UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SIGNIFICADOS PRETENDIDOS POR EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS CHILENO SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Tesis Magíster

Yocelyn Elizabeth Parra Urrea

Director: Dr. Luis Roberto Pino Fan

Santiago, Chile 2015

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SIGNIFICADOS PRETENDIDOS POR EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS CHILENO SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Tesis de Magíster presentada por **Yocelyn Elizabeth Parra Urrea** dentro del Programa de Magíster en Educación Matemática para aspirar al grado de **Magíster en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos**, dirigida por el **Dr. Luis Roberto Pino Fan,** académico de la Universidad de Los Lagos.

Yocelyn Elizabeth Parra Urrea

Dr. Luis Roberto Pino Fan

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SIGNIFICADOS PRETENDIDOS POR EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS CHILENO SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Esta Tesis de Magíster ha sido desarrollada en el marco del Proyecto de Investigación sobre formación de profesores R02/15 "Evaluación y desarrollo de competencias didáctico-matemáticas de futuros profesores de enseñanza media" de la Universidad de Los Lagos.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por acompañarme en este proceso y darme la fortaleza y entereza de enfrentar diversos desafíos.

A mis padres, Luis Parra y Laura Urrea por su apoyo incondicional, por ser los grandes pilares de mi vida, porque a pesar de la tristeza de distanciarnos incentivaron mi crecimiento personal y profesional. Gracias por disfrutar mis logros, por acompañarme en los momentos de dificultad y por infundirme su fortaleza y perseverancia. Gracias por el cariño, preocupación y apoyo para lograr todas y cada una de mis metas y anhelos.

A mi hermano, Alfredo Parra por su cariño, disposición y apoyo incondicional, por acompañarme durante 26 años en todos los momentos importantes de mi vida.

A ti Carlos, por ser parte importante de mis logros, por estar conmigo en los momentos en que el estudio y el trabajo ocuparon mi tiempo y esfuerzo, por tus consejos, comprensión y amor, por tu cariño en los momentos de dificultad, por compartir mis alegrías y ser una de mis principales motivaciones. A ti amor, gracias por tu compañía.

Al Dr. Luis Pino Fan por su apoyo en la dirección y realización de este proyecto de investigación. Gracias por su dedicación, paciencia y generosidad al momento de compartir y transmitir su experiencia y amplio conocimiento. Gracias por ser una excelente persona, por sus sabios consejos, por creer y confiar en mí.

A mi familia por el apoyo y preocupación desde el momento que emprendí este importante desafío. A mis amigos Priscilla Olivares y Wilson Gordillo por su compañía y apoyo durante este proceso que implicó sacrificio pero también experiencias valiosas y crecimiento profesional. A Rodrigo Quezada por su constante preocupación y apoyo al inicio de este proceso. A todos ellos gracias por su amistad.

Finalmente quisiera agradecer a la Universidad de Los Lagos y a los Académicos e investigadores del programa de Magíster en Educación Matemática, por su acogida, valioso apoyo y compromiso durante todo el proceso.

RESUMEN

En esta investigación presentamos la reconstrucción del significado holístico de la noción de función, para ello hemos realizado una revisión de los estudios histórico-epistemológicos-didácticos que se han desarrollado en relación a este objeto matemático. Así mismo, con la ayuda de algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática hemos caracterizado el significado pretendido por el currículo chileno a partir de las prácticas matemáticas propuestas tanto por los programas de estudio como por los libros de texto en los niveles de octavo básico a cuarto medio. El propósito de este estudio es evaluar la representatividad de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función respecto del significado holístico de referencia de dicha noción. Para lograr el objetivo central de la investigación el estudio se llevó a cabo en seis fases: 1) Estudio sistemático de tipo histórico-epistemológico para identificar las configuraciones epistémicas que llevan asociado un significado parcial del objeto función; 2) Organizar los significados parciales para la reconstrucción del significado holístico de la noción de función; 3) Estudio y caracterización sobre el tipo de configuraciones epistémico-didácticas propuestas por los programas de estudio cuando abordan la noción de función; 4) Estudio y análisis sobre el tipo de configuraciones epistémico-didácticas desarrolladas por los libros de texto cuando abordan la noción de función; 5) Estudio del vínculo entre los significados pretendidos por los planes de estudio, con los significados pretendidos por los libros de texto, con la finalidad de determinar los significados sobre la noción de función, expuestos por el currículo chileno; y 6) Estudio de la correspondencia entre los significados pretendidos por el currículum chileno respecto del significado holístico de referencia sobre la noción de función. Este estudio nos permitirá evaluar la representatividad y riqueza matemática de los significados pretendidos por el currículum chileno. Los resultados de nuestra investigación aportan nuevos conocimientos respecto a la caracterización de los conocimientos que los futuros profesores deberían tener para gestionar idóneamente los aprendizajes sobre la noción de función con sus futuros estudiantes.

ABSTRACT

This research presents the reconstruction of the holistic meaning of the notion of function, for this we have conducted a review of the didactic-epistemological-historical studies that have been developed in relation to this mathematical object. Also, with the help of some theoretical tools from ontosemiotic approach to knowledge and mathematics instruction we have characterized the meaning intended by the Chilean curriculum from mathematics practices proposed by the curricula and textbooks in levels eighth grade to high school seniors. The purpose of this study is to evaluate the representativeness of the meanings intended by the Chilean math curriculum on the notion of function with respect to the reference holistic meaning of that notion. To achieve the central objective of the research, the study was carried out in six phases: 1) Systematic study of historical- epistemological nature to identify epistemic configurations that are associated with a partial meaning of the function object; 2) Arrange the partial meanings for the reconstruction of the holistic meaning of the notion of function; 3) Study and characterization of the type of epistemic-didactic configurations proposed by the curriculum when they approach the notion of function; 4) Study and analysis on the type of epistemic-didactic configurations developed for textbooks when they approach the notion of function; 5) Study of the link between the meanings intended by the curriculum with the meanings intended by the textbooks, in order to determine the meanings of the notion of function exposed by the Chilean curriculum; and 6) Study of correspondence between the meanings intended by the Chilean curriculum about the holistic meaning of reference on the notion of function. This study will allow us to assess the representativeness and mathematical richness of meaning intended by the Chilean curriculum. The result of this research provides new insights regarding the characterization of knowledge that future teachers should ideally have to manage learning about the notion of function with their future students.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN GENERAL

La noción de función, como objeto matemático básico y unificador, es considerada uno de los conceptos más importantes dentro de la matemática. Su estatus y presencia dentro del currículo actual chileno otorga a este objeto matemático gran relevancia en distintos ámbitos científicos, conduciendo la atención hacia el análisis de sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Diversos estudios teóricos han reportado una variedad de dificultades en su aprendizaje, impidiendo que los estudiantes logren apropiarse, comprender y dar significado a la noción de función. La comprensión de este objeto matemático es fundamental, dado que opera sobre otros objetos matemáticos y además presenta una utilidad práctica en la resolución de problemas y en la modelación de fenómenos.

La noción de función, ha sido objeto de especial atención en distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitivas relacionadas a las dificultades que poseen los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que involucran el objeto matemático. Otro tipo de cuestiones son las relacionadas a los procesos instruccionales que explicitan dificultades asociadas a la enseñanza-aprendizaje de la noción de función, además de estrategias y alternativas para su enseñanza. En este sentido, el interés de esta investigación es identificar la representatividad de los significados pretendidos por el currículo chileno respecto del significado holístico de referencia. Esto con el propósito de avanzar en la caracterización de los conocimientos que requieren los profesores de matemática para la enseñanza idónea de la noción de función.

El trabajo que a continuación se presenta, se encuentra estructurado en cuatro capítulos, a través de los cuales se va obteniendo y logrando el propósito de esta investigación. En el Capítulo 1 de antecedentes, hemos realizado un recorrido histórico-epistemológico de la noción de función que posteriormente ha permitido la reconstrucción del significado holístico del objeto matemático. Además se ha indagado en la literatura sobre la problemática que subyacen los procesos de enseñanza-aprendizaje de la función. En este primer capítulo nos fue posible plantear una aproximación a las preguntas de investigación que guiarán nuestro estudio. En el Capítulo 2, se recogen las nociones teóricas y metodológicas que utilizamos a lo largo de nuestra investigación, principalmente el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2007). Una vez presentadas dichas nociones teóricas y metodológicas fundamentales para el entendimiento del objetivo general, se proponen las preguntas y objetivos de investigación. El Capítulo 3, versa sobre la caracterización y análisis del significado pretendido por el currículo nacional chileno, para lo cual se utilizan herramientas teóricas del EOS. Finalmente en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones y se da respuesta a las preguntas de investigación, mediante la descripción de establecer en qué medida se cumplieron los objetivos específicos planteados. En este último capítulo se plantean las principales aportaciones del estudio.

CAPÍTULO 1

Área Problemática y Antecedentes

1.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos una revisión general de las investigaciones realizadas en el área de la Didáctica de la Matemática relacionadas con el problema de investigación que nos concierne: *la representatividad del significado pretendido por el currículo chileno respecto del significado de referencia del objeto matemático función*. Dichas investigaciones nos han orientado para cumplir con el propósito de nuestro estudio.

El capítulo está organizado en tres grandes apartados. En el primero de ellos presentamos un recorrido histórico-epistemológico sobre la noción de función. Posteriormente en un segundo apartado hemos descrito las principales problemáticas en torno a las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático función. Finalmente realizamos una aproximación al problema de investigación.

1.2. ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

El objeto matemático *función* es el resultado de numerosas generalizaciones realizadas, a través de una evolución de más de 2000 años. A continuación se expone un estudio histórico-epistemológico de la noción de función.

1.2.1. La función como correspondencia

Se entiende por Matemática Antigua a aquella que se desarrolló en las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India. Durante la época antigua aun cuando la idea abstracta de variable no existía comienzan a desarrollarse manifestaciones que implícitamente contienen la noción de función. Diversas evidencias de la época como marcas sencillas en restos óseos conllevaron a la idea de contar, generando una *correspondencia* entre un conjunto dado de objetos y una secuencia de números para contar. Así es que la noción de función tiene sus raíces en el desarrollo del concepto de número (Sastre, Rey & Boubée, 2008).

Durante la época de los babilónicos (2000 a. C. – 600 a. C.), se registraron tablas y papiros que contienen información relevante respecto de los conocimientos matemáticos de estos pueblos.

Los matemáticos babilónicos estaban interesados en los cálculos astronómicos en los que realizaron una compilación de las efemérides del sol, de la luna y los planetas. Estudiaron problemas de variaciones continuas, tales como la luminosidad de la luna en intervalos de tiempo iguales o los períodos de visibilidad de un planeta en relación con el ángulo que éste forma con el sol. Utilizaban en sus cálculos tablas sexagesimales de cuadrados y de raíces cuadradas, de cubos y de raíces cúbicas, otras contienen las potencias sucesivas de un número dado, de forma análoga a nuestras actuales tablas de antilogaritmos. También se han encontrado tablas de valores de $n^2 + n$ para valores naturales de n. Conocían la suma de la progresión geométrica $1 + 2 + 2^2 + ..$, para sucesivos términos, así como la suma de la serie de los cuadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$ para distintos valores de n. Estas tablas están dispuestas en dos columnas, de forma análoga a las tablas de valores que acostumbran a construir nuestros estudiantes para cualquier función $f(x)$ (Ruiz, 1998).

De esta manera el desarrollo de la noción de función surge implícitamente en forma de correspondencias numéricas definidas por operaciones aritméticas. Durante esta época no se utilizaban letras para representar cantidades variables, los mismos términos como anchura, longitud, área y volumen servían para tal propósito (2 longitud + 3 longitud = 5 longitud).

No se puede asegurar que los babilónicos expresaran sus resultados de manera general, pues en las tablas sólo existe el estudio de casos particulares, sin ninguna formulación genérica.

> *"El hecho de que no se haya conservado ninguna formulación general de estas tablas no significa necesariamente que no existiera en el pensamiento antiguo prehelénico consciencia de la generalidad de dichas reglas o principios. Si no hubiera, de una manera u otra, una regla general subyacente, sería muy difícil de explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo tipo".* (Boyer, 1986, citado en Ruiz, 1988, p.150)

Investigadores como Youschkevitch (1976, p.13, citado en Ruiz, 1998), aseguran que no existió una idea del objeto matemático función durante la época antigua, sin embargo Pedersen (1974, citado en Cañón, 1993, p.170) señala,

> *"…si concebimos una función no como una fórmula, sino como una relación más general que asocia elementos de un conjunto de números (p.e. puntos del tiempo $t, t2, t3, t4, \dots$) con los elementos de otro conjunto (p.e. alguna variable angular en el sistema planetario), es obvio que las funciones en este sentido abundan en el Almagest. Solamente falta la palabra: la cosa está allí y lo está representada claramente por las muchas tablas de elementos correspondientes de tales conjuntos".*

De esta manera desde lo propuesto por Pedersen (1974) y desde nuestra actual noción de función, es posible reconocer instancias concretas de la idea general del objeto función, aun cuando se trate de un anacronismo utilizar el término función para nombrar ciertas *correspondencias*. Es así como durante la época antigua bajo la idea de tablas de correspondencia provenientes de fenómenos naturales se puede vislumbrar una noción intuitiva del objeto matemático función.

1.2.2. La función como relación entre magnitudes

Pedersen (1974) señala que durante la época de los babilónicos se presume un auténtico ‘instinto de funcionalidad’ ya que una función no sólo es una fórmula sino una relación más general que asocia elementos de dos conjuntos, dicha relación si se establece en las tablas de los cálculos de babilónicos donde se evidencian los diversos intentos por aritmetizar observaciones difícilmente medibles, además no se limitaron a una simple tabulación de datos empíricos, sino que usaron interpolaciones y extrapolaciones en una búsqueda de regularidades (Ruiz, 1998).

Los griegos de igual forma trabajaron con problemas que tenían implícita la noción de función, no logrando reconocerla ni simbolizarla. A principios del siglo II a.C., astrónomos se acogieron al sistema babilónico de almacenamiento de fracciones y casi al mismo tiempo, compilaron tablas de cuerdas de un círculo. Para un círculo de radio determinado, estas tablas daban la longitud de las cuerdas en función del ángulo central correspondiente, que crecía con un determinado aumento. Eran similares a las modernas tablas del seno y coseno, y marcaron el comienzo de la trigonometría. Si bien estos estudios sobre las *relaciones entre magnitudes* geométricas variables, no reconocían explícitamente al concepto de función, pueden ser considerados como los primeros antecedentes aportados por la cultura griega (Sastre, Rey & Boubée, 2008).

Las ideas de cambio y cantidad variable no eran desconocidas al pensamiento helénico. Los problemas de movimiento, de la continuidad del infinito habían sido examinados desde la época de Heráclito y de Zenón, y además una gran parte de la filosofía natural aristotélica estaba consagrada al estudio de estas cuestiones. De esta manera es posible afirmar que en el pensamiento helénico existía una idea primitiva del objeto matemático función contenida en las nociones de cambio y *relación entre magnitudes variables* (Ruiz, 1998).

Los filósofos griegos consideraban el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas, es así que Aristóteles opone, la física que concierne a los objetos en movimiento de la matemática, entendida como una ciencia estrictamente teórica.

Asimismo, en los elementos de Euclides los objetos matemáticos y las relaciones son estáticas: se estudian los objetos fijos y sus relaciones. Esta filosofía estática de la matemática fue la razón por la que, a lo largo de mucho tiempo, los matemáticos pensaron y hablaron en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables. Esto condujo a las proporciones y ecuaciones, y no a la noción de función.

Esta idea hacia las matemáticas, estuvo aferrada en la mente de los matemáticos durante mucho tiempo, observaban los entes matemáticos como algo ‘estático’. Consideraban las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas como algo diferente a las igualdades estrictamente numéricas. Esta concepción de la ‘variabilidad’ como característica exclusiva de las magnitudes físicas, puede considerarse un claro obstáculo para el desarrollo de la noción de función. Esta concepción perduró con Oresme, Galileo y Leibniz (Ibíd., p. 152).

Arquímedes, estableció la relación entre figuras geométricas con su obra ‘La cuadratura de la parábola’ donde demuestra que el área de un segmento de parábola es igual a cuatro tercios del área de un triángulo con igual base y altura, recurriéndose a un sistema de coordenadas oblicuo XY y describiéndose que la ecuación de una parábola es de la forma $x = ky^2$. Es a través de su obra que se tiene un primer acercamiento entre una curva y una representación algebraica, permaneciendo aún oculta la noción de función.

Durante la época antigua no existió interés por estudiar la función como objeto matemático, pues la matemática estaba orientada al estudio de magnitudes físicas y geométricas consideradas como tangibles y que a su vez podían ser medibles con instrumentos típicos de la época.

1.2.3. La función como representación gráfica

Con la caída de Roma en el año 476 se da inicio a la Edad Media la cual finaliza en 1453 con la caída de Constantinopla. Si bien, durante esta época se cree que la matemática se mantuvo estática, lo cierto es que se produjeron importantes aportaciones, entre ellas destaca la contribución de los árabes quienes además de rescatar las obras helenas, proporcionaron a occidente de la aritmética y sentaron las bases del álgebra.

Durante la edad media se estudiaron fenómenos naturales como: calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. A partir de estas indagaciones se estableció implícitamente la noción de cantidades variables independientes y dependientes. La noción de función se asoció al estudio del cambio, en particular del movimiento, además implícitamente se definía por una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante *representaciones gráficas*, pero durante esta época no se logra establecer el objeto matemático función, a través de una expresión algebraica.

A partir del siglo XIII, las matemáticas tienden a ocupar un lugar cada vez más importante en las ciencias de la naturaleza, se va poniendo en duda la estricta demarcación de Aristóteles entre la matemática y las ciencias físicas. Según Crombie (1979), la historia de las ciencias europeas del siglo XII a siglo XVII, puede ser considerada como una penetración progresiva de las matemáticas junto con el método experimental, en aquello que se creía que pertenecía exclusivamente a las ciencias físicas.

La evolución de la noción de función se beneficiará con aportaciones de las escuelas de filosofía natural de Oxford y París. Filósofos como Grosseteste y Bacon afirman que las matemáticas son el principal instrumento para estudiar los fenómenos naturales. La aparición de dicha filosofía natural traerá aparejada la concepción de leyes de naturaleza funcional para explicar dichos fenómenos. Pero las cosas medibles eran concebidas como 'cantidades continuas' incluido el tiempo, y por ello, la razón entre esas cantidades será expresada por medio de las relaciones entre puntos, rectas y superficies. Durante esta época el lenguaje empleado para expresar las relaciones de funcionalidad es el lenguaje verbal o el geométrico (Cañón, 1993).

Los nuevos métodos de la física matemática fueron desarrollándose en conexión con la idea de relación funcional.

> "*Existía una concepción sistemática de las variaciones concomitantes entre causa y efecto; expresando el fenómeno que debía ser explicado (la variable*

> *dependiente como la llamamos ahora) como una función de las condiciones necesarias y suficientes de su producción (las variables independientes), se puede mostrar exactamente cómo están relacionados los cambios de la primera con los de la segunda*". (Crombie, 1979, citado en Ruiz, 1998, p.157-158)

El estudio de la variación se inicia con la representación gráfico-geométrica, construida por Nicolás Oresme (1323 - 1382), como método para representar y analizar los fenómenos cambiantes.

Nicolás de Oresme, antes del año 1361 se cuestionó ¿Por qué no hacer un dibujo o gráfica de la manera en que las cosas varían? De allí es que surge una idea primitiva de lo que en la actualidad llamamos *representación gráfica de la noción de función*. Todo lo que varía se sepa medir o no, escribía Oresme, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo.

Oresme desarrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas. En su obra Tractatus de latitudinibus formarum, las funciones aparecen dibujadas por primera vez, trasladando al plano lo que hasta entonces habían hecho los geógrafos sobre la esfera. Mantuvo incluso los nombres, y llamó longitud y latitud a lo que hoy llamamos abscisa y ordenada. Su objetivo era representar por una figura las intensidades de una cualidad que depende de otra. De manera similar al pensamiento griego, estableció de diferente manera la noción de número y de magnitud, la primera la asociaba al conjunto de unidades mientras que la segunda se refería a lo medible. Oresme (citado en Ruiz, 1998, p. 113) señala, "*toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua, de esta manera se puede inferir que Oresme interpretaba la noción de número diferente a la noción de magnitud*".

Oresme asoció el cambio físico con figuras geométricas considerando que todo lo que varía se puede imaginar como una cantidad continua representada mediante un segmento rectilíneo. Así, en la representación gráfica del cambio de la velocidad a través del tiempo, utilizaba una línea horizontal para representar el tiempo "longitud", y a las velocidades en los diferentes instantes, las ubicaba en líneas verticales “latitud” (Sastre, Rey & Boubée, 2008).

En la Figura 1.1 se observa la representación de una velocidad que decrece uniformemente desde el valor OA en O, a cero en B, quedando dibujado un triángulo. El rectángulo OBDC, determinado por E (punto medio de AB) tiene la misma área que el triángulo OAB y representa un movimiento uniforme a lo largo del mismo intervalo de tiempo.

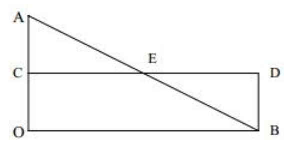


Figura 1. 1. Movimiento uniforme

Oresme consideró tres tipos de figuras o de configuraciones diferentes (D’hombres, 1987, citado en Jaimes, 2012):

1. Uniformemente Uniformes. Si se considera la representación de la velocidad según el tiempo, podemos asociar una figura uniformemente uniforme a una velocidad constante debido a que las intensidades son iguales, indistintamente al tiempo que se tome. Oresme dibuja una gráfica velocidad-tiempo en la que los puntos de una recta horizontal representan los sucesivos instantes de tiempo (o longitudes) y, para cada uno de estos instantes, traza un segmento (o latitud) perpendicular a la recta en dicho punto, cuya longitud representa la velocidad en ese instante. En este caso se obtiene un rectángulo (Figura 1.2).

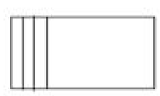


Figura 1.2. Uniformemente Uniformes

2. Uniformemente deformes. La figura uniformemente deforme corresponde a una velocidad con aceleración constante. En tal caso, la línea borde es una recta pero la figura que se obtiene es un triángulo o un trapecio, depende de la intensidad inicial de la cualidad. Oresme señalaba,

> "*Es aquella en la que si tomamos tres puntos de la recta considerada, la razón de la distancia entre el primero y el segundo, a la distancia entre el segundo y el tercero, es como la razón del exceso de la intensidad del primer punto sobre el segundo al exceso del segundo sobre el tercero*" (Figura 1.3). (Youschevitch, 1976, citado en Ruiz, 1998, p. 160)

A esta descripción corresponde nuestra ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

La línea de intensidad, como se observa en la Figura 1.3, está representada por la hipotenusa de un triángulo rectángulo, o por el lado superior inclinado de un cuadrilátero que tenga dos ángulos rectos.

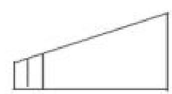


Figura 1. 3. Uniformemente deformes

3. Deformemente deformes. Corresponden a las aceleraciones constantes de la velocidad. Así, todos los casos en donde la línea borde no sea una recta corresponden a casos deformemente deformes (Figura 1.4).

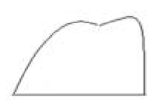


Figura 1. 4. Deformemente deformes

Oresme no grafica curvas en un sistema de coordenadas, pero su obra se constituyó en un paso importante para la invención de la geometría analítica y en la introducción del movimiento en la geometría, aspecto no considerado en la matemática griega.

En el siglo XIV los escolásticos de Merton se interesaron por el estudio del movimiento y la velocidad obteniendo importantes resultados como la regla de Merton la cual señala:

> *"Si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme durante un intervalo de tiempo dado, la distancia total es tal como aquella que se tendría durante el mismo intervalo de tiempo con una velocidad uniforme igual al promedio de*

su velocidad inicial y su velocidad final (es decir, su velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo) Lo anterior puede expresarse como sigue: $s = \frac{1}{2}(V_0 + V_1)t$ *en donde* t *es la longitud del intervalo considerado*". (Cantoral & Farfán, 2004, citado en Pino-Fan, Godino & Font, 2011, p. 155-156)

Oresme con su método geométrico logró demostrar la regla de Merton referente a velocidad media. En su trabajo se puede observar cómo se da inicio a la matemática de la variación y el cambio, contexto en el cual a través de estudiar la velocidad y el movimiento, surge implícitamente la noción de función, ya que si analizamos por ejemplo la regla de Merton, se puede observar la relación que existe entre el tiempo y la velocidad. Además, se logró mirar la descripción de las leyes que gobiernan los fenómenos reales, y se realizó una gran aproximación a las cantidades continuas al poder imaginarlas en una recta, que posteriormente serían definidos con mayor detalle y formalidad por Descartes y Fermat.

1.2.4. La función como expresión analítica

Según lo establecido por Youschkevitch (1976), el desarrollo de la teoría de las funciones se basó principalmente en tres aspectos: el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, la creación del álgebra simbólico-literal, y la extensión del concepto de número al de números reales (a fines del siglo XVI abarcaba no sólo el campo de los reales sino también el de los imaginarios y complejos).

El álgebra permitió a Fermat (1601 – 1665) y a Descartes (1596 – 1650) el descubrimiento de la 'representación analítica'. Comenzó a formarse la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas, de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de coordenadas (Ruiz, 1998).

"*Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta* *o una línea curva*” (Descartes, citado en Boyer, 1986, p. 437). De acuerdo con Boyer, esta proposición constituye uno de los enunciados más relevantes de la historia de las matemáticas, ya que no sólo introduce la geometría analítica, sino que también la idea de variable algebraica. La relevancia del método utilizado por Descartes y Fermat se suscita en el hecho de permitir traducir cualquier problema de geometría plana en un problema algebraico equivalente. “*Este fue el primer puente entre dos áreas diferentes de la matemática*” (Diudonné, 1989, citado en Ruiz, 1998, p. 165). El hecho de que las rectas, los círculos y las cónicas de un plano se pudieran definir por ecuaciones de la forma $P(x, y) = 0$, donde P es un polinomio con coeficientes reales de primer o segundo grado, condujo a los matemáticos al estudio de curvas con ecuaciones de este tipo pero sin ninguna restricción en el grado. De esta forma nace una nueva rama de las matemáticas, la geometría analítica (Ruiz, 1998). Así es que Eves (1969) señala, “*la Geometría analítica resulta ser un método notablemente fértil, tanto para resolver problemas como para descubrir nuevos resultados en Geometría*”. (p. 2)

Vieta, matemático francés, fue el precursor del uso de letras para representar las variables, constituyó las magnitudes conocidas como consonantes y las magnitudes desconocidas como vocales. Descartes, por su parte, utilizó las últimas letras del abecedario para las incógnitas y las primeras para los coeficientes, tal como en la actualidad son utilizadas.

Galileo, matemático y físico italiano (1564 - 1642), contribuyó en la construcción de la noción de función e introdujo lo numérico en las representaciones gráficas y expresó las leyes del movimiento, a las que incorporó el lenguaje de la teoría de las proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional, lenguaje que junto con la teoría de la época encubrió aspectos de la variación continua. En su obra se encuentran numerosas expresiones de relaciones funcionales.

Con la obra de Descartes (1596 - 1650) se produce un significativo avance, pues este físico matemático francés, buscaba liberar a la Geometría del exceso de figuras, pero también buscaba darle sentido o significado al álgebra por medio de la geometría. Descartes estableció que una curva se construye solamente con poseer una ecuación algebraica. En su afán de dar sentido al álgebra por medio de la geometría desarrolló la idea de introducir la función en forma analítica y con ello fue el precursor en establecer que una ecuación en x e y es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables, de modo que los valores de una de ellas pudiera calcularse a partir de los correspondientes valores en la otra variable.

Descartes refuta la idea de que sólo sean legítimas las curvas factibles de ser construidas con regla y compás, y presenta nuevas curvas generadas por construcciones mecánicas. Clasifica las curvas en “mecánicas” y “geométricas”.

> “*Una curva es geométrica si la podemos imaginar descrita por un movimiento continuo o bien por diversos movimientos sucesivos, de manera que los últimos vengan determinados por los anteriores. En cambio, las mecánicas son las que resultan de dos movimientos independientes que no guardan entre sí una relación que pueda ser medida. La curva geométrica es para Descartes la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre un regla se transmite por los diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva*”. (Ramos, 2005, p. 79)

Esta manera de entender la curva y la introducción implícita del sistema de coordenadas permite a Descartes hallar la expresión algebraica de la curva y le lleva a definir claramente el objeto de la Geometría Analítica, las curvas geométricas y las técnicas que se han de utilizar para su estudio: la teoría de las ecuaciones (Ibíd., p. 80).

De acuerdo con lo planteado por Font (2000a), los trabajos de Descartes son muy interesantes porque parten de las dos metáforas clásicas sobre las curva: (1) Las curvas son secciones, (2) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones, para añadirles una tercera metáfora: (3) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones. El análisis de estas condiciones permite hallar una ecuación que cumplen los puntos de la curva.

La distinción de Descartes entre curvas “geométricas” y “mecánicas”, dio lugar a que Gregory (1638 - 1675) realizara la distinción entre funciones “algebraicas” y “trascendentes”. En 1667, este matemático dio la definición más explícita del siglo XVII, definiendo una función como: *“una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable”.* (Sastre, Rey & Boubée, 2008, p. 146)

Fermat (1601 - 1665) aplicó el análisis de Vieta a los problemas de lugares geométricos y presentó en un estilo moderno, con las notaciones de Vieta, los principios fundamentales de la Geometría Analítica *“Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de cada una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva”* (Collette, 1985, p. 23). A pesar de que Fermat escribió sobre estos temas antes que Descartes publicara sus trabajos, su obra fue publicada de manera póstuma a la de Descartes (Ibíd.).

Fermat visualizó la arbitrariedad en que parámetros y variables se unen para formar expresiones algebraicas, estando la representación gráfica condicionada a como se relacionan los elementos de la representación algebraica.

Fermat expone muy claramente la idea de que una ecuación con dos incógnitas es una expresión algebraica de las propiedades de la curva.

> “*Según Font (2000a), mientras que Descartes considera curvas generadas por movimientos de las cuales busca la ecuación, Fermat introduce curvas dadas por ecuaciones algebraicas. Se entiende que Descartes se preocupa más de la traducción de la gráfica a la expresión simbólica, mientras que Fermat se preocupa más de la traducción de la expresión simbólica a la gráfica*”. (Ramos, 2005, p. 80)

En las obras de Leibniz, Newton se establecen modelos conceptuales de situaciones físicas reales, permitiendo establecer modelos matemáticos en los que relacionó variables tales como aceleración, distancia, velocidad, tiempo. Es entonces a partir de los estudios más complejos de variación realizados por Newton que la función es considerada un objeto matemático.

> "*Newton, en el año 1736, publicó su libro "Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum". En este libro considera las variables como generadas por el movimiento continuo de puntos, rectas y planos, más que como agregados estáticos de infinitesimales. A una cantidad variable le llama "fluente" y la representa por las letras x, y, a su cambio relativo "fluxión" que representa por $\dot{x}$ e $\dot{y}$. En dicho libro, Newton considera que el problema fundamental del cálculo es el siguiente: dada una relación entre fluxiones, obtener una relación entre sus respectivas fluyentes y recíprocamente"*. (Ramos, 2005, p. 80)

> "*La primera publicación de Newton que incluye su cálculo diferencial fue los "Principia", publicados en el año 1687, allí utiliza métodos de demostración geométricos, seguramente debido a que consideraba que este tipo de demostraciones era más comprensible para sus contemporáneos y expone un método alternativo a los infinitesimales y al método de las fluxiones: las cantidades divisibles evanescentes*". (Ramos, 2005, p. 81)

En general para Newton la función es una herramienta fundamental que se usa, pero que no es objeto de estudio en sí misma. Las gráficas de funciones eran consideradas no como un agregado estático de infinitesimales, sino como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la cual se puede expresar mediante una fórmula (generalmente en forma implícita). Esta manera de entender las gráficas de funciones es muy evidente en la obra de Newton (Ibíd.).

Leibniz (1646 - 1716) matemático alemán fue el primer autor en utilizar la palabra función en 1692 (Struik, 1969). Leibniz usó esta palabra para referirse a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada. Por ejemplo, Leibniz afirmaba que una tangente es una función de una curva (Iacobacci, 1965).

> *"Leibniz introdujo las palabras: constante, variable, coordenadas y parámetro en términos de un segmento de constante arbitrario o cantidad. Clasificó a las curvas en: "algebraicas", las representadas por una ecuación de cierto grado y "transcendentes", las representadas por una ecuación de grado infinito o indefinido. Leibniz no utilizaba el concepto de función como lo entendemos en la actualidad, ya que para él, una curva estaba formada por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños".* (Sastre, Rey & Boubée, 2008, p. 147)

La primera consideración de una función como *Expresión Analítica* se evidencia en el artículo de Jean Bernoulli en 1718: *"Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes"* (Bernoulli, 1718, citado en Boyer, 1986, p. 531). Es en este mismo artículo que Bernoulli propone "*la letra griega φ para designar la 'característica' de una función (término utilizado basado en los trabajos de Leibniz), escribiendo el argumento sin paréntesis: $\varphi\ x$*". (Ruiz, 1998, p. 174)

Es en el siglo XVIII cuando el estudio de la función es considerada esencial dentro de la matemática. Euler (1707 - 1783), matemático y físico suizo quien había sido precedido por una familia de matemáticos suizos (los Bernoulli Johann y Jacob), en su obra Introduction in analysis infinitorum publicada en 1748 analiza detenidamente la noción de función. Comienza estableciendo que: "*una constante es una cantidad definida que toma siempre un solo y único valor, mientras que una variable puede tomar valores en un conjunto (o un subconjunto) de números complejos*". (Ibíd., p. 175)

La definición propuesta por Euler del objeto matemático función es, "*Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes*". (D'hombres, Dahan, Bkouche, Houzel & Guillemot, 1987, citado en Ruiz, 1998, p. 175)

Para dar a esta definición la mayor posibilidad de generalidad, Euler admitía tanto valores reales como imaginarios del argumento. Una función conceptuada como una expresión analítica se obtiene mediante una clase de operaciones aritméticas, las potencias y raíces. A ellas se adjuntó las funciones trascendentes elementales: e^z, $\ln z$ y las funciones trigonométricas (Ruiz, 1998).

Euler estableció funciones algebraicas y trascendentes, las primeras formadas por operaciones algebraicas, y las últimas necesitan para su formación operaciones trascendentes. Euler complementó esta clasificación con la introducción de funciones uniformes y multiformes, pares e impares, y definió criterios para su determinación. Sin embargo, al restringirse en la consideración de función como expresiones analíticas, todas las funciones las consideraba representadas por una serie de potencias: $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots$. Más tarde es ampliada la expresión analítica para potencias de la variable z, no sólo enteras, sino cualesquiera, afirmando que toda función de z puede ser transformada en una expresión de la forma: $f(z) = Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + \cdots$ (siendo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ números cualesquiera). Esta afirmación tan rotunda, no es de extrañar, ya que en la época de Euler casi la totalidad de las funciones utilizadas eran analíticas (Ibíd.).

Según lo señalado por Boyer (1986), Euler en 1734 fue el primero en utilizar la notación de función $f(x)$.

Por su parte el matemático francés Lagrange (1736 – 1813), propone la siguiente definición para la noción de función:

> "*Llamaremos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas*". (Lagrange, citado en Grattan-Guinness, 1984, p. 133)

> "*En el siglo XVIII, los matemáticos más importantes (Euler, Lagrange, etc.) consideraban que cualquier función se podía representar por una serie entera, siempre que no fuese una función definida a trozos. Euler consideraba que a cada expresión analítica le correspondía una gráfica cartesiana, y que expresiones analíticas, que de entrada parecían diferentes, podían tener la misma gráfica. Pero consideraban que a gráficas diferentes correspondían expresiones analíticas diferentes. En la terminología de Euler, las gráficas definidas a trozos eran discontinuas o mixtas o irregulares*". (Ramos, 2005, p. 82)

Los matemáticos desde Euler hasta Cauchy siglo XIX parecían estar de acuerdo con la naturaleza arbitraria de las funciones, pero en la práctica ellos pensaban en las funciones como expresiones analíticas o curvas.

