UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN SOBRE LA NOCIÓN ANTIDERIVADA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Tesis Doctoral

WILSON GORDILLO THIRIAT

Director: Dr. LUIS ROBERTO PINO FAN

Santiago, Chile. 2015

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN SOBRE LA NOCIÓN ANTIDERIVADA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Tesis Doctoral presentada por **Wilson Gordillo Thiriat** dentro del programa de Doctorado en Educación Matemática para aspirar al grado de **Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos**, dirigida por el **Dr. Luis Roberto Pino Fan,** académico de la Universidad de Los Lagos.

Wilson Gordillo Thiriat

Dr. Luis Roberto Pino Fan

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN SOBRE LA NOCIÓN ANTIDERIVADA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Esta Tesis de Doctorado ha sido desarrollada en el marco del Proyecto de Investigación FONDECYT de iniciación Nº 11150014, titulado "Exploración, caracterización y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores de enseñanza media en formación inicial, sobre las nociones clave del cálculo", cuyo investigador responsable es el Dr. Luis Roberto Pino Fan.

A mis padres, Fabián y María Elizabeth.

A mis hijas, Sofía y Manuela

A ti, Jisel

AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar en primer lugar, con gran satisfacción mi sentimiento de gratitud y admiración a mi director de Tesis, Dr. Luis Roberto Pino Fan, quien con su conocimiento, experiencia, sus orientaciones y su rigor profesional, siempre estuvo presente para motivarme y lograr así mis objetivos.

A los profesores que orientaron los diferentes cursos doctorales: Dra. Verónica Díaz Quezada, Dr. Álvaro Poblete Letelier, Dra. Ismenia Guzmán Retamal, Dra. Leonora Díaz Moreno, Dr. Edmundo Mancilla Villarroel, Dr. Raúl Pizarro Sánchez, Dr. Vicenç Font Moll y Dr. Jaime Arrieta Vera; a todos ellos gracias por haberme permitido aprender de su conocimiento y experiencias.

A mi familia, por estar en cada paso que doy, acompañándome en las alegrías y tristezas.

A mi hermana Maribel por ser mi apoyo en aquellos momentos en los que la soledad me invadía, sus llamadas telefónicas alentaron mi animo. Gracias por su cariño y empuje emocional.

A mis hijas Sofía y Manuela, mis princesas, por que juntos sacrificamos tiempo. Dejamos de compartir, de jugar, no las vi crecer durante esta estancia, no pude estar allí cuando tenia que estar; ya me comprenderán. Las amo con todo mi corazón, son mi vida.

A ti Jisel, gracias amor por el apoyo, compañía y sacrificio.

A mis grandes amigos, Esperanza Flórez Ortiz y Wilson Pinzón Casallas, por esa amistad sincera, gracias por el apoyo y el animo para iniciar este proyecto.

A mis compañeros del Doctorado, por su grata compañía.

A mis nuevos amigos en Chile, por la ayuda de pasar todo este tiempo fuera de casa.

A los profesores de las diversas universidades que colaboraron en este estudio.

Por último, a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas que mediante su programa de formación posgradual, me apoyo económicamente en el pago de mis estudios doctorales y estancia en Chile.

"Con seguridad, las teorías y la investigación son las mejores herramientas que tenemos para la práctica y la toma de decisiones pedagógicas apropiadas"

Anna Sfard

RESUMEN

Los estudios sobre la comprensión de la noción matemática *antiderivada* son escasos. Adicional a esto, son pocas las investigaciones orientadas al diseño de instrumentos que permitan explorar y caracterizar la comprensión sobre tópicos específicos. En esta investigación se presentan los resultados obtenidos mediante la aplicación de un cuestionario que se ha diseñado para evaluar la comprensión sobre la antiderivada de una muestra de estudiantes universitarios colombianos. Para el diseño de dicho cuestionario se tomaron en cuenta dos criterios: El primer criterio considera que los ítems deben proporcionar información sobre el grado de ajuste del significado personal de los estudiantes respecto del significado global u holístico del objeto antiderivada (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). El segundo criterio fue que los ítems seleccionados respondan a los diferentes tipos de representaciones para la antiderivada.

Para lograr el objetivo central de la investigación, el estudio se llevó a cabo en tres fases:

1) Revisión, clasificación y caracterización de la literatura específica del campo de Didáctica de la Matemática, y concretamente de aquellos estudios orientados a la comprensión de la antiderivada.
2) Mediante un estudio sistemático de tipo histórico-epistemológico se elabora una conceptualización de los significados de la antiderivada.
3) Diseño, aplicación y análisis del cuestionario *CNM-Antiderivada,* teniendo en cuenta los significados parciales y criterios aportados por las investigaciones sobre Didáctica del Cálculo, así como también se tienen en cuenta los resultados del estudio de triangulación mediante juicio de expertos al que se sometió el cuestionario.

Los resultados de nuestra investigación aportan nuevos conocimientos respecto a la caracterización de la comprensión de la antiderivada en estudiantes universitarios. Además, proporcionan pautas y criterios que permiten el diseño de metodologías didácticas para desarrollar y/o potenciar la comprensión sobre la antiderivada.

ÍNDICE

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 6

INTRODUCCIÓN GENERAL

Una de las problemáticas que ha generado gran interés, por parte de la comunidad de investigación, es la comprensión de los objetos matemáticos. Al respecto, una gran cantidad de investigaciones han sido orientadas a la identificación de componentes desde el pensamiento matemático avanzado. Entre los trabajos que más inciden, se encuentran Sierpinska (1992, 1994), Sfard (1991), Dubiski (1991), Pirie y Kieren (1994) y Godino (2000), los cuales pueden situarse en un enfoque que contempla la comprensión del conocimiento matemático desde una perspectiva amplia y profunda, centrados en el interés de aspectos como su naturaleza, funcionamiento, evolución o valoración.

En cuanto a la antiderivada como objeto autónomo, resalta el trabajo de Metaxas (2007), quien explora las dificultades en la comprensión de la integral indefinida. En este sentido, el interés de este trabajo de investigación es avanzar en la comprensión de la noción matemática antiderivada, caracterizando los conocimientos que tienen los estudiantes universitarios sobre la antiderivada.

El trabajo que a continuación se presenta, se encuentra estructurado en seis capítulos, a través de los cuales se va consiguiendo gradualmente la caracterización de conocimientos sobre la antiderivada de estudiantes universitarios, fin último de esta investigación. En el Capítulo 1, antecedentes, hemos realizado un recorrido por las investigaciones que se han realizado sobre modelos de comprensión de los objetos matemáticos desde el pensamiento matemático avanzado, específicamente aquellos relacionados con la antiderivada. En este primer capítulo nos fue posible plantear una primera aproximación a las preguntas de investigación que guiarán el rumbo de nuestro estudio.

En el Capítulo 2, se recogen las nociones teóricas y metodológicas que utilizamos a lo largo de nuestro estudio, principalmente el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Una vez presentadas dichas nociones, y contando con los planteamientos metodológicos indispensables para el entendimiento de nuestro objetivo general, planteamos las preguntas y objetivos de esta investigación.

El Capítulo 3, versa sobre la caracterización del significado global de la antiderivada, problemática para la cual el EOS proporciona herramientas teóricas pertinentes, en particular la noción de configuración (epistémica y cognitiva) de objetos y procesos matemáticos. Una pregunta que surge de manera natural, es ¿qué es la antiderivada? Así, en este capítulo, realizamos un estudio histórico-epistemológico a través del cual identificamos las problemáticas más relevantes que dieron paso al surgimiento y evolución de la noción antiderivada. A partir de dichas problemáticas, nos fue posible identificar los significados parciales de la antiderivada que constituyen el holosignificado de esta noción.

En el Capítulo 4, diseñamos un instrumento para explorar aspectos relevantes de la comprensión sobre la antiderivada. En el diseño consideramos los resultados de los capítulos anteriores y los aportes que se han realizado desde el campo de investigación sobre Didáctica del Cálculo. En este mismo capítulo se presenta la validez del cuestionario mediante la triangulación de expertos.

En el Capítulo 5 se presenta los resultados cuantitativos y cualitativos de la aplicación del instrumento a una muestra de 137 estudiantes universitarios. Los resultados analizados con la herramienta análisis ontosemiótico que nos proporciona el EOS, nos permitió caracterizar a través de configuraciones cognitivas los conocimientos de los estudiantes.

Finalmente en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones. Para ello se da respuesta a las preguntas de investigación planteadas en el Capítulo 2, mediante la descripción de en qué medida se lograron cada uno de los objetivos específicos planteados. En este último capítulo se hace un resumen de las principales aportaciones que se tienen de nuestro estudio y se presentan algunas líneas de investigación abiertas.

CAPÍTULO 1

Antecedentes y Área Problemática

1.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta un panorama general sobre las investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática referentes al problema de investigación que nos atañe: *la comprensión de la noción matemática antiderivada en estudiantes universitarios*. Dichas investigaciones y desarrollos nos abren una ventana a esta investigación. Para facilitar la presentación de los antecedentes que refieren al problema que nos compete, hemos separado dos grupos de investigaciones, inicialmente aquellas vinculadas a la comprensión desde la perspectiva de la educación matemática. Seguido de aquellas que estudian, concretamente, el objeto matemático antiderivada o lo abordan desde otros objetos matemáticos del cálculo infinitesimal. Finalmente presentamos una aproximación al problema de investigación.

1.2. LA PROBLEMÁTICA DE LA COMPRENSIÓN DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS DESDE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

En este apartado, se perfila la problemática que enmarca el rumbo de esta investigación, trataremos de explicar la motivación de ahondar en cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático propio de los primeros cursos universitarios.

En 1985 se formo un grupo de trabajo en el marco del PME[1], como lo describen Azcárate y Camacho (2003), cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del pensamiento matemático avanzado (PMA) y, en particular, profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal, cómo lo es la comprensión de la noción antiderivada.

Son diversas las posturas contemporáneas que abordan la comprensión de nociones matemáticas en el cálculo infinitesimal. Según Tall (1991), el PMA requiere una reconstrucción cognitiva para pasar de la descripción del concepto a la definición y de la convicción a la prueba lógica basada en la definición. En el aprendizaje de matemáticas avanzadas hay que distinguir dos procesos: por un lado, la generalización, que consiste en extender procesos familiares, y puede ser expansiva si no requiere cambios en las ideas, reconstructiva si requiere reconstrucción de la estructura cognitiva existente, o disyuntiva si se añaden nuevas ideas en la estructura cognitiva que no se integran con las antiguas. Por otro lado, la abstracción, que requiere una gran reorganización mental. La generalización expansiva es una buena técnica de enseñanza porque aplica un proceso conocido en un contexto distinto, y es también un primer paso hacia la abstracción formal, sin necesidad de reconstrucción mental.

Sierpinska (1990) plantea el significado de acto de comprensión en los siguientes términos:

> *La comprensión es un acto, pero un acto envuelto en un proceso de interpretación, siendo esta interpretación un desarrollo dialéctico entre afirmaciones más y más elaboradas y la validación de esas afirmaciones (….). Comprender el concepto será concebido como el acto de aprehender su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto [la "estructura" es la red de sentidos de las*

[1] Siglas que refieren al Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática, formado por investigadores en educación matemática, establecido desde 1976 en el marco del Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME3).

> *sentencias que hemos considerado]. Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión (....). Una descripción de los actos de comprensión de un concepto matemático contendría de este modo una lista de los obstáculos epistemológicos relacionados a este concepto, proveyéndonos de información más completa sobre su significado (....). La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos.* (p. 35)

Así, Sierpinska (1990) identifica las siguientes categorías en los actos de comprensión en un contexto matemático:

- Identificación: Este acto consiste en la repentina percepción de objetos que corresponden a la denominación del concepto (relacionado con el concepto en cuestión) o a la identificación de un término como si tuviera estatus científico.
- Discriminación: Es la diferenciación entre dos objetos, propiedades o ideas que estaban anteriormente confundidas.
- Generalización: Consiste en darse cuenta de la no esencialidad de una presunción o de la posibilidad de extender el rango de las aplicaciones.
- Síntesis: Consiste en aprehender relaciones entre dos o más propiedades, hechos u objetos y organizarlos en un todo consistente.

En cuanto a los obstáculos epistemológicos, Brousseau (1997) distingue tres tipos según su origen:

1) Ontogénico, que tiene que ver con todo lo relacionado con las limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo.
2) Didáctico, que se adquiere o aparece por el modo de enseñar o por la elección de un tema o una axiomática.
3) Epistemológico, que son los obstáculos que un concepto tiene para ser aprendido, es propio del concepto.

En cuanto a los obstáculos epistemológicos, específicamente, Sierpinska (1994) afirma:

> *Los obstáculos epistemológicos son formas de comprensión basados en algunos esquemas inconscientes de pensamiento que han sido adquiridos culturalmente y en creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas y acerca de las categorías fundamentales como número, espacio, causa, azar, infinito que son inadecuados con respecto a la teoría actual.* (p. 134)

Esta postura de comprensión presupone un vinculo complementario entre la superación de obstáculos epistemológicos y la articulación de las categorías propuestas, Sierpinska (1990) lo describe de la siguiente manera:

> *Superar los obstáculos epistemológicos y llegar a la comprensión son dos formas distintas de hablar sobre lo mismo. La primera es "negativa" y la segunda "positiva". Esto sugiere un postulado para análisis epistemológicos de conceptos matemáticos: deberían ambos contener imágenes "positivas" y "negativas", los obstáculos epistemológicos y las condiciones de comprensión.* (p. 28)

Los argumentos planteados por Sierpinska, muestran que la comprensión puede medirse y lograrse mediante el número de obstáculos epistemológicos superados o mediante la identificación del número y calidad de los actos de comprensión logrados.

Sierpinska (1992) plantea finalmente que usar (aplicación de un concepto) no es un acto de comprensión, pero sí una condición necesaria para que cualquier acto de comprensión ocurra. El planteamiento de Sierpinska (1992) en torno a lo que significa comprender un concepto se orienta a que un estudiante puede se capaz de hacer frente a las preguntas ¿qué dice la definición del concepto?, ¿a qué hace alusión la definición? y a la diversidad de relaciones entre las respuestas. No es muy difícil observar que hay una convergencia entre este planteamiento y los planteamientos de Tall y Vinner (1981), en torno al papel de la definición en la comprensión conceptual. En el sentido de que Tall y Vinner (1981) expresan que el conocimiento de la definición matemática de un concepto no es suficiente para garantizar la comprensión de un concepto y que es fundamental que el sujeto construya una imagen del concepto (*concept image*). A su vez, es fundamental que la definición controle las actuaciones del sujeto cuando enfrenta situaciones problemáticas que requieren del concepto. Esta imagen del concepto, consiste en:

> *toda la estructura cognitiva de un sujeto asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto. Se construye a lo largo de los años por experiencias de toda clase y va cambiando según el individuo madura y encuentra nuevos estímulos".* (Tall & Vinner; 1981, p. 152)

Esta imagen del concepto está formado por representaciones visuales, recuerdos de experiencias con el concepto y registro de ejemplos. Una imagen del concepto es, entonces, toda la estructura cognitiva asociada a una noción matemática, aunque no sea necesariamente coherente en todo momento, ya que los estudiantes pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes. Una imagen mental, como lo describe Azcárate y Camacho (2003), es el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en la mente del sujeto, incluyendo cualquier tipo de representación del concepto matemático que puede ser gráfica, numérica o simbólica, entre otras. En cambio, la definición del concepto (*concept definition*), se refiere a "*una definición verbal, a un conjunto de palabras para especificar un concepto*" (Tall & Vinner, 1981, p. 152).

En párrafos anteriores resaltan los primeros términos que surgen para indagar en la comprensión de un concepto matemático desde el PME, estos son: *imagen del concepto, definición del concepto y obstáculo epistemológico.* Con los dos primeros términos se puede distinguir entre la imagen de un concepto que tiene un individuo y su definición formal; con el tercer término se pueden analizar los errores de los estudiantes en el aprendizaje de un concepto, y la dualidad entre proceso y objeto.

Para Sfard (1991), la comprensión es un proceso constructivo, en el cual se presenta una reestructuración de esquemas, determinado por la capacidad de relacionar objetos familiares con representaciones internas a partir de la interacción con el medio. Dicho proceso se desarrolla jerárquicamente desde una concepción operacional como proceso, es decir un sujeto puede construir dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático: operacionales y estructurales. La primera de ellas se refiere a la consideración del concepto como proceso, y la segunda, cuando se le concibe como un objeto a través de tres etapas:

- Interiorización: "*Diremos que un proceso ha sido interiorizado si puede llevarse a cabo a través de representaciones [mentales] y para ser considerado, analizado y comparado, éste no necesita ser realizado en el acto*" (Sfard, 1991, p. 18).
- Condensación: *"…es un proceso de secuencias prolongadas comprimidas de operaciones en unidades más manejables. En esta etapa una persona llega a ser más y más capaz de pensar en un proceso dado como una totalidad, sin sentir un impulso de entrar en detalles*" (Sfard, 1991, p. 19).
- Reificación: "*…se define como un movimiento ontológico −una repentina habilidad para ver alguna cosa como familiar con una luz totalmente nueva− (....), la reificación es un salto cuántico instantáneo: un proceso se solidifica en un objeto, en una estructura interna estática. Varias representaciones del concepto llegan a ser unificadas semánticamente por este constructo, abstracto, puramente imaginario. La nueva entidad es rápidamente separada del proceso del cual es producto y comienza a dibujar su significado a partir del hecho de su existencia como un miembro de una cierta categoría (....). Nuevos objetos matemáticos pueden ahora ser construidos a partir del presente*" (Sfard, 1991, p. 19-20).

En la etapa de interiorización un sujeto se familiariza con los procesos que darán origen a un nuevo concepto; en la etapa condensación el sujeto manifiesta una facilidad de alternar diferentes representaciones del concepto; en la etapa reificación, en el sujeto se da inicio a una interiorización (superior) de conceptos. Así estas tres etapas se relacionan convirtiéndose en un "ciclo infinito" de comprensión de objetos, comprensión que se logra por aproximaciones sucesivas del concepto (objeto), dado que el concepto (proceso) que está en constante evolución.

Un marco teórico desarrollado de acuerdo a la distinción entre proceso y objeto es la teoría APOE ("*APOS*" acrónimo de las iniciales correspondientes a los términos "*action-process-object-squema*"), introducida por Dubinsky (1991) y basada en una interpretación del constructivismo a partir de la adaptación de algunas ideas (*abstracción reflexiva*), del enfoque cognitivo de Piaget al PMA.

Esta teoría APOE trata de modelizar las construcciones mentales utilizadas en el PMA considerando que:

> *Comprender un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones son luego interiorizadas para formar procesos que son después encapsulados para formar objetos. Los objetos pueden ser desencapsulados de nuevo a los procesos a partir de los cuáles fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas.* (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996, p. 8)

En la teoría APOE la comprensión es un proceso interminable de construcción de esquemas iterativos, como lo reseñan Ayers, Davis, Dubinsky y Lewin (1998), construcción que se realiza mediante la *abstracción reflexiva* (*interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión*); un proceso cognitivo en el que el estudiante reconstruye y reorganiza las acciones físicas o mentales en un plano más elevado de pensamiento y, por lo tanto, las comprende. La descripción teórica de los pasos que ha de seguir esta construcción de la *abstracción reflexiva* se llama *descomposición genética.*

Ahora, si consideramos la comprensión de conceptos matemáticos no desde proceso y objeto, sino desde niveles que coordinen globalmente las acciones del proceso y objeto, es decir, ver al concepto de una forma más amplia, como un conjunto (esquema) global, que actúe como una colección coherente y personal de acciones, procesos, objetos y otros esquemas previamente construidos, que son coordinados y sintetizados por un sujeto para formar estructuras cognitivas que pueden ser evocadas para tratar una situación problemática determinada.

Según Piaget y García (1982), el desarrollo cognitivo de los esquemas, que lleva a la comprensión o construcción de los conceptos, pasa por una sucesión de procesos psicogenéticos de naturaleza general: el proceso que conduce de lo intra-objetal (análisis de los objetos) a lo inter-objetal (estudio de las relaciones y transformaciones) y de allí a lo trans-objetal (construcción de las estructuras). Desde un punto de vista general, en la sucesión intra-inter-trans, afirman Piaget y García (1982), se encuentran en todos los dominios y niveles, que condicionan las leyes de la asimilación y equilibración que se impone a toda adquisición cognitiva. Cada elemento de la triada se puede definir como:

- Intra: se caracteriza por el enfoque de un sólo objeto en aislamiento desde otras acciones, procesos y objetos.
- Inter: se caracteriza por el conocimiento de las relaciones entre las distintas acciones, procesos, objetos y/o esquemas.
- Trans: se caracteriza por la construcción de una estructura coherente que subyace en algunas de las relaciones descubiertas en el nivel Inter del desarrollo.

En la sucesión de la comprensión del esquema global (intra, inter y trans), se pueden identificar el crecimiento de componentes, el cual es gradual y no necesariamente lineal, como lo indican Baker, Cooley y Trigueros (2000).

Por otra parte, hay autores han tratado de responder a los diferentes posicionamientos y modelos de comprensión en la educación matemática, entre ellos están Pirie y Kieren (1994), los cuales plantean un modelo para analizar y describir cómo se produce el crecimiento en la comprensión de una noción matemática. El modelo esta centrado en un proceso recursivo que exige un conocimiento mínimo que permite crear una estructura cimentada en una serie de teorías ya validadas, al cual los autores llaman acción efectiva (*effective action*), y que depende de todas las ideas previas que se tienen del concepto, ya que son el núcleo de cada uno de los niveles, los cuales a su vez dependen tanto de los internos como de los externos.

La conceptualización del modelo de comprensión propone 8 niveles, que se describen como:

- Nivel 1. Conocimiento primitivo (*primitive knowing*): está formado por todas las ideas intuitivas o conocimientos previos que tienen los estudiantes.
- Nivel 2. Creación de imagen (*image making*): los estudiantes pueden plasmar o desarrollar una idea mental sobre la forma que tiene el objeto de estudio.
- Nivel 3. Comprensión de la imagen (*image having*): el estudiante no sólo tiene una idea de la forma de la imagen, sino que establece las características de la misma.
- Nivel 4. Observación de la propiedad (*property noticing*): Determina las características de las diferentes imágenes y establece relaciones entre ellas.
- Nivel 5. Formalización (*formalizing*): el alumno produce o transcribe definiciones de conceptos, a partir de las relaciones entre las diferentes imágenes mentales.
- Nivel 6. Observación (*observing*): expresa verbalmente las definiciones de los conceptos matemáticos desde el lenguaje formal.
- Nivel 7. Estructuración (*structuring*): el estudiante es capaz de relacionar el conocimiento adquirido con uno de mayor estructuración, a partir del uso de algoritmos.
- Nivel 8. Invención (*inventising*): el estudiante se cuestiona haciendo uso de los conocimientos formales que posee y es capaz de dar paso a un nuevo conocimiento, el cual a su vez iniciará desde el nivel primitivo y empezará nuevamente el recorrido anterior.

Para que se produzca un cambio en la comprensión de un concepto, debe producirse un mecanismo que se conoce bajo el término de repliegue (*folding back*), que consiste en moverse adelante y atrás al enfrentarse a actividades desde diferentes niveles de comprensión (Pirie & Kieren, 1992). Si de esta forma se crea un nuevo conocimiento o se modifica uno existente, se dice que el repliegue ha sido efectivo. Este mecanismo pone de manifiesto que la construcción del conocimiento es de naturaleza cambiante, no lineal ni unidireccional y que, para que se produzca un crecimiento en la comprensión de un concepto, los individuos recurren a concepciones (o modos de conocer un concepto) más sencillas desde el punto de vista matemático.

Los ocho niveles analizados por Pirie y Kieren (1992) son tenidos en cuenta en la teoría de Sfard (1991), por ejemplo, podría hacerse una separación en dos bloques donde los cuatro primeros corresponderían a una descripción de la concepción operacional y los restantes a la estructural, es decir, Sfard permite realizar una observación global de los avances cognitivos del estudiante de forma rápida. Por otro lado, la recursividad de Pirie y Kieren (1992) facilitaría el estudio específico o la descripción de las debilidades que posee el alumno una vez se determine si ha alcanzado una de las dos concepciones propuestas.

Hasta ahora hemos descrito algunos modelos de comprensión todos ellos centrados en procesos mentales. Es Godino (2002) quien asume una postura de comprensión, no tanto como un proceso mental y más como una competencia, abordado desde el enfoque ontosemiótico de conocimiento y la instrucción matemática (EOS), en donde sus posicionamientos pragmatistas relacionan *comprensión, competencia y disposición* (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209) en un *constructo epistémico–cognitivo general* que regula la práctica matemática. Esta postura pragmatista del EOS es ampliada en la sección 2.2.

1.3. INVESTIGACIONES EN TORNO A LA NOCIÓN MATEMÁTICA ANTIDERIVADA

El objeto matemático antiderivada, tal como la conocemos hoy en día, está relacionado con otras nociones del cálculo infinitesimal, tales como la derivada y la integral, conectados a través del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Para evidenciar la interacción de la antiderivada en el TFC, se ha considerado el TFC en dos partes, las cuales denominaremos “TFC1” y “TFC2”. Cada una de las dos partes se ha analizado de forma independiente con la finalidad de mostrar como interactúa la antiderivada entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Teorema Fundamental del Cálculo - Parte 1 (TFC1):

“*Si f es continua en* $[a, b]$*, entonces la función* g *definida por* $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$*, con* $a \leq x \leq b$*, es continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b)*, y* $g'(x) = f(x)$ ” (Stewart, 2013, p. 381).

Esta primera parte del TFC refiere a que la derivada de una integral definida, con respecto a su limite superior, es el integrando evaluado en el limite superior.

Teorema Fundamental del Cálculo - Parte 2 (TFC2):

“*Si* f *es continua en* $[a, b]$*, entonces* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$*, en donde* F *es cualquier antiderivada de* f*, esto es, una función* $F' = f$ ” (Stewart, 2013, p. 384).

Esta segunda parte del teorema, establece que si se conoce la antiderivada o primitiva de la función F, de una función f dada, se puede evaluar la integral definida de esta última, mediante la diferencia de las imágenes, por *F* de los extremos superior e inferior del intervalo donde la función es continua.

Las dos partes del teorema fundamental del cálculo unidas, pueden establecer la conexión entre el cálculo diferencial y el cálculo integral. Para poder ver de manera explícita esta conexión, basta con reescribir matemáticamente las dos partes del TFC. Reescribiendo TFC1 tenemos: Si la función *f* es continua, entonces, si primero se integra la función f y luego se deriva el resultado, se regresa a la función original f. En lenguaje formal: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

Con un ligero cambio de notación, podemos reescribir TFC2 de una forma más conveniente: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b$, donde $F' = f$. Lo anterior también se puede expresar como: $\int_a^b F'(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Esta forma de reescribir la dos partes del TFC, muestra con más claridad que ambas partes, juntas, expresan que la derivación y la integración definida son procesos inversos ligados por la antiderivada.

Hasta ahora hemos mostrado la relación matemática de la antiderivada con la derivada y la integral, a través del TFC. En los siguientes apartados se hace descripción exhaustiva de investigaciones en la antiderivada.

1.3.1. Estudios sobre la comprensión de la antiderivada

Los estudios sobre la comprensión de la antiderivada en estudiantes, otorgando al objeto matemático identidad propia son muy escasos, casi nulos.

Metaxas (2007), da identidad al objeto antiderivada, y realiza un estudio de caso para analizar respuestas de cuatro estudiantes (avanzados) de pregrado, al resolver algunos problemas de conocimiento matemático que involucran la integral indefinida (antiderivada). El objetivo es enfrentar a estudiante a través tareas que generen *conflicto cognitivo*[2]. Para el análisis de las respuestas de los estudiantes aborda la perspectiva teórica de la *abstracción reflexiva* y el esquema de comprensión (*interiorización-condensación-reificación*), propuesto por Sfard (1991). Su estudio presentado en el PME-31, arroja algunos resultados que sirven como exploratorios en la noción. Concluye afirmado, que los estudiantes del estudio alcanzan una comprensión procedimental para manejar la integral como un objeto, es decir, con la triada cíclica infinita de Sfard (1991), se alcanza a caracterizar la integral indefinida, caracterización entendida como herramienta o una "técnica para la solución de las ecuaciones diferenciales de manera eficiente". Sugiere, a su vez, que el uso de técnicas de *conflicto cognitivo*, son efectivas para enseñar nociones conceptualmente difíciles como lo es la integral indefinida (antiderivada), sin olvidar tener en cuenta la distancia cognitiva que

[2] Estado de desequilibrio que surge cuando una concepción que tiene un individuo entra en conflicto con alguna otra concepción que lleva el mismo individuo, o bien con el ambiente externo.

hay entre los conocimientos previos del alumno y un nuevo fenómeno que haya que aprender. De lo contrario el resultado de investigaciones donde interactúe el modelo de comprensión Sfard (1991), junto con la técnica *conflicto cognitivo,* se puede llegar a convertir en la explicación de un simple *acto de comprensión*, como el propuesto por Sierpinska (1990).

1.3.2. Estudios sobre significados de la antiderivada

El estudio de los términos matemáticos, en particular sobre la antiderivada, son escasos, es Hall (2010) quien hace un investigación sobre algunos de los términos matemáticos, que generalmente se usan en el lenguaje de la enseñanza del cálculo, concretamente palabras como: origen, derivado, suma, tangente. Hall (2010), presupone un problema cuando estas palabras dan un paso fuera de un aula de matemáticas adquieren una nueva vida, a veces significan la misma cosa y en ocasiones son totalmente diferentes. El objetivo de la investigación de Hall (2010), es analizar la diversidad de respuestas, al entrevistar estudiantes de un curso de cálculo acerca de sus conocimientos matemáticos sobre la integración. Inicialmente solicita a los participantes de la investigación discutir diversos problemas de que involucran integración (definida e indefinida), así como de la definición de los términos integral definida e integral indefinida. Tal como lo había planteado, encuentra diversidad de respuestas, entre ellas, “la integral definida es más precisa que la integral indefinida y la integral indefinida es un termino vago”. En la investigación de Hall (2010), también se indaga en los significados personales que confieren los estudiantes a la integral indefinida al preguntar ¿qué es una integral indefinida? Hall encuentra variedad de respuestas a esta pregunta entre ellas: “la primitiva”, “la inversa de la derivada”. Hall (2010) concluye que estas respuestas son indicativos de la mala comprensión del concepto matemático, y a su vez evidencia que ese tipo de respuestas de los estudiantes establecen un conflicto entre el conocimiento de términos matemáticos y sus contrapartes en el lenguaje común. Otra de las recomendaciones de la investigación de Hall (2010), esta orientada a propiciar el trabajo con profesores para tener cuidado con el uso del vocabulario en las clases de matemáticas, adicionalmente sugiere buscar una forma para evaluar la comprensión de la antiderivada, así como la capacidad de comunicar esa comprensión, esto ya que a la fecha de publicación de sus resultados de investigación, los estudios de la antiderivada eran escasos.

1.3.3. Estudios sobre clasificación de errores en tareas con la antiderivada

Kiat (2005), explora en estudiantes la resolución problemas de integración (definida e indefinida). Sus diseños tienen como objetivo examinar y clasificar dificultades con respecto al desempeño de los estudiantes al responder a preguntas que involucran integración de funciones trigonométricas y la aplicación de la integración (áreas de figuras planas). Kiat (2005), clasifica los errores en las respuestas que proporcionan los estudiantes cuando se resuelven problemas que involucran integración, clasificación que adapta de Avital y Libeskind (1978), quienes describieron tres tipos de dificultades que los estudiantes encuentran en el aprendizaje de la inducción matemática. La adaptación hecha por Kiat (2005), resulta en tres tipos de errores: conceptuales, procedimentales y técnicos. Errores equivalentes a las dificultades conceptuales, matemáticas y técnicas, descritas por Avital y Libeskind (1978).

Kiat (2005), a partir de los resultados en la clasificación de errores, encontró que los estudiantes generalmente carecían de comprensión conceptual y la comprensión procedimental en la integración, y dado que el mayor número de errores cometidos fueron errores técnicos que se atribuyeron principalmente a la falta de conocimiento específico de contenidos matemáticos. Entre las recomendaciones para la enseñanza de la integral (definida e indefinida), sugiere desarrollar propuestas que aborden inicialmente la comprensión de conceptos antes de emprender técnicas en la resolución de problemas. Es decir, conceptualizar primero antes de aplicar las fórmulas. Adicional a esto y a juicio de Kiat (2005), resalta promover el pensamiento visual en la enseñanza del cálculo para ayudar en la comprensión de los conceptos de cálculo, haciendo conexiones entre las funciones y sus gráficas.

1.3.4. Estudios sobre reflexión en métodos de integración

En cuanto a reflexiones para mejorar la eficacia de técnicas manuales para resolver antiderivadas, es Howard (2004) quien propone una reflexión para encontrar antiderivadas en funciones diferenciables, partiendo del supuesto "la integración no es tan sencilla como la diferenciación"; dado que no hay reglas que garantizan absolutamente la obtención de una integral indefinida de una función. Y en ocasiones hay que hacer uso de técnicas numéricas para la evaluación de las integrales de funciones cuyas primitivas son desconocidas. Howard (2004) muestra una serie que define la antiderivada de una función de orden n diferenciable, y demostró que la serie permite que una expresión sea explícita para aplicar sobre ella, la segunda parte del TFC. Sus hallazgos son considerados de importancia en la enseñanza del cálculo, en particular para la enseñanza de métodos numéricos, específicamente cuando se estudian funciones infinitamente diferenciables. La importancia del trabajo de Howard (2004) recae en el hecho de que facilita encontrar nuevas funciones primitivas para dichas funciones.

