el lado adyacente que tiene un largo de 25, para esto utilizamos la función tangente que sería la tangente de 30 grados, sería igual al lado opuesto que es la incógnita x, dividido por el valor del lado adyacente que cuesta, que vale 25, ahí despejamos la incógnita, o sea, el lado opuesto, y nos daría que, 25 por la tangente de 30.

(…) el sol está ubicado a unos 30 o 40 grados así por ejemplo, de la horizontal de un faro de luz(…) ya, y su sombra mide, no se po, ahí pongámosle, 30(…)3metros, no, no, no sé, pero es un faro de luz, yaa(…) o sea, tendríamos que usar el opuesto de la hipotenusa, ¿cierto?, porque estamos queriendo encontrar el adyacente, o sea ¿qué función trigonométrica tenemos que usar?

(…) son la incógnita (…) es que yo creo que aquí nos falta un valor(…).

(…)Teorema del seno aquí está, ley de los senos, el seno de 'A' partido por A, el seno de 'B' partido por 'B'(…) por el teorema de los senos podemos hacerlo(…) seno de 'A' partido por 'A', ah ah aha ha(…).

(…) Aumenta el largo (…) la equis se saca entonces.

(…) O sea, disminuyo el ángulo (…) y aumento el largo de ese cateto (…).

(…)Si 'C' disminuye el ángulo 'B' crece (…).

(…) Ya voy si, 'C' y 'B' deben crecer proporcionalmente (…) los ángulos se van a mantener iguales, lo mismo si disminuyen proporcionalmente.

(...) las relaciones algebraicas son en las operaciones que hacemos con el lado 'A, con el lado 'C' porque son algebraicas… ¿o no?

(…) Decía que, que por ejemplo si crece cualquiera de los lados proporcionalmente con otro, y se hace la división de esos(…).

(…) Si el ángulo aumenta las funciones trigonométricas acaban disminuyendo.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Se presentan algunas de las argumentaciones que los estudiantes sostienen durante las diferentes prácticas a lo largo de la actividad.

(…) Je, je, je entonces la incógnita sería el lado opuesto y el lado adyacente al ángulo tendría un valor de 25 y el ángulo tendría un valor de 30 grados

(…) Ya pues, y después el ángulo del sol cambia por ejemplo y su cuestión, su sombra cuánto mide, por ejemplo (…) no, pero se está buscando la opuesto de que (…).

(…) Y la hipotenusa donde la hecho, tampoco nos sirve hipotenusa.

(…) Y yo creo que era para que nosotros nos formáramos el problema que estamos haciendo.

(…) Mientras más abajo está el sol, más larga se hace la sombra.

(…) Si aumenta el largo va disminuyendo el ángulo.

(…) O sea que todo va, variando proporcionalmente.

(…) Porque se acerca más al ángulo recto que es 'A' y si 'C' crece, o sea se alarga se aleja más del ángulo 'A' del ángulo recto por lo tanto se va achicando (…) anota eso (…).

(…) porque aunque sean, triángulos de diferentes medidas serían equivalentemente iguales.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas

Los estudiantes al igual que los grupos anteriores poseen un manejo procedimental y en alguna medida conceptual de las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo, además de calcular sus elementos dados algunos de ellos. Los estudiantes fueron capaces de crear una situación problema y en algunos casos hicieron algunos intentos por reflexionar respecto al cambio de un elemento del triángulo si se modificaba una condición. Esta reflexión demuestra la comprensión en alguna medida de la situación problema, la visualización de la misma y el uso de habilidades cognitivas.

Emergentes

Diferentes propuestas de situaciones problemas emergieron durante el desarrollo de algunas de las prácticas y hay un intento significativo de comprender la covariación de algunos elementos del triángulo, cuando otro de ellos surge alguna modificación de su valor. Los estudiantes mostraron cierto dominio cognitivo al analizar lo que sucede con el valor de las funciones trigonométricas cuando el ángulo aumenta o disminuye. Esta reflexión nos evoca a pensar que hay elementos variacionales que son puestos en escena por los estudiantes ante situaciones que pueden ser para ellos familiares.

Procedimientos

Los estudiantes de manera intuitiva adjudicaron valores a ciertos elementos de la situación creada y en base a esto hicieron los cálculos pertinentes para obtener otros elementos, sin embargo, en algunos casos se reflexionó más en profundidad la modificación de un elemento sobre otro. A continuación presento algunos diálogos entre los estudiantes que dan cuenta de ello.

E2: No al de abajo (…) le das un valor al ángulo y al final la tangente.

E1: Entonces po hagámoslo (…).

E2: Y también hallamos el lado opuesto, hallamos la tangente de este ángulo opuesto (…).

E1: Y este que, es el borrador, para después entregárselo al profesor, que es tan simpático.

E2: Je je(…)entonces la incógnita seria el lado opuesto y el lado adyacente al ángulo tendría un valor de 25 y el ángulo tendría un valor de 30 grados, con esto podemos usar la función trigonométrica que involucre el lado opuesto que es la incógnita con el lado adyacente que tiene un largo de 25, para esto utilizamos la función tangente que sería la tangente de 30 grados, sería igual al lado opuesto que es la incógnita x, dividido por el valor del lado adyacente que cuesta, que vale 25, ahí despejamos la incógnita, o sea, el lado opuesto, y nos daría que, 25 por la tangente de 30.

E1: Ya, de ahí que pasa como podes imaginarte si el ángulo se cambia, o sea que el sol cambio de posición y el ángulo ahí, por la imagen que se ve.

E2: Va aumentando.

E1: Disminuye.

E2: Disminuye, y ¿que aumenta entonces? ¿El valor de los lados?

E1: Aumenta el largo, mientras más abajo está el sol, más larga se hace la sombra.

E2: Mmm… la equis se saca entonces, en función de eso… si aumenta el largo va disminuyendo el ángulo.

E1: No, pero hacelo tu po.

E2: ¿Qué? ¿También va cambiando el valor de la función?, haber hagamos un ejercicio y le cambiamos.

E1: El ángulo, así como sale ahí en la imagen.

E2: ya, venite(…) 25.

E1: Aquí es 22 coma uno.

E2: ¿Porque a ti te da la gana? Cierto.

E1: Sí.

E2: Ya.

E1: Porque a mí me da la gana.

E2: La altura es la misma, cierto.

E1: Y tenemos que calcular la nueva (…) hipotenusa.

E2: Ahí sería.

E1: Lo mismo, es tangente de 22 coma uno.

E2: Tangente, de 22 coma uno, es igual a la altura(…) despejamos la x, aquí queda 3, 22 coma uno y cuanto hace.

E1: 7 coma 38 metros

E2: O sea, disminuyo el ángulo.

E1: Y aumento el largo de ese cateto.

E2: O sea que todo va, variando proporcionalmente.

5.3.1.2.2. Sesión de estudio tres

Está compuesta por tres situaciones expresadas en diferentes contextos y representaciones que convergen a elementos de pensamiento variacional que pusiesen emerger de los desarrollos estudiantiles. La situación 1 propone una carretera con diferentes trayectos que atiende a condiciones específicas. Esta situación se muestra mediante una representación gráfica, y se ha descrito en un registro natural. Se les solicita a los estudiantes una descripción algebraica de uno de los tramos de la carretera y para este propósito se les pide que detallen la parábola.

La segunda situación presenta un gráfico, en el cual se hace mención de sus cambios (cóncavo a convexo o viceversa). La consigna solicita a los estudiantes dar detalle del movimiento de un automóvil cerca de un punto de inflexión de su trayectoria. Se les pregunta, además a los estudiantes sí podrían utilizar la derivada de una función para detectar los puntos de inflexión, si este fuese el caso, se les pide los argumentos.

La situación tres ha planteada dos límites de funciones $(f(t)\ y\ g(t))$ en un punto $t = 0$, desde una notación matemática formal, y luego amparado en los límites presentados se les pide que concluyan respecto al límite en $t = 0$ de la función cociente de $f(t)\ y\ g(t)$ Además se les solicita que ilustren mediante un contraejemplo de la situación en cuestión.

Etapa 1 Se responde a las preguntas básicas

Se responde a las preguntas ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

Los estudiantes reflexionan respecto a cada situación y hacen intentos por establecer ciertos modelos (algebraicos, gráficos, figurales) que son argumentados por los procedimientos respectivos. En las argumentaciones surgidas en las tres situaciones los estudiantes hacen alusión a un razonamiento de tipo físico, ya que se muestra los cambios (representación geométrica) analizando lo variacional desde razones físicas que explican los fenómenos de movimiento.

Las producciones estudiantiles aluden o se acercan a definición de objetos matemáticos como parábola, límite matemático, función, derivada, entre otros. En las prácticas que emergieron en las distintas situaciones se observa un número considerable de afirmaciones, argumentos, procedimientos, lenguaje en diferentes representaciones que enriquecen el análisis variacional de las situaciones.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

Primer problema

E1: $x^2 = 4py$, *foco* $(\mathrm{p},0)$, $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$, $\left(\frac{1}{8000}\right)\mathrm{x}^2$, $\frac{1}{5} = \frac{\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1}{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}$, $\mathrm{y} - \mathrm{y}_1 = \mathrm{m}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)$.

Si situamos el foco en el origen, tenemos que el término independiente es cero, y si usamos la pendiente $\frac{1}{5}$ a la curva a través de la recta tangente obtenemos $y = \left(\frac{1}{8000}\right)x^2$.

Segundo problema

E2**:** El movimiento de un auto que parte del reposo acelera aumentando su velocidad lo cual varía, con esto podemos decir que posee una pendiente positiva hasta que llega al punto máximo(a=0), luego comienza a disminuir su velocidad llegando a un punto que su velocidad es cero(x=0), siendo este un punto de inflexión en la que la gráfica se traduce con una velocidad negativa, en pocas palabras el automóvil está retrocediendo. Sí, ya que por medio de la derivada se puede encontrar un punto en donde el valor de f'(x) es cero. La pendiente también es cero, esto define los puntos máximos y mínimos que sirven para obtener las curvas de la función. Ahora bien, la derivada existente puede ser o no el punto de inflexión (no es inherente). Recordar que es necesario encontrar el punto donde la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

E3**:** Desde un punto de vista variacional al llegar a un punto de inflexión se produce un efecto inverso, ya que la parábola al hacer simétrica la primera unidad de la parábola es ascendente, es decir, su pendiente es positiva. Al llegar al vértice superior e inferior de la parábola en la pendiente es igual a 0.

Finalmente, en la parte descendente la parábola es negativa. Al ser un automóvil este va ir subiendo va desacelerando y luego cuando su pendiente es negativa este acelera, si es que en todo el trayecto la velocidad del automóvil es constante, así como también en la función constante.

E4: Punto de inflexión es cuando existe un cambio de dirección.

E5: Varía la velocidad del auto, no hay variación de la trayectoria del auto. Sí porque si se encuentra la pendiente y con la pendiente podemos calcular los puntos de inflexión.

E6**:** Punto de inflexión $m = 0$ antes de llegar al punto pendiente (-).

E8**:** Se describe la variación de la recta tangente a los diferentes puntos situados en la curva (aumento y o disminución de estos, mientras nos acercamos al punto de inflexión, la variación tiende a ser menor. Trayectoria de un automóvil cerca del punto de inflexión se describieron cambios en su velocidad tendiendo a ser esa variación menor. Se puede utilizar la primera derivada para obtener pendientes a las rectas tangentes a la curva y la segunda derivada para ver los puntos de inflexión situando máximos y mínimos.