El problema de la cuerda vibrante, relacionada con vibraciones infinitamente pequeñas de una cuerda finita, homogénea y fijada en sus dos extremos, conllevó a que Euler, generalizara el concepto de función, esto con la finalidad de propiciar la existencia de una correspondencia biunívoca entre las funciones y las curvas. Para Euler, las funciones discontinuas, en general, no se pueden expresar analíticamente y por consiguiente la definición dada inicialmente era demasiado limitada para encontrar solución a este problema. El tipo de función que mediaba en la solución de la ecuación del problema de las cuerdas vibrantes, no estaba necesariamente definido por expresiones analíticas, sino tal como lo expresara Euler, por un gráfico obtenido por el trazo libre de la mano (Jaimes, 2012). La necesidad de considerar funciones mixtas en determinados problemas llevó a Euler a buscar una definición de función que englobase a todas las curvas que no se podían definir por una sola expresión, pero que se podían dibujar por el movimiento libre de la mano. En su libro "Institutiones calculi differentialis" publicado en el año 1755 dio la siguiente definición:

> *"Si ciertas cantidades dependen de otras, de tal manera que si las otras cambian, estas cantidades cambian también, entonces se llama estas cantidades funciones de las últimas; esta denominación tiene la máxima*

amplitud y contiene, en ella misma, todas las maneras por las cuales una cantidad puede ser determinada por otras. Si, por consiguiente, x *designa una cantidad variable, entonces las otras cantidades que dependen de* x *de cualquier manera, o que están determinadas por* x*, se llaman funciones de* x*".* (Lacasta y Pascual, 1998, p. 38, citado en Ramos, 2005)

1.2.5. La función como correspondencia arbitraria

Durante el siglo XIX se fueron creando las condiciones necesarias para el tratamiento de las funciones como *correspondencias* de tipo muy general. Es así que Cauchy (1827) da la siguiente definición,

> *"Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable".* (Cauchy, 1827, citado en Youschkevitch, 1976, p. 58)

Por su parte Lobachevsky, en el año 1834, afirmó:

> *"El concepto general exige llamar función de* x *a un número, el cual se da para cada* x *y paulatinamente varía junto con* x*. El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida".* (Lobachevsky, 1834, citado en Ribnikov, 1987, p. 229)

Esta nueva acepción de la noción de función es definida ampliamente por Dirichlet en 1837, quien la enuncia de la siguiente manera

> "*Si una variable* y *está relacionada con otra variable* x *de tal manera que se atribuye un valor numérico a* x *hay una regla según la cual queda*

> *determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable dependiente x*". (Dirichlet, 1837, citado por Boyer, 1986, p. 687)

Como ya se ha mencionado, hasta ese momento, las funciones se concebían como expresiones analíticas o curvas, y es Dirichlet quien, por primera vez, considera a una función como una *"correspondencia arbitraria*". Da a conocer el primer ejemplo explícito de una función que no está dada por una expresión analítica, ni tampoco posee una gráfica o curva que la represente. Es el primer ejemplo que ilustra la noción de *función* como una correspondencia arbitraria y también es ejemplo de una función que es discontinua en todas partes, en el sentido actual. A partir de los trabajos de este matemático, la noción de *función* adquiere un significado independiente del concepto de *expresión analítica*, (Bottazzini, 1986; Grattan-Guinness, 1970).

Para evidenciar lo *arbitraria* que podía ser la regla de correspondencia, Dirichlet propuso una función de 'muy mal comportamiento': Sean c y d dos números reales distintos; cuando x sea racional sea $y = c$, y cuando x es irracional sea $y = d$. Esta función es tan patológica que es discontinua para todos los valores de x (Ruiz, 1998).

Posteriormente Riemann (1858) constituye la siguiente definición: "*Se dirá que y es función de x si a todo valor bien determinado de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que una a x y a y".* (Riemann, 1858, citado en Ruiz, 1998, p. 183)

1.2.6. La función a partir de la Teoría de Conjuntos

A medida que avanza la Matemática, va haciéndose cada vez más abstracta, ocurre lo mismo con la definición de la noción de función. Los desarrollos en el campo del álgebra abstracta y de la topología dan lugar al surgimiento de nuevas definiciones teóricas conjuntistas. El grupo Bourbaki, en 1939, definió *función* como una correspondencia entre dos conjuntos de una forma semejante a la dada por Dirichlet en 1837 (Monna, 1972; Youschkevitch, 1976, citado en Sastre, Rey & Boubée, 2008).

Bourbaki plantea la definición de función a partir de tres signos F (gráfica de la función), f (la función) y $f(x)$ (la imagen de la función), dentro del transcurso de las obras de Bourbaki se pierde el uso de F. Por otra parte f es usada para designar la función (correspondencia) de diferentes naturalezas también se podrá designar a f como una aplicación, pues a partir de la explicación "la función como una máquina" podremos entender a f como una aplicación en la cual entra un número A, es aplicada f sobre A, para dar como resultado un valor B.

Bourbaki establece los usos del signo $f(x)$ de la siguiente manera: valor específico o imagen siendo ésta una expresión numérica o algebraica. Puntos por los cuales puede ser entendido como el valor o posición en el plano.

Es posible visualizar a partir de lo anterior, y a diferencia de Cauchy quien entiende la función como una relación, que Bourbaki la define como una correspondencia y junto con Dirichlet propician el ingreso y uso del signo para designar a la función. Al igual que en las obras de Cauchy, se puede percibir un predominio de expresiones algebraicas. El surgimiento de f volcó a entender a $f(x)$ como un objeto con el cual se puede operar, analizar, manipular, pero principalmente con el que se podrá determinar a la función, es decir f, ya que estudiando estas imágenes es que se puede caracterizar a la función.

A fines del siglo XIX, surge la teoría de conjuntos con Cantor. Su impacto se extiende al desarrollo de la topología, el álgebra y el análisis funcional entre otros. La influencia que dicha teoría posee sobre la noción de función, permite establecer la definición formal del objeto matemático función:

> "*Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una función f definida en un conjunto X y con valores en Y es una ley mediante la cual se hace corresponder a cada elemento de X un elemento de Y. Se dice también que f es una aplicación de X en Y. Para un elemento genérico $x \in X$ denotaremos habitualmente por $f(x)$ el elemento Y correspondiente a ese x, y se dirá también que $f(x)$ es el valor de la función f en x, esto se expresa a veces mediante la igualdad $y = f(x)$. Para denotar que f es una aplicación de X*

> *en Y, se escribe ordinariamente $f: X \to Y$, y a veces también $x \to f(x)$, esta última indica, más bien la operación de pasar de un elemento cualquiera $x \in X$ a su transformado $f(x) \in Y$. En ocasiones, por emplear un lenguaje geométrico se habla de transformación de X en Y, en lugar de función o aplicación definida en X y con valores en Y*". (Fernández, 1976, citado en Ruiz, 1998, p. 186).

En el intento de precisar y dar mayor rigor a la definición de este objeto matemático, se llega a la determinación de una función como la terna $f = (\mathrm{G}, \mathrm{X}, \mathrm{Y})$, en donde $\mathrm{G}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}$ son conjuntos que verifican las siguientes condiciones: a) $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$; b) Para todo $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ existe una y sólo una $\mathrm{y} \in \mathrm{Y}$, tal que $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{G}$, G es la gráfica de la función f. El único elemento y de Y tal que $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{G}$ se llama valor de la función f en x, y se utiliza para designarlo $\mathrm{y} = f(\mathrm{x})$. Es evidente que la gráfica G es el conjunto de pares de la forma $(\mathrm{x}, f(\mathrm{x}))$ donde $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función. A X se le denomina conjunto de partida de f, y a Y conjunto de llegada de f (Godemat, 1971, citado en Ruiz, 1998).

Russell, por su parte, establece la siguiente definición:

> "*La idea de función están importante, y tan a menudo ha sido considerada con referencia exclusiva a los números, que será conveniente llenar nuestras mentes con ejemplos de funciones no numéricas. Por muchas razones es conveniente identificar la función y la relación, es decir, si $y = f(x)$ es equivalente a xRy, donde R es una relación, es conveniente hablar de R como de la función, pero se debe recordar que la idea de funcionalidad es más importante que la de relación*". (Russell, 1967, citado en Ruiz, 1998, p. 187)

Es así que Mosterín (1981, p. 55) considera, "R es una función $\longrightarrow\ \forall\, x, y, z,\ \ (x, y) \in R\ y\ (x, y) \in R\ \to y = z$".

Por otro lado Hausdorff establece la siguiente definición:

> *"El concepto de función es casi tan fundamental y primitivo como el concepto de conjunto. Una relación funcional está formada por pares de elementos, al igual que un conjunto está formado por elementos individuales. Los pares ordenados hacen posible la introducción de la noción de función. Así, para una función univalente $f(a)$, lo único que cuenta es que para un a dado, $f(a)$ debe estar unívocamente determinado por algún criterio definido (dado anteriormente por un conjunto de pares P). Es innecesario conocer si este criterio puede ser dado o no en términos de 'expresiones analíticas' o bien de otra manera. Es también innecesario conocer si algún caso con los instrumentos que tenemos a nuestra disposición nos permiten o no encontrar siempre para un valor de a la determinación actual de $f(a)$. Lo que nosotros hemos dicho aquí sobre la noción general de función, definido por Dirichlet, podría haber sido dicho sobre el concepto de conjunto de Cantor. El conjunto de los racionales está bien definido, aunque no conozcamos si π^{π} pertenece o no a dicho conjunto, la función $f(a)$ que es igual a 1 si a es racional, y 0 si a es irracional, está bien definida, aunque no conozcamos el valor de $f(\pi^{\pi})$".* (Hausdorff, 1978, p. 15)

Freudenthal (1983) señala que "*aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático*" (p. 497).

1.3. PROBLEMÁTICA EN TORNO A LAS DIFICULTADES EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL OBJETO FUNCIÓN

La noción de función es actualmente uno de los objetos matemáticos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora, no obstante es un concepto complejo debido a la multiplicidad de registros representativos que generan distintos niveles de abstracción (Ramos, 2005).

Diversas son las investigaciones que se refieren a los procesos de enseñanza aprendizaje de la noción de función, éstas han permitido evidenciar las principales dificultades asociadas a la aprehensión de dicho objeto matemático. Artigue (1995), establece que una de las dificultades cognitivas presentes en los estudiantes cuando abordan la noción de función son producto de los hábitos de enseñanza tradicional, pues el gran predominio que en ella se otorga al registro algebraico (simbólico-formal) impiden al estudiante lograr flexibilidad en el pasaje de un registro a otro.

A continuación, recogemos algunas de las aportaciones que se tienen en el campo de investigación de la educación matemática referentes a la problemática que conlleva la enseñanza y el aprendizaje de la noción de función. Hemos organizado este apartado en cuatro sub-apartados que se describen a continuación: En el primero de ellos, se abordarán los estudios sobre la diversidad de representaciones asociadas a la noción de función. En un segundo sub-apartado se evidenciarán los errores y dificultades presentes en los estudiantes cuando abordan la noción de función. Posteriormente en un tercer apartado se revisarán algunos estudios que proponen propuestas para la enseñanza de la función y finalmente en un último sub-apartado examinaremos los conocimientos de los profesores respecto del objeto matemático función.

1.3.1. Estudios sobre la diversidad de representaciones de la noción de función

El rol que desempeñan las representaciones en el proceso de enseñanza aprendizaje es fundamental si se quiere que los estudiantes logren una correcta comprensión sobre un objeto matemático específico –en nuestro caso el objeto matemático función–.

La toma de conciencia respecto de la variedad de representaciones asociadas a una noción matemática específica, puede facilitar el acercamiento y comprensión sobre dicho objeto matemático. La importancia del papel que tienen las representaciones, radica en que se toma por sentado que los significados de los objetos matemáticos son construidos a través del uso de los signos (D'Amore, 2006; Radford, 2000, citado en Pino-Fan, 2014). Es así que el pensamiento científico, específicamente el matemático, está íntimamente ligado a símbolos determinados que permiten representar los objetos matemáticos.

En el mismo sentido Duval (1999) estableció los conceptos de representación semiótica y de articulación de registros. En su trabajo, define representaciones semióticas, como producciones constituidas por el empleo de símbolos, relativos a un sistema particular de signos (lenguaje, escritura algebraica, gráficos cartesianos, etc.). Los sistemas de representación semiótica deben permitir el cumplimiento de la transformabilidad en otras representaciones que conserven todo el contenido de la representación inicial o una parte del mismo. Se entenderá por *tratamiento* a aquella actividad cognitiva que transforma las representaciones de algún objeto matemático en un mismo registro, es decir, se trata de una transformación interna al registro de representación, que se realiza de acuerdo con las reglas propias al sistema, llamadas "reglas de expansión", para obtener otras representaciones que pueden constituir una ganancia de conocimientos en comparación con las representaciones iniciales. Por ejemplo, se realiza un tratamiento cuando se tiene una representación algebraica de una función polinómica y se realiza una factorización de la misma. Por otro lado se considerará *conversión* como aquella actividad cognitiva que consiste en transformar las representaciones producidas en un sistema de representaciones a otro, de tal manera que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. Es, por tanto, una transformación externa al registro de la representación inicial constituyéndose en la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los estudiantes. Por ejemplo, se realiza una conversión cuando a partir de la representación algebraica de una función construimos la gráfica asociada.

Even (1998) señala que la capacidad de identificar y representar el mismo objeto matemático en diferentes representaciones, y la flexibilidad en el movimiento de una representación a otra, son cruciales en el aprendizaje de la matemática, ya que permite a los estudiantes identificar relaciones ricas y significativas respecto de una noción matemática, además de desarrollar una comprensión más profunda de los objetos matemáticos.

Greeno y Hall (1997) por su parte, sostienen que las representaciones pueden ser consideradas como herramientas útiles para la construcción de la comprensión de un objeto matemático, de la misma manera a través de representaciones es posible comunicar información respecto de una noción matemática y de lo que se ha comprendido de ella. Resaltan la importancia de la participación de los estudiantes en la elección de las representaciones y en la construcción de ellas, de tal manera que les ayuden a identificar patrones y realizar cálculos, aprovechando el hecho de que diferentes formas proporcionan diferentes soportes para la inferencia y el cálculo.

En este mismo sentido, Duval (2006), determina que los objetos matemáticos (ideas, conceptos y relaciones) sólo son accesibles a través de representaciones, y la actividad matemática sólo puede efectuarse a través del uso de una representación. Estas representaciones actúan como sistemas de símbolos reconocidos para comunicar ideas o relaciones matemáticas.

Ospina (2012), establece que las representaciones se definen como producciones constituidas por el empleo de signos, en tanto que son el medio por el cual disponen los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles y accesibles a otros. Éstas, además de cumplir una función de comunicación, tienen una función de objetivación, son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, del funcionamiento cognitivo del pensamiento, del tratamiento de la información, de la toma de conciencia y de la comprensión.

Respecto a la comprensión y a las representaciones asociadas a la noción de función, Sierpinska (1992) establece la importancia de proporcionar a los estudiantes un amplio espectro de formas de representar la noción de función, a fin de evitar que dichas representaciones se identifiquen con una función en particular. Cada una de las distintas representaciones de función determina un aspecto diferente de la noción matemática y todas estas juntas contribuyen a una representación global de la misma, ninguno de ellos por separado puede describir la noción global de función (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004).

Otro trabajo realizado en el marco del estudio de las representaciones es el realizado por Janvier (1987), en su trabajo sobre la noción de función establece que:

> "L*as representaciones asociadas al concepto de función se pueden clasificar en cuatro clases (expresión analítica, tabla, gráfica y expresión verbal), que aunque idealmente contienen la misma información, ponen en acción diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La representación gráfica conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La expresión analítica conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar las otras tres*". (p. 169)

El aprendizaje de las funciones no se ha de limitar al de una sola representación, sino que ha de incluir la capacidad de convertir la información de una representación a otra y las traducciones entre el mismo tipo de representación (Ibíd.).

El trabajo de Sierpinska (1992) da a conocer que los estudiantes tienen dificultades para; hacer las conexiones entre diferentes representaciones de funciones (fórmulas, gráficos, diagramas y descripciones de palabras), en interpretación de los gráficos y en la manipulación de símbolos relacionados con las funciones.

Gagatsis, Elia y Andreou (2003) en su trabajo determinan en qué medida los estudiantes de 14 años de edad han llevado a cabo procesos de conversión; desde una representación gráfica de funciones a representaciones verbales y algebraicas, y desde una representación verbal a representaciones gráficas y algebraicas. A partir de dicho estudio se evidenció que diferentes tipos de traducciones entre representaciones del mismo contenido matemático fueron abordados de una manera completamente distinta, lo que indica la existencia de segmentación en el comportamiento de los estudiantes. Los estudiantes no estaban en condiciones de cambiar los sistemas de representación de forma flexible, por lo tanto las representaciones se mantuvieron segmentadas y el pensamiento matemático se caracterizó como fragmentario y monoregistral. Este tipo de comportamientos es visto como el indicio de la confusión que poseen los estudiantes respecto de un objeto matemático y su representación, lo que lleva a la consideración de dos representaciones del mismo objeto como dos objetos matemáticos (Duval, 2002). Este tipo de dificultades se corresponden con lo planteado por Duval (1999) quien señala que en la fase de aprendizaje, la articulación de registros de representación juega un papel fundamental en la conceptualización de la noción de función. Es así que el análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos en el aprendizaje enfrenta tres fenómenos estrechamente ligados:

1. La diversificación de los registros de representación semiótica, pues cada registro plantea preguntas específicas que son muy diferentes entre sí.
2. La diferenciación entre representante y representado o al menos entre forma y contenido de una representación semiótica.
3. La coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponibles, pues el conocimiento de las reglas de correspondencia entre dos registros distintos no es suficiente para que puedan ser movilizados y utilizados conjuntamente.

Así, la complejidad del objeto matemático función, se suscita debido a la diversidad de registros de representación semiótica. Existen no sólo dificultades para articular los diferentes registros de representación, sino también en la conversión de un registro a otro y en el trabajo dentro de un mismo registro (Duval, 1999).

De acuerdo con Elia, Panaoura, Eracleous y Gagatsis (2006) algunas dificultades de los estudiantes en la construcción de nociones matemáticas pueden estar vinculadas a la restricción de representaciones presentadas, en los procesos de enseñanza. Las formas habituales de representación en algunos objetos matemáticos, como la noción de función, no son suficientes para que los estudiantes construyan todo el significado y logren comprender toda la gama de sus aplicaciones.

En este mismo sentido, Vinner (1992) afirmó que la noción de función, como es enseñada en las escuelas, se identifica a menudo con sólo una de sus representaciones, ya sea lo simbólico o lo gráfico. De la misma manera Norman (1992) identificó que los profesores de matemática en la enseñanza secundaria, tienden a utilizar una representación particular de la función, a menudo se utiliza la representación gráfica. Por otra parte, la mayoría de los enfoques de enseñanza no tienen en cuenta el cambio de un tipo de representación a otra, que es un proceso complejo y se relaciona con la generalización del concepto que nos ocupa (Yerushalmy, 1997, citado en Elia, et al., 2006).

Diversas son las dificultades asociadas a identificar lo que es realmente una función matemática. Una de las investigaciones que centraron su interés en este aspecto, se desarrollaron con enfoques conjuntistas de la noción de función. En ellas se identificó la brecha existente entre definiciones dadas por los estudiantes y los criterios utilizados en las tareas de reconocimiento de objetos funcionales dadas en registros diferentes (Vinner, 1983, citado en Artigue, 1995). Los criterios establecían una concepción de la noción de función organizada no en torno a la definición conjuntista, sino alrededor de prototipos comunes encontrados de la asociación entre función-fórmula, o de la asociación función-curva. Estos criterios conducían a rechazar funciones y a admitir objetos no funcionales. Además, tampoco existía coherencia global, pues los criterios dependían significativamente del registro de representación utilizado (Artigue, 1995).

Respecto a las articulaciones de los registros de representación, se han identificado dificultades para articular los diferentes registros de representación asociados a la noción de función. Entre ellas, dificultades cognitivas relacionadas a las conversiones de un registro a otro, o al trabajo dentro de un mismo registro. Dichas investigaciones señalan como causa de las dificultades los hábitos de la enseñanza tradicional, pues el gran predominio que se le otorga al registro algebraico y el estatus infra-matemático que se le da al registro gráfico impiden manejar adecuadamente este tipo de dificultades y ayudar al estudiante a construir las flexibilidades necesarias (Ibíd.).

Otras investigaciones realizadas en el marco de las dificultades para la comprensión del objeto matemático función, señalan que los errores en el trabajo con funciones se deben al manejo deficiente de las representaciones o a la falta de coordinación entre las representaciones (Duval, 2002; Greeno & Hall, 1997; Smith, diSessa & Roschelle, 1993, citado en Elia, et al., 2006).

Las diferentes formas de construir imágenes mentales respecto de una noción matemática, se interrelacionan con la capacidad de los estudiantes para utilizar diferentes representaciones matemáticas. Vinner y Tall (1989) en su estudio relacionan los significados que para ellos tiene la definición de un concepto con las imágenes que de dicho concepto desarrollan los estudiantes. Para estos autores, existe en los estudiantes una estructura cognitiva asociada a cualquier noción matemática. Las definiciones rigurosas y formales a las que se enfrentan posteriormente, no reemplazan de manera inmediata toda la complejidad de esta estructura cognitiva. Es decir, además de estas definiciones formales, conservará diversas imágenes mentales, representaciones, modelos, ejemplos y contraejemplos, relaciones con otras nociones matemáticas, etc.

Vinner y Tall (1981), señalan que "*debemos formular una distinción entre los conceptos matemáticos formalmente definidos y los procesos cognitivos a través de los cuales se conciben*" (p. 151). Estos autores definen "concept image" a la estructura cognitiva completa que está relacionada al objeto matemático, la cual incluye representaciones mentales, propiedades asociadas y procesos. Por otro lado se define "concept definition" entendida como una descripción formal del objeto matemático.

En este mismo sentido, Ruiz (1998) establece que diversas son las definiciones de nociones matemáticas introducidas en los programas de matemática, sin embargo, los estudiantes no usan necesariamente la definición cuando se enfrentan a tareas, ejemplos o contraejemplos de la noción matemática. En la mayoría de los casos, deciden con base en una imagen conceptual, es decir, considerando todo un conjunto de esquemas mentales asociadas a dicho objeto matemático (Vinner & Dreyfus, 1989).

De acuerdo con Ruiz (1998) el término “concept image” se utiliza en el más amplio sentido de la palabra, es decir, incluye representaciones visuales de la noción matemática que se abordará. Para el caso de la noción de función, serían gráficos, diagramas sagitales e incluso símbolos tales como “$f(x) =$”, o bien “$y =$” y propiedades que los estudiantes asocien a este objeto matemático. Por ejemplo, se podría pensar que una función siempre se expresa simbólicamente.

De acuerdo a lo descrito por Ferrari (2001), parece habitual ver algunos aspectos de la matemática general y de funciones en particular de manera gráfica. Sin embargo, los estudiantes no tienen una “*imagen del concepto*” de función. Parecen tender a procesar la información y resolver ejercicios analíticamente, no visualmente. Ejemplo de esta dicotomía entre el gráfico de una función y la función en sí misma, es el caso presentado por la totalidad de los alumnos de cálculo entrevistados respecto a hallar la inversa de una función conocido su gráfico y su expresión analítica (Eisenberg, 1991, citado en Ferrari, 2001). El 90% fue capaz de hacerlo en forma analítica y el 55% de los mismos justificar su repuesta, en tanto que sólo el 30% “reflejó la gráfica respecto a la recta $y = x$” dando indicios de su conocimiento respecto del mecanismo geométrico, pero ninguno de ellos fue capaz de justificar dicho proceso, demostrando la existencia de un divorcio entre el concepto de función y su interpretación visual.

Según Tall (1992, citado en Ferrari, 2001), hay definiciones que oscurecen las imágenes conceptuales de los estudiantes. Por ejemplo, una función podría ser definida como un proceso mediante el cual se asigna a cada elemento de un conjunto (dominio) un único elemento de otro (rango). Ante esto, los estudiantes, en general, limitan estos “elementos” a números, no considerando que pueda tratarse de una correspondencia entre conjuntos, funciones, matrices, *n*-uplas en un espacio *n*-dimensional, etc. Por otra parte, considera conveniente que, en lugar de comenzar con la definición del concepto, la cual puede contener palabras o nociones no familiares para el estudiante, se intente hallar una aproximación para construirla sobre conceptos que jueguen el doble papel de ser inicialmente familiares para el estudiante y a su vez lo provean de una base para el desarrollo matemático posterior, a lo que Tall (1992) denomina “raíces cognitivas” (p. 9-10).

1.3.2. Dificultades en torno a la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático función.

Diversas son las investigaciones que se refieren a los procesos de enseñanza aprendizaje de la noción de función, estas han permitido evidenciar las dificultades que presentan los estudiantes en la aprehensión de dicho objeto matemático.

Dubinsky (1996) intenta aplicar algunas de las ideas de Piaget al pensamiento matemático avanzado, sin embargo ha constatado que dicha teoría posee su origen en la manipulación de objetos físicos y que a medida que el nivel matemático aumenta, se hace necesario construir nuevos objetos, no físicos sino mentales, que permitan la construcción de ideas matemáticas. De esta manera Dubinsky establece que una de las mayores dificultades en la educación matemática se suscita en encontrar sustitutos adecuados a estos objetos físicos.

Dubinsky en su teoría APOE propone describir cómo las acciones son interiorizadas en procesos que se encapsulan en objetos mentales que posteriormente permiten construir esquemas cognitivos más sofisticados. Esta teoría se determina considerando que,

> “*El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones*”. (Dubinsky, 1996, p. 32-33)

Dubinsky (1996) define una *acción* como una transformación de objetos que se percibe como algo externo, es decir, el sujeto que solamente puede comprender una transformación como acción puede realizarla a partir de indicaciones externas que le proporcione detalles precisos de los pasos que debe seguir.

> “*Por ejemplo, el estudiante no logra interpretar una situación como una función y sólo la asocia a una fórmula para obtener valores. De esta manera se está restringiendo a un concepto de acción la noción de función. En este caso, el estudiante no puede hacer muchas cosas con esta función, excepto evaluarla en puntos específicos y manipular la fórmula. Las funciones definidas a trozos, las inversas de las funciones, la composición de funciones, los conjuntos de funciones, la función derivada, etc., son fuentes de grandes dificultades para estos estudiantes porque no pueden ir más allá de una concepción de acción de una función, y todas estas nociones exigen concepciones de proceso y/o objeto*”. (Ramos, 2005, p. 85-86)

Una concepción *proceso* de función implica una transformación dinámica de cantidades de acuerdo con algunas reglas repetibles, de manera que dada la misma cantidad inicial, siempre producirán la misma cantidad transformada. El sujeto es capaz de pensar en la transformación como una actividad completa, comenzando con objetos de algún tipo, haciendo algo con estos objetos, y obteniendo nuevos resultados de aquello que ha hecho. “*Una función es concebida como un ‘objeto’ si es posible hacer acciones sobre ella, acciones que la transformen globalmente*" (Dubinsky & Harel, 1992, p. 85). Un estudiante que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre ella, describirla, y hasta puede llegar a invertir los pasos.

De acuerdo con Ramos (2005),

> “*para entender la función* $f(x) = sen\, x$*, es necesaria una concepción proceso de la noción de función porque no tenemos instrucciones explícitas de cómo podemos obtener una salida para cada entrada. Para hallar imágenes, un alumno ha de pensar en el proceso que asocia a cada número real su seno. Con una concepción proceso de la noción de función, el alumno puede construir una composición o bien invertir el proceso para obtener funciones inversas*”. (p. 98)

Ramos (2005) señala que los estudios sobre funciones como proceso y como objeto han puesto de manifiesto que una de las dificultades de los estudiantes se deben a que sólo pueden realizar acciones sobre la fórmula siendo esto un obstáculo para comprender la función como proceso o bien como objeto.

Artigue (1998) establece ciertas categorías de dificultades asociadas a la complejidad matemática de la noción de función. Estas dificultades han sido identificadas en investigaciones previas y las define como:

1. *Dificultades en la identificación de aquello que realmente es una función y en la identificación de las sucesiones como un caso de funciones:* Habitualmente los estudiantes cuando utilizan criterios para comprobar el carácter funcional de un objeto matemático no corresponde necesariamente a la definición formal de la noción de función (Vinner & Dreyfus, 1989). Los criterios utilizados se corresponden más bien con los prototipos y asociaciones tales como función-fórmula. De esta forma el mismo objeto matemático se puede considerar una función o no, según la forma de su representación semiótica.
2. *Dificultades para sobrepasar una concepción puramente de tipo proceso de la noción de función y llegar a ser capaz de relacionar con flexibilidad sus dimensiones de proceso y de objeto para desarrollar una concepción procedimental (Tall & Thomas, 1991):* Esta dificultad se suscita cuando los estudiantes tienen que considerar como iguales funciones definidas por procesos equivalentes pero diferentes. El trabajo en análisis es complejo si los estudiantes sólo pueden apoyarse en una concepción de tipo proceso, pues se requiere además considerar a las funciones como objetos que se pueden incluir en procesos más complejos como la integración y diferenciación.
3. *Dificultades para relacionar los diferentes registros semióticos (Duval, 1995) que permita representar y trabajar con funciones:* Esta dificultad recae en lo complejo que resulta la conversión entre los registros de representación, fundamentalmente en la conversión de un registro gráfico a un registro algebraico. Además de dificultades ligadas al uso de informaciones que se refieren a nociones diferentes pero dentro de un mismo registro.

4. *Dificultades para trascender los modos de pensamiento numérico y algebraico:* Desde Euler, el análisis es un campo matemático organizado en torno a la noción de función, a los procesos de variación, al pensamiento funcional. Según investigaciones realizadas en Francia (Pitohué, 1996) los estudiantes que han oído de funciones durante tres años, no perciben realmente cuál es el interés y utilidad del pensamiento funcional.

   Las dificultades asociadas a la noción de función están además relacionadas con el enfoque apartado del análisis de la variabilidad y de fenómenos sujetos a cambio, sin considerar sus orígenes históricos epistemológicos. Por otro lado centrarse netamente en procesos algorítmicos conlleva a considerar la función matemática, como una fórmula mecánica, desprovista de significado, donde la construcción de tablas será un simple requisito y/o la graficación estará carente de interpretación. Conjuntamente la falta de la articulación entre las diversas representaciones de la noción de función impide ver este objeto matemático como una herramienta que amplía la capacidad de visión, de precisión, de interpretación y comprensión de fenómenos de la vida real donde está inmersa la función (Jaimes, 2012).

   En Chile se evidencian dificultades en contenidos matemáticos específicos asociados con el álgebra, dentro de esta área el trabajo con las funciones es tratado en general desde un punto de vista estrictamente formal, generando una serie de obstáculos y dificultades en la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos (Aravena, 2001). En este mismo sentido Artigue (1995), señala que las dificultades cognitivas presentes en los estudiantes son producto de los hábitos de enseñanza tradicional, pues el gran predominio que en ella se otorga al registro algebraico (simbólico-formal) impiden al estudiante lograr flexibilidad en el pasaje de un registro a otro.

   Del Castillo y Montiel (2007) explicitan que la idea escolar predominante de la noción de función, es aquella que alude a una regla de *correspondencia*, la cual ha sido ampliamente cuestionada por su carácter estático, algebraico y algorítmico. Es posible reconocer que el concepto de función ha evolucionado pasando por una visión geométrica y gráfica, para luego ser considerada como expresión analítica pero también se puede evidenciar que gran parte de su evolución, génesis e ideas germinales se ha perdido dentro del discurso matemático, es decir ha perdido sus raíces.

Sajka (2003) en su estudio respecto de la comprensión de la noción de función de un estudiante de la escuela secundaria, evidencia entre sus dificultades que la comprensión de este objeto matemático puede ser descrita bajo un Procept muy limitado. Es decir, el proceso que produce el objeto matemático función y la simbología que lo representa genera una de las mayores dificultades para los estudiantes. Por otro lado la deficiente interpretación de los símbolos utilizados en una ecuación funcional y el contexto restringido en el que algunos de ellos se producen, aludiendo a tareas escolares que conducen a procedimientos estándar, implica que los estudiantes no comprendan la noción de función desde su complejidad simbólica y formal, esto no necesariamente significa que no exista comprensión alguna de dicha noción matemática.

García, Vásquez e Hinojosa (2004), señalan en su estudio que el cambio o pasaje entre registros es la gran dificultad que encuentran los estudiantes, sobre todo cuando el pasaje es del registro gráfico al algebraico. Esta misma dificultad se ha evidenciado en Francia y Chile tras los trabajos de Duval (1994, 1998) y Guzmán (1990) respecto de los pasajes entre registros de la noción de función con estudiantes de 14 y 16 años. El que la misma dificultad se encuentre en estudiantes de distinta madurez sugiere que el carácter de esta dificultad no es de orden conceptual, sino de orden conductual, parece estar relacionada con la falta de sensibilización o de experiencia de los estudiantes con actividades y problemas que involucran estos cambios de registro. Estas dificultades se explican debido al privilegiado tratamiento del registro algebraico en la enseñanza tradicional y debido al carácter más bien ilustrativo o de soporte que se le ha asignado al registro gráfico. De allí la importancia de incrementar las aplicaciones del registro gráfico y las actividades de transferencia entre registros para el desarrollo de habilidades del pensamiento dentro de la enseñanza-aprendizaje de nociones matemáticas.

Una de las dificultades descritas por Ruiz (1998) refieren a que en ocasiones los estudiantes no logran identificar y/o considerar como funciones a aquellas cuya generalidad y arbitrariedad no permite expresarlas algebraicamente o mediante gráficas cartesianas.

En este mismo sentido Vinner (1992) en su investigación explicita concepciones que estudiantes poseen respecto de la noción de función entre ellas: "La correspondencia que constituye la función debe ser establecida por una regla con sus propias regularidades. No se considera una correspondencia arbitraria como función", "Un cambio en la variable independiente debe sistemáticamente reflejarse en la variable dependiente, por tanto una función constante no es tal, ya que $f(x) = 2$ no depende de x y además no hay variación", "Una función debe tener un término algebraico, una fórmula o una ecuación. Es una manipulación realizada sobre la variable independiente para obtener la variable dependiente. Luego, una correspondencia funcional definida por trozos no es una función sino varias", "La gráfica de una función debe ser regular, y sin cambios bruscos. Cambios imprevistos en la gráfica indican que no es función", "Una función es una correspondencia uno a uno", entre otros. Este tipo de concepciones indican que los estudiantes no logran dar sentido, ni internalizar la noción matemática, generando dificultades en la aprehensión del objeto matemático función.

1.3.3. Estudios sobre las propuestas para la enseñanza de la noción de función

Si entendemos la Didáctica de las Matemáticas como una disciplina fundamentalmente aplicada, resulta que el fin último y primordial de la investigación en educación matemática debe ser la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje. No obstante, la evolución de dicho proceso nos indica que la transferencia entre los resultados de la investigación y la realidad del aula es, en general, muy lenta y a veces escasa (Deulofeu, 2001, p. 367).

Janvier (1978), en su trabajo, establece la importancia del uso de situaciones contextualizadas cuando se aborda la noción de función, además determina el papel preponderante del lenguaje gráfico cuando se introduce el objeto matemático función y determina que el uso restrictivo de las gráficas (exclusividad de las tareas de traducción: ecuación – tabla – gráfica), pudiesen generar dificultades en la interpretación y construcción de gráficas y en la conceptualización de las funciones.

Según lo descrito por García et al. (2004) lograr el éxito en el aprendizaje de una noción matemática radica en,

> "*la actividad que se puede realizar en las diferentes representaciones, implica actividad en un registro (tratamiento), posteriormente es necesario realizar una coordinación entre los diferentes registros (conversión), enfrentar la no congruencia entre registros hasta lograr construir la estructura cognitiva que permita reconocer el objeto matemático en sus diferentes representaciones*". (p. 32)

> "*Es inconveniente acceder al concepto de función por medio de una definición, es necesario tener actividad con las diferentes representaciones, la algebraica, tablas, gráficos y el lenguaje natural, tal actividad implica creación, tratamiento y conversión entre registros de representación. El uso de métodos de enseñanza como la resolución de problemas a través de situaciones donde se establezcan diálogos heurísticos, además de la confrontación entre registros, del gráfico al algebraico y viceversa, pueden hacer aportaciones importantes a la enseñanza de los temas como el de función y otros tópicos de las matemáticas en general*". (García, et al., 2004, p. 32)

Según hemos evidenciado, en la enseñanza de la matemática se ha logrado descontextualizar el objeto matemático función de las situaciones problemáticas donde la noción matemática está inmersa. Según lo señalado por Freudhental (1983) "*El verdadero origen del concepto función está en plantear, pedir, producir o reproducir dependencias o conexiones entre variables acontecidas en el mundo físico, social o mental, esto es, en y entre estos mundos*". (p. 494)

En este mismo sentido Ruiz (1998) señala que los procesos de enseñanza, no promueven el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio, donde la noción de función encontraría una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos.