Por su parte, Posso, Uzuriaga y Martínez (2011) reportan una comunicación en la que se hace una comparación entre integración tabular por partes (Murtty, 1980; Horowitz, 1991) y la "buena" selección para el u en la fórmula de integración por partes $\int udv = uv - \int vdu$, a través de la identificación de una función inicial por orden de prioridad del acrónimo "LIATE" (Logarítmica, Inversas, Algebraica, Trigonométricas y Exponenciales). Esta forma de selección ayuda a identificar las funciones a derivar e integrar, cuando se utiliza la fórmula de integración por partes, a pesar de no existir reglas generales que indique la selección. Su reporte comparativo concluye que hay falta de precisión en los conceptos, lo que induce al estudiante a cometer errores, y sugiere hacer énfasis en el significado de integral indefinida y la importancia de la constante de integración.

De igual forma, Ponce-Campuzano y Rivera-Figueroa (2011a), presentan un trabajo de reflexión donde se propone discusiones sobre un método de sustitución para funciones trigonométricas racionales de la forma

$$\int \frac{1}{a+bsenx}dx\,, \int \frac{1}{a+bcosx}dx, \int \frac{1}{a+bsen^2x}dx\,, \int \frac{1}{a+bcos^2x}dx$$

discusiones centradas en el dominio de la función primitiva de este tipo de función, las cuales podrían llevar a errores cuando se hace evaluación de integrales definidas. El estudio presenta varios ejemplos que llevan a concluir la posibilidad de encontrar primitivas de funciones de este tipo, al utilizar la sustitución convencional $t = tan\frac{x}{2}$ y usando la identidad trigonométrica adecuada, en donde el integrando puede pertenecer a una familia de funciones racionales bien definidas de los reales en los reales ($\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).

1.3.5. Estudios sobre enseñanza de la antiderivada

Los estudios respecto a la enseñanza de antiderivada como objeto autónomo, como hemos indicado anteriormente, son escasos. Sin embargo, hay estudios que abordan la enseñanza de la antiderivada como parte de un conjunto de elementos a enseñar en el cálculo integral, es decir, abordar la enseñanza de la antiderivada en conjunto con otros objetos (e.g., Teorema Fundamental de Cálculo, aproximaciones, velocidad, posición).

Es Bressoud (1992), quien se pregunta ¿cómo se introduce en el aula el concepto de integración? Esta pregunta la plantea como la pregunta perenne en la enseñanza de conceptos del cálculo, dado que la integración tiene naturaleza básica que permite ir desde la operación inversa de la derivada, hasta la medición de áreas, volúmenes y longitudes, ligados por el TFC. La propuesta de Bressoud (1992) es enseñar el concepto de integral como se ha desarrollado en la historia, partiendo de forma no rigurosa, sino convincente de los usos de la integral como una medida de área, haciendo énfasis en evaluación de integrales, continuando con la enseñanza de la integración numérica, dado que esta proporciona la base para construir otros usos de la integral (e.g., limites de una suma infinita). Por último abordar la definición de integral de Riemann, hasta que el estudiante se sienta cómodo con aproximaciones. Esta secuencia de contenidos en la enseñanza de la integral, afirma Breussoud (1992), funciona para que el estudiante encuentre errores en los procedimientos y pueda apreciar la necesidad de tratamientos más cuidadosos.

Por su parte Thompson (1994), plantea un estudio centrado en las formas de pensamiento que pueden reflejar los estudiantes cuando se abordan las relaciones entre derivada e integral, a través de TFC. Thomson (1994) incluye en su estudio hacer análisis del uso del TFC y la comprensión en estudiantes cuando se relacionan conceptos tales como: aceleración, distancia, velocidad, razón de cambio y cambio infinitesimal. La propuesta de Thomson (1994) sugiere la intervención del profesor cuando se determine que el estudiante presente dificultades en los conceptos, es decir el profesor debe promover el desarrollo de la enseñanza de dichas relaciones de forma intuitiva orientada a conceptualizar el TFC y técnicas de antiderivación (técnica para encontrar la primitiva de una función); técnicas dadas por la historia y motivadas por Newton y Leibniz para la construcción del teorema fundamental con el fin de hacer algorítmico la construcción de expresiones analíticas para las áreas bajo las curvas y la conexión entre la derivada de una función de la distancia, y la antiderivada de una función de la velocidad.

Por otra parte, existe un grupo de investigadores conocido como Educación Matemática Realista (RME), apoyados en el trabajo de Freudenthal y basados en la idea de hacer que el estudiante redescubra o reinvente el conocimiento matemático usando su propio talento y experiencia con el ambiente que le rodea. Gravemeijer y Doorman (1999), pertenecen a la RME y proponen una secuencia para la enseñanza del cálculo, iniciando con la actividad de matematizar (organizar desde una perspectiva matemática), en la que proponen llevar a cabo una reinvención guiada de las matemáticas que “actúe como puente” entre el conocimiento informal y la matemática formal. Para el desarrollo de su investigación Gravemeijer y Doorman (1999), seleccionan problemas que ofrezcan a los estudiantes la oportunidad de que desarrollen un *modelo emergente* específico de la situación. Para identificar esos problemas, -indican-; el diseñador debe tomar en cuenta su propio conocimiento y experiencia de aprendizaje, acompañado de la historia de la matemática. Así, de esta forma poder observar las soluciones informales que los estudiantes ponen en juego cuando están resolviendo problemas aplicados en los que no conocen una solución.

Gravemeijer y Doorman (1999), no reportan experiencia con estudiantes; sin embargo, contemplan crear un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes tengan situaciones problemáticas con experiencias reales y promover la reinvención de la teoría, ya que afirman que la matemática formal surge de la actividad matemática del estudiante. *"Este es también un objetivo de RME, donde el diseño instruccional se enfoca o apunta a la creación de oportunidades óptimas para la emergencia del conocimiento matemático formal"* (p. 116).

Por otra parte Schwalbach y Dosemagen (2000), quienes plantean un estudio centrado en la práctica de un profesor, el cual proporciona a los estudiantes ejemplos concretos en su clase de física para dar un ambiente rico contextualmente para explorar conceptos de la propios de la física (posición, velocidad y aceleración) y algunos del cálculo (función, derivada y antiderivada). El estudio de Schwalbach y Dosemagen (2000), describe varios aspectos críticos o indicadores de la comprensión de los estudiantes, como son: capacidad para explicar conceptos y procedimientos, aplicación de los conceptos del cálculo en un contexto de la física, exploración de su propio aprendizaje (resolver e inferir). El estudio de Schwalbach y Dosemagen (2000), revela que los estudiantes profundizaron en los conceptos y ampliaron su capacidad de explicar, aplicar y autoevaluar su aprendizaje, aunque sugiere que se deben hacer más conexiones entre el cálculo y la física para producir comprensión de los conceptos y conocimientos procedimentales.

Thompson y Silverman (2007), consideran documentar algunas dificultades sobre la concepción de función como proceso. Su estudio va dirigido a determinar las dificultades que tiene el estudiante para comprender una idea importante del Cálculo: la acumulación. La idea de Thompson y Silverman (2007) consiste en elaborar una alternativa para la enseñanza del Cálculo, tomando en cuenta aspectos cognitivos que permitan la apropiación de un discurso coherente en el cual los estudiantes participen de los significados de las nociones de derivada (razón de cambio) e integral (acumulación), y donde se dominen conexiones entre razones de cambio de cantidades, acumulación de cantidades, funciones como modelos, límites, antiderivadas, convergencia uniforme y puntual, al igual que funciones de dos o más variables.

Robles, Tellechea y Font (2014), presentan una secuencia didáctica de tareas para la enseñanza del TFC que tiene en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos esenciales del Cálculo, y su articulación con el Teorema. Ellos consideran una secuencia de tareas que contribuye a promover una comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo y que permite una mejor articulación de la complejidad de los objetos matemáticos integral y derivada. La propuesta, relaciona diversas configuraciones epistémicas de la derivada y de la integral y, por otra parte, permite activar procesos relevantes en la actividad matemática. En particular, las representaciones articuladas con el lenguaje numérico, gráfico y analítico.

De igual forma Kouropatov y Dreyfus (2014), generan un propuesta de aprendizaje de la integral a parir de la construcción de conocimiento sobre el concepto de acumulación, se centran en actividades propuestas a un grupo de 4 estudiantes avanzados en secundaria, para potenciar la aproximación al concepto de integral, el estudio de carácter cualitativo, pretende analizar actividades centradas en la abstracción de concepto de aproximación y acumulación. En su investigación encontraron la no secuencialidad de construcción de los conceptos (aproximación, valor de aproximación y función de acumulación) de los estudiantes, y similitudes en respuestas.

1.3.6. Estudios sobre uso de tecnología en la enseñanza de la antiderivada

Dahan (2002), presenta una propuesta para enseñar funciones derivadas y antiderivadas con el software Cabri Geometry, partiendo de ejemplos propuestos, los cuales se abordan como una situación problema que se soluciona a través de la manipulación del programa (Cabri). Los resultados de Dahan (2002), indican como este software -Cabri-, se convierte una herramienta para la enseñanza de las matemáticas y no sólo de la geometría (para lo cual esta diseñado), a través del cual es posible acercarse a los conocimientos básicos del cálculo (derivadas, antiderivadas, sumas de Riemman), explorando la creatividad de los estudiantes.

Por su parte Ponce-Campuzano y Rivera-Figueroa (2011b), usando diferentes programas algebraicos de computación (CAS), hacen una comparación entre varios CAS tales como: Derive 6.0, Mathematica 8.0, Wolfram Alpha (sitio web) y Scientific Work Place

5.5, para calcular antiderivadas (e.g., $\int senxcosxdx, \int \frac{tanx}{\log{(cosx)}}dx$). Los resultados arrojados por los diferentes CAS muestran algunas diferencias, las cuales se basan en teorías matemáticas y estrategias como: cambio de variables, integración por partes, expresiones equivalentes, etc. Adicionalmente reportan que algunos de los CAS no tienen en cuenta al calcular la antiderivada el dominio del integrando.

Swidan y Yerushalmy (2014) presentan un estudio diseñado para identificar los procesos de objetivación (e.g., palabras, símbolos, gestos, discurso) involucrados al dar sentido al concepto de integral indefinida, cuando se estudia de forma gráfica en un entorno tecnológico. El estudio se centra en jóvenes estudiantes familiarizados con el concepto de derivación, pero no de integración, a los que se les pidió explicar la posible conexión entre dos gráficos dinámicos vinculados: la función derivada y funciones antiderivada. El estudio se basó en la teoría de la objetivación cultural, que considera como fundamental para la cognición y el aprendizaje, la toma de conciencia de los conocimientos que existen dentro de un contexto cultural. Se identificaron varios elementos en los procesos de objetivación: 1) las relaciones entre los segmentos basados en la ubicación; 2) inclinación y concavidad de la gráfica de la función; 3) las relaciones entre el cero, extremos, y los puntos de inflexión en la gráfica de la función derivada y 4) los correspondientes puntos en el gráfico de la función antiderivada.

1.3.7. Estudios para potenciar el pensamiento visual con la antiderivada

Yoon, Thomas y Dreyfus (2010, 2011a, 2011b), han venido explorando la gestualidad, buscan explicar cómo los espacios gestuales de una persona puede llegar a ser dotados de significado matemático. Centrados en un ejemplo de construcción de un gráfico (virtual) para la antiderivada, que implica propiedades matemáticas asociadas con $\mathbb{R}^2$, han analizado cómo dos profesores usaron estas construcciones gráficas (virtuales), para mejorar su comprensión acerca de la antiderivada en general y para comunicarse entre ellos. Proponen las actividades gestuales como un recurso potencialmente útil para la generación de nuevos conocimientos matemáticos, y que pueden ser aprovechados en la educación matemática terciaria.

Haciomeroglu y Chicken (2012), presentan un estudio cuantitativo para examinar desempeños matemáticos de estudiantes de cálculo y de las preferencias de pensamiento visual o analítica respecto a las tareas derivadas y antiderivadas presentados gráficamente. Ellos analizan los datos suministrados por 183 estudiantes de un curso de cálculo de cinco escuelas secundarias, para determinar las preferencias visuales de los estudiantes, diferenciados por el género. Haciomeroglu y Chicken (2012), investigaron los factores preferencia de los estudiantes que contribuyen al aprendizaje del cálculo y las preferencias para el pensamiento visual. Sus resultados sugieren que la preferencia por el pensamiento visual es un factor importante que influye en las actuaciones de los estudiantes masculinos. En particular, encontraron que los hombres visuales puntuaron significativamente más alto que los hombres analíticos sobre un examen. Este tipo de investigación busca medir las preferencias de genero, con el fin de correlacionar la preferencia con el rendimiento de los estudiantes.

Por otra parte Kirsch (2014) presenta una investigación para mostrar la posibilidad de desarrollar comprensión visual del teorema fundamental del cálculo (TFC1). Su propuesta presenta algunas tareas visuales para enseñar la naturaleza del teorema fundamental, y como el TFC relaciona la pendiente de la recta tangente a una curva y cálculo de área bajo la curva. Su investigación resalta lo confuso que resulta para muchos estudiantes, la relación matemática de los conceptos (tangente y área) por medio del teorema fundamental, cuando se hace a través de demostraciones formales. Kirsch (2014) afirma que la construcción gráfica del TFC, muestra la conexión visual (tangente y área) ganando así en el aprendizaje de los estudiantes. En conclusión, se debe hacer más hincapié en ideas básicas apropiadas al significado a partir de visualización, que en demostración del teorema.

1.3.8. Estudios históricos para abordar la antiderivada

Ponce-Campuzano (2013) hace una reconstrucción gráfica del Teorema Fundamental del Cálculo, siguiendo las indicaciones propuestas por Barrow. La reconstrucción contemporánea de Ponce-Campuzano (2013), pone en evidencia la evolución y refinamiento de las ideas matemáticas; como el concepto de función. Asimismo, muestra de forma gráfica como el problema de la relación cuadraturas y tangentes se ha divorciado de contexto original. Entre las recomendaciones, -indica-, que no es necesario en un curso de cálculo presentar el teorema fundamental tal como se dio originalmente, aunque es necesaria una discusión reflexiva acerca de su origen y desarrollo, la cual puede ser provechosa para comprender las relaciones que establece dicho teorema.

Ponce-Campuzano y Maldonado-Aguilar (2015), presentan y discuten el ejemplo propuesto por Vito Volterra en 1881, sobre la teoría de integración en conjuntos infinitos, específicamente de una función diferenciable F cuya derivada F' es acotada pero no integrable por Riemman. Basado en antecedentes históricos del cálculo integral en el siglo XVIII cuando el cálculo integral se consideraba esencialmente como el proceso inverso del cálculo diferencial. En otras palabras, la integración fue concebida como el proceso inverso de la derivación. El ejemplo de Volterra es una de las funciones considerado el primer ejemplo de una función continua que posee una derivada acotada que no es integrable por Riemann. Este ejemplo de Volterra que muestra que dentro del contexto de la teoría de la integración de Riemann (análisis matemático[3]) las operaciones fundamentales derivación y la integración no son totalmente reversible.

1.4. APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Como hemos evidenciado a lo largo de este capítulo, en cuanto a la comprensión de los objetos matemáticos desde el PMA, los trabajos más recientes pueden situarse en un enfoque que contempla la comprensión del conocimiento matemático desde una perspectiva amplia y profunda, centrados en el interés de aspectos como su naturaleza, funcionamiento, evolución o valoración. Entre los que se encuentran Sierpinska (1992, 1994), Sfard (1991), Dubiski (1991), Pirie y Kieren (1994) y Godino (2000).

[3] Parte de la matemática que estudia la rigurosidad de campos, como: Análisis real, teoría de la medida, geometría diferencial, análisis numérico, análisis no real, análisis complejo, análisis no-estándar, análisis funcional, y análisis armónico, entre otros.

En cuanto a la antiderivada como objeto autónomo, son escasas las investigaciones, resaltando el trabajo de Metaxas (2007), que explora las dificultades en la comprensión de la integral indefinida. En los otros trabajos aquí referidos, se indica en general como sugerencias, la importancia de separar los estudios de la integral definida de la integral indefinida, lo que conlleva dar independencia y relevancia a este objeto matemático.

En ese sentido como podemos vincular el objeto matemático antiderivada con un modelo de comprensión, en donde se de gestionen acoplamientos entre los significados (personales e institucionales) acompañado de la historia de la matemática. Entonces es oportuno preguntarnos:

¿Es posible evaluar la comprensión que tienen estudiantes universitarios acerca de la noción antiderivada? Si es posible, *¿De qué forma?*

Preguntas que van perfilando, nuestro trabajo de investigación, –la comprensión de la antiderivada en estudiantes de universitarios–. Sustentados en el hecho de que en la actualidad sólo hay un estudio que trata de indagar la comprensión de la antiderivada –entendiéndola como un objeto matemático con identidad propia y naturaleza compleja–.

En este sentido, en el presente trabajo de investigación, nos hemos propuesto indagar la comprensión de la noción matemática antiderivada en estudiantes universitarios. Investigación que manifestamos va tener suficientes garantías de validez, originalidad, rigurosidad, reproductibilidad y relevancia; elementos que entre otros, aseguran la calidad de una investigación sobre la comprensión matemática, como lo indican Gallardo y González (2007), proporcionando de esta forma un avance significativo y relevante en la educación matemática.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico, Problema de Investigación y Metodología

2.1. INTRODUCCIÓN

El presente capítulo está estructurado en tres apartados. En el primero de ellos se presentan las *herramientas* y nociones teóricas que enmarcan esta investigación, y que se utilizan para el desarrollo del estudio. Concretamente, se describen aquellas nociones teórico-metodológicas que proporciona el marco teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática. A partir de las nociones de dicho marco teórico, en el segundo apartado se define la pregunta y los objetivos de la investigación, planteando y describiendo para cada uno de ellos, distintas fases de investigación encaminadas a la consecución de cada uno de dichos objetivos. La metodología empleada en cada fase de investigación se describe en el apartado tres.

2.2. EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

Para esta investigación se ha adoptado el marco teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática, desarrollado en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino & Batanero, 1994; Godino & Batanero, 1998; Godino, Batanero & Font, 2007; Font, Godino & Gallardo, 2013). El EOS ha surgido dentro de la educación matemática, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Para cumplir con este fin adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones o facetas y las interacciones entre las mismas, tal como se representa en el Figura 2.1. El EOS resalta el carácter relacional y multidimensional de la enseñanza de las matemáticas en el sentido dado por Frankle, Kazemi y Battey (2007):

> *Los profesores, los estudiantes, y el contenido sólo se pueden comprender unos en relación a los otros. El profesor trabaja para orquestar el contenido, las representaciones del contenido, y las interrelaciones de las personas que intervienen en la clase. Los modos de estar de los estudiantes, sus formas de participación, y su aprendizaje emerge de estas relaciones mutuamente constitutivas. La enseñanza es también multidimensional*. (p. 227)

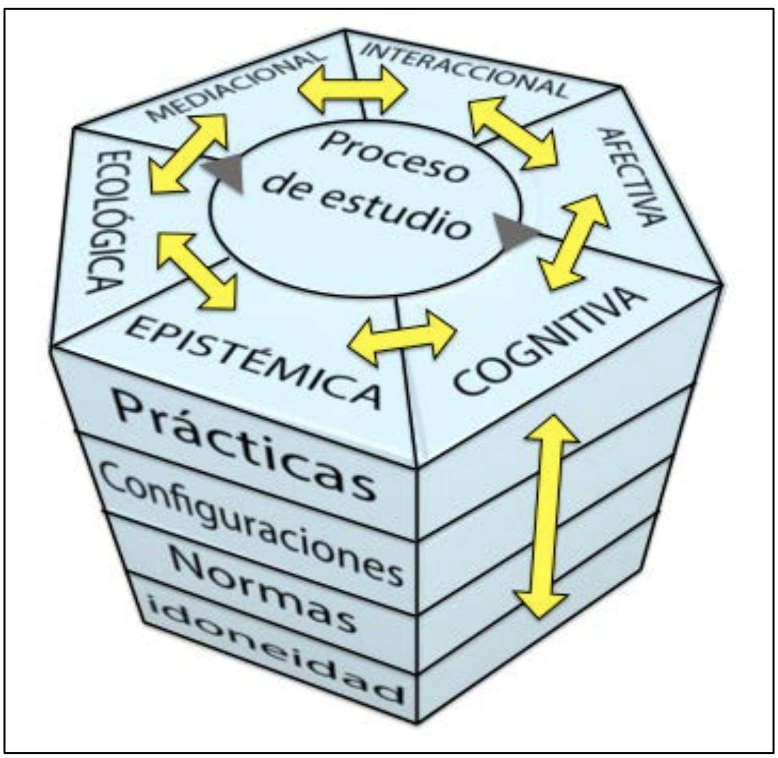


Figura 2.1. Niveles y Facetas del EOS

El EOS es un enfoque construido sobre diversos modelos o bases para cada una de sus facetas, entre los que se encuentran: las bases antropológicas y socioculturales (Bloor, 1983; Chevallard, 1992; Radford, 2006), que fundamentan la faceta epistemológica y ecológica de las matemáticas; bases semióticas (Eco, 1976; Hjelmslev, 1943; Peirce 1931-58), que sustentan la faceta cognitiva y afectiva de la matemática; bases socio constructivistas (Ernest, 1998; Brousseau, 1997), que orientan la faceta instruccional, y por último bases sistémico-ecológicas (Morin, 1994), que relacionan las facetas anteriores entre sí y con el trasfondo biológico, material y sociocultural (Maturana & Varela, 1984) en el que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación matemática.

Las facetas del EOS se deben analizar según diversos niveles: las prácticas de los agentes implicados, las configuraciones de los objetos intervinientes, las normas que condicionan y soportan la realización de las prácticas y la valoración de la idoneidad o adecuación del proceso educativo en toda su globalidad (Godino, Font, Wilhelmi & De Castro, 2009).

Adicional a esto, las nociones del EOS se han aplicado en diversas investigaciones teóricas y experimentales desarrolladas en tesis doctorales y otros trabajos de investigación, y se utiliza en esta investigación porque provee de *herramientas* teóricas y metodológicas que permiten realizar un análisis detallado y pertinente de los conocimientos que poseen estudiantes universitarios en relación a la noción matemática antiderivada, entendiendo *conocimiento* como el constructo que involucra comprensión, competencia y disposición (Pino-Fan, Godino & Font, 2010).

A continuación se describen las nociones del EOS que serán de utilidad para el desarrollo de este trabajo.

2.2.1. Sistemas de prácticas: personales e institucionales

Dentro del enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática, la noción de *sistema de prácticas* juega un papel central tanto desde el punto de vista epistemológico como didáctico. Con esta noción se asume y hace operativo el supuesto antropológico sobre las matemáticas en el que se apoya el EOS. Godino y Batanero (1994) definen sistema de prácticas como: *"toda actuación o manifestación (lingüística* *o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas”* (p. 334).

Así, estas prácticas pueden ser realizadas por una persona o compartidas en el seno de una institución, lo cual da lugar a las nociones de *sistemas de prácticas personales* y *sistemas de prácticas institucionales,* las cuales son definidas por Godino y Batanero (1994) como sigue:

> *El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I* (….). *Los sistemas de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación $Pp(C)$”.* (p. 339)

Como señalan Font, Godino y Gallardo (2013), las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los textos matemáticos son leídos y producidos, y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas (p. 104). Los sistemas de prácticas se proponen como respuestas a la cuestión semiótica, ¿qué significa el objeto O?, o a la cuestión ontológica, ¿qué es el objeto matemático O? (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011). En los siguientes apartados se verá cuál es la relación subyacente entre los sistemas de prácticas, los objetos matemáticos y sus significados.

2.2.2. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En el EOS se adopta de entrada un cierto pragmatismo, puesto que se considera a los *objetos matemáticos* como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver un campo de problemas (Godino & Batanero, 1994). Font, Godino y Gallardo (2013) lo señalan de la siguiente manera:

> *Nuestra propuesta ontológica se deriva de la prácticas matemáticas, siendo*

> *éstas el contexto básico en la que los individuos obtienen su experiencia y de las cuales los objetos matemáticos emergen. Consecuentemente, el objeto adquiere un estatus derivado de las prácticas que le preceden*. (p. 104)

En las prácticas matemáticas intervienen objetos *ostensivos* (símbolos, gráficos, iconos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc.), que evocamos al hacer matemáticas y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Ahora bien, como vimos en la sección anterior, los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales; así, si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución entonces los objetos emergentes se considerarán como *objetos institucionales*, mientras que si tales sistemas corresponden a una persona, entonces serán considerados *objetos personales.* Godino y Batanero (1994) los definen de la siguiente manera: *"el objeto institucional O_I es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_I(C)$. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de O_I"* (p. 338). Mientras que: *"el objeto personal O_p es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_p(C)$"* (p. 339).

Los autores señalan que la emergencia del objeto personal es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y del aprendizaje; mientras que la emergencia del objeto institucional es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado es reconocido como tal objeto por la institución, pero incluso después de esta etapa sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociados.

Como se ha señalado, en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (lenguaje, símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.). En este sentido dentro del EOS se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, intervinientes en los sistemas de prácticas (Godino, Batanero & Font, 2007):

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos,...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...).
- *Situaciones/Problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, tareas...).
- *Conceptos/Definiciones* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,...).
- *Proposiciones/Propiedades* (enunciados sobre conceptos,...).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,...).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...).

A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías, etc. Estos seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones/problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. En el apartado 2.2.4 veremos cómo estos objetos primarios están relacionados entre sí formando redes más complejas de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

2.2.3. Significados y tipos de significados de los objetos matemáticos

En el EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función, antiderivada,...), desde una perspectiva pragmática-antropológica. El significado de un objeto matemático se define como el *sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones/problemas en las que dicho objeto interviene*. Así, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo cual da origen a los *significados institucionales* y *significados personales* respectivamente. Godino y Batanero (1994) definen estos significados de la siguiente manera: "*significado de un objeto institucional O_I es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado*" (p. 340).

Esta noción de significado institucional permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica, el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como su evolución temporal y dependencia institucional. En correspondencia con el significado institucional de un objeto, los autores dan la siguiente definición: "*significado de un objeto personal O_P es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_P en un momento dado*" (Ibíd., p. 341).

Hay que resaltar que los significados personales incluyen conocimiento, comprensión y competencia. Además, es obvio que los objetos personales e institucionales no tienen un único significado. Por ejemplo, en una clase de matemáticas (una institución) en donde se lleva a cabo un sistema de prácticas de donde emerge el objeto "antiderivada", el significado que los estudiantes atribuyan a dicho objeto dependerá de los sistemas de prácticas que lleve a cabo esa institución en particular, y que es distinto al significado subyacente a los sistemas de prácticas que lleve a cabo otra institución.

Los sistemas de prácticas se han categorizado teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre la faceta personal, o idiosincrásica de un sujeto, de las prácticas y la faceta institucional (compartida, social) de las mismas. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas, que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas y de las prácticas de referencia. La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de tipologías de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011). La Figura 2.2, describe dichas relaciones.

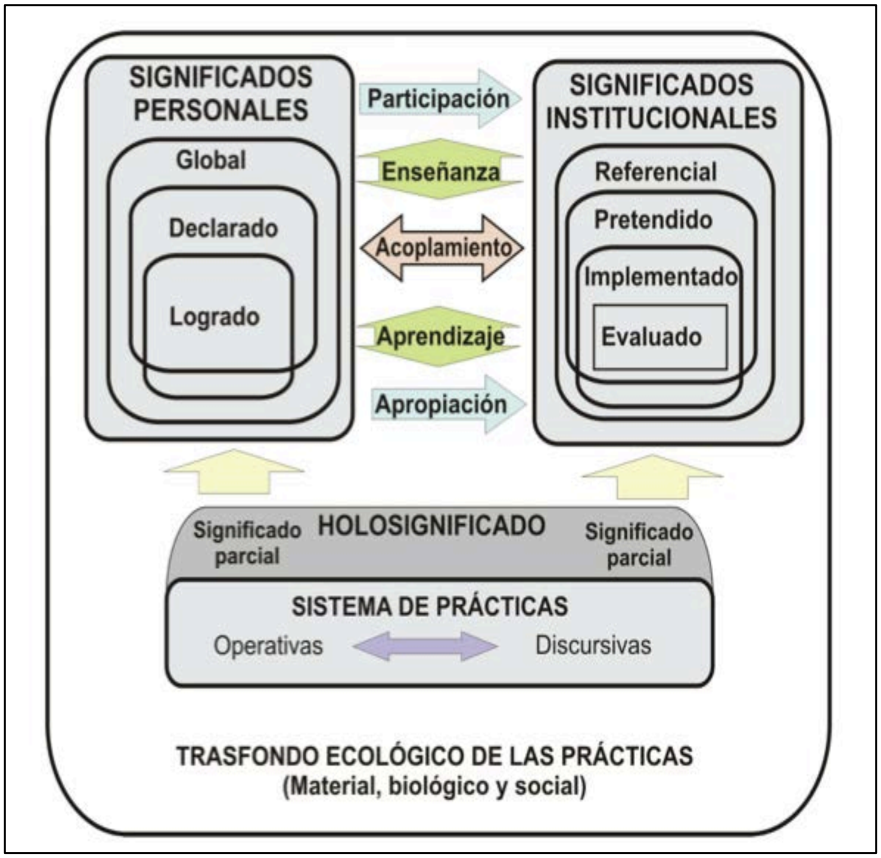


Figura 2.2. Tipología de significados sistémicos

Respecto de los significados personales se proponen los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta

los *significados iniciales* o previos de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*.

Con relación a los significados institucionales se proponen los siguientes tipos:

- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

En general, como señalan Godino y Batanero (1994) los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados. Además, el profesor, como parte de la institución de enseñanza, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). La determinación de dicho significado global (u holístico) requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos (sistemas de prácticas) de uso donde se pone en juego dicho objeto.

El significado global de referencia se define a partir de dos nociones (Pino-Fan, Godino & Font, 2011):

1) significado global, también denominado significado holístico u holo-significado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático.
2) significado de referencia, entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio.

2.2.4. Configuraciones de objetos y procesos

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidácticos, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más "fino" de la actividad matemática, en el EOS se ha introducido la tipología de objetos matemáticos primarios antes comentada (situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos). Estos objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando *redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas*, lo que en el EOS se conoce con el nombre de *configuraciones*. Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Así, para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas), vemos el uso de *lenguajes*, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones/problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en la *configuración* de la Figura 2.3 (Font & Godino, 2006, p. 69).

La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios, responden a la necesidad de poder describir los sistemas de prácticas, a fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

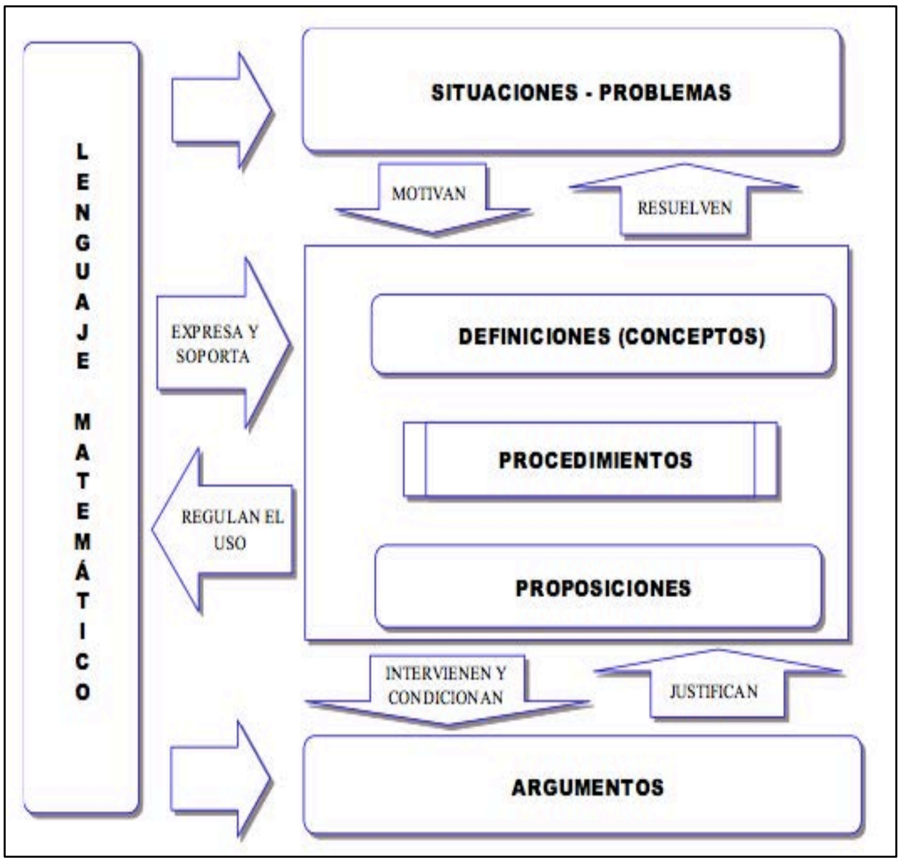


Figura 2.3. Configuración de objetos matemáticos primarios

Estos objetos matemáticos primarios que conforman la configuración, se manifiestan de diversas maneras durante la actividad matemática: el lenguaje con el cual nos referimos a ellos, que a su vez evocan a conceptos o definiciones, los cuales se vuelven operativos mediante procedimientos y propiedades asociadas, que se manifiestan durante la solución de las tareas matemáticas. Además, cada uno de los objetos matemáticos primarios puede ser considerado desde distintas facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- *Personal – institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática.
- *Ostensivo – no ostensivo.* Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, ...).
- *Unitario – sistémico.* En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,...) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.
- *Expresión – contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica (Eco, 1995). La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación

entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- *Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo)*. Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, la función $y = x^2 + 1$) y una clase más general (e.g., la familia de funciones $y = ax^2 + bx + c$). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras, Font, Luque & Ordóñez, 2005).

Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) señalan que tanto estas dualidades como los objetos matemáticos primarios, pueden ser analizados desde una perspectiva proceso–producto, lo que conlleva a considerar los siguientes procesos *cognitivos/ epistémicos*:

- Institucionalización – Personalización.
- Generalización – Particularización.
- Descomposición/Análisis – Composición/Reificación.
- Materialización – Idealización.
- Representación – Significación.

La emergencia de los objetos matemáticos primarios considerados en el modelo (Figura 2.4) llevan asociados, respectivamente, los procesos de problematización, comunicación, definición, algoritmización, enunciación y argumentación. La Figura 2.4 muestra el desglose, y las interacciones, de los objetos matemáticos primarios, las facetas duales desde las que éstos pueden ser vistos, y los procesos que llevan asociados.

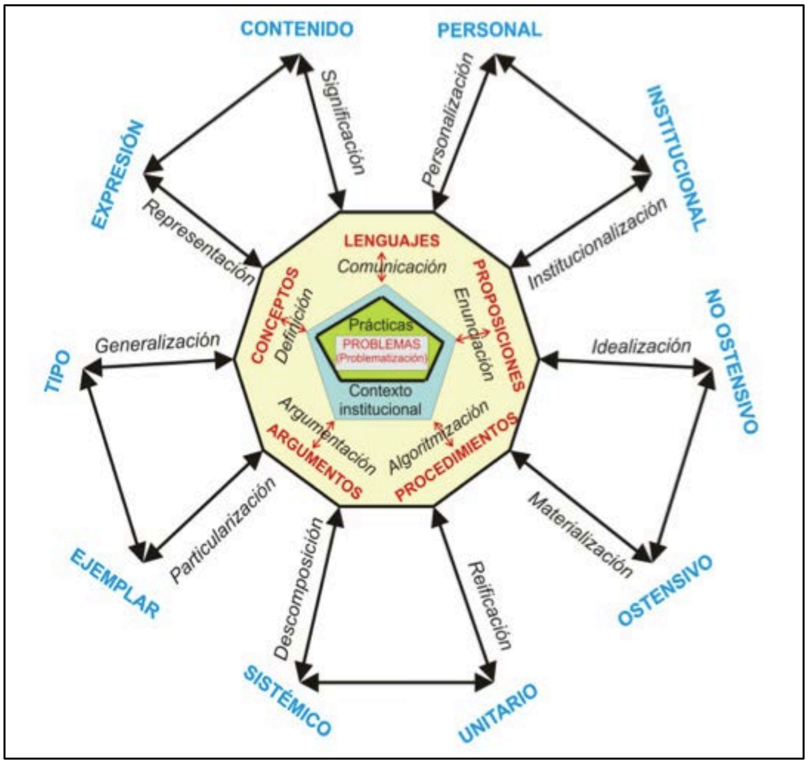


Figura 2.4. Configuración de objetos y procesos matemáticos

Otros procesos como los de resolución de problemas y la modelización pueden ser vistos como *mega procesos* e implican la intervención y activación de los procesos antes mencionados, los cuales se presentan en la Figura 2.4. En esta figura se puede observar el papel central que tienen en el EOS las situaciones/problemas y las prácticas realizadas para resolverlas, así como su dependencia de los contextos institucionales en que tienen lugar.

Estas configuraciones de objetos y procesos suele recibir el nombre *configuración ontosemiótica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2015), y pueden ser de carácter epistémico o cognitivo, según se refiera a objetos matemáticos y procesos institucionales o personales, respectivamente.

2.2.4.1. Relación entre creencia y configuración ontosemiótica cognitiva

Existen diversas interpretaciones acerca de lo que es una creencia, resumimos aquí la posición de Rubio (2012) y Pino-Fan (2014). Una de la más importantes es la que proporciona Peirce (1931-58) (citado en Faerna, 2006), quien señala que una creencia se debe entender como "disposición para la acción". Peirce denomina genéricamente "investigación" o "indagación" al proceso que desencadena las irritaciones experimentadas por el organismo y cuyo fin es establecer un estado de creencia (Yo creo P). Así, vemos que el término "creencia" está asociado a "acciones", las cuales son respuesta a la "situación" que se le presenta al organismo, y a "proposiciones" (Yo creo P) las cuales en muchos casos son propiedades que relacionan "conceptos". Según Peirce, el sujeto ante una determinada "situación/problema", genera un proceso de "investigación" para establecer la creencia "Yo creo P". Ahora bien, si reflexionamos con más detalle sobre el mecanismo de fijación de creencias propuesto por dicho autor, vemos que el paso de la "duda" a la "creencia" exige unos métodos de razonamiento que rigen las operaciones simbólicas que permiten tal paso. Tales métodos se desarrollan por imperativo de la experiencia y se refinan con el uso. Por otra parte, es evidente que todo lo anterior requiere expresarse por medio de un cierto "lenguaje". En otros términos, la práctica realizada por un sujeto, que genera (o está de acuerdo con) una determinada creencia, se puede considerar como el resultado de la activación de algo parecido a lo que en el EOS se ha denominado *configuración cognitiva de objetos y procesos* o *configuración cognitiva.*

Por ejemplo si la creencia del sujeto es que $2 + 2 = 5$, esta creencia se puede entender como una norma personal (cognitiva) que formará parte de la configuración cognitiva que el sujeto aplicará en la realización de prácticas matemáticas en las que sumar, y de manera regular se podrá observar que siempre que el alumno tenga que sumar dos más dos dará como resultado la proposición "es cinco".

Por otra parte, una *configuración ontosemiótica* permite identificar *conflictos semióticos*[4] potenciales (que se pueden detectar a priori), y de igual forma permite resolver los conflictos que se producen durante los procesos de enseñanza.

[4] Conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.

2.2.5. Relación entre concepción y significado personal de un objeto matemático

De acuerdo con Artigue (1990) y Pino-Fan (2014), la noción de concepción es uno de los constructos más usados en didáctica de las matemáticas. Este hecho justifica el que se hayan propuesto diversas caracterizaciones del término concepción, así como también el que se hayan propuesto diferentes criterios para distinguir entre creencia y concepción. Hay investigadores, por ejemplo Gil y Rico (2003) y Martínez (2003), que consideran las creencias como verdades personales incuestionables que son idiosincráticas, un conocimiento que no se cuestiona, que se asume sin ser problematizado, mientras que las concepciones serían un conocimiento más elaborado, más racional y más proposicional, que cuenta con procedimientos para valorar su validez.

En la literatura sobre creencias y concepciones se han propuesto otras distinciones para diferenciar las creencias de las concepciones. Para algunos investigadores, por ejemplo Moreno (2001) y Moreno y Azcárate (2003), la diferencia está en la temática, las concepciones tendrían que ver con las matemáticas y las creencias con la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Otra opción está en diferenciar estos dos constructos en función de su complejidad –por ejemplo, D'Amore (2004) considera la concepción como un conjunto de creencias– o bien, en función de su carácter más básico –por ejemplo, Ponte (1994) las considera como un substrato conceptual que juega un papel importante en pensamiento y acción–, lo que en cierta medida es equivalente. En esta clasificación, las concepciones son consideradas un conjunto de creencias o bien como componentes básicos de muchas creencias diferentes. De acuerdo con esta doble perspectiva, las concepciones, para diversos autores, serían estructuras muy básicas compuestas, además de creencias, por otros componentes. Por ejemplo Thompson (1992), las caracteriza como una estructura mental general, abarcando creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y gustos.

Tal como explica Ramos (2006), el término "concepción" aparece también en la famosa máxima pragmática de Peirce: "*consideremos qué efectos, que puedan tener concebiblemente repercusiones prácticas, concebimos que tiene el objeto de nuestra* *concepción. Entonces, nuestra concepción de esos efectos es el todo de nuestra concepción del objeto*" (citado en Faerna, 1996, p. 110).

En esta máxima el término *concepción* se utiliza para clarificar el *significado*. En efecto, se trata de una máxima para analizar el significado de los objetos en tanto que concebidos (es decir, de conceptos). En segundo lugar, el significado de un concepto, de acuerdo con dicha máxima, queda enlazado a otros significados y a otros conceptos ya que en las prácticas no interviene sólo el objeto que es el centro de nuestro interés. En tercer lugar, la máxima afirma que la concepción del objeto es la concepción de sus efectos prácticos concebibles. Ahora bien, puesto que concebir algo consiste en anticipar hipotéticamente su repercusión sobre la experiencia bajo ciertas circunstancias, esta máxima identifica la concepción con los efectos prácticos (sobre todo los futuros).

De acuerdo con Ramos (2006), cuando en el EOS se considera el significado de los objetos personales como el conjunto de prácticas en las que el objeto en cuestión juega un papel determinante, se está recogiendo esta visión pragmática de la "concepción". Además, la visión holística de los significados propuesta por el EOS, se relaciona, de cierta manera, con las investigaciones que consideran la concepción de un objeto como un sistema de creencias o como un substrato básico de las creencias. En efecto, si tomamos en cuenta la concepción de un objeto personal como equivalente al sistema de prácticas en las que el objeto juega un papel determinante, y dado que el objeto y cada práctica quedan relacionados por una configuración cognitiva que, en cierta medida, se puede considerar equivalente a la configuración asociada a una creencia, resulta que, en cierta forma, una concepción puede considerarse como un sistema de creencias.

2.2.6. Comprensión y conocimiento

En concordancia con Pino-Fan (2014), hay dos maneras básicas de entender la *comprensión:* como proceso mental o como competencia (Font 2001, Godino, Batanero y Font, 2007). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como *proceso mental*. Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas) lo cual implica concebirla también como *conocimiento y aplicación de las normas* que regulan la práctica. Se trata, pues, de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas clarificando el pensamiento que las informa y situándolo en el contexto de las normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales aquéllas ocurren.

Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite entender en el EOS la comprensión también en términos de funciones semióticas. En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O (expresión o contenido); cada elemento de esta función adquiere relaciones que son funtivos[5], en el sentido dado por Hjelmslev (1943). Esta manera de entender la comprensión resulta especialmente útil para hacer *análisis microscópicos* de textos matemáticos como el que se realiza en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005).

Además, el término *conocimiento* se utiliza en el sentido de *constructo epistémico–cognitivo general que incluye comprensión, competencia y disposición* (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209). La disposición, o capacidad, se relaciona con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica. La competencia se relaciona con la activación de la configuración ontosemiótica cognitiva adecuada, e idóneamente acoplada a la configuración ontosemiótica epistémica (o configuración ontosemiótica de referencia), y al contexto en el que se desarrolla la

[5] Un funtivo es una relación que se establece entre dos elementos de una función lingüsitica (Hjelmslev,1943)

práctica. La comprensión tiene que ver con la relaciones que se deben establecer entre todos los elementos que intervienen en la implementación de una configuración epistémica y cognitiva idónea para un contexto determinado.

2.3. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Todas esas investigaciones, presentadas en el Capítulo 1, han ayudado a reafirmar la importancia de analizar la comprensión de la antiderivada, y promover el aprendizaje de los estudiantes sobre dicha noción.

En este sentido, este trabajo de investigación aborda un aspecto fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, concretamente el que tiene que ver con la articulación de los significados institucionales (faceta epistémica) con los significados personales (faceta cognitiva), a su vez relacionados con dos niveles de análisis del conocimiento matemático, nivel de practicas y nivel configuraciones. Esta articulación de las facetas nombradas, en relación con dichos niveles, se hace a través de la *comprensión*, en relación con las *concepciones* matemáticas que hacen emerger *conocimiento.*

Desde el punto de vista epistemológico, se puede plantear la pregunta: ¿Qué es la antiderivada?; o de forma análoga, ¿Cuál es el significado del objeto matemático antiderivada? Desde el punto de vista cognitivo, se puede plantear la pregunta: ¿Qué significado o significados confieren los estudiantes a la antiderivada en un momento curricular determinado?

Es claro que, desde un punto de vista idóneo, la respuesta a la segunda pregunta debe ser lo más cercana posible a la respuesta de la primera. Es decir, lo que busca la Didáctica de la Matemática es tratar de gestionar un "acoplamiento" entre los significados pretendidos por una institución educativa y los significados personales (conocimientos/comprensión de los estudiantes sobre objetos matemáticos concretos); lo cual resulta complicado debido a la diversidad, riqueza y complejidad intrínseca de los significados personales de los objetos matemáticos que pueden emerger en el aula, a propósito de la implementación de una situación/problema (Pino-Fan, Assis & Godino, 2015).

De esta forma, y dada la complejidad del tema, el problema de investigación se puede resumir con las siguientes preguntas:

¿Es posible evaluar la comprensión que tienen estudiantes universitarios acerca de la noción antiderivada? Si es posible, *¿De qué forma?*

Así, para abordar de forma clara y organizada nuestro problema de investigación, en la siguiente sección se presentan las preguntas y objetivos de investigación, por medio de los cuales se pretende realizar una aproximación a las respuestas de las cuestiones anteriores.

2.3.1. Preguntas y objetivos de investigación

Dado que se ha presentado el marco teórico de referencia que enmarcará esta investigación, se está en condiciones de plantear las preguntas y objetivos de investigación, las cuales se responderán en el transcurso de la investigación.

En este trabajo de investigación nos hemos propuesto responder, aunque sea de forma parcial, las siguientes preguntas de investigación (PI):

> *PI-1: ¿Comprenden los estudiantes universitarios la noción de antiderivada?*

> *PI-2: ¿Qué aspectos o criterios, se deben contemplar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la antiderivada, para lograr que los estudiantes comprendan esta noción matemática?*

En relación a PI-1 y PI-2, el objetivo general (OG) de esta investigación es:

> *OG: Evaluar y caracterizar el conocimiento matemático (el cual vincula comprensión, competencia y disposición) de estudiantes universitarios sobre la noción antiderivada.*

Para la consecución del OG y así dar respuesta a la PI-1 y PI-2, es necesario el planteamiento de una serie de objetivos específicos (OE). Estos objetivos se derivarán de preguntas de investigación más concretas (PCI), cuyas respuestas contribuirán a la consecución del objetivo general, y por ende, a responder las preguntas de investigación PI-1 y PI-2. Así, una pregunta que surge de manera natural es la siguiente:

> *PCI-1: ¿Qué sugiere la literatura de investigación en Educación Matemática, sobre los factores involucrados en la comprensión de una noción matemática, y particularmente sobre la antiderivada?*

Para responder a PCI-1, se propone el siguiente objetivo específico:

> *OE-1: Estudiar y caracterizar las investigaciones en torno a la problemática sobre la comprensión de los objetos matemáticos, particularmente aquellas que tratan sobre la antiderivada, con el fin de determinar criterios específicos para la comprensión de dicha noción matemática.*

Como señalamos anteriormente, el objetivo general de esta investigación es evaluar y caracterizar la comprensión de la antiderivada, en este sentido, si lo que queremos es evaluar, inicialmente se debe delimitar qué se entiende por dicha noción matemática. La problemática de la delimitación, la podemos resumir con la siguiente pregunta:

> *PCI-2: ¿Qué es, o cuál es el significado, de la antiderivada?*

Para responder a PCI-2, se proponen los siguientes objetivos específicos:

> *OE-2: Identificar y caracterizar los pares <Prácticas, Configuraciones ontosemióticas epistémicas activadas en dichas prácticas>, mediante un estudio histórico-epistemológico de tipo documental sobre la antiderivada, lo cual permitirá la identificación de los distintos significados*

parciales de dicho objeto matemático.

OE-3: Reconstruir el significado global de referencia para la antiderivada, mediante la consideración de los significados parciales obtenidos con el objetivo anterior.

Una vez determinados los aspectos que deben estar involucrados en la comprensión de la antiderivada, estamos en condiciones de abordar la siguiente pregunta:

PCI-3: ¿Cuál es el conocimiento sobre la antiderivada, que efectivamente tienen los estudiantes universitarios de carreras de matemáticas y afines?

Para responder a PCI-4, se proponen los siguientes objetivos específicos:

OE-4: Diseñar un cuestionario que sea representativo de la complejidad del significado holístico de la antiderivada. Dicho cuestionario debe contemplar los criterios identificados a partir de los objetivos OE-1, OE-2 y OE-3.

OE-5: Implementar el cuestionario diseñado, para evaluar la comprensión de la antiderivada, en muestras intencionales de estudiantes universitarios colombianos.

OE-6: Caracterizar, a partir de los resultados obtenidos con la implementación del cuestionario, el conocimiento sobre la antiderivada de los estudiantes universitarios colombianos.

OE-7: Identificar, a partir de los resultados de los objetivos OE3 y OE6, los aspectos que, a futuro, se deberán tener en cuenta para el diseño de procesos de instrucción sobre la antiderivada.

2.4. METODOLOGÍA

Esta investigación tiene un alto énfasis en las características propias de la metodología cualitativa, puesto que el interés es: e*valuar y caracterizar el conocimiento matemático (el cual vincula comprensión, competencia y disposición) de estudiantes universitarios sobre la noción antiderivada.*

La investigación también tendrá un componente cuantitativo, en cuanto que se construirán instrumentos de evaluación de respuesta escrita que se aplicarán a muestras representativas de estudiantes de carreras de matemáticas y carreras afines. Estos datos se analizarán con métodos estadísticos, los cuales permitirán comparar, contrastar, identificar diferencias y generar niveles de confianza.

Por consiguiente, esta investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson & Onwuegbuzie, 2004), puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación de variables cuantitativas (grado de corrección de los ítems: respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y cualitativas (tipo de configuración cognitiva activadas en las distintas prácticas matemáticas llevadas a cabo).

Las investigaciones por métodos mixtos son un tipo de investigación en la que un investigador, o equipo de investigadores, combina elementos de los enfoques de investigación cuantitativo y cualitativo (i.e., uso de puntos de vista cuantitativos y cualitativos, recolección de datos, análisis, técnicas de inferencia) para los propósitos generales de amplitud y profundidad de la comprensión y corroboración (Johnson, Onwuegbuzie & Turner, 2007). Johnson y Onwuegbuzie (2004) definen esta metodología de investigación como sigue: *"las investigación por métodos mixtos está formalmente definida como la clase de investigaciones donde los investigadores mezclan o combinan técnicas de investigación, métodos, enfoques, conceptos o lenguajes, cuantitativos y cualitativos, dentro de un mismo estudio" (p. 17).*

Dadas las características de este estudio, como se ha mencionado, se utilizará una metodología de tipo mixto, cuyos componentes y fases se detallan a continuación.

2.4.1. Fases y tareas de la investigación.

Para la consecución de cada uno de los objetivos específicos, planteados anteriormente, nos proponemos las siguientes fases de investigación:

Fase 1

Tarea de investigación para OE-1.

- Revisión, clasificación y caracterización de la literatura específica del campo de Didáctica de la Matemática, y concretamente de aquellos estudios orientados a la comprensión de la antiderivada (y, en general, de las nociones fundamentales del cálculo), con la finalidad de determinar antecedentes específicos de la comprensión de dicha noción matemática.

Fase 2

Tarea de investigación para OE-2.

- Estudio para determinar significados parciales de referencia de la derivada mediante el análisis de manuales y referencias bibliográficas específicas de investigación didáctica sobre aspectos históricos – epistemológicos. Con la finalidad de identificar significados parciales de la antiderivada a través de la historia.

Tarea de investigación para OE-3.

- Identificados los significados parciales para la antiderivada, resultado de la tarea de investigación OE-2, se concatenan, lo que conformará el significado global de referencia.

Fase 3

Tareas de investigación para OE-4, OE-5, OE-6 y OE-7

- Estudio mediante la triangulación de expertos, aspectos de la fiabilidad y validez del cuestionario,
- Estudio de la articulación de los significados institucionales (faceta epistémica) con los significados personales (faceta cognitiva), a su vez relacionados con dos niveles de conocimiento matemático (nivel de practicas y nivel configuraciones). Esto se pretende realizar mediante la elaboración e implementación de un cuestionario, recogida de datos y el análisis de los resultados.

2.4.2. Población y muestra

La población de interés de esta investigación, son estudiantes del programa matemáticas y otros programas afines a las matemáticas, tales como licenciados[6] en matemáticas o ingenierías; todas ellas en el contexto Colombiano. Los estudiantes considerados para el estudio, son estudiantes con un conocimiento variado sobre matemáticas, es decir estudiantes que han abordado desde sus diferentes carreras, cursos de matemáticas para su formación profesional, que comprenden parte del análisis matemático (álgebra básica, cálculo diferencial, cálculo integral). La población objetivo se reduce a los estudiantes de varias universidades (Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Santo Tomas, Universidad Central y Universidad Distrital Francisco José de Caldas), en Colombia, los cuales cursaban al momento del estudio, el tercer o cuarto semestre de las carreras de: Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas, Ingeniería Civil e Ingeniería Topográfica.

[6] Los programas de Licenciatura en Colombia están relacionados con la formación de docentes para la enseñanza en la educación básica y media (En Chile es denominado pedagogía en educación media en matemáticas).

2.4.3. Variables

Como hemos mencionado, este estudio se enmarca dentro de una metodología de tipo mixta, debido a que consideramos variables cuantitativas y cualitativas. Como variable cuantitativa consideramos el *grado de corrección* de las respuestas de los estudiantes a las diversas tareas que compondrán el cuestionario. Esta variable nos permitirá discriminar entre respuestas correctas, parcialmente correctas y respuestas incorrectas. La especificación y descripción tanto de la variable grado de corrección como su tipología, se realizará cuando realicemos el diseño del cuestionario, dado que el grado de corrección de las respuestas (correctas, parcialmente correctas e incorrectas) dependen de las especificidades particulares de cada tarea (ver Anexo 3).

La segunda variable que se considerará es de corte cualitativa y la denominaremos *tipo de configuración ontosemiótica cognitiva*, la cual refiere a las configuraciones ontosemióticas cognitivas que los estudiantes movilizarán a propósito de una determinada práctica. Nuevamente se reitera, la imposibilidad a estas alturas de describir con profundidad esta variable, ya que la diversidad de configuraciones cognitivas que activarían los estudiantes en sus soluciones, dependerá exclusivamente del tipo de tarea. Sí se puede decir, que una vez definidas las tareas que compondrán el cuestionario, pueden preverse algunos tipos de configuraciones cognitivas (ver anexo 3), y otros se determinarán a posteriori, tras la implementación del cuestionario.

2.4.4. Instrumento para la recolección de los datos

Para la recolección de los datos hemos considerado, principalmente, el *diseño de un cuestionario* que permita explorar, la articulación de los significados institucionales (faceta epistémica) con los significados personales (faceta cognitiva), a su vez relacionados con dos niveles de análisis del modelo del conocimiento matemático que utilizamos (nivel de prácticas y nivel configuraciones).

Profundizaremos en la descripción de este instrumento para la recolección de datos, cuando se aborde el capítulo 5, destinado al diseño del mismo.

Además, de ser necesario, es posible considerar el uso de entrevistas que permitan profundizar en la exploración de las prácticas matemáticas desarrolladas por ciertos estudiantes. De acuerdo con Cohén y Manion (1990), una entrevista es un diálogo iniciado por el entrevistador con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado por él sobre el contenido especifico. Puede servir para tres fines :

1) Medio principal de recogida de información relativa a los objetivos.
2) Prueba de hipótesis.
3) Conjunción de otros métodos (en este caso, el cuestionario diseñado).

Las entrevistas se pueden clasificar en cuatro tipos:

1) Entrevista estructurada, que sigue un esquema previo y, por tanto, el contenido y los procedimientos se organizan por anticipado.
2) Entrevista no estructurada, en la cual el entrevistador puede modificar la secuencia de las preguntas, explicarlas o añadir información en función de las respuestas o demandas del entrevistado.
3) Entrevista no directiva, en la que el entrevistador toma un rol subordinado.
4) Entrevista dirigida, que consiste en una forma especial de entrevista no directiva con cierto control.

Siguiendo a estos dos autores, se realizarán entrevistas del tipo *no estructurada* o más concretamente *entrevistas semi-estructuradas.* Patton (1980), señala que una *entrevista semi-estructurada* es una forma o modalidad de realizar entrevista en las que se prevén los temas o tipos de cuestiones que deben ser planificados antes de su ejecución y, en el momento del desarrollo, se decide la secuencia y redacción de las preguntas que, muchas veces, van siendo marcadas por la dinámica de la conversación.

2.4.5. Técnicas para el análisis de los datos

La técnica de análisis usada para la variable cualitativa es el análisis semiótico (Godino, 2002), la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los estudiantes universitarios al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y los procesos de significación que intervienen en las prácticas realizadas en la resolución de las tareas (Godino, Batanero & Font, 2007). Este análisis lo plantearemos desde la perspectiva institucional y personal, lo que dará paso a la descripción detallada tanto de las *configuraciones ontosemióticas epistémicas* (análisis a priori de los conocimientos; conocimientos esperados), como de las *configuraciones ontosemióticas cognitivas* (análisis de las respuestas de los estudiantes; conocimientos que efectivamente poseen).

En general, en el transcurso del estudio y para cada fase de investigación, iremos utilizando las distintas herramientas de análisis que nos proporciona el EOS, mismas que se han presentado en el apartado 2.2 de este capítulo.

2.5. CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo hemos presentado el marco y los elementos teóricos que han sido considerados para el desarrollo del trabajo. Estos elementos teóricos y metodológicos, así como la formulación de preguntas, objetivo general, preguntas concretas y objetivos específicos de investigación, son la base para la puesta en marcha u operativización de los elementos teóricos y metodológicos, así mismo, la identificación de fases y asignación de tareas de investigación, aquí presentados, contribuirán a la consecución de cada uno de los objetivos, y así, dar respuestas a cada una de las preguntas de investigación propuestas

Podrá parecer que algunos aspectos relevantes sobre la metodología, como la validez y sus tipos, y la fiabilidad del instrumento (cuestionario), se han dejado de lado. No obstante, la pretensión es considerar estos aspectos, cruciales en la metodología de un trabajo de investigación, en los momentos puntuales del estudio en los que, con los desarrollos, se esté aportando elementos que refieran a los aspectos de validez y fiabilidad.

CAPÍTULO 3

Reconstrucción del Significado Holístico de la Antiderivada

3.1. INTRODUCCIÓN

El estudio histórico-epistemológico de los objetos matemáticos, según Anacona (2003) aporta elementos que refieren a sus distintas concepciones, en los que se analizan las posibles dificultades que se presentaron en la construcción de éstos. Coincidiendo con Doorman y Maannen (2008), en el hecho de que este tipo de estudios es importante puesto que permite dar indicaciones de cómo evoluciona una noción y su desarrollo conceptual. De acuerdo con D'Ambrosio (2013), la comprensión de los objetos matemáticos depende de la comprensión de cómo se originan y de sus motivaciones para el desarrollo.

En este capítulo se realiza un estudio histórico-epistemológico de la antiderivada con el fin de determinar el origen de este objeto matemático. El recuento histórico-documental, muestra la relación existente entre la antiderivada y otros dos objetos matemáticos, fundamentales para el análisis matemático, a los que está vinculada: la derivada y la integral.

La derivada y la integral han sido objeto de estudios históricos-epistemológicos, cada uno de forma independiente. Para la derivada, Mateus (2011), Cantoral (2000), Pino-

Fan, Castro, Godino y Font, (2013) y Pino-Fan (2011); para la integral, Cordero (2002), Cantoral y Farfán (2004), Cabañas-Sánchez (2011), y Crisóstomo (2012). El estudio histórico-epistemológico que se realizó, toma como base la relación entre estos objetos matemáticos, con el fin de determinar cómo emerge la antiderivada, la cual ejerce el rol de mediador entre el cálculo diferencial y el cálculo integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC).

3.2. ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO SOBRE LA ANTIDERIVADA

A continuación se presenta un estudio histórico-epistemológico, de tipo documental, que tiene por objetivo la identificación de las principales problemáticas que fueron abordadas en distintas etapas históricas y que dan origen a la emergencia y evolución del objeto matemático antiderivada. Como referente inicial, consideramos aquellas problemáticas en las que se contempla, explícita o implícitamente, la relación entre la derivada y la integral.

En este sentido, se ha dividido este estudio en tres grandes bloques:

1) La génesis de la antiderivada.
2) La antiderivada en la Época Medieval y el inicio de la Edad Moderna.
3) En busca del rigor y la fundamentación matemática de la antiderivada.

Cada uno de los tres bloques mencionado, refiere a una problemática abordada por matemáticos de la época.

3.2.1. La génesis de la antiderivada

Los matemáticos griegos se destacaron en sus procedimientos geométricos intuitivos, en especial, se dedicaron a encontrar tangentes y cuadraturas de diferentes superficies. Sus trabajos son la base de la génesis de la antiderivada, por esto es importante señalar a uno de ellos en particular, quien trabaja con las dos nociones matemáticas que vinculan a dicho objeto. Fue Arquímedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.), quien en sus trabajos utiliza la noción de recta tangente y sus propiedades, para el trazado de polígonos circunscritos a circunferencias; noción propuesta años antes por Euclides de Alejandría (325 a.C.-265 a.C.). En un *Palimpsesto*[7] encontrado a principios del siglo XX y analizado con técnicas de imagen multiespectral[8] en 1998, se describen evidencias de propuestas hechas por *Arquímedes* para encontrar geométricamente la tangente a una curva dada, la cual lleva su nombre: *la espiral de Arquímedes*.

La descripción hecha por Boyer (1999) señala que los matemáticos griegos, entre ellos Arquímedes, no disponían de una definición muy satisfactoria de la tangente a una curva C en un punto P, considerándola como una recta L que tiene el único punto P común con la curva; de forma que no puede trazarse ninguna otra recta que pase por P que este incluida entre la recta L y la curva C. De acuerdo con Pino-Fan (2011), es posible que Arquímedes tuviera que romper con esta concepción para trazar la tangente de la espiral, adoptando un punto de vista cinemático que le permitió determinar la dirección instantánea del movimiento del punto mediante el cual se genera la curva.

Con respecto a la cuadratura, fue Arquímedes quien a través de la descomposición de polígonos en triángulos, como se muestra en su obra *Quadrature of the parabole* (cuadratura de la parábola), demuestra geométricamente que un segmento de parábola puede agotarse[9] mediante una serie de triángulos decrecientes de área no constante A, tal como se muestra en la Figura 3.1. Este procedimiento lo llevó a demostrar que el área del segmento parabólico es: $A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right)=\frac{4}{3}A$

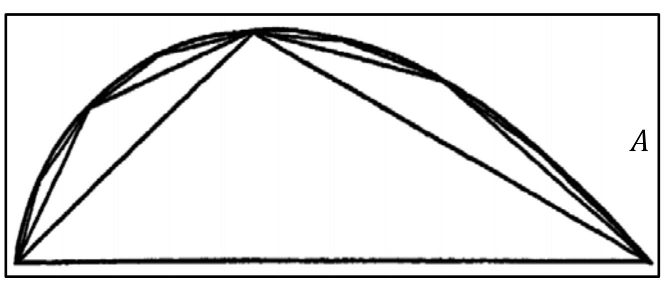


Figura 3.1. Método de exhausción

[7] Texto antiguo escrito sobre otro anterior en papiro, formando un libro o códice.
[8] Técnica fotográfica analizada por sensores espectrales que digitalizan y descomponen la imagen.
[9] Procedimiento geométrico de aproximación en el cual se inscriben triángulos en una curva. Este procedimiento también es conocido como método de exhausción.

Si bien, este método de demostración es geométrico, permite determinar áreas y volúmenes sin hacer uso de límites.

En esta etapa histórica aparecen las tangentes –proto derivadas (Pino-Fan, 2011)– y las cuadraturas (integrales), como dos objetos matemáticos emergentes de prácticas geométricas. No hay evidencia que indique el estudio, en este período, de la relación de dichos objetos. Se tuvo que esperar hasta el medioevo para ver nuevos aportes en cuanto a esta relación.