Tercer problema

E9: Se podría afirmar que $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, como tiende al mismo número (0) las funciones deberían ser similares. $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \infty \to f(t)$ tiene que ser $\neq\ 0$, ya que $g(t)$ tiene que tender a cero.

E10: $\lim_{t \to 0} f(t) = 0, \lim_{t \to 0} g(t) = 0.$ Las variables de cada una de las funciones hacen que el límite sea 0, significa que las dos funciones tienen variables iguales o expresiones que se pueden simplificar entre ellas, ya que sino el límite se indeterminaría y tendería a infinito. En el segundo caso, el límite da uno, esto puede significar que las funciones equivalen a lo mismo o que simplificándolas el valor es el mismo. Cuando el límite de $t \to 0$ es igual al infinito significa que no había forma de simplificar la división por lo que la división queda un $n/0$.

E11**:** $f(t)$ tiende más rápido a cero que $g(t)$.

E12: $\lim_{t \to 0} f(t) = 0, \lim_{t \to 0} g(t) = 0,\ a)\ \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$ es verdadero este caso siempre y cuando se puede simplificar las funciones $f(t)\ y\ g(t)$ sean una constante, $f(t) = t^2, g(t) = t$

$\lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t} = \lim_{t \to 0} t = 0. \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$ Es verdadero pude ocurrir si ambas funciones son iguales o son constantes. $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \infty$ puede ocurrir si $f(t)$ crece más rápido que $g(t)$.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

Trayecto, dirección, norte-sur, punto A, punto B, inclinación, línea recta, horizontal, pendiente, curvatura de la parábola, algebraicamente, parábola, inflexión, puntos, cóncava, convexo, trayectoria, geométrico, derivada, movimiento, automóvil, variacional.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

Término independiente, recta tangente, pendiente positiva, punto máximo, velocidad es cero, velocidad negativa, automóvil retrocediendo, efecto inverso, vértice superior e inferior, desacelerando, acelera, constante, cambio de dirección, acercamos, variación es menor, tiende más rápido a cero, el límite se indeterminaría, infinito.

Etapa 4: Situaciones problema Emergentes

Los estudiantes se circunscriben a los ejercicios propuestos en la sesión de estudio y en sus textualidades no aflora una nueva situación que aporte otros elementos diferentes a los propuestos.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

Primer problema

(…)Si situamos el foco en el origen, tenemos que el término independiente es cero, y si usamos la pendiente $\frac{1}{5}$ a la curva a través de la recta tangente obtenemos y= $(\frac{1}{8000})$ x^2

Segundo problema

(...) El movimiento de un auto que parte del reposo acelera aumentando su velocidad lo cual varía (…) luego comienza a disminuir su velocidad llegando a un punto que su velocidad es cero(x=0) (…) Sí, ya que por medio de la derivada se puede encontrar un punto en donde el valor de f'(x) es cero. La pendiente también es cero… es necesario encontrar el punto donde la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

(…) Desde un punto de vista variacional al llegar a un punto de inflexión se produce un efecto inverso(….) Al llegar al vértice superior e inferior de la parábola en la pendiente es igual a 0. Finalmente en la parte descendente la parábola es negativa. Al ser un automóvil este va ir subiendo va desacelerando y luego cuando su pendiente es negativa (…) si es que en todo el trayecto la velocidad del automóvil es constante

(…) Punto de inflexión es cuando existe un cambio de dirección.

(…) Varía la velocidad del auto, no hay variación de la trayectoria del auto.

(…) Punto de inflexión pendiente=o antes de llegar al punto pendiente (-).

(…) Se describe la variación de las rectas tangentes a los diferentes puntos situados en la curva

(….) Trayectoria de un automóvil cerca del punto de inflexión se describieron cambios en su velocidad tendiendo a ser esa variación menor.

(….) Trayectoria de un automóvil cerca del punto de inflexión se describieron cambios en su velocidad tendiendo a ser esa variación menor.

Tercer problema

(…)$\lim_{t\to 0} f(t)$ =0, $\lim_{t\to 0} g(t)$ =0 Las variables de cada una de las funciones hacen que el límite sea 0, significa que las dos funciones tienen variables iguales o expresiones que se pueden simplificar entre ellas… Cuando el límite de $t \to 0$ es igual al infinito

(…) $\lim_{t\to 0} f(t)$ =0 $\lim_{t\to 0} g(t)$ =0, a) $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{g(t)}$= 0 es verdadero este caso siempre y cuando se puede simplificar las funciones $f(t), g(t)$ … $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{g(t)}$=1 Es verdadero puede ocurrir…$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{g(t)}$= ∞

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad

Segundo problema

(…)Con esto podemos decir que posee una pendiente positiva hasta que llega al punto máximo(a=0) (…) siendo este un punto de inflexión en la que la gráfica se traduce con una velocidad negativa (…) esto define los puntos máximos y mínimos que sirven para obtener las curvas de la función.

(…) ya que la parábola al hacer simétrica la primera unidad de la parábola es ascendente es decir, su pendiente es positiva este acelera… así como también en la función constante (…) Sí porque si se encuentra la pendiente y con la pendiente podemos calcular los puntos de inflexión.

(…) aumento y o disminución de estos, mientras nos acercamos al punto de inflexión, la variación tiende a ser menor (…) Se puede utilizar la primera derivada para obtener pendientes a las rectas tangentes a la curva y la segunda derivada para ver los puntos de inflexión situando máximos y mínimos.

Tercer problema

(…) las funciones deberían ser similares. $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}=\infty \rightarrow f(t)$ tiene que ser $\neq 0$, ya que $g(t)$ tiene que tender a cero.

(...)Ya que sino el límite se indeterminaría y tendería a infinito. En el segundo caso, el límite da uno, esto puede significar que las funciones equivalen a lo mismo o que simplificándolas el valor es el mismo… significa que no había forma de simplificar la división por lo que la división queda un n/0.

(…) sean una constante, $f(t)$ =t^2, $g(t)$ =t…
$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t}=\lim_{t\to 0} t=0$. Si ambas funciones son iguales o son constantes (…) puede ocurrir si $f(t)$ crece más rápido que $g(t)$.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan

Previas

En general, los estudiantes proporcionaron concepciones clásicas de algunos objetos matemáticos involucrados tanto de geometría analítica (elementos y construcción de una parábola, rectas y sus elementos) y de otros conceptos ligados al cálculo (punto de inflexión, valor máximo, valor mínimo, criterios de la primera y segunda derivada, entre otros, cálculo de límites, indeterminaciones, entre otros.). Las textualidades mostraron que poseen un dominio conceptual de estos conceptos, sin embargo las afirmaciones y argumentos presentados demuestran que se requiere fortalecer aún más aspectos de los conceptos matemáticos desde otra mirada más dinámica y menos estática.

Emergentes

Algunos estudiantes reflexionaron de manera dinámica respecto a la variación en los puntos de cambio de la concavidad y presentaron algunos argumentos que reflejan el análisis de la variación de la recta tangente a los puntos de una función, ello nos hace conjeturar que hay movilización de pensamiento variacional, aunque faltan más elementos de análisis para determinar en qué medida el pensamiento variacional está presente en los estudiantes.

Procedimientos

Los estudiantes presentaron diferentes estrategias y procedimientos para abordar cada uno de los problemas presentados en esta sesión de estudio. El problema uno, fue el que más problema presentó y un solo grupo logró presentar una solución y proporcionar argumentos mediante un procedimiento que combinó lo algebraico con lo gráfico. El segundo problema propuesto fue abordado con mayor propiedad y los procedimientos de resolución combinaron el lenguaje natural escrito, lo algebraico, lo figural, y lo gráfico. Por su parte el problema tres fue abordado desde argumentos de lenguaje natural escrito y lo algebraico.

5.3.1.2.3. Reflexión y discusión de resultados de las sesiones de estudio propuesto

Las pretensiones de estas sesiones de trabajo propuestas fue analizar la construcción de diferentes situaciones de los estudiantes que permitieran reflexionar respecto a la presencia o no del pensamiento variacional.

En las sesiones de trabajo propuestas se observa que los diferentes grupos comprendieron en términos generales la situación propuesta, aunque en unas más que en otras, la participación fue más activa. En lo referente a lenguaje fue notable el uso de recursos lingüísticos que utilizaron en las sesiones de trabajo. Los esfuerzos por abordar la situación problema fue notable, la creatividad en cada una de las situaciones problemas fue expresada en algunas de las textualidades que los estudiantes presentaron.

Desde los diferentes elementos de análisis de la primera categoría de EOS hubo una producción sustantiva en las sesiones de estudio propuesto, desde algunos elementos: lenguaje, afirmaciones y argumentos y en menor escala desde las concepciones y procedimientos adecuados para abordar la situación problema desde el pensamiento variacional.

A manera de ejemplo, en la segunda sesión de estudio se solicitó construir una situación particular relacionada con el empleo de funciones trigonométricas con base en dos imágenes que se proporcionó. Se solicitó además analizar la variación de ciertos elementos y concluir de acuerdo a esas movilizaciones de estos elementos (lados y ángulos). Uno de los grupos describe una situación problema que involucran en su solución las funciones trigonométricas, sin embargo la situación no representa variaciones. Se trata de una situación estática y sin pretensiones de representar alguna dinámica o proceso variacional, en efecto las distancias involucradas en el problema son fijas y, aunque la persona que “pasa” por la plaza permanece aparentemente en movimiento, se tiene como referente un punto fijo de su trayectoria.

En relación a una actividad de visualización matemática, esta se revela en la aplicación del teorema de Thales, donde consideran un dibujo a partir del cual atribuyen propiedades matemáticas a la situación, justificando la presencia de proporciones que permiten movilizar el cálculo. En el proceso de confección de la situación problema van descubriendo la necesidad de nuevas hipótesis pero en ningún caso descubren motivaciones para integrar a la situación elementos dinámicos.

Las siguientes situaciones que se plantearon, movilizan en los estudiantes habilidades para una lectura variacional de las situaciones donde se explícita variaciones y en las cuales se les solicita a los estudiantes el estudio de estos cambios y las explicaciones al respecto. Los estudiantes responden de manera explícita a las solicitudes que propone la consigna, y en general estos no analizan las diversas posibilidades de variación, excepto cuando se plantea la variación simultánea de dos lados del triángulo. Esto lo entendemos producto de la insinuación de esta posibilidad en la naturaleza de la variación presentada. Los estudiantes conjeturan acerca de las variaciones de las funciones trigonométricas sin establecer relaciones formales que les permitan estudiar la dependencia entre las variables que intervienen en las respectivas situaciones presentadas.

Las otras sesiones de estudio propuestas evidenciaron la fortaleza en algunos elementos (lenguaje, argumentos, afirmaciones) y en otros elementos se requiere consolidar (concepciones, procedimientos). Cabe señalar que el trabajo en equipo ha sido fundamental en cuanto a la cantidad de estrategias que han aflorado en las distintas producciones estudiantiles, creatividad, ingenio en algunos casos, siendo estos elementos fundamentales para reafirmar y desarrollar nuevas competencias y fortalecer el pensamiento variacional.

5.3.1.3. Prueba de Cálculo

El profesor del curso confeccionó una prueba escrita, de carácter sumativa, la cual fue diseñada para ser contestada de manera individual en un lapso no mayor de dos horas. La prueba se conformó por tres situaciones problemas y cuyo objetivo principal fue valorar los desarrollos estudiantiles y los elementos de pensamiento variacional en los estudiantes que emergieran en su desarrollo.