> "*Todas las situaciones asociadas a las diferentes concepciones de los estudiantes se refieren a la ejercitación de rutinas y procedimientos algorítmicos: construir tablas, calcular dominios, representar funciones, etc. Esto conduce a afirmar que el tratamiento dado por el sistema de enseñanza de la noción de función da lugar a la formación de concepciones muy limitadas y focalizadas*". (p. 430)

Una de las investigaciones realizadas en el marco de propuestas y elementos a considerar para la enseñanza idónea de la noción de función, es la de Ruiz (1998), la cual considera que tanto los profesores como agentes involucrados en el funcionamiento del sistema educativo debiesen considerar:

1. "*El conjunto de restricciones que inciden más directamente sobre las cláusulas del contrato didáctico:*
    - *Necesidad de establecer la diferenciación entre lo que se enseña y aquello que el estudiante aprende y manifiesta a través de sus producciones.*
    - *Necesidad de realizar un análisis de la frecuente pérdida de sentido de la noción de función debido a la actuación de factores externos al propio conocimiento matemático, por ejemplo la evaluación.*
    - *Necesidad de determinar la mayor o menor apertura de las situaciones de enseñanza y la gestión del profesor, esto para modificar concepciones limitadas de los estudiantes*". (p. 434-435)
2. "*El conjunto de restricciones que inciden especialmente sobre la transposición didáctica del saber:*
    - *Necesidad de conducir una vigilancia epistemológica del proceso de transposición didáctica de la noción de función. Esto con la finalidad de que el proceso de enseñanza se corresponda epistemológicamente con el saber matemático.*
    - *Analizar la idoneidad de los procesos de enseñanza de la noción de función*". (p. 435)

3. "*El conjunto de restricciones que son propias de las concepciones epistemológicas asociadas al objeto función y determinadas en su evolución histórica:*
    - *Necesidad de asociar la noción de función con problemas ligados a su génesis epistemológica.*
    - *Necesidad de unir problemas de modelización con problemas funcionales donde la función muestre su carácter de herramienta útil y operativa de la actividad matemática*". (p. 435)
    - "*Necesidad de establecer la gráfica como curva que simbolice la variabilidad y la dependencia y no sólo como un soporte didáctico ostensivo que ayuda a intuir propiedades y definiciones formales*". (p. 435-436)
4. "*El conjunto de restricciones que se derivan de las situaciones de enseñanza planteadas a los estudiantes. Esta sección se deriva de las tres anteriores, por ello, es preciso establecer un equilibrio entre ellas de tal modo que las situaciones de enseñanza:*
    - *Permitan dar una significación idónea a la noción de función.*
    - *Permitan movilizar y ampliar los límites de las concepciones estrechamente limitadas por los estudiantes del objeto matemático función.*
    - *Hagan funcionar el objeto en su totalidad y no en fragmentos aislados donde pierde gran parte de su significación matemática.*
    - *Permitan 'recontextualizar' aspectos modelizantes del objeto función asociados a su génesis epistemológica.*
    - *Permitan que el estudiante alcance la solución por motivaciones de origen matemático y no de reglas, códigos implícitos, notas, definiciones basadas en una heurística etc."*. (p. 436-437)

De acuerdo con Deulofeu (2001), la noción de función en ocasiones es presentada como un objeto matemático que no guarda relación con otros previamente trabajados, ésta es una apreciación que se tiene cuando se analizan muchos de los textos escolares. Para ello basta analizar el tratamiento que se hace al introducir la función lineal y constatar que la relación con la resolución de problemas de proporcionalidad, tema habitualmente tratado con anterioridad, tanto desde un punto de vista aritmético como geométrico (muchas veces también sin relación entre ambos), es escasa, cuando no inexistente. Es imprescindible tratar de establecer esta relación y mostrarla explícitamente a los alumnos, algo que puede y debe hacerse no sólo al tratar la función lineal sino también otros modelos elementales (la función cuadrática y el área, la función cúbica y el volumen, e incluso la función exponencial y las potencias), fundamentalmente por cuatro motivos:

- "*Para mostrar una concepción unitaria de las Matemáticas, que permita relacionar problemas y conceptos aparentemente dispares (¿cómo relacionaremos las matemáticas con otras ciencias si separamos distintas partes de las matemáticas y no las relacionamos entre sí?).*
- *Para desarrollar competencias básicas generales a través de actividades de aprendizaje propias de la noción de función pero que también es posible desarrollar desde otras nociones matemáticas tratadas con anterioridad.*
- *Para consolidar conceptos y procesos de la aritmética, la geometría o la medida que, a diferencia de ciertos aspectos funcionales tratados a nivel de introducción, deberían quedar plenamente adquiridos al finalizar la ESO.*
- *Para utilizar situaciones y problemas de la aritmética, la geometría o la medida, ya conocidos por los estudiantes, como uno de los puntos de partida para el trabajo con funciones*". (p. 371)

De la misma manera en como se ha promovido el uso de gráficas, es necesario prestar atención al uso de tablas que podrían presentarse inicialmente y utilizarse como una primera caracterización de los distintos modelos elementales de dependencia funcional. Entre los aspectos favorables del uso de tablas, está la facilidad que encuentran los estudiantes al trabajar con ellas, en comparación con otras representaciones, hasta las relaciones aritméticas que pueden establecerse (por ejemplo, los números cuadrados como suma de los números impares), pasando por la propia historia de las matemáticas (el uso de tablas para determinar leyes que permitieran la predicción de fenómenos astronómicos, lo que podríamos llamar la prehistoria de las funciones, se encuentra ya en los babilonios). Sin embargo, existen peligros en este tipo de trabajo, especialmente la discretización (y limitación) que supone el uso de tablas, que puede subsanarse con un adecuado trabajo con las gráficas (Deulofeu, 2001).

Por otra parte, una de las tareas que se deberían abordar es la de caracterizar los modelos elementales de crecimiento: proporcional, cuadrático y exponencial, tanto en situaciones contextualizadas como estrictamente matemáticas. Esta caracterización, que en general se realiza tanto a partir del gráfico como de la expresión algebraica asociados a la función, no suele abordarse a partir del uso de tablas, y resulta especialmente interesante ver qué sucede con los sucesivos incrementos de la variable dependiente, para incrementos iguales (por ejemplo unitarios, aunque no es necesario) de la variable independiente (Ibíd.).

1.3.4. Estudios sobre los conocimientos de los profesores cuando abordan la noción de función

Existen diversas propuestas de modelos con los que se tratan de determinar los elementos que constituyen el conocimiento que los profesores de matemáticas deberían tener para desarrollarse lo más eficazmente posible en su práctica. Sin embargo, aún no existe un consenso acerca de lo que un profesor debería conocer para la enseñanza de tópicos específicos como el de función.

Norman (1992) ha centrado su investigación en el análisis de la comprensión del profesor respecto del objeto matemático función. En su estudio ha constatado que no existe una comprensión profunda por parte de los profesores respecto a dicha noción matemática, esto se evidencia cuando la mayoría de los profesores presentan lagunas en cuanto a la conceptualización del objeto matemático, aprueban las definiciones informales del objeto función consideradas como útiles para determinar la funcionalidad de las relaciones, prefieren representaciones gráficas de funciones a simbólicas o numéricas, no han construido conexiones fuertes entre sus definiciones informales de función y las perciben como definiciones matemáticamente formales, identifican ejemplos estándares de funciones, poseen dificultades identificando situaciones físicas que ocasionan relaciones funcionales. Sin embargo, Norman (1992) en su estudio constata que los profesores conocen la progresión de la noción de función, a través de sus textos y parecen cómodos con aproximaciones tradicionales para la introducción y desarrollo de este objeto matemático en marcos de enseñanza.

Un esquema analítico de conocimiento de las matemáticas para enseñar conceptos matemáticos en general, y en particular la noción de función ha sido construido por Even (1993) quien ha estudiado el conocimiento de las matemáticas de los profesores y sus interrelaciones con el conocimiento de contenido pedagógico en el contexto de enseñanza de la noción de función. Este esquema está compuesto de siete aspectos que según Even constituyen facetas principales del conocimiento de matemáticas de los profesores sobre un tópico matemático específico: rasgos esenciales, representaciones diferentes, formas alternativas de aproximación, el valor del concepto, repertorio básico, conocimiento y comprensión del concepto y conocimiento sobre las matemáticas.

En este mismo sentido Even (1993) tiene un interés más profundo por el estudio de los rasgos esenciales del concepto de función. Debido a ello, investiga las interrelaciones entre el conocimiento de contenido y el conocimiento de contenido pedagógico de los profesores relativo a dos rasgos esenciales del concepto de función: arbitrariedad y univalencia. En su análisis se evidencia que algunos profesores no tienen una concepción de función de acuerdo con la definición actual del concepto de función. La apreciación de la naturaleza arbitraria de las funciones está ausente y muy pocos pueden explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia. Esta concepción limitada de función influencia el pensamiento pedagógico de los sujetos. Por lo tanto, cuando describen funciones para los alumnos, muchos usan su -concepto imagen- y tienden a no emplear términos modernos. Además, muchos eligen dar a los estudiantes reglas para seguirlas sin tener en cuenta la comprensión del objeto matemático (Vinner, 1983).

Even (1993) establece la necesidad de mejorar la preparación de los profesores de matemática si se pretende mejorar la enseñanza. Esto implica diseñar cursos de forma diferente, es decir, desde puntos de vista constructivistas de la enseñanza y el aprendizaje. Pero esto no es suficiente, también los profesores han de desarrollar un repertorio diferente de herramientas de enseñanza. El razonamiento pedagógico (Shulman, 1987) depende, además de reforzar el conocimiento matemático, de la integración de diferentes dominios de conocimiento.

Por otro lado, Wilson (1994) en su estudio examina el conocimiento y creencias desarrollado por un futuro profesor de matemáticas, cuando participa en un curso de educación matemática que enfatiza la conexión matemática y pedagógica, y las aplicaciones al concepto de función. En este trabajo se evidencia que la idea de los profesores respecto de la noción de función era consistente con el punto de vista que se tenían de las matemáticas. Esta se entendía como una colección de procedimientos concretos para ser aplicados en contextos aislados y obtener respuestas correctas a problemas bien definidos. Además, demostraban una comprensión débil de las relaciones entre varias representaciones y procedimientos. Por otro lado, mostraban poca apreciación por la utilidad de las funciones y estaban extremadamente limitados en su habilidad para operar con y usar funciones de forma significativa; el conocimiento que tenía en esta área era limitado y estaba fragmentado. Respecto a lo anterior, es importante comprender que las funciones, permiten describir relaciones entre las matemáticas y el mundo real, esto admitirá operar flexiblemente en clases cuando se aborde funciones en diferentes representaciones, usar funciones para resolver problemas e identificar otras conexiones importantes en medio del concepto de función.

Font y Acevedo (2003) aun cuando no estudian directamente las concepciones de los profesores, establecen cómo éstos tienen la creencia de que el uso de metáforas dinámicas en su discurso facilita la comprensión de los alumnos sobre la representación gráfica de funciones.

> "*Las metáforas se caracterizan por crear un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se trasladen una serie de*

> *características y estructuras. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultar otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Otra de las funciones que cumple la metáfora es la de conectar diferentes sentidos y, por tanto, ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto matemático*". (Acevedo & Font, 2004, p. 156)

En este mismo sentido, Font y Acevedo (2003) y Acevedo, Font y Giménez (2003) detectan el siguiente fenómeno al analizar el discurso del profesor cuando explica la representación gráfica de funciones en el bachillerato: el profesor usa expresiones que sugieren, entre otras, metáforas del tipo "la gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica". También se muestra que: el profesor usa de manera poco consciente estas metáforas y cree que sus efectos en la comprensión de sus alumnos son inocuos; contrariamente a lo que cree el profesor, los alumnos estructuran su conocimiento sobre las funciones en los términos metafóricos que ha utilizado el profesor de manera inconsciente.

Otro trabajo realizado en el marco del estudio de los conocimientos del profesor cuando aborda la noción de función se encuentra el de Sánchez y Llinares (2003) quienes en su investigación estudiaron a cuatro profesores en formación para identificar la influencia de las formas de conocer la materia y las imágenes que tienen de las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje en su hipotética presentación de la materia para la enseñanza en el contexto de las funciones. Para estos autores el conocimiento de la materia deriva de una diversidad de fuentes y no todos ejercen la misma influencia al momento que los profesores en formación piensan sobre la materia con el propósito de enseñarla. Por lo tanto, los profesores en formación deberían aproximarse al contenido pedagógico de un tópico específico en más de una manera.

De acuerdo con Ramos (2005), si bien existen varias investigaciones sobre modelización, en la revisión de la literatura que hemos realizado, se han encontrado pocas investigaciones referidas a las concepciones, creencias y conocimientos de los profesores sobre estos temas. Sin embargo, Weber, Tallman y Middleton (2015) señalan en su investigación que la Instrucción de Modelado permite que los profesores conciban las matemáticas como una herramienta para explicar fenómenos científicos y a su vez proporciona a los maestros la oportunidad de reflexionar sobre el proceso de aprendizaje de las matemáticas, que eran tanto fundamental para el desarrollo del conocimiento de la materia y del conocimiento didáctico del contenido.

1.4. UNA APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Como hemos evidenciado a lo largo de este capítulo, la función ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (representaciones, esquemas cognitivos, dificultades en torno a la enseñanza-aprendizaje de la función y concepciones de los profesores) e instruccionales (estrategias y alternativas para la enseñanza de la función). Esta gran cantidad de resultados de la investigación didáctica sobre la función, plantea un reto que sintetizamos con la pregunta: ¿Qué es lo que debería proponer el currículo chileno, a través, de sus programas de estudio y libros de texto para orientar idóneamente los procesos de enseñanza-aprendizaje de la noción de función?

En este sentido, en el presente trabajo de investigación, nos hemos propuesto indagar los significados pretendidos por el currículo Chileno sobre la noción de función respecto del significado holístico. Esta caracterización permitirá orientar los conocimientos que profesores deberían tener para gestionar idóneamente los aprendizajes de sus estudiantes sobre la noción de función.

Lo anterior es con la pretensión de establecer pautas que nos ayuden, si bien es cierto, no a responder cabalmente la pregunta anterior, pero sí a realizar aproximaciones a su respuesta, obteniendo así, una visión más amplia de hacia dónde seguir o por dónde avanzar para el diseño de acciones que permitan la mejora de la formación de profesores mediante el desarrollo y/o la potenciación del conocimiento didáctico-matemático requerido para la enseñanza de la función, en este mismo sentido se pretende que dichos profesores puedan gestionar y/u orientar idóneamente los procesos de enseñanza de la noción de función en contextos escolares.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico, Problema de Investigación y Metodología

2.1. INTRODUCCIÓN

El presente capítulo está organizado en tres grandes apartados. En el primero de ellos presentamos las nociones teóricas de un modelo conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática. Posteriormente en un segundo apartado hemos establecido la fundamentación teórica del planteamiento del problema donde se presentan tanto objetivos como las preguntas de investigación. Finalmente hemos descrito distintas fases y actividades conducentes a la consecución de nuestros objetivos de investigación.

2.2. EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

El marco teórico que hemos adoptado para llevar a cabo nuestro propósito es el enfoque ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática desarrollado desde 1994 en diversos trabajos de Godino y colaboradores (Godino & Batanero, 1994; Godino & Batanero, 1998; Godino, Batanero & Font, 2007). El EOS incluye un modelo epistemológico, antropológico y sociocultural de la matemática, además de un modelo cognitivo e instruccional que permite a través de sus herramientas teóricas realizar análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Dicho marco teórico nos permitirá realizar un análisis detallado de los significados de la noción de función pretendidos en el currículo nacional chileno.

A continuación se describen las nociones centrales del EOS que serán de utilidad para el desarrollo de esta investigación.

2.2.1. Sistemas de prácticas personales e institucionales

Dentro del EOS, la noción de *sistema de prácticas* juega un papel central tanto desde el punto de vista epistemológico como didáctico. Godino y Batanero (1994) entienden por sistema de prácticas a *"toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas"* (p. 334). Así, estas prácticas pueden ser realizadas por una persona o compartidas en el seno de una institución, lo cual dará lugar a las nociones de *sistemas de prácticas personales* y *sistemas de prácticas institucionales.* Éstas son definidas de la siguiente manera (Ibíd.):

> *"El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I"*. (p. 337)

> *"Los sistemas de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación Pp(C)"*. (p. 339)

Como señalan Font, Godino y Gallardo (2013), las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los textos matemáticos son leídos y producidos, y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas (p. 104).

2.2.2. Objetos intervinientes en los sistemas de práctica

En el EOS se adopta de entrada un cierto pragmatismo puesto que se considera a los *objetos matemáticos* como entidades intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver un campo de problemas (Godino & Batanero, 1994). En las prácticas matemáticas intervienen objetos *ostensivos* (símbolos, gráficos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc.), dichos objetos son utilizados al hacer matemáticas y son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas, y dan cuenta de su organización y estructura. Ahora bien, dado que los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales, entonces si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución los objetos intervinientes se considerarán *objetos institucionales*, mientras que si tales sistemas corresponden a una persona serán considerados *objetos personales*. Godino y Batanero (1994) lo señalan de la siguiente manera:

> *"El objeto institucional OI es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de PI(C). Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de OI" (p. 338). Mientras que el "objeto personal Op es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de Pp(C)".* (p. 339)

Además dentro del EOS se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, intervinientes en los sistemas de prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007):

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
- *Situaciones-Problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- *Conceptos/Definiciones* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, derivada).
- *Proposiciones/Propiedades* (enunciados sobre conceptos).

- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

De acuerdo con Pino-Fan (2014) estos seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

2.2.3. Significados y tipos de significados de los objetos matemáticos

En el EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función, deriva, integral…), desde una perspectiva pragmático-antropológica. El significado de un objeto matemático se define como el "*sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones–problemas en las que dicho objeto interviene"* (Pino-Fan, 2014, p. 45). Así, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo cual da origen a los *significados institucionales* y *significados personales* respectivamente. Godino y Batanero (1994) definen estos significados de la siguiente manera:

> *"Significado de un objeto institucional OI es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge OI en un momento dado". (p. 340)*

> *"Significado de un objeto personal Op es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto Op en un momento dado". (p. 341)*

Es obvio que los objetos personales e institucionales no tienen un único significado. Por ejemplo, en una clase de matemáticas (una institución) en donde se lleva a cabo un sistema de prácticas de donde emerge el objeto "*función*", el significado que los estudiantes atribuyan a dicho objeto dependerá de los sistemas de prácticas que lleve a cabo esa institución en particular, y que es distinto al significado subyacente a los sistemas de prácticas que lleve a cabo otra institución.

Los sistemas de prácticas se han categorizado teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre la faceta personal, de un sujeto, de las prácticas y la faceta institucional. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia.

La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de tipologías de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales 16 (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011). De acuerdo con Godino y Font (2007), son cuatro los tipos de significados institucionales (p. 2):

- *Implementado*: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- *Evaluado*: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes
- *Pretendido*: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- *Referencial:* sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La

determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico–epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Estos mismos autores (Ibíd., p. 2), proponen tres tipos de significados personales:

- *Global:* corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar el sujeto relativas a un objeto matemático.
- *Declarado*: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- *Logrado*: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

Como señalan Godino y Batanero (1994) los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados. Además, el profesor, como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia (Pino-Fan, Castro, Godino & Font, 2013).

2.2.4. Configuraciones de objetos matemáticos

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (resolver un problema sobre la aplicación de la función cuadrática en la vida real) vemos el uso de los objetos matemáticos primarios descritos en la sección 2.2.2; por ejemplo, *lenguajes* verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones–problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos los cuales se articulan conformando una *configuración ontosemiótica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2015), la cual puede ser de carácter epistémico o cognitivo, según se refiera a objetos matemáticos y procesos institucionales o personales, respectivamente.

2.3. SIGNIFICADO HOLÍSTICO DE REFERENCIA DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Como nuestro interés está focalizado sobre la noción de función, una vez que introducimos las nociones teóricas del marco teórico que hemos adoptado –concretamente las ideas sobre el significado presentadas en la sección 2.2.3–, y debido a los resultados del estudio que realizamos en la sección 1.2, una pregunta que surge de forma espontánea es ¿cuál es el significado de la noción de función?, o de forma más detallada, *¿cuál es el significado global de referencia de la noción de función?* De acuerdo con Pino-Fan, Godino y Font (2011),

> "*El significado global de referencia se define a partir de dos nociones: significado global (también denominado significado holístico u holosignificado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático) y significado de referencia (entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio. Para una institución de enseñanza concreta, el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático)*". (p. 147)

Además estos autores señalan que los significados parciales de los objetos matemáticos están asociados a las configuraciones epistémicas que se movilizaron para resolver ciertas situaciones problemas, en determinados períodos históricos, que dieron paso al surgimiento, evolución, formalización y generalización de determinado objeto matemático (Ibíd.), en nuestro caso, la función.

En particular, hemos realizado una revisión de los estudios histórico-epistemológicos que se han desarrollado en relación a la función. Este estudio lo hemos presentado en la sección 1.2 del primer capítulo. Adicional a dicho estudio, se ha contemplado el trabajo de Biehler (2005), sobre la reconstrucción de los significados de la noción de función desde el punto de vista didáctico, para determinar que la noción de función tiene al menos los siguientes seis significados parciales:

La función como correspondencia: La noción de función como *correspondencia* tiene sus raíces en el desarrollo del concepto de número. Durante la época antigua el conteo implicaba una *correspondencia* entre un conjunto dado de objetos y una secuencia de números para contar, de esta manera comienzan a desarrollarse las primeras manifestaciones que contienen algunos aspectos propios de la noción de función (Sastre, Rey & Boubée, 2008). En este sentido se entenderá por *correspondencia* a aquello que asocia elementos entre dos conjuntos. Un problema cuyas características tanto en el planteamiento como en las posibles soluciones movilizan esta acepción del objeto matemático función, fueron tablas numéricas babilónicas (2000 a.C. – 500 a.C.) donde se establecían cálculos tan llamativos como la de la suma de *n* términos de una progresión geométrica.

La función como relación entre magnitudes variables: La noción de función como relación entre magnitudes variables, está asociada al estudio de fenómenos sujetos al cambio, tales como el calor, la luz, la distancia, la velocidad, etc., que pueden poseer distintos grados de intensidad y cambian continuamente entre ciertos límites dados. A partir de estas indagaciones se estableció la noción de cantidades *variables* dependientes e independientes (Ruiz, 1998). El estudio de tablas numéricas obtenidas a partir de mediciones de valores cambiantes de diferentes magnitudes, condujeron a una primera aproximación de ciertas *relaciones funcionales*, es decir pasar de una simple tabulación de datos empíricos a la búsqueda de regularidades, implica la existencia de un cierto 'instinto de funcionalidad' (Ibíd., p.192). Es así como el análisis de regularidades en las relaciones entre magnitudes cambiantes (variables) constituye una fuente central para establecer un acercamiento a la noción de función (Biehler, 2005). Todas las situaciones ligadas a los fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables son las problemáticas que, desde la matemática prehelénica, movilizan a esta acepción de la noción de función.

La función como representación gráfica: Esta acepción de la noción de función surge de la intención de representar la relación de variabilidad entre magnitudes físicas por medio de gráficas. Oresme en el siglo XIV desarrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas, donde una relación entre magnitudes se representa mediante una figura que pretende evidenciar la intensidad de una cualidad en relación con otra de la cual depende. Oresme establece que *"Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua"* (Youschevitch, 1976, citado en Ruiz, 1998). Un problema que permite un acercamiento a la noción de función por medio de una representación gráfica se evidencia en la figura 2.1, que representa una velocidad que decrece uniformemente desde el valor OA en O, a cero en B, quedando dibujado un triángulo. El rectángulo OBDC, determinado por E (punto medio de AB) tiene la misma área que el triángulo OAB, y representa un movimiento uniforme a lo largo del mismo intervalo de tiempo. Por otro lado, la idea de función como curva es parte del significado de función como expresión gráfica. Según Ruiz (1998), *"tomando sucesivamente infinitas diversas cantidades para la línea x, encontraremos también infinitas para la línea y, y así, tendremos una infinidad de diversos puntos por medio de los cuales describiremos la línea curva pedida"* (p. 194). Biehler (2005) señala que un problema que subyace a la idea de función como el trazo de una curva a mano alzada, es la intención de asociar a cada curva una expresión algebraica, sin embargo responder a esta problemática implicaría recurrir a métodos numéricos y a la búsqueda de condiciones que aseguren la existencia de dicha expresión –en la actualidad análisis funcional–.

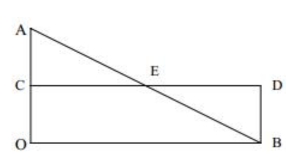


Figura 2. 1. Movimiento Uniforme

La función como expresión analítica: La primera consideración de la función como expresión analítica es la que establece Bernoulli en 1718. Posteriormente Euler apoyado en las nociones de su maestro Bernoulli, propone la siguiente definición de función *"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes"* (Euler, citado por D'hombres, et al., 1987, p.194). Para otorgar a esta definición una mayor posibilidad de generalidad, Euler admitía tanto valores reales como imaginarios del argumento. Según Euler, una función conceptuada como una expresión analítica se obtiene mediante una clase de operaciones aritméticas, las potencias y raíces. A ellas se adjuntó las funciones trascendentes elementales: e^z, $\ln z$ y las funciones trigonométricas (Ruiz, 1998). Euler estableció funciones algebraicas y trascendentes, las primeras formadas por operaciones algebraicas, y las últimas necesitan para su formación operaciones trascendentes. Euler complementó esta clasificación con la introducción de funciones uniformes y multiformes, pares e impares, y definió criterios para su determinación. Sin embargo, al restringirse en la consideración de función como expresiones analíticas, todas las funciones las consideraba representadas por una serie de potencias: $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots$. Más tarde es ampliada la expresión analítica para potencias de la variable z, no sólo enteras, sino cualesquiera, afirmando que toda función de z puede ser transformada en una expresión de la forma: $f(z) = Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + \cdots$ (siendo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ números cualesquiera). Esta afirmación tan rotunda, no es de extrañar, ya que, en la época de Euler, casi la totalidad de las funciones utilizadas eran analíticas. Los problemas cuyas características movilizan esta acepción de la noción de función, propios del cálculo infinitesimal, son los que se intentaron resolver a través de una profunda interconexión entre las ideas físicas y matemáticas. Newton en su obra el método de fluxiones y el desarrollo en series infinitas (basado a su vez en las de aproximación e interpolación), muestra que ciertas funciones pueden ser descritas mediante sumas infinitas y los aspectos geométricos representativos ligados a dichas expresiones algebraicas.

La función como correspondencia arbitraria: Durante el siglo XIX se fueron creando las condiciones necesarias para el tratamiento de las funciones como *correspondencias* de tipo muy general. Esta nueva acepción de la noción de función es definida ampliamente por Dirichlet (1837), quien la enuncia de la siguiente manera "*Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que se atribuye un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable dependiente x* " (Dirichlet, 1837 citado por Boyer, 1986, p.687). Para evidenciar lo *arbitraria* que podía ser la regla de correspondencia, Dirichlet propuso una función de 'muy mal comportamiento': Sean c y d dos números reales distintos; cuando x sea racional sea $y = c$, y cuando x es irracional sea $y = d$. Esta función es tan patológica que es discontinua para todos los valores de x (Ruiz, 1998). Posteriormente Riemann (1858) constituye la siguiente definición: "*Se dirá que y es función de x si a todo valor bien determinado de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que una a x y a y*". (Riemann, 1858 citado en Ruiz, 1998, p.183)

La función a partir de la Teoría de Conjuntos: A finales del siglo XIX, surge la teoría de conjuntos con Cantor. Su impacto se extiende al desarrollo de la topología, el álgebra y el análisis funcional entre otros. La influencia que dicha teoría posee sobre la noción de función, permite establecer la definición formal del objeto matemático función: Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una función f definida en un conjunto X y con valores en Y es una ley mediante la cual se hace corresponder a cada elemento de X un elemento de Y. Se dice también que f es una aplicación de X en Y. Para un elemento genérico $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ denotaremos habitualmente por $f(\mathrm{x})$ el elemento Y correspondiente a ese x, y se dirá también que $f(\mathrm{x})$ es el valor de la función f en x, esto se expresa a veces mediante la igualdad $\mathrm{y} = f(\mathrm{x})$. En el intento de precisar y dar mayor rigor a la definición de este objeto matemático, se llega a la determinación de una función como la terna $f = (\mathrm{G}, \mathrm{X}, \mathrm{Y})$, en donde $\mathrm{G}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}$ son conjuntos que verifican las siguientes condiciones: a) $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$; b) Para todo $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ existe una y sólo una $\mathrm{y} \in \mathrm{Y}$, tal que $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{G}$, G es la gráfica de la función f. El único elemento y de Y tal que $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{G}$ se llama valor de la función f en x, y se utiliza para designarlo $\mathrm{y} = f(\mathrm{x})$. Es evidente que la gráfica G es el conjunto de pares de la forma $(\mathrm{x}, f(\mathrm{x}))$ donde $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.

A X se le denomina conjunto de partida de f, y a Y conjunto de llegada de f (Godemat, 1971, p. 63-64, citado en Ruiz, 1998). Uno de los problemas que movilizan este significado de la noción de función son las situaciones de variación que debían ser modeladas funcionalmente, dentro de cualquier dominio científico, es decir extender la definición a una relación entre conjuntos arbitrarios (Ruiz, 1998).

2.4. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Cuando nosotros como formadores de profesores pretendemos evaluar o caracterizar el conocimiento matemático para la enseñanza (o conocimiento didáctico-matemático) sobre un objeto matemático específico –en nuestro caso el objeto función– de un grupo de profesores una pregunta que surge de forma espontánea es *¿Qué es, o qué significa, realmente tal objeto matemático?* La respuesta a esta cuestión podría resultar en la reconstrucción del 'significado global' u 'holístico' del objeto matemático bajo estudio.

Existen dos formas de responder a dicha pregunta, o al menos dos formas de aproximarnos a la respuesta:

- La primera es desde el punto de vista de los establecimientos educacionales (centros educativos). Para esto se debería hacer un estudio de los significados pretendidos por el currículo de matemática y los libros de texto, para un objeto matemático concreto. La mayoría de las investigaciones que realizan reconstrucciones de los significados de los objetos matemáticos, lo hacen desde este punto de vista. Usualmente en dichas investigaciones se analiza la forma en que se presenta un objeto matemático en todos los niveles escolares, desde que se introduce hasta que se formaliza y sus posibles generalizaciones en el ámbito escolar.
- La segunda forma de responder a la pregunta es pensando en la naturaleza histórico-epistemológica que ésta tiene. Desde nuestro punto de vista no hay una mejor manera de conocer qué es o qué significa realmente un objeto matemático que mirando en su evolución cómo surge, cómo evoluciona, cómo se formaliza y cómo se generaliza. Obviamente no se trata meramente de 'relatar' o mirar la

historia del objeto matemático desde un punto de vista simplista, sino que se trata de analizar y caracterizar las grandes problemáticas, y las prácticas matemáticas desarrolladas para resolverlas, que dieron paso al surgimiento y evolución del objeto matemático en cuestión.

Así, si nosotros elegimos responder a la pregunta desde el primer enfoque, se corre el riesgo de reconstruir el significado global de forma incompleta, ya que los currículos de matemáticas son establecido por las agencias de política educativa –en el caso de Chile por el Ministerio de Educación–, los libros de texto son escritos con parámetros editoriales que raramente consideran los resultados de las investigaciones, etc. Además, a lo anterior se suma que los significados de los objetos matemáticos dependen de los objetivos de cada institución educativa. En este sentido, Biehler (2005) establece que los significados de ciertas nociones matemáticas difieren en gran medida de acuerdo a las diferentes funciones sociales de las instituciones educativas, y respecto de las hipótesis sobre aquello que los estudiantes fueron capaces, y están dispuestos, a aprender en condiciones sociales y escolares dadas.

Ahora bien, si nosotros elegimos responder a la pregunta desde la segunda perspectiva, entonces, para el significado de un objeto matemático se tienen, al menos, tres niveles (Figura 2.1):

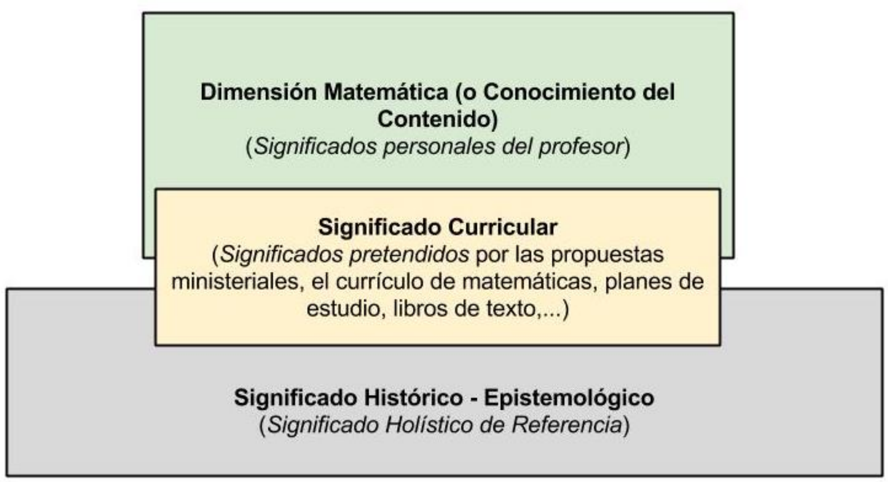


Figura 2. 2. Niveles de los significados de los objetos matemáticos

Así, como se puede observar en la Figura 2.2, para responder a la pregunta sobre ¿Cuál es el significado del objeto función?, se requiere transitar por tres niveles: 1) El primero es el estudio del significado histórico-epistemológico mediante el cual se podrán obtener los diversos significados parciales de la noción de función que integran el significado holístico de referencia (ver sección 2.3). 2) El segundo nivel refiere al estudio del significado de la noción de función pretendido por el currículo de matemáticas y los libros de texto. En este nivel se deberá incluir un estudio sobre la representatividad del significado holístico de referencia en el o los significados pretendidos por el currículo. 3) El tercer nivel refiere a la dimensión matemática del conocimiento didáctico-matemático (Pino-Fan & Godino, 2015) de los profesores sobre la noción de función. Para la implementación en el aula de los significados del objeto función, el profesor toma como referencia los significados pretendidos por el currículo de matemáticas (Pino-Fan, Castro, Godino & Font, 2013), de ahí la importancia que los significados pretendidos por el currículo sean representativos del 'verdadero' significado de la noción de función (significado holístico de referencia). De acuerdo con Biehler (2005), el significado personal del profesor debe estar constituido por sus creencias, y en particular, por lo que ellos consideran aspectos importantes del significado de una noción matemática. Si los profesores comparten algunos de los 'significados ricos' (i.e., idóneos, representativos del significado holístico) que están implícitos en el currículo, y además éstos sirven como referencia para sus planificaciones de clase, entonces es probable que los significados que pretenden implementar en el aula sean representativos del significado holístico del objeto matemático.

Por otro lado, tanto para evaluar como para diseñar ciclos de formación de profesores con el fin de fomentar la dimensión matemática –y aspectos de la dimensión didáctica relacionados con el conocimiento especializado de la dimensión matemática– del conocimiento didáctico-matemático de los profesores (Pino-Fan & Godino, 2015), el primer paso es reconstruir el significado holístico de referencia del objeto matemático –este estudio lo hemos llevado a cabo en las secciones 1.2 y 2.3 para la función–. El segundo paso reconstruir el significado pretendido por el currículo de matemáticas –considerando el par <programas de estudio, libros de texto>–. El tercer paso es el estudio de la siguiente cuestión que refiere a nuestro problema de investigación: ¿Qué tan representativo es el significado pretendido por el currículo de matemáticas respecto del significado holístico de referencia de la noción de función?

Replanteando la cuestión anterior, nuestro problema concreto de investigación (PI) puede resumirse con la siguiente pregunta:

> *PI. ¿El significado pretendido por el currículo Chileno (entendido como la dupla <programas de estudios, libros de texto>) sobre la noción de función, es representativo del significado holístico de referencia de dicho objeto matemático?*

Para responder a la pregunta anterior (PI) debemos responder a las siguientes preguntas concretas de investigación (PCI):

> *PCI-1. ¿Cuál es el significado holístico de referencia de la noción de función?*

> *PCI-2. ¿Cuál es el significado pretendido por el currículo Chileno (entendido como la dupla <programas de estudios, libros de texto>) de la noción de función?*

2.4.1. Objetivos de investigación

Con el fin de responder, o aproximarnos a la respuesta de PI, hemos planteado el siguiente objetivo general (OG):

> *OG. Evaluar la representatividad de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función respecto del significado holístico de referencia de dicha noción.*

Para poder conseguir el objetivo general y así responder a las preguntas concretas de investigación, hemos propuesto los siguientes objetivos específicos (OE):

OE-1. Determinar los significados parciales de la noción de función por medio de la caracterización del par <prácticas matemáticas, configuraciones epistémicas>, en las diversas problemáticas que se abordaron a lo largo de la historia, y que dieron paso al surgimiento, evolución y formalización de la noción de función.

OE-2. Reconstruir el significado holístico de referencia a partir de la diversidad de significados parciales identificados OE-1.

OE-3 Determinar el significado pretendido en los programas de estudio propuestos por el Ministerio de Educación de Chile sobre la noción de función.

OE-4. Determinar el significado pretendido por los libros de texto sugeridos, en los planes de estudio propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, para el estudio de la noción de función.

OE-5. Reconstruir el significado pretendido por el currículo Chileno sobre la noción de función, a partir de los resultados OE-3 y OE-4.

En la siguiente sección introduciremos las nociones metodológicas que nos ayudarán a conseguir cada uno de los objetivos planteados anteriormente.

2.5. METODOLOGÍA

La siguiente investigación trata de un estudio *cualitativo* (Rodríguez & Valldeoriola, 2009) puesto que estamos interesados en caracterizar las *configuraciones epistémicas* (i.e., tipos de situaciones-problemas, elementos lingüísticos, conceptos-definiciones, proposiciones-propiedades, procedimientos y argumentos) asociadas a las prácticas matemáticas propuestas tanto en los programas de estudio, como en los libros de texto. Para esta investigación, en congruencia con los desarrollos de Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), entenderemos por currículo a la dupla <Programas de estudio, Libros de

Texto>, toda vez que estos dos elementos son complementarios en los procesos de planificación e implementación de las clases de matemáticas.

Además, el análisis de dichos libros de texto se hace debido a la importancia que estos adquieren para los profesores en la implementación de clases. La dependencia que los profesores establecen con los libros de texto, ha sido indagada por Nathan y Koedinger (2000), quienes manifiestan, "*Es razonable suponer que el uso de los libros de texto en la estructuración diaria de las lecciones de clase, tareas semanales y la secuencia curricular anual, lleva a los profesores a internalizar la imagen de las matemáticas que implícitamente transmiten.*" (p. 228)

Por su parte, el trabajo de Cooney (1985), reveló que los libros de texto son la influencia primaria para las concepciones curriculares de los maestros, así como para su estilo de presentación en la clase. Adicionalmente, Love y Pimm (1996) señalan, *"El libro es todavía, en gran medida, la tecnología más extendida y usada en las clases de matemáticas. Debido a su ubicuidad el libro de texto ha moldeado nuestra noción de la matemática y como debe enseñarse."* (p. 402)

Así, el análisis conjunto de los Programas de Estudios y de los libros de texto, nos permite estudiar tanto el tratamiento que se le da a la noción de función, como los significados pretendidos en el currículo de matemáticas de Chile.

A continuación, en la siguiente sección presentamos las fases que hemos planificado para llevar a cabo nuestro estudio.

2.5.1. Fases de la investigación

Para lograr los objetivos de esta investigación, nos hemos propuesto las siguientes fases de investigación:

Fase 1: Tareas de investigación relacionadas con OE-1

- Revisión y análisis de las investigaciones de tipo histórico-epistemológicas desarrolladas en torno al objeto función, con la finalidad de identificar las principales problemáticas, así como las prácticas matemáticas desarrolladas para su solución, que dieron paso al surgimiento, evolución, y formalización, de dicha noción.