3.2.2. La antiderivada en la época medieval y el inicio de la edad moderna

Los antecedentes planteados por los griegos, y en especial por Arquímedes, influyeron en los matemáticos de la época medieval y del inicio de la edad moderna, entre ellos Isaac Barrow (1630-1677), quien en su obra *Lectiones Opticae et Geometricae* (Lecciones de Óptica y Geometría), destaca la relación geométrica entre las tangentes y la cuadraturas (Figura 3.2). En una de las proposiciones de la lección X de dicha obra, describe:

> *Sea ZGE una curva cuyo eje es VD y consideremos las ordenadas (VZ, PG y DE) perpendiculares a este eje y continuamente creciendo desde la ordenada inicial VZ; también sea VIF una curva tal que si una línea recta EDF es trazada perpendicular al eje VD, cortando a las curvas en los puntos E, F y VD en D, el rectángulo determinado por DF y una longitud dada R es igual al espacio $VDEZ$; también sea $DE{:}DF = R{:}DT$, y unimos $[T$ y $F]$. Entonces TF cortará a la curva VIF. Tomemos un punto I en la curva VIF (primero del lado F hacia V) y, a través de él, tracemos IG paralelo a VZ y IL paralelo a VD, cortando a las líneas dadas como se muestra en la figura [Figura 3.2]; entonces, $LF{:}LK = DF{:}DT$, es decir $R\times LF = LK\times DE$. Pero de la naturaleza de las líneas DF y LK se tiene $R\times LF$ =área ($PDEG$), por tanto se tiene que $LK\times DE$=área ($PDEG$)<$D\times DE$, por lo tanto se tiene LK<DP<LI. De forma análoga, si el punto I se toma del otro lado de F, se haría la misma construcción de antes y se puede*

fácilmente demostrar que $LK > DP > LI$. A partir de lo anterior, es completamente claro que toda línea TKF permanece en o debajo de la curva VIF. Resultados análogos se obtienen si las ordenadas VZ, PG y DE decrecen en forma continua, la misma conclusión se obtiene mediante un argumento similar. Sólo una particularidad ocurre, a saber, en este caso, al contrario que en el otro, la curva VIF es cóncava respecto al eje VD. (Barrow, 1735, p. 167)

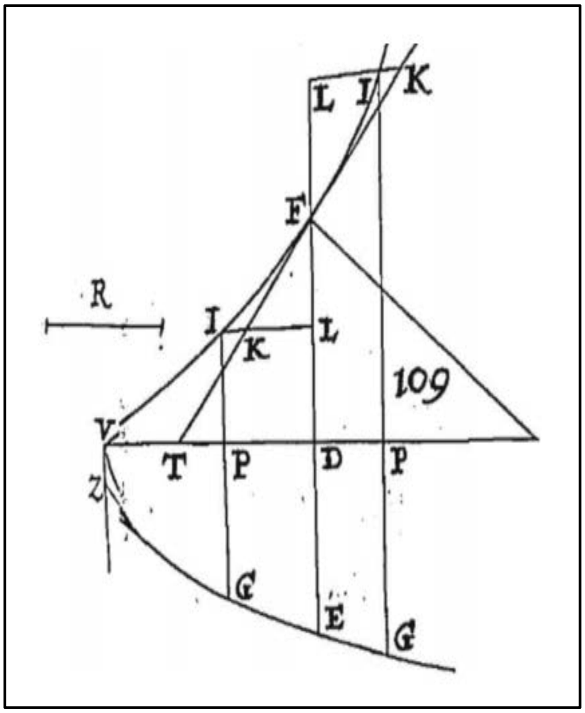


Figura 3.2. Diagrama de Barrow (Barrow, 1735, p. 167).

La proposición anterior establece que para trazar una recta tangente a una curva, ésta última debe estar relacionada con la cuadratura de otra curva. Este resultado geométrico es asumido en la actualidad como la versión preliminar del TFC.

En esta etapa histórica el objeto matemático antiderivada emerge con procedimientos geométricos que relacionan la tangente de una curva con su cuadratura. El argumento de dicha relación (las tangentes con sus cuadraturas) se basa en construcciones geométricas planteadas por los griegos. Barrow, tal como se mostró anteriormente, avanza al poder establecer la relación geométrica entre la tangente de una curva y su cuadratura, relación que hasta esa época no había sido establecida. Este gran avance de Barrow, hizo detonar en los matemáticos de la época, y en algunos de sus discípulos, una serie de aportes no geométricos en relación con la derivada, la integral, y la relación entre ambas nociones. Estos aportes se describen en los apartados 3.3.2. y 3.3.3.

Al final de la época barroca, en el siglo XVII, Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), tomaron las bases teóricas matemáticas heredadas de Kepler, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Roberval, Barrow, entre otros, y cada uno de forma independiente, y de acuerdo con Pino-Fan (2014), *fundaron* lo que hoy denominamos *cálculo infinitesimal*. Según Collete (1985), los predecesores de Newton y Leibniz habían utilizado métodos de análisis para resolver problemas con curvas especificas, algunas de los cuales ya habían sido abordados por los matemáticos griegos. El primero de estos problemas fue: dada la fórmula para la distancia recorrida por un cuerpo como función del tiempo, encontrar la velocidad y aceleración instantánea. E inversamente: dada la fórmula para la aceleración como una función del tiempo, encontrar la velocidad y la distancia recorrida. El segundo problema trataba sobre la búsqueda de la tangente a una curva dada en un punto dado (problema de las tangentes). El tercer problema se trataba sobre la búsqueda analítica de valores máximos y mínimos de una función. Por último, el cuarto problema consistía en encontrar el área y el volumen acotados por curvas y superficies, respectivamente (problema de las cuadraturas). De acuerdo con Ponce (2013), los problemas antes mencionados fueron abordados, generalmente, como casos aislados.

3.2.2.1. Newton: el aporte cinemático

En el libro *The methodus of fluxions and infinite series* (Método de fluxiones y series infinitas), Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva:

> *Llamaré cantidades fluentes, o simplemente fluentes, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto* v, x, y, z*, para distinguirlas de las*

> *otras cantidades que, en las ecuaciones, se consideran como conocidas y determinadas, y que se representan por las primeras letras* a, b, c*, etc. Representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto* $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$*, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones.* (Newton, 1736, p. 20)

Newton introduce inicialmente la noción de fluxiones de forma geométrica, en curvas cinemáticas que describen comportamientos en función del tiempo. Newton describe el movimiento de un punto como la trayectoria de un móvil, en donde la velocidad en cada punto tiene componentes, según las direcciones de los ejes $\dot{x}, \dot{y}$. Para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva dada en un punto, calcula el cociente $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ de direcciones de los ejes. Este cociente de diferenciación, para la época era sencillo de calcular, tanto que en los escritos de Newton, se escriben tablas que le posibilitan resultados directos para este cociente; la finalidad de estas tablas era la minimización de esfuerzos matemáticos en la búsqueda de identificar las propiedades de las curvas conocidas en su tiempo. Al mismo tiempo, Newton plantea el problema inverso, que descrito en términos actuales es: dado el cociente $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, cómo encontrar y en función de x.

Newton abordó el desarrollo del cálculo a partir de la geometría analítica, desarrollando un enfoque geométrico y analítico de lo que hoy conocemos como *derivadas,* las cuales aplica sobre curvas definidas a través de ecuaciones. Newton también buscaba cómo cuadrar distintas curvas, y la relación entre la cuadratura y la teoría de tangentes, convirtiéndose este en un problema fundamental para Newton y expresado en su lenguaje como: *dada una relación entre fluentes, encontrar la correspondiente relación entre sus fluxiones; y de forma recíproca, dada una relación entre fluxiones, hallar la correspondiente relación entre fluentes.*

Newton se percató de que el método de fluxiones podía utilizarse para obtener las velocidades instantáneas de una trayectoria conocida. En sus primeras investigaciones trabaja únicamente con problemas geométricos, como encontrar tangentes, curvaturas y áreas, utilizando como base matemática la geometría analítica de Descartes. No obstante, con el afán de separar su teoría de la de Descartes, probablemente por la limitación cartesiana, comenzó a trabajar únicamente con las ecuaciones y sus variables, sin necesidad de recurrir al sistema cartesiano. Por ejemplo, la aproximación del cálculo del área (Figura 3.3), la describe en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (principios matemáticos de la filosofía natural), tal como se detalla en la siguiente proposición:

> *En una forma curva, son rectas Aa y AE, y acE comprende la curva. En ella (la curva) se inscriben un número infinito de paralelogramos $Ab, Bc, Cd, \ldots$, con bases $AB, BC, CD, \ldots$, iguales, y los lados $Bb, Cc, Dd, \ldots$, mantenidos en paralelo al lado de la recta aA y completando los paralelogramos $aKbl, bLcm$, $cMdn, \ldots$ La amplitud de dichos paralelogramos podría disminuir y su número ser aumentado hasta el infinito; es decir, que las razones últimas están relacionadas entre sí, a su vez, la figura inscrita $AKbLcMdD$, la figura circunscrita $AalbmcndoE$, y la figura curvilínea $AabcdE$, son razones iguales.* (Newton, 1686, p. 25)

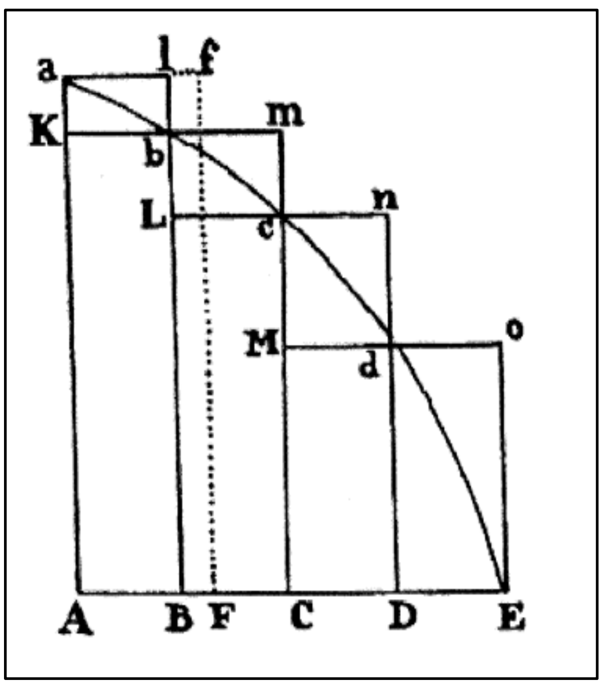


Figura 3.3. Aproximación de área (Newton, 1686, p. 25).

Newton introduce un lenguaje al referirse a fluxiones y fluentes, en la concepción de dos problemas; el primero consistió en encontrar la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito. El segundo problema es planteado como el reciproco del primero. Esta relación, cinemática, entre las fluxiones y las fluentes, evidencian el surgimiento de proto-antiderivada, la cuál para Newton es originalmente una "integral indefinida".

Newton también incluyo en su obra sobre fluxiones tablas de curvas clasificadas, que comprendían regiones limitadas por la abscisa y la ordenada para cada una de las formas curvas. Estas tablas corresponden en la actualidad a reglas de integración para el cálculo de áreas. También incluye el desarrollo de series infinitas que son aprovechadas años más tarde en el cálculo infinitesimal.

3.2.2.2. Leibniz: el aporte de análisis matemático

En el mismo período, como lo indicamos anteriormente y de acuerdo con Collete (1985), Leibniz elabora un enfoque basado en el concepto de sumas y diferencias finitas (caso discreto) y, cuando se aplica a curvas (caso continuo), pueden llegar a ser infinitamente pequeñas. Su finalidad era elaborar un método eficaz mediante el cuál, sin recurrir a diagramas, ciertas propiedades de las curvas puedan ser determinadas por medio de su "*cálculo de las diferencias*" (Pino-Fan, 2014, p. 96). Sus ideas permiten interpretar el paso de lo intuitivo a lo formal, con una construcción simbólica, lo que representa un gran avance al desarrollo del calculo infinitesimal. Leibniz, al igual que Newton, utilizó un nuevo lenguaje notacional, tal como se evidencia en su trabajo con el símbolo $\int l$ (suma de todas las *l*), para generar la sustitución de la notación usada por Cavalieri para la misma suma, "$Omn \cdot l$" (suma de todas las *l*). En sus manuscritos describe que el símbolo "integral" $\int$, corresponde a la forma de la letra "S" alargada, que se deriva del latín "*summa*", lo que indicaba cada ves que realizaba una suma de valores sucesivos. Así mismo, introduce el símbolo "d" para referirse a los diferenciales, este símbolo corresponde a la letra "d", que se deriva del latín "*differentia*", lo que indicaba cada vez que realizaba diferencias de valores sucesivos finitos. Esta notación es probablemente el legado más perdurable en el cálculo, puesto que sigue vigente hasta nuestros días.

Su primera publicación, en 1684, aparece en *Acta Eruditorum*, y la tituló *"Nova methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur"* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales). En esta obra, según Boyer (1959), aparece la definición de *diferencial* o *cantidad diferencial*, así como algunas reglas, sin pruebas, de diferenciales de sumas, productos, cocientes, máximos y mínimos, y puntos de inflexión.

Los *argumentos* propuestos por Leibniz, descritos por Boyer (1959), muestran el manejo de *propiedades* para determinar el área bajo una curva, la vinculación de limites de sumas en funciones continuas con la *integral definida*, llevó a Leibniz a descubrir lo que hoy se conoce como el TFC, como se muestra a continuación:

> *Si* $F(x) = \int_a^x f(x)dx$*, para una función continua f(x), tiene una derivada que es la misma, F´(x)=f(x). En general, es posible encontrar valores para* $x = a$*,* $x = b$*, de un intervalo* $[a, b]$ *donde la función* $F(x)$ *puede ser derivada de* $f(x)$*. La función* $F(x)$*, llamada primitiva de* $f(x)$*, y los valores* $F(b) - F(a)$*, son ocasionados por la definición de* $\int_a^b f(x)dx$*, en el caso que la relación* $\int_a^x f(x)dx = lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ *es el teorema fundamental del cálculo, que define la integral definida*. (Boyer, 1959, p. 11)

La descripción contemporánea de Leibniz descrita por Boyer (1959), relaciona el objeto derivada y la integral definida, a través de una función llamada primitiva o antiderivada.

En términos comparativos, de los trabajos y desarrollos de los fundadores del cálculo, se podría decir que el trabajo de Newton se basa en variaciones respecto al tiempo, pues el origen de sus ideas, tal como lo hemos comentado, es físico. Leibniz, por el contrario, parte estudiando la geometría de los infinitesimales, de ahí que su trabajo se basara en sumas de infinitesimales, sumas que son asumidas como integrales definidas y para las cuáles requiere el uso de funciones primitivas (antiderivadas) para el cálculo respectivo de áreas.

3.2.3. En busca del rigor y la fundamentación matemática de la antiderivada

Posterior a los desarrollos de Newton y Leibniz, el estudio y desarrollos relativos al cálculo infinitesimal continúa con los hermanos Bernoulli. El primero de ellos, Jacques Bernoulli (1654-1705), fue quien usó por primera vez la expresión *integral*, en su obra sobre la isócrona publicada en el *Acta Eruditorum* de 1690. Anteriormente él había sugerido esta expresión a Leibniz, quien a su vez utilizó la expresión *calculus integralis* (cálculo integral) en sustitución de *calculus summatorius* (cálculo sumatorio) para referirse al proceso inverso del *calculus differentialis* (cálculo diferencial).

En 1742 el segundo de los hermanos, Jean Bernoulli (1667-1748), publicó en su *Opera Omnia* el primer texto expositivo de cálculo integral, considerado satisfactorio por la *Royal Society of London*[10]. En dicha obra, considera la integral como la operación inversa de la diferencial con la adición adecuada de una constante, concepción distinta a la de Leibniz quien consideraba la integral como una suma de cantidades infinitamente pequeñas. Aunque es un discípulo de Bernoulli, Leonhard Euler (1707-1783), quien lleva la noción matemática antiderivada a su desarrollo actual.

Euler es quien plantea para algunos problemas cinemáticos y geométricos, la solución sin necesidad de encontrar una función primitiva (antiderivada), a cambio propuso que se puede determinar una función desconocida a partir de una relación que la vincule con la derivada. Este proceso se describe en su tratado "*Institutionum calculi integralis. Volumen primun"* (Fundamentos de cálculo integral. Volumen primero). Euler consideró la incapacidad de los métodos elementales propuestos por Leibniz y Newton para resolver problemas importantes, es decir, estos métodos se restringen a algunas

---

[10] Sociedad científica del Reino Unido para el avance de la ciencias, fundada en 1660 para promover el saber experimental Físico-Matemático

funciones a las que denominó elementales[11]. Para dar solución a dichas funciones, introduce en su tratado un método numérico que permite solucionar cualquier situación, por ejemplo: si se considera a $f(x) = e^{x^2}$, esta función es continua, pero no puede ser expresada como una función elemental, por tal razón no tiene antiderivada, su integral existe y puede ser calculada. Al expresar la función por medio de una serie infinita de Maclaurin [12], se tiene: $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots$, por lo tanto, $\int e^{x^2} dx = \int \left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx$, si se integra termino a termino se tiene:

$$\int \left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx = C + x + \frac{x^3}{3{\cdot}1!} + \frac{x^5}{5{\cdot}2!} + \frac{x^7}{7{\cdot}3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1){\cdot}n!} + \cdots$$

Luego se determina si esta serie converge o diverge, a través de la regla de comparación [13], para este caso se tiene que $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{x^{2n}}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n! \cdot x^{2n+2}}{(n+1)! \cdot x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2}{(n+1)} \right|$. Para cualquier valor que tome *x*, esta *x* se convierte en una constante, entonces se tiene que $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2}{(n+1)} \right| = 0 < 1$, por lo tanto, la serie es convergente.

Este método era utilizado por Newton en series de potencia. Hoy en día esta forma de proceder se conoce como método de integración numérica.

Euler describe la relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral en la siguiente definición:

[11] Una función denominada elemental es una función construida a partir de una cantidad finita de funciones fundamentales y constantes mediante operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división) y/o la composición de funciones (Nikolski, 1985, pg.16).

[12] Caso especial de la serie de Taylor, llamada así en honor a Colin Maclaurin (1698-1746), quien la populariza en su libro "*Treitase of Fluxions*" (Tratado de Fluxiones) en 1742.

[13] Prueba que, a través del limite al infinito, muestra la convergencia o divergencia de una serie de acuerdo con los siguientes criterios: a) si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, la serie es convergente; b) si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, la serie es divergente; y c) si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ no se puede concluir.

Definición 1:

El cálculo integral es el método por el cual se encuentra la relación entre las cantidades de los diferenciales, la operación que se presenta aquí, es llamada integración.

Corolario 1:

Por lo tanto, desde el cálculo diferencial se enseña a investigar la relación de los diferenciales de determinadas magnitudes de las variables; el cálculo integral es el método inverso. (Euler, 1770, p. 2)

En este momento histórico, la noción matemática *antiderivada* alcanza su máximo desarrollo al demostrar que no todas las funciones tienen antiderivadas, tal como lo afirmó Euler, pero sí es posible calcular una integral definida sobre ellas, como se mostro anteriormente.

3.3. TIPOS DE CONFIGURACIONES SOCIO-EPISTÉMICAS EN PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN EL USO DE LA ANTIDERIVADA

El recorrido histórico-documental que realizamos anteriormente, permitió identificar diversas problemáticas que dieron paso a la emergencia de la antiderivada como objeto matemático. Dichas problemáticas las hemos catalogado en cuatro problemas fundamentales:

a) El problema geométrico de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma.
b) El problema de la relación fluxiones–fluentes.
c) El problema sobre la relación de los diferenciales y las sumatorias.
d) El problema de la identificación de funciones elementales.

Cada uno de estos grandes problemas, refieren a sistemas de prácticas distintos que fueron abordados en diversas etapas históricas, y se han analizados con las herramientas que nos proporciona el modelo teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática. Como hemos comentado en el capítulo 2, el EOS ha venido desarrollándose en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero & Font, 2007), y lo hemos utilizado puesto que nos ayuda a determinar los significados parciales del objeto antiderivada de tal forma que cada una de ellas forman una configuración epistémica. Concretamente utilizamos la noción de configuración epistémica (Figura 3.4), la cual nos permite analizar y describir sistemáticamente los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos) que intervienen en las prácticas matemáticas de la antiderivada, así como sus significados de acuerdo con su etapa histórica.

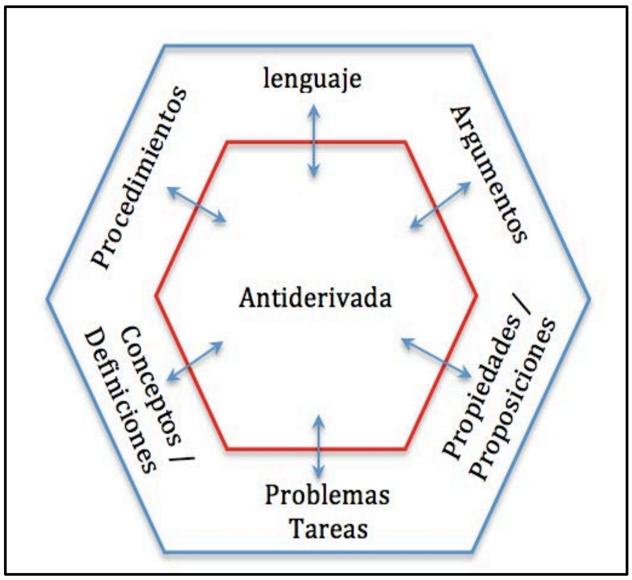


Figura 3.4. Configuración de objetos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas

A continuación se analiza cada uno de los cuatro grandes problemas, comentados anteriormente, mediante el análisis de un ejemplo prototípico donde se identifique la configuración del objeto primario para hacer emerger el objeto en estudio en las etapas históricas.

3.3.1. Configuración epistémica 1 (CE 1): el problema geométrico de las tangentes y cuadraturas

Este problema, descrito en el apartado 3.2.2 y mostrado geométricamente en la Figura 3.2, fue abordado por Barrow en la Época Medieval. En él, se puede observar la forma de construcción de una curva creciente, en la cual se traza una tangente en un punto dado, y por medio de construcciones geométricas se relaciona con la cuadratura de la curva dada. Este problema geométrico es prototípico tanto de las situaciones/problemas como de las prácticas matemáticas que hasta esa época se desarrollaban. Barrow logra unir dos conceptos separados hasta ese momento, *la tangente a una curva* y *la cuadratura* de la misma.

Las construcciones geométricas son un trabajo propio de los griegos y se utilizaron como único *argumento,* y *lenguaje,* hasta el siglo XVII. Todas las *propiedades* y *procedimientos* están apoyadas en construcciones geométricas heredadas de los griegos, los cuales no disponían de métodos generales para el trazado de rectas tangentes a cualquier curva, ni mucho menos relacionarla con la cuadratura de la curva. Tanto en el planteamiento como en las soluciones de las situaciones-problema, se utilizó un *lenguaje* propio de la geometría euclidiana y sus *argumentos* eran puramente sintéticos (Pino-Fan, 2011). En las soluciones propuestas, intervenían *conceptos* tales como curva continua creciente, ordenada, perpendicularidad, puntos, rectángulo, longitud, paralelismo. Así mismo, en la lección X planteada por Barrow, aparecen *propiedades* utilizadas siglos atrás por los griegos, como la perpendicularidad entre curvas, rectas que unen intersecciones opuestas al trazo de tangentes en figuras cónicas, entre otras. Con respecto a los *procedimientos* son los característicos de los matemáticos de la época: geométricos.

El problema resuelto por Barrow, que fue iniciado por los griegos y trabajado por otros matemáticos de la época, forma parte de un sistema de prácticas al cual hemos denominado "*Tangentes-Cuadraturas*", la cual reúne las prácticas matemáticas geométricas que en dicha etapa histórica conferían un significado parcial a la antiderivada. Anteriormente se describieron cada uno de los elementos que conforman esta primera configuración epistémica (CE 1) para el objeto en estudio.

3.3.2. Configuración epistémica 2 (CE 2): el problema de la relación fluxiones-fluentes

Este problema, descrito en el apartado 3.2.2, es parte de un sistema de prácticas, que se ha denominado *Fluxiones-Fluentes*. Para describir los elementos de esta segunda configuración (CE 2), consideramos dos problemas prototípicos propuestos por Newton (1736):

> *I. Dada la longitud del espacio descrito continuamente (es decir, en todo momento); encontrar la velocidad del movimiento en cualquier momento propuesto.*
>
> *II. Dada la velocidad del movimiento continuamente; encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier momento propuesto.* (p. 19)

Estos problemas, y su solución, están basados en la concepción cinemática del movimiento continuo, y maneja dos *conceptos* centrales. El primero es el de *fluente,* entendido como cantidad de movimiento que varía respecto del tiempo. El segundo es el de *fluxión*, que es la velocidad de cambio del movimiento respecto del tiempo. Interpretados de una forma mas práctica, desde lo que indica el l*enguaje* de Newton, se expresarían como, dado el fluente encuentre la fluxión, y el segundo problema dada la fluxión encuentre la fluente, es decir el segundo problema es el reciproco del primero.

El primer problema se aborda desde el ejemplo propuesto por Newton (1736) *"Dada la curva de ecuación* $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$*, calcular las fluxiones"* (p. 21).

Para resolver este problema, Newton sustituye en la ecuación dada x y y por "$x + \dot{x}o$" y "$y + \dot{y}o$" respectivamente, obteniendo la ecuación: $(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2) + (axy + a\dot{x}oy + ay\dot{o}x + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0$

Luego elimina $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, que es igual a cero (de acuerdo con la ecuación dada originalmente), divide después por un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, notado “o” y por último desprecia finalmente los términos en que todavía figura el factor “o”, quedando la ecuación: $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$.

Se puede observar que Newton introduce nuevos *conceptos/definiciones* en sus desarrollos sobre el cálculo infinitesimal y, con ellos, nuevas expresiones de términos y notación (además de *lenguaje* algebraico, geométrico y descriptivo), entre los cuales coincidiendo con Pino-Fan (2014), podemos señalar los siguientes:

a) *“o”* es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño.
b) “Momento de x” que define como un incremento infinitesimal de x, que representa con ox (análogamente define el momento de y, oy).
c) En palabras de Newton: “Llamaré *cantidades fluentes*, o simplemente *fluentes*, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto v, x, y, z, para distinguirlas de las otras cantidades”.
d) El concepto fluxión definido con sus palabras: “representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones”.
e) *“Momento de la fluente”* es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como x en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño *“o”*, es decir, $\dot{x}o$.

El método de las fluxiones de Newton es, a su vez, el *procedimiento* que nos complementa está configuración. Para abordar el segundo problema Newton sugiere: “*Sea la ecuación propuesta por* $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$ *, calcular las fluentes*” (Newton, 1736, p. 26).

Sus escritos muestran la solución a este problema, indicando que se debe proceder de manera contraria a la sustitución del primer problema planteado, en el cual hace la sustitución de x y y por “$x + \dot{x}o$” y “$y + \dot{y}o$” respectivamente. Se procede, indica, separando la ecuación como se muestra a continuación: separar la expresión en dos partes donde se muestren tres términos en cada una, la primera $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y$, y la segunda $-3\dot{y}y^2 \; * \; +a\dot{y}x$, esto para efectuar operaciones sobre cada expresión por separado, la primera parte se divide por $\frac{\dot{x}}{x}$ obteniendo $3x^3 - 2ax^2 + axy$, para la segunda expresión se divide por $\frac{\dot{y}}{y}$ de la que se obtiene $-3y^3 \; * \; +axy$, las nuevas expresiones se dividen por $3 \cdot \; 2 \; \cdot \; 1$, simultáneamente y se obtiene $x^3 - ax^2 + axy$ $-y^3 \; * \; +axy$. Por lo tanto la suma es $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, esta expresión es la relación necesaria de las cantidades x y y.

En este último ejemplo propuesto por Newton, al igual que en el problema propuesto al inicio, vemos como *argumenta* los procedimientos (y en general sus *definiciones* y *proposiciones*) con base en consideraciones dinámicas y de infinitesimales, apoyándose siempre en el álgebra y el análisis geométrico.

Dentro de las *proposiciones/propiedades* dadas por Newton, podemos mencionar las siguientes:

a) Si $ax^{m/n} = y$, entonces el área será $z = \frac{n}{m+n}ax^{m+n/n}$.
b) Supongamos una curva cuya área está dada por la expresión $z = ax^m$, donde m es entero o fraccionario entonces la curva está dada por la expresión $y = max^{m-1}$ (derivación).
c) Dada una $y = max^{m-1}$ entonces el área comprendida bajo la curva es $z = ax^m$ (integración).

En cuanto a los tipos de *situaciones/problemas* de esta configuración, Newton abordó problemas sobre el cálculo de la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito, y viceversa.

El hecho de que sus algoritmos hayan sido aplicado a muchos problemas como por ejemplo, método para encontrar mínimos en funciones o el método para encontrar aproximaciones de raíces de una función lineal, entre otras, hace que esta configuración sea altamente general o intensiva (Pino-Fan, 2014). Así, vemos como en esta configuración las fluxiones o velocidades de los movimientos de las fluentes –que en la actualidad conocemos como la derivada–, y las fluentes o cantidades que varían respecto al tiempo –que en la actualidad conocemos como antiderivación–, son entendidos por Newton como procedimientos recíprocos.

3.3.3. Configuración epistémica 3 (CE 3): el problema de la relación sumatorias - diferenciales

Este problema, descrito en el apartado 3.2.3.2, planteado por Leibniz, forma parte de un sistema de prácticas que se ha denominado "Sumatoria-Diferencial". Este sistema de prácticas lo analizamos a partir de dos problemas prototípicos. El primero está basado en la construcción del cálculo diferencial a partir de las diferencias infinitesimales, mientras que el segundo se basa en la construcción del cálculo sumatorio (cálculo integral) a partir de la suma de diferencias infinitamente pequeñas.

Leibniz abordó *situaciones/problemas* sobre máximos y mínimos, tangentes y puntos de inflexión; esto se evidencia claramente en el título de su obra *"Nova methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur"* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales), en la cual introduce por primera vez la expresión *cálculo diferencial* y proporciona las fórmulas que hasta ahora conocemos para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, todas éstas acompañadas de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión.

Leibniz aborda tres ideas principales en el desarrollo del cálculo infinitesimal, así lo explica Bos (1984), la primera de ellas es la idea filosófica de *characteristica generalis* (una característica general), la segunda se refiere a las sucesiones de diferencias, y la tercera idea principal, fue el uso del *triángulo diferencial* en las transformaciones de cuadraturas.

De acuerdo con Pino-Fan (2014), Leibniz utiliza un *lenguaje* simbólico general mediante el cual se pueden escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de *argumentación* y de razonamiento. Con este fin, logró introducir un nuevo *lenguaje* accesible, que aún se mantiene en nuestros días, el cual facilita la manipulación de los *conceptos*, *procedimientos* y *argumentos*, en el cálculo diferencial. Por ejemplo, Leibniz introduce los símbolos $\int$ y d, los cuales concibe como operadores que representan respectivamente la suma de rectángulos o suma de áreas y las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Así mismo, denota con dx y dy a las diferenciales de las variables x e y respectivamente, es decir, diferencias infinitamente pequeñas de x e y.

Los lenguajes, nuevos términos y notaciones, introducidos por Leibniz, estaban asociados a una serie de nuevos *conceptos/definiciones* o *procedimientos,* primordiales en su cálculo de diferencias. Por ejemplo, dy la utiliza para denotar el concepto de diferencial de una variable y, la cual define como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de y (análogamente define la diferencial de la variable x, dx). Así mismo, como ya señalamos anteriormente, introduce el símbolo $\int$ para representar el proceso de sumar rectángulos o áreas de rectángulos, y d para representar las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Las fórmulas proporcionadas por Leibniz, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, así como la regla de integración por partes, son ejemplos de *proposiciones* y *procedimientos* al mismo tiempo.

Leibniz concibe*,* una suma tal como $\int ydy$ (que más tarde los Bernoulli llamarían *integral*) como la suma de los rectángulos infinitamente pequeños de base dx y altura y; por lo tanto, la cuadratura de una curva es igual a $\int y\, dx$.

Así mismo, afirmaba que el proceso de integración, referido como proceso de sumación es inverso al proceso de diferenciación. Pronto se interesaría en la relación que existe entre dx y dy, y del significado de expresiones tales como $d(uv)$, $d(u/v)$, etc. Así, en un manuscrito fechado el 26 de junio de 1676, y titulado *Methodus Tangentium Inversa* (Método inverso de tangentes), Leibniz afirma que la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando el cociente $\frac{dy}{dx}$, dándose cuenta de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas.