La primera situación solicitó a los estudiantes en qué punto de una función $f(x)$, la recta tangente es paralela a otra recta, además se les propuso a los estudiantes representar los objetos utilizados.
La segunda situación se refirió a un ave migratoria que vuela en cierta dirección, y se les proporciona ciertas condiciones para el tiempo y la altura en diferentes trayectorias y luego se les solicita a los estudiantes posibles recorridos en un intervalo de tiempo, además se les invitó a realizar comentarios desde un punto de vista variacional.

El problema tres hace referencia a un barco que viaja entre dos puntos bajo ciertas condiciones su recorrido de ángulos y distancias, luego se les solicita a los estudiantes un análisis de la variación de distancias después de corregir el rumbo.

Etapa 1 Se responde a las preguntas básicas

Se responde a las preguntas ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

En el problema uno, en general los estudiantes se focalizan en la comprensión de la situación propuesta, luego en el significado de recta tangente y de los requerido para que dos rectas sean paralelas. Ellos propusieron una ecuación en un registro algebraico y encontraron el valor de la variable, y luego con ello buscaron su imagen y la ecuación de la recta tangente. Algunos estudiantes presentaron una representación gráfica y algunos argumentos verbales para justificar el desarrollo de la situación propuesta.

En el problema dos se observan diferentes estrategias y representaciones gráficas, figurales, además de argumentos que escritos que muestran con cierto detalle el porqué de la situación planteada. En esta situación refleja el empleo de habilidades cognitivas, tales como conjeturar, representar, argumentar, visualizar, entre otras, lo que a su vez induce a pensar que los estudiantes poseen ciertas experiencias análogas a esta situación y que además este tipo de contexto es familiar, y a su vez constituye un verdadero desafío. En esta actividad se pudo constatar de diferentes elementos variacionales que emergieron en los procedimientos, argumentos y afirmaciones.

El problema tres de igual manera que el dos exigió un despliegue de habilidades cognitivas que se pusieron en escena mediante el uso de distintos tipos de representaciones (gráficas, figurales, escritas, algebraicas), a su vez esta actividad movilizó conocimientos de álgebra, trigonometría, física para el planteamiento de diferentes caminos de resolución. Este problema mostró en alguna medida que los estudiantes utilizaron algunos elementos variacionales.

Etapa 2: Producciones de los estudiantes del grupo que son representativas de las interacciones surgidas al enfrentar la situación problema

Primer problema

E1: En el punto $(3/2{,}3/4)$ la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y = -x + 3$.

E2: Sabemos que $g(x)$ es paralela a una recta tangente ahora bien hay que calcular en qué punto existe una recta con igual pendiente a $g(x)$. La ecuación de la recta es $y = 9/4 - x$.

E3: El punto donde la recta tangente es paralela a $x + y = 3$ es $(3/2{,}3/4)$. La ecuación de la recta tangente en $(3/2{,}3/4)$ es $y = -x + 9/4$

E4: Primero se determina la pendiente de la recta $x + y = 3$. Al despejar y, el término que acompaña a x es la pendiente. Luego se calcula la derivada de la función f. Se sabe que la primera derivada de una función es la pendiente de la recta tangente a su curva. Con este hecho sabemos cuál es el valor de x que cumple con las condiciones necesarias. Ahora reemplazamos el valor de $x = 3/2$ en la función f. Con el valor de y encontrado ya tenemos el valor de la función en la cual su recta tangente es paralela a la recta $x + y = 3$. $+f$ y paralela a la recta $x + y = 3$ es $y = -x + 9/4$.

E5: Recta tangente $y = -x + 10/4$.

E6: Como $g(x)$ es una recta calcula la pendiente de esto y la igualo a $f'(x)$.$f(x)$ es paralela a la recta $x + y = 3$ en el punto $(3/2{,}3/4)$. La ecuación de la recta paralela a $x + y = 3\ es\ y = -x + 10/4$.
E7: La recta es tangente en el punto $(-1, 3/4)$.

Segundo problema

E1: En el primer recorrido el ave asciende en línea recta, luego en el momento en que entra a la nube comienza a volar de forma constante en línea recta con pendiente $m = 0$, y luego en el punto $t + T$ comienza ascender retomando la pendiente que tenía en el punto t_0. En el caso 2, el ave en el punto t_0 recorre la nube con un movimiento semejante a las funciones seno en donde las rectas pasarían a ser rectas tangenciales. Como lo muestra el gráfico la función seno es derivable en todos sus puntos, siendo su derivada la función coseno, la que al reemplazar cualquier punto $f(x) = cos(x)$ nos dará como resultado una pendiente positiva igual a 1.

E2: Si suponemos que el origen es $(0,1500)$ la función $sen(x)$ modela la variación de la altura del ave migratoria, cumpliendo con el requisito de ser derivable en sus vecindades de los extremos 0 y 2π. Prueba de derivada $sen'(x) = cos(x) \rightarrow sen'(0) = 1, sen'(2\pi) = 1$. Es congruente esta función, porque la trayectoria del ave antes de t0 es rectilínea y pendiente 1 al igual que en $(t_0 + T)$ y la derivada (pendiente) en (t_0) y $(t_0 + T)$, al considerar $sen(x)$, es 1, lo cual es compatible con los requisitos.

E3**:** En ambos casos el movimiento realizado por el ave sigue una función continua y diferenciable en cada punto. Por lo tanto, se prevé hacer un estudio variacional en todo el trayecto. En el caso dos se ve las dos rectas, las derivadas de ellas es 1, en cada instante su tasa de variación de 0a 1. Una posible función del ave dentro de la nube, debe ser continua y diferenciable en los puntos 0 y 2π al juntarla con ambas rectas. Para que la ecuación de la trayectoria sea diferenciable en los puntos $(0,1500), (2\pi, 2500)$ tiene que cumplir que la derivada de $x = 0 -$ y $x = 0 +$ sean iguales. Como también $x = 2\pi +$ y $x = 2\pi -$ sean iguales, como ya sabemos que la derivada de la primera recta es 1. Por lo tanto, una posible solución al problema es que el ave tenga una trayectoria en forma de la función $f(x) = sen(x) + 1500$. Así el movimiento, es derivable en el intervalo de tiempo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + T + \varepsilon)$.

Tercer problema

E1**:** En el punto que se encuentra a 50 kms de su partida tendrá que desviarse $89{,}874°$ en un ángulo de depresión con lo cual recorrerá aproximadamente 152,52 kms a través del nuevo trayecto. Al equivocarse de camino, la distancia es de 1,68% más que la distancia original (sin el desvío de $15°$). La distancia después de recorrer el rumbo es 204% aproximadamente en función de la distancia de la dirección equivocada.

E2: Como lo indica el gráfico, el barco desde el punto J debe desviarse $82{,}2°$ en dirección sureste recorriendo 102,5 km desde el punto J al punto B. La distancia recorrida en dirección equivocada hace varias la distancia que debe recorrer el barco para llegar a su destino. Ya que para tomar el curso correcto tuvo que girar provocando un ángulo distinto al que toma al equivocarse y con estos ángulos y las distancias recorridas se puede determinar las otras variables usando las funciones trigonométricas.

E3**:** En este caso se puede corregir la distancia, analizamos por cual camino sería más efectivo regresar y ver cuántos grados ajustar la recta. El barco desde el punto A al C recorre 500 kms, se da cuenta de error en el recorrido entonces tiene que ir en línea recta hacia B y esto nos da aproximadamente 1051,11 Km, lo que quedan 10011,112 km.

E4**:** La distancia entre darse cuenta de error y el destino final es 112.7 km. Debido al error navegó el barco 162.7 km→ navegó 12.7 km más si no se habría equivocado. Su dirección debería ser corregida $(ángulo\ actual - 15) < 90°$ apuntando hacia el punto B.

E5**:** Recorrerá 102,52 km desde que el barco notó su error, ya que el ángulo de inclinación era poco, solo recorrió 2 km de más en comparación si hubiese ido en línea recta.

E6**:** Finalmente, el barco para llegar a destino deberá corregir su rumbo en $90°$ en sentido contrario a $15°$ iniciales, y la distancia a recorrer es de 150 cos 15(km) o144, 88(km) aproximadamente.

E7**:** Debe corregir su dirección en 7,28 bajo la horizontal y deberá recorrer 102,11 km.

E8**:** Debería variar la dirección en $82{,}75°$, para llegar al punto B, y la distancia que tendrá que viajar es de aproximadamente 102,53 Km, para llegar al otro destino. En análisis es el siguiente, el barco al comienzo avanzó 50 km cuando se da cuenta que va hacia otro lugar, que lo desvía del punto al cual quería llegar (puerto B). Cuando observa su error, este deberá variar su dirección (82,75º), de esa manera, avanzó aprox 102,53 km, más los 50 km del inicio. A modo de conclusión, el barco recorrió 2,53 km más de la ruta establecida al cometer el error.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

Función f, punto, recta tangente, ecuación de la recta, paralela, objetos, dirección norte-sur, tiempo t_0, altitud, instantes, Tsegundos, dirección ascendente, línea recta, pendiente m, intervalo de tiempo, trayectoria, derivable, línea recta, desvía, dirección, variación, distancia, rumbo.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

Comienzo, proceso, mantenerse, constante, aproximadamente, error, observar, continua, R, trazado, distancia total, adyacente, reemplazar, función original, unción trigonométrica, cambios angulosos, correr la gráfica hacia la derecha, solución, movimiento, máximo, mínimo, velocidad inicial, modela, incremento, decrecimiento, rectas tangentes negativas,

Etapa 4: Situaciones problema emergentes

Los estudiantes en general se abocaron a la situación propuesta y presentaron respuestas acordes a lo solicitado, a excepción de un estudiante que presentó algunas expresiones en otro contexto evocando a otras situaciones, por ejemplo, un estudiante mencionó **cambios angulosos.**

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

(…) En el punto $(3/2, 3/4)$ la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y = -x + 3$.

(…) Sabemos que $g(x)$ es paralela a una recta tangente ahora bien hay que calcular en qué punto existe una recta con igual pendiente a $g(x)$. La ecuación de la recta es $y = 9/4 - x$.

(…) El punto donde la recta tangente es paralela a $x + y = 3$ es $(3/2, 3/4)$. La ecuación de la recta tangente en $(3/2, 3/4)$ es $y = -x + 9/4$

(…) Primero se determina la pendiente de la recta $x + y = 3$ (…) Luego se calcula la derivada de la función f. Se sabe que la primera derivada de una función es la pendiente de la recta tangente a su curva.

(…) En el primer recorrido el ave asciende en línea recta…comienza a volar de forma constante (…) punto $t + T$ comienza ascender retomando la pendiente que tenía en el punto t_0.

(…) Como lo muestra el gráfico la función seno es derivable en todos sus puntos.

(…) Si suponemos que el origen es (0, 1500) la función $sen(x)$ modela la variación de la altura del ave migratoria…prueba de derivada $sen'(x) = cos(x) \rightarrow sen'(0) = 1, sen'(2\pi) = 1$.

Una posible función del dela ave dentro de la nube, debe ser continua diferenciable en los puntos 0 y 2π al juntarla con ambas rectas (…) Por lo tanto, una posible solución al problema es que el ave tenga una trayectoria en forma de la función $f(x) = sen(x) + 1500$.