- Caracterizar las prácticas matemáticas identificadas con la tarea anterior, a partir de la identificación de los elementos de la configuración ontosemiótica epistémica. Cada una de las configuraciones epistémicas identificadas, llevará asociado un significado parcial del objeto función.

Fase 2: Tareas de investigación relacionadas con OE-2

- Organizar y vincular los significados parciales obtenidos como resultado de la Fase 1, para reconstruir el *significado holístico de referencia* del objeto función.

Fase 3: Tareas de investigación relacionadas con OE-3

- Estudiar y analizar los programas de estudio, de octavo básico a cuarto medio, propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, con la finalidad de identificar las prácticas matemáticas que se sugieren para la introducción y estudio de la función.
- Caracterizar las prácticas identificadas con la tarea anterior, mediante la descripción de las configuraciones ontosemióticas epistémicas asociadas a éstas. Cada una de las configuraciones epistémicas identificadas y descritas, llevará asociado un significado pretendido por los programas de estudio sobre la noción de función.

Fase 4: Tareas de investigación relacionadas con OE-4

- Estudiar y analizar los libros de texto sugeridos por los programas de estudio, de octavo básico a cuarto medio, propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, con la finalidad de identificar las prácticas matemáticas previstas para el estudio de la función.

- Caracterizar las prácticas identificadas con la tarea anterior, mediante la descripción de las configuraciones ontosemióticas epistémicas asociadas a éstas. Cada una de las configuraciones epistémicas identificadas y descritas, llevará asociado un significado pretendido por los libros de texto sobre la noción de función.

Fase 5: Tareas de investigación relacionadas con OE-5

- Estudiar los vínculos entre los significados pretendidos por los programas de estudio (resultado de la fase 3), con los significados pretendidos por los libros de texto (resultados de la fase 4), con la finalidad de determinar los significados sobre la noción de función, pretendidos por el currículo chileno.

Fase 6: Tareas de investigación relacionadas con OG

- Estudiar la correspondencia entre los significados pretendidos por el currículum chileno (resultado de la fase 5) respecto del significado holístico de referencia (resultado de la fase 2), sobre la noción de función. Este estudio nos permitirá evaluar la representatividad (y riqueza matemática) de los significados pretendidos por el currículum chileno.

2.5.2. Recolección de datos y contexto

Para el desarrollo de nuestro estudio hemos realizado una profunda revisión de los Programas de estudios y libros de textos de matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación de Chile. Esto con la finalidad de identificar a lo largo del currículo chileno, las diversas prácticas matemáticas asociadas a los diversos significados del objeto matemático función.

El currículo Chileno establece, y plantea dentro de las bases curriculares para la Matemática, los principales propósitos de esta disciplina, entre ellos enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para la resolución de problemas contribuyendo a un pensamiento crítico, reflexivo y autónomo por parte de los estudiantes, aportando al desarrollo de capacidades de comunicación, razonamiento, abstracción y análisis. Para la concreción de estos propósitos los planes de estudio han sido redactados en objetivos de aprendizaje, que muestran desempeños medibles y observables de los estudiantes. Estos se organizan en cuatro ejes temáticos: *Números*, *Álgebra*, *Geometría*, y *Datos y azar*. En este sentido la noción de función a lo largo del currículo se enmarca dentro del eje temático Álgebra (Mineduc, 2015).

La política pública del Estado chileno en materia de *textos escolares* establece la entrega sistemática y gratuita de libros de texto a todos los estudiantes de los establecimientos educacionales municipales y subvencionados del país. Los textos escolares son una herramienta clave en el proceso de enseñanza aprendizaje, y representan el vehículo de transmisión curricular (Mineduc, 2015).

Las bases curriculares constituyen, de acuerdo a la Ley General de Educación, un listado único de Objetivos de Aprendizaje, Objetivos Fundamentales, Contenidos Mínimos Obligatorios y Aprendizajes Esperados (Mineduc, 2015).

Desde el punto de vista curricular, el primer acercamiento explicito que tienen los estudiantes al objeto matemático función, es en octavo año básico –estudiantes de 13 años de edad–. Luego dicho objeto matemático será trabajado durante los próximos años de escolaridad, transitando desde las definiciones de función lineal, función afín –durante primer año medio–, función exponencial, función logaritmo y función raíz –durante segundo año medio–, función cuadrática –durante tercer año medio–, y finalmente función inversa y función potencia –durante cuarto año medio–.

El análisis conjunto de los Programas de Estudios y de los libros de texto, nos permitirá estudiar tanto el tratamiento que se le da a la función como los significados pretendidos en el currículo de matemáticas.

2.5.3. Técnicas para el análisis de los datos

Para el análisis de los planes de estudio y los libros de texto, se considerará la metodología propuesta en Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), la cual propone para los análisis de los significados curriculares, cinco criterios (p. 130-132):

- *Representatividad de los campos de problemas propuestos:* La elección de tareas matemáticas que pongan en juego los objetos y significados matemáticos es crucial para promover aprendizajes significativos. Para Freudenthal: "[La matemática como una actividad humana] es una actividad de resolución de problemas, de buscar problemas, pero es también una actividad de organización de una disciplina…" (Freudenthal, 1971, p. 413-414).

  Los significados de objetos matemáticos están ligados a los sistemas de prácticas realizadas para resolver un determinado tipo de problemas, estos problemas deben ser representativos del campo correspondiente, a fin de que los significados que se propongan a los estudiantes sean representativos del significado global del objeto en cuestión.

- *Tipo de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas:* Durante el proceso de análisis de la idoneidad epistémica es necesario considerar los distintos lenguajes utilizados para referir a los diferentes tipos de objetos matemáticos, así como los tratamientos y conversiones entre los mismos.

- *Representatividad de los elementos regulativos y argumentativos:* A partir de los elementos lingüísticos identificados con el criterio anterior, se hace posible la identificación de definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos propuestos tanto en los Programas de Estudios como en libros de texto de matemáticas.

- *Conocimientos previos a la introducción de la función:* Este criterio se refiere a la enumeración, presentación y relación entre los conocimientos previos de la noción de función, que se formulan tanto en los libros de texto como en los Programas de Estudios.

- *Representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto del significado global de referencia:* Una de las tareas que son propias del maestro es el diseño instruccional, en la cual se involucran diversos aspectos tales como los epistémicos (contenidos), los cognitivos o los instruccionales. El conjunto de contenidos matemáticos que se proponen en los Programas de Estudios y en los textos, corresponden a una elección por parte de la institución: el currículo pretendido. Esos contenidos matemáticos y los significados conferidos a estos en los textos representan a los significados institucionales de referencia. Para que la instrucción sea epistémicamente idónea, este conjunto de objetos y significados institucionales de referencia deben representar al significado global de la función El énfasis en determinados significados y objetos matemáticos, y el desconocimiento de otros puede resultar en un cubrimiento epistémico parcializado que puede afectar la idoneidad del proceso de instrucción (p.132).

Como se puede observar, los cinco criterios antes mencionados involucran el uso de las herramientas teórico-metodológicas propuestas por el EOS y que han sido descritas en el apartado 2.2 de este capítulo.

CAPÍTULO 3

La Función en el Currículo Nacional Chileno

3.1. INTRODUCCIÓN

El presente capítulo está organizado en dos grandes apartados. En el primero de ellos presentamos una descripción general del sistema educativo chileno. Posteriormente en un segundo apartado se realiza un análisis epistémico de las propuestas curriculares dadas por el Ministerio de Educación, en esta investigación entenderemos por currículo a la dupla <Programa de Estudios, Libros de Texto>.

La noción de *función*, como objeto matemático básico y unificador, es considerada uno de los conceptos más importantes dentro de la matemática, su estatus y presencia dentro del actual currículo chileno otorga a este objeto matemático gran relevancia en distintos ámbitos científicos, conduciendo la atención hacia el análisis de sus procesos de instrucción matemática.

El propósito de este capítulo es especificar el significado pretendido de la noción de función en el currículo chileno a partir de las prácticas matemáticas establecidas por los programas de estudio y libros de textos.

Teniendo en cuenta el significado holístico de la función estudiado en el capítulo de antecedentes, se realiza una comparación entre el significado global de la función y el significado pretendido por el currículo nacional chileno. Esta comparación nos permitirá emitir juicios de valoración de la idoneidad epistémica del significado curricular de la noción de función. Esta información nos permitirá proporcionar herramientas para los profesores de matemática quienes deben interpretar y abordar los aspectos curriculares tanto de los programas de estudio como de los libros de texto.

3.2. EL SISTEMA EDUCATIVO CHILENO

El Currículo Chileno establece que la matemática es una herramienta que suscita en los estudiantes el desarrollo de un pensamiento lógico, ordenado, crítico y autónomo y de actitudes como la precisión y la rigurosidad.

La construcción del currículum nacional Chileno se ha enfrentado a un proceso continuo de recolección sistemática de experiencias previas desarrolladas en contexto escolar que ha provocado la internalización y a la vez la actualización permanente de los conocimientos disciplinares y las innovaciones que ocurren en materias pedagógicas y de comunicación curricular. Actualmente la vigencia de documentos curriculares para la asignatura de Matemática han sido establecidos por la Unidad de Currículum y Evaluación bajo el decreto N°256 actualización 2009 en el caso de los niveles de séptimo y octavo básico, y bajo el decreto N°254 actualización 2009 para los niveles de primer a cuarto año medio.

El currículo nacional se expresa en un marco curricular y en instrumentos curriculares que lo operacionalizan. Estos instrumentos tienen diversas funciones, cada una orientada al logro de los aprendizajes que se definen en el marco curricular. El Mineduc (2009) a través de sus bases curriculares ha definido marco curricular, plan de estudio, programas de estudio y textos escolares de la siguiente manera:

> "*Marco Curricular define el aprendizaje que se espera que todos los alumnos y las alumnas del país desarrollen a lo largo de su trayectoria escolar. Tiene un carácter obligatorio y es el referente en base al cual se construyen los planes de estudio, los programas de estudio, los mapas de progreso, los textos escolares y se elabora la prueba Simce*". (p. 5)

> *"Planes de estudio definen la organización del tiempo de cada nivel escolar. Consignan las actividades curriculares que los alumnos y las alumnas deben cursar y el tiempo semanal que se les dedica*". (p. 5)

> *"Programas de estudio entregan una organización didáctica del año escolar para el logro de los Objetivos Fundamentales definidos en el Marco Curricular. En los programas de estudio del Ministerio de Educación se definen aprendizajes esperados, por semestre o por unidades, que corresponden a objetivos de aprendizajes acotados en el tiempo. Se ofrecen además ejemplos de actividades de enseñanza y orientaciones metodológicas y de evaluación para apoyar el trabajo docente de aula. Estos ejemplos y orientaciones tienen un carácter flexible y general para que puedan adaptarse a las realidades de los establecimientos educacionales*". (p. 5)

> *"Textos Escolares desarrollan los contenidos definidos en el Marco Curricular para apoyar el trabajo de los alumnos y las alumnas en el aula y fuera de ella, y les entregan explicaciones y actividades para favorecer su aprendizaje y su autoevaluación. Para los profesores y las profesoras los textos constituyen una propuesta metodológica para apoyar la implementación del currículum en el aula, y los orientan sobre la extensión y profundidad con que pueden ser abordados los contenidos del Marco Curricular*". (p. 5-6)

De acuerdo con lo descrito por el Mineduc (2009) el propósito formativo que posee la asignatura de matemática en los diversos niveles educativos es el de enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes, sean cuales sean sus opciones de vida y de estudios al final de la experiencia escolar. De la misma manera, establece que la matemática es una disciplina que ofrece un conjunto de procedimientos de análisis, modelación, cálculo, medición y estimación del mudo natural y social, que permite establecer relaciones entre los más diversos aspectos de la realidad.

Los aprendizajes y el conocimiento matemático que conforman los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios propuestos por el Ministerio de Educación para el sector de Matemática han sido organizados de acuerdo a una progresión ordenada de cuatro ejes temáticos que articulan los conocimientos adquiridos por los estudiantes a lo largo del proceso formativo escolar. Estos Ejes Temáticos han sido clasificados como: Eje de Números, Eje de Álgebra, Eje de Geometría y Eje de Datos y Azar.

Esta investigación centrará su estudio en el eje temático de Álgebra dado que la noción de función a lo largo del currículo se ha enmarcado dentro de dicho eje. El Mineduc (2009) ha descrito el Eje de Álgebra de la siguiente manera:

> "Este eje introduce el uso de símbolos para representar y operar con cantidades. Se inicia en quinto grado, mediante la expresión de relaciones generales y abstractas de la aritmética y la medición, que son parte de los aprendizajes de este nivel y anteriores. 'El orden de los factores no altera el producto', 'qué número sumado con 3 tiene como resultado 9', son situaciones que permiten poner en contacto con el lenguaje algebraico a cada estudiante desde los primeros niveles del currículo escolar. El álgebra provee de un lenguaje a la matemática, por ende, contribuye a, y se nutre del desarrollo de los ejes de números, geometría y datos y azar. Este eje introduce también el concepto de función y el estudio de algunas de ellas en particular". (p. 146)

3.3. ANÁLISIS EPISTÉMICO DE LAS PROPUESTAS CURRICULARES DE CHILE

Como hemos comentado anteriormente, uno de los objetivos centrales de esta investigación es precisamente determinar y caracterizar los significados pretendidos por el currículo chileno sobre la noción de función. Con esta finalidad, en el apartado 2.5.3 de la metodología, describimos las 'herramientas' teórico-metodológicas que utilizaremos para realizar nuestros análisis curriculares. Concretamente en esta investigación utilizaremos la metodología para el análisis de los significados curriculares, propuesta por Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013):

- *Representatividad de los campos de problemas propuestos.* Para este estudio, en una primera etapa, analizaremos y clasificaremos los tipos de problemas propuestos tanto en los Programas de Estudio como en los libros de texto. Atendiendo a los resultados del apartado 2.3 sobre los significados parciales de referencia, se pueden considerar a priori seis campos de problemas (cada uno de ellos relacionado a un significado parcial): a) *Problemas que movilizan la función como correspondencia*; b) *Problemas que movilizan la función como relación entre variables*; c) *Problemas que movilizan la función como representación gráfica*; d) *Problemas que movilizan la función como expresión analítica*; e) *Problemas que movilizan la función como correspondencia arbitraria*; y f) *Problemas que movilizan la función desde un punto de vista conjuntista*.

- *Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas.* Para el análisis de esta fase consideramos los hallazgos de las investigaciones que se han estudiado y descrito en el *Capítulo 1*, en relación a las representaciones que se deberían contemplar idóneamente para abordar el estudio de la noción de función. Así, encontramos que para la noción de función deberían considerarse las siguientes representaciones: *verbal, gráfica, simbólica, tabular* e *icónica.* Para facilitar el análisis del tipo de representaciones activadas en la dupla <Programas de Estudios, Libros de Texto>, hemos adaptado la Tabla IV que proponen Pino-Fan y colaboradores (2013, p. 141), resultando la Tabla 3.1. Como previas entendemos a las representaciones que debe, en principio, interpretar y decodificar el estudiante (o un sujeto) con la finalidad de comprender y abordar la tarea. Como emergentes entenderemos a aquellas representaciones que surgen como parte de las respuestas de los sujetos (o respuestas que se espera que surjan, si se mira desde un punto de vista institucional).

Tabla 3. 1. Representaciones previas y emergentes de la noción función

<table>
<tr><th colspan="7">Representaciones para f(x)</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Emergentes / Previos</td><td colspan="5">$f(x)$</td></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>Gráfica</td><td>Simbólica</td><td>Tabular</td><td>Icónica</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$f(x)$</td><td>Verbal</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Simbólica</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Tabular</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Icónica</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

- *Representatividad de los elementos regulativos y argumentativos.* Para realizar este estudio se utilizará la noción de *configuración epistémica* descrita en el apartado 2.2.4.

- *Representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto del significado global de referencia.*

A continuación presentamos los análisis curriculares para los niveles de octavo básico a cuarto medio.

3.3.1. Análisis de la propuesta curricular para octavo básico

A continuación presentamos el análisis de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de octavo básico. Para esto consideramos el Programa de Estudios (PE) o “Programa de Estudio para Octavo Año Básico” propuesto por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc, 2011a). Así mismo consideramos el libro de texto que sugiere el marco curricular:

Bennett, J., Burger, E., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F., Roby, T., Scheer, J., & Waits, B. (2014). *Texto para el estudiante. Matemática 8°.* Chile: Galilieo Libros Ltda.

Debemos recordar que, de acuerdo a lo descrito en la metodología, para esta investigación entendemos el currículo como la dupla <Programas de Estudios, Libros de Texto>.

3.3.1.1. Análisis epistémico del Programa de Estudios (PE)

El Programa de Estudios para octavo básico propuesto por el Ministerio de Educación de Chile se divide en cuatro Unidades, cada una de estas asociadas a un Eje Temático. La noción de función se aborda en la Unidad 4 que está relacionada con el Eje Temático de Álgebra. En dicha unidad se plantean cinco aprendizajes esperados: 1) Plantear ecuaciones que representan la relación entre dos variables en diversos contextos; 2) Reconocer funciones en diversos contextos, identificar sus elementos y representar diversas situaciones a través de ellas; 3) Identificar variables relacionadas en forma proporcional y no proporcional; 4) Analizar, mediante el uso de software gráficos, situaciones de proporcionalidad; y 5) Resolver problemas en diversos contextos que implican proporcionalidad directa y problemas que implican proporcionalidad inversa. Como podemos observar los aprendizajes esperados uno y dos están directamente vinculados con el estudio de la noción de función. Para cada uno de estos aprendizajes esperados se plantean una serie de indicadores, que presentamos en la *Figura 3.1*, sobre aquello que los estudiantes deberán ser capaces de hacer cuando hayan logrado estos aprendizajes.

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:
AE 01	
Plantear ecuaciones que representan la relación entre dos variables en diversos contextos.	› Identifican las variables que están involucradas en situaciones de la vida cotidiana. › Despejan una variable en función de la otra en ecuaciones que tienen dos incógnitas. › Evalúan ecuaciones planteadas en función del contexto del problema.
AE 02	
Reconocer funciones en diversos contextos, identificar sus elementos y representar diversas situaciones a través de ellas.	› Identifican el dominio y recorrido de una función. › Identifican variables dependientes de otras variables en diversas situaciones. › Dan ejemplos de funciones en contextos cercanos. › Utilizan notaciones empleadas en funciones para expresar dependencias de variables.

Figura 3. 1. Aprendizajes esperados e indicadores de evaluación (Mineduc, 2011a, p. 74)

El propósito de la Unidad 4 de Álgebra es (Mineduc, 2011a):

> "*…los alumnos comienzan el reconocimiento de funciones y su distinción con las relaciones en contextos diversos. Por un parte, la idea es desarrollar el concepto de función asociado a algunas metáforas que facilitan su comprensión y vincularlo a conceptos matemáticos ya trabajados en años anteriores. Por otra parte, en el trabajo propuesto los estudiantes deben reconocer conceptos claves, como dominio y recorrido, lo que introduce algunos elementos de lenguaje conjuntista*." (p.73)

Así mismo, como contenidos se proponen: "Situaciones de variación proporcional y no proporcional; Situaciones de proporcionalidad directa e inversa; Concepto de función y sus diferentes representaciones; Dominio y recorrido de funciones; Ecuaciones de primer grado con más de una incógnita." (Ibíd.)

Con base en lo anterior, podría decirse que el PE para octavo básico pretende introducir la noción de función como *relación entre variables* para posteriormente definir la noción de función desde un punto de vista conjuntista. Esta reflexión cobra fuerza cuando el Mineduc (2011a) señala:

> "*Interesa que los alumnos analicen las funciones desde la relación entre dos variables y, en particular, distingan entre variables dependientes e independientes. Se abandona la clásica progresión que se iniciaba con una rigurosa definición de producto cartesiano, para luego definir el concepto de relación y terminar presentando las funciones como un caso particular de las relaciones. Es importante que los estudiantes sean capaces de reconocer el dominio y recorrido de una función. Aunque el currículo no propone como tema el uso del lenguaje conjuntista, si el docente lo estima conveniente puede utilizar aquellos términos y conceptos relacionados con teoría de conjuntos que sean necesarios y faciliten el aprendizaje.*" (p.76)

Con respecto a los conceptos podemos ver que ya se mencionan algunos claves para el estudio de las funciones tales como relaciones, variables (independientes y dependientes), proporcionalidad, dominio, recorrido, entre otros. En cuanto a las representaciones, aunque se señala que se estudiarán diferentes representaciones de la función, no hay evidencia explícita del tipo concreto de representaciones (aunque en los ejemplos de actividades sólo se ilustra el uso de las representaciones verbal y simbólica). Para poder describir los otros elementos de la configuración epistémica (tipos de problemas, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos), para los cuales no se encuentra evidencia explícita en el programa de estudio, es necesario analizar el libro de texto sugerido para este nivel educativo.

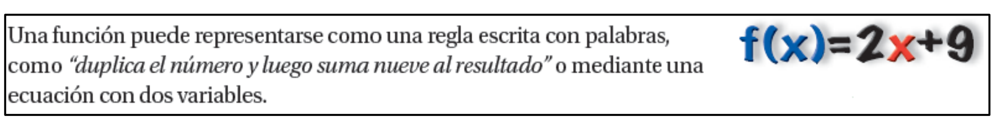
3.3.1.2. Análisis epistémico del libro de texto sugerido por el PE

Con respecto al libro de texto sugerido por el Mineduc para octavo básico (Bennett, J., et al., 2014), este presenta el estudio de las funciones en el Capítulo 6 titulado "Gráficos de funciones, ecuaciones y análisis de proporcionalidad". Este capítulo está dividido en cuatro partes, en las cuales se estudia: 1) Ecuaciones con dos variables; 2) Funciones tablas y gráficos; 3) Proporcionalidad directa e inversa; y 4) Análisis de proporciones utilizando software gráfico. A continuación realizamos el análisis de la segunda parte del Capítulo 6 en el cual se introduce por primera vez la noción de función en la educación básica.

<u>*Configuración epistémica*</u>

El primer elemento de la configuración epistémica refiere al tipo de *situaciones/problemas* propuestos en el libro de texto. Al respecto, identificamos tres tipos de problemas: 1) problemas para ejemplificar definiciones introducidas; 2) problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas; y 3) problemas contextualizados para reforzar los conocimientos ‘adquiridos’. Los *elementos lingüísticos* identificados en las definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones/problema, son de tipo verbal, tabular, simbólico y, en menor medida, el gráfico. Desde el inicio de la sección dos del Capítulo 6, se introducen los *conceptos/definiciones* de función, valor de entrada, valor de salida, dominio, recorrido, variable dependiente, variable independiente, tabla y par ordenado.

Por ejemplo, la noción de función es introducida por primera vez mediante la siguiente definición, “Una función es una relación que asigna a cada valor de la variable independiente *x* un solo valor de la variable *y*. Opera según una regla para producir exactamente un valor de salida por un valor de entrada” (Bennett, J., et al., 2014, p. 206). Dicha definición se establece sobre la base de la clásica metáfora de la “máquina” que produce un ‘único’ valor de salida para cada valor de entrada, la cual es presentada de manera muy sucinta previa a dicha definición. Posteriormente, se presenta un primer problema (del tipo 1 descrito arriba), que permite ejemplificar la definición introducida (*Figura 3.2*).

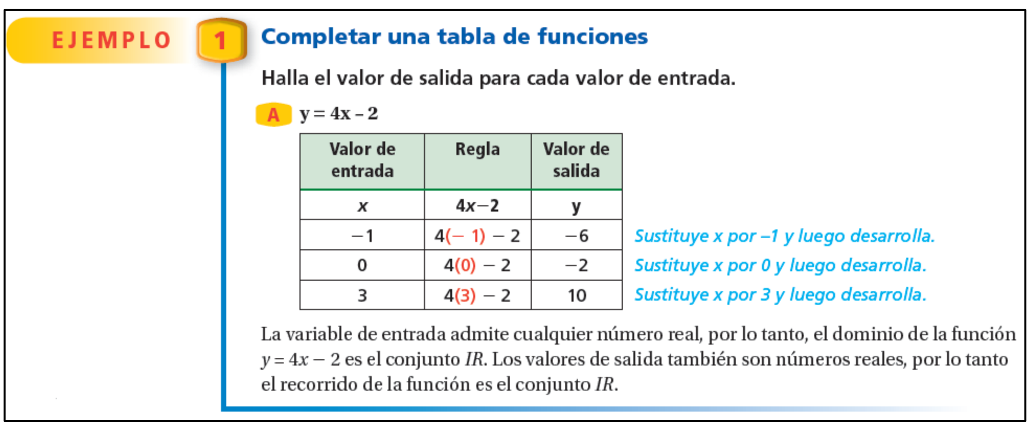

Una función puede representarse como una regla escrita con palabras, como *“duplica el número y luego suma nueve al resultado”* o mediante una ecuación con dos variables.

$f(x)=2x+9$

Figura 3. 2. Ejemplo de problema tipo 1 (Bennett, et al., 2014, p. 206)

Otras definiciones introducidas, que llevan implícitas concepciones conjuntistas para la noción de función, son las de dominio y recorrido, “Una variable representa el valor de entrada y la otra representa el valor de salida. El conjunto que se forma con todos los valores que pueden ser sustituidos en la variable de entrada recibe el nombre de dominio de la función y el conjunto de valores que resultan de una sustitución se llaman recorrido de la función, es decir, es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente (y) a partir de los valores de la variable independiente (x)" (Ibíd.).

Las *propiedades/proposiciones* que identificamos podemos describirlas con el ejemplo de la *Figura 3.3*. Dichas proposiciones se establecen en el sentido de describir la regla de correspondencia, sea por medio de las relaciones dentro de las tablas o por medio de descripciones verbales. Por ejemplo, en la *Figura 3.3*, las proposiciones "sustituye x por -5 y luego desarrolla", "sustituye x por 0 y luego desarrolla", etc., también hacen referencia a *procedimientos* que tienen que ver con las operaciones que los estudiantes deben de realizar para encontrar los valores de y dado x (considerando la respectiva regla de correspondencia). Otro tipo de proposiciones hacen referencia a explicaciones adicionales a la definición dada, o bien a *justificaciones/argumentos* de los procedimientos realizados; por ejemplo, "La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x - 2$ es el conjunto $\mathbb{R}$".


EJEMPLO 1 **Completar una tabla de funciones**

Halla el valor de salida para cada valor de entrada.

A $y = 4x - 2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	
x	$4x-2$	y	
-1	$4(-1) - 2$	-6	*Sustituye x por –1 y luego desarrolla.*
0	$4(0) - 2$	-2	*Sustituye x por 0 y luego desarrolla.*
3	$4(3) - 2$	10	*Sustituye x por 3 y luego desarrolla.*

La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x - 2$ es el conjunto *IR*. Los valores de salida también son números reales, por lo tanto el recorrido de la función es el conjunto *IR*.

Figura 3. 3. Ejemplo de problema tipo 2 (Bennett, et al., 2014, p. 206)

<u>*Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas*</u>

La tabla 3.2 resume el tipo de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de los problemas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstos (o en las soluciones esperadas, en el caso de los problemas no resueltos).

Tabla 3. 2. Representaciones previas y emergentes en los problemas de 8° básico

Representaciones para *f(x)*						
Emergentes / Previos		$f(x)$				
		Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Icónica
$f(x)$	Verbal			●	S●	
	Gráfica					
	Simbólica		T●		●	
	Tabular					
	Icónica					

Como podemos observar en la tabla anterior, en cuanto al tipo de representaciones, encontramos cuatro clases de problemas. La primera, utilizando la terminología de Duval (1995), refiere a aquellos problemas para los cuales se proporcionan datos verbales de la función, los cuales deberán de ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente simbólicamente (e.g., Figura 3.2). La segunda clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos verbales de la función y se pide una respuesta tabular, para lo cual el estudiante deberá transitar de lo verbal a lo simbólico para posteriormente pasar del registro simbólico al tabular. Este tránsito de lo verbal a lo simbólico es representado en la tabla con la "S" antes del punto (S●). Un ejemplo de esta segunda clase de problemas se presenta en la *Figura 3.4*.

11. Meteorología El norte de Chile recibe un promedio de 11,66 mm de lluvia en verano.

a. Escribe una ecuación para hallar *y*, la diferencia de precipitaciones entre la cantidad promedio de lluvias de verano y *x*, las lluvias de verano de un determinado año.

b. Haz una tabla de funciones con los datos de las lluvias de verano de cada año.

Figura 3. 4. Problema contextualizado de reforzamiento (tipo 3) (Bennett, et al., 2014, p. 209)

La tercera clase refiere a aquellos problemas que proporcionan en su planteamiento datos simbólicos de la función y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello el estudiante debe transitar de lo simbólico a lo tabular y de lo tabular a la gráfica de la función, este tránsito se representa con la T antes del punto (T●). Un ejemplo de esta clase de tareas se presenta en la *Figura 3.5.*

Completa la tabla para los funciones y representa gráficamente los pares ordenados resultantes.

A $y = 2x$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	Par ordenado
x	$2x$	y	(x,y)
−2	2(− 2)	−4	(−2, − 4)
−1	2(− 1)	−2	(−1, − 2)
0	2(0)	0	(0, 0)
1	2(1)	2	(1, 2)
2	2(2)	4	(2, 4)

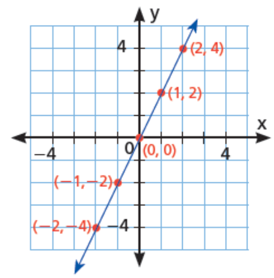


Figura 3. 5. Ejemplo de tarea clase 3: simbólico – tabular – gráfico (Bennett, et al., 2014, p. 207)

La cuarta clase de tareas, según el tipo de representación que se activan, refieren a aquellas que proporcionan una representación simbólica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación tabular de la misma. Un ejemplo de esta última clase se presenta en la *Figura 3.3*.

3.3.1.3. Significado de la noción de función pretendido por el currículo de octavo básico

Con base en los análisis presentados en los apartados 3.3.1.1 y 3.3.1.2, es posible determinar cuáles son los significados pretendidos por el currículo, <Programas de Estudios, Libro de Texto>, chileno de matemáticas de octavo básico para la noción de función.

Por un lado, con el análisis realizado del PE, es posible percibir que la noción de función se pretende introducir en su acepción de *relación entre variables*. Posteriormente, se señala que se deja a elección de los profesores la introducción y el uso de la función en términos de la *teoría de conjuntos*.

No obstante, a partir del análisis del libro de texto que se sugiere en el PE de octavo básico, encontramos que, de acuerdo al tipo de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos, propuestos y esperados en dicho texto, la noción de función se introduce directamente en su acepción de *relación entre variables*. Además, se evidenció que en algunas definiciones proporcionadas se encuentra implícita una aproximación al significado de función desde un punto de vista conjuntista. Sin embargo, ni los tipos de problemas identificados en la caracterización de la configuración epistémica, ni las representaciones activadas en el planteamiento y solución de los problemas, dan cuenta del uso de la función en su acepción conjuntista. Por otro lado, se estima que la noción de función también se explicita en su acepción de *función como expresión analítica*, dado que en reiteradas ocasiones la función es presentada directamente a partir de una expresión algebraica que carece de un contexto específico.

De esta forma podemos concluir que el significado pretendido por el currículo chileno de octavo básico sobre la noción de función, es *la función como relación entre variables* y *la función como expresión analítica*.

3.3.2. Análisis de la propuesta curricular para primero medio

A continuación presentamos el análisis de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de Primero Medio. Para esto consideramos el Programa de Estudios (PE) o "Programa de Estudio para Primer año medio" propuesto por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc, 2011b). Así mismo consideramos el libro de texto que sugiere el marco curricular:

> Elgueta, J., Muñoz, G., & Santis, M. (2014). *Texto del estudiante. Matemática 1° Medio.* Chile: SM Chile S.A.

3.3.2.1. Análisis epistémico del Programa de Estudios (PE)

El Programa de Estudios para primer año medio propuesto por el Ministerio de Educación de Chile se divide en cuatro Unidades, cada una de estas asociadas a un Eje Temático. La noción de función se aborda en la Unidad 2 que está relacionada con el Eje Temático de Álgebra. En dicha unidad se plantean seis aprendizajes esperados: 1) Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias; 2)

Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias; 3) Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales; 4) Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín; y 5) Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación; 6) Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado. Como podemos observar los aprendizajes esperados cuatro y cinco están directamente vinculados con el estudio de la noción de función. Para cada uno de estos aprendizajes esperados se plantean una serie de indicadores, que presentamos en la *Figura 3.6*, sobre aquello que los estudiantes deberán ser capaces de hacer cuando hayan logrado estos aprendizajes.

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:
AE 04	
Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.	› Reconocen la proporcionalidad directa como un caso de la función lineal. › Reconocen como funciones lineales relaciones de la física como $F = ma$ (Newton), $V = Ri$ (en circuitos eléctricos) y $F = kx$ (ley de Hooke), señalando variables y constantes. › Organizan en una tabla pares ordenados de una función. › Generan el gráfico cartesiano a partir de una tabla de valores. › Usan un procesador simbólico para registrar diversos valores de $y = kx$, variando los valores de k
AE 05	
Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.	› Demuestran que la composición de funciones cumple la propiedad de clausura. › Dadas algunas funciones realizan composiciones de ellas y determinan el dominio y recorrido de la función resultante. › Discuten acerca de la conmutatividad de la composición de funciones. Analizan el caso en que las funciones son transformaciones isométricas. › Verifican que la composición de funciones es asociativa. › Verifican que la función identidad en un conjunto opera como elemento neutro para la composición de funciones.

Figura 3. 6. Aprendizajes esperados e indicadores de evaluación (Mineduc, 2011b, p. 47)

El propósito de la Unidad 2 de Álgebra es (Mineduc, 2011b):

> "*… en el aprendizaje relacionado con las funciones, se introduce el estudio de las funciones lineal y afín. Se propone a los alumnos identificar y representar dichas funciones a través de tablas, gráficos y algebraicamente. Finalmente, en este nivel se trabaja la composición de funciones como un paso más en el estudios de funciones*". (p. 45)

Los contenidos propuestos en este nivel educativo:

> "*Funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos; Representación gráfica de funciones lineales y afines; Resolución de problemas mediante ecuaciones literales; Composición de funciones y propiedades asociadas; Dominio y recorrido de funciones que se obtienen al componer otras funciones*". (Ibíd.)

Con respecto a las *situaciones/problemas* declaradas por el PE, identificamos tareas donde los estudiantes deberán modelar situaciones o fenómenos en diferentes contextos, utilizando funciones, es decir, el tipo de problemas identificados, refiere a tareas contextualizadas, sin embargo el PE no explicita si este tipo de problemas se utilizará para introducir y/o reforzar la noción de función. De igual manera el PE establece *elementos lingüísticos* asociados a la noción de función del tipo tabular, gráfico y simbólico. Algunas de las *propiedades/proposiciones* que se evidencian, son las que permiten resolver problemas que involucran composición de funciones, es decir, se propone verificar si la composición de funciones cumple o no la propiedad de asociatividad, además de verificar que la composición de funciones no es conmutativa, y comprobar propiedades de la composición de funciones, entre otros. Este tipo de actividades demostrativas también refieren a *justificaciones/argumentos*. Otro tipo de *propiedades/proposiciones* que refiere a *justificaciones/argumentos* son aquellas donde los estudiantes deberán argumentar respecto de las variaciones que se producen en una representación gráfica de funciones lineales y afines, al modificar parámetros.

En cuanto a los conceptos podemos ver que ya se mencionan algunos esenciales para el estudio de las funciones tales como: variables (dependientes e independientes), dominio, recorrido, representación gráfica de funciones, función lineal, función afín, modelamiento, composición de funciones, entre otros.

De acuerdo a lo descrito anteriormente, se podría establecer una primera hipótesis respecto del significado pretendido por el PE de primer año medio, esta es la idea de función como la *relación entre magnitudes variables*, posteriormente la función es presentada como una *representación gráfica*. Esta reflexión cobra fuerza cuando el Mineduc (2011b) entre los propósitos de la unidad establece 'identificar funciones a través de gráficas' y cuando en sus actividades ejemplificadoras propone 'Identificar gráficos que representen una función lineal y una función afín.'

Para poder describir en profundidad todos los elementos de la configuración epistémica además de aquellos para los cuales no se encuentra evidencia explícita en el programa de estudio de primer año medio, es necesario analizar el libro de texto sugerido para este nivel educativo.

3.3.2.2. Análisis epistémico del libro de texto sugerido por el PE

Con respecto al libro de texto sugerido por el Mineduc para primer año Medio (Elgueta, et al., 2014), presenta el estudio de las funciones en la Unidad 2 titulada "Álgebra y Funciones". A continuación realizamos el análisis de la tercera parte de la Unidad 2 en el cual se contempla la noción de función y se presenta por primera vez la noción de función lineal y función afín, además de la composición de funciones.