Uno de los resultados geométricos de Leibniz, equivalente a los hallazgos de Barrow, se obtiene cuando relaciona la tangente de una curva con la cuadratura de la misma (Figura 3.5). Él lo describe como sigue:

> *Sea AC una forma curva cuyo eje ordenado es AB, el área de esta curva es llamado l. Sea AD otra forma curva con el mismo eje de ordenado, este segmento de ordenada es BD, llamado "y". Sea esta curva AD tal que el área ABC está dada por todas las eles ($l's$) o escrito de otra forma $\int l$, que es igual al producto de BD y una línea fija igual a ay; luego, tomando $B(B)$ igual a la unidad, tenemos que $l = aw$, donde $w: B(B) = DB: BT$ o $w = y/d$, $l = ay/d$* . (Leibniz, 1920, p. 180)

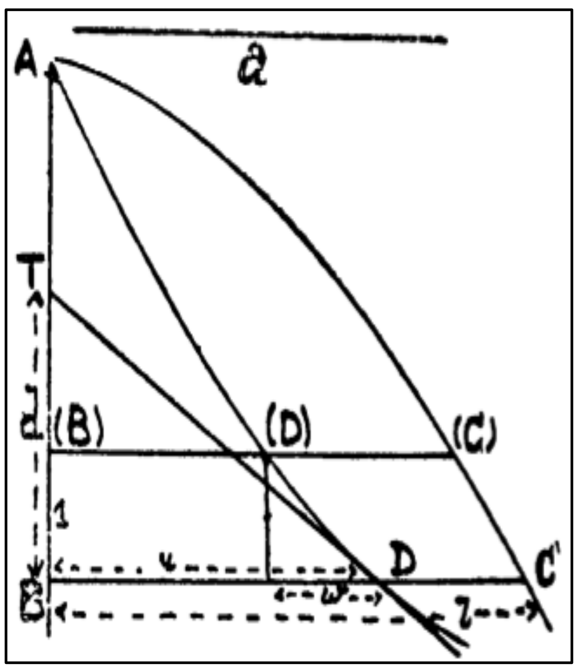


Figura 3.5. Relación entre tangentes y cuadraturas (Leibniz, 1920, p.180)

3.3.4. Configuración epistémica 4 (CE 4): el problema de la identificación de funciones elementales

Este problema se aborda anteriormente en el apartado 3.2.4, y corresponde a uno de los sistemas de prácticas que identificamos y que lleva vinculada la configuración epistémica cuatro (CE 4) que se ha denominado "funciones elementales". A continuación describiremos este sistema de prácticas mediante un problema prototípico propuesto por Euler y construido sobre los problemas y soluciones de Leibniz. Como estudiamos anteriormente, fue Euler quien determinó la adición de una constante de integración al encontrar la función primitiva y que en la actualidad conocemos como la '*constante de integración'* en la solución de una integral indefinida, que representa una familia de funciones de una función que ha sido derivada. De esta forma Euler diferencia la integral particular (integral definida) de la integral completa (integral indefinida), como lo describe a continuación en su texto:

> *Definición 6*
>
> *La integral se dice completa, cuando se representa la función buscada con cada extensión y con una constante arbitraria. Pero cuando esa constante se ha determinado en cierta manera debe ser llamada integral particular.*
>
> *Corolario*
>
> *De ahí que para todo caso se exprese una sola integral completa; pero las integrales son capaces de proporcionar un número infinito de integrales particulares. Así, la integral completa de la diferencial* xdx *es* $\frac{1}{2}xx + C$*, pero las integrales particulares* $\frac{1}{2}xx, \frac{1}{2}xx + 1, \frac{1}{2}xx + 2$ *, etc., son una multitud infinita*. (Euler, 1770, p. 11)

Euler, utiliza un *lenguaje* nuevo en las matemáticas al adicionar una constante arbitraria para expresar la solución de la integral completa, que hoy se conoce como la adición de la constante de integración para significar una función que representa la familia de funciones de una función al ser derivada. Sus *argumentos* para diferenciar la integral completa de la integral particular, llevan a lo que hoy conocemos como la antiderivada.

Los aportes de Euler (1770), determinan con *definiciones* el hecho de que no todas las funciones tengan antiderivada o primitiva, pero sí puedan integrase a través de series trabajadas por Leibniz, como se lo describe a continuación:

Definición 5

> *Si las funciones, que se buscan en el cálculo integral de una relación de los diferenciales, no se pueden mostrar en forma algebraica, entonces estas son llamadas trascendentes, ya que varias de ellas trascienden las competencias de análisis común*. (p. 5)

Euler, con la anterior definición advierte la forma en que debe ser abordada una antiderivada de una función, esta referencia da lugar a las funciones elementales; prosigue su descripción de la forma de cómo abordar las funciones que no son elementales:

> *Ahora, en el primer intento de resolver una integral, las funciones no deben buscarse inicialmente, primero debe tomarse como una función trascendental. A menudo sucede que una integral algebraica puede ser obtenida a través de operaciones hábiles. Si la función que se busca es trascendental, se debe considerar con cuidado si ésta puede ser reducida a funciones más simples, o expresada como una función logarítmica o de forma angular, en cuyo caso la solución algebraica puede ser comparada igualmente. Pero si esto no se logra, conviene investigar la forma más sencilla de las funciones trascendentales, hasta que se pueda reducir el integrando tratado, con el método más adecuado, con el fin que los valores más cercanos a las funciones a trascender se puedan producir.*
>
> *Teorema*
>
> *Todas las funciones que se encuentran a través del cálculo de una integral son indeterminadas, se requiere una determinación por la naturaleza de la cuestión, que suministren la solución*. (Ibíd., p. 10)

En el teorema anterior, Euler indica la forma de abordar funciones a través del cálculo integral, indicando que hacer cuando estas no pueden ser expresadas en forma elemental, esta indicación hace que encontremos la solución por métodos diferentes a los elementales (numéricos) haciendo que la función pueda ser integrable sin tener antiderivada esto ocurre cuando hace referencia en el teorema, al encontrar la solución de ellas (las integrales) “por la naturaleza en cuestión que suministre la solución” haciendo alusión al uso de métodos numéricos para la solución.

Pero la importancia del aporte de Euler esta en que establece diferencias entre las nociones de integral completa (i.e., lo que conocemos hoy en día como integral indefinida o antiderivada) con la noción de integral, haciendo alusión a integrales definidas las cuales se calculan de alguna forma entre ellas en lo que hoy conocemos como el TFC.

3.4. RECONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO EPISTÉMICO GLOBAL DE LA ANTIDERIVADA

La identificación, caracterización y análisis de los sistemas de prácticas que se abordaron y desarrollaron en la diversas etapas históricas, han resultado en una propuesta de reconstrucción del *significado global* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) de la antiderivada. Cada sistema de práctica tiene vinculada una configuración epistémica que esta compuesta de objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos). La herramienta que nos proporciona el EOS, conocida como configuración epistémica nos ha ayudado a identificar y describir estos elementos.

Cada una de estas configuraciones epistémicas lleva asociado un significado parcial para la antiderivada. En nuestro caso concreto son cuatro:

1) *Tangentes-Cuadraturas* (CE 1).
2) *Fluxiones-Fluentes* (CE 2).
3) *Sumatorias-Diferencias* (CE 3).
4) *Funciones Elementales* (CE 4).

El esquema de la Figura 3.6, muestra los *significados parciales* identificados, cada uno de ellos asociado a su respectiva configuración epistémica. Al igual muestra la relación entre algunas configuraciones de acuerdo a su generalización, así como la ubicación de la configuración en una línea de tiempo de acuerdo con su desarrollo.

Si bien cada configuración es única, el esquema de la Figura 3.6, muestra algunas conexiones entre configuraciones, estas conexiones descritas por una línea roja discontinua, que indican que con los elementos de dicha configuración es plausible resolver algunos situaciones-problemas de otra configuración.

En el caso particular de la cuarta configuración (CE 4), es intensiva por sus conexiones a otros sistemas de practicas indistintamente del tiempo histórico en que se encuentren, dado que con los elementos de (CE 4) se pueden resolver algún tipo de problemas de los sistemas de prácticas que llevan asociadas las configuraciones CE 1, CE 2 y CE 3, respectivamente.

Por otra parte, el esquema de la Figura 3.6, muestra la evolución, respecto de los elementos y características, de las configuraciones epistémicas y, por ende, de los diversos significados de la antiderivada a través del tiempo. Lo anterior se indica con conexiones con líneas continuas de color azul. Esta evolución esta dada en el sentido de que una nueva configuración, toma elementos de una configuración establecida, dando paso a la nueva configuración. En nuestro caso son las configuraciones CE 2 y CE 3, las que toman elementos establecidos en la primera configuración (CE 1), para activar nuevos elementos en dichas nuevas configuraciones, indistintamente de que estas configuraciones estén establecidas en la misma etapa histórica. De la misma forma actúa la configuración (CE 4), al tomar elementos de la configuración (CE 3).

La consideración conjunta de situaciones problema asociadas a sus respectivas configuraciones epistémicas y sus relaciones de evolución y/o solución de problemas, ilustrados en el esquema en la Figura 3.6, es lo que conforma la propuesta de reconstrucción del *significado epistémico global u holístico de la antiderivada*.

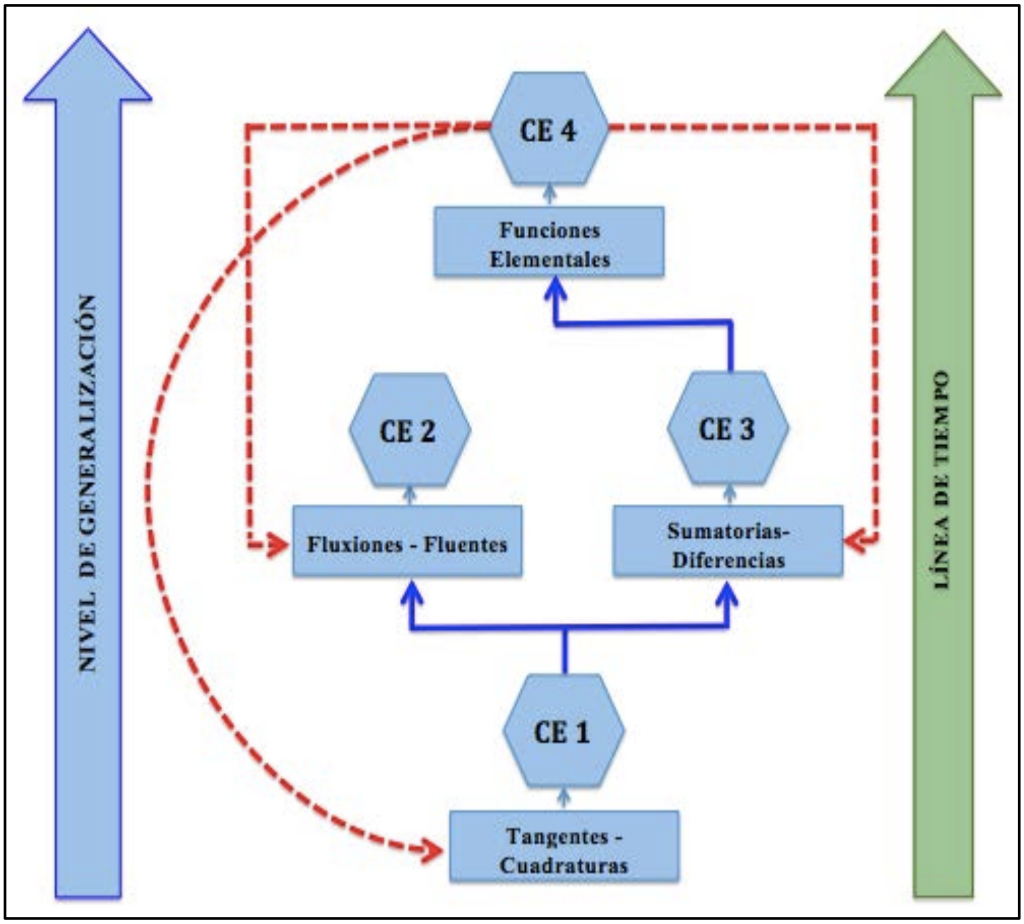


Figura 3.6. Significado Epistémico Global u Holístico de la Antiderivada

3.5. CONSIDERACIONES FINALES

La propuesta de reconstrucción del significado holístico de los objetos matemáticos, en general, resulta especialmente importante porque a través de ellos se identifican significados parciales de un objeto en la historia. El análisis de problemáticas por medio de la herramientas del EOS, en particular de la noción de *configuración epistémica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011), permite describir de forma sistemática situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos, involucrados en las prácticas desarrolladas en diversos momentos históricos y que dieron paso al surgimiento y evolución de la antiderivada.

En este trabajo he propuesto realizar una reconstrucción del significado holístico para la antiderivada. Con tal fin se realizó un recorrido histórico con el cual se identificó problemáticas que dieron luces de la diversidad existente de prácticas desarrolladas a propósito de la solución de situaciones problemas, como lo fueron la relación entre la tangente de una curva y la cuadratura de la misma, así como la relación de las fluxiones con la fluentes y viceversa, entre otros.

El estudio resultó en la identificación de cuatro configuraciones epistémicas que se denominaron:

1) *Tangentes-Cuadraturas* (CE 1).
2) *Fluxiones-Fluentes* (CE 2).
3) *Sumatorias-Diferencias* (CE 3).
4) *Funciones Elementales* (CE 4).

Cada una de estas cuatro configuraciones epistémicas, a su vez, llevan asociado un significado parcial distinto para la antiderivada. De acuerdo con Pino-Fan, Godino y Font (2011), y a los resultados de este estudio, la herramienta *configuración ontosemiótica* en su versión *epistémica* (o configuración epistémica) se prevé como una herramienta teórico-metodológica potente que permite determinar significados parciales para los objetos matemáticos, caracterizando prácticas matemáticas e identificando los objetos matemáticos primarios, y sus significados, involucrados en dichas prácticas.

El tipo de estudio histórico como el desarrollado en este trabajo es especialmente importante, coincidiendo con Doorman y Maannen (2008), por que permite dar indicaciones de cómo evoluciona una noción y su desarrollo conceptual. De esta manera, es indudable que esta propuesta es pieza clave para la comprensión del origen y evolución de la noción matemática antiderivada, puesto que nos proporciona conocimientos que podrían contemplarse en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza y aprendizaje de dicha noción.

CAPÍTULO 4

Construcción de un Instrumento Para Evaluar la Comprensión de la Antiderivada

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el proceso que se siguió para la construcción de un instrumento que permite evaluar aspectos de la *comprensión de la noción matemática antiderivada* (*CNM-Antiderivada*), en estudiantes universitarios de carreras de matemáticas o carreras afines. Inicialmente se describe el diseño y construcción del instrumento, el cuál contiene el análisis de contenido. Así mismo se presentan los resultados obtenidos con la valoración emitida por un grupo de expertos en didáctica del cálculo.

4.2. OBJETIVOS DEL INSTRUMENTO

En este instrumento se ha propuesto realizar una aproximación a la comprensión de la antiderivada. Así, el instrumento que se diseñó, se centra específicamente en la comprensión de la noción antiderivada en estudiantes de matemáticas o carreras afines tales como la licenciatura en matemáticas y programas de ingeniería civil o topográfica.

Concretamente se busca obtener, observar y analizar respuestas de los estudiantes a diferentes tareas propuestas, que ayuden determinar si comprenden el/los significados de la antiderivada, y si a través de diversas representaciones presentadas en las tareas, el estudiante coloca en el escenario "conocimiento matemático" en el sentido de *constructo epistémico–cognitivo general que incluye comprensión, competencia y disposición* (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209) para la noción de antiderivada, el cual se abordo en la sección 2.2.6 del capítulo 2.

4.3. CONSTRUCCIÓN DEL INSTRUMENTO *CNM-Antiderivada*

Como parte del proceso de diseño del instrumento, se creó inicialmente un banco de problemas mediante la recopilación de aquellos que han sido estudiados en las diversas investigaciones que se tienen en el campo de investigación de didáctica del cálculo. A partir del banco de tareas elaborado, se eligió aquellas que cumplieran, básicamente con tres aspectos clave de las facetas epistémica y cognitiva, respectivamente:

1) Uso de diversos significados del objeto antiderivada.
2) Uso de diversidad de representaciones.
3) Las relaciones matemáticas entre la antiderivada y otros objetos matemáticos.

Estos aspectos son congruentes con el modelo de comprensión presentado en la sección 2.2.6 del Capítulo 2.

De igual forma la reconstrucción del significado holístico de la antiderivada; presentado en el Capítulo 3, fue orientador para determinar la construcción de algunos ítems.

En el siguiente apartado se describe de manera más detallada los criterios antes mencionados.

4.3.1. Criterios para la selección de las tareas

El instrumento, que se ha denominado *Cuestionario sobre Comprensión de la Noción*

Antiderivada (*Cuestionario CNM-Antiderivada*), consta de once tareas. El diseño de cada una de las tareas que forman el cuestionario busca que el objeto matemático se use de manera competente en diferentes situaciones. Cada problema o situación que se diseña aborda las diferentes representaciones en que se presenta la antiderivada, en congruencia con el modelo de comprensión propuesto por el Enfoque Onto-Semiótico.

En el proceso de construcción del cuestionario se consideran dos criterios para la selección de las tareas que lo conforman. El primer criterio considera que los problemas o situaciones deben proporcionar información sobre el grado de ajuste del significado personal de los estudiantes respecto del significado global u holístico del objeto antiderivada (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). Para lograrlo, se incluyeron ítems que activan distintos sentidos para el objeto antiderivada (función primitiva, inversa de la derivada, integral indefinida), obtenidos con el estudio realizado en el Capítulo 3.

El segundo criterio fue que los ítems seleccionados respondan a los diferentes tipos de representaciones. Font (1999), señala en un estudio para la derivada, que en el cálculo de la función derivada intervienen tres subprocesos de representación estos:

- Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$.
- El paso de una representación de $f(x)$. a una forma de representación de $f'(x)$
- Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$.

Siguiendo la postura las de investigaciones como la de Font (1999) y Pino-Fan (2014), donde se abordan representaciones de un objeto matemático del cálculo, se deriva, que el ítem que se construya debe responder a los siguientes tipos de representaciones: descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólica), tabular, icónico y sinóptico (mapas conceptuales); tanto para la antiderivada como para su función.

De esta forma, y dada la complejidad que tiene el planteamiento de una tarea que satisfaga o evalúe los dos criterios descritos anteriormente, las tareas se seleccionaron de tal manera que, a lo largo del instrumento *CNM-Antiderivada*, las tareas se complementan para evaluar dichos criterios.

En el siguiente apartado se presenta cada una de las tareas que integran el *cuestionario CNM-Antiderivada,* y el análisis de los aspectos que cada una de ellas evalúa.

4.3.2. Las tareas del cuestionario *CNM-Antiderivada*: análisis del contenido

A continuación se presenta, para cada una de las tareas incluidas en el instrumento *CNM-Antiderivada*, el análisis detallado del contenido que evalúan. Para realizar dicho análisis se presenta para cada tarea, inicialmente, una descripción *general* de los aspectos que evalúan, atendiendo a los dos criterios mencionados en el apartado 4.3.1. Luego se presenta de manera detallada el análisis del contenido de cada una de las tareas en dos niveles. El primer nivel refiere al *contenido ontosemiótico*, el cual se obtiene mediante un análisis epistémico exhaustivo en el cual se hace uso de la herramienta teórica *configuración ontosemiótica* en su versión epistémica que proporciona el Enfoque Onto-Semiótico, y que fue presentado en el Capítulo 2. Concretamente, esta herramienta permite la identificación y caracterización de los objetos matemáticos primarios (*elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos*), sus significados y los procesos involucrados en las prácticas matemáticas institucionales. El segundo nivel refiere al *contenido curricular,* que son los conocimientos que evalúan las tareas y que pueden ser medidos con los conocimientos sobre antiderivada pretendidos en una institución, plasmado a través del plan de estudios, es decir, evaluar aquellos conocimientos contemplados en un currículo de formación de matemáticos, licenciados en matemáticas o ingenieros, considerando que estos son los estudiantes que participan en este estudio, de allí se podría decir que contenido es más *superficial* o *menos profundo* respecto del contenido ontosemiótico-epistémico.

Para la realización del análisis del contenido (*ontosemiótico y curricular*) se propone para cada tarea una solución plausible, solución que se podría decir que refiere a la práctica matemática institucional llevada a cabo para resolver la tarea planteada.

4.3.2.1. Tarea uno: significados de la antiderivada

Esta tarea (Figura 4.1), es una pregunta clásica que se ha realizado en diversas investigaciones (Badillo, 2003; Hähkiöniemi, 2006; Habre & Abboud, 2006; Bingolbali & Monaghan, 2008; Badillo, Azcárate & Font, 2011; Pino-Fan, Godino & Font, 2013), para explorar los significados de los estudiantes sobre una noción matemática especifica.

Tarea 1. ¿Qué significado o significados tiene para ti la antiderivada?

Figura 4.1. Tarea 1 del cuestionario CNM-Antiderivada

4.3.2.1.1. Solución plausible de la tarea uno

Al tratarse de una pregunta de carácter global, se espera que los estudiantes proporcionen alguno de los elementos de la lista de los posibles significados de la antiderivada, tales como:

- Es un procedimiento para obtener una familia de funciones, a partir de una función que ha sido derivada.
- Es proceso inverso de la derivación
- Es la primitiva de la función $f(x)$.
- Es la integral indefinida de una función $f(x)$.

4.3.2.1.2. Análisis ontosemiótico

Debido a la generalidad de la tarea (tanto la cuestión como el tipo de solución esperada), no se realiza para ésta el desglose operativo de las configuraciones de objetos y procesos del análisis epistémico. Basta con señalar que tanto los *elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones y argumentos* subyacentes a las posibles soluciones de la tarea son de carácter verbal (Pino-Fan, Godino & Font, 2013). Las descripciones verbales de los estudiantes no requieren conexiones entre los distintos significados de la antiderivada, bastándoles con recordar los usos y significados que han dado a dicho objeto a lo largo de su formación académica, para proporcionar su respuesta.

4.3.2.1.3. Contenido curricular que se evalúa

La tarea 1, evalúa las diversas acepciones de la antiderivada, personales e institucionales.

4.3.2.1.4. Principales dificultades para su resolución

Es posible que la mayoría de los estudiantes respondan de forma errada "proceso inverso de la derivada", sin recordar (o tener conocimiento) de que la finalidad del proceso conlleva a encontrar una familia de funciones a partir de una función que se ha derivado.

4.3.2.2. Tarea dos: modelo sinóptico estructurado

Esta tarea (Figura 4.2), se diseñó con el fin de determinar si los estudiantes organizan redes alrededor del objeto bajo estudio, en nuestro caso la antiderivada. Esta organización de redes jerárquica de conceptos o mapas conceptuales, son instrumentos de organización y de representación de conocimientos. Estos mapas conceptuales pueden ser interpretados como modelos sinópticos de descripción estructurada de un sistema (Bencomo, Godino & Wilhelmi, 2004), que suelen ser representados mediante grafos, en cuyos vértices se colocan objetos. De esta manera, para la búsqueda de una respuesta a una cuestión, se organiza y representa el conocimiento mediante redes de objetos.

Tarea 2. Piensa en las siguientes expresiones: **integral indefinida, $\frac{dy}{dx}$, velocidad, derivada, integral, área entre dos curvas, $f'(x)$, antiderivada, $\int_a^b f(x)dx$, integral definida, teorema fundamental del cálculo**. Elabora un mapa conceptual utilizando las expresiones anteriores y otras que tengas en la mente, y explica posibles relaciones entre ellas.

Figura 4.2. Tarea 2 del cuestionario CNM-Antiderivada

4.3.2.2.1. Solución plausible de la tarea dos

La Figura 4.3, corresponde a una de muchas organizaciones de algunos términos del cálculo infinitesimal que pueden dar los estudiantes.

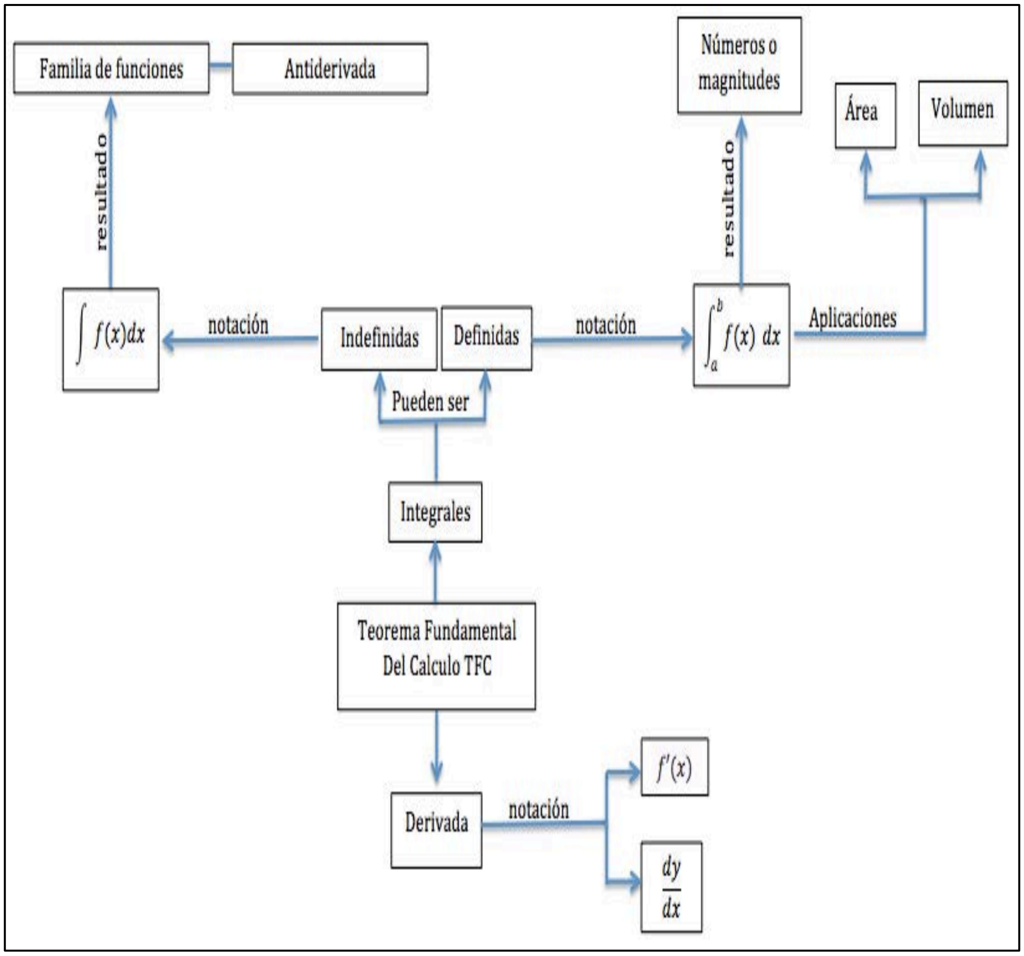


Figura 4.3. Mapa conceptual de términos del cálculo infinitesimal

4.3.2.2.2. Análisis ontosemiótico

Debido a la diversidad de organizaciones que se pueden presentar, no se realiza para ésta el desglose operativo de las configuraciones de objetos y procesos del análisis epistémico. Sin embargo, la construcción que presenten los estudiantes permitirá identificar conflictos epistémicos esenciales, tales como el aceptar o no la correspondencia entre las redes propuestas. Además, el análisis de los mapas conceptuales desde el punto de vista del EOS, permite que se identifiquen las facetas duales de los elementos primarios que se ponen de manifiesto en este tipo de tareas, por ejemplo:

- La dualidad *contenido-expresión* puede identificarse en el uso de los conceptos y/o proposiciones en los diferentes registros.
- La dualidad *personal-institucional*, en el proceso intencional de hacer evolucionar el significado personal hacia el institucional pretendido.
- La dualidad *ejemplar-tipo*, en los argumentos de los estudiantes mediante ejemplos al describirlos como representantes de una clase de objetos más general (formal).
- La dualidad *no ostensivo-ostensivo*, determinado por la necesidad del registro escrito para facilitar el contraste de las diversas producciones de los estudiantes.
- La dualidad *sistémico-elemental*, en el papel articulador que cumple la noción de antiderivada en todo el discurso, resaltando las conexiones matemáticas entre las entidades primarias involucradas.

4.3.2.2.3. Contenido curricular que se evalúa

La tarea 2, evalúa la organización de conceptos del cálculo infinitesimal y la determinación de relaciones entre las nociones dadas y otras nociones propuestas por el estudiante, en particular evalúa el reconocimiento del objeto de estudio como parte de un elemento de cálculo infinitesimal.

4.3.2.2.4. Principales dificultades para su resolución

Es posible que algunos estudiantes no agreguen nuevos términos a los dados en la tarea o que no se expliquen las conexiones entre los términos.

4.3.2.3. Tarea tres: cálculo de la función primitiva

Esta tarea (Figura 4.4), es tomada de Delos Santos (2006) y Pino-Fan (2014), explora el conocimiento matemático en relación con otros objetos matemáticos que forman parte del currículo, como lo son: la integral indefinida de una función o el teorema fundamental del cálculo. Las representaciones que el estudiante debe manejar para la resolución de la tarea son: simbólica, gráfica y tabular

Tarea 3. Para una función dada $y = f(x)$, continua en $\mathbb{R}$, se cumplen los valores de la siguiente la tabla

x	$f'(x)$
0	0
1	2
1,5	3
2	4
2,5	5

a) Encuentra una expresión para $f(x)$.

b) ¿Puedes encontrar una segunda expresión, distinta a la anterior, para $f(x)$? ¿Cuál seria? Justifica la respuesta.

Figura 4.4. Tarea 3 del cuestionario CNM-Antiderivada.

4.3.2.3.1. Solución plausible de la tarea tres

Existen varias soluciones para cada uno de los apartados de esta tarea, una posible solución de estas, se analiza a continuación:

a) Basándonos en los datos proporcionados en la tabla, es posible encontrar un patrón de la siguiente forma:

x	$f'(x)$
0	2(0)=0
1	2(1)=2
1,5	2(1,5)=3
2	2(2)=4
2,5	2(2,5)=5
.	.
.	.
.	.
x	$2(x) = 2x$

Por tanto, dado que $f'(x) = 2x$, y sabiendo que para una función $f(x) = x^n$ la derivada está dada por $f'(x) = nx^{n-1}$, entonces una expresión para $f(x)$ sería:

$f(x) = x^2$.

b) Sí se puede; para encontrar otra expresión para $f(x)$ distinta a $f(x) = x^2$. Si $f'(x) = 2x$ entonces $f(x) = \int 2xdx = x^2 + C$. De esta forma, $f(x)$ puede ser cualquier función de la familia de funciones $f(x) = x^2 + C$ donde, $C \in \mathbb{R}$.

4.3.2.3.2. Análisis ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

Elementos Lingüísticos

- El enunciado de la tarea, denota una función indeterminada, en este caso, una función que cumple ciertas condiciones reguladas por una tabla de valores.
- La tabla de valores. Corresponde a la representación tabular de una función desconocida de la cual se le presentan cinco imágenes para los valores de la variable x dados en la tabla, lo que proporciona parejas ordenadas del tipo $(x, f'(x))$. Dichas parejas ordenadas pueden ser llevadas al plano cartesiano para dar una representación gráfica a las parejas dadas.
- Las preguntas derivadas del enunciado, refieren a un procedimiento para hallar una función, que al ser derivada cumpla con las condiciones y los valores de la tabla.

Conceptos/Definiciones

- Función de variable real desconocida. Función $f(x)$ que se determinará a partir de su función derivada definida parcialmente por cinco puntos.
- Pares ordenados. Originales e imágenes de la función derivada dada.
- Función derivada de una variable real. Definida parcialmente por cinco puntos cuyas coordenadas se expresan de manera tabular.

Proposiciones/Propiedades

- Reglas de derivación. Concretamente "la derivada de una función constante es igual a cero", "la derivada de una suma es la suma de las derivadas" la cual permite determinar que la función buscada es cualquiera de la familia $f(x) = x^2 + C$, donde, $C \in \mathbb{R}$.

Procedimientos

- Cálculo de la antiderivada de $y = 2x$, esto se realiza ya sea mediante las reglas de derivación (derivada de la función potencial), o mediante las reglas de integración. Este procedimiento origina la respuesta de ambos apartados de la tarea.
- Ensayo y error. Probando posibles reglas de correspondencia entre los valores de x y los de $f'(x)$, a partir de los valores dados en la tabla. Este procedimiento es de carácter numérico-técnico, centrado en la búsqueda de un patrón que permita establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada.

Argumentos

- La expresión algebraica de la función derivada es $y = 2x$ porque al ir evaluando los puntos dados tubularmente, $\left(x, f'(x)\right)$; se deduce de manera empírica que es la función derivada.
- La función buscada es $y = x^2$ porque la derivada de esta función es $y' = 2x$. Establece la validez para la función $f(x)$ teniendo en cuenta la regla para derivar la función potencial.

4.3.2.3.3. Contenido curricular

La tarea 3 evalúa los siguientes contenidos:

- Funciones cuadráticas. Familia de funciones.
- Función derivada (representación tabular, gráfica y simbólica; en su acepción

de pendiente de la recta tangente).

- Teoremas para derivar funciones (Reglas de derivación: para la función constante y la suma de funciones).
- Antiderivada (determinación de una familia de funciones a partir de una función que ha sido derivada).
- Teorema fundamental del cálculo (relación entre la derivada de una función y su antiderivada).

4.3.2.3.4. Principales dificultades para su resolución

En esta tarea se prevé que el estudiante no identifique la familia de funciones cuando se le solicita encontrar una expresión distinta a la encontrada, proporcionando funciones equivalentes, tal como se reporta en (Pino-Fan, Godino & Font, 2013).

4.3.2.4. Tarea cuatro: exploración gráfica de la antiderivada

Esta tarea (Figura 4.5), se diseñó con el fin de explorar el uso que los estudiantes hacen de las representaciones gráficas. Esta tarea, corresponde al tratamiento [14] de una representación (Duval, 2006a; 2006b). Esta transformación de la representación se hace en el mismo registro donde ha sido formada. En general este tipo de tarea constituye una forma parcial de comprensión de la noción bajo estudio.

[14] El tratamiento es una transformación interna de un registro.

Tarea 4. La Figura 7a muestra la gráfica de una función $f(x)$ continua en $\mathbb{R}$. Indica cuál o cuáles de las gráficas de las funciones que se te presentan en la Figura 7b, corresponde o corresponden a la antiderivada de la función representada gráficamente en la Figura 7a. Justifica tu respuesta.