(…) En el punto que se encuentra a 50 kms de su partida tendrá que desviarse *89,874º* en un ángulo de depresión con lo cual recorrerá aproximadamente 152,52 kms a través del nuevo trayecto.
(…) Como lo indica el gráfico el barco desde el punto J debe desviarse *82,2º* en dirección sureste recorriendo 102,5 km desde el punto J al punto B. La distancia recorrida en dirección equivocada hace varias la distancia que debe recorrer el barco para llegar a su destino.

(…) En este caso se puede corregir la distancia analizamos por cual camino sería más efectivo regresar y ver cuántos grados ajustar la recta. El barco desde el punto A al C recorre 500 kms, se da cuenta de error en el recorrido.

(…) Su dirección debería ser corregida $(ángulo\ actual - 15) < 90°$ apuntando hacia el punto B.

Recorrerá 102,52 km desde que el barco notó su error (…).

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

(…) Al despejar y, el término que acompaña a x es la pendiente Con este hecho sabemos cuál es el valor de x que cumple con las condiciones necesarias. Ahora reemplazamos el valor de $x = 3/2$ en la función f. Con el valor de y encontrado ya tenemos el valor de la función en la cual su recta tangente es paralela a la recta $x + y = 3$.

La recta tangente a $f(x)$ paralela a la recta $x + y = 3$ es $y = -x + 9/4$.

(…) Como $g(x)$ es una recta calcula la pendiente de esto y la igualo a $f'(x)$.

(…) Con un movimiento semejante a las funciones seno en donde las rectas pasarían a ser rectas tangenciales, siendo su derivada la función coseno, la que al reemplazar cualquier punto $f(x) = cos(x)$ nos dará como resultado una pendiente positiva igual a 1.

(…) Cumpliendo con el requisito de ser derivable en sus vecindades de los extremos 0 y 2π. Es congruente esta función, porque la trayectoria del ave antes de t_0 es rectilínea y pendiente 1 al igual que en $(t_0 + T)$ y la derivada (pendiente) en $(t_0)\ y\ (t_0 + T)$.

(…) La derivada de ellas es 1, en cada instante su tasa de variación de 0 a 1.

Para que la ecuación de la trayectoria sea diferenciable en los puntos $(0{,}1500), (2\pi, 2500)$ tiene que cumplir que la derivada de $x = 0-$ y, $x = 0+$ sean iguales. Como también $x = 2\pi +$ y $x = 2\pi -$ sean iguales, como ya sabemos que la derivada de la primera recta es 1. Así el movimiento, es derivable en el intervalo de tiempo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + T + \varepsilon)$.

(…) Al equivocarse de camino, la distancia es de 1,68% más que la distancia original (sin el desvío de 15º). La distancia después de recorrer el rumbo es 204% aproximadamente en función de la distancia de la dirección equivocada.

(…) Ya que para tomar el curso correcto tuvo que girar provocando un ángulo distinto al que toma al equivocarse y con estos ángulos y las distancias recorridas se puede determinar las otras variables usando las funciones trigonométricas.

(…) Entonces tiene que ir en línea recta hacia 'B' y esto nos da aproximadamente. 1051,11 Km, lo que queda 10011,112 km.

Debido al error navegó el barco 162.7 km→ navegó 12.7 kilómetros más si no se habría equivocado.

(…) Ya que el ángulo de inclinación era poco, solo recorrió 2 km de más en comparación si hubiese ido en línea recta.

Se da cuenta que va hacia otro lugar, que lo desvía del punto al cual quería llegar (puerto B) (…) este deberá variar su dirección (82,75º)(…).

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan

¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas

Los estudiantes evidenciaron tener un dominio procedimental del cálculo de la derivada y la noción geométrica de la misma como la pendiente de la recta tangente a una función f(x) en un punto definido de su dominio. También se observó la utilización procedimental de conceptos de trigonometría, en particular de algunas funciones trigonométricas, la ley de senos y cosenos para resolver triángulos oblicuángulos.

Emergentes

Los estudiantes realizaron intentos por realizar el estudio variacional del problema dos y tres, reflexionando respecto a las situaciones planteadas y a su vez utilizando habilidades cognitivas, tales como visualizar, representar, conjeturar, refutar, analizar y sintetizas que se pusieron en escena en los distintos modelos que fueron plasmado por algún tipo de representación ostensible.

Procedimientos

En general los estudiantes se abocaron a realizar cálculos en representaciones de tipo algebraico, acompañados por gráficas que intentaron modelar los problemas planteados, además de representar argumentos escritos como un medio de apoyo y sustento a los procedimientos utilizados. Los estudiantes para el problema desarrollaron procedimientos algebraicos, que consistió en encontrar la derivada de la función f(x), la pendiente de la recta proporcionada que es además paralela a la recta tangente a la función en el punto. En el problema dos, los estudiantes elaboraron representaciones gráficas y figurales, además realizaron algunos cálculos y presentaron argumentos escritos de la reflexión de cada etapa del vuelo del ave. En el problema tres, los estudiantes dibujaron una representación figural para modelar el desplazamiento de un barco que zarpó a una dirección determinada. También es este problema los estudiantes recurren a realizar ciertos cálculos empleando conceptos de trigonometría. Finalizaron el problema presentando algunos argumentos en lenguaje natural.

5.3.1.3.1. Reflexión y discusión de resultados de la prueba evaluativa

La información proporcionada en las textualidades estudiantiles confirma que en la mayoría de los estudiantes se ha evidenciado acercamientos e indicios de desarrollo de pensamiento variacional plasmados mediante alguna representación, sea esta ostensible o no ostensible. Desde el primer nivel de análisis de las categorías de EOS, al igual que en los otros instrumentos aplicados se percibe que algunas de las categorías se requieren consolidar (procedimientos, concepciones), ya que muchos estudiantes no logran establecer la covariación entre las variables involucradas en las situaciones problema propuestas. Sin embargo, la prueba evaluativa ofreció un progreso respecto a evidencias de pensamiento variacional en relación a los demás instrumentos que se aplicaron anteriormente. Se hace necesario potenciar y desarrollar el pensamiento variacional desde niveles de escolaridad precedentes, aprovechando situaciones cotidianas familiares que puedan redundar en oportunidades de desarrollo matemático.

Una consideración especial en esta discusión, la tiene el hecho de no usar simulaciones computacionales en la investigación, lo que se explica en la decisión de no agregar elementos externos al pensamiento puro de los estudiantes que pudieran interferir en los resultados de nuestra investigación. Sin embargo en la utilización de los resultados del presente trabajo, para la organización de actividades docentes, se pueden encontrar complementos importantes en Garcia & Benitez (2011), que destacan, en el contexto de la resolución de problemas, las competencias necesarias para el trabajo con TIC y las competencias matemáticas entre las cuales mencionan: identificar las variables presentes en el problema; establecer relaciones entre las variables del problema; utilizar un modelo matemático para representar el problema entre otras, que son típicas del pensamiento variacional.

CAPÍTULO 6

Conclusiones e implicaciones

6.1 INTRODUCCIÓN

En este último capítulo presentamos de manera sintética los resultados de la investigación obtenidos en consonancia con los objetivos, tanto generales como específicos que hemos planteados como directrices de esta investigación. Pretendemos que estos respondan en alguna medida a las preguntas de investigación propuestas durante este estudio. Todo ello, en consonancia con el problema que hemos planteado desde una perspectiva teórica que atiende a las manifestaciones de pensamiento variacional en la asignatura del Cálculo con estudiantes del nivel terciario, que a su vez se ha completado el abordaje desde el enfoque ontosemiótico como herramienta potente de análisis didáctico en Educación Matemático.

6.2 UN BREVE RESUMEN DE NUESTRO PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el capítulo 1 mencionamos algunas de las investigaciones relativas al pensamiento variacional y nos percatamos que este pensamiento matemático se sigue investigando desde diferentes aristas, desde la comprensión y la construcción de objetos matemáticos desde diferentes facetas, sean estas: cognitivas, histórico-epistemológicas, con el apoyo en la tecnología, entre otros, de modo que se pueda complementar una y otra faceta. La mayoría de las investigaciones indagadas convergen en la premisa que el cambio, y la cuantificación del mismo (variación) ha estado presente en prácticas de predicción en el desarrollo histórico del cálculo, sin embargo, hemos encontrado muy pocos trabajos de investigación relacionados con el pensamiento variacional que atiendan a analizar concepciones que tienen los estudiantes de primer año universitario respecto a ciertas tareas, acciones, procesos en situaciones variacionales(Carlson et. al, 2002; Grozdev & Todorka, 2010). Una de las razones de nuestro interés es el desarrollo de una investigación en una nueva dirección que pueda proporcionar un nuevo aporte a la investigación didáctica del cálculo. En este sentido, es oportuno y pertinente preguntarse:

¿Es posible explorar algunos aspectos y/o elementos de pensamiento variacional en los estudiantes de primer año universitario que cursan cálculo inicial?, ¿De qué manera se puede potenciar el desarrollo del pensamiento variacional?, Preguntas que nos ayudan a plantear nuestro trabajo de investigación, -pensamiento variacional emergente en estudiantes de Cálculo Inicial, sustentado en que hay pocos trabajos que exploren el pensamiento variacional emergente.

La revisión de las posturas teóricas del pensamiento variación nos permitió explorar e indagar respecto a este pensamiento matemático desde una mirada dinámica, ya que que en la génesis y en la constitución del Cálculo como disciplina científica acontecieron diferentes sucesos, hechos y situaciones que han reflejado que las invenciones matemáticas. Las ideas, nociones, definiciones en Cálculo han sido producto de la inventiva de un tipo de pensamiento matemático que se ha fortalecido por cierta dinámica amparada en situaciones del cotidiano o en la resolución de situaciones propias de las exigencias de cada época.

La reflexión de la génesis del cálculo y las revisiones de las investigaciones relativas al pensamiento matemático avanzado (PMA) y los espacios poco explorados en la investigación en Cálculo, nos permitieron abordar una problemática desde cierta perspectiva teórica, y a su vez, ser analizado a la luz de un enfoque didáctico en Educación Matemática (EOS) que ofreciera ciertas bondades para el análisis del problema en cuestión. En este sentido se planearon las siguientes preguntas de investigación:

PI-1 ¿Qué reportan las perspectivas teóricas en Educación Matemática referente al pensamiento variacional y en qué se focalizan las investigaciones respecto a este pensamiento matemático?

PI-2 ¿Qué reporta la revisión bibliográfica de tipo histórica documental referente a la génesis y el desarrollo del cálculo en torno al pensamiento variacional, la variación y el cambio, entre otros aspectos?

PI-3 ¿Cómo se define el pensamiento variacional desde una concepción dinámica, y cómo se evidencia su presencia y su desarrollo?

PI-4 ¿Qué elementos aluden al pensamiento variacional emergente en estudiantes de cálculo inicial, y cómo se pueden describir desde una primera categoría de análisis didáctico del enfoque ontosemiótico?

Para dar respuesta a la pregunta de investigación antes señaladas nos propusimos el siguiente objetivo general de la investigación:

OG-1 Conocer los elementos que conforman el pensamiento variacional emergente de estudiantes universitarios, puestos en escena ante diferentes situaciones relacionadas con el cambio y la variación.