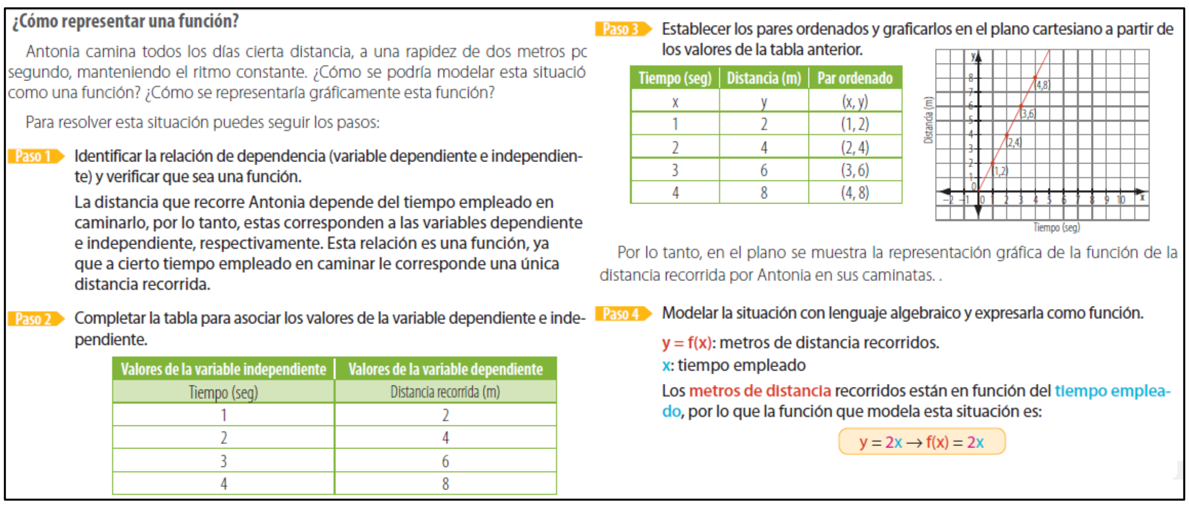
Configuración epistémica

El primer elemento de la configuración epistémica refiere al tipo de *situaciones/problemas* propuestos en el libro de texto. Al respecto, identificamos cuatro tipos de problemas: 1) problemas para reforzar conocimientos previos; 2) problemas para ejemplificar definiciones introducidas; 3) problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas; y 4) problemas contextualizados para reforzar los conocimientos 'adquiridos'. Los *elementos lingüísticos* identificados en las definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones/problema, son de tipo verbal, tabular, simbólico, gráfico e icónico. Desde el inicio de la última sección de la Unidad 2, se refuerzan los *conceptos/definiciones* de función, dominio, recorrido, variable dependiente, variable independiente. Posteriormente se introducen definiciones como preimagen, imagen, función lineal, función afín, composición de funciones, entre otros.

Por ejemplo, la noción de función es dada mediante la siguiente definición,

> “*Una función definida de A en B es una relación tal que a todo elemento x (preimagen) de A le corresponde un único elemento de y (imagen) de B. Se denota* $y = f(x)$*. En general, a la variable x se le llama independiente y a la variable y, dependiente. El dominio (Dom) de una función es el conjunto formado por las preimágenes o valores de la variable independiente. El recorrido (Rec) de una función es el conjunto formado por las imágenes o valores de la variable dependiente*”. (Elgueta, et al., 2014, p. 126)

Posteriormente, se presenta un primer problema (del tipo 1 descrito anteriormente), que permite ejemplificar conocimientos previos de la noción de función tales como su definición y algunas de sus representaciones (*Figura 3.7*).



¿Cómo representar una función?

Antonia camina todos los días cierta distancia, a una rapidez de dos metros pc segundo, manteniendo el ritmo constante. ¿Cómo se podría modelar esta situació como una función? ¿Cómo se representaría gráficamente esta función?

Para resolver esta situación puedes seguir los pasos:

Paso 1 Identificar la relación de dependencia (variable dependiente e independiente) y verificar que sea una función.

La distancia que recorre Antonia depende del tiempo empleado en caminarlo, por lo tanto, estas corresponden a las variables dependiente e independiente, respectivamente. Esta relación es una función, ya que a cierto tiempo empleado en caminar le corresponde una única distancia recorrida.

Paso 2 Completar la tabla para asociar los valores de la variable dependiente e independiente.

Valores de la variable independiente	Valores de la variable dependiente
Tiempo (seg)	Distancia recorrida (m)
1	2
2	4
3	6
4	8

Paso 3 Establecer los pares ordenados y graficarlos en el plano cartesiano a partir de los valores de la tabla anterior.

Tiempo (seg)	Distancia (m)	Par ordenado
x	y	(x, y)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)
3	6	(3, 6)
4	8	(4, 8)

Por lo tanto, en el plano se muestra la representación gráfica de la función de la distancia recorrida por Antonia en sus caminatas. .

Paso 4 Modelar la situación con lenguaje algebraico y expresarla como función.

y = f(x): metros de distancia recorridos.
x: tiempo empleado

Los metros de distancia recorridos están en función del tiempo empleado, por lo que la función que modela esta situación es:

$$y = 2x \rightarrow f(x) = 2x$$

Figura 3. 7. Ejemplo de problema tipo 1 (Elgueta, et al., 2014, p. 127)

Este tipo de ejemplos también hacen referencia a *procedimientos* que tienen que ver con las operaciones que los estudiantes deben realizar para modelar una situación, a través de una función, establecer variables dependientes e independientes y asociarlas a partir de tablas, y representar gráficamente las situaciones planteadas.

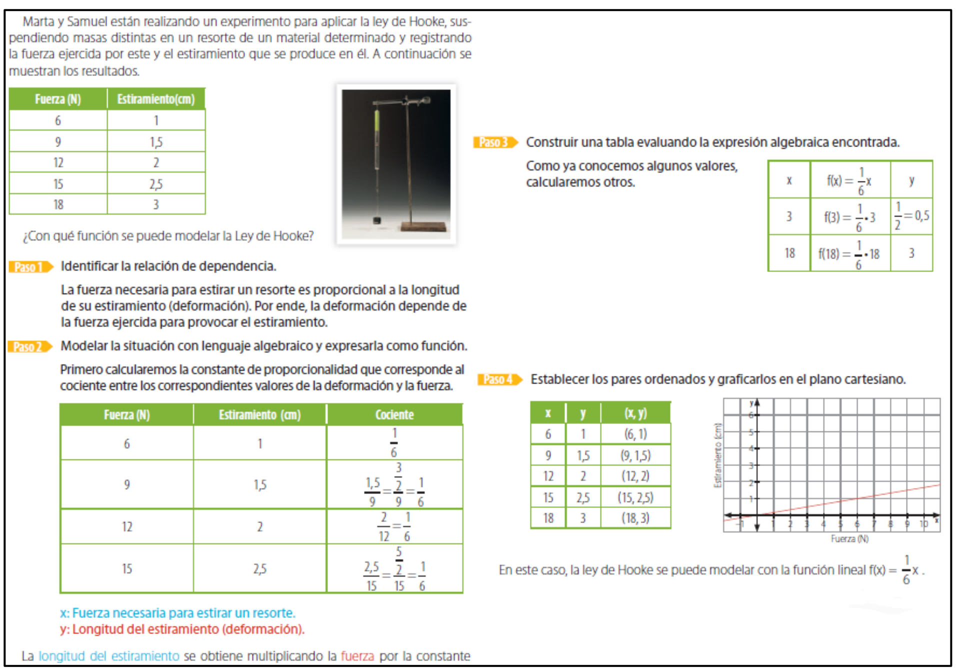
Por otra parte, algunos de los *conceptos/definiciones* introducidas durante este nivel educativo, son los de *función lineal*, *función afín y composición de funciones*. Elgueta, et al., (2014) introduce estos objetos matemáticos, mediante las siguientes definiciones:

"*Una función lineal se escribe de la forma* $y = f(x) = mx$, *siendo las variables* x *e* y *directamente proporcionales, con constante de proporcionalidad* m. *Al graficarla en el plano y unir los puntos, se obtiene una recta que pasa por el origen* $(0{,}0)$ *y la constante de proporcionalidad recibe el nombre de pendiente*". (p. 135)

"*Una función de la forma* $f(x) = mx + n$ $(m, n \neq 0)$ *recibe el nombre de función afín*". (p.140)

"*Sean* f *y* g *dos funciones, tal que,* $f: A \longrightarrow B$ *y* $g: B \longrightarrow C$, *entonces la función compuesta* $gof: A \longrightarrow C$ *se define como:* $(gof)(x) = g(f(x))$. *También se puede leer "*g *compuesta con* f". (p. 146)

Un problema (del tipo 2 descrito anteriormente), que permite ejemplificar la definición introducida de la noción de función lineal, se describe en la *Figura 3.8*.



Marta y Samuel están realizando un experimento para aplicar la ley de Hooke, suspendiendo masas distintas en un resorte de un material determinado y registrando la fuerza ejercida por este y el estiramiento que se produce en él. A continuación se muestran los resultados.

Fuerza (N)	Estiramiento(cm)
6	1
9	1,5
12	2
15	2,5
18	3

¿Con qué función se puede modelar la Ley de Hooke?

Paso 1 Identificar la relación de dependencia.

La fuerza necesaria para estirar un resorte es proporcional a la longitud de su estiramiento (deformación). Por ende, la deformación depende de la fuerza ejercida para provocar el estiramiento.

Paso 2 Modelar la situación con lenguaje algebraico y expresarla como función.

Primero calcularemos la constante de proporcionalidad que corresponde al cociente entre los correspondientes valores de la deformación y la fuerza.

Fuerza (N)	Estiramiento (cm)	Cociente
6	1	$\frac{1}{6}$
9	1,5	$\frac{1{,}5}{9} = \frac{\frac{3}{2}}{9} = \frac{1}{6}$
12	2	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
15	2,5	$\frac{2{,}5}{15} = \frac{\frac{5}{2}}{15} = \frac{1}{6}$

x: Fuerza necesaria para estirar un resorte.
y: Longitud del estiramiento (deformación).

La longitud del estiramiento se obtiene multiplicando la fuerza por la constante

Paso 3 Construir una tabla evaluando la expresión algebraica encontrada.

Como ya conocemos algunos valores, calcularemos otros.

x	$f(x) = \frac{1}{6}x$	y
3	$f(3) = \frac{1}{6} \cdot 3$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
18	$f(18) = \frac{1}{6} \cdot 18$	3

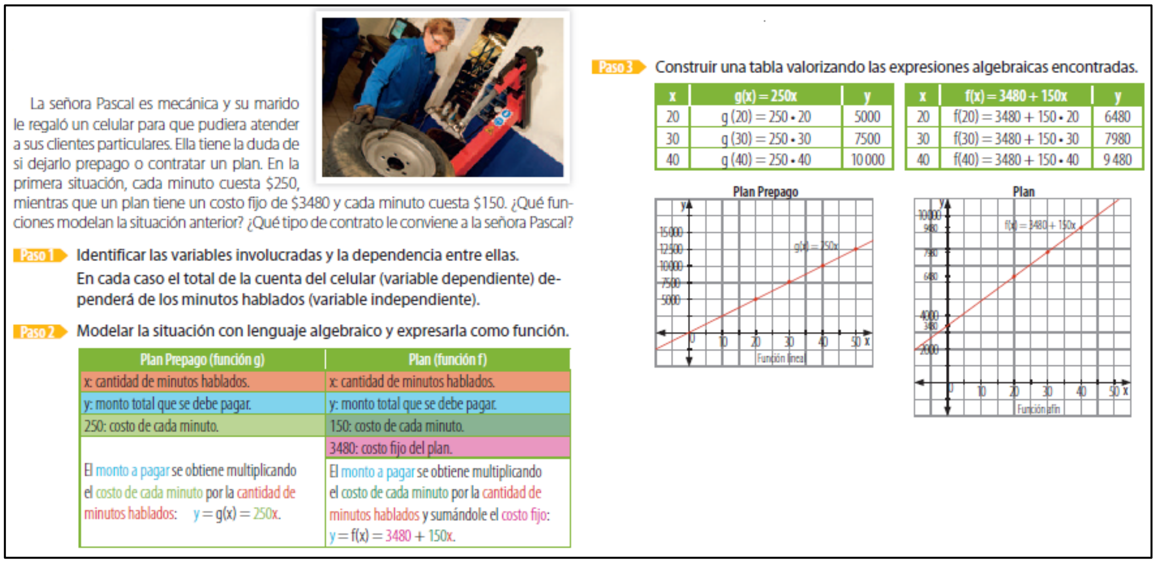
Paso 4 Establecer los pares ordenados y graficarlos en el plano cartesiano.

x	y	(x, y)
6	1	(6, 1)
9	1,5	(9, 1,5)
12	2	(12, 2)
15	2,5	(15, 2,5)
18	3	(18, 3)

En este caso, la ley de Hooke se puede modelar con la función lineal $f(x) = \frac{1}{6}x$.

Figura 3. 8. Ejemplo de problema tipo 2 (Elgueta, et al., 2014, p. 134 - 135)

Otro problema del tipo 2 que permite ejemplificar la definición de la noción de función lineal pero que además conduce a la definición de una función afín es el que se plantea en la *Figura 3.9*.



La señora Pascal es mecánica y su marido le regaló un celular para que pudiera atender a sus clientes particulares. Ella tiene la duda de si dejarlo prepago o contratar un plan. En la primera situación, cada minuto cuesta \$250, mientras que un plan tiene un costo fijo de \$3480 y cada minuto cuesta \$150. ¿Qué funciones modelan la situación anterior? ¿Qué tipo de contrato le conviene a la señora Pascal?

Paso 1 Identificar las variables involucradas y la dependencia entre ellas.
En cada caso el total de la cuenta del celular (variable dependiente) dependerá de los minutos hablados (variable independiente).

Paso 2 Modelar la situación con lenguaje algebraico y expresarla como función.

Plan Prepago (función g)	Plan (función f)
x: cantidad de minutos hablados.	x: cantidad de minutos hablados.
y: monto total que se debe pagar.	y: monto total que se debe pagar.
250: costo de cada minuto.	150: costo de cada minuto.
	3480: costo fijo del plan.
El monto a pagar se obtiene multiplicando el costo de cada minuto por la cantidad de minutos hablados: $y = g(x) = 250x$.	El monto a pagar se obtiene multiplicando el costo de cada minuto por la cantidad de minutos hablados y sumándole el costo fijo: $y = f(x) = 3480 + 150x$.

Paso 3 Construir una tabla valorizando las expresiones algebraicas encontradas.

x	$g(x) = 250x$	y
20	$g(20) = 250 \cdot 20$	5000
30	$g(30) = 250 \cdot 30$	7500
40	$g(40) = 250 \cdot 40$	10 000

x	$f(x) = 3480 + 150x$	y
20	$f(20) = 3480 + 150 \cdot 20$	6480
30	$f(30) = 3480 + 150 \cdot 30$	7980
40	$f(40) = 3480 + 150 \cdot 40$	9 480

Figura 3. 9. Ejemplo de problema tipo 2 (Elgueta, et al., 2014, p. 140)

Las *propiedades/proposiciones* identificadas en este nivel escolar son descritas por Elgueta, et al., (2014) de la siguiente manera:

> "*La composición de funciones lineales cumple con la propiedad de clausura, es decir, si* f *y* g *son funciones lineales, se tiene que* fog *y* gof *también lo son. Esto no ocurre si* f *y* g *son funciones afines. Cabe destacar que la composición de funciones, no cumple con la propiedad conmutativa, es decir,* $fog \neq gof$ *para* f *y* g *funciones*". (p. 150)

Un problema del tipo 2 que hace referencia a explicaciones demostrativas de ciertas propiedades de la composición de funciones, o bien a *justificaciones/argumentos* se ejemplifica de la siguiente manera:

> "*Se definen dos funciones afines* $f(x) = 2x + 3$ *y* $g(x) = x + 5$*, donde el dominio y recorrido de ambas funciones es el conjunto de los números reales. Se determinan las composiciones* $fog(x)$ *y* $gof(x)$*. Se obtiene que*

> $fog(x) = 2x + 13$ *y* $gof(x) = 2x + 8$ *con ello se justifica tanto la propiedad de clausura en la composición de funciones y además se evidencia que la composición de funciones no cumple con la propiedad conmutativa*". (Elgueta, et al., 2014, p. 150)

Otro tipo de *propiedades/proposiciones* asociadas a la noción de composición de funciones son definidas por Elgueta, et al., (2014) de la siguiente manera: "*Para las funciones* f, g *y* h, *se cumple lo siguiente: Asociatividad:* $fo(goh) = (fog)oh$; *Elemento neutro:* $I(x) = x$, *tal que* $foI(x) = f(x)$, *donde* $I(x) = x$ *recibe el nombre de función identidad*". (p. 151)

Un problema del tipo 2 que hace referencia a explicaciones demostrativas de la propiedad dada, o bien a *justificaciones/argumentos*, se describen en la *Figura 3.10*.

Paso 1 Definir tres funciones afines cualquiera.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x + 1 \\ g(x) = -x + 1 \\ h(x) = 2x - 5 \end{array}\right\}$$ Donde el dominio y recorrido de las tres funciones es el conjunto de los números reales.

Paso 2 Determinar las composiciones $f\circ(g\circ h)$ y $(f\circ g)\circ h$ y verificar si son iguales.

$$\begin{aligned} f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h \rightarrow f\circ(-(2x-5)+1) &= ((-x+1)+1)\circ h \\ f\circ(-2x+6) &= (-x+2)\circ h \\ (-2x+6)+1 &= (-(2x-5)+2) \\ -2x+7 &= -2x+7 \end{aligned}$$

Luego se obtienen expresiones iguales, por lo tanto, la composición de funciones es asociativa.

Paso 1 Definir una función f(x) cualquiera y determinar una función I(x) tal que $f\circ I(x) = f(x)$.

Sea $f(x) = -2x + 1$, entonces se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} f\circ I(x) = f(x) \rightarrow f(I(x)) &= f(x) \\ -2(I(x)) + 1 &= f(x) \\ -2(I(x)) + 1 &= -2x + 1 \;/ -1 \\ -2(I(x)) &= -2x + 1 - 1 \\ I(x) &= \frac{-2x}{-2} = x \end{aligned}\right\}$$ Luego, el elemento neutro de f(x) es $I(x) = x$. Dicha función se conoce como función identidad.

Paso 2 Verificar que $I\circ f(x) = f(x)$.

Para $f(x) = -2x + 1$ se tiene que:

$I\circ f(x) = f(x)$

$I(f(x)) = -2x + 1$

$-2x + 1 = -2x + 1$

Por lo tanto, para la función identidad I(x)=x se cumple que $f\circ I(x) = I\circ f(x) = f(x)$.

Figura 3. 10. Ejemplo de problema tipo 2 (Elgueta, et al., 2014, p. 151)

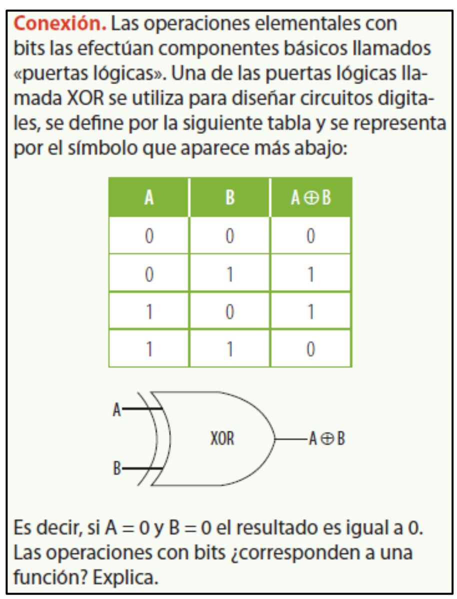
<u>*Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas*</u>

La tabla 3.3 resume el tipo de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de los problemas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstos (o en las soluciones esperadas, en el caso de los problemas no resueltos).

Tabla 3. 3. Representaciones previas y emergentes en los problemas de 1° año medio

Representaciones para *f(x)*						
Emergentes / Previos		$f(x)$				
		Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Icónica
$f(x)$	Verbal	●	●	●	●	●
	Gráfica			●		
	Simbólica		●	G●	●	
	Tabular		●	●		
	Icónica					

Como podemos observar en la tabla anterior, en cuanto al tipo de representaciones, encontramos once clases de problemas. La primera, refiere a aquellos problemas para los cuales se proporcionan datos verbales de la función, los cuales deberán de ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de argumentar y proporcionar una respuesta en registro verbal (e.g., Figura 3.11).


Conexión. Las operaciones elementales con bits las efectúan componentes básicos llamados «puertas lógicas». Una de las puertas lógicas llamada XOR se utiliza para diseñar circuitos digitales, se define por la siguiente tabla y se representa por el símbolo que aparece más abajo:

A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Es decir, si A = 0 y B = 0 el resultado es igual a 0. Las operaciones con bits ¿corresponden a una función? Explica.

Figura 3. 11. Ejemplo de tarea clase 1: verbal-verbal (Elgueta, et al., 2014, p. 131)

La segunda clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan datos verbales de la función, los cuales deberán ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente gráficamente. La tercera clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos verbales de la función y se pide una respuesta simbólica. La cuarta clase de tareas, según el tipo de representación que se activan, refieren a aquellas que proporcionan una representación verbal de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación tabular de la misma. Un ejemplo de la segunda, tercera y cuarta clase de problemas se representa en la *Figura 3.9.*

Una quinta clase de problemas refiere a aquellas actividades para las cuales se proporcionan datos verbales de la función, los cuales deberán ser interpretados a través de una representación icónica *(e.g., Figura 3.12).*

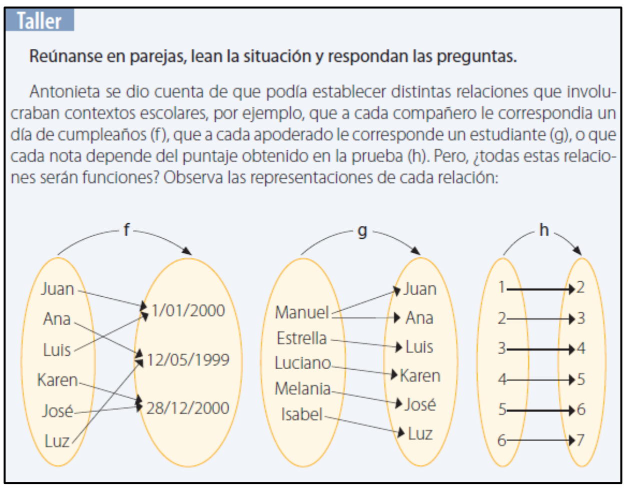


Figura 3. 12. Ejemplo de tarea clase 5: verbal-icónico (Elgueta, et al., 2014, p. 126)

La sexta clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan una representación gráfica de la función, los cuales deberán de examinados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente simbólicamente *(Figura 3.13).*

¿Cómo determinar la función a partir de un gráfico o de una tabla?

Observa el gráfico que representa el monto que se debe pagar por cierta cantidad de fotocopias ¿Qué función modela la situación? ¿Cuál es su expresión algebraica?

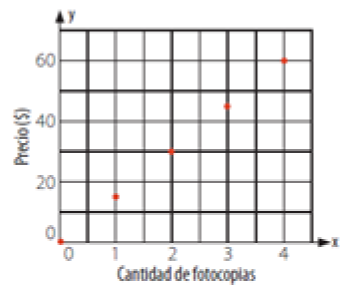


Figura 3. 13. Ejemplo de tarea clase 6: gráfico-simbólico (Elgueta, et al., 2014, p. 128)

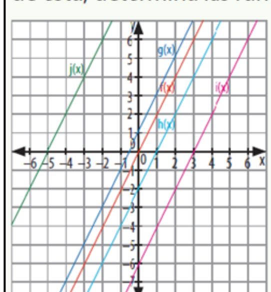
La séptima clase refiere a aquellos problemas que proporcionan en su planteamiento datos simbólicos de la función y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica**.**

1. Grafica las siguientes funciones y determina su dominio y recorrido.
   $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -0{,}6x + 1$, $h(x) = 4x - 6$.

Figura 3. 14. Ejemplo de tarea clase 7: simbólico-grafico (Elgueta, et al., 2014, p. 145)

La octava clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos simbólicos de la función y se pide una respuesta simbólica, para lo cual el estudiante deberá transitar de lo simbólico a lo gráfico para posteriormente pasar del registro gráfico al simbólico. Este tránsito de lo simbólico a lo gráfico es representado en la tabla con la “G” antes del punto (G●). Un ejemplo de esta octava clase de problemas se presenta en la *Figura 3.15*.

Analiza la gráfica de la función $f(x) = 2x$ y a partir de esta, determina las funciones afines a ella.



$g(x) = 2x + 1$

a) $h(x) = ?$ **b)** $i(x) = ?$ **c)** $j(x) = ?$

Figura 3. 15. Ejemplo de tarea clase 8: simbólico-simbólico (Elgueta, et al., 2014, p. 143)

La novena clase de tareas, según el tipo de representación que se activan, refieren a aquellas que proporcionan una representación simbólica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación tabular de la misma. Un ejemplo de esta novena clase de problemas se presenta en la *Figura 3.16*.

5. **Completa** la tabla de valores asociada a la función dada e identifica el conjunto de imágenes y de preimágenes según la tabla.

$g(x) = 2x \rightarrow$

x	0	3	–1	–8
g(x)	0	6	–2	–16

a) $f(x) = -3x \rightarrow$

x	2		5	
f(x)		6		9

Figura 3. 16. Ejemplo de tarea clase 9: simbólico-tabular (Elgueta, et al., 2014, p. 129)

La décima clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan datos tabulares de la función, los cuales deberán de ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente gráficamente. La undécima clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos tabulares de la función y se pide una respuesta simbólica. Un ejemplo de la décima y undécima clase de problemas se representa en la *Figura 3.17*.

Paso 1 Extraer los pares ordenados representados en la gráfica.

x	y	Par ordenado
0	0	(0, 0)
1	15	(1, 15)
2	30	(2, 30)
3	45	(3, 45)
4	60	(4, 60)

Paso 2 Identificar el patrón que se produce en la tabla.

$15 = 1 \cdot 15$

$30 = 2 \cdot 15$

$45 = 3 \cdot 15$

$60 = 4 \cdot 15$

$y = x \cdot 15 \rightarrow f(x) = 15x$

Por lo tanto, la función que modela el monto a pagar por las fotocopias es $f(x) = 15x$.

Figura 3. 17. Ejemplo tarea clase 10 y 11: tabular-gráfico-simbólico (Elgueta, et al., 2014, p. 128)

3.3.2.3. Significado de la noción de función pretendido por el currículo de primero medio

Con base en los análisis presentados en los apartados 3.3.2.1 y 3.3.2.2, es posible establecer cuáles son los significados pretendidos por el currículo, <Programas de

Estudios, Libro de Texto>, chileno de matemáticas de primer año medio para la noción de función.

Por un lado, con el análisis realizado del PE, es posible percibir que la noción de función se pretende introducir en su acepción de *relación entre variables*, para luego establecer el significado de *función como representación gráfica*. No obstante, a partir del análisis del libro de texto que se sugiere por el marco curricular de primer año medio, identificamos que, de acuerdo al tipo de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos, propuestos y esperados en dicho texto, la noción de función se define textual como "…una relación de *correspondencia* entre dos variables". De esta manera se presume que el significado asociado a la noción de función, es por un lado el de *correspondencia* y por otro lado el de *relación entre variables*. Cabe destacar que el concepto de 'correspondencia' es identificado por primera vez en este nivel educativo. La noción de función también se explicita en su acepción de *función como expresión analítica*, dado que en reiteradas ocasiones la función es presentada directamente a partir de una expresión algebraica que carece de un contexto específico. Por otra parte, se percibe en la definición formal de la noción de función, elementos propios de la *teoría conjuntista*.

De esta forma podemos concluir que el significado pretendido por el currículo chileno de primer año medio sobre la noción de función, es *la* función *como correspondencia*, la función *como relación entre variables*, y la función *como expresión analítica*. Por otro lado, con menor protagonismo se presenta el objeto matemático, función como representación gráfica y en sus definiciones se adoptan elementos de la teoría de conjuntos.

3.3.3. Análisis de la propuesta curricular para segundo año medio

A continuación presentamos el análisis de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de Segundo año Medio. Para esto consideramos el Programa de Estudios (PE) o "Programa de Estudio para Segundo Año Medio" propuesto por el Ministerio de

Educación de Chile (Mineduc, 2011c). Así mismo consideramos el libro de texto que sugiere el marco curricular:

> Muñoz, G., Jiménez, L., & Rupin, P. (2014). *Texto del estudiante. Matemática 2° Medio.* Chile: SM Chile S.A.

3.3.3.1. Análisis epistémico del Programa de Estudios (PE)

El Programa de Estudios para segundo año medio propuesto por el Ministerio de Educación de Chile se divide en cuatro Unidades, cada una de estas asociadas a un Eje Temático. La noción de función se aborda en la Unidad 3 que está relacionada con el Eje Temático de Álgebra. En dicha unidad se plantean siete aprendizajes esperados: 1) Analizar gráficamente la función exponencial, en forma manual y con herramientas tecnológicas; 2) Analizar gráficamente la función logarítmica, en forma manual y con herramientas tecnológicas; 3) Analizar gráficamente la función raíz cuadrada, en forma manual y con herramientas tecnológicas; 4) Analizar la validez de una expresión algebraica fraccionaria; y 5) Establecer estrategias para operar fracciones algebraicas simples, con binomios en el numerador y en el denominador, y determinar los valores que indefinen estas expresiones; 6) Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente; 7) Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Como podemos observar los aprendizajes esperados uno, dos, tres y siete están directamente vinculados con el estudio de la noción de función. Para cada uno de estos aprendizajes esperados se plantean una serie de indicadores, que presentamos en la *Figura 3.18,* sobre aquello que los estudiantes deberán ser capaces de hacer cuando hayan logrado estos aprendizajes.

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:
AE 01	
Analizar gráficamente la función exponencial, en forma manual y con herramientas tecnológicas.	› Representan gráficamente la función exponencial $f(x)=a^x$, con $a \in \mathrm{IR}$ y $a>0$, en forma manual y usando herramientas tecnológicas. › Identifican las características gráficas de una función exponencial, incluyendo dominio, recorrido e interceptos. › Argumentan acerca de las variaciones que se producen en la gráfica al modificar los parámetros de la función exponencial. Por ejemplo, caracterizan la función $f(x)=a^x+b$, *con* $a, b \in \mathrm{IR}$ *y* $a>0$, observando en el gráfico la traslación vertical que resulta al variar el parámetro b.
AE 02	
Analizar gráficamente la función logarítmica, en forma manual y con herramientas tecnológicas.	› Representan de modo gráfico la función logaritmo en base a $f(x)=\log_a x$, con $x, a \in \mathrm{IR}^+$, $a \neq 1$, en forma manual y con herramientas tecnológicas. › Identifican la función logaritmo natural como un caso particular de la función logaritmo en base a cuando $a=e$ › Identifican las características gráficas de una función logarítmica, incluyendo dominio, recorrido e interceptos. › Argumentan sobre las variaciones que se producen en la gráfica al modificar los parámetros de la función logarítmica. Por ejemplo, caracterizan la función $f(x)=\log(x+a)$, con $a \in \mathrm{IR}$, observando en el gráfico la traslación horizontal que resulta al variar el parámetro a.
AE 03	
Analizar gráficamente la función raíz cuadrada, en forma manual y con herramientas tecnológicas.	› Representan gráficamente la función raíz cuadrada $f(x)=\sqrt{x}$, con $x \in \mathrm{IR}_0^+$ en forma manual y usando herramientas tecnológicas. › Identifican las características gráficas de una función raíz cuadrada, incluyendo dominio y recorrido. › Argumentan acerca de las variaciones que se producen en la gráfica al modificar los parámetros de la función raíz cuadrada. Por ejemplo, caracterizan la función $f(x)=\sqrt{x-a}$ con $x-a>0$, observando en el gráfico la traslación horizontal que resulta al variar el parámetro a.
AE 07	
Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	› Modelan una situación, usando un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. › Relacionan un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas con el contexto de un problema. › Interpretan la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas según el contexto del problema asociado. › Identifican la función exponencial en contextos diversos. › Modelan situaciones diversas, cuyo modelo resultante sea una función exponencial. Por ejemplo, la reproducción bacteriana. › Identifican la función raíz cuadrada en contextos diversos. › Modelan situaciones diversas, cuyo modelo resultante sea una función raíz cuadrada. › Identifican la función logarítmica en contextos diversos. › Modelan situaciones diversas, cuyo modelo resultante sea una función logarítmica. Por ejemplo, la medición de la energía que libera un sismo a través de la escala de Richter.

Figura 3. 18. Aprendizajes esperados e indicadores de evaluación (Mineduc, 2011c, p. 63-64)

El propósito de la Unidad 3 de Álgebra es (Mineduc, 2011c): "…*introducir las funciones exponencial, logaritmo y raíz cuadrada en diversos contextos y las respectivas representaciones gráficas con ayuda de herramientas tecnológicas*". (p.61)

De la misma manera, como contenidos se proponen:

> "*Función exponencial y representación gráfica; Función logarítmica y representación gráfica; Función raíz cuadrada y representación gráfica; Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas; Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas; Gráfica de un sistema de ecuaciones; Expresiones algebraicas fraccionarias; Operaciones de expresiones algebraicas*". (Ibíd.)

Con respecto a las *situaciones/problemas* declaradas por el PE, identificamos tareas donde los estudiantes deberán modelar situaciones diversas a través de las funciones exponenciales, logarítmicas y raíz cuadrada, es decir, el tipo de problemas identificado, refiere a tareas contextualizadas, que darán énfasis a la aplicación de las funciones exponencial, logarítmica y raíz cuadrada en contextos científicos, naturales, geográficos, el propósito es extender el ámbito de las matemáticas a situaciones de la vida cotidiana y aterrizar los conceptos que parecen muy abstractos cuando se estudian separadas del mundo real (Mineduc, 2011c, p. 65). De igual manera el PE establece *elementos* *lingüísticos* asociados a la noción de función del tipo tabular, gráfico, simbólico y verbal. Algunas *justificaciones/argumentos* se evidencian cuando se explicita que los estudiantes deberán argumentar respecto de las variaciones que se producen en la representación gráfica de las funciones exponenciales, logarítmicas y raíz cuadrada al modificar los parámetros. En cuanto a los conceptos podemos evidenciar algunos claves en el estudio de las funciones tales como: función exponencial, función logarítmica, función raíz cuadrada, entre otros.

De acuerdo a lo descrito anteriormente, se podría establecer una primera hipótesis respecto del significado pretendido por el PE de segundo año medio, asociada a la noción de función como una *relación entre variables*. Esta hipótesis cobra fuerza cuando el Mineduc (2011c) en las orientaciones didácticas para la unidad, explícita la necesidad de dar énfasis a la aplicación de las funciones en contextos científicos, naturales y geográficos, estableciendo así, relaciones entre magnitudes. Consecutivamente la función es presentada como una *representación gráfica*. Esta reflexión se refuerza cuando el Mineduc (2011c), a través de sus aprendizajes esperados (AE) cuando señala "…analizar gráficamente las funciones abordadas durante este nivel educativo".

Para poder describir los otros elementos de la configuración epistémica (proposiciones/propiedades, y procedimientos), para los cuales no se encuentra evidencia explícita en el programa de estudio, es necesario analizar el libro de texto sugerido para este nivel educativo.

3.3.3.2. Análisis epistémico del libro de texto sugerido por el PE

De acuerdo con el libro de texto sugerido por el Mineduc para segundo año medio (Muñoz, et al., 2014). Este presenta el estudio de las funciones en la Unidad 3 de Álgebra. Esta Unidad Temática está dividida en tres secciones, en las cuales se estudia: 1) Fracciones Algebraicas; 2) Función exponencial, logarítmica y raíz; y 3) Sistemas de ecuaciones lineales. A continuación realizamos el análisis de la segunda sección de la Unidad 3 en el cual se refuerza el objeto matemático función y se introduce por primera vez la noción de función exponencial, función logarítmica y función raíz cuadrada.

<u>Configuración epistémica</u>

El primer elemento de la configuración epistémica refiere al tipo de *situaciones/problemas* propuestos en el libro de texto. Al respecto, identificamos cuatro tipos de problemas: 1) problemas para reforzar conocimientos previos; 2) problemas para ejemplificar definiciones introducidas; 3) problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas; y 4) problemas contextualizados para reforzar los conocimientos 'adquiridos'. Los *elementos lingüísticos* identificados en las definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones/problema, son de tipo verbal, tabular, simbólico y gráfico. Desde el inicio de la sección dos de la Unidad 3, se presentan problemas propuestos (del tipo 1 descrito anteriormente) que permiten fortalecer conocimientos previos de la noción de función, función lineal y función afín, junto con ello se refuerzan los *conceptos/definiciones* de función, dominio y recorrido. Posteriormente se introducen definiciones como función raíz cuadrada, función exponencial, función logarítmica, entre otros.

En segundo año medio, la noción de función es dada mediante la siguiente definición,

> "*Una función* $f(x)$ *es una relación entre elementos de dos conjuntos* A *y* B*, donde a cada elemento del conjunto* A *le corresponde un único elemento del conjunto* B*. El dominio de una función es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen. Se escribe* $Dom\, f(x)$*. El recorrido de una función corresponde al conjunto de las imágenes del conjunto del dominio de la función. Se escribe* $Rec\, f(x)$". (Muñoz, et al., 2014, p. 198)

Inicialmente, se presenta un primer problema del tipo 1, que permite reforzar conocimientos previos de la noción de función tales como su definición y algunas de sus representaciones (*Figura 3.19*).

Taller

En parejas, lean y realicen las siguientes actividades.

1 Consideren las siguientes funciones.

$f(x) = 2x$ $\quad$ $g(x) = f(x) + 1 = 2x + 1$ $\quad$ $h(x) = f(x) - 1 = 2x - 1$

$j(x) = f(x+3) = 2(x + 3)$ $\quad$ $k(x) = f(x - 3) = 2(x - 3)$

a) Completen la siguiente tabla.

X	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)=2x$											
$g(x)=2x+1$											
$h(x)=2x-1$											
$j(x) = 2(x+3)$											
$k(x) = 2(x-3)$											

b) Grafiquen las funciones **f(x), g(x)** y **h(x)** en el mismo plano cartesiano, según los valores de la tabla anterior. ¿Qué relación observas entre ellas?