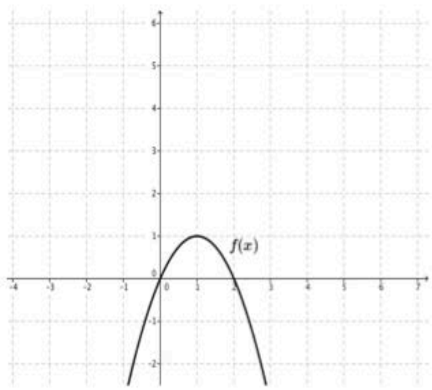


Figura 7a

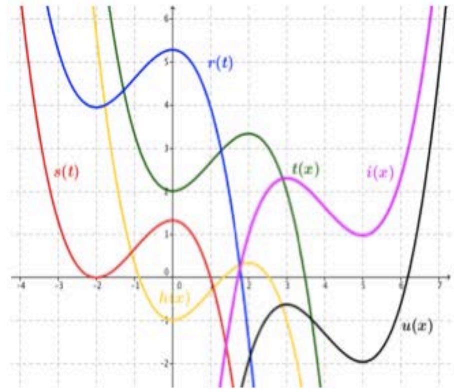


Figura 7b

Figura 4.5. Tarea 4 del cuestionario CNM-Antiderivada.

4.3.2.4.1. Solución plausible de la tarea cuatro

Para dar solución a la tarea propuesta, se analiza la gráfica de la función $f(x)$, dada en la Figura 7a de la tarea, mediante los criterios de construcciones de gráficas (concavidad, funciones crecientes y decrecientes, puntos críticos, ...).

Inicialmente observamos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, y tiene puntos críticos en $x = 0$ y $x = 2$, por lo que las gráficas de la antiderivada deben tener tangentes horizontales en dichos puntos del dominio. Además, se puede observar en la Figura 7a (de la tarea), que la gráfica de $f(x)$ presenta un máximo en el punto del dominio $x = 1$, por lo que la gráfica o gráficas de la antiderivada deben presentar un cambio de concavidad (punto de inflexión) en dicho punto. Como la gráfica de $f(x)$ es creciente negativa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente positiva en el intervalo $(0,1)$, y decreciente positiva en el intervalo $(1,2)$ y decreciente negativa en el intervalo $(2, \infty)$, entonces el cambio de concavidad en la gráfica o gráficas de la antiderivada de $f(x)$ es de cóncava hacia arriba en intervalo $(-\infty, 1)$ a cóncava hacia abajo en el intervalo $(1, \infty)$.

Por lo tanto, las gráficas que forman parte de la familia de funciones que constituyen la antiderivada de $f(x)$ son $t(x)$ y $h(x)$, presentadas en la Figura 4.6.

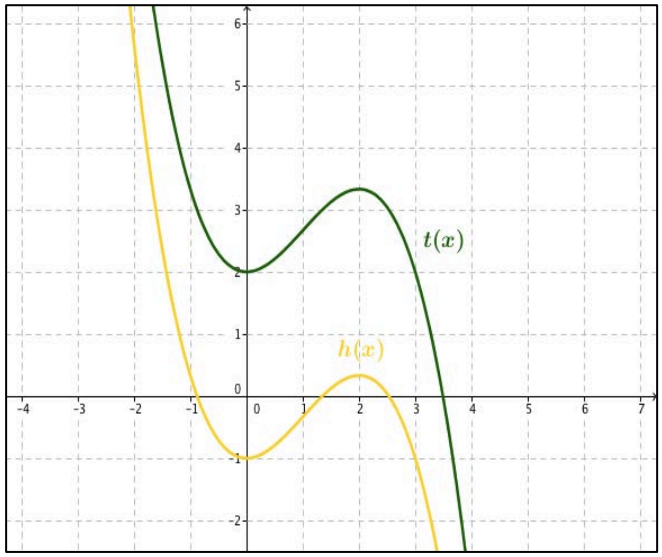


Figura 4.6. Funciones solución de tarea 4

4.3.2.4.2. Análisis ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea.

<u>*Elementos Lingüísticos*</u>

- La expresión $f(x)$ y su gráfica (Figura 7a). Denota una función indeterminada, en este caso, una función que cumple ciertas condiciones reguladas por la gráfica dada.
- Las expresiones y sus respectivas gráficas (Figura 7b), $r(x), s(x), t(x), h(x), i(x), u(x)$ y $v(x)$. Denotan funciones indeterminadas las cuales algunas de ellas son antiderivada de la función dada $f(x)$.
- La expresión, “cuáles de las gráficas de las funciones que se te presentan en la Figura 7b, de la tarea, corresponde o corresponden”. Refiere a la existencia de relaciones entre la gráfica de la Figura 7a y algunas de las gráficas de la

Figura 7b, por medio de la antiderivada.

- La expresión "$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$", la cual refiere a una proposición que garantiza la existencia de la antiderivada derivable.
- Otras expresiones verbales como: función, valor que toma una variable, dominio, tangente; que refieren a conceptos matemáticos para el uso de la construcción de gráficas.
- Así mismo, el discurso (verbal o escrito) de argumentos matemáticos que se utiliza para el análisis de la construcción matemática de la antiderivada de la gráfica de $f(x)$ propuesta en la tarea.

Conceptos/Definiciones

- Función de una variable real. Definida por la gráfica de la función $f(x)$ y las gráficas de las funciones antiderivada planteadas en las Figuras 7a y 7b respectivamente.
- Funciones cuadrática, dada por la función particular propuesta, $f(x)$.
- Función cúbica, $r(x), s(x), t(x), h(x), i(x), u(x)$ y $v(x)$, que representan funciones particulares cúbicas que al ser derivadas se obtienen funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; donde , $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.
- Concavidad. Análisis que se hace a la función propuesta $f(x)$, en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$, donde visualmente la grafica nota el cambio de concavidad.
- Función creciente y decreciente. Análisis que se hace a la función propuesta $f(x)$, en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$.
- Puntos de inflexión. Referido al cambio de concavidad a las funciones propuestas $r(x), s(x), t(x), h(x), i(x), u(x)$ y $v(x)$. Cuando hay cambio de la concavidad de la grafica y se cumple las condiciones de funciones creciente – creciente; decreciente – decreciente
- Puntos críticos. Referido a las funciones propuestas $r(x), s(x), t(x), h(x), i(x), u(x)$ y $v(x)$, en donde visualmente se observan los puntos de inflexión.

- Máximo absoluto, referido a la gráfica de la función propuesta de $f(x)$, la cual presenta un máximo (visualmente) en el punto del dominio $x = 1$.
- Punto máximo. Dado por el punto más alto en la gráfica, caso particular para analizar la función $f(x)$.

Propiedades/Proposiciones

- La función propuesta en la tarea tiene puntos críticos, razón por la cual la gráfica de la antiderivada tiene rectas tangentes horizontales.
- Regla de derivación, concretamente "la derivada de la función cúbica es una función cuadrática", lo cual ayuda a determinar las funciones que se buscan en la tarea.
- En una función de una sola variable real, cuando en la gráfica existe un punto de inflexión, entonces la funcion no es diferenciable, o bien, su derivada es 0 en dicho punto del dominio. Caso para las funciones $r(x), s(x), t(x), h(x), i(x), u(x)$ y $v(x)$. Dado que en la función propuesta existe un punto máximo, entonces la gráfica de la función antiderivada debe tener un cambio de concavidad en dicho punto del dominio.
- Como la gráfica de $f(x)$ es creciente negativa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente positiva en el intervalo $(0,1)$, y decreciente positiva en el intervalo $(1,2)$ y decreciente negativa en el intervalo $(2, \infty)$, entonces el cambio de concavidad en la gráfica o gráficas de la antiderivada de $f(x)$ es de cóncava hacia arriba en intervalo $(-\infty, 1)$ a cóncava hacia abajo en el intervalo $(1, \infty)$.

Procedimientos

- Construcción gráfica. Construcción de la gráfica en el plano cartesiano a partir de los conceptos/ definiciones y de las propiedades/proposiciones matemáticos.
- Ensayo y error. Probando posibles reglas de correspondencia entre la gráfica de $f(x)$ de la Figura 7a, y las gráficas de las funciones

$r(x), s(x), t(x), h(x), i(x), u(x)$ y $v(x)$, de la Figura 7b.

<u>*Argumentos*</u>

- Grafico-deductivo, referido por la observación de la gráfica propuesta y la deducción de las propiedades y conceptos antes mencionados.

4.3.2.4.3. Contenido curricular que se evalúa

La tarea 4 evalúa los siguientes contenidos:

- Construcción de gráficas a partir de criterios de derivación.
- Familia de funciones (representación gráfica, de miembros de una familia de funciones).
- Teoremas para derivar funciones (reglas de derivación: para la función potencia).
- Antiderivada. Con el significado institucional de procedimiento para obtener una familia de funciones a partir de una función que ha sido derivada.
- Teorema fundamental del cálculo (relación entre la derivada de una función y su antiderivada).

4.3.2.4.4. Principales dificultades para su resolución

En esta tarea se prevé que el estudiante no identifique las funciones que corresponden a las antiderivadas, dado que curricularmente la construcción y análisis de gráficas es un proceso que se enseña utilizando criterios de derivación y existe la posibilidad de que el estudiante no los utilice para determinar las gráficas que se solicitan.

4.3.2.5. Tarea cinco: diferencia integral-antiderivada

Esta tarea (Figura 4.7) se diseñó de acuerdo con lo encontrado en el estudio histórico-epistemológico (ver Capítulo 3). En él se encuentran diferencias conceptuales entre los objetos matemáticos *integral* y *antiderivada*. De esta forma la tarea propuesta ayuda a explorar en los estudiantes la diferencia conceptual sobre estas dos nociones.

Tarea 5. ¿Existe alguna diferencia entre las nociones de integral y antiderivada? Justifica tu respuesta.

Figura 4.7. Tarea 5 del cuestionario CNM-Antiderivada

4.3.2.5.1. Solución plausible de la tarea cinco

Una respuesta a la pregunta de la tarea propuesta es: sí existe, la noción de integral es generalización de una suma de infinitos sumandos infinitamente pequeños. Generalmente si la integral es definida, está asociada a los conceptos de área o volúmenes de sólidos, cuyos resultados particulares son números o cantidades de magnitud, mientras que la antiderivada es un procedimiento para obtener una familia de funciones a partir de una función que ha sido derivada, y en la que sus miembros difieren por una constante.

4.3.2.5.2. Análisis ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea.

Elementos lingüísticos

- La sentencia de la pregunta "existe diferencia…" implica análisis que conlleve a la determinación de "idea básica", en este caso, de dos objetos matemáticos del cálculo infinitesimal, integral y antiderivada, objetos matemáticos que comparten la misma simbología.

Conceptos/Definiciones

- Integral. Suma de sumandos infinitamente pequeños.
- Integral definida. Dar limites al proceso de sumación en una función definida
- Antiderivada. Procedimiento para obtener una familia de funciones, a partir de una función que ha sido derivada.

Propiedades/Proposiciones

- Para comprobar que la antiderivada de una función es correcta, basta con derivar.
- Al asignar un valor especifico a la constante de “integración” se obtiene un miembro de una familia de funciones.
- Al obtener la famila de funciones de una funcion que ha sido derivada y seleccionar el mienbro cuya constante se hace cero (primitiva), es esta primitiva la que se utiliza para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Reflexivo-verbal. En el cual se describen relaciones o diferencias que se piensan sobre la integral y la antiderivada.

Argumentos

- Verbal-deductivo. Basado en los conceptos/definiciones sobre las dos nociones.

4.3.2.5.3. Contenido curricular

El contenido curricular que se evalúa con la tarea es la diferencia conceptual del objeto matemático integral y el objeto matemático antiderivada.

4.3.2.5.4. Principales dificultades para su resolución

En esta tarea se prevé que el estudiante no encuentre las diferencias entre estos dos objetos y responda que no existen diferencias, que éstas son lo mismo y los términos son sinónimos.

4.3.2.6. Tarea seis: funciones elementales

Esta tarea (Figura 4.8) se diseñó de acuerdo con lo encontrado en el estudio histórico-epistemológico sobre la antiderivada (ver capitulo 3). El recorrido histórico evidenció un significado parcial para la antiderivada dado por Euler, al determinar que sólo las sumas infinitas expresadas como funciones elementales poseen primitiva, es decir, en términos contemporáneos lo anterior puede ser expresado como 'dado el integrando de una función, si éste se puede expresar como función elemental, entonces tiene antiderivada'. De no ser así, se debe acudir a métodos numéricos para calcular la integral en límites establecidos.

Tarea 6. ¿Es posible tener una función en $\mathbb{R}$, que se pueda integrar pero no tenga antiderivada? Justifica tu respuesta.

Figura 4.8. Tarea 6 del cuestionario CNM-Antiderivada

4.3.2.6.1. Solución plausible de la tarea seis

Una respuesta a la pregunta de la tarea propuesta es: Sí, es posible. Una función que tiene antiderivada se puede expresar como función elemental; es decir, puede ser expresada como suma, resta, multiplicación, división o composición de otras funciones usando un número finito de operaciones algebraicas. Un ejemplo es la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$, ésta puede ser expresada como producto de otras dos, $h(x) = x$ y $g(x) = (\frac{1}{x+1})$. Hay funciones que no pueden ser expresadas como funciones elementales, por ejemplo, la función $f(x) = e^{x^2}$. Por lo tanto, con la expresión $\int e^{x^2}dx$ no es posible encontrar antiderivada. No obstante, sí es posible calcular la integral de la función con límites definidos, por ejemplo, $\int_1^5 e^{x^2}\,dx$, que se puede calcular por medio de integración numérica.

4.3.2.6.2. Análisis ontosemiótico

A continuación se presenta el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento como en la solución de la tarea.

Elementos lingüísticos

Entre los elementos lingüísticos previos identificados se encuentran:

- La sentencia lingüística “es posible” implica que puede o no suceder, análisis de juicio de valor que debe utilizar para dar la respuesta a la pregunta.
- La expresión “función”, equivale a un elemento transformador, en el que interviene un dominio y un recorrido.
- La representación matemática “$\mathbb{R}$”, conlleva a un conjunto numérico, en el cual la “función” actúa en base a la sentencia “posible”.
- Integral, refiere a un concepto matemático.
- Antiderivada, refiere a un concepto matemático.

El elementos lingüísticos emergentes que se identifica se encuentra:

- El juicio de valor para dar la respuesta a la pregunta, el cual depende del conocimiento de los dos objetos en cuestión (integral y antiderivada), y de ejemplos que sustenten la respuesta.

Conceptos

Los conceptos previos, requeridos para la solución de la tarea, que se identifican son:

- Funciones en $\mathbb{R}$, en sentido dado de encontrar ejemplos que cumplan con la condición exigida en la tarea.
- Integral, dada como proceso suma de infinitos sumandos infinitamente pequeños.
- Antiderivada (acepción dada por el contexto de la tarea). Familia de funciones.

Los conceptos emergentes que se identifican es:

- Funciones elementales. En el sentido de conocer qué son este tipo de funciones.

- Funciones transcendentes. En el sentido de conocer, cuáles son estas funciones.

Proposiciones

Se identifica la siguiente proposición previa

- Función en ℝ. Dada en el sentido de que deba tener condición especifica para dar respuesta a la tarea.

Se identifican las siguientes proposiciones emergentes:

- Las funciones elementales.
- Funciones transcendentes.
- Integración numérica

Procedimientos

Se identifica el uso del siguientes procedimientos en la soluciones plausible de la tareas:

- Descripciones verbales y ejemplificación de función elementales,, $f(x) = \frac{x}{x+1}$, y funciones transcendentes, $f(x) = e^{x^2}$.

Argumentos

Se identifica el uso del siguiente procedimiento en la solución plausible de las tarea:

- Se dan ejemplos de funciones elementales y transcendentes para responder a la tarea, este tipo de argumento se conocido en el EOS, como una respuesta de tipo *Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo)*. Es decir, un objeto que interviene en el lenguaje como un caso particular para llegar aun caso mas general.

4.3.2.6.3. Contenido curricular que se evalúa

La tarea 6 evalúa los siguientes contenidos:

- Funciones elementales, concepto matemático asociado a un tipo de funciones que cumple las condiciones de ser expresada como suma, resta, multiplicación, división o composiciones de funciones.
- Integración numérica. En el sentido dado por un procedimiento para el cálculo de integrales definidas.

4.3.2.6.4. Principales dificultades para su resolución

En esta tarea se prevé que el estudiante no responda correctamente si no hay conocimiento matemático sobre las funciones elementales y las funciones trascendentes, tal como se propone en la solución plausible.

4.3.2.7. Tarea siete: reglas de antiderivación

La tarea 7 (Figura 4.9), es una pregunta clásica que se ha realizado en textos universitarios de enseñanza del cálculo integral (Haeussler, Paul & Wood, 2008; Pinzón, Riaño & Gordillo, 2014). Para fines de esta investigación es adaptada, para determinar si los estudiantes infieren la antiderivada como proceso inverso de la derivada.

***Tarea 7*. Halle, si existe, la antiderivada en general para**

$$\boldsymbol{h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Figura 4.9. Tarea 7 del Cuestionario CNM-Antiderivada

4.3.2.7.1. Solución plausible de la tarea siete

La respuesta a la tarea propuesta, es la siguiente: Se identifica que la función $h(x)$ corresponde a la regla de derivación de un producto de dos funciones; por lo tanto, la función antiderivada es una función producto de dos funciones, más una constante en $\mathbb{R}$.

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + C.$$

4.3.2.7.2. *Análisis ontosemiótico*

A continuación se presenta el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento como en la solución de la tarea.

Elementos lingüísticos

Entre los elementos lingüísticos previos identificados se encuentran:

- La expresión $h(x)$. Denota una función determinada por otras, en este caso, una suma de productos de funciones $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Las expresiones $f'(x)$ y $g'(x)$. Denotan la notación de la derivada de dos funciones, en este caso $f(x)$ y $g(x)$.
- La expresión "Halle, si...", sentencia que alude a un proceso de algoritmización del cual emergerá un procedimiento para encontrar la antiderivada.

Entre los elementos lingüísticos emergentes se puede destacar:

- Identificación de la función $h(x)$, la cual corresponde a la regla de derivación de un producto de dos funciones.
- El símbolo $\int$, actúa como operador que denota un procedimiento a efectuar.
- La letra C que representa la generalización de la familia de funciones que se obtenga.
- La función antiderivada es una función producto de dos funciones más una constante en $\mathbb{R}$. Es decir, $f(x)g(x) + C$.

Conceptos

Los conceptos previos que se identifican son:

- Función de variable real general conocida. Definida por función $h(x)$.

- Suma de un producto general de funciones. Definida por: $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Los conceptos emergentes que se identifican son los siguientes:

- Derivada de producto de dos funciones. Caso particular para la función, $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Familia de Funciones. Caso particular al adicionar la “constante de integración” al encontrar la antiderivada solicitada, $f(x)g(x) + C$.
- Antiderivada. Cuando se usa en la solución plausible la notación de antiderivación, $\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + C$.

Procedimientos

Identificamos el uso de los siguientes procedimientos en las soluciones plausibles de las tareas:

- Inversa de regla de derivación. $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Ensayo y error. Probando posibles reglas de correspondencia entre las funciones dadas.
- Técnica de antiderivación: $\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + C$.

Argumentos

- Se identifica que la función $h(x)$ corresponde a la regla de derivación de un producto de dos funciones; por lo tanto, la función antiderivada es una función producto de dos funciones más una constante en $\mathbb{R}$, $\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + C$.

4.3.2.7.3. Contenido curricular

Los contenidos curriculares que se evalúan con la tarea siete son:

- Operaciones con funciones, concretamente de suma de productos de dos funciones.

- Reglas de antiderivación.

4.3.2.7.4. Principales dificultades para su resolución

La función propuesta en la tarea, está escrita como el producto de dos funciones que se han derivado. Esta forma general hace que la antiderivada no sea identificada por los estudiantes y que la antiderivada de la función propuesta no pueda ser encontrada.

4.3.2.8. Tarea ocho: notaciones de función

Esta tarea (Figura 4.10) refiere a una pregunta clásica que se ha realizado en textos universitarios de enseñanza del cálculo integral (Haeussler, Paul & Wood, 2008; Pinzón, Riaño & Gordillo, 2014), y ha sido adaptada en este diseño, para determinar si los estudiantes identifican diferentes formas de notación simbólica en las que se expresan las funciones para realizar sobre ellas la antiderivación.

Tarea 8. Halle si existe, la antiderivada de $f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

Figura 4.10. Tarea 8 del Cuestionario CNM-Antiderivada

4.3.2.8.1. Solución plausible de la tarea ocho

Una posible respuesta es la siguiente: Se identifica que la función $f(x)$ corresponde a la derivada de una función y es una función elemental. Ahora, dado que la antiderivada de una derivada es la misma función más una constante cualquiera en $\mathbb{R}$ (familia de funciones), entonces se tiene que:

$$\int \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right] dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

4.3.2.8.2. Análisis ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea.

Elementos lingüísticos

- La expresión "Halle, si...", sentencia que alude a un proceso de algoritmización del cual emergerá un procedimiento para encontrar la antiderivada.
- La expresión $f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$. Denota una función particular, la cual se expresa en notación diferencial, que incluye la derivada de una función concreta dada en la tarea.

Conceptos/Definiciones

- Diferencial. Particularizado y visto de manera operativa mediante la expresión $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$.
- Derivada de una función. Caso particular para la función $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$.
- Antiderivada de una función, la cual se determinará a partir de la función $f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$.

Propiedades/Proposiciones

- La antiderivada de una función en notación diferencial, es la misma función, más la constante de integración.
- Para comprobar que la antiderivada de una función es correcta, basta con derivar.

<u>*Procedimientos*</u>

- Algorítmico dado por una "regla de integración". En este caso en particular, dicha regla es establecida por la tarea, $\int \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right] dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

<u>*Argumentos*</u>

- La función $f(x)$ de la tarea corresponde a una función escrita en notación diferencial, validando una propiedad de las "reglas de integración" (la antiderivada de una función escrita en notación diferencial, es ella misma, más una "constante de integración"), esta validación en particular, para la función propuesta es: $\int \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right] dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

4.3.2.8.3. Contenido curricular que se evalúa

La tarea 8 evalúa los siguientes contenidos:

- Notación simbólica para expresar una función matemática.
- Reglas de derivación (posiblemente), al usar notación diferencial en la función planteada en la tarea.
- Reglas básicas de integración, entendidas como técnica para encontrar la familia de funciones en una función que ha sido derivada previamente.

4.3.2.8.4. Principales dificultades para su resolución

La función propuesta en la tarea está escrita en notación diferencial. La naturaleza de esta notación hace que la función derivada no sea perceptible para los estudiantes y que la antiderivada de la función propuesta no pueda ser encontrada.

4.3.2.9. Tarea nueve: aplicación de la antiderivada a la economía

La tarea 8 (Figura 4.11) puede verse como una pregunta clásica de aplicación que se presenta en algunos libros de texto universitarios con orientaciones a las ciencias económicas (Haeussler, Paul & Wood, 2008; Arya & Lardner, 2004). Fue incluida para explorar la capacidad de relacionar la noción de antiderivada con otros objetos matemáticos en otros contextos. En este sentido, esta tarea es evaluadora de *conocimiento* y *comprensión* parcial de la noción matemática en contextos diferentes al matemático.

> *Tarea 9.* En economía, la razón de cambio del costo total (C_T) con respecto a la cantidad q de unidades se llama Costo Marginal (C_M), así $C_M = \frac{dC_T}{dq}$. Suponga que la función de costo marginal de un producto está dada por $\frac{dC_T}{dq} = 5q^2 - q$. Determine la función de costo total.

Figura 4.11. Tarea 9 del cuestionario CNM-Antiderivada

4.3.2.9.1. Solución plausible de la tarea nueve

Para determinar la función de costo total, dada una función de costo marginal, se deben separar las variables C_T y q; así, $dC_T = (5q^2 - q)dq$. Verificamos que las funciones dadas sean elementales y procedemos a encontrar la antiderivada para cada uno de los elementos en la igualdad $\int C_T dq = \int (5q^2 - q)dq$, esto es, $C_T = \frac{5}{3}q^3 - \frac{1}{2}q^2 + C$. Esta ecuación proporciona el costo total C_T de producir un producto con q unidades, donde $C \in \mathbb{R}$ y C representa el costo fijo de producir de la cantidad q unidades.

4.3.2.9.2. Análisis ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea.

Elementos lingüísticos

- La expresión "Determine la función...", sentencia que alude a un proceso de algoritmización del cual emergerá un procedimiento para encontrar la función costo total.

- $\frac{dC_T}{dq} = 5q^2 - q$. Expresión simbólica que refiere a la función de costo marginal.
- "q". Letra que refiere a una variable que representa la cantidad de unidades de lo que se produce.
- La letra C_T, que refiere a la función de costo total.

Conceptos/Definiciones

- Función de costo marginal. Función que describe el incremento que sufre el costo cuando se incrementa la producción en una unidad; es decir, el incremento del costo total que supone la producción adicional de una unidad de un determinado bien.
- Función de costo total. Función que da el costo que se tiene al producir una cierta cantidad de unidades de un producto.
- Antiderivada, como procedimiento que permite obtener la función de costo total a partir de una función de costo marginal.

Propiedades/Proposiciones

- La derivada de la función de costo total es una función de costo marginal.
- La antiderivada de la función de costo marginal nos permite obtener la función de costo total.

Procedimientos

- Método de variables separables para solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y primer grado. Dada una función de costo marginal se deben separar las variables C_T y q; así, $dC_T = (5q^2 - q)dq$. Verificando que la función dada es elemental, procedemos a encontrar la antiderivada para cada uno de los elementos de la función.

Argumentos

- A partir de la proposición, *la antiderivada de la función de costo marginal* *permite obtener la función de costo total.* Así, el costo total es el significado (institucional) que en las ciencias económicas se le confiere a la antiderivada de la función de costo marginal.

4.3.2.9.3. Contenido curricular que se evalúa

La tarea 9 evalúa los siguientes contenidos:

- Funciones y su aplicación a temas de la economía.
- Uso de las "reglas básicas de integración", entendidas como una técnica para encontrar la familia de funciones a partir de una función que ha sido derivada inicialmente.
- Aplicación de la antiderivada y sus propiedades a temas de la economía.

4.3.2.9.4. Principales dificultades para su resolución

Se prevé que el estudiante no identifique los símbolos y la notación propios de la economía.

4.3.2.10. Tarea diez: solución de ecuaciones diferenciales ordinarias

La tarea 10 (Figura 4.12) es clásica en los textos universitarios de enseñanza del cálculo integral (Stewart, 2013; Pinzón, Riaño & Gordillo, 2014). La hemos adaptado para determinar si los estudiantes pueden encontrar la ecuación que satisface una ecuación diferencial, a través de antiderivadas.

Tarea 10. La ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x)$ es una ecuación diferencial de primer orden. ¿Cómo se puede determinar una solución que satisfaga esta ecuación diferencial?

Figura 4.12. Tarea 10 del cuestionario CNM-Antiderivada

4.3.2.10.1. Solución plausible de la tarea diez

Una posible respuesta es: la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado, se puede resolver matemáticamente por medio de antiderivación sucesiva. Esta antiderivación sucesiva está sujeta a la verificación de $f(x)$ como una función elemental. Si se confirma $f(x)$ como función elemental, se procede a hallar su antiderivada: $y = f(x) + C$, la cual satisface la ecuación diferencial.

4.3.2.10.2. Análisis ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea.

Elementos lingüísticos

- $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Expresión simbólica que refiere a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado.
- La expresión "Cómo se puede determinar...", sentencia que alude a un proceso de algoritmización del cual emergerá un procedimiento para encontrar la solución que satisface la ecuación diferencial.
- La expresión matemática $\frac{dy}{dx}$, para expresar una derivada de una variable en función de otra.

Conceptos/Definiciones

- Función de una variable real, particularizada en la tarea por $f(x)$.
- Derivada, concretamente, $\frac{dy}{dx}$.
- Ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado. Descrita por la ecuación, $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

Propiedades /Proposiciones

- Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se pueden resolver a través de antiderivación sucesiva. En el caso particular de la ecuación dada, sólo se requiere de una antiderivada.

- Métodos para resolver ecuaciones diferenciales.
- Reglas de integración.

Procedimientos

- Con base en las propiedades/proposiciones de la tarea, se halla la antiderivada de la ecuación diferencial dada, lo cual desvelará la ecuación que la satisface.

Argumentos

- De tipo algorítmicos/algebraicos, basados en las proposiciones señaladas anteriormente.

4.3.2.10.3. Contenido curricular que se evalúa

La tarea 9 evalúa los siguientes contenidos:

- Ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado.
- Uso de las “reglas básicas de integración”, entendidas como una técnica para encontrar la familia de funciones en una función que ha sido derivada inicialmente.
- Métodos para resolver ecuaciones diferenciales.

4.3.2.10.4. Principales dificultades para su resolución

En esta tarea se prevé que el estudiante no identifique la notación general de una ecuación diferencial de primer orden, o que curricularmente el tema no haya sido abordado.

4.3.2.11. Tarea once: aplicación de la antiderivada en la física

La tarea 11 (Figura 4.13), es una pregunta clásica que se ha realizado en textos universitarios de enseñanza del cálculo integral (Stewart, 2013; Pinzón, Riaño & Gordillo, 2014). En este diseño es adaptada, para determinar si los estudiante describen en forma "escrita-verbal" un fenómeno físico a través de otro.

Tarea 11. Si un objeto se mueve en línea recta y tiene una función de velocidad $v(t)$, describa con sus palabras cómo determinar la función de posición $s(t)$ del objeto.

Figura 4.13. Tarea 11 del cuestionario CNM-Antiderivada

4.3.2.11.1. Solución plausible de la tarea once

Una respuesta a la pregunta de la tarea propuesta, es la siguiente: en física, el movimiento rectilíneo, se concibe como la trayectoria que describe un móvil en una línea recta. La velocidad en este tipo de movimiento, es el cambio de posición del objeto con respecto al tiempo. En términos de una expresión matemática es la ecuación $\frac{ds}{dt} = v(t)$, en esta ecuación se relaciona la variación de la posición del objeto (ds) respecto al tiempo (dt). A esta relación de variación se le llama velocidad $[v(t)]$. A partir de esta expresión matemática, se puede determinar la posición del objeto, para esto, se proceder a efectuar una antiderivación sobre la función de velocidad.

4.3.2.11.2. Análisis ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea.

Elementos lingüísticos

Los elementos lingüísticos previos que se identifican son:

- La expresión "se mueve en línea recta...", sentencia que alude a un proceso físico de movimiento rectilíneo.
- Función de velocidad $v(t)$. Denota una función matemática en términos del tiempo (t).
- La sentencia "describa con sus palabras…", alude a una acción comunicativa

detallada, argumentativa y personal de un proceso.

- Función de posición $s(t)$. Denota una función matemática en términos del tiempo (t).

Como elementos lingüísticos emergentes se identifican:

- La expresión matemática, $\frac{ds}{dt} = v(t)$. Ecuación se relaciona la variación de la posición del objeto (ds) respecto al tiempo (dt). A esta relación de variación se le llama velocidad $[v(t)]$.
- Antiderivación sucesiva. Expresión "verbal" que se refiere al procedimiento para la solución de la ecuación de velocidad en el movimiento rectilíneo

<u>*Conceptos*</u>

El concepto previo, requerido para la solución de la tarea, que se identificó es:

- Movimiento en línea recta. Dado por la física.
- Función de velocidad $v(t)$. Función que relaciona el cambio de la posición de un objeto (ds) respecto a un cambio de tiempo (dt).
- Función de posición $s(t)$. Función que determina un lugar (en el movimiento rectilíneo) donde se encuentra un objeto en un tiempo (t) determinado.

Los conceptos emergentes que se identifican son:

- $\frac{ds}{dt} = v(t)$, ecuación se relaciona la variación de la posición del objeto (ds) respecto al tiempo (dt). Relación de variación se le llama velocidad $[v(t)]$.
- Función de posición $s(t)$. Obtenida con el proceso antiderivación de la función de velocidad $v(t)$.

<u>*Proposiciones*</u>

No se identifica proposición previa, aunque si se identifica proposiciones emergentes, las cuales son:

- $\frac{ds}{\mathrm{dt}} = v(t)$, al establecer una ecuación que relaciona la variación de la posición del objeto (ds) respecto al tiempo (dt). Relación de variación se le llama velocidad [$v(t)$].
- Reglas de antiderivación. Para la encontrar la función de posición $s(t)$.

Procedimientos

Se identifica el uso del siguiente procedimiento en la solución plausible de la tarea:

- Antiderivación sobre la función de velocidad $v(t)$, para obtener la función de posición $s(t)$.

Argumentos

El argumento que se identificó es:

- "Escrito-verbal", narrativa personal para obtener la función de posición de un objeto a partir de la función de velocidad, esta narrativa identifica el uso del significado de la antiderivada descrito por el EOS como una dualidad de la forma personal e institucional, en el sentido dado que la narrativa hace emerger desde un significado personal el "objeto institucional" antiderivada.

4.3.2.11.3. Contenido curricular que evalúa

Los contenidos curriculares que se evalúan con la tarea nueve, son los siguientes:

- Movimiento rectilíneo.
- Función de velocidad.
- Función de posición.
- Uso de las "Reglas básicas de integración" entendidas como una técnica para encontrar la familia de funciones en una función que ha sido derivada inicialmente.

4.3.2.11.4. Principales dificultades para su resolución

En esta tarea se prevé que el estudiante describa en forma “escrita-verbal” un fenómeno físico a través de otro, consideramos que el estudiante no va ha tener dificultad alguna para dar solución, dado que se solicita una narrativa del situación física.