Con la finalidad de lograr este objetivo general nos propusimos objetivos específicos que fungieron como directrices de la investigación y cuyo propósito es que se fuesen logrando mediante el desarrollo de ciertas tareas en cada una de las etapas que fueron señaladas en el capítulo dos. A continuación presentamos apartados relativos al logro de cada uno de los objetivos específicos propuestos y su trascendencia en la respuesta de las preguntas de investigación que se plantearon en la investigación.

6.3. LOGRO DE LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN Y SU IMPLICANCIA EN LA REPUESTA A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Para concretar el objetivo general propuesto, y dar respuesta a las preguntas de investigación PI, PI2, PI3, PI4, se propusieron ciertos objetivos específicos, que a su vez fueron derivados de las preguntas de investigación, las cuales fueron concretizándose a lo largo de la investigación mediante ciertas acciones específicas que se realizaron en diferentes etapas de la investigación.

6.3.1 En relación a la pregunta de investigación 1(PE-1) y el objetivo específico 1(OE-1)

Nos propusimos responder en un primer momento de la investigación responder a la siguiente pregunta.

PI-1 ¿Qué reportan las perspectivas teóricas en Educación Matemática referente al pensamiento variacional y en qué se focalizan las investigaciones respecto a este pensamiento matemático?

Para concretizar esta pregunta de investigación planteamos el siguiente objetivo específico:

OE-1 Caracterizar de manera reflexiva las investigaciones relativas al pensamiento variacional, en particular aquellas que aportan distintos elementos de la emergencia de pensamiento variacional en distintos contextos y contenidos.

Las tareas desarrolladas antes y durante del proceso de investigación nos exigió la revisión pertinente y actualizada de literatura en Educación Matemática relativa al pensamiento matemático, al pensamiento matemático avanzado y al pensamiento variacional. En el primer capítulo de este trabajo ofrecemos un panorama de la revisión bibliográfica de los aspectos relativos al pensamiento matemático que han sido el soporte de esta investigación y han brindado pistas y espacios de investigación abiertos para desarrollar nuestro tema de investigación que hemos planteado. La revisión de las investigaciones relativas al pensamiento variacional y en la cual subyace el marco teórico de esta investigación nos proporciona con claridad la definición de pensamiento variacional, además de algunos aspectos que hemos considerado en este estudio. En las tareas desarrolladas en la primera fase de la investigación hicimos consultas a diferentes bases de datos (Springer, Eric, Redalyct) y a revistas especializadas en Educación Matemática (ENSEÑANZA DE LA CIENCIA, RELIME, BOLEMA, entre otras), además de los Anales de diferentes Congresos en Educación Matemática (ICME, RELME, CIBEM, CIAEM, SOCHIEM, entre otros). Realizada la revisión exhaustiva de las fuentes especializadas se categorizó los trabajos pertinentes al pensamiento variacional, presentados en el capítulo 1 en el apartado 1.4, desde el 1.4.1 hasta el 1.4.6 que fue desarrollado con detalle. La Información obtenida de la revisión realizada puso en escena tanto el panorama del pensamiento variacional como los espacios de investigación de este pensamiento matemático lo cual redundó en la delimitación de este tema de investigación que nos propusimos abordar.

El objetivo específico propuesto fue concretado en un alto porcentaje mediante las tareas realizadas, puesto que se realizó una búsqueda detallada que requirió de mucho tiempo además de la utilización de recursos de búsqueda que nos ofrecieron bibliografía adecuada para la temática desarrollada en esta investigación. Cabe señalar que se realizó bibliografía en otros idiomas diferentes al español, principalmente en portugués e inglés, puesto que este último idioma es utilizado en la mayoría de trabajos científicos especializados. Al concretarse el objetivo específico 1 en un alto porcentaje se da contestación a la pregunta de investigación 1 propuesta.

6.3.2 En relación a la pregunta de investigación 2 PI-2 y el objetivo específico 2 OE-2

En un segundo momento de la investigación realizamos una indagación de la génesis del cálculo y su desarrollo histórico y reflexionamos respecto a las diferentes etapas que plantean algunos historiadores matemáticos y los móviles que atendió cada etapa histórica de acuerdo a sus propios desafíos y focos de atención. En este sentido nos abocamos a reflexionar en la matemática griega cuáles fueron sus principales problemas y cuáles fueron las estrategias y maneras de abordarlos.

Cada etapa histórica del cálculo presentó algunos sucesos, hechos, personajes y métodos de abordaje y resolución de problemas los cuales presentamos con mayor detalle en el capítulo 3 en los apartados 3.2 y los sub apartados 3.2.1 al

3.2.5. La indagación realizada muestra que la variación y el cambio han estado implícita y es un aspecto referente en el análisis matemático desde la antigüedad hasta nuestros días. La pregunta de investigación 2 y el objetivo específico 2 se propusieron atendiendo a reflexionar a la naturaleza de distintos objetos matemáticos y distintas acciones cognitivas que concretaron en distintas ideas, objetos matemáticos que conocemos.

PI-2 ¿Qué reporta la revisión bibliográfica de tipo histórica documental referente a la génesis y el desarrollo del cálculo en torno al pensamiento variacional, la variación y el cambio, entre otros aspectos?

OE-2 Describir algunas etapas de la génesis y desarrollo del Cálculo relativas a la conceptualización de ideas, nociones, objetos matemáticos, en donde está involucrado el cambio y la variación.

Reflexionando en torno a la génesis del cálculo nos percatamos que en la primera etapa del desarrollo del cálculo, la idea de límite aparece a través de la exhaución en un solo contexto, el geométrico; sin embargo las ideas que utilizaron tanto Newton como Leibnitz, germinaron a partir de fenómenos en contextos físicos, geométricos y, en alguna medida algebraicos, siendo las ideas dinámicas las verdaderas gestoras de los trabajos de los padres del cálculo.

En la primera etapa del desarrollo del cálculo, la idea de límite aparece a través de la exhaución en un solo contexto, el geométrico; sin embargo las ideas que utilizaron tanto Newton como Leibnitz, germinaron a partir de fenómenos en contextos físicos, geométricos y, en alguna medida algebraicos, siendo las ideas dinámicas las verdaderas gestoras de los trabajos de los padres del cálculo.

En las otras etapas históricas abordadas en los otros apartados del capítulo 3 se muestra que la variación el cambio ya sea para seguir dividiendo, cuantificar, establecer relaciones entre magnitudes, resolver desafíos que implican movimiento de cuerpos, predecir y obtener nuevos estados han sido tónicas del quehacer de los matemáticos de las distintas épocas, siendo la cantidad, cuantificación de estados y de la cantidad misma aspiraciones de los distintos matemáticos a lo largo de los años. La perspectiva del pensamiento variacional que atiende esta investigación centra como uno de sus elementos principales el estudio de la variación y el cambio, como uno de los conceptos base que está presente en la mayoría de situaciones, contextos , sean estas de carácter matemático, realista o fantasista.

La indagación realizada en la segunda etapa de la tesis en diferentes fuentes bibliográficas que abordan la importancia de la génesis de los conceptos nos han desafiado a seguir indagando respecto a la importancia de los hechos, contextos, y sucesos que condicionaron la construcción de un concepto u objeto y su evolución en el tiempo a qué obedece. Con el trabajo exhaustivo como tareas de la segunda fase de la investigación hemos concretado en un porcentaje aceptable el OE-2 lo cual ha redundado en contestar al menos de manera parcial la PI-2 propuesta.

Cabe señalar que consideramos que la pregunta fue contestada de manera parcial ya que una de las limitantes es obtener de fuente directa todas las obras célebres de los matemáticos antiguos incluso en su lengua nativa, ya que sería lo ideal para obtener de primera fuente la génesis y su evolución en el tiempo, lo cual para desarrollarse de manera fidedigna debería traducirse por un especialista en lenguas nativas.

6.3.3 En relación a la pregunta de investigación 3 PI-3 y el objetivo específico 3 OE-3

En un tercer momento de la investigación, luego de la revisión del estado del arte del pensamiento variación y de lo histórico-epistemológico relativo al pensamiento variacional, adoptamos una perspectiva teórica construida sobre la base distintas investigaciones que nos brindaron elementos y diferentes aspectos, pero complementarios y convergentes para abordar el pensamiento variacional. Todo ello, nos aportó elementos teóricos consistentes para estudiar de manera holística el tema de investigación propuesto.

PI-3 ¿Cómo se define el pensamiento variacional desde una concepción dinámica, y cómo se evidencia su presencia y su desarrollo?

OE-3 Analizar en diferentes momentos de la investigación, algunos razgos distintivos que se podrían asociar a la presencia de pensamiento variacional desde una perspectiva dinámica.

Para concretar el objetivo específico propuesto nos adscrimos a la perspectiva de Vasco (2003, 2006) que ofrece una perspectiva dinámica del pensar matemático bajo ciertas acciones específicas y que se pone en evidencia de acuerdo a ciertas acciones específicas. En este sentido, el pensamiento variacional es concebido como una forma dinámica de pensar que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que cavarían en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (Vasco, 2003, p.6).

Para Vasco (2006) el objetivo fundamental del pensamiento variacional es la modelación matemática de procesos cotidianos y significativos a los estudiantes, donde puedan poner en escena, modelos que relacionen covariación de magnitudes. Vasco distingue dos momentos: el primero en el que se determina lo que varía, lo que permanece constante, se identifican patrones de regularidad de los procesos y, un segundo momento que requiere acciones cognitivas para la producción de sistemas mentales para reproducir covariaciones entre magnitudes. Para este autor, la cognición de cada sujeto ayuda a crear sistemas mentales, que a su vez ejecuta, revisa, refina y, de ser necesario descarta.

En esta última acción, se inicia un nuevo proceso de génesis de modelos. Desde esta mirada, los modelos mentales se afinan, y se convierten en representaciones mentales (Duval, 1999) los cuales son exteriorizados mediante representaciones semióticas que pueden ser palabras, dibujos, letras, números. Desde esta perspectiva del pensamiento variacional dialoga con las representaciones que sostiene Duval (1999), la cual designa a una representación como un sistema definido con ciertas reglas a lo que llama registros de representación semiótica(lengua natural, registro gráfico, registro algebraico), con el objetivo de hacerlo accesible a otros.

La revisión de las bibliografía relativa al pensamiento variacional ayudó a la construcción de la perspectiva teórica del pensamiento variacional que hacemos referencia en esta investigación. En este sentido, pensar variacionalmente desde este enfoque es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular. Se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía procesos de visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariación de las variables involucradas, manifestada en algún tipo de soporte material (registro ostensivo).

Otros autores han aportado elementos relativos a la visión de pensamiento variacional construida en esta investigación. En este orden de ideas, (Arcavi, 1999; Bishop, 1983; Carlson et. al, 2002; García, & Jiménez, 2015; Grozdev & Todorka, 2010; Torregrosa & Quesada, 2007; Zorn et. al, 2004) han sido algunos de los autores de los que se ha nutrido nuestra investigación y que fueron mencionados en el capítulo dos, apartado 2.2.1 de nuestra investigación.

El objetivo específico 3 fue concretado mediante las tareas y las distintas acciones, competencias cognitivas que fueron necesarias para discernir y construir una perspectiva teórica convergente en base a distintas visiones relativas al pensamiento variacional que ofreciera elementos viables, observables para ser analizado en diferentes instrumentos para ser puesto en escena en el aula. Las actividades planificadas y realizadas permitieran que se lograra el objetivo propuesto. La concreción del objetivo específico 3 propuesto redundó en la contestación de la pregunta de investigación 3 que mencionamos anteriormente.