Figura 3. 19. Ejemplo de problema tipo 1 (Muñoz, et al., 2014, p. 198)

Por otra parte, algunos de los *conceptos/definiciones* introducidas durante este nivel educativo, son los de *función exponencial*, *función logarítmica* y *función raíz cuadrada*. Muñoz, et al., (2014) introduce estas nociones matemáticas, mediante las siguientes definiciones:

> "*Para la función raíz cuadrada* $f(x) = \sqrt{x}$, *se cumple que su dominio y su recorrido corresponden a los números reales positivos y el cero* $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$". (p. 203)

> "*Una función exponencial se puede escribir de la forma* $f(x) = ab^x$, *donde* $a, b \in \mathbb{R}$, *con* $b > 0$ *y* $b \neq 1$ *se tiene*, $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$ *y* $Rec\ f(x) = \mathbb{R}^+$". (p. 207)

> "*Una función logarítmica se puede escribir de la forma* $f(x) = log_a x$ *con* $a > 0$, $a \neq 1$. *En ella se tiene que* $Dom\ f(x) = \mathbb{R}^+$ *y* $Rec\ f(x) = \mathbb{R}$". (p. 211)

Un problema del tipo 2 que permite ejemplificar la definición de la noción de función exponencial, se plantea en la *Figura 3.20*.

Tania estudia el comportamiento de dos cultivos A y B de bacterias (ambos comenzaron con aproximadamente 1 000 bacterias). El cultivo A se encuentra en condiciones muy favorables y se triplica cada un minuto, mientras que el B se está probando un antibiótico, y a cada minuto la población disminuye a su tercera parte.

Para hacer el estudio construye una tabla de valores que representa las situaciones, considerando el tiempo **t** en minutos y la cantidad de bacterias **B** en cada cultivo.

	Cantidad de bacterias luego de t minutos					
	0	1	2	3	4	5
Cultivo A	$1000 * 3^0 = 1000$	$1000 * 3^1 = 3000$	$1000 * 3^2 = 9000$	$1000 * 3^3 = 27\,000$	$1000 * 3^4 = 81\,000$	$1000 * 3^5 = 243\,000$
Cultivo B	$1000\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1000$	$1000\left(\frac{1}{3}\right)^1 \approx 333,33$	$1000\left(\frac{1}{3}\right)^2 \approx 111,11$	$1000\left(\frac{1}{3}\right)^3 \approx 37,037$	$1000\left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 12,35$	$1000\left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 4,12$

De las tablas anteriores se desprende que las situaciones se puede modelar mediante funciones **f(t)** y **g(t)** tales que:

Primer cultivo: $f(t) = 1\,000 \cdot 3^t$, con $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Segundo cultivo: $g(t) = 1\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$, con $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Este tipo de funciones, en que la variable independiente se encuentra en un exponente, reciben el nombre de **funciones exponenciales**.

Figura 3. 20. Ejemplo de problema tipo 2 (Muñoz, et al., 2014, p. 206)

Este tipo de ejemplos también hacen referencia a *procedimientos* que están relacionados con las operaciones que los estudiantes deben realizar para inicialmente tabular datos y posteriormente modelar una situación mediante una función -en este caso una función exponencial-.

Las *propiedades/proposiciones* identificadas en este nivel escolar son descritas por Muñoz, et al., (2014) de la siguiente manera:

> "*En general, dada una función* $f(x)$, *se tiene que:*
>
> *1)* $I(x) = f(-x)$ *es una reflexión de* $f(x)$ *respecto del eje* Y.
>
> *2)* $m(x) = -f(x)$ *es una reflexión de* $f(x)$ *respecto del eje X*". (p. 199)

Un problema del tipo 2 que hace referencia a este tipo de *propiedades/proposiciones* se evidencia en la *Figura 3.21*.

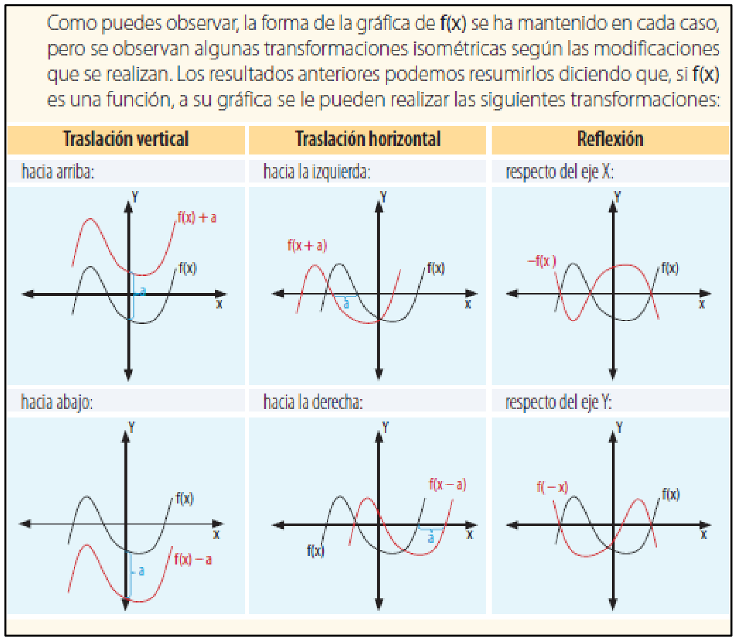


Figura 3. 21. Ejemplo de problema tipo 2 (Muñoz, et al., 2014, p. 199)

Un problema del tipo 3 permite reforzar la *propiedad/proposición* anteriormente introducida, además hace referencia a *procedimientos* que están relacionados con las estrategias que los estudiantes deben realizar para construir la gráfica de una función (*Figura 3.22*).

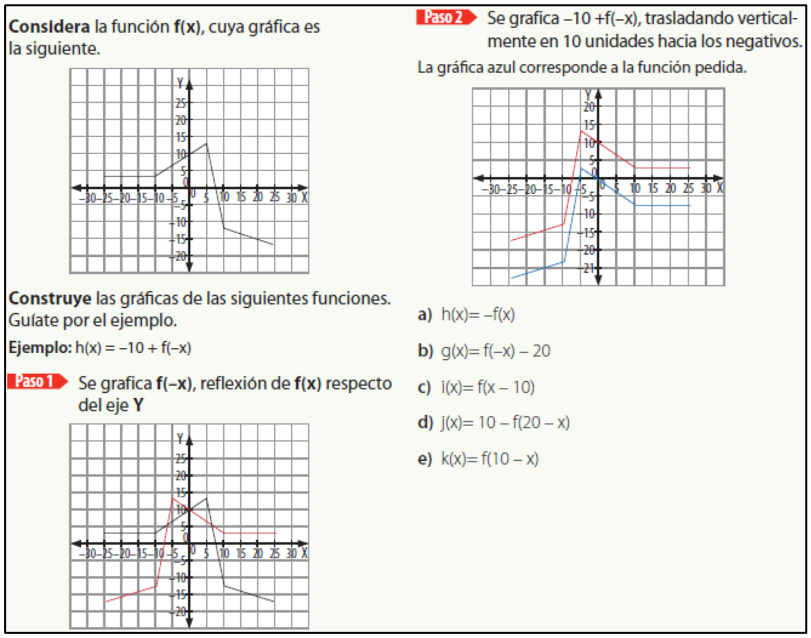


Figura 3. 22. Ejemplo de problema tipo 3 (Muñoz, et al., 2014, p. 201)

Otro tipo de *propiedades/proposiciones* que se identifican en el texto escolar, se describen de la siguiente manera:

> "*Para la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, se cumple que:*
>
> - *Si $|a| > 1$, $g(x) = a\sqrt{x}$ corresponde a una dilatación de $f(x)$. Si $|a| < 1$, $g(x) = a\sqrt{x}$ corresponde a una contracción de $f(x)$.*
> - *$h(x) = \sqrt{x - b}$ corresponde a una traslación horizontal de b unidades respecto de $f(x)$. Si $b > 0$ se desplaza b unidades hacia la derecha y si $b < 0$ se desplaza b unidades hacia la izquierda.*
> - *$j(x) = \sqrt{(x)} + c$ corresponde a una traslación vertical de c unidades respecto a $f(x)$. Si $c > 0$ se desplaza c unidades hacia arriba y si $c < 0$ se desplaza c unidades hacia abajo.*
>
> *Decimos que la gráfica de una función se dilata si se 'abre' respecto del eje Y, mientras que cuando se 'cierra' respecto a dicho eje decimos que se contrae*". (Muñoz, et al., 2014, p. 203)

Un problema del tipo 3 que permite reforzar la *propiedad/proposición* anteriormente descrita y que además hace referencia a *procedimientos* que están relacionados con las estrategias que los estudiantes deben conocer para construir la gráfica de una función -en este caso una función raíz cuadrada-, se evidencia en la *Figura 3.23*.

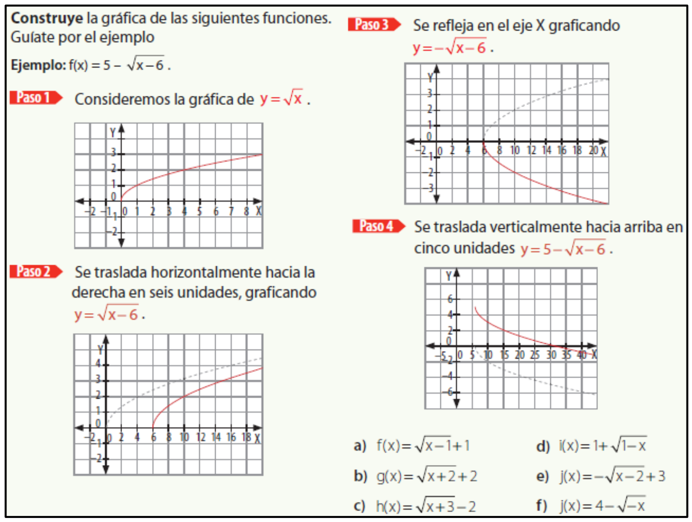


Figura 3. 23. Ejemplo de problema tipo 3 (Muñoz, et al., 2014, p. 204-205)

Cuando se aborda la noción de función exponencial también se establecen algunas *propiedades/proposiciones* que son descritas por Muñoz, et al., (2014) de la siguiente manera:

> "*La gráfica de una función exponencial de la forma* $f(x) = b^x$ *depende del valor de* b. *Así:*
>
> - *Si* $b > 1$, *la gráfica de la función es creciente, mientras que si* $0 < b < 1$, *la gráfica es decreciente. Además mientras mayor es el valor de* b, *la función tiene un mayor crecimiento.*
> - *Si* $|a| < 1$, *la gráfica de* $y = ab^x$ *es una dilatación de* $y = b^x$, *mientras que si* $|a| > 1$ *es una contracción.*
>
> *La gráfica de* $y = ab^{x-c}$ *es una traslación horizontal de* c *unidades respecto de* $y = ab^x$, *hacia la derecha si* $c > 0$ *y hacia la izquierda si* $c < 0$.

La gráfica de $y = ab^x + h$ *es una traslación vertical de* h *unidades respecto de* $y = ab^x$*, hacia arriba si* $h > 0$ *y hacia abajo si* $h < 0$”. (p. 207)

Un problema del tipo 4 descrito anteriormente y que hace referencia a este tipo de propiedades/proposiciones se evidencia en la *Figura 3.24*.

Conexiones. En epidemiología se utilizan diversos modelos matemáticos para representar el número de personas contagiadas por una enfermedad. Por ejemplo, el número de personas contagiadas por un virus esta dado por la función

$$f(t) = \frac{10000 \cdot (2,72)^t}{(2,72)^t + 9000}$$

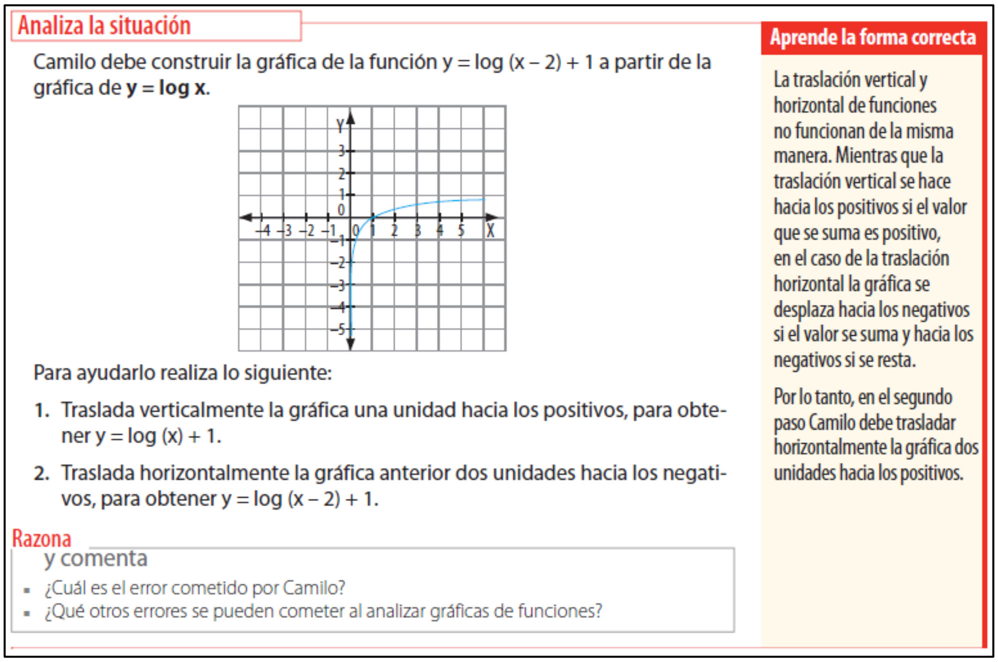
donde t es la cantidad de días.

a) ¿Cuántos contagiados se espera que habrá luego de 1, 4 y 10 días?

b) Grafica la función. ¿Qué ocurre al cabo de mucho tiempo? Discute con tus compañeros.

Figura 3. 24. Ejemplo de problema tipo 4 (Muñoz, et al., 2014, p. 209)

Un problema del tipo 3 que hace referencia a explicaciones demostrativas de ciertas propiedades asociadas a la gráfica de la función logaritmo, o bien a *justificaciones/argumentos*, se describen en la *Figura 3.25*.


Analiza la situación

Camilo debe construir la gráfica de la función y = log (x – 2) + 1 a partir de la gráfica de **y = log x**.

Para ayudarlo realiza lo siguiente:

1. Traslada verticalmente la gráfica una unidad hacia los positivos, para obtener y = log (x) + 1.
2. Traslada horizontalmente la gráfica anterior dos unidades hacia los negativos, para obtener y = log (x – 2) + 1.

Razona y comenta

- ¿Cuál es el error cometido por Camilo?
- ¿Qué otros errores se pueden cometer al analizar gráficas de funciones?

Aprende la forma correcta

La traslación vertical y horizontal de funciones no funcionan de la misma manera. Mientras que la traslación vertical se hace hacia los positivos si el valor que se suma es positivo, en el caso de la traslación horizontal la gráfica se desplaza hacia los negativos si el valor se suma y hacia los negativos si se resta.

Por lo tanto, en el segundo paso Camilo debe trasladar horizontalmente la gráfica dos unidades hacia los positivos.

Figura 3. 25. Ejemplo de problema tipo 3 (Muñoz, et al., 2014, p. 215)

<u>*Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas*</u>

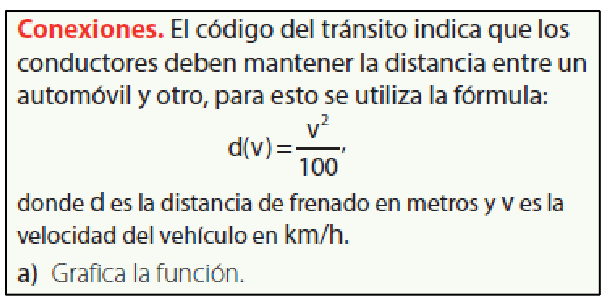
La tabla 3.4 sintetiza el tipo de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de los problemas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstos (o en las soluciones esperadas, en el caso de los problemas no resueltos).

Tabla 3. 4. Representaciones previas y emergentes en los problemas de 2° año medio

Representaciones para *f(x)*						
Previos \ Emergentes		$f(x)$				
		Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Icónica
$f(x)$	Verbal	S●	S●	●	●	
	Gráfica	●	S●	●		
	Simbólica		T●	●	●	
	Tabular		●			
	Icónica					

Como podemos observar en la tabla anterior, en cuanto al tipo de representaciones, encontramos once clases de problemas. La primera refiere a aquellos problemas para los cuales se proporcionan datos verbales y se requiere de una respuesta en registro verbal, para lo cual el estudiante deberá transitar de lo verbal a lo simbólico para posteriormente proporcionar una respuesta en registro verbal. Este tránsito de lo verbal a lo simbólico es representado en la tabla 3.4 con la "S" antes del punto (S●). Un ejemplo de esta primera clase de problemas se identifica en el texto escolar de la siguiente manera: "Dos máquinas arrojan $f(t)$ y $g(t)$ litros de agua en t segundos respectivamente, si $f(t) = 2t$ y $g(t) = t^2$. ¿Cuál de las dos llaves ha arrojado más agua al cabo de 20 segundos?" (Muñoz, et al., 2014, p. 203).

La segunda clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan datos verbales de la función, los cuales deberán de ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente gráficamente. En esta clase de problemas el estudiante deberá transitar de lo verbal a lo simbólico y posteriormente proporcionar una respuesta en registro gráfico. Esta situación es representada en la tabla 3.4. de la siguiente manera "S" antes del punto (S●). Un ejemplo de esta segunda clase de problemas se presenta en la *Figura 3.26*.


Conexiones. El código del tránsito indica que los conductores deben mantener la distancia entre un automóvil y otro, para esto se utiliza la fórmula:

$$d(v) = \frac{v^2}{100},$$

donde d es la distancia de frenado en metros y v es la velocidad del vehículo en km/h.

a) Grafica la función.

Figura 3. 26. Ejemplo de tarea clase 2: verbal-gráfico (Muñoz, et al., 2014, p. 201)

La tercera clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos verbales de la función y se pide una respuesta simbólica. La cuarta clase de tareas, según el tipo de representación que se activan, refieren a aquellas que proporcionan una representación verbal de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación tabular de la misma. Un ejemplo de la tercera y cuarta clase de problemas se representa en las *Figura 3.27* y *Figura 3.28*.

Andrés trabaja vendiendo celulares en un centro comercial, donde le pagan un sueldo base más una comisión por cada venta. El sueldo base mensual es de $200 000, y por cada venta gana $500.

a. ¿Cuál es la función que representa el sueldo mensual de Andrés en función de la cantidad de ventas?

Figura 3. 27. Ejemplo de tarea clase 3: verbal-simbólico (Muñoz, et al., 2014, p. 197)

La cantidad de ciertas bacterias presentes en un cuerpo se reproduce exponencialmente, duplicando su población cada 3 minutos.

a. Completa la siguiente tabla.

Producción de la población de bacterias									
Tiempo (minutos)	3	6	9	12	15	18	21	24	27
Población	500								

Figura 3. 28. Ejemplo de tarea clase 4: verbal-tabular (Muñoz, et al., 2014, p. 217)

La quinta clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan representaciones gráficas de la función, las que deberán ser analizadas por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta de tipo verbal. Un ejemplo de esta clase de problemas se presenta en la *Figura 3.29*.

Determina cuál(es) de las siguientes gráficas representa(n) una función. Justifica cuando no lo sean.

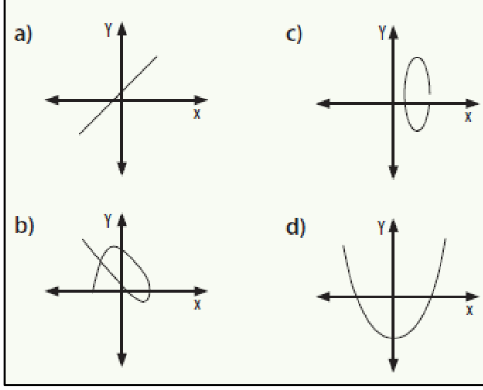


Figura 3. 29. Ejemplo de tarea clase 5: gráfica-verbal (Muñoz, et al., 2014, p. 200)

La sexta clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos gráficos de la función y se pide una respuesta gráfica, para lo cual el estudiante deberá transitar de lo gráfico a lo simbólico para posteriormente pasar del registro simbólico al gráfico.

Este tránsito de lo gráfico a lo simbólico es representado en la tabla con la "S" antes del punto (S●). Un ejemplo de esta sexta clase de problemas se presenta en la *Figura 3.30*.

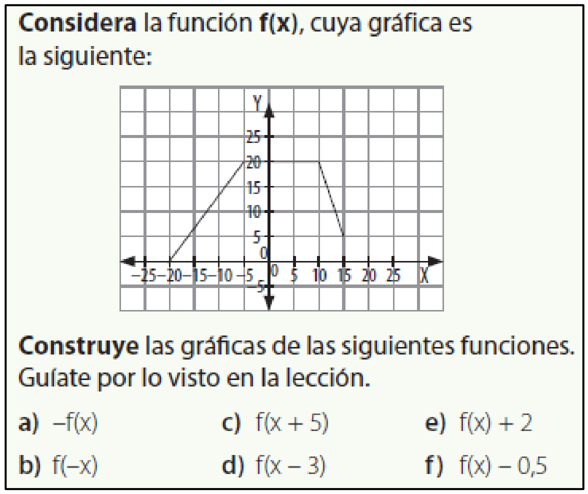


Figura 3. 30. Ejemplo de tarea clase 6: gráfica-gráfica (Muñoz, et al., 2014, p. 200)

La séptima clase refiere a aquellos problemas que proporcionan en su planteamiento la gráfica de una función y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta séptima clase de problemas se representa en la *Figura 3.31*.

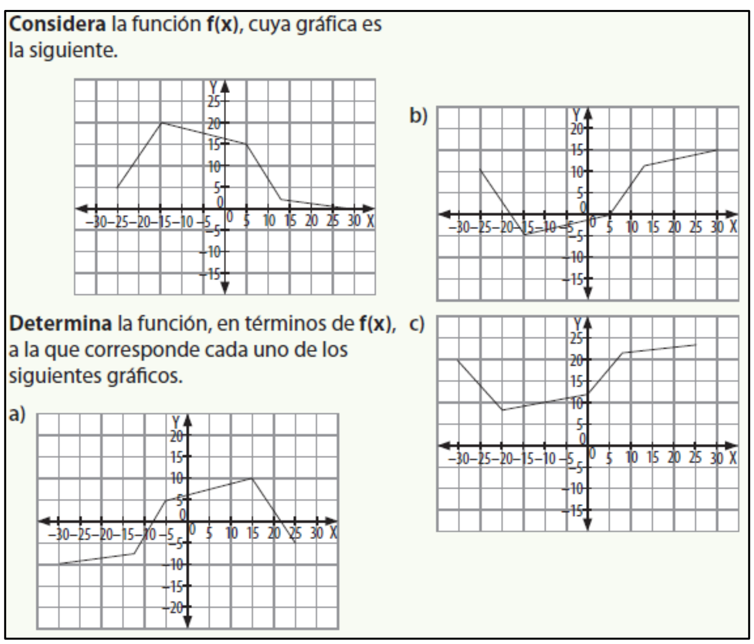


Figura 3. 31. Ejemplo de tarea clase 7: gráfica-simbólica (Muñoz, et al., 2014, p. 201)

La octava clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos simbólicos de la función y se pide una respuesta gráfica, para lo cual el estudiante deberá transitar de lo simbólico a lo tabular para posteriormente pasar del registro tabular al gráfico. Este tránsito de lo verbal a lo simbólico es representado en la tabla con la "T" antes del punto (T●). Un ejemplo de esta octava clase de problemas se presenta en la *Figura 3.19*.

La novena clase de tareas refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos simbólicos de la función y se pide una respuesta simbólica. Un ejemplo de esta novena clase de problemas se presenta en la *Figura 3.32*. La décima clase de tareas, según el tipo de representación que se activan, refieren a aquellas que proporcionan una representación simbólica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación tabular de la misma. Un ejemplo de esta décima clase de problemas se representa en la *Figura 3.19*.

Calcula las siguientes expresiones considerando las funciones:

$f(x) = 2x$ $\qquad g(x) = 3x^2$ $\qquad h(x) = \frac{x}{2}$

a) $f(3) + g(2) - h(12)$ $\qquad$ **d)** $f(-3) - h(5) + 0{,}25\, g(12)$

b) $(f(12))^2 - 5h(10)$ $\qquad$ **e)** $f(a+b) - (a - b)$

Figura 3. 32. Ejemplo de tarea clase 9: simbólico-simbólica (Muñoz, et al., 2014, p. 200)

La undécima clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos tabulares de la función y se pide una respuesta gráfica. Un ejemplo de esta última clase de problemas se representa en la *Figura 3.33*.

Construye la gráfica de las funciones expresadas en las siguientes tablas.

a) Se asocia la medida del lado de un cuadrado con su área.

Lado	1	2	3	4	5
Área	1	4	9	16	25

Figura 3. 33. Ejemplo de tarea clase 11: tabular-gráfico (Muñoz, et al., 2014, p. 200)

3.3.3.3. Significado de la noción de función pretendido por el currículo de segundo medio

Con base en los análisis presentados en los apartados 3.3.3.1 y 3.3.3.2, es posible determinar cuáles son los significados pretendidos por el currículo, <Programas de Estudios, Libro de Texto>, chileno de matemáticas de segundo año medio para la noción de función.

Con el análisis realizado del Programa de Estudios, es posible percibir que la noción de función se pretende introducir en su acepción de *relación entre variables*, para luego establecer el significado de *función como representación gráfica*. Por otro lado, luego del análisis del libro de texto que sugiere el marco curricular de segundo año medio, identificamos que, de acuerdo al tipo de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos, propuestos en el texto escolar, la noción de función se introduce directamente tomando elementos de la *teoría conjuntista*. Ulteriormente en virtud de las clases de problemas propuestos por el libro de texto, se percibe la noción de función en su acepción de *función como representación gráfica y función como expresión analítica*.

De esta forma podemos concluir que el significado pretendido por el currículo chileno de segundo año medio sobre la noción de función, es *la función como relación entre variables, la función como representación gráfica, la función como expresión analítica y la función a partir de la teoría de conjuntos.*

3.3.4. Análisis de la propuesta curricular para tercer año medio

A continuación presentamos el análisis de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de Tercer año Medio. Para esto consideramos el Programa de Estudios (PE) o “Programa de Estudio para Tercer año medio” propuesto por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc, 2015a). Así mismo consideramos el libro de texto que sugiere el marco curricular:

Saiz, O., & Blumenthal, V. (2015). *Texto del estudiante. Matemática 3° Medio.* Chile: Ediciones Cal y Canto.

3.3.4.1. Análisis epistémico del Programa de Estudios (PE)

El Programa de Estudios para tercer año medio propuesto por el Ministerio de Educación de Chile se divide en cuatro Unidades, cada una de estas asociadas a un Eje Temático. La noción de función se aborda en la Unidad 2 que está relacionada con el Eje Temático de Álgebra. En dicha unidad se plantean cuatro aprendizajes esperados: 1) Reconocer el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadráticas; 2) Representar la función cuadrática mediante tablas, gráficos, y algebraicamente; 3) Modelar situaciones reales por medio de la función cuadrática, para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático; y 4) Reconocer que todas las ecuaciones de segundo grado con una incógnita tienen soluciones en el conjunto de los números complejos. Como podemos observar los aprendizajes esperados uno, dos y tres están directamente vinculados con el estudio de la noción de función –en este caso la noción de función cuadrática–. Para cada uno de estos aprendizajes esperados se plantean una serie de indicadores, que presentamos en la *Figura 3.34,* sobre aquello que los estudiantes deberán ser capaces de hacer cuando hayan logrado estos aprendizajes.

Aprendizajes Esperados	**Indicadores de Evaluación Sugeridos**
Se espera que los estudiantes sean capaces de:	*Los estudiantes que han logrado este aprendizaje:*
AE 1 Reconocer el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadráticas.	• Determinan qué situaciones pueden ser modeladas con la función cuadrática. • Dan ejemplos cotidianos de cambios no lineales. • Dan ejemplos cotidianos de cambios cuadráticos.
AE 2 Representar la función cuadrática mediante tablas y gráficos, y algebraicamente.	• Representan valores (x,y) de la función cuadrática en tablas y en el plano cartesiano. • Varían los valores de a, b y c, conjeturando sobre los efectos que tiene en la representación gráfica de la función. • Determinan las intersecciones de la gráfica de la función con el eje X (ceros de la función).
AE 3 Modelar situaciones reales por medio de la función cuadrática, para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.	• Utilizan modelos dados de función cuadrática para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático. • Elaboran modelos para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.
AE 4 Reconocer que todas las ecuaciones de segundo grado con una incógnita tienen soluciones en el conjunto de los números complejos.	• Utilizan diferentes técnicas para resolver ecuaciones de segundo grado, por ejemplo, la factorización, la completación de cuadrados o fórmula general. • Verifican si las soluciones de una ecuación de segundo grado son reales o complejas. • Resuelven problemas matemáticos o científicos que involucran en su solución ecuaciones de segundo grado.

Figura 3. 34. Aprendizajes esperados e indicadores de evaluación (Mineduc, 2015a, p. 53)

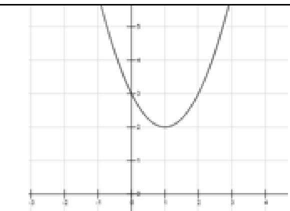
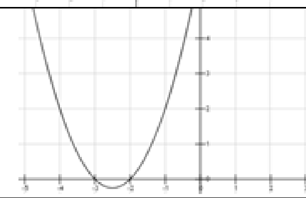
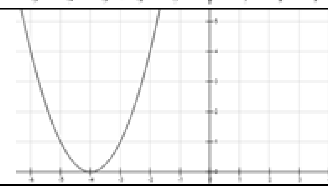
El propósito de la Unidad 2 de Álgebra es (Mineduc, 2015a):

> "*... retomar los conceptos –función, función exponencial y logarítmica– y mirarlos en detalle para la función cuadrática, entrelazando con la unidad anterior de números complejos. Se hace necesario volver a las representaciones de la función, utilizando tablas y gráficos. El énfasis está en modelar situaciones de cambio cuadrático...*". (p. 52)

Así mismo, como contenidos se propone el estudio de: "Función cuadrática; Ecuación de segundo grado" (Ibíd.).

Con respecto a las *situaciones/problemas* declaradas por el PE, identificamos tareas donde los estudiantes deberán trabajar la función cuadrática en situaciones reales, las cuales representan un cambio cuadrático, como por ejemplo: movimientos rectilíneos constantemente acelerados, lanzamientos que tienen trayectoria parabólica, etc. En este sentido se hace relevante, destacar la función cuadrática para modelar situaciones estáticas y dinámicas (Mineduc, 2015a, p. 54). De igual manera el PE establece *elementos lingüísticos* asociados a la noción de función del tipo tabular, gráfico, simbólico y verbal. Algunas *justificaciones/argumentos* se evidencian cuando se explicita que los estudiantes deberán reconocer e identificar, si ciertas situaciones reales se pueden modelar a través de funciones cuadráticas, para ello se propone, por ejemplo llevar dicha situación al plano cartesiano y a partir de ello verificar y argumentar si la situación real planteada corresponde o no a una función cuadrática. De igual manera el PE propone actividades en que los estudiantes deberán justificar y argumentar las conjeturas planteadas respecto de la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática y su relación con el valor del discriminante. Este tipo de situaciones se describen en la *Figura 3.35*.

Dada la función cuadrática y su gráfico.

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ Determine $f(x) = 0$ Determine el valor de $b^2 - 4ac$	
$f(x) = x^2 + 5x + 3$ Determine $f(x) = 0$ Determine el valor de $b^2 - 4ac$	
$f(x) = x^2 + 8x + 16$ Determine $f(x) = 0$ Determine el valor de $b^2 - 4ac$	

Formulen conjeturas respecto de las siguientes interrogantes:

a) ¿Qué relación hay entre el valor del discriminante y obtención de soluciones reales y diferentes en una ecuación cuadrática?

b) ¿Qué relación hay entre el valor del discriminante y obtención de soluciones complejas en una ecuación cuadrática?

c) ¿Qué soluciones se obtienen cuando el discriminante es igual a cero?

Figura 3. 35. Justificaciones/argumentos esperados por el Programa de Estudios (Mineduc, 2015a, p. 62)

En cuanto a los *conceptos/definiciones* podemos evidenciar algunos claves en el estudio de las funciones tales como: función cuadrática, discriminante de la función cuadrática, representación gráfica, entre otros.

Un ejemplo que hace referencia a *procedimientos* que están relacionados con las estrategias que los estudiantes deben conocer para determinar la función que representa una situación problemática -en este caso una función cuadrática-, se describe en la *Figura 3.36*.

Una firma fabricante de zapatos tiene los siguientes costos de producción: si se producen 100 pares el costo es de $ 900 000, y si se producen 200 pares el costo es de $ 1 500 000. El costo fijo de producción es de $ 600 000. Asumiendo que el costo de una cantidad x de zapatos se puede modelar con una función cuadrática C(x), responda:

a) Determine la función C(x).

b) Si se producen 300 pares de zapatos ¿A cuánto se tiene que vender cada par de zapato en promedio, para tener una ganancia de 3 000 000?

c) ¿Cuántos pares de zapatos se pueden fabricar si el costo total de producción máximo debe ser de 2 000 000?

Observación al docente: Se recomienda considerar la función cuadrática en su forma $C(x) = ax^2 + bx + c$, donde $c = 600000$ es el costo fijo de producción y con los dos datos entregados (100, 900000) y (200, 1500000) se debe trabajar un sistema de ecuaciones lineales 2x2 para encontrar los valores de a y b de la función cuadrática.
Una vez que se tiene esta función, se recomienda utilizar algún tipo de software para graficarla y observar el significado de los diferentes valores que componen la función.
También se puede discutir sobre la producción de otros objetos y la forma en que afecta el producir más o menos productos y en los circunstancias de tener un costo fijo o no.

Figura 3. 36. Procedimientos descritos por el Programa de Estudios (Mineduc, 2015a, p. 66)

Con base en lo anterior, se conjetura que el PE para tercer año medio pretende introducir la noción de función como una *relación entre variables* para posteriormente presentar este objeto matemático como una *representación gráfica*. Esta reflexión se fortalece cuando Mineduc (2015a) señala que,

> "*…la función cuadrática se puede apreciar de forma dinámica en dos situaciones: la primera corresponde a una trayectoria parabólica –asociada a la representación gráfica– y la segunda corresponde a situaciones de tiempo versus desplazamientos –asociada a la relación entre variables–*". (p. 54)

Por otro lado podemos deducir que posterior a la revisión de los ejemplos de actividades propuestas por el PE se identificaron de manera implícita elementos propios de la definición de función desde la *teoría de conjuntos* –conceptos tales como dominio y recorrido de una función–.

Para poder describir los otros elementos de la configuración epistémica (proposiciones/propiedades), para los cuales no se encuentra evidencia explícita en el programa de estudio, es necesario analizar el libro de texto sugerido para este nivel educativo.

3.3.4.2. Análisis epistémico del libro de texto sugerido por el PE

Con respecto al libro de texto sugerido por el Mineduc para tercer año medio (Saiz, et al., 2015), este presenta el estudio de las funciones en la Unidad 2 de Álgebra. Esta Unidad Temática está dividida en dos secciones, en las cuales se estudia: 1) Ecuaciones cuadráticas; y 2) Función cuadrática. A continuación realizamos el análisis de la segunda sección de la Unidad 2 en el cual se introduce por primera vez la noción de función cuadrática.

Configuración epistémica

El primer elemento de la configuración epistémica refiere al tipo de *situaciones/problemas* propuestos en el libro de texto. Al respecto, identificamos tres tipos de problemas: 1) problemas para ejemplificar definiciones introducidas; 2) problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas; y 3) problemas contextualizados para reforzar las definiciones introducidas y los conocimientos ‘adquiridos’. Los *elementos lingüísticos* identificados en las definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones/problema, son de tipo verbal, tabular, simbólico y gráfico. Al inicio de la sección dos de la Unidad dos, se presenta una situación problema que involucra el lanzamiento de una bala, dicha situación se describe mediante una curva llamada parábola y el movimiento asociado a esta curva se le denomina movimiento parabólico. A través de este tipo de problemas el texto escolar intenta dar sentido e intencionalidad al estudio de la función cuadrática. Posteriormente se introduce la definición de función cuadrática, parábola, coeficientes numéricos y término independiente.

La función cuadrática es definida como:

> “*Llamaremos función cuadrática a toda función del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. A la gráfica de la función se le llama parábola. A a y b se les llama coeficientes numéricos de x^2 y x, respectivamente. A c se le llama término independiente*”. (Saiz, et al., 2014, p. 99)

Inicialmente, se presenta un primer problema del tipo 1, que permite ejemplificar la definición introducida de función cuadrática (*Figura 3.37*).