4.4. REVISIÓN Y SELECCIÓN DE LAS TAREAS A PARTIR DEL JUICIO DE EXPERTOS

Con la finalidad de afianzar la fiabilidad y la validez de contenido del cuestionario *CNM-Antiderivada*, éste se sometió a revisión mediante el *juicio de expertos.* Para el estudio se contactó a seis expertos[15] del área de la Educación Matemática con especialidad en temas de cálculo, adscritos a las siguientes universidades: Universidad de Antioquia, Colombia (E1); Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile (E2); Universidad Autónoma de Querétaro, México (E3); Universidad de Sevilla, España (E4); Universidad de Barcelona, España (E5); Universidad Autónoma de Barcelona, España (E6).

Para facilitar la colaboración de los participantes de este estudio, a cada uno de los expertos se les envío un formulario en el que podían opinar libremente (ver Anexo 2), para cada una de las tareas del cuestionario, sobre el grado de relevancia de cada uno de los siguientes aspectos:

1. Distintos significados del objeto antiderivada.
2. Representaciones activadas tanto en los enunciados como en las soluciones plausibles.
3. Contenido matemático de las tareas en relación con el objeto antiderivada; es decir, el vínculo de la antiderivada con otras nociones matemáticas relevantes para su comprensión.

[15] Para este estudio estamos utilizando la palabra “experto” en el sentido de Profesor Investigador asociado a una universidad, reconocido por la comunidad académica por sus publicaciones en revistas de alto impacto registradas en bases de datos de tipo ISI/Web of Knowledge, SciElo, SCOPUS, ERIH, etc.; y experiencia de más de 10 años en didáctica de cálculo.

4. Ausencia de algún contenido relevante.
5. Redacción y comprensión de los enunciados.

Para cada uno de los puntos anteriores, los expertos podrían elegir una puntuación entre 1 y 5, siendo 1 nada relevante y 5 totalmente relevante. Adicionalmente, se les proporcionó espacios donde podían plasmar sus opiniones por tarea, y para el cuestionario en general. Las respuestas de los expertos contribuyeron a la mejora de las características y a la adecuación del nivel de dificultad del instrumento.

En general, el *Cuestionario CNM-Antiderivada* fue aprobado y avalado por parte de los expertos, tanto los enunciados como en las soluciones plausibles de las tareas. La tabla 4.1 muestra la puntuación media otorgada al cuestionario por cada uno de los expertos.

Tabla 4.1
Puntuación media por experto al cuestionario CNN-Antiderivada.

Experto	*Puntuación Media*
E1	5,0
E2	4,8
E3	4,4
E4	4,2
E5	5,0
E6	5,0

Puntuación en escala (1 a 5); Media= 4,722

Para determinar la calificación de cada experto, se promedió la puntuación asignada a cada uno de los criterios evaluados para cada una de las tareas que conforman el cuestionario. Como se puede observar en la Tabla 4.1, la media total obtenida fue de 4,72 puntos. En la versión definitiva del cuestionario se incluyeron las sugerencias y recomendaciones de cada uno de los expertos, las cuales fueron realizadas en el sentido de mejorar la redacción de algunos enunciados y considerar algunos datos adicionales tanto el planteamiento como en las soluciones de algunas tareas.

Para que la fiabilidad y validez de contenido del cuestionario fuera lo más alta posible, además de la triangulación de expertos se realizaron, por tarea, los análisis de contenido detallados que se presentaron en la sección 3. Dicho análisis, que denominamos *análisis* *ontosemiótico*, junto con las herramientas teórico-metodológicas contempladas para llevar a cabo este tipo de estudio, han sido sugeridos y utilizados con el mismo fin en otros estudios (Pino-Fan & Font, 2015; Pino-Fan, Godino & Font, 2013), y se prevén como potentes para analizar, caracterizar y tener un buen grado de validez de contenido en el diseño de tareas y cuestionarios como el que aquí presentamos.

4.5. CONSIDERACIONES FINALES

En esta capítulo presentamos el diseño de un cuestionario que nos permite caracterizar el conocimiento sobre la antiderivada de estudiantes universitarios, y así determinar si la comprensión que tienen los alumnos del objeto matemático antiderivada refleja la complejidad de dicha noción. La noción de *conocimiento* (conocimiento matemático), desde un punto de vista pragmatista como el adoptado por el EOS, incluye y vincula las actividades de comprensión, competencia y disposición, las cuales intervienen en las prácticas matemáticas que se desarrollan con la finalidad de resolver un problema.

Esta forma pragmática de entender el conocimiento, ha sido considerado en el diseño de cada una de las tareas que conforman el cuestionario, toda vez que las tareas requieren para su resolución de la movilización congruente tanto de los diversos registros de representación para la antiderivada (Duval, 1995; 2006a), como de la diversidad de significados parciales de dicha noción matemática (ver Capítulo 3).

El análisis a priori realizado, junto con la determinación de las posibles dificultades en la resolución de cada una de las tareas, permite observar, describir y predecir la actividad matemática como un conjunto complejo de prácticas en las cuales se movilizan y articulan una serie de objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y sus significados, a los cuales idealmente se deberán aproximar las prácticas matemáticas de los estudiantes cuando resuelvan cada una de dichas tareas. Así mismo, tanto los análisis a priori de contenido, como el estudio mediante juicio de expertos, han dado evidencia de que las tareas del *Cuestionario CNM-Antiderivada*, en efecto evalúan una muestra representativa de aspectos parciales de la comprensión de la antiderivada.

El instrumento diseñado puede ser útil de diferentes maneras:

1) Primero se puede utilizar para evaluar la comprensión de la antiderivada que tienen los alumnos.

2) Las mismas tareas que integran el cuestionario podrían ser adaptadas para potenciar, en los estudiantes de los primeros cursos universitarios, la comprensión de la antiderivada.

CAPÍTULO 5

Evaluación de la Comprensión Sobre la Antiderivada

5.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se presentan los resultados de la aplicación del *Cuestionario CNM-Antiderivada*, el cual se diseño y validó mediante el juicio de expertos. En la primera parte se muestra la descripción de la aplicación del instrumento; en la segunda el análisis cuantitativo de los datos obtenidos a partir de la aplicación del instrumento, y en la tercera parte se hace un análisis cualitativo reforzado mediante la presentación de resultados de algunas entrevistas llevadas a cabo con la finalidad de complementar información sobre la comprensión de la noción matemática antiderivada de los estudiantes universitarios de carreras de matemáticas y afines a las matemáticas.

5.2. APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO *CNM-Antiderivada*

A continuación se presenta los resultados que se obtuvieron con la aplicación de la versión del *Cuestionario CNM-Antiderivada*. La aplicación del cuestionario tiene varias funciones dentro de la investigación, aunque el objetivo principal de su aplicación, en concordancia con lo que señalan Cohen, Manion y Morrison (2011), es incrementar y sustentar la fiabilidad, validez y factibilidad del cuestionario.

5.2.1. Método

Esta investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004; Creswell, 2009), puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación de variables cuantitativas (grado de corrección de los ítems: respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y cualitativas (tipo de resolución o configuraciones cognitivas propuestas por estudiantes).

Para el estudio cualitativo nos apoyamos en la técnica de análisis denominada *análisis semiótico* (Godino, 2002), misma que hemos descrito en el Capítulo 2, la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los estudiantes al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (*elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos*), y sus significados, que intervienen en dichas prácticas (Godino, Batanero & Font, 2007).

5.2.1.1. Sujetos

La prueba se aplicó a una muestra de 137 estudiantes universitarios de carreas de matemáticas o afines a las matemáticas en diferentes universidades en Colombia. El condicionante para la aplicación de la prueba a los estudiantes que participaron, fue el haber tomado el curso de cálculo integral o cálculo II (momento curricular donde se aborda la noción).

Los estudiantes que participaron en la aplicación de la prueba estaban distribuidos de la siguiente forma:

- 37 Estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas que se imparte en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) en Colombia.
- 23 Estudiantes de Ingeniería Civil que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Santo Tomas (USTA) en Colombia.
- 26 Estudiantes de Ingeniería (núcleo común) que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central (UC) en Colombia.

- 24 Estudiantes de Ingeniería Topográfica que se imparte en la Facultad de Medio Ambiente y Recursos Naturales de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC) en Colombia.
- 27 Estudiantes de Matemática que se imparte en la Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC) en Colombia.

Es de señalar que estos estudiantes se reagruparon para el estudio en tres grupos, discriminados de la siguiente forma:

- Grupo 1: 27.01% (37) estudiantes de Licenciatura en Matemáticas
- Grupo 2: 19.71% (27) estudiantes de Matemática.
- Grupo 3: 53.28% (73) estudiantes de Ingeniería.

Es importante comentar que en este estudio no se hace distinción alguna de género de los estudiantes (hombres y mujeres) que participaron en el estudio.

5.2.1.2. Procedimiento

Para la resolución de las tareas del *Cuestionario CNM-Antiderivada,* los estudiantes contaron con un tiempo de dos horas. La prueba se aplicó en una sola sesión, en diferentes días a cada una de universidades que nos facilitaron la aplicación de la prueba en el mes de agosto de 2014.

La aplicación de la prueba estuvo a cargo del investigador autor de esta tesis doctoral. Antes de comenzar la prueba se dio especificaciones a los estudiantes sobre la forma en que deberían responderla[16], y se mencionó que iban a ser parte de un estudio de investigación para su motivación. Para cuidar la objetividad y calidad de las respuestas, se les indicó que aquellos que no quisieran escribir su nombre, podrían omitirlo y colocar en dicho apartado "Sujeto-Hombre" o "Sujeto-Mujer".

[16] Las instrucciones también fueron dadas por escrito en la primera parte del cuestionario tal y como se muestra en el Anexo 1.

5.2.2. Análisis

Para el análisis de los datos obtenidos de la implementación del cuestionario, consideramos dos variables:

1. *Grado de corrección de la tarea* (respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas).
2. *Tipo de configuración cognitiva* (tipología de resolución propuestas por los estudiantes, especificando los objetos y procesos puestos en juego en las mismas).

Para el análisis de los datos obtenidos, respecto a esta última variable (tipo de configuración cognitiva), como se ha señalado, se utilizó la técnica de análisis denominada *análisis semiótico* (Godino, 2002; Malaspina & Font, 2010; Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011), la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por estudiantes al resolver problemas/situaciones, como los objetos matemáticos primarios que intervienen en las estas prácticas (Godino, Batanero & Font, 2007).

5.2.2.1. Variables y valores considerados en el análisis

Como se he señalado, para el análisis de los datos recolectados con la implementación del *Cuestionario CNM-Antiderivada*, se consideran dos variables: La primera de corte cuantitativo que *refiere al grado de corrección de las tareas*. En este sentido se asignaron las siguientes puntuaciones:

- NR: No responde
- 0 : Respuesta incorrecta
- 1: Respuesta parcialmente correcta.
- 2: Respuesta correcta.

Las características de lo que fue considerado una respuesta correcta, parcialmente correcta o incorrecta, para cada una de las tareas, se presentan en el Anexo 3.

En cuanto a la variable cualitativa *tipo de configuración cognitiva*, se puede señalar que fue principalmente de corte descriptiva y dependió de los procesos, los objetos matemáticos y los significados que a éstos asignaban los estudiantes en la resolución que daban de las tareas. No obstante, debido a las características de las tareas y a las respuestas que éstas admiten, fue posible establecer una agrupación de las respuestas de los estudiantes según el tipo de configuración cognitiva que movilizaban en la resolución de cada uno de los ítems de las tareas. A partir de dichas agrupaciones, se realiza un estudio cuantitativo (conteo, frecuencias y porcentajes) de los tipos de configuraciones cognitivas movilizadas en la resolución de una tarea. La codificación asignada a las configuraciones cognitivas activadas en la resolución de cada uno de los ítems de las tareas, también se presenta en el Anexo 3.

5.3. ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Este análisis se basa en gráficos y estadísticos que permiten explorar la distribución identificando características tales como: valores atípicos o outliers, saltos o discontinuidades, concentraciones de valores, forma de la distribución, etc. Por otra parte, este análisis se puede realizar sobre todos los grupos conjuntamente o de forma separada por grupos. También permite comprobar, mediante técnicas gráficas y contrastes no paramétricos, si los datos han sido extraídos de una población con distribución aproximadamente normal.

Como se mencionó en el apartado 5.2.1.1, la prueba se aplicó a tres grupos de estudiantes: 37 de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (grupo 1), 27 estudiantes de Matemática (grupo 2) y 74 estudiantes de Ingeniería (grupo 3). De acuerdo a las puntuaciones que se establecieron para el grado de corrección de las tareas (ver apartado 5.2.2.1), un estudiante que resolviera correctamente todas las tareas del *Cuestionario CNM-Antiderivada*, podría obtener una puntuación máxima de 24 puntos.

Para el estudio se considera la muestra de 137 estudiantes como única ya que, como se verá a continuación, no se encontraron diferencias significativas entre las medias de las puntuaciones obtenidas por los tres grupos. Para ello, utilizamos el paquete estadístico

IBM SPSS (Versión 22) para realizar un comparación entre tres muestras independientes. La Tabla 5.1 presenta algunos resultados de dicha comparación.

Tabla 5.1
Resumen estadístico para la puntuación total por grupos

GRUPO	*N*	*Media*	*Mínimo*	*Máximo*	*Rango*	*Desviación típica*	*Varianza*	*Curtosis*	*Asimetría*
1	37	13,649	6,0	21,0	15,0	3,5215	12,401	-0,049	-0,490
2	27	16,926	8,0	23,0	15,0	3,5074	12,302	-0,325	-0,534
3	73	11,833	5,0	18,0	13,0	2,7010	7,2095	-0,342	-0,328
Total	137	13,880	5,0	23,0	18,0	3,7504	14,065	-0,288	-0,079

La Tabla 5.1 contiene el resumen estadístico para las tres muestras de datos. Para verificar si hay diferencias estadísticas significativas entre los tres grupos del estudio, se utilizó una prueba de hipótesis paramétrica de análisis de varianza (ANOVA); esta prueba compara las medias de las tres muestras. La Figura 5.1 muestra el diagrama de caja de la distribución de los puntajes y puntaje medio obtenido por los tres grupos.

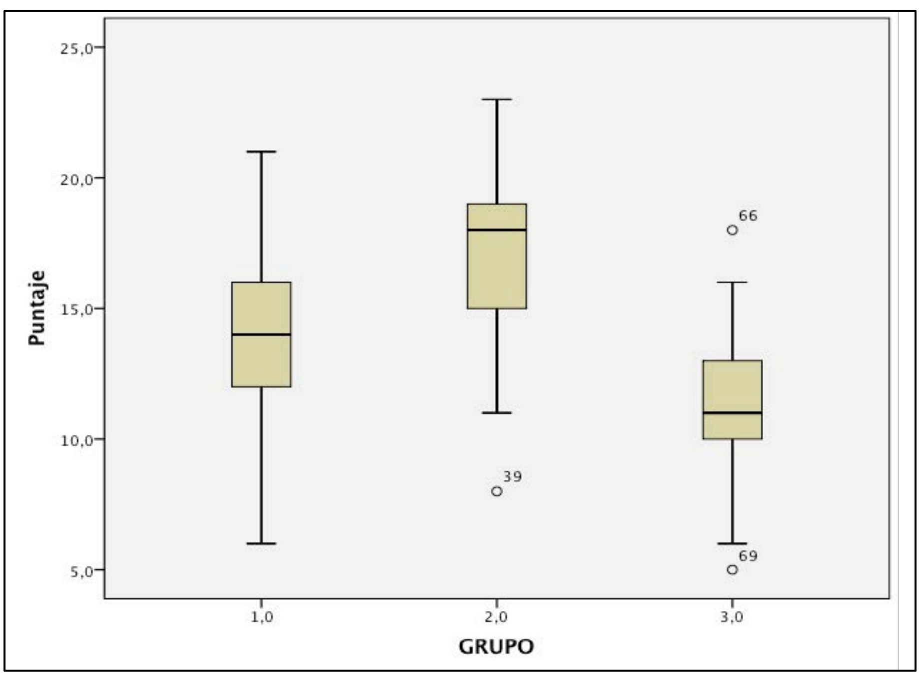


Figura 5.1. Diagrama de caja de la distribución de los puntajes y puntuación media por grupo

Mediante esta prueba ANOVA que compara las medias, se muestra que no hay diferencia significativa entre las medias de las tres muestras de datos, con un nivel de confianza del 95%. La Tabla 5.2 muestra los estadísticos de los tres grupos en estudio.

Tabla 5.2
Resumen estadístico para la prueba ANOVA

Grupo	*N*	*Media*	*Desviación típica*	*Error típico*	*Intervalo de confianza para la media al 95%*		*Mínimo*	*Máximo*
					Límite inferior	*Límite superior*		
1	37	13,649	3,5215	0,5789	12,475	14,823	6,0	21,0
2	27	16,926	3,5074	0,6750	15,538	18,313	8,0	23,0
3	73	11,833	2,7010	0,3161	10,753	12,014	5,0	18,0
Total	137	13,880	3,7504	0,3204	12,1454	13,721	5,0	23,0

Para determinar si la muestra presenta una distribución normal, se aplica una prueba de normalidad con la cual se obtiene para cada una de las variables dependientes y para cada uno de los grupos, el correspondiente gráfico Q-Q Normal (Figura 5.2). Este gráfico permite comprobar si las poblaciones de las que se han extraído las muestras presentan distribución normal. El Q-Q Normal muestra simultáneamente para cada elemento, el valor observado y el valor esperado bajo el supuesto de normalidad. Si los datos proceden de una distribución normal los puntos aparecen agrupados en torno a la línea recta esperada. La Figura 5.2. muestra la confirmación de la normalidad de los datos obtenidos.

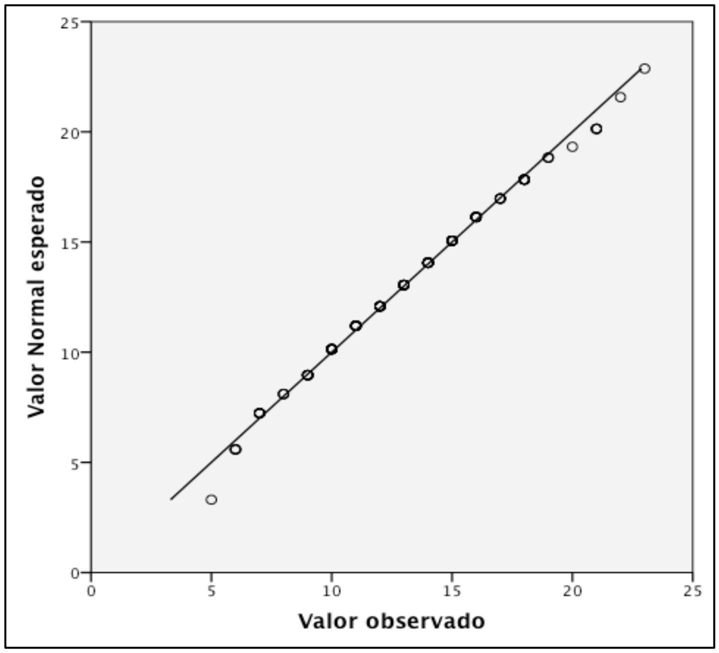


Figura 5.2. Gráfico Q-Q Normal de Puntaje

5.3.1. Resultados globales para el cuestionario CNM-Antiderivada

A continuación se presentan los resultados globales obtenidos por la muestra de 137 estudiantes. Recordemos que el puntaje máximo posible que podía obtener un estudiante que respondiera correctamente todas las tareas del cuestionario era de 24 puntos.

La Tabla 5.3 muestra las frecuencias de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes dividiendo el rango de puntuación total (24 puntos) en intervalos del mismo ancho, y contando el número de datos en cada intervalo. Las frecuencias muestran el número de datos en cada intervalo, mientras que las frecuencias relativas muestran las proporciones en cada intervalo.

Tabla 5.3
Frecuencias para la puntuación total

Clase	*Limite Inferior*	*Limite Superior*	*Punto Medio*	*Frecuencia*	*Frecuencia Relativa*	*Frecuencia Acumulada*	*Frecuencia Relativa Acumulada*
1	5	8	6,5	14	0,102	14	0,102
2	11	12	10,5	46	0,336	60	0,438
3	13	16	14,5	54	0,394	114	0,832
4	17	20	18,5	17	0,124	131	0,956
5	21	24	22,5	6	0,044	137	1,000
	Media =13,880				*Desviación típica* = 3,7504		

Es posible apreciar en la Tabla 5.3 que 77 de los estudiantes (56,2%, clases 3, 4 y 5) obtuvieron una puntuación superior a los 13 puntos de los 24 puntos posibles. De estos 77 estudiantes, 54 (39,4%) tuvieron puntuaciones dentro de la clase 3 que contiene el puntaje medio, 17 (12,4%) obtuvieron una puntuación entre 17 y 20 puntos (clase 4) y seis de los estudiantes (4,4%) obtuvieron una puntuación entre 21 y 24 puntos (clase 5). Lo anterior evidencia que el 43,8% de los estudiantes presentaron dificultades para resolver las tareas del cuestionario. La media obtenida por los 137 estudiantes y su diagrama de caja pueden verse gráficamente en la Figura 5.3.

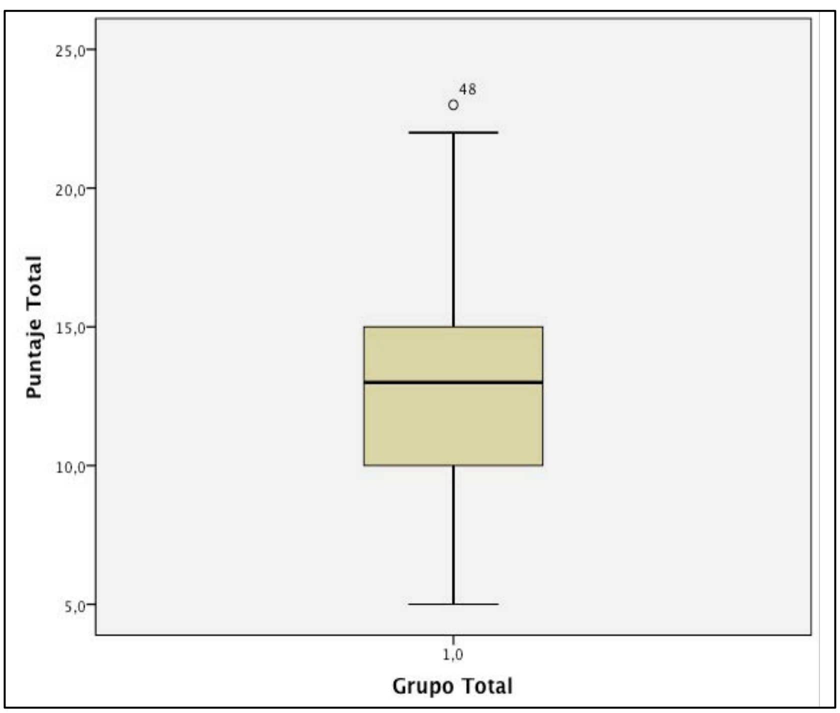


Figura 5.3. Diagrama de caja de la distribución total y media aritmética

En la siguiente sección se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes en cada una de las tareas del cuestionario.

5.4. ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES

En esta sección se presenta el estudio de los resultados obtenidos con la aplicación del cuestionario, considerando, las dos variables definidas para la investigación: *grado de corrección de las respuestas* (correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y *tipo de configuración cognitiva* (ver Anexo 3).

5.4.1. Tarea uno: significados de la antiderivada

La pregunta es descrita en el apartado 4.3.2.1; para el análisis cuantitativo de las respuestas, se consideró la variable *grado de corrección* (correctas, incorrectas y no responde), para esta tarea consideramos que una respuesta es correcta si el estudiante menciona al menos uno de los significados parcial para la antiderivada. La Tabla 5.4 muestra los resultados en frecuencias del grado de corrección de la tarea uno con sus respectivos porcentajes.

Tabla 5.4
Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 1

Grado de Corrección	*Frecuencia Total*	*%*
Correcta	132	96,3
Incorrecta	0	0,0
No responde	5	3,7
Total	137	100

Al tratarse de una pregunta "global" sobre los significados de la antiderivada que conocen los estudiantes, los estudiantes no tuvieron dificultades para responder a la tarea (96,3%). Como se puede observar en la Tabla 5.4, cinco de los estudiantes no responden (3,7%). En esta tarea no se encontraron respuestas incorrectas, dado que la tarea indagaba sobre los significados (personales o institucionales) que se le confieren a la antiderivada, sin discriminar ningún indicativo de la mala compresión del término matemático.

5.4.1.1 Análisis de las configuraciones cognitivas: tarea 1

A continuación se describen las configuraciones cognitivas identificadas en las soluciones que dieron los estudiantes a esta primer tarea. Se identificaron seis tipos de configuraciones que las hemos denominado: familia de funciones, proceso inverso de la derivación, primitiva de una función, integral indefinida, uso de la integral y definición–TFC.

La Tabla 5.5 presenta las frecuencias en cada configuración; en este caso, para la tarea uno, la variable tipo de configuración cognitiva estaba relacionada con los significados de la antiderivada que evidenciaban los estudiantes.

Tabla 5.5
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 1

Tipos de Configuración Cognitiva	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	*%*
	1	2	3		
Familia de funciones	5	2	5	12	8,7
Proceso inverso de la derivación	16	12	43	71	51,8
Primitiva de una función	6	1	7	14	10,2
Integral indefinida	4	1	11	16	11,7
Uso de la integral	4	1	4	9	6,7
Definición-TFC	0	10	0	10	7,3
No responde	2	0	3	5	3,6
Total	37	27	73	137	100

Para esta tarea, no se hace una descripción minuciosa de las prácticas matemáticas, dado que para situar la respuesta de un estudiante, ésta debía coincidir con la lista previa de la solución plausible (ver apartado 4.3.2.1.1). A continuación se muestra un ejemplo prototípico de cada una de las configuraciones cognitivas activadas en la tarea uno.

La configuración más usada por los estudiantes (51,8%), es *proceso inverso de la derivación*. La Figura 5.4 muestra la respuesta dada por un estudiante del grupo 3 (estudiantes para ingenieros), que evidencia con claridad la acepción personal que los estudiantes que movilizaron este tipo de configuración, confieren a la antiderivada.

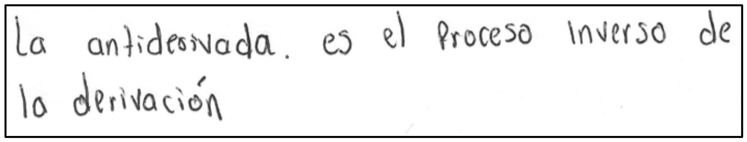
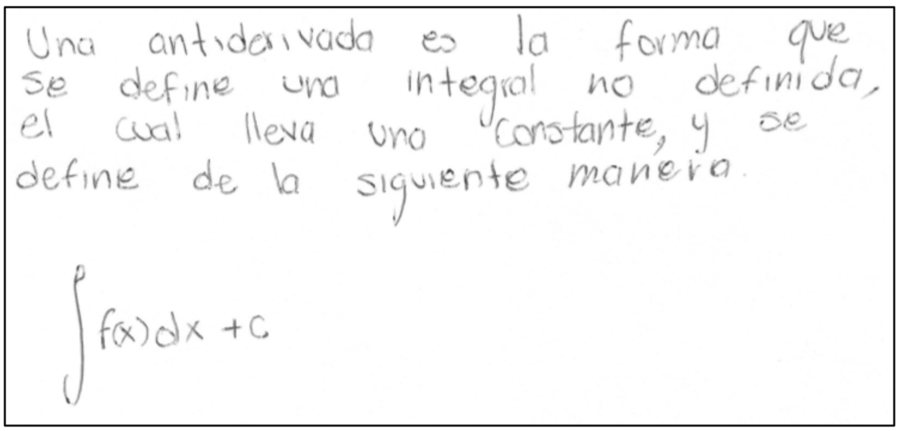

La antideorivada. es el Proceso Inverso de la derivación

Figura 5.4. Respuesta del estudiante E69 a la tarea uno.

La siguiente más activada por los estudiantes (11,7%) es la configuración cognitiva, *Integral indefinida,* la cual reúne las respuestas de estudiantes que de alguna forma expresan como sinónimos la antiderivada y la integral indefinida. Ejemplo de este tipo de respuestas se muestra en la Figura 5.5, correspondiente a un estudiante del grupo 3.


Una antiderivada es la forma que se define una integral no definida, el cual lleva una constante, y se define de la siguiente manera.

$$\int f(x)dx + C$$

Figura 5.5. Respuesta del estudiante E117 a la tarea uno

La tercera configuración cognitiva activada por los estudiantes (10,2%), corresponde a *primitiva de una función*. Ejemplo de este tipo de configuración se muestra en la Figura 5.6, correspondiente a un estudiante de grupo 2.

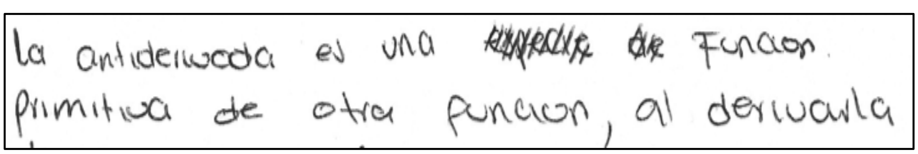

la antiderivada es una ~~[illegible]~~ de Funcion. Primitiva de otra funcion, al derivarla

Figura 5.6. Respuesta del estudiante E66 a la tarea uno

La cuarta configuración activada (8,7%), es la configuración cognitiva *familia de funciones*. Esta configuración reúne las acepciones que vinculan a la antiderivada con el proceso para hallar la familia de funciones, dada una función que se ha derivado, tal como se muestra en la Figura 5.7, respuesta dada por un estudiante de grupo 2.

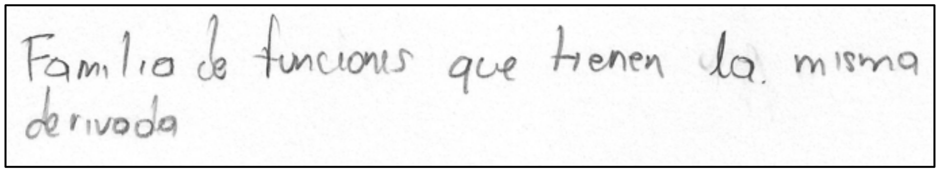
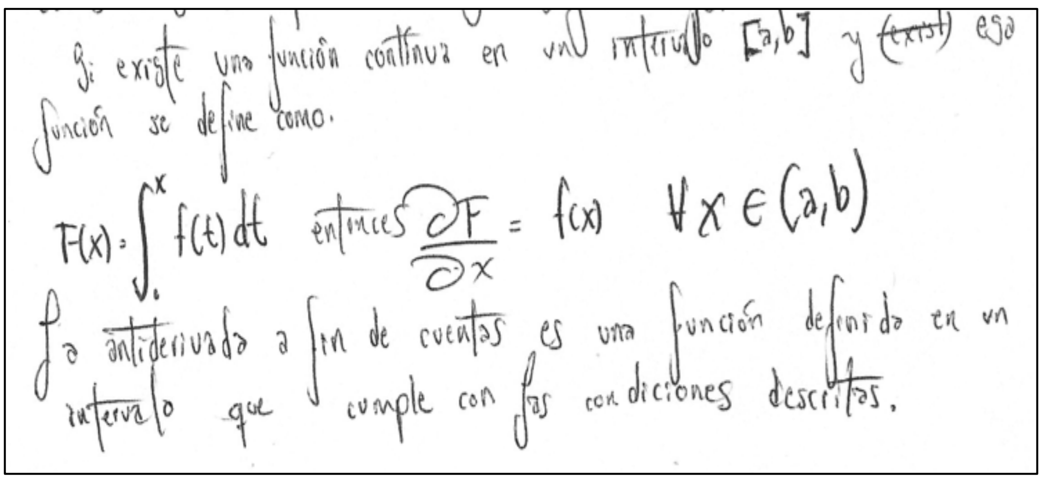

Familia de funciones que tienen la misma derivada

Figura 5.7. Respuesta del estudiante E33 a la tarea uno

La quinta configuración activada (7,3%) es la configuración cognitiva *definición-TFC* (Teorema fundamental del cálculo). En esta configuración se reúnen significados en donde se hace alusión al Teorema Fundamental del Cálculo, con la particularidad de expresar una definición del objeto en estudio. Esta configuración es característica de estudiantes de matemáticas, como se muestra en la Figura 5.8.


Si existe una función continua en un intervalo [a,b] y ~~existe~~ esa función se define como.

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{entonces} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

la antiderivada a fin de cuentas es una función definida en un intervalo que cumple con las condiciones descritas.

Figura 5.8. Respuesta del estudiante E47 a la tarea uno

La última configuración activada (6,7%), es la configuración cognitiva *uso de la integral*. Esta reúne todas las respuestas de los estudiantes que describen en el significado un uso de la integral, tal como se muestra en la Figura 5.9.