También las acciones emprendidas complementadas con el enfoque ontosemiótico (EOS) proporcionaron elementos para el análisis cualitativo de las producciones estudiantiles.

6.3.4 En relación a la pregunta de investigación 4 PI-4 y el objetivo específico 4 OE-4

Las tareas que se propusieran para el logro de los objetivos demandaron una alta cuota de tiempo y de exigencia, ya que se hizo necesario la revisión de EOS y las bondades del mismo, como instrumento de aplicación de análisis didáctico a diferentes instrumentos. En esta etapa además de la recolección de la información obtenida en los instrumentos diseñados que propuso el profesor durante el semestre también realizamos el análisis de la información obtenida, a la luz del pensamiento variacional visto desde una primera categoría de análisis que propone en enfoque ontosemiótico. Las tareas planificadas para el logro de este objetivo demandaron mucho tiempo, tanto en la coordinación con el docente del curso, aplicación de instrumentos como en el procesamiento, análisis y conclusiones obtenidas en la información obtenida. A continuación presentamos la pregunta de investigación 4 y su respectivo objetivo de investigación 4.

PI-4 ¿Qué elementos aluden al pensamiento variacional emergente en estudiantes de cálculo inicial, y cómo se pueden describir desde una primera categoría de análisis didáctico del enfoque ontosemiótico?

OE-4 Analizar desde la primera categoría de análisis didáctico que propone EOS, cómo emergen distintos elementos de pensamiento variacional en diferentes instrumentos: prueba de diagnóstico, sesiones de estudio, y prueba evaluativa escrita.

En el capítulo 4, en los apartados 4.1 al 4.4 se mostraron con detalle cada uno de los instrumentos que el profesor diseñó e implemento durante el semestre en el curso de Cálculo. En el capítulo 5, en los apartados 5.1, 5.2 se presentó algunos elementos teórico-conceptuales del primer nivel de análisis del enfoque ontosemiótico utilizado en como herramienta cualitativa de fenómenos didácticos. En los apartados 5.3.1 hemos realizado desde una primera categoría de EOS, el análisis de cada uno de los instrumentos aplicados durante la investigación. En el capítulo 5 señalamos con mayor detalle los elementos teóricos del enfoque ontosemiótico que han utilizado para analizar una analizar una situación de aprendizaje particular.

En este enfoque se plantean diferentes categorías de análisis para comprender de manera sistémica el desarrollo de una tarea, una actividad didáctica en fase de diseño o en ejecución. Un primer nivel de análisis didáctico que es de interés en este trabajo atiende al reconocimiento de un sistema de prácticas que realizan los estudiantes de manera individual o grupal, ya sean estas mediadas por sus conocimientos previos o por otra entidad externa que puede ser de carácter institucional (curricular, bibliográfica, u otra).

Desde el EOS una práctica matemática, es una actuación o una manifestación (lingüística o no) con la intencionalidad de resolver algún problema intra o extra matemático, compartir una posible solución y validarla para extrapolarla a otras realidades. En esta práctica matemática intervienen objetos tangibles (ostensivos) y otros no tangibles (no ostensivos). Los primeros compuestos por el uso del lenguaje, símbolos, gráficos u otros, y los segundos referidos a la utilización de conceptos, propiedades, proposiciones, entre otros.

Consideramos relevante reflexionar respecto a cómo las prácticas matemáticas están influenciadas por la experiencia del individuo y cómo son comprendidas por éste, qué objetos matemáticos emergen de las mismas y cómo el objeto emergente adquiere un status derivado de las prácticas precedentes.

El primer nivel de análisis didáctico del EOS propone los elementos constituyentes primarios en los sistemas de prácticas (Godino, Batanero, & Font, 2007): a) Lenguaje (términos utilizados, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros de representación), b) Situaciones/problemas (descripción de la naturaleza del problema, tarea, ejercicio y si la situación hace referencia a un problema intra o extra matemático, y si este atiende a una situación realista o fantasista), c) Conceptos/Definiciones (Empleo o acercamiento a base teórica mediante el uso de definiciones, axiomas, teoremas, propiedades, etc.), d) Procedimientos (empleo de algoritmos, operaciones, técnicas, etc.), e) Argumentos (Sustento teórico explicitado para validar o explicar sus proposiciones y procedimientos).

Desde los elementos primarios constituyentes del primer nivel de EOS se analizaron las producciones estudiantiles obtenidas de los instrumentos aplicados, tanto individuales (prueba diagnóstico, prueba evaluativa sumativa), como grupales (sesiones de estudio).

El objetivo de investigación propuesto fue concretado en un porcentaje aceptable, ya que en la etapa de análisis de la información se evidenció que algunos elementos de la mirada sistémica del EOS no se evidenciaron completamente en lo que a pensamiento variacional se refiere con excepción de algunos elementos. Los estudiantes usan un lenguaje que involucra conceptos tales como variable, función, crecimiento, decrecimiento y otros términos que indican la emergencia de un pensamiento pre variacional, toda vez que las definiciones que manejan, son correctas. Las formas de argumentación de sus afirmaciones son más bien visuales y están en un nivel básico y contienen ciertos elementos dinámicos, sin embargo entrando en una etapa de argumentación formal, se ve disminuida la concepción dinámica mostrada en la etapa de visualización y, después de sus cálculos, no logran plasmar la concepción dinámica mostrada en la etapa anterior y sólo logran representar mediante fórmulas algebraicas las funciones que determinan.

En particular, los estudiantes no destacan en sus producciones la existencia de covariaciones, más bien los procesos, como los describen, son una secuencia discreta de estados que no se relacionan entre sí significativamente. Sin embargo, el uso del lenguaje y las correctas concepciones de los elementos previos que demuestran tener, sería una base importante para estimular el desarrollo del pensamiento variacional de manera formal.

En base a los resultado reportado en la concreción del objetivo parcialmente consideramos que la pregunta de investigación fue contestada de manera parcial y que se debe seguir indagando en el pensamiento variacional y su potenciación y el rediseño en el nivel medio de diversas actividades y contenidos de modo que se promueva el desarrollo de pensamiento matemático desde niveles iniciales de escolaridad.

BIBLIOGRAFÍA

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. Revista *EMA*, 8(1), 30-46.

Aparicio, E. (2003). Sobre la noción de discontinuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes de ingeniería en contextos de geometría dinámica. *Tesis de maestría no publicada, Cinvestav,* México.

Aparicio, E., & Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 7-30.

Arcavi, A. (1999). ... Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos? *Números,* (38), 39-56.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics,* 52(3), 215-241.

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica*. En Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 33-59). Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, Michelle. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 1(1), 40-55. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33510104.pdf.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education.

Azcárate, C. (1998). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 1(2), 235-240.

Bachelard, Gastón. (1981) *El nuevo espíritu científico.* México: Editorial Nueva Imagen.

Bagni, G. (2005) Historical Roots of limit notion. Development of its representation registers and cognitive development. Canadian Journal of Science, *Mathematics and Technology Education*, 5(4), 453-468.

Bishop, A. J. (1983). *Space and geometry*. Academic Press.

Blanton, M. (2010). *Early algebra*. In Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry: Proceedings of a Conference (p. 45). IAP.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: *Didactico/Didactic to Algebra Study (Vol. 7)*. Libros del Zorzal.

Bruner, J. S., & Linaza, J. L. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje (Vol. 1).* Madrid: Alianza.

Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). *Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional.*

Cabrera, L. (2009). El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato (Doctoral dissertation, tesis de maestría no publicada], Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México).

Cabrera, L., & Cantoral, R. (2011). La formación socioepistemológica del profesorado del nivel medio superior mexicano. Propuesta de partida para enfrentar el desafío.

Cantoral, R. (2000). *Pensamiento matemático avanzado:* Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis. R. Cantoral, R. F Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez, A. Garza. Ed. Trillas. México, 205-218.

Cantoral, R. (2004). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica.*

Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., & Imaz, C. (1990). Calculus-Análisis: Una revisión de las Investigaciones recientes en Educación. En *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (pp. 55-69).*

Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *42*(14), 3.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics,* 53(3), 255-270.

Cantoral, R., Molina, J. G., & Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education,* 352-378.

Castaño, L., García, J., Luján, M., Medina, C., & Ruíz, J. (2008). *Las situaciones de variación y cambio como herramienta para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático desde los primeros grados de escolaridad.*

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. *Del saber sabio al saber enseñado, 3.*

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior,* 15(2), 167-192.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles* (Doctoral dissertation).

Cornu, B. (1986). Les principauxobstacles a l'apprentissage de la notion de limite. Bulletin Dubinsky, E. (1997). *Some Thoughts on a First Linear Algebra Course*, in D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins, (Eds). *Resources For Teaching Linear Algebra, MAA Notes,* 42, pp. 85 - 106.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153 - 166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cubero, M., Rubio, D., & Felipe, A. B. (2005). Cultura y cognición. La naturaleza heterogénea del pensamiento. Avances en psicología latinoamericana, 23(1), 119-140.

Díaz, M. (2009). El método de exhausión. Revista Alternativa. Número 19. México.

Dreyfus, T. (1990). *Advanced mathematical thinking.* En Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds), *Mathematics and cognition.* Cambridge: Cambridge University Press, 113-133.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. *The nature of mathematical thinking*, 253-284.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática.* 8(3), 24 – 41.

Dubinsky, E. (1997). *Some Thoughts on a First Linear Algebra Course*, in D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins, (Eds). *Resources For Teaching Linear Algebra, MAA Notes*, 42, pp. 85- 106.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle.(Original publicado en 1995).

Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M., Müller, D., Hecklein, M. y Henzenn, N. (2008). *Estudio del comportamiento de la función a partir de la derivada.* Análisis de una secuencia didáctica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 21, 466 – 476. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Gregorini, M. I., Müller, D., & Henzenn, N. (2010). *Variables, funciones y cambios:* ¿qué conocen nuestros alumnos?.

Engler, A., Vrancken, S. y Müller, D. (2011). Formación a distancia. Las concepciones de los docentes con relación a ideas variacionales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 24, 1027-1036. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica:* Un estudio de la variación y el cambio. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrante, J. (2009). El Análisis Matemático que nos enseñaron nuestros maestros. Departamento de Ciencias Básicas. *Universidad Tecnológica Nacional.* Argentina.

Ferreras, A. P. (2003). *Cognición y aprendizaje:* fundamentos psicológicos.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics,* 82(1), 97-124.

Giménez, C. A., & Machın, M. C. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Edición Especial: Educación Matemática,* 135.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 14(3), 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for *research in mathematics education*. InMathematics education as a research domain: *A search for identity* (pp. 177-195). Springer Netherlands.

Godino, J. (2003). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Documento de trabajo del curso de doctorado" Teoría de la educación Matemática".* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). *The onto-semiotic approach to research in mathematics education.* ZDM, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D. (2010). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica. *Documento de trabajo del curso de doctorado “Teoría de la educación Matemática”.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www. ugr. es/~ jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm. pdf. Visitado el, 15(10), 2010.

Godino, J. D., (2011) Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Actas de la XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME),* Recife (Brasil).

Gómez, J. (2009). La resolución de problemas en el pensamiento matemático avanzado: El caso de la elaboración de significados de la definición de espacio topológico.

González, R. (1999*). La derivada como una organización de las derivadas sucesivas:* Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación. *Tesis de maestría no publicada*. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. México D.F. México.