Comencemos analizando la función $f(x) = x^2$. Hacemos una tabla de valores para calcular algunas imágenes y preimágenes (recuerda que las preimágenes son los valores de x y las imágenes, los valores de y o $f(x)$).

x	$y = f(x)$	(x,y)
1	1	(1,1)
–1	1	(–1,1)
0	0	(0,0)
2	4	(2,4)
–2	4	(–2,4)

$y = 1^2 = 1$

$y = (-1)^2 = 1$

$y = 0^2 = 0$

$y = 2^2 = 4$

$y = (-2)^2 = 4$

Ahora bien, podemos ubicar estos puntos en el plano cartesiano para graficar nuestra función. También podemos utilizar un programa para graficar. ¿Recuerdas que en la unidad anterior usamos el programa Graphmatica? Si nos ayudamos con él, tendremos el siguiente gráfico para esta función:

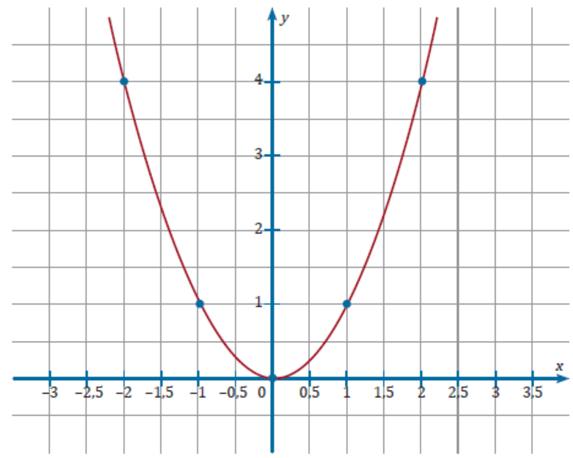


Figura 3. 37. Ejemplo de problema tipo 1 (Saiz, et al., 2014, p. 99-100)

Otros tipos de *conceptos/definiciones* introducidas durante este nivel educativo, son los de *dominio y recorrido de una función cuadrática, vértice de una parábola, concavidad de la parábola*, entre otros. Saiz, et al., (2014) definen:

> "*En una función cuadrática, el dominio serán siempre todos los reales, ya que la expresión* $y = ax^2 + bx + c$, *con* $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ *nunca se indefine, no importa cuál sea el valor de* x. *El recorrido, en cambio, está determinado por el vértice de la parábola. Como este es su punto más bajo o más alto, entonces el recorrido será:* $Rec\, f(x) = \{y \in \mathbb{R}/y \geq y_V\}$ *si tiene un mínimo* $(a > 0)$, *y será* $Rec\, f(x) = \{y \in \mathbb{R}/y \leq y_V\}$ *si tiene máximo* $(a < 0)$". (p. 112)

Un problema del tipo 1 que permite ejemplificar la definición de dominio y recorrido de una función cuadrática se describe en la *Figura 3.38*.

Por ejemplo: Para la función $f(x) = 2x^2 - x + 3$, hemos calculado su vértice y era $V = \left(\frac{1}{4}, \frac{23}{8}\right)$, entonces, podemos decir que como $a > 0$, entonces el vértice es su mínimo.

Por lo tanto: Dom $f(x) = \mathbb{R}$ y Rec $f(x) = \left\{y \in \mathbb{R} / y \geq \frac{23}{8}\right\}$

"Para que lo veas más claro, observa el gráfico de esta función".

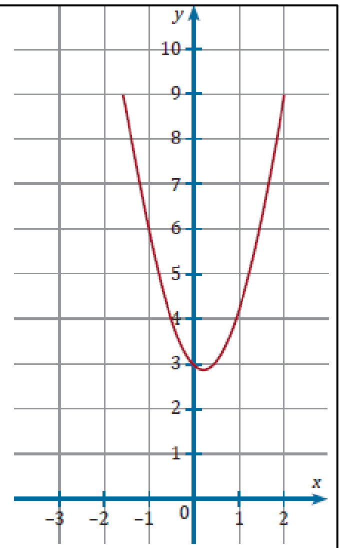


Figura 3. 38. Ejemplo de problema tipo 1 (Saiz, et al., 2014, p. 112)

Este tipo de ejemplos también hacen referencia a *procedimientos* que están relacionados con las operaciones que los estudiantes deben de realizar para determinar el dominio y recorrido de una función cuadrática en particular.

Otro tipo de problemas que hacen referencia a *procedimientos* relacionados a determinar si un punto del plano pertenece o no a una parábola se describe en la *Figura 3.39*.

¿Cómo determinar si un punto del plano pertenece o no a una parábola?

Si pensamos en la tabla de valores que hicimos anteriormente, podemos decir que, para determinar si un punto pertenece a una parábola, debemos tener la función que la determina y así podremos evaluar y verificar que la igualdad se cumpla. Por ejemplo, tomemos la función $y = x^2 + 3x - 5$ y decidamos si los puntos $(1, -1)$ y $(2,1)$ pertenecen a la parábola.

Para el punto $(1, -1)$ tenemos que:

$$-1 = 1^2 + 3 \cdot 1 - 5$$
$$-1 = 1 + 3 - 5$$
$$-1 = 4 - 5$$
$$-1 = -1.$$

Como se cumple la igualdad, entonces el punto pertenece a la parábola.

Figura 3. 39. Ejemplo de problema tipo 1 (Saiz, et al., 2014, p. 101)

Las *propiedades/proposiciones* identificadas en este nivel escolar son descritas por Saiz, et al., (2014) de la siguiente manera:

"*Si dada la función cuadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *se tiene que* $x = 0$, *entonces* $y = c$. *Así, el punto de intersección de la parábola con el eje* Y *será siempre* $(0, c)$". (p. 105)

"*Una función* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *intersecta al eje* X *en:*

1. *Dos puntos si la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$ *tiene dos soluciones reales y distintas o* $\Delta > 0$.
2. *Un punto si la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$ *tiene una solución o* $\Delta = 0$.
3. *Ningún punto si la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$ *no tiene solución en* $\mathbb{R}$ *o* $\Delta < 0$. *En este caso, sus soluciones son números complejos*". (p. 107)

Un problema del tipo 2 que permite reforzar la *propiedad/proposición* anteriormente introducida se describe en la *Figura 3.40*.

Determinen la intersección de las siguientes parábolas con los ejes coordenados (eje x y eje y). Grafiquen las funciones; ayúdense con el programa Graphmatica e identifiquen allí sus respuestas.

a. $f(x) = 2x^2 - 6x - 176$

b. $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

c. $y = -x^2 + 2x + 2$

d. $f(x) = x^2 - 17x + 16$

e. $y = 3x^2 + 18x + 27$

f. $f(x) = -x^2 + 196$

Figura 3. 40. Ejemplo de problema tipo 2 (Saiz, et al., 2014, p. 109)

Otro tipo de *propiedad/proposición* asociada a determinar el modelo algebraico de una función cuadrática, a partir de su representación gráfica, es descrita por Saiz, et al., (2014) de la siguiente manera:

"*Para determinar la función de una parábola, se necesitan tres puntos cualesquiera por los que pasa. Al reemplazar las coordenadas de estos tres* *puntos en los valores de x e y de una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, se obtendrá un sistema de ecuaciones para a, b y c. Al encontrar dichos valores se podrá escribir la función pedida*". (p. 116)

Un problema del tipo 3 que permite reforzar la propiedad/proposición anteriormente mencionada, se describe en la *Figura 3.41*.

> Arturo debe entregar un informe para una compañía de artículos médicos. Sabe que las utilidades de la empresa se comportan según una función cuadrática y sabe además que para una producción de 1 000 artículos su utilidad es de *USD* 5 000, y de *USD* 6 000 si producen 2 000 artículos. Ayuda a Arturo en su informe, contestando las siguientes preguntas:
>
> **a.** ¿Cuál es la función que regula las utilidades en función de los artículos producidos?

Figura 3. 41. Ejemplo de problema tipo 3 (Saiz, et al., 2014, p. 134)

Un problema del tipo 2 que hace referencia a explicaciones demostrativas de ciertas propiedades asociadas a la gráfica de la función cuadrática, o bien a *justificaciones/argumentos*, se describen en la *Figura 3.42*.

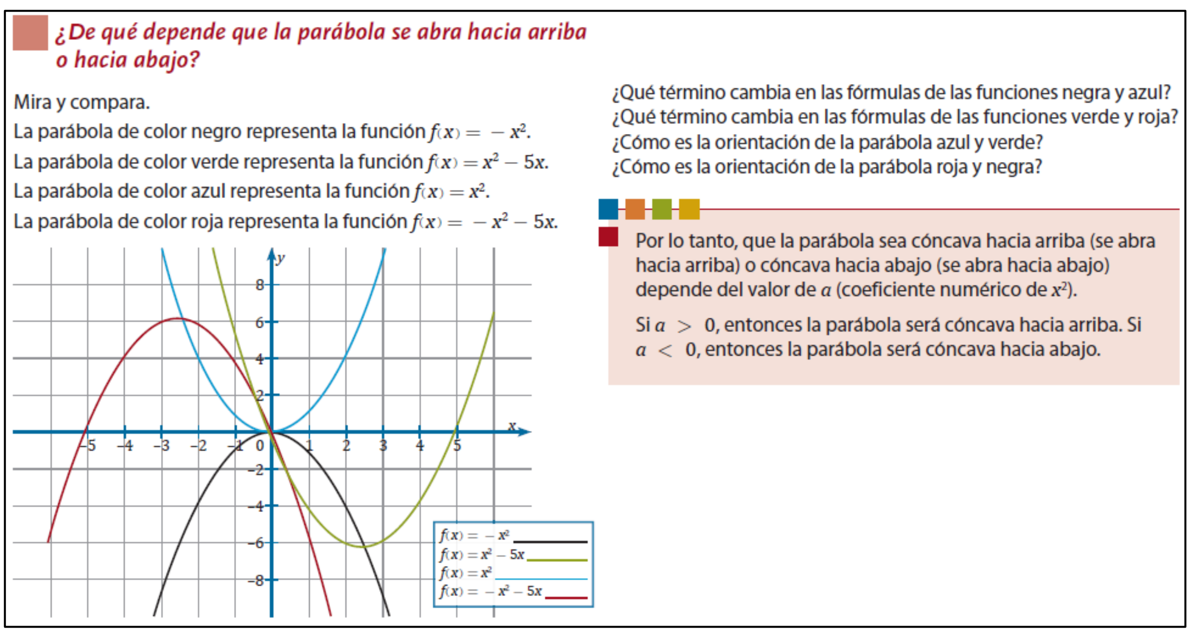


Figura 3. 42. Ejemplo de problema tipo 2 (Saiz, et al., 2014, p. 102-103)

<u>Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas</u>

La tabla 3.5 sintetiza el tipo de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de los problemas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstos (o en las soluciones esperadas, en el caso de los problemas no resueltos).

Tabla 3. 5. Representaciones previas y emergentes en los problemas de 3° año medio

Representaciones para *f(x)*						
		$f(x)$				
Previos \ Emergentes		Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Icónica
$f(x)$	Verbal	●		●		
	Gráfica	S●		●		
	Simbólica		●	●	●	
	Tabular					
	Icónica					

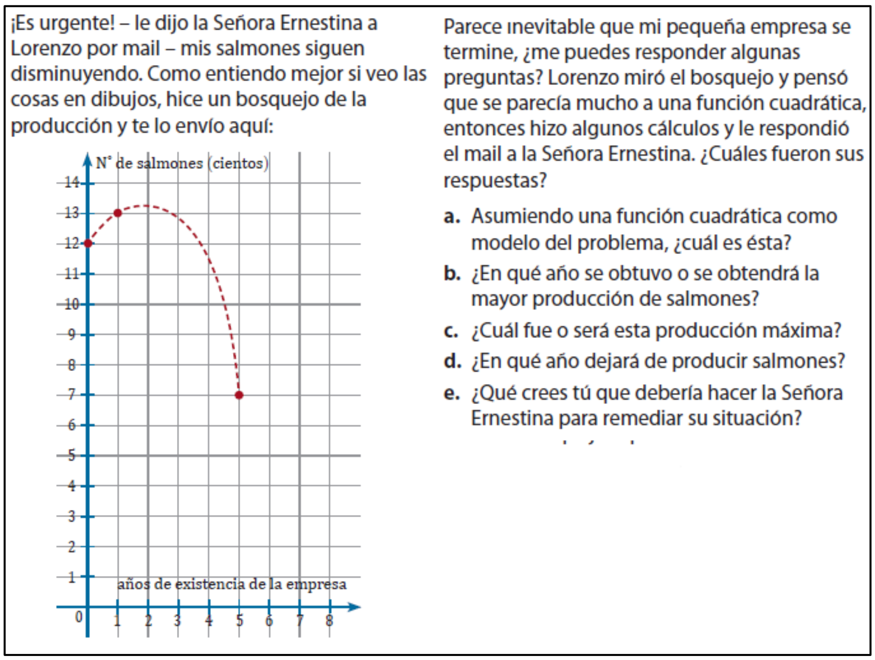
Como podemos observar en la tabla anterior, en cuanto al tipo de representaciones, encontramos siete clases de problemas. La primera refiere a aquellos problemas para los cuales se proporcionan datos verbales y se espera que el estudiante proporcione una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta primera clase de problemas se presenta en la *Figura 3.43*.

> Disponen de una cuerda de 100 cm y les piden que la doblen para formar un paralelogramo recto (cuadrado o rectángulo), pero haciendo que su área sea la más grande que puedan tener. ¿Cuáles son las medidas de dicho paralelogramo recto?

Figura 3. 43. Ejemplo de tarea clase 1: verbal-verbal (Saiz, et al., 2014, p. 129)

La segunda clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan datos verbales de la función, los cuales deberán de ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente simbólicamente. Un ejemplo de esta clase de problemas se presenta en la *Figura 3.41*.

La tercera clase de tarea, según el tipo de representación que se activan, refiere a aquellas que proporcionan una representación gráfica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación verbal de la misma, para esto el estudiante deberá transitar de lo gráfico a lo simbólico para posteriormente proporcionar una respuesta en registro verbal. Este tránsito de lo gráfico a lo simbólico es representado en la tabla 3.5 con la "S" antes del punto (S•). Un ejemplo de esta tercera clase de problemas se presenta en la *Figura 3.44*.



¡Es urgente! – le dijo la Señora Ernestina a Lorenzo por mail – mis salmones siguen disminuyendo. Como entiendo mejor si veo las cosas en dibujos, hice un bosquejo de la producción y te lo envío aquí:

Parece inevitable que mi pequeña empresa se termine, ¿me puedes responder algunas preguntas? Lorenzo miró el bosquejo y pensó que se parecía mucho a una función cuadrática, entonces hizo algunos cálculos y le respondió el mail a la Señora Ernestina. ¿Cuáles fueron sus respuestas?

a. Asumiendo una función cuadrática como modelo del problema, ¿cuál es ésta?

b. ¿En qué año se obtuvo o se obtendrá la mayor producción de salmones?

c. ¿Cuál fue o será esta producción máxima?

d. ¿En qué año dejará de producir salmones?

e. ¿Qué crees tú que debería hacer la Señora Ernestina para remediar su situación?

Figura 3. 44. Ejemplo de tarea clase 3: gráfico-verbal (Saiz, et al., 2014, p. 135)

La cuarta clase de problemas refiere a aquellos problemas que proporcionan en su planteamiento la gráfica de una función y se requiere que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta cuarta clase de problemas se representa en la *Figura 3.45*.

Ayuden a Daniela a resolver el siguiente ejercicio de su ensayo PSU de este mes. "Dadas las parábolas de la figura, determina algebraicamente:

a. La función que determina P_1
b. La función que determina P_2
c. El vértice de ambas parábolas.
d. El punto de corte de ambas parábolas con el eje *x*.
e. El punto de corte de P_2 con el eje *y*.

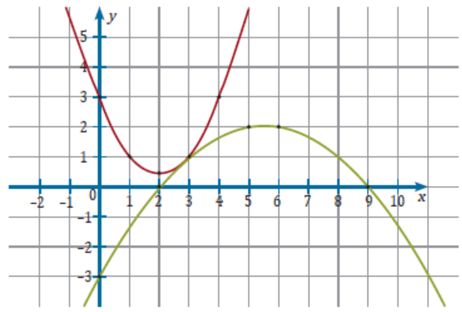


Figura 3. 45. Ejemplo de tarea clase 4: gráfico-simbólico (Saiz, et al., 2014, p. 136)

La quinta clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan representaciones simbólicas de la función, las que deberán ser analizadas por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en registro gráfico. Un ejemplo de esta clase de problemas se presenta en la *Figura 3.37*.

La sexta clase refiere a aquellos problemas que proporcionan en su planteamiento representaciones simbólicas de una función y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta sexta clase de problemas se representa en la *Figura 3.46*.

Determinen si los siguientes puntos pertenecen a las parábolas dadas:

a. A: $(2,1)$; $y = 2x^2 - 6x - 176$

b. C: $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{8}\right)$; $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3$

c. $(-1, -1)$; $y = \frac{x^2 + 9x + 6}{2}$

Figura 3. 46. Ejemplo de tarea clase 6: simbólico- simbólico (Saiz, et al., 2014, p. 104)

La séptima clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan representaciones simbólicas de la función, las que deberán ser examinadas por los estudiantes con el propósito de plantear una respuesta en registro tabular. Un ejemplo de esta clase de problemas se presenta en la *Figura 3.37*.

3.3.4.3. Significado de la noción de función pretendido por el currículo de tercero medio

Con base en los análisis presentados en los apartados 3.3.4.1 y 3.3.4.2, es posible determinar cuáles son los significados pretendidos por el currículo, <Programas de Estudios, Libro de Texto>, chileno de matemáticas de tercer año medio para la noción de función.

Por un lado, con el análisis realizado del PE, es posible percibir que la noción de función se pretende introducir en su acepción de *relación entre variables*, para luego transitar a la acepción de función como *representación gráfica*.

No obstante, a partir del análisis del libro de texto que se sugiere en el marco curricular de tercer año medio, encontramos que, de acuerdo al tipo de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos, propuestos y esperados en dicho texto, la noción de función se introduce directamente en su acepción de *relación entre variables*, esta definición va evolucionando en la medida que va involucrando tanto en el planteamiento como en el desarrollo de las tareas, elementos propios de la *teoría conjuntista.* Además la noción de función también se explicita en su acepción de *función como expresión analítica*, dado que en reiteradas ocasiones la función es presentada directamente a partir de una expresión algebraica que carece de un contexto específico.

De esta forma podemos concluir que el significado pretendido por el currículo chileno de tercer año medio sobre la noción de función, es *la función como relación entre variables, como representación gráfica, como expresión analítica y definida desde la teoría de conjuntos.*

3.3.5. Análisis de la propuesta curricular para cuarto año medio

A continuación presentamos el análisis de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de Cuarto año Medio. Para esto consideramos el Programa de Estudios (PE) o "Programa de Estudio para Cuarto año medio" propuesto por el Ministerio de

Educación de Chile (Mineduc, 2015b). Así mismo consideramos el libro de texto que se sugiere en dicho PE:

> Muñoz, G., Gutiérrez, V., & Muñoz, S. (2015). *Texto del estudiante. Matemática 4° Medio.* Chile: Santillana del Pacífico S.A.

3.3.5.1. Análisis epistémico del Programa de Estudios (PE)

El Programa de Estudios para cuarto año medio propuesto por el Ministerio de Educación de Chile se divide en cuatro Unidades, cada una de estas asociadas a un Eje Temático. La noción de función se aborda en la Unidad 1 que está relacionada con el Eje Temático de Álgebra. En dicha unidad se plantean tres aprendizajes esperados: 1) Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia $f(x) = a \cdot x^z$ con $|z| \leq 3$; 2) Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales; y 3) Determinar la función inversa de una función dada. Como podemos observar los aprendizajes esperados uno y tres están directamente vinculados con el estudio de la noción de función –en este caso la noción de función potencia y función inversa–. Para cada uno de estos aprendizajes esperados se plantean una serie de indicadores, que presentamos en la *Figura 3.47*, sobre aquello que los estudiantes deberán ser capaces de hacer cuando hayan logrado estos aprendizajes.

Aprendizajes Esperados	**Indicadores de evaluación sugeridos**
Se espera que los estudiantes sean capaces de:	*Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:*
AE 1 Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia $f(x) = a \cdot x^2$ con $\lvert z \rvert \leq 3$.	• Desarrollan ecuaciones funcionales del tipo $f(x) = x^{-1}$, mediante tablas de proporcionalidad inversa. • Elaboran gráficos de la función potencia $f(x) = x^z$ con $\lvert z \rvert \leq 3$. • Determinan simetrías y asíntotas de los gráficos. • Resuelven problemas matemáticos, de ciencias naturales o de economía, mediante funciones potencia.
AE 3 Determinar la función inversa de una función dada que sea invertible.	• Caracterizan la función inversa de una función invertible dada mediante la metáfora de una máquina que puede revertir su acción inicial. • Argumenta, acerca de las condiciones que debe cumplir una función para que exista su inversa aplicando la definición. • Grafican una función y su inversa en el plano cartesiano • Generan, si existe, la función inversa a partir de la función dada.

Figura 3. 47. Aprendizajes esperados e indicadores de evaluación (Mineduc, 2015b, p. 30)

El propósito de la Unidad 1 de Álgebra es (Mineduc, 2015b):

> "*…los estudiantes profundizan en el concepto de función, pues desarrollan sus conocimientos sobre la función potencia y trabajan la función inversa de aquellas tratadas en cursos anteriores… El énfasis de esta unidad está en determinar la inversa de funciones dadas y en reconocer situaciones que se modelan mediante la función potencia…*". (p.29)

Así mismo, como contenidos se proponen: "Función potencia; Función inversa de una función; y Sistemas de inecuaciones lineales (Ibíd.).

Con respecto a las *situaciones/problemas* declaradas por el PE, identificamos tareas donde los estudiantes deberán representar gráficamente tanto funciones inversas como funciones potencia, además se propondrán actividades en las que los estudiantes deberán desarrollar progresivamente habilidades que potencien el razonamiento matemático desde una perspectiva de proceso, que implica analizar e interpretar situaciones particulares que permitan abordar y comprender el enunciado del problema;

representar de manera pictórica e incorporando software para potenciar la modelación matemática.

> "*Respecto de la función potencia se trabajará con problemas contextualizados que impliquen analizar e interpretar la proporcionalidad inversa como función. El alumnado debe comprender que las funciones potencias permiten modelar situaciones de la vida cotidiana e interpretar las soluciones de los problemas desde el punto de vista aritmético, algebraico y/o geométrico según corresponda*". (Mineduc, 2015b, p. 30)

De igual manera el PE establece *elementos lingüísticos* asociados a la noción de función del tipo tabular, gráfico, simbólico y verbal. Algunas *justificaciones/argumentos* se evidencian cuando el PE explicita que los estudiantes deberán argumentar, acerca de las condiciones que debe cumplir una función para que exista su inversa aplicando la definición. Además deberán inferir y explicar regularidades aritméticas, algebraicas y/o geométricas que permitan encontrar la solución del problema; y por último, formular y verificar generalizaciones si el problema a resolver lo permite (Ibíd).

Cabe destacar que el (Mineduc, 2015b) establece que:

> "*El proceso de argumentar está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo, o en los que se quiere garantizar la verdad o falsedad de generalizaciones. En este contexto, se sugiere explicar, a las y los alumnos, que el proceso de generar argumentos tiene un carácter social y cobra sentido cuando emerge la necesidad de garantizar la validez de un concepto o propiedad en matemática, ya que la demostración permite el cambio de estatus de una afirmación entendida como una conjetura a una generalización validada que es aceptada*". (p. 33)

Un ejemplo de actividad propuesta por el PE y que hace referencia a explicaciones demostrativas, se describe de la siguiente manera: "*Demostrar que* $f(x) = x^2/x \ \in \mathbb{R}$, *es una función par. Las y los alumnos deben considerar que una función es par, si y sólo si,* $f(x) = f(-x)$". (Ibíd.)

En cuanto a problemas propuestos por el PE que hacen referencia a *procedimientos* que están relacionados con las operaciones que los estudiantes deben realizar para verificar y/o demostrar ciertas propiedades, se describe en la *Figura 3.48*.

Dada las funciones $f(x) = mx + n$ y $g(x) = \frac{(x-n)}{m}$, con $m \neq 0$, la composición de funciones $fog(x)$ y $gof(x)$ resulta siempre la función identidad ($h(x) = x$), se recomienda construir con las y los alumnos la siguiente argumentación:

Resolución:

Sea $f(x) = mx + n$ y la función $g(x) = \frac{(x-n)}{m}$

$$g(x) = \frac{(x-n)}{m}$$

$$gof(x) = g(f(x))$$

$$gof(x) = \frac{(mx+n)-n}{m}$$

$$gof(x) = \frac{(mx+n-n)}{m}$$

$$gof(x) = \frac{(mx-0)}{m}$$

$$gof(x) = \frac{mx}{m}$$

$$gof(x) = x, \quad para\, x \in A$$

Figura 3. 48. Procedimientos propuestos por el Programa de Estudios (Mineduc, 2015b, p. 41-42)

En cuanto a los *conceptos/definiciones* podemos evidenciar algunos específicos en el estudio de las funciones tales como: función potencia, función inversa de una función, función creciente, función decreciente, función par, función impar, función identidad, función inyectiva, entre otros.

Con base en lo anterior, podría decirse que el PE para cuarto año medio pretende introducir la noción de función tomando elementos propios de la *teoría de conjuntos*, simultáneamente se presenta este objeto matemático como una *representación gráfica*.

Para poder describir los otros elementos de la configuración epistémica (proposiciones/propiedades,), para los cuales no se encuentra evidencia explícita en el programa de estudio, es necesario analizar el libro de texto sugerido para este nivel educativo.

3.3.5.2. Análisis epistémico del libro de texto sugerido por el PE

Con respecto al libro de texto sugerido por el Mineduc para cuarto año medio (Muñoz, et al., 2015), este presenta el estudio de las funciones en la Unidad 1 de Álgebra. Esta Unidad Temática está dividida en seis lecciones, en las cuales se estudia: 1) Funciones; 2) Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva; 3) Función inversa; 4) Función potencia; 5) Traslaciones horizontales y verticales; y 6) Situaciones que involucran la función potencia. A continuación realizamos el análisis de la Unidad 1 en la que se estudia la noción de función, función inversa y función potencia.

Configuración epistémica

El primer elemento de la configuración epistémica refiere al tipo de *situaciones/problemas* propuestos en el libro de texto. Al respecto, identificamos cuatro tipos de problemas: 1) Problemas para reforzar conocimientos previos; 2) Problemas para ejemplificar definiciones introducidas; 3) Problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas; y 4) Problemas contextualizados para reforzar las definiciones introducidas y los conocimientos 'adquiridos'. Los *elementos lingüísticos* identificados en las definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones/problema, son de tipo verbal, tabular, simbólico, gráfico e icónico. Al inicio de la Unidad 1, se presentan una serie de cuadros que permiten sintetizar y recordar *conceptos/definiciones* que activarán los conocimientos previos de los estudiantes. Entre ellos; Reconocer funciones en diversos contextos e identificar sus elementos (preimagen, imagen, variable dependiente, variable independiente, dominio, recorrido, entre otros); Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín; Analizar las funciones exponencial y logarítmica y Analizar las funciones raíz cuadrada y cuadrática.

La noción de función es definida como:

> "*Una función es una regla que asocia a cada elemento x de un conjunto A, llamado preimagen, un único elemento f (x) de un conjunto B, llamado imagen. En la expresión y = f (x), y depende siempre de x, por esta razón a la variable x se le denominan variable independiente y a la variable y se le*

> *llama variable dependiente. El dominio de una función es el conjunto de elementos para los cuales la función está definida. Si $f : A \rightarrow B$, se tiene que A (conjunto de partida) es el dominio y se simboliza: Dom $f = A$. El recorrido de una función es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de llegada que son la imagen de al menos un elemento del dominio. El recorrido de f es un subconjunto de B*”. (Muñoz, et al., 2015, p. 14)

Posterior a la síntesis de *conceptos/definiciones*, se presenta una serie de actividades que permitirán recordar nociones matemáticas y procedimientos estudiados en niveles anteriores. Un problema del tipo 1, que permite reforzar conocimientos previos, se describe en la *Figura 3.49*.

La siguiente tabla muestra la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por un vehículo que se mueve con velocidad constante.

Tiempo (s)	1	3	5	7	9
Distancia recorrida (m)	12	36	60	84	108

a. A partir de los datos de la tabla, construye un gráfico que relacione las variables involucradas.
b. ¿Con qué función modelarías la situación?
c. ¿Cuántos metros habrá recorrido el vehículo al cabo de 1 minuto?

Figura 3. 49. Ejemplo de problema tipo 1 (Muñoz, et al., 2015, p. 16)

Otros tipos de *conceptos/definiciones* introducidas durante este nivel educativo, son los de función inyectiva, función sobreyectiva, función biyectiva, función inversa, función potencia, progresión geométrica, entre otros. Muñoz, et al., (2015) definen:

> “Una *función es inyectiva* si a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen. Una *función es sobreyectiva* si su recorrido es igual al codominio, es decir, cada elemento del codominio tiene al menos una preimagen. Una *función es biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es decir, cada elemento del codominio tiene una única preimagen”. (p. 32)

"*Dada una función* $f: A \longrightarrow B$ *biyectiva, llamamos función inversa de* f *a la función* $f^{-1}: B \longrightarrow A$*, tal que para cualquier* x *del dominio de* f *se cumple que: Si* $f(x) = b$*, entonces* $f^{-1}(b) = x$*.*

Dada una función f *y su función inversa* f^{-1}*, se cumplen:* $Dom\, f = Rec\, f^{-1}$ *y* $Rec\, f = Dom\, f^{-1}$*.*

Dada una función f *y su función inversa* f^{-1}*, se cumple que:* $(f o f^{-1})(x) = (f^{-1} o f)(x) = x$*.*

En un mismo gráfico, las gráficas de $f(x)$ *y* $f^{-1}(x)$ *son simétricas respecto de la recta* $y = x$*.*

Dada una función $f(x)$ *para determinar la representación algebraica de* $f^{-1}(x)$*, su función inversa, se escribe la ecuación* $(f o f^{-1})(x) = x$*, aplicando* $f(x)$ *a la expresión* $f^{-1}(x)$*, y luego se resuelve la ecuación, considerando a* $f^{-1}(x)$ *como la incógnita*". (p. 36)

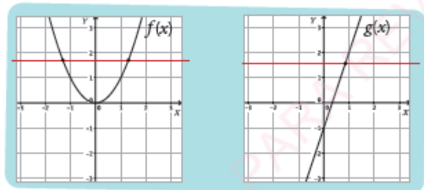
"*Una función potencia es una función de la forma* $f(x) = ax^n$*, donde* a *y* n *son números reales, distintos de cero. El dominio de una función potencia* $f(x) = ax^n$*, con* n *entero positivo, es* $\mathbb{R}$*. El dominio de una función potencia* $f(x) = ax^n$*, con* n *entero negativo es* $\mathbb{R} - \{0\}$". (p. 49-51)

"*Una progresión geométrica es una secuencia numérica en la cual cada término, excepto el primero, es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante llamada razón. En una progresión geométrica, el termino n-ésimo está dado por la expresión* $a_n = a_1 r^{n-1}$*. Una progresión geométrica puede modelarse con la función potencia* $f(x) = ax^{n-1}$*, donde* $f(x)$ *es el termino n-ésimo de una progresión geométrica con razón* x*, y cuyo primer término es* a". (p. 58)

Un problema del tipo 2 que permite ejemplificar la definición de función inyectiva, se describe en la *Figura 3.50*.

Sean las funciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) = 3x - 1$.
Determina si f y g son inyectivas.

Al graficar las funciones f y g, nos queda:



Si te fijas, en el caso de f, la recta horizontal interseca a la curva en dos puntos, por lo tanto, la función no es inyectiva. Por otro lado, en el caso de g, cualquier recta horizontal interseca a la gráfica de la función en un solo punto. Luego g es inyectiva.

Otra manera de resolver el problema es de manera algebraica ya que en una función inyectiva se cumple que **si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces, $x_1 = x_2$.**

Ya que si dos imágenes son iguales, entonces la preimagen debe ser el mismo número.

Aplicamos lo anterior a f y g:

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$x_1^2 = x_2^2$$
$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$$

De donde:

$$(x_1 + x_2) = 0 \text{ o } (x_1 - x_2) = 0$$
$$x_1 = -x_2 \text{ o } x_1 = x_2$$

$$g(x_1) = g(x_2)$$
$$3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$$
$$3x_1 = 3x_2$$
$$x_1 = x_2$$

¿Lo entiendes?
Explica los pasos realizados en cada demostración.

En el caso de g obtuvimos que si dos imágenes son iguales entonces las preimágenes deben ser iguales. En cambio, en el caso de f, podemos ver que si dos imágenes son iguales entonces también puede cumplirse que un elemento del dominio sea el opuesto de otro, por ejemplo, $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. Luego, la función f no es inyectiva.

Figura 3. 50. Ejemplo de problema tipo 2 (Muñoz, et al., 2015, p. 29)

Este tipo de ejemplos también hacen referencia a *procedimientos* que están relacionados con las operaciones que los estudiantes deben desarrollar para determinar la inyectividad de las funciones.

Otro tipo de problemas que hacen referencia a *procedimientos* relacionados a determinar la función inversa de una función se describe en la *Figura 3.51*.

Determina la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$. Luego, traza la gráfica de f y f^{-1}.

Como la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es una función afín, entonces es biyectiva, por lo tanto, tiene inversa. Luego, como $(f \circ f^{-1})(x) = x$, tenemos:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f\ (f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x$$

Ahora despejamos $f^{-1}(x)$. Observa.

$\frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x$ .... Restamos $\frac{1}{5}$.

$\frac{1}{2}f^{-1}(x) = x - \frac{1}{5}$ .... Multiplicamos por 2.

$f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$

Luego, la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es $f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$.

En la figura de la izquierda se muestran las gráficas de f y f^{-1}. Si te fijas, las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la recta $y = x$.

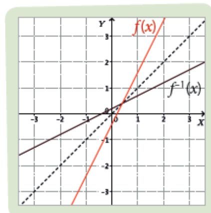


Figura 3. 51. Ejemplo de problema tipo 2 (Muñoz, et al., 2015, p.36)

Un problema del tipo 4 que permite reforzar definiciones introducidas –en este caso la función inversa–, *se* representa en la *Figura 3.52*.

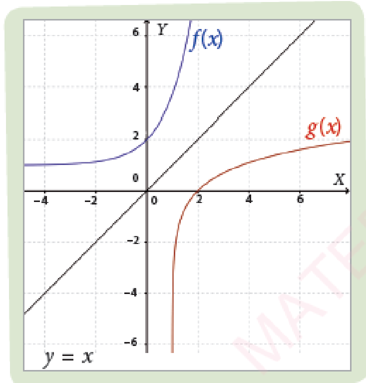
CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▶ La ley de Torricelli determina el volumen de agua que permanece en el recipiente después de t minutos, se expresa como $V(t) = 100 \cdot \left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$, donde 100 representa el volumen inicial de líquido que se encuentra en el recipiente, en m³, el cual sale de este hasta desocuparlo en 40 minutos.

a. Halla V^{-1} y explica lo que representa.

b. Determina el tiempo que demora en salir 15 m³ de agua.

Figura 3. 52. Ejemplo de problema tipo 4 (Muñoz, et al., 2015, p. 38)

Un problema del tipo 2 que hace referencia a explicaciones demostrativas, o bien a *justificaciones/argumentos*, de ciertas definiciones asociadas a la noción de función inversa se describe en la *Figura 3.53*.



¿Cómo hacerlo?

Construye la gráfica de las funciones $f(x) = e^x + 1$ y $g(x) = ln(x - 1)$. Luego, verifica que g es la inversa de f.

En la figura de la izquierda se muestran las gráficas de las funciones f y g. Al parecer las gráficas son simétricas respecto de la recta $f(x) = x$, de modo que podemos suponer que g es la inversa de f.

Para verificar lo anterior podemos calcular $(g \circ f)(x)$. Observa:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = ln((e^x + 1) - 1) = ln(e^x) = x \cdot ln(e) = x$

Luego, como $(g \circ f)(x) = x$, la función g es la inversa de f.

Figura 3. 53. Ejemplo de problema tipo 2 (Muñoz, et al., 2015, p. 36)

Las *propiedades/proposiciones* identificadas en este nivel escolar son descritas por Muñoz, et al., (2014) de la siguiente manera:

> "*Sea $f(x) = ax^n$ y sea c un número positivo:*
>
> - *La gráfica de $g(x) = a(x + c)^n$ se traslada en c unidades hacia la izquierda con respecto a $f(x)$.*
> - *La gráfica de $h(x) = a(x - c)^n$ se traslada en c unidades hacia la derecha con respecto a $f(x)$.*
> - *La gráfica de $g(x) = ax^n + c$ se traslada en c unidades hacia arriba con respecto a $f(x)$.*
> - *La gráfica de $h(x) = ax^n - c$ se traslada en c unidades hacia abajo con respecto a $f(x)$*". (p. 54).

Un problema del tipo 3 que permite reforzar la *propiedad/proposición* anteriormente introducida se describe en la *Figura 3.54*.

A partir de la gráfica de la función $g(x) = x^5$, dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

a. $f(x) = -x^5$

b. $h(x) = x^5 + 1$

c. $h(x) = (x - 2)^5$

d. $q(x) = (x + 1)^5 - 2$

Figura 3. 54. Ejemplo de problema tipo 3 (Muñoz, et al., 2015, p. 55)

<u>*Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas*</u>

La tabla 3.6 sintetiza el tipo de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de los problemas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstos (o en las soluciones esperadas, en el caso de los problemas no resueltos).

Tabla 3. 6. Representaciones previas y emergentes en los problemas de 4° año medio

Representaciones para *f(x)*						
Emergentes / Previos		$f(x)$				
		Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Icónica
$f(x)$	Verbal	●		●		
	Gráfica	●	●	●		
	Simbólica	G●	●	●		●
	Tabular		●	G●		
	Icónica	●				

Como podemos observar en la tabla anterior, en cuanto al tipo de representaciones, encontramos doce clases de problemas. La primera refiere a aquellos problemas para los cuales se proporcionan datos verbales y se busca una respuesta verbal. Un ejemplo de esta primera clase de problemas se presenta en la *Figura 3.55*.

> Para cargar minutos al celular, las compañías ofrecen dos modalidades: usando tarjetas de prepago o contratando un plan. En cada caso el valor por segundo hablado es diferente.
>
> Por ejemplo, al contratar un plan de \$ 12 000 puedes hablar durante 100 minutos; mientras que si cargas el celular con una tarjeta de \$ 5 000, el precio por segundo hablado es \$ 4.
>
> ¿Cuántos minutos, como máximo, puedes hablar usando una tarjeta de prepago de \$ 5 000?