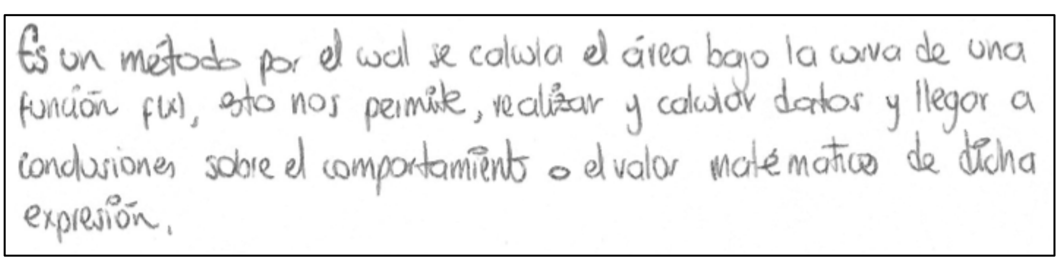

Es un método por el cual se calcula el área bajo la curva de una función f(x), esto nos permite, realizar y calcular datos y llegar a conclusiones sobre el comportamiento o el valor matemático de dicha expresión.

Figura 5.9. Respuesta del estudiante E93 a la tarea uno

Aunque en muchas de las respuestas sólo se proporcionaron “listados” de significados plausibles, esto era lo que se esperaba obtener para que a lo largo del cuestionario observáramos si los significados que proporcionaban los estudiantes en realidad los “conocían”, o solamente los enunciaron porque “recordaban”, a grandes rasgos, de sus cursos pasados.

Los estudiantes que se agruparon en las configuraciones cognitivas: ‘proceso inverso de la derivación’, ‘primitiva de una función’, ‘uso de la integral o definición-TFC’, de acuerdo con Hall (2010), evidencian indicativos de mala compresión del término matemático. Podríamos indicar en términos cuantitativos que son respuestas equivocadas (75,9%).

En algunos casos respuestas como la presentada en la Figura 5.9, evidencian desde la tarea uno, posibles desconexiones entre los diversos significados parciales de la antiderivada (ver capitulo 3).

5.4.2. Tarea dos: modelo sinóptico estructurado

La pregunta es descrita en el apartado 4.3.2.2. Para el análisis cuantitativo de las respuestas, se consideró la variable *grado de corrección* (correctas, parcialmente correcta, incorrectas y no responde), para esta tarea consideramos que una respuesta es correcta si el estudiante relaciona un mapa conceptual con más de diez de los términos dados. Una respuesta es parcialmente correcta, si proporciona una relación grupal con más de cinco de los términos dados. Una respuesta incorrecta es aquella en la que el estudiante no proporcione una relación grupal de los términos dados. La Tabla 5.6 muestra los resultados en frecuencias del grado de corrección de la tarea dos con sus respectivos porcentajes.

Tabla 5.6
Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 2

Grado de Corrección	*Frecuencia Total*	*%*
Correcta	22	16,1
Parcialmente correcto	107	78,1
Incorrecto	0	0,0
No responde	8	5,8
Total	137	100

Al tratarse de una pregunta de relación grupal sobre algunos términos del cálculo infinitesimal, los estudiantes no tuvieron dificultades para responder a la tarea. Como se puede observar en la Tabla 5.6, la gran mayoría los estudiantes (94,2%), presentaron un mapa conceptual con los conceptos dados. Sólo ocho de los estudiantes no responden la pregunta (5,8%). En esta tarea no se encontraron respuestas incorrectas, dado que la tarea buscaba indagar las regularidades y relaciones que los estudiantes establecen entre los términos que se les proporcionaron.

5.4.2.1 Análisis de las configuraciones cognitivas: tarea 2

En las soluciones que dieron los estudiantes a la tarea dos se identificaron tres tipos de configuraciones cognitivas, las cuales hemos denominado: sinóptico-básico; sinóptico-intermedio y sinóptico avanzado.

La Tabla 5.7 presenta las frecuencias de uso de cada configuración; en este caso, para la tarea dos, la variable tipo de configuración cognitiva estaba relacionada con la organización de redes jerárquicas de conceptos, que actúan como instrumentos de organización y de representación de conocimientos.

Tabla 5.7
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 2

Tipos de Configuración Cognitiva	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	*%*
	1	2	3		
Sinóptico - Básico	10	13	54	77	56,2
Sinóptico - Intermedio	18	10	13	41	29,9
Sinóptico - Avanzado	4	3	4	11	8,1
No responde	5	1	2	8	5,8
Total	37	27	73	137	100

En cuanto a la variable tipo de configuración cognitiva, en la Tabla 5.7 vemos que los estudiantes presentaron, en su mayoría, un modelo mapa conceptual básico (77), con los conceptos entregados. Un grupo considerable entrego un mapa conceptual intermedio (41). Un tercer grupo presenta un mapa conceptual avanzado (11).

Dada la globalidad de esta tarea, no se hace una descripción de las prácticas matemáticas de los estudiantes. A continuación se muestra un ejemplo prototípico de cada una de las configuraciones cognitivas activadas en las soluciones de la tarea uno.

La configuración más utilizada en la construcción de un mapa conceptual (56,2%), se la ha llamado configuración cognitiva *sinóptico – básico*, allí se han agrupado aquellas respuestas en las que se establecen relaciones con pocos de los elementos lingüísticos dados, y no se indica ni el sentido o dirección de la conexión, ni se proporcionan justificaciones para éstas. Un ejemplo se muestra en la Figura 5.10. En ella se puede observar cómo el estudiante conecta los conceptos, lo que da una idea de memorización de algún tipo de organización, implicando la identificación del objeto de estudio con los conceptos del cálculo infinitesimal.

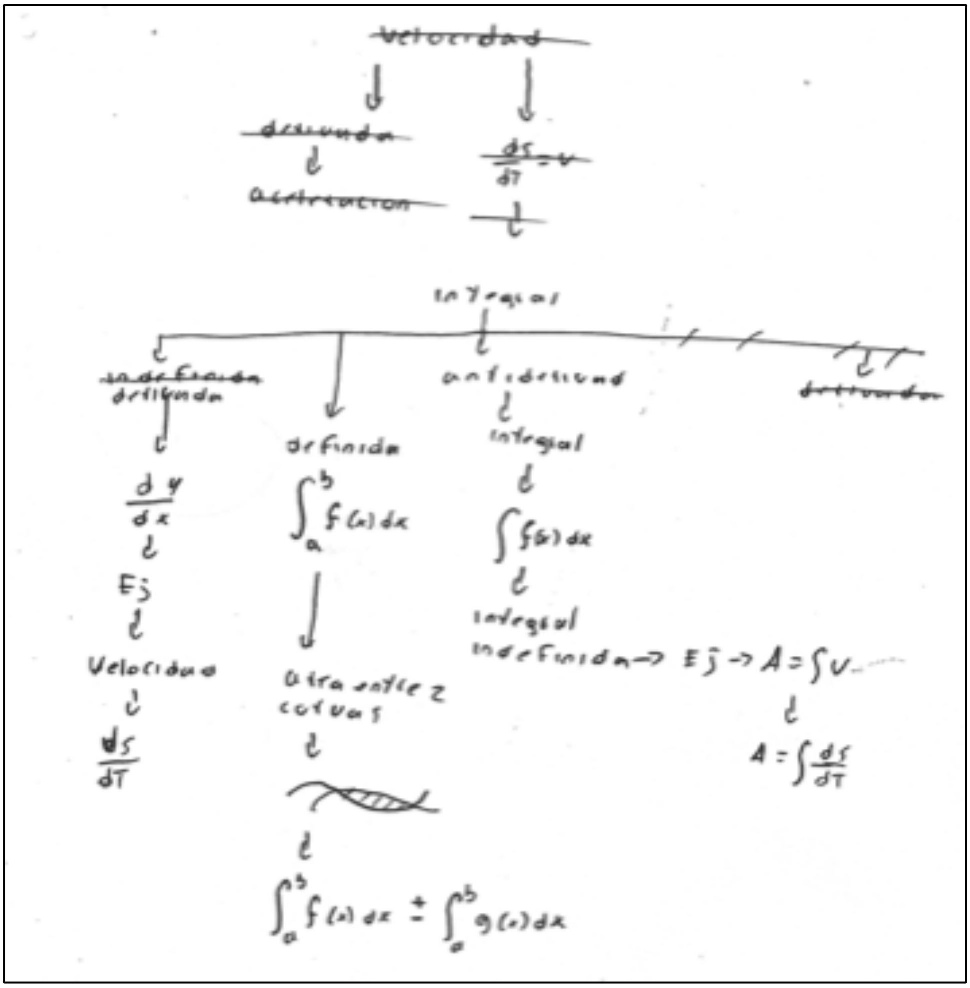


Figura 5.10. Respuesta del estudiante E86 a la tarea dos

La siguiente configuración cognitiva más activada (29,9%), fue la que denominamos *sinóptico – intermedia,* la cual refiere a aquellas respuestas en las que se relacionan al menos diez de las expresiones dadas, se indica el sentido o dirección de la conexión, y se proporcionan justificaciones sobre dichas conexiones. Sin embargo, no se distinguen diferencias entre la integral y la antiderivada. La Figura 5.11 muestra un ejemplo de mapa conceptual (propuesto por un estudiante para profesor de matemáticas), dado por conexiones que relacionan de manera global conceptos del cálculo infinitesimal.

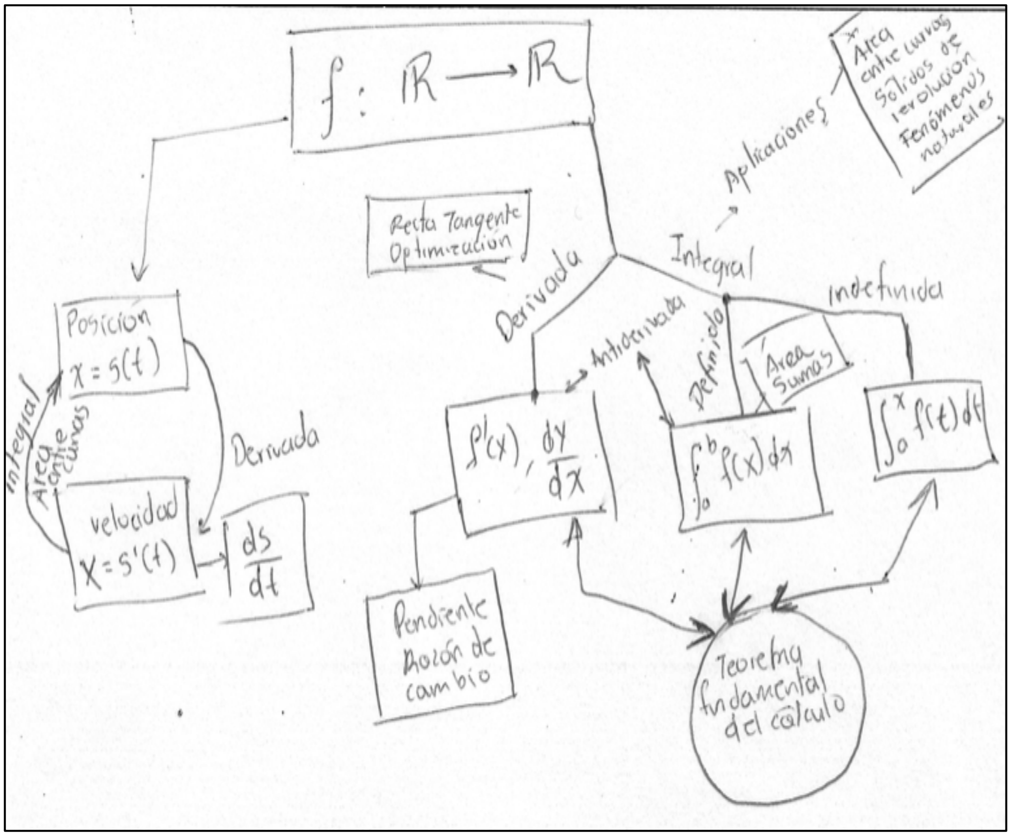


Figura 5.11. Respuesta del estudiante E5 a la tarea dos

Por último, la configuración cognitiva *sinóptico–avanzado,* que fue activada por el 8,1% de los estudiantes, reúne aquellas respuestas que además de establecer las conexiones de forma similar a las respuestas de la categoría anterior, se establecen y justifican diferencias para las nociones de integral y antiderivada. Un ejemplo se muestra en la Figura 5.12

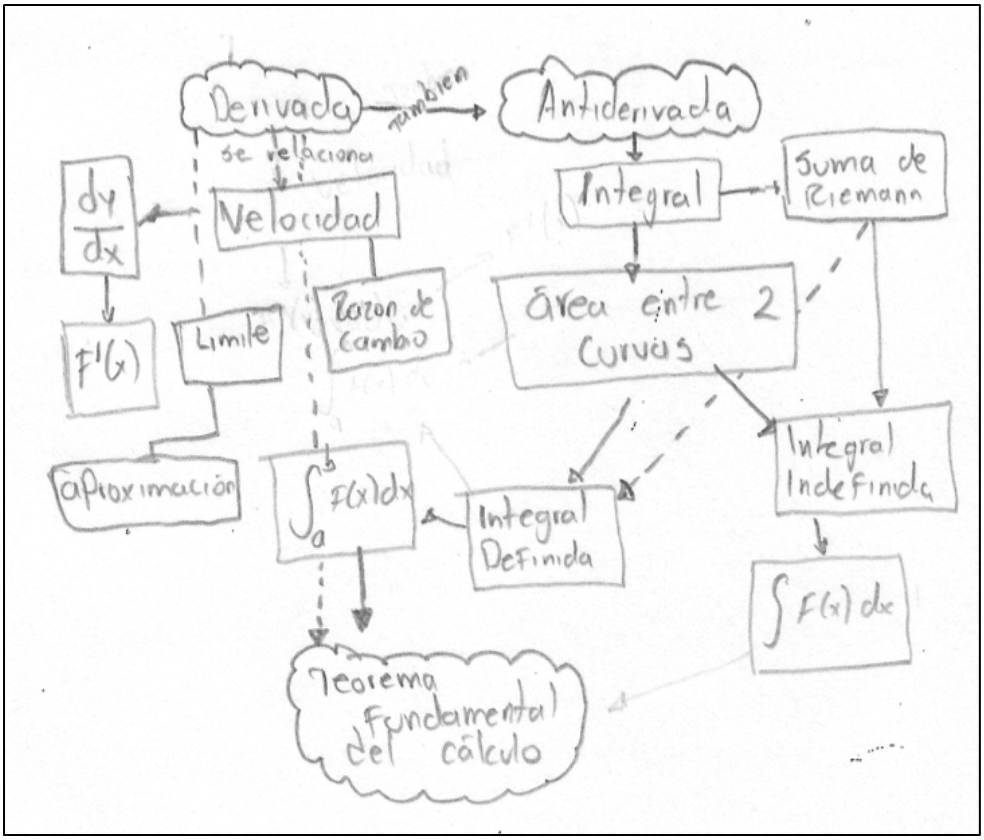


Figura 5.12. Respuesta del estudiante E37 a la tarea dos

Los diferentes mapas conceptuales presentados por los estudiantes y agrupados en las tres configuraciones cognitivas identificadas, nuevamente nos da evidencia sobre la concepción que tienen la mayoría de los estudiantes sobre la antiderivada como proceso inverso a la derivación, lo cual es indicador de una mala comprensión de los conceptos, tal como se describió anteriormente.

A su vez, los mapas presentados por los estudiantes nos van revelando la equivalencia (sinónimo) que establecen entre la integral indefinida y la antiderivada.

5.4.3. Tarea tres: cálculo de la función primitiva

Como comentamos en el apartado 4.2.3.3 la tarea constó de dos partes (A y B), la primera parte (A), tenía por objetivo encontrar una función que cumpliera con la una representación tabular y la segunda parte (B), tenia por objetivo inferir la familias de funciones a partir de la expresión encontrada en la primera parte de la tarea. Para el análisis cuantitativo de las respuestas de parte A, se consideró la variable *grado de corrección* (correctas, incorrectas y no responde), para esta parte de la tarea consideramos que una respuesta es correcta si el estudiante encuentra una expresión válida para $f(x)$. Una respuesta incorrecta es aquella en la que el estudiante no encuentra una expresión válida para $f(x)$.

Para el análisis cuantitativo de las respuestas de la parte B, se considero la variable *grado de corrección* (correctas, parcialmente correcta, incorrectas y no responde), para esta parte de la tarea consideramos que una respuesta es correcta si el estudiante encuentra una segunda expresión para $f(x)$ y cuya justificación es válida. Una respuesta parcialmente correcta es aquella en la que el estudiantes hace explícita la posibilidad de encontrar una segunda expresión para $f(x)$ pero no se da una justificación válida o bien la expresión dada es incorrecta. Una respuesta es incorrecta si el estudiante expresa de manera explícita o implícita que no es posible encontrar una segunda función para $f(x)$. La Tabla 5.8 muestra los resultados en frecuencias del grado de corrección de la tarea tres (parte A y B) con sus respectivos porcentajes.

Tabla 5.8
Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 3

Grado de Corrección	*Parte A*		*Parte B*	
	Frecuencia Total	*%*	*Frecuencia Total*	*%*
Correcta	125	91,2	72	52,6
Parcialmente Correcta	0	0	24	17,5
Incorrecta	7	5,1	20	14,6
No responde	5	3,7	21	15,3
Total	137	100	137	100

Como puede observarse en la Tabla 5.8, los estudiantes no tuvieron problemas en proporcionar una expresión simbólica de $f(x)$ en la parte A de la tarea, respondiendo correctamente el 91,2% de ellos. No obstante, tal como ocurrió en el estudio de Pino-Fan (2014), los estudiantes tuvieron más dificultades para responder la parte B de la tarea, pudiendo encontrar una expresión válida para $f(x)$, pero distinta a la que dieron en el apartado A, el 52,6% (72) de ellos.

5.4.3.1 Análisis de las configuraciones cognitivas: tarea 3

En las resoluciones que dieron los estudiantes a la tarea 3, se identificaron para la primera parte (A), dos tipos de configuraciones cognitivas que hemos denominado: gráfica-técnica y numérica-técnica. La Tabla 5.9 presenta las frecuencias para cada tipo de configuración.

Tabla 5.9
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 3-A

Tipos de Configuración Cognitiva	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	*%*
	1	2	3		
Gráfica-Técnica	13	5	8	26	19,0
Numérica-Técnica	23	22	61	106	77,4
No hay solución	1	0	4	5	3,6
Total	37	27	73	137	100

Como se puede observar en la tabla 5.9, los estudiantes activaron más la configuración numérica-técnica. En los apartados 5.4.3.1.1 y 5.4.3.1.2, analizaremos un ejemplo prototípico para cada una de las configuraciones identificadas en la parte A de la tarea.

Para la segunda parte (B), se identificaron cuatro configuraciones: interpretación errónea sobre la unicidad de la derivada, funciones equivalentes, técnica y avanzada. La Tabla 5.10 presenta las frecuencias en cada configuración identificada.

Tabla 5.10
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 3-B

Tipos de Configuración Cognitiva	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	*%*
	1	2	3		
Interpretación errónea sobre la unicidad de la derivada	1	3	5	9	6,6
Funciones equivalentes	2	0	9	11	8,0
Técnica	11	9	17	37	27,0
Avanzada	18	13	28	59	43,1
No da solución	5	2	14	21	15,3
Total	37	27	73	137	100

Como puede observar en la tabla 5.10, los estudiantes activaron más la configuración cognitiva avanzada (59), en los apartados 5.4.3.1.3, 5.4.3.1.4, 5.4.3.1.5 y 5.4.3.1.6, analizaremos un ejemplo prototípico para cada una de las configuraciones identificadas en la parte B de la tarea.

5.4.3.1.1. Configuración cognitiva gráfica-técnica

Esta configuración es activada por 26 de los estudiantes y reúne respuestas correctas tanto como incorrectas. El eje central de este tipo de resolución son las respuestas en las que a partir del conjuntos de datos se obtiene la expresión algebraica para la función derivada. Posteriormente a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en la "reglas" de antiderivación, se encuentra una expresión para $f(x)$.

En la Figura 5.13, se muestra la actividad matemática desarrollada por un estudiante (E79) para la tarea 3-A. La descripción de la práctica matemática del estudiante, comienza con la representación (algebraica) para determinar la función derivada $f'(x) = 2x$; la que encuentra por simple inspección –refiriéndose a la tabla de datos entregada–, encuentra $f(x) = x^2$ 'integrando', para luego elaborar la gráfica la parábola de $f(x) = x^2$ en un plano cartesiano.

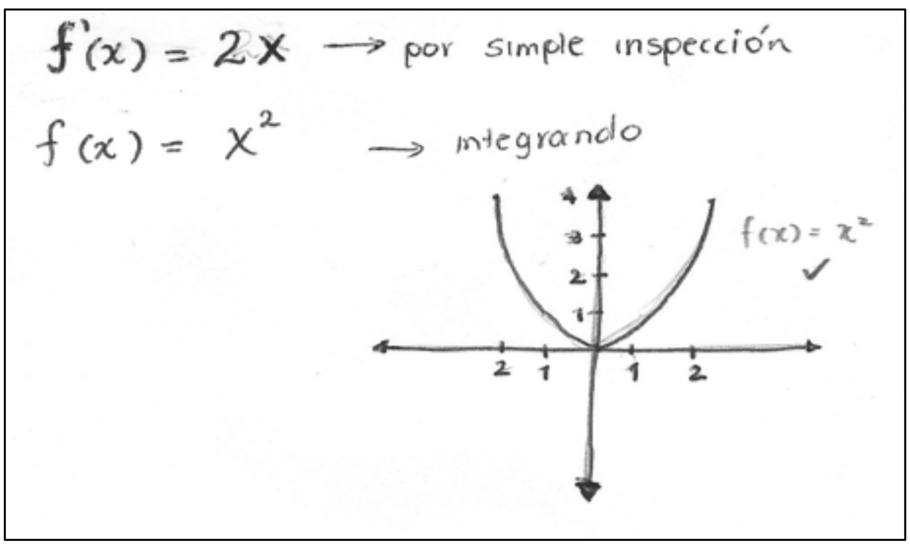


Figura 5.13. Respuesta del estudiante E79 a la tarea 3-A

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E79), es posible identificar diversos elementos lingüísticos (gráficos, simbólicos y verbales) que dan cuenta de conceptos/definiciones y proposiciones que el estudiante utiliza en sus procedimientos y en sus argumentos. Ejemplo de elementos lingüísticos son: la representación gráfica y simbólica para la función cuadrática $f(x) = x^2$, el elemento lingüístico verbal "por simple inspección", considera la construcción de una función a partir de una tabla de datos. Entre los conceptos/definiciones, se encuentra la integral vista más como proceso. En cuanto al procedimiento que utiliza el estudiante podemos destacar la integración de $f'(x) = 2x$, que le permite obtener $f(x) = x^2$ por medio de la propiedad implícita $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. El argumento que utiliza el estudiante para 'validar' sus procedimientos (de "inspección" e integración) es la elaboración de la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

5.4.3.1.2. Configuración cognitiva numérica-técnica

La configuración más activada en las soluciones de los estudiantes a la tarea 3-A (106), y reúne respuestas correctas tanto como incorrectas. El eje central de este tipo configuración son las respuestas en las que a partir del conjunto de datos de la tabla, se determina el patrón que permite establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada. Posteriormente, a partir de argumentaciones y procedimientos centrados en la antiderivada, se encuentra una expresión para $f(x)$.

En la Figura 5.14 se muestra la actividad matemática desarrollada por un estudiante (E39) para la tarea 3-A. La práctica matemática del estudiante comienza con la evaluación numérica de los valores dados en la tabla, para encontrar una recurrencia y determinar la función derivada $f'(x) = 2x$; función que integra encontrado $f(x) = x^2$.

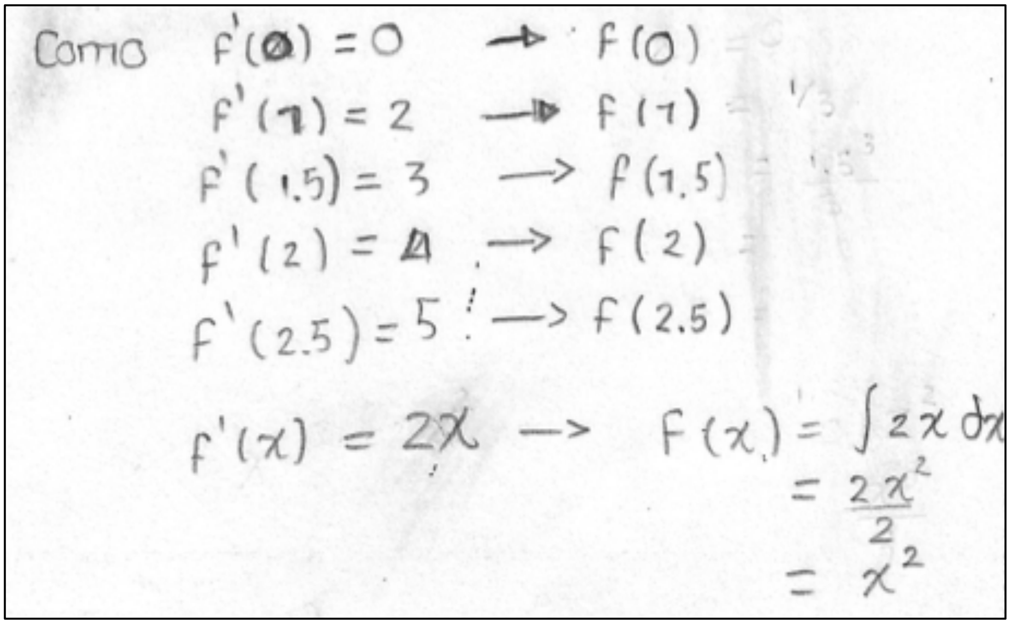


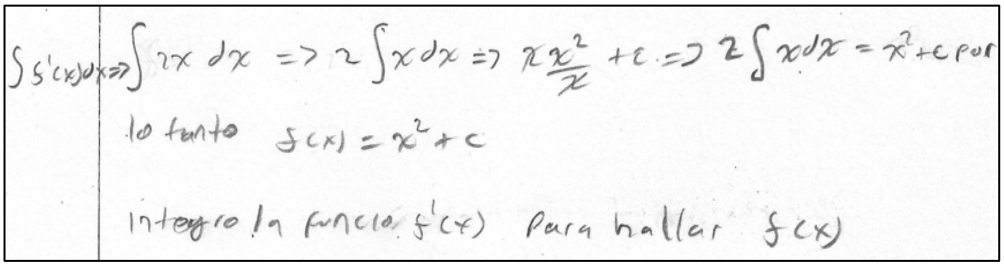
Figura 5.14. Respuesta del estudiante E39 a la tarea 3-A

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante E39, es posible identificar elementos lingüísticos (simbólicos) que dan cuenta de conceptos/definiciones y proposiciones que el estudiante utiliza en sus procedimientos y en sus argumentos. Ejemplo de elementos lingüísticos son: la representación simbólica particular para cada uno de los valores, $f'(0) = 0$; $f'(1) = 1$; $f'(1,5) = 3$; $f'(2) = 4$; $f(2,5) = 5$, sus procedimientos de evaluación numérica lo llevan a generalizar en la función $f'(x) = 2x$. En la función que encuentra, utiliza la propiedad de la integración $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, de forma implícita, obteniendo $f(x) = x^2$, sobre ella utiliza el concepto/definición de integral y derivada de una función y sus propiedades para obtener de cuadrática $f(x) = x^2$, los argumentos de validación están dados implícitamente con el concepto de integral como inverso de la derivada.

5.4.3.1.3. Configuración cognitiva avanzada

En las soluciones que proporcionaron los estudiantes a la tarea 3-B, esta es la configuración más activada (43,1%), y reúne respuestas correctas. El eje central de este tipo configuración, son las respuestas en las que los procedimientos y justificaciones realizan en forma explicita una conexión con conceptos como el de antiderivada.

En la Figura 5.15 se muestra la actividad matemática desarrollada por un estudiante (E105) para la tarea 3-B. La práctica matemática del estudiante comienza con el planteamiento de la integral de una función derivada $\int f'(x)dx$, aplica algunas propiedades de la integrales, encontrando la función $f(x) = x^2 + C$, explica su procedimiento "integro la función $f'(x)$ para hallar $f(x)$".



$\int f'(x)dx \Rightarrow \int 2x\,dx \Rightarrow 2\int x\,dx \Rightarrow \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + c \Rightarrow 2\int x\,dx = x^2 + c$ por lo tanto $f(x) = x^2 + c$

integro la funcio $f'(x)$ para hallar $f(x)$

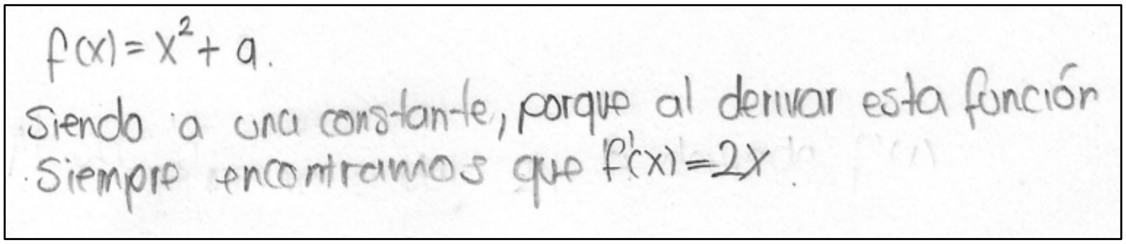
Figura 5.15. Respuesta del estudiante E105 a la tarea 3-B

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E105), es posible identificar elementos lingüísticos (simbólicos y verbales) que dan cuenta de conceptos/definiciones y proposiciones que el estudiante utiliza en sus procedimientos y en sus argumentos. Ejemplo de elementos lingüísticos son: la representación simbólica para $\int f'(x)dx$. El lenguaje algebraico es relevante en el uso de dos propiedades de integración:1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$; 2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. En sus procedimientos el estudiante utiliza el concepto/definición de integral. La argumentación verbal "integro la función $f'(x)$ para hallar $f(x)$" validan sus procedimientos.

5.4.3.1.4. Configuración cognitiva técnica

Esta configuración activada en las soluciones de la tarea 3-B, fue activada por el 27% de los estudiantes y reúne respuestas correctas. El eje de esta configuración son las respuestas en las que los argumentos que se centran en una regla de derivación.

En la Figura 5.16 se muestra la actividad matemática desarrollada por un estudiante (E113) para la tarea 3-B. La práctica matemática del estudiante comienza con el planteamiento de una familia de funciones $f(x) = x^2 + a$, indicando que al derivar esta función encuentra una nueva función que corresponde a $f'(x) = 2x$; suponemos que indica a la nueva función con la notación de derivada, dado que es la función de la tarea 3-A .



$f(x) = x^2 + a$.
Siendo a una constante, porque al derivar esta función
Siempre encontramos que $f'(x) = 2x$

Figura 5.16. Respuesta del estudiante E113 a la tarea 3-B

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E113), es posible identificar elementos lingüísticos (simbólicos y verbales) que dan cuenta de conceptos/definiciones: función, familia de funciones, derivada, constante. Propiedades/ Proposiciones: posiblemente reglas de integración (para dar la familia de funciones), reglas de derivación, concretamente la proposición “la derivada de una función constante es cero” de forma implícita. Para encontrar la familia de funciones $f(x) = x^2 + a$, el estudiante claramente hizo uso de la integral indefinida. Sus procedimientos son el cálculo de la integral indefinida de la función $2x$, para encontrar la familia de funciones y luego justifica su respuesta mediante el procedimiento inverso de derivar la familia de funciones para “comprobar” que efectivamente llega a la función derivada $2x$. Por lo tanto sus argumentos están centrados en los dos procedimientos anteriores, con los cuales valida su respuesta.

La lógica de argumentación de los estudiantes que movilizaron este tipo de configuración, se basa en la acepción de la antiderivada como proceso inverso de la derivación. Y que ellos ven este proceso inverso más desde un punto de vista procedimental que conceptual, lo que se puede observar con el tipo de argumentos centrados en los procedimientos descritos.

5.4.3.1.5. Configuración cognitiva funciones equivalentes

Esta configuración de la pregunta 3-B, es activada por el 8% de los estudiantes, reúne las respuestas incorrectas en las cuales se evidencia que no es posible hallar otra función distinta a la encontrada en la pregunta 3-A, dado que cualquier otra función sería equivalente a la encontrada.

La Figura 5.17 presenta la actividad matemática desarrollada por un estudiante (E73) para la tarea 3-B. La práctica matemática del estudiante comienza con elementos verbales para introducir una función que considera igual a la encontrada en la parte A de la tarea, luego asevera que la función es igual, y no encuentra otra, “no hay mas”, señala.

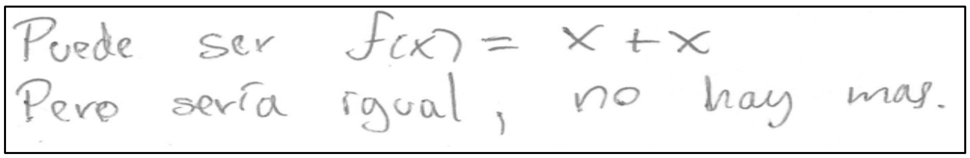

Puede ser $f(x) = x + x$
Pero sería igual, no hay mas.

Figura 5.17. Respuesta del estudiante E73 a la tarea 3-B

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E73), es posible identificar elementos lingüísticos (verbales y simbólico) que dan cuenta del concepto/definición de igualdad de funciones. La proposición del estudiante esta dada por la equivalencia encontrada en la primera parte (A) de la tarea $