Grozdev, S., & Todorka, T. (2010). *Development of variational thinking skills in programming teaching.*

Guzmán, M. D. (1994). ¿Para qué el pensamiento matemático en nuestra cultura? Uno: *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 1(1), 15-23.

Guzmán, M. D. (2006). Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.

Hernández, S. R., Fernández Collado, C. & Baptista Lucio, P.(2010).*Metodología de la Investigación*. Perú: Mc Graw Hill.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnologıa. Edición Especial:
Educación Matemática, 213.

Hjalmarson, M. A. & Lesh, R. (2008). Design research. Engineering, systems, products, and processes for innovation. En L. D. English (Ed.) Handbook of international research in mathematics education (pp. 520 – 534)

Isoda, M., (1996). The development of the language of function: An Application of Van Hiele's levels 20th. Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, 105 – 112, Valencia – España, july 8 – 12.

León, A. C. (2006). Cognición humana: mente, ordenadores y neuronas. Fundación Ramón Areces.

Lesh, R. & Sriraman, B. (2005). Mathematics Education as a design science. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, (International Reviews on Mathematical Education),* l37 (6), 490-505.

Legrand, M. (1993) "*Debat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l´analyse", Repéres IREM,* 10, 123-159.

Marmolejo Correa, D. (2014). Desarrollo de la competencia matemática de razonamiento en el pensamiento variacional.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically. AMC,* 10, 12.

Maury, E. P. G. Carcamo S. (2012). *Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5 grado de educación básica primaria.*

Medrano, I., & Fan, L. R. P. (2016). Estadios de Comprensión de la Noción Matemática de Límite Finito desde el Punto de Vista Histórico. *REDIMAT*, *5*(3), 287-323.

Mendoza, M. (2013) Significando el Paso al Límite en Estudiantes que Inician Cálculo. *Tesis de Maestría no publicada.* Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio

Molfino, V. (2010). Procesos de institucionalización del concepto de límite: análisis socioepistemológico. *Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN.* México.

Piaget, J., & Cevasco, M. T. (1978). *El pensamiento matemático.* Paidós.

Piaget J. Y Inhelder B. (1975). *Génesis de las Estructuras Lógicas Elementales. Clasificaciones y Seriaciones*. Guadalupe, Buenos Aires.

Polya, G. (1945). How to Solve It Princeton University Press. Princeton, NJ.

Pino-Fan, L. (2014). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Granada: Universidad de Granada

Radford, L. (2006). Semiótica cultural y cognición. *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica.* México.

Radford, L., & André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 12(2), 215-250.

Ramírez, Eliseo (2013). *Epistemologías de la función derivada.* En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 15-22). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Reséndiz, E., Cantoral, R. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, julio, 133-154.

Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9(3), 435-458.

.

Reséndiz, E. (2010). El discurso en la clase de matemáticas y los acuerdos sociales. La noción de variación. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13(4), 99-112.

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios del cálculo* (Doctoral dissertation, Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México).

Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive science and mathematics education*. Psychology Press.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de límite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 6 (1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies in Mathematics,* 18(4), 371-397.

Sierpinska, A. (1988). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique, Actes du Colloque: Construction des savoirs: *obstacles et conflits,* Montréal, CIRADE

Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 170-176).

Tall, D. (1991). Advanced mathematical thinking (Vol. 11). Springer Science & Business Media.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. Handbook of research on mathematics teaching and learning, 495-511.

Tall, D. (2002). The psychology of advanced mathematical thinking. *In Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Springer Netherlands.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.
Educational Studies in Mathematics Vol. 12/2, pp. 151-169.

Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,10(2),* 275-300.

Vasco, C. E. (2003). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* In Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau (Vol. 9).

Vasco, C. E. (2006). Didáctica de las matemáticas: *artículos selectos*. U. Pedagógica Nacional.

Vergel Causado, R. (2015). Desarrollo Del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Grado Noveno.

Villarreal, M. E. (2000). El pensamiento matemático de estudiantes universitarios de cálculo y tecnologías informáticas. *Revista de Educación Matemática,* 15(1).

Villa-Ochoa, J. A., & Vahos, M. R. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação matematica pesquisa*, *12*(3)

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. Tecné, Episteme y Didaxis, 31, 9-25.

Vrancken, S., Engler, A., Müller, D., & de Santa Fe, P. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Revista Premisa*, 36-45.

Warren, E., Miller, J., & Cooper, T. J. (2011). An exploration of young students' ability to generalise function tasks. In Proceedings of the 34th Annual Conference of the *Mathematics Education Research Group of Australia (MERGA)* (pp. 752-759). MERGA Inc.

Witt, M. (2010). Cognición en el procesamiento matemático de los niños: psicología en el aula. Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 8(22), 945-970.

Wittman, E. C. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational studies in Mathematics,* 29(4), 355-374.

Yemen-Karpuzcu, S., Ulusoy, F., & Işıksal-Bostan, M. (2015). Prospective Middle School Mathematics Teachers' Covariational Reasoning for Interpreting Dynamic Events During Peer Interactions. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 1-20.

Zorn, P., Judson, T., Kota, O., Okabe, T., Kiuchi, T., & Becker, J. (2004). TSG 3: *The Teaching and Learning of Calculus*. In Proceedings of the Ninth *International Congress on Mathematical Education* (pp. 300-302). Springer Netherlands.

ANEXOS

ANEXO 1

PRUEBA DE DIAGNÓSTICO

Estimados estudiantes, la presente prueba es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del cuerpo de la Tesis de Doctorado en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Mg. Marvin R. Mendoza Valencia, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad de Los Lagos, sede Santiago de Chile, bajo la tutoría del Profesor Dr. Carlos Cabezas M.

Le agradecemos resolver los problemas planteados, con el máximo de acuciosidad y poniendo en juego, si es posible, diferentes estrategias dentro del marco de sus conocimientos y originalidades.

Por favor, lea las siguientes solicitudes especiales:

Realice todos los cálculos que estime necesarios.

Deje plasmado en la hoja de respuestas todo lo que realice. No borre lo realizado, aunque le parezca incorrecto.

Si considera que algo es erróneo y no debe ser considerado en la revisión, sólo enmárquelo y advierta que lo es.

Garantizamos la confidencialidad de la prueba y el uso de la misma para el propósito que la investigación persigue.

SU APORTE SERÁ MUY VALIOSO Y AGRADECEMOS DE MANERA MUY

ESPECIAL SU PARTICIPACIÓN

Problema 1 La figura que se muestra a continuación, está construida mediante una sucesión de hexágonos regulares construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados.

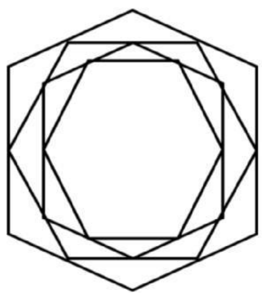


Figura 1

a. Haga todos los comentarios que considere pertinentes si el proceso de construcción de la figura continúa indefinidamente.
b. Agregue otros comentarios que estime pertinentes, si supone que el lado del primer hexágono de la figura mide 1 metro.

Problema 2 La población de cierta especie evoluciona en el tiempo de acuerdo al modelo representado por la fórmula:

$f(t) = 5 + 3^{-t}$

Haga un análisis de la evolución de la población

.

Problema 3. Se presenta un modelo matemático que corresponde a una función racional, expresada en un registro algebraico, $A(t) = \frac{6t}{t+9}$ litros por hora, la cual está asociado a cierto estanque que tiene capacidad para contener 6000 litros de agua, e inicialmente el estanque está vacío y se vierte agua en él a razón $A(t)$. La tarea para los estudiantes consiste en determinar:

a) ¿Cuánto tiempo deberá esperar para que el agua vertida supere los 5.000 litros?

b) ¿Cuándo llegará a llenarse el estanque?

Problema 4 Relacione cada una de las siguientes gráficas con el texto que mejor describe la información proporcionada por ésta. Si alguna de las situaciones planteadas no se refleja en alguna de las gráficas que se le presentan, haga una gráfica que a su criterio represente la situación. Además, explique la razón del por qué considera cada caso.

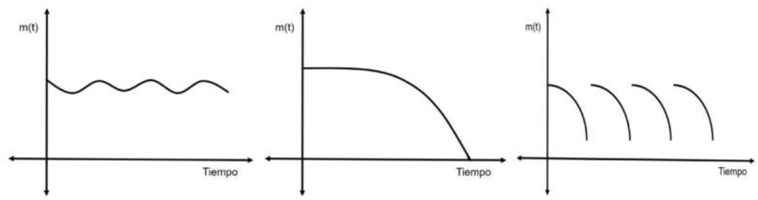


Figura 2

a) La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de una inyección.
b) La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de píldoras cada cierto tiempo.
c) La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de una mezcla del medicamento con suero y vía intravenosa.

Problema 5 Se presentan 7 frascos y 6 gráficas. Asocie una gráfica con cada frasco y explique el criterio utilizado para ello.

Si considera que, de acuerdo al criterio utilizado, alguna (s) de las gráficas no puede (n) asociarse a frasco alguno, o vice versa, puede diseñar un frasco o proponer una gráfica para completar las asociaciones. En estos casos, escriba las justificaciones pertinentes.

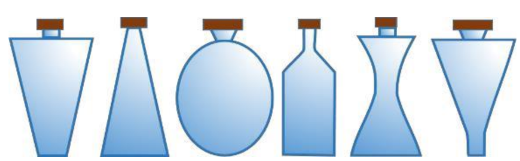


Figura 3

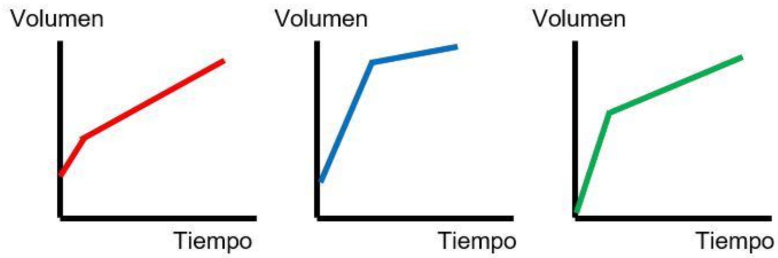


Figura 4

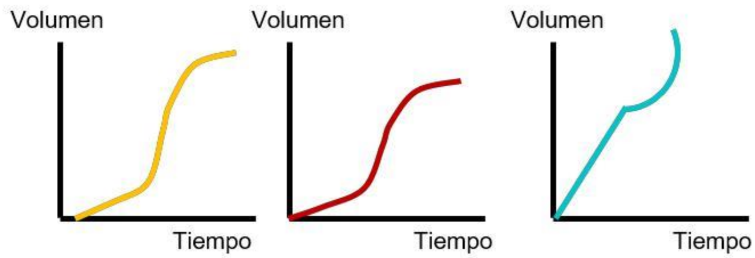


Figura 5

Problema 6 Bosqueje una gráfica que represente cada una de las siguientes situaciones:

a) La altura de los rebotes de una pelota que cae desde la azotea de una casa con respecto al tiempo.

b) La altura con respecto al tiempo de izar manualmente una bandera en una asta.

Problema 7 Seleccione el texto que mejor describe la siguiente gráfica. Presente argumentos para justificar su selección o rechazo de cada texto.

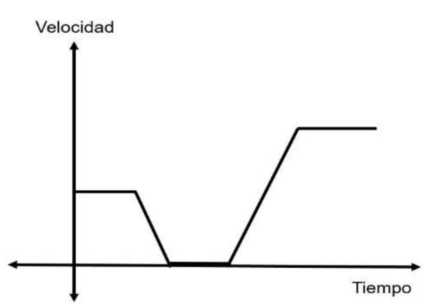


Figura 6

a) Ricardo salió a caminar cerca de una pendiente y le tomó menos tiempo bajar por el lado más bajo que por el más alto.
b) Maribel manejaba su coche a cierta velocidad, un policía le dijo que se detuviera y después de recibir una infracción y de que el policía se retiró, ella manejó más rápido, llegó a una velocidad mayor a la que venía circulando y mantuvo esa velocidad durante cierto tiempo para recuperar el tiempo perdido por la infracción.
c) En un tanque había cierta cantidad de agua que quedó de la noche anterior. Pedro se empezó a bañar e hizo que la velocidad del flujo de salida de agua se redujera a cero. Tiempo después llegó el agua al tanque hasta que quedó lleno.
d) Beatriz vive en una casa con desniveles. Se encuentra sentada en la cocina de su casa durante cierto tiempo. Sube las escaleras hacia la sala de su casa y se queda viendo la televisión durante algún tiempo, finalmente sube las escaleras hacia su recámara y se queda dormida.

ANEXO 2

SESIÓN DE ESTUDIO 1

Estimados estudiantes, la presente prueba es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del cuerpo de la Tesis de Doctorado en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Mg. Marvin R. Mendoza Valencia, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad de Los Lagos, sede Santiago de Chile, bajo la tutoría del Profesor Dr. Carlos Cabezas M.

En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión de su grupo, considerando que los errores son parte importante en este proceso. Por favor no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

Nombre de los integrantes del equipo:

1. ____
2. ____
3. ____
4. ____

PRIMERA PARTE

Las imágenes que se muestran a continuación se encuentran con frecuencia en la naturaleza. Se trata de encontrar en ellas, propiedades que puedan ser interpretadas como regularidades matemáticas (geométricas, algebraicas o aritméticas). Es decir comportamientos que se “repiten de alguna forma” en el objeto de observación. Estas interpretaciones sirven para elaborar modelos matemáticos mediante los cuales se pueden estudiar sus propiedades. Descubra el máximo de propiedades de los objetos que se muestran y haga una lista de ellas.

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

SEGUNDA PARTE

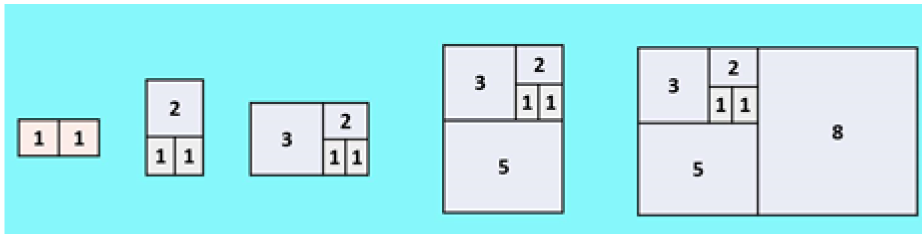


Figura 5

¿Hay propiedades que sean comunes a todas las imágenes observadas en la primera parte del trabajo?

¿Qué tienen en común? Comente con su grupo de trabajo.

¿Tienen propiedades que se puedan expresar en términos matemáticos? ¿Cuáles?

En la figura 5, se muestra una sucesión de rectángulos ¿tiene alguna relación con las figuras 1, 2, 3 y 4?

Si esta sucesión de rectángulos continúa indefinidamente ¿Cuál es el rectángulo siguiente?

Considerando que la sucesión sea infinita, exprese en lenguaje corriente un método para seguir construyendo cada rectángulo de la sucesión.

¿Se puede asociar alguna sucesión de números a la sucesión de rectángulos?

TERCERA PARTE

1. Escriba los primeros 15 términos de cada una de las sucesiones encontradas como respuesta a la pregunta anterior.
2. Con cada una de las sucesiones encontradas como base, construya una nueva sucesión de la siguiente manera: los términos de la nueva

sucesión se determinan dividiendo cada término de la sucesión base por el término anterior.

3. Analice cuidadosamente las sucesiones construidas ¿Hay alguna sucesión "interesante"? ¿Cómo podría llamar a la propiedad que la hace interesante?
4. Exprese las "propiedades" interesantes de manera formal desde el punto de vista del cálculo.

ANEXO 3

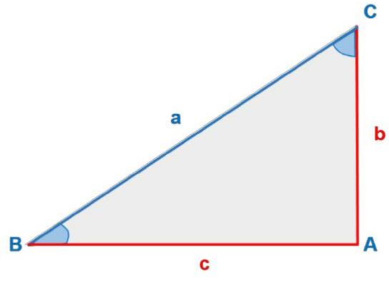
SESIÓN DE ESTUDIO 2

Estimados estudiantes, la presente prueba es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del cuerpo de la Tesis de Doctorado en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Mg. Marvin R. Mendoza Valencia, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad de Los Lagos, sede Santiago de Chile, bajo la tutoría del Profesor Dr. Carlos Cabezas M.

En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión de su grupo, considerando que los errores son parte importante en este proceso. Por favor no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

2.1 Inspirado en las siguientes imágenes, cree una situación problema que involucre funciones trigonométricas.

2.2 De un triángulo rectángulo ABC, se conocen las longitudes b y c de los respectivos lados.



Describa la variación del ángulo B en los casos siguientes:

c disminuye

c crece

Describa la variación del ángulo C en los mismos casos anteriormente considerados.

Describa las posibles variaciones del triángulo en caso que ambos lados, b y c, varían simultáneamente.

¿Qué relación o relaciones algebraicas puede establecer entre los distintos elementos del triángulo?

Determine el valor de las funciones seno, coseno y tangente en los ángulos del triángulo dado, si $b = 3$ y $c = 4$

Imagine una situación real en que las situaciones descritas puedan suceder.

Estudie todas las posibles variaciones de los ángulos del triángulo y combinaciones de ellas (incluso de A), y describa el efecto producido por éstas, sobre los otros ángulos.

¿Qué efecto tiene una variación de B, sobre el valor de las funciones trigonométricas evaluadas en los otros ángulos?

¿Qué sucedería con las funciones trigonométricas en los otros ángulos si el ángulo A varía dejando de ser recto?

Cuando el ángulo C está aumentando ¿Qué le ocurre al ángulo B?

¿Qué sucede en el caso anterior, con las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente del ángulo B, si el ángulo A comienza a aumentar (disminuir) dejando de ser recto?

ANEXO 4

SESIÓN DE ESTUDIO 3

Estimados estudiantes, la presente prueba es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del cuerpo de la Tesis de Doctorado en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Mg. Marvin R. Mendoza Valencia, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad de Los Lagos, sede Santiago de Chile, bajo la tutoría del Profesor Dr. Carlos Cabezas M.

Recuerde que deben entregar un informe grupal escrito del trabajo realizado. El informe debe representar claramente las ideas, la discusión e intentos de solución surgidas en la sesión. Escriba todo y no borre lo escrito, aunque considere que es erróneo. En el esfuerzo desarrollado en búsqueda de soluciones para las situaciones planteadas, nada es erróneo, todo es un buen intento.

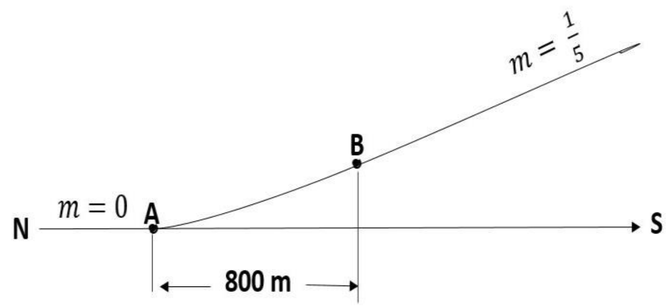
Nombre de los integrantes del equipo:

1. ____
2. ____
3. ____
4. ____

Situación 1. Una carretera con dirección norte- sur en todo su trayecto, se encuentra sin pavimento en un tramo de 800 metros entre un punto

A y un punto B. antes del punto A la carretera es horizontal y, después de B, tiene una subida en línea recta con una inclinación de 20° (es decir, una pendiente de 1/5).

Si desea pavimentar de modo que en este trecho la carretera tenga la curvatura de una parábola, describa algebraicamente la parábola.



Situación 2. Los puntos de inflexión del grafico de una función son aquellos puntos donde el gráfico, desde un punto de vista geométrico, cambia de cóncavo a convexo o de convexo a cóncavo ¿Cómo lo describiría desde un punto de vista variacional? ¿Cómo describiría el movimiento de un automóvil cerca de un punto de inflexión de su trayectoria? ¿Podría utilizar la derivada de una función para detectar sus puntos de inflexión? ¿Por qué?

Situación 3. Sean dos funciones f y g, son tales que

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 0 \ y \ \lim_{t\to 0} g(t) = 0$$

¿Qué puede afirmar de ella si $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)} = 0$? ¿Y si $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)} = 1$?

¿Y si $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)} = \infty$?

De ejemplos para ilustrar cada caso. En cada caso, haga una comparación de tipo geométrico y de tipo variacional de las funciones involucradas.

ANEXO 5

PRUEBA DE CÁLCULO

Estimados estudiantes, la presente prueba es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del cuerpo de la Tesis de Doctorado en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Mg. Marvin R. Mendoza Valencia, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad de Los Lagos, sede Santiago de Chile, bajo la tutoría del Profesor Dr. Carlos Cabezas M.

PROBLEMA 1.

Dada la función f de ecuación $f(x) = 2x - x^2$. Determine en qué punto, la recta tangente es paralela a $x + y = 3$. Además, determine la ecuación de la recta encontrada. Represente en la manera que usted considere adecuada, los objetos utilizados

PROBLEMA 2.

Un ave migratoria que vuela en dirección norte – sur es observada por un observador que registra su trayectoria. En un tiempo, el ave alcanza una altitud de 1500 metros, justo después de haber seguido por unos instantes, una trayectoria ascendente en línea recta con pendiente $\boldsymbol{m}$**.** En el mismo tiempo**,** el ave queda oculta por una nube, apareciendo nuevamente a la vista del observador después de $\boldsymbol{T}$ segundos, siendo su altitud, en este instante, la misma que en y su dirección, ascendente en línea recta, con la misma pendiente $\boldsymbol{m}$**.** (ver figura demostrativa).

Imagine dos posibles recorridos para el ave durante el intervalo de tiempo
$[t_{0,} t_0 + T]$. Coméntelos desde un punto de vista variacional.

Suponga que, en el caso ya descrito, $m = 1$, $t_0 = 0, T = 2\pi$. Describa una posible trayectoria del ave empleando una función definida en el intervalo $[t_{0,} t_0 + T]$ de modo que la trayectoria resulte derivable en un intervalo
$(t_0 - \varepsilon, t_0 + T + \varepsilon)$, siendo ε un número positivo pequeño.

Recuerde justificar todas sus confirmaciones.

PROBLEMA 3. Un barco se propone viajar en línea recta desde el puerto A al puerto B, que se encuentra a 150 km, al zarpar se desvía 15° de su ruta y viaja 50 kilómetros, antes de descubrir su error ¿Cómo debería corregir la dirección que lleva en ese momento y qué distancia tendrá que viajar para llegar a su destino?
Haga un análisis de la variación de la distancia recorrida después de corregir el rumbo, en función de la distancia recorrida en la dirección equivocada.