Figura 3. 55. Ejemplo de tarea clase 1: verbal-verbal (Muñoz, et al., 2015, p. 18)

La segunda clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan datos verbales de la función, los cuales deberán de ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente simbólicamente. Un ejemplo de esta clase de problemas se presenta en la *Figura 3.56*.


En una pizzería se vende una *pizza* mediana por $ 15 000 y se cobra $ 2 000 por cada ingrediente adicional.

a. Escribe una expresión algebraica que represente el valor V de una *pizza* mediana, en función de una cantidad x de ingredientes adicionales.

Figura 3. 56. Ejemplo de tarea clase 2: verbal-simbólico (Muñoz, et al., 2015, p. 39)

La tercera clase de tareas, según el tipo de representación que se activan, refieren a aquellas que proporcionan una representación gráfica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una respuesta verbal de la misma. Un ejemplo de esta tercera clase de problemas se presenta en la *Figura 3.57*.

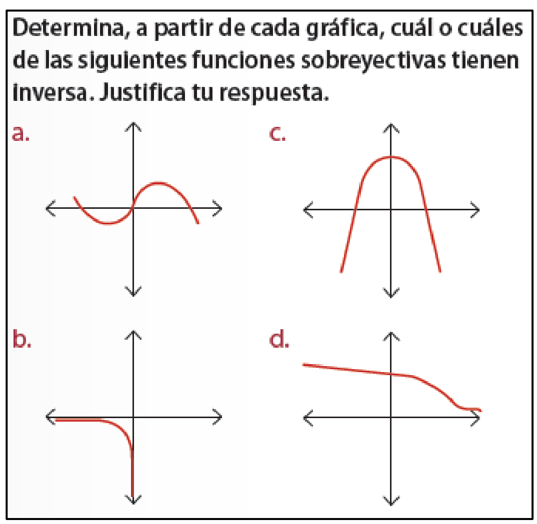

Determina, a partir de cada gráfica, cuál o cuáles de las siguientes funciones sobreyectivas tienen inversa. Justifica tu respuesta.

Figura 3. 57. Ejemplo de tarea clase 3: gráfico-verbal (Muñoz, et al., 2015, p. 39)

La cuarta clase de tareas refiere a aquellos problemas que proporcionan en su planteamiento la gráfica de una función y se requiere que el estudiante proporcione una respuesta a partir de una representación gráfica. Un ejemplo de esta cuarta clase de problemas se representa en la *Figura 3.58*.

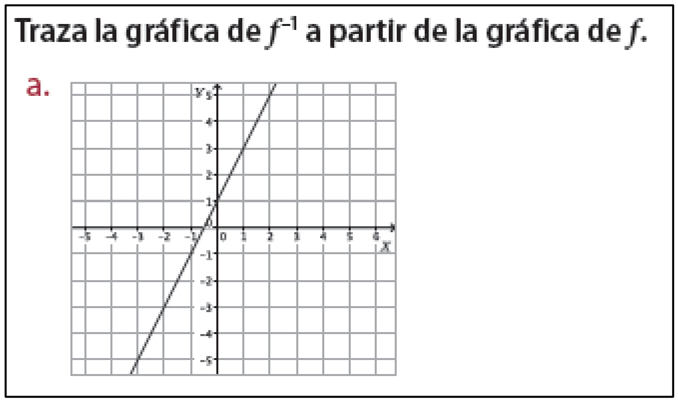


Figura 3. 58. Ejemplo de tarea clase 4: gráfico-gráfico (Muñoz, et al., 2015, p. 37)

La quinta clase de problemas refiere a aquellos problemas que proporcionan en su planteamiento la gráfica de una función y se requiere que el estudiante proporcione una respuesta donde active una representación simbólica. Un ejemplo de esta quinta clase de problemas se representa en la *Figura 3.59*.

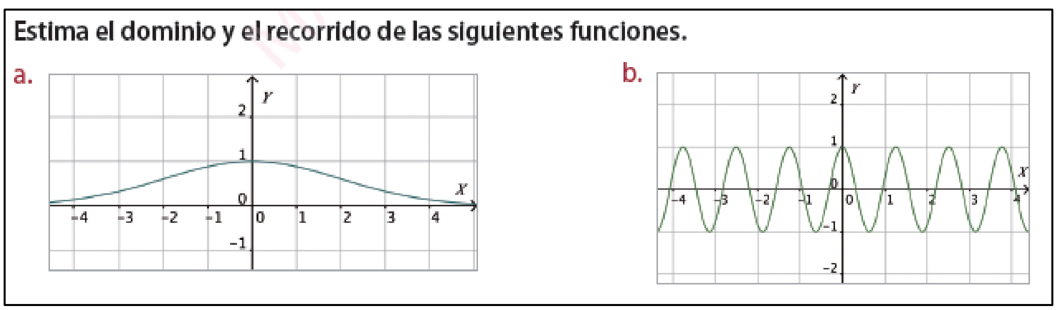


Figura 3. 59. Ejemplo de tarea clase 5: gráfico-simbólico (Muñoz, et al., 2015, p. 22)

La sexta clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan representaciones simbólicas de la función, las que deberán ser examinadas por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta de tipo verbal, para lo cual el estudiante deberá transitar de lo simbólico a lo gráfico para posteriormente proporcionar una respuesta en registro verbal. Este tránsito de lo simbólico a lo gráfico es representado en la tabla 3.6 con la “G” antes del punto (G●). Un ejemplo de esta primera clase de problemas se presenta en la *Figura 3.60*.

Grafiquen simultáneamente las siguientes funciones y respondan.

a. $f(x) = 0{,}8x^3$ b. $f(x) = x^3$ c. $f(x) = 7x^3$ d. $f(x) = 10x^3$

- ¿Qué sucede a medida que a crece?
- ¿Ocurrirá lo mismo para $a < 0$?, ¿cómo lo saben?

Figura 3. 60. Ejemplo de tarea clase 6: simbólico-verbal (Muñoz, et al., 2015, p. 48)

La séptima clase refiere a aquellos problemas que proporcionan en su planteamiento representaciones simbólicas de una función y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Un ejemplo de esta séptima clase de problemas se representa en la *Figura 3.51*.

La octava clase de problemas refiere a aquellos que proporcionan en su planteamiento representaciones simbólicas y se requiere que los estudiantes activen una respuesta de tipo simbólica. Se puede ejemplificar esta clase de problemas, a través de la *Figura 3.61*.

Sin construir ninguna gráfica, determina el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^{-2}$ c. $f(x) = 0{,}6x^{-5}$ e. $f(x) = 16x^{-20}$

b. $f(x) = 3x^{-7}$ d. $f(x) = -1{,}2x^{-8}$ f. $f(x) = -\sqrt{2}x^{-13}$

Figura 3. 61. Ejemplo de tarea clase 8: simbólico-simbólico (Muñoz, et al., 2015, p. 51)

La novena clase de tareas, según el tipo de representación que se activan, refieren a aquellas que proporcionan una representación simbólica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación icónica de la misma. Un ejemplo de esta última clase se presenta en la *Figura 3.62*.

Dados los conjuntos
$A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{10, 100, 1\,000, 10\,000\}$ y la función $f: A \longrightarrow B$ definida por $f(x) = 10^x$ para cada $x \in A$.

a. Representa con un diagrama sagital a f.

Figura 3. 62. Ejemplo de tarea clase 9: simbólico-icónico (Muñoz, et al., 2015, p. 32)

La décima clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan datos tabulares, los cuales deberán de ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente gráficamente.

La undécima clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos tabulares de la función y se pide una respuesta simbólica, para lo cual el estudiante deberá transitar de lo tabular a lo gráfico para posteriormente proporcionar una respuesta en registro simbólico. Este tránsito de lo tabular a lo gráfico es representado en la tabla 3.6 con la "G" antes del punto (G●). Un ejemplo de la décima y undécima clase de problemas, se presenta en la *Figura 3.63*.

Las siguientes tablas corresponden a valores de dos funciones f y g desconocidas.

x	0	−1	1	−2	2	−3	3
$f(x)$	1	−1	3	−3	5	−5	7

x	0	−1	1	−2	2	−3	3
$g(x)$	$-\frac{1}{2}$	−1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−2	1

a. Representa gráficamente, en el plano cartesiano, las funciones f y g.
b. A partir de la gráfica, define las funciones f y g, usando una expresión algebraica.

Figura 3. 63. Ejemplo de tarea clase 10 y 11: tabular-gráfico-simbólico (Muñoz, et al., 2015, p. 42)

La duodécima clase de tareas, según el tipo de representación que se activan, refieren a aquellas que proporcionan una representación icónica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una respuesta de tipo verbal. Un ejemplo de esta última clase de problemas, se representa en la *Figura 3.64*.

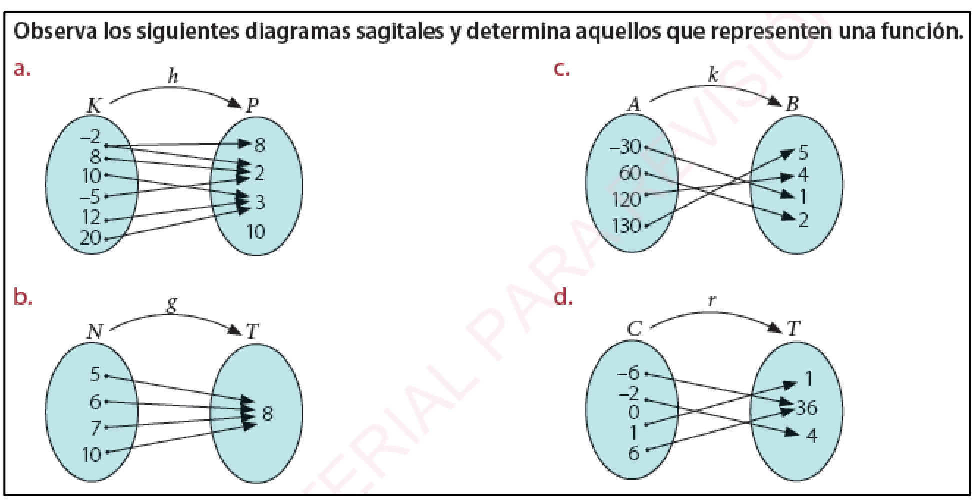


Figura 3. 64. Ejemplo de tarea clase 12: icónico-verbal (Muñoz, et al., 2015, p. 22)

3.3.5.3. Significado de la noción de función pretendido por el currículo de cuarto medio

Con base en los análisis presentados en los apartados 3.3.5.1 y 3.3.5.2, es posible determinar cuáles son los significados pretendidos por el currículo, <Programas de Estudios, Libro de Texto>, chileno de matemáticas de cuarto año medio para la noción de función.

Por un lado, con el análisis realizado del PE, es posible percibir que la noción de función es presentada desde la *teoría de conjuntos,* además simultáneamente se presenta este objeto matemático como una *representación gráfica.*

Por otro lado, a partir del análisis del libro de texto que se sugiere en el marco curricular de cuarto año medio, encontramos que, de acuerdo al tipo de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos, propuestos y esperados en dicho texto, la noción de función se introduce directamente en su acepción *conjuntista*, simultáneamente la función es presentada como *expresión analítica* y como *representación gráfica*.

De esta forma podemos concluir que el significado pretendido por el currículo chileno de cuarto año medio sobre la noción de función, es *la función definida desde la teoría de conjuntos, la función como representación gráfica y la función como expresión analítica.*

3.4. SIGNIFICADOS PRETENDIDOS POR EL CURRÍCULO CHILENO SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

El análisis realizado de los Programas de Estudio y los libros de texto propuestos por el Ministerio de Educación, revela que en la actualidad el significado de función pretendido en el currículo chileno es: *La función como relación entre variables y La función a partir de la teoría de conjuntos*. Dicho análisis nos ha permitido contrastar el significado de la función pretendido por el currículo chileno frente al significado holístico de referencia de la función estudiado en el capítulo 2.3. Se evidencia que pese a las recomendaciones realizadas desde el campo de investigación en didáctica de la matemática, las configuraciones que principalmente se activan en la resolución de problemas sobre funciones en el proceso de enseñanza de dicho objeto es “la función como relación entre variables”, “la función como expresión analítica” y “la función a partir de la teoría de conjuntos”. Hay que señalar que, estas configuraciones surgen de la necesidad de responder a situaciones ligadas a fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables, y al propósito de fundamentar rigurosamente, el análisis funcional establecido sobre los trabajos de Cantor a fines del siglo XIX. Tall (1992), establece la conveniencia de que, en lugar de comenzar con la definición del concepto, la cual puede contener palabras o nociones no familiares para el estudiante, se intente hallar una aproximación para construirla sobre conceptos que jueguen el doble papel de ser inicialmente familiares para el estudiante y a su vez lo provean de una base para el desarrollo matemático posterior.

El estudio de la idoneidad epistémica de los significados sobre la noción de función que se pretenden en el currículo chileno, es de suma importancia, puesto que una “adecuación pobre” del significado holístico en la enseñanza, podría obstaculizar tanto la correcta comprensión del objeto por parte de los estudiantes como por parte de los profesores en formación inicial.

Como señalan Godino y Batanero (1994), los significados logrados (aprendidos) por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados.

Durante esta investigación hemos entendido por currículo a la dupla <Programas de Estudios, Libros de Texto> que son elementos esenciales para los procesos de instrucción matemática. El análisis que hemos realizado, evidencia que el enfoque actual de la noción de función se basa fundamentalmente en su acepción de relación entre variables y en un significado de función que progresivamente se acerca a la definición de función a partir de la teoría conjuntista. Con menor protagonismo se ha verificado que a lo largo del currículo chileno la noción de función adquiere otros significados, entre ellos, la función como correspondencia, como expresión analítica y como expresión gráfica.

Al efectuar el análisis curricular que centra la atención en los significados pretendidos respecto del significado holístico de la función, hemos constatado que en los libros de texto no se explicita la función como correspondencia arbitraria. Esto provoca según Vinner (1992) que una de las concepciones que los estudiantes posean respecto a la noción de función sea que: la correspondencia que constituye la función debe ser establecida por una regla con sus propias regularidades. Esto implica que una correspondencia arbitraria no sea considerada por los estudiantes como una función. De acuerdo con Mesa (2004) es necesario considerar que el contenido de los libros de texto puede determinar concepciones parciales y que no explicitan utilidad de nociones matemáticas específicas. Esta reflexión es necesaria cuando se está interesado en la mejora de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

La comprensión del objeto matemático función, requiere una diversidad de representaciones. Estas dan sentido al objeto matemático y al ser de distinta naturaleza permiten describir los diferentes aspectos del objeto que representa (Duval, 2002).

Los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos en los textos escolares, requieren mayoritariamente de la activación de representaciones simbólicas, verbales y gráficas. Usualmente se parte de la expresión simbólica y/o verbal de la función para posteriormente dar respuestas bajo expresiones simbólicas y/o gráficas de la función.

Orton (1983) señala que una aproximación inicial “informal” a los conceptos del cálculo, debe involucrar exploraciones numéricas y gráficas. Esto no se evidencia en la exploración realizada en los libros de texto pues en la aproximación inicial a la noción de función (octavo básico), predominan fuertemente representaciones de tipo simbólicas y no se evidencian tareas donde la función sea planteada desde su representación gráfica.

La capacidad de identificar y representar el mismo objeto matemático en diferentes representaciones, y la flexibilidad en el movimiento de una representación a otra, son cruciales en el aprendizaje de la matemática ya que permite a los estudiantes visualizar relaciones ricas, y desarrollar una comprensión más profunda de los conceptos (Even, 1998).

Por su parte Kaldrimidou e Ikonomou (1998) y Gagatsis y Shiakalli (2004) consideran que cada una de las distintas representaciones de la función determina un aspecto diferente de la noción matemática y todas estas juntas contribuyen a una representación global de la misma, ninguno de ellos por separado puede describir la noción global de función.

CAPÍTULO 4

Conclusiones

4.1. INTRODUCCIÓN

En este último capítulo presentaremos una síntesis de los resultados más relevantes que se han obtenido durante el desarrollo de cada uno de los capítulos de esta investigación.

Dichos resultados son producto de unas preguntas de investigación, planteadas en el Capítulo 2, y de unos objetivos específicos que nos propusimos para la obtención de respuestas a dichas preguntas. De esta manera, a continuación vinculamos los resultados con los objetivos específicos de nuestra investigación para responder en qué medida se han respondido las preguntas de investigación planteadas.

Así mismo, somos conscientes de que, a pesar de que en nuestra investigación hemos tratado de contribuir a lo planteado por el currículo chileno, quedan aún muchas cuestiones por responder y sobre las cuales, desde nuestro punto de vista, las investigaciones centradas en aspectos curriculares y del conocimiento didáctico-matemático de profesores, podrían continuar en pro de la mejora de la calidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática. En este sentido, presentamos cuestiones abiertas de investigación y con ellas, posibles vías de continuidad de nuestro trabajo.

4.2. SOBRE EL LOGRO DE LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS Y SU REPERCUSIÓN EN LAS RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

4.2.1. **Sobre la pregunta de investigación *PCI-1***

Como señalamos en el aparatado 2.4, si nuestra intención era verificar la representatividad del significado pretendido por el currículo chileno respecto del significado holístico de referencia de la noción de función, es primordial saber qué es función y cuál es su naturaleza. Al respecto nuestra primera pregunta concreta de investigación (*PCI-1*) fue:

> *¿Cuál es el significado holístico de referencia de la noción de función?*

Para responder a esta pregunta nos planteamos dos objetivos específicos. A continuación describimos cada uno de ellos.

4.2.1.1. Sobre el objetivo específico OE-1

El primer objetivo específico que nos propusimos para entender la naturaleza del objeto función y poder entender qué es, fue:

> *Determinar los significados parciales de la noción de función por medio de la caracterización del par <prácticas matemáticas, configuraciones epistémicas>, en las diversas problemáticas que se abordaron a lo largo de la historia, y que dieron paso al surgimiento, evolución y formalización de la noción de función.*

Para lograr este objetivo, y como primera fase de nuestro estudio, en el Capítulo 1 (apartado 1.2) realizamos una revisión y análisis histórico-epistemológico del objeto función, recogiendo información sobre las problemáticas y sucesos relevantes que fueron contribuyendo tanto para el surgimiento de dicho objeto matemático, como para su fundamentación y posterior formalización. Dicho estudio se llevó a cabo considerando que la determinación del significado holístico, de un objeto matemático, requiere de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Posterior a la indagación y revisión de la literatura, se caracterizaron e identificaron las configuraciones ontosemióticas epistémicas, las que a su vez estaban asociadas a un significado parcial del objeto función.

Como respuesta a este primer objetivo específico, se identificaron seis sistemas de prácticas cada uno de los cuales, siguiendo los supuestos teóricos del enfoque ontosemiótico, "representan" un significado parcial para el objeto función y por tanto cada uno de esos sistemas de prácticas llevan "implícita" la activación de una configuración epistémica de objetos matemáticos primarios. La descripción, que da cuenta del logro de este primer objetivo específico, y que da lugar a estos seis significados parciales de la noción de función, puede encontrarse en el apartado 1.2 del capítulo 1.

4.2.1.2. Sobre el objetivo específico OE-2

Cuando nos propusimos la reconstrucción del significado global u holístico de la función, estábamos consientes que era necesario la identificación de los significados parciales de dicha noción, pues dentro del EOS se entiende que el significado global, también denominado significado holístico, está compuesto de los diferentes significados parciales de un objeto matemático (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Así, nuestro segundo objetivo específico (OE-2) fue:

> *Reconstruir el significado holístico de referencia a partir de la diversidad de significados parciales identificados OE-1.*

El logro de este objetivo se evidencia en el apartado 2.3 del Capítulo 2, donde se ha contemplado el trabajo de Biehler (2005), sobre la reconstrucción de los significados de la noción de función desde el punto de vista didáctico, de esta manera se han determinado que la noción de función tiene al menos seis significados parciales que constituyen el significado global u holístico de referencia.

El cumplimiento de este objetivo era relevante para los fines generales de esta investigación, además consideramos que representa un aporte significativo a la comunidad de formación inicial o permanente de profesores sobre la noción de función, toda vez que tanto los significados pretendidos por una institución educativa concreta, como los significados pretendidos por un profesor, como representante de una institución, serán una "parte" de este significado holístico de referencia (Pino-Fan, 2014).

4.2.1.3. Reflexiones finales

En este apartado hemos discutido en qué medida se ha logrado responder a la pregunta PCI-1: *¿Cuál es el significado holístico de referencia de la noción de función?* Para dar respuesta a dicha pregunta se propusieron dos objetivos específicos los cuales fueron logrados en las Fases 1 y 2 de nuestra investigación (ver apartado 2.3). En respuesta a la pregunta podemos decir que se logró reconstruir el significado holístico de la noción función. Estos significados representan los significados de referencia que los futuros profesores deberían conocer con la finalidad de planificar los significados que pretenden enseñar en sus clases sobre funciones.

4.2.2. **Sobre la pregunta de investigación *PCI-2***

Una vez identificado y caracterizado el significado holístico de referencia de la función, un aspecto relevante era determinar cuál es el significado pretendido por el currículo chileno respecto de la noción de función. Así, nuestra segunda pregunta concreta de investigación fue:

> *¿Cuál es el significado pretendido por el currículo Chileno (entendido como la dupla <programas de estudios, libros de texto>) de la noción de función?*

Para responder a esta pregunta nos planteamos tres objetivos específicos. A continuación describimos cada uno de ellos.

4.2.2.1. Sobre el objetivo específico OE-3 y OE4

Dado que nuestro interés era identificar la representatividad del significado pretendido por el currículo respecto del significado de referencia de la noción de función, es relevante y necesario estudiar los significados de la función pretendidos por el currículo chileno. En este sentido planteamos los objetivos específicos:

> *OE-3 Determinar el significado pretendido en los programas de estudio propuestos por el Ministerio de Educación de Chile sobre la noción de función.*
>
> *OE-4. Determinar el significado pretendido por los libros de texto sugeridos, en los planes de estudio propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, para el estudio de la noción de función.*

Como respuesta a estos dos objetivos específicos podemos señalar que el análisis de la dupla <*Programas de Estudios*, *Libros de Texto*>, presentado en el apartado 3.3, ha permitido caracterizar el significado epistémico de la función pretendido actualmente en el currículo chileno. Esta caracterización se realizó mediante la descripción sistemática de las configuraciones ontosemióticas epistémicas de objetos y procesos activadas en las distintas prácticas sobre funciones que proponían tanto los libros de texto analizados como los programas de estudio. El resultado del análisis realizado, evidenció que en la actualidad el significado de función pretendido por el currículo chileno que prevalece es el de *función como relación entre variables* otro de los significados pretendidos por el currículo que progresivamente predomina es el de *función desde la teoría de conjuntos*.

Es importante señalar que la noción de función es introducida por primera vez mediante la siguiente definición, “Una función es una relación que asigna a cada valor de la variable independiente *x* un solo valor de la variable *y*. Opera según una regla para producir exactamente un valor de salida por un valor de entrada” (Bennett, et al., 2014, p. 206). Dicha definición se establece sobre la base de la clásica metáfora de la “máquina” que produce un ‘único’ valor de salida para cada valor de entrada, la que es presentada de manera muy sucinta previa a dicha definición. Esta situación se relaciona con lo expuesto en la investigación de Mesa (2004) cuando explicita que los profesores tienden a privilegiar la metáfora de la máquina para ilustrar un proceso de transformación, esto por sobre definiciones que utilicen términos como el de relación, correspondencia, etc.

Con menor protagonismo se verificó que a lo largo del currículo chileno la noción de función adquiere otros significados, entre ellos, la *función como correspondencia*, este significado se hace explícito en primer año medio a través de la definición "Una función es una relación de *correspondencia* entre dos variables". Cabe destacar que este tipo de definiciones intuitivas distan de las definiciones acabadas de la noción de función, esto pues conceptos como el de dominio, codominio, recorrido se definen inicialmente de manera fragmentada. Esto conduce al planteamiento de tareas donde se solicita calcular el dominio y recorrido de una función que solo se ha considerado como una regla y/o expresión algebraica. Un ejemplo que permite evidenciar este tipo de problemática se presenta en la Figura 4.1.

> Grafica la función f(x) = 0,24x. ¿Cuál es el dominio y recorrido de esta función?

Figura 4.1. Función como una regla algebraica

Otro de los significados pretendidos por el currículo chileno es el de *función como representación gráfica*. Entre las tareas propuestas se presentan representaciones gráficas de relaciones definidas en $\mathbb{R}$ para las cuales se solicita identificar si corresponden o no a una relación funcional. Otro tipo de tareas son aquellas donde se proponen gráficas de relaciones funcionales que requieren ser trasladadas en el plano. Para la resolución de este tipo de tareas, el currículo propone estrategias que aluden a aspectos procedimentales y/o algorítmicos que no fortalecen la relación entre el significado de función desde la teoría de conjuntos con el significado de función como representación gráfica.

Por otro lado el significado de *función como expresión analítica* se hace presente durante todo el currículo cuando se plantean situaciones desprovistas de una relación entre variables y/o magnitudes y se presenta la función netamente desde su expresión algebraica.

Posterior al análisis curricular que centra la atención en los significados pretendidos por el currículo chileno respecto del significado holístico de la función, hemos constatado que en los programas de estudio y en los libros de texto no se explicita la función como *correspondencia arbitraria.*

4.2.2.2. Sobre el objetivo específico OE-5

Cuando nos propusimos identificar el significado pretendido por el currículo de la noción de función, estábamos consientes que era necesario estudiar los vínculos entre los significados pretendidos por los programas de estudio con los pretendidos por los libros de texto. Así, nuestro quinto objetivo específico (OE-5) fue:

> *Reconstruir el significado pretendido por el currículo Chileno sobre la noción de función, a partir de los resultados OE-3 y OE-4.*

El logro de este objetivo se evidencia en el apartado 3.4 del Capítulo 3, allí se explicitan los significados parciales abordados por el currículo chileno ya sea a través de sus programas de estudio y/o a través de sus textos escolares.

4.2.2.3. Reflexiones finales

En este apartado hemos discutido en qué medida se ha logrado responder a la pregunta PCI-2: *¿Cuál es el significado pretendido por el currículo Chileno (entendido como la dupla <plan de estudios, libros de texto>) de la noción de función?* Para dar respuesta a dicha pregunta se propusieron tres objetivos específicos los cuales fueron logrados en las Fases 3, 4 y 5 de nuestra investigación (ver apartado 3.4). En respuesta a la pregunta podemos decir que se logró identificar el significado de la noción de función pretendido por el currículo chileno. Estos significados representan los significados de referencia inmediatos con los que los profesores (y futuros profesores) cuentan para planificar los significados que pretenden enseñar en sus clases sobre funciones.

4.2.3. Sobre la pregunta de investigación *PI*

La caracterización del significado de función pretendido en el currículo chileno es relevante dado que dicho significado, de carácter epistémico, en la actualidad, es el "significado de referencia" que está al alcance de los profesores. Sin embargo,

> *¿El significado pretendido por el currículo Chileno (entendido como la dupla <programas de estudios, libros de texto>) sobre la noción de función, es representativo del significado holístico de referencia de dicho objeto matemático?*

Para responder a esta pregunta nos planteamos el objetivo *OG:*

> *Evaluar la representatividad de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función respecto del significado holístico de referencia de dicha noción.*

4.2.3.1. Sobre el Objetivo General OG

Para lograr este objetivo, nos apoyamos en las nociones teóricas antes descritas y a partir de la identificación del significado global de función (Capitulo 1) y del análisis y caracterización de los significados de la función pretendidos por los programas de estudio y libros de texto (Capítulo 3), pudimos emitir juicios de valoración sobre la idoneidad epistémica de los significados de la noción de función en el currículo chileno. Esto nos proporcionó herramientas teóricas y metodológicas que nos permitieron valorar la representatividad de los significados pretendidos en el currículo chileno, mediante la dupla <Programas de Estudio, Libros de texto>, respecto del significado holístico de la función.

Para alcanzar el OG se hizo necesario establecer criterios específicos, que nos ayudaron a operativizar la noción de idoneidad epistémica para el caso concreto del análisis del significado de función pretendido en el currículo chileno. Esos criterios para el análisis de la idoneidad epistémica de los significados de la noción de función pretendidos en el currículo chileno, se mencionan y describen en el apartado 2.5.3, y se operativizan mediante tablas presentadas en el apartado 3.3.

Como resultado del estudio de la idoneidad epistémica de los significados de la noción de función pretendidos en el currículo chileno, podemos señalar que a partir del análisis realizado, se evidencia que el currículo chileno se basa fundamentalmente en el concepto de *función como relación entre variables*, por lo que se hace necesario efectuar investigaciones curriculares que centren su atención en la adecuación de los significados pretendidos respecto del significado holístico de la función.

4.2.3.2. Reflexiones Finales

En este apartado hemos discutido en qué medida se ha logrado responder a la pregunta PI: *¿El significado pretendido por el currículo Chileno (entendido como la dupla <programas de estudios, libros de texto>) sobre la noción de función, es representativo del significado holístico de referencia de dicho objeto matemático?* Para dar respuesta a dicha pregunta se propusieron un objetivo general y cinco objetivos específicos los cuales fueron logrados en las Fases 1, 2, 3, 4 y 5 de nuestra investigación. En respuesta a la pregunta podemos decir que se logró identificar tanto el significado holístico de la noción de función como el significado de la función pretendido en el currículo chileno. Estos significados representan los significados de referencia que los profesores deberían conocer con la finalidad de planificar los significados que pretenden enseñar en sus clases sobre funciones. Pero, ¿Qué es lo que efectivamente conocen los profesores de matemática sobre los significados asociados a la noción de función? Esta pregunta da pie a una siguiente pregunta de investigación, que podría ser abordada en investigaciones futuras.

REFERENCIAS

Acevedo, J.L., Font, V., & Giménez, J. (2004). Class Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph offunctions. In J. Giménez, G. Fitzsimons, C. Hahn (Eds.), *Globalisation and mathematics education CIEAEM 54* (pp. 336 - 342). Barcelona: Graó.

Aravena, M. (2001). *Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica*. (Tesis Doctoral). Departament de Didáctica de la Matemática i de les Ciències Experimentals, Universitat de Barcelona, España.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97 - 140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Artigue, M. (1998). Teaching and Learning Elementary Analysis. In C. Alsina, J. M. Alvarez, B.R. Hodgson, C. Laborde, A. Pérez (Eds.), *ICME 8 (1996) Selected Lectures* (pp. 15 - 29). Sevilla: S.A.E.M. THALES.

Bennett, J., Burger, E., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F., Roby, T., Scheer, J., & Waits, B. (2014). *Texto para el estudiante. Matemática 8°.* Chile: Galilieo Libros Ltda.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose (Eds), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61 - 81). Dordrecht: Kluwer.

Boyer, C. (1986). *Historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad.

Cañón, C. (1993). Apéndice: Sobre la génesis del concepto de función. En C. Cañón (Ed.), *La Matemática: creación y descubrimiento* (pp. 167 - 181). Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson Editores.

Collette, J.P. (1985). *Historia de las matemáticas* (Vol I y II). Madrid: Siglo XXI.

Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal of Research in Mathematics Education*, 16(5), 324-336.

Crombie, I. (1979). *Análisis de las doctrinas de Platón*. Madrid: Alianza Editorial.

Del Castillo, A., & Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. En G. Buendía, G. Montiel (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 568-580). México

Deulofeu, J. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? aportaciones de la investigación. *X JAEM. Ponencia P41*, pp. 367-377.

Dubinsky, E., & Harel, G. (Eds.) (1992). *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington D.C: MAA Notes 25.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 24-41.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registro semiótico y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del valle.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics visualization* (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinveztav-IPN.

D'Hombres, J., Dahan, A., Bkouche, R., Houzel, C., & Guillemot, M. (1987). *Mathematique au fil des ages*. París: Guathier-Vilars.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, E., & Gagatsis, A. (2006). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 533-556.

Elgueta, J., Muñoz, G., & Santis, M. (2014). *Texto del estudiante. Matemática 1° Medio.* Chile: SM Chile S.A.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(2), 94-116.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 105-121. doi: 10.1016/S0732-3123(99)80063-7

Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías*. México: Uthea.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. (Tesis de Maestría no publicada). Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Font, V. (2000a). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Barcelona, España.

Font, V., & Acevedo, J. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias,* 21(3), 405-418.

Font, V., & Acevedo, J. (2004). Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales. En E. Castro, E. De la

Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática: Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)* (pp. 155-164). A Coruña: Servicio de Publicaciones.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124. doi: 10.1007/s10649-012-9411-0

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*(3/4), 413-435.

Freudhental, H. (1983). *Didactical Phenomenology of mathematical Structures. Dordrecht*. Holland: D. Reidel Publishing Company.

Gagatsis, A., Elia, I., & Andreou, S. (2003). Representations and mathematics learning: Functions and number line. *Euclides g*, 59, 5-34.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 24(5), 645-657.

García, L., Vázquez, R., & Hinojosa, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Revista Ingenierías,* 7(24), 27-34.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. In A. Sierpinska, J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39(1), 127-135.

Godino, J. D., & Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados semióticos. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics,* 77(2), 247-265.

Guzman I. (1990). Registros en juego en el concepto de función, comportamiento de una muestra de alumnos chilenos, Cursillo XVII Semana de la Matemática de la Universidad Católica de Valparaíso.

Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, una introducción histórica.* Madrid: Alianza Editorial S.A.

Greeno, J.G., & Hall, R.P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, 78, 361-367.

Hausdorf, F. (1978). *Set Theory*. London: Chelsea Publishing Company. (Edición original, 1934).

Jaimes, N. (2012*). La noción de función, un acercamiento a su comprensión*. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P.

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 79-103.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions. In H. Stenbring, M. G. Bartolini Bussi, A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 271-288). Reston, Va: NCTM.

Love, E., & Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 371–409). Dordrecht: Kluwer.

Mineduc. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media. Actualización 2009.* Santiago de Chile. *doi:* 978-956-292-2586.

Mineduc. (2011a). *Programa de Estudio para Octavo Año Básico Unidad de Curriculum y Evaluación*. Santiago de Chile. doi :978-956-292-342-2.

Mineduc. (2011b). *Programa de Estudio para Primer Año Medio Unidad de Curriculum y Evaluación*. Santiago de Chile. doi: 978-956-292-326-2.

Mineduc. (2011c). *Programa de Estudio para Segundo Año Medio Unidad de Curriculum y Evaluación*. Santiago de Chile. doi: 978-956-292-327-9.

Mineduc. (2015). *Unidad de currículum y evaluación vigencia de documentos curriculares 2015*. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_17.pdf

Mineduc. (2015a). *Programa de Estudio actualización 2009 Tercer año Medio (Versión aprobada por el CNED, en actual proceso de edición)*. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_33_2.pdf

Mineduc. (2015b). Programa de Estudio actualización 2009 Cuarto año Medio (Versión aprobada por el CNED, en actual proceso de edición y diseño). Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_33_3.pdf

Mosterín, J. (1981). Sobre funciones y composición de relaciones. En R. Fernández (Ed.), *Lógica, Epistemología y Teoría de la Ciencia* (pp. 55-65). Madrid: Estudios en Educación Ministerio de Educación y Ciencia.

Muñoz, G., Jiménez, L., & Rupin, P. (2014). *Texto del estudiante. Matemática 2° Medio.* Chile: SM Chile S.A.

Muñoz, G., Gutiérrez, V., & Muñoz, S. (2015). *Texto del estudiante. Matemática 4° Medio.* Chile: Santillana del Pacífico S.A.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teacher beliefs of students algebra development. *Cognition and Instruction, 18*(2), 209-237.

Norman, A. (1992). *Teachers' mathematical knowledge of the concept of function*. In G. Harel, E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy, vol. 25, MAA notes* (pp. 215-232). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 235-250.

Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal*. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales.

Pedersen, O. (1974). Logistics and the theory of functions: An essay in the history of Greek mathematics. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 24(94), 29-50.

Pihoué, H. (1996*). L'entrée dans la pensé fonctionnelle en clase de seconde*. Paris: DEA, Université.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada [The epistemic facet of mathematical and didactic knowledge about the derivative]. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123-150.

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA*, 29(51), 60-89.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, 36(1), 87-109.

Ramos, A. B. (2005). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Barcelona, España.

Ribnikov, K. (1987*). Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.

Rodrigez, D., & Valldeoriola, J. (2009). *Metodología de la Investigación*. Barcelona: Eureca Media, SL.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis doctoral publicada). Universidad de Jaén, España.

Saiz, O., & Blumenthal, V. (2015). *Texto del estudiante. Matemática 3° Medio.* Chile: Ediciones Cal y Canto.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function. A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 229-254.

Sánchez, V., & Llinares, S. (2003). El razonamiento Pedagógico sobre funciones de cuatro profesores en formación. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 6(1), 5-25.

Sastre, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16, 141-155. doi: 1815-0640.

Sierpinska, A. (1992). Understanding the Notion of Function. In G. Harel, E.Dubinsky (Eds.), *The concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). USA: M*a*thematical Association of America.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Struik, D. J. (Ed.). (1969). *A source book in Mathematics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 125-147.

Vinner, S., & Tall, D. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology*, 14, 293-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 266-356.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. En E. Dubinsky, G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of* *epistemology and pedagogy* (pp. 195-214). United States: Mathematical Association of America.

Weber, E., Tallman M., & Middleton, J. (2015) Developing Elementary Teachers Knowledge about Functions and Rate of Change through Modeling. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 1-33, doi: 10.1080/10986065.2015.981940

Wilson, M.R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 346-370.

Wilson, M., & Cooney, T. (2002). *Mathematics teacher change and devolepement. The Role of beliefs*. En G. L. Leder, E. Pehkonen, G. Torner (Eds), *Beliefs. A Hidden Variable in Mathematics Education* (pp. 127-147). Dordrecht: Kluwer.

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19 Century. *Archive for the History of the Exact Sciences*, 16(1), 37-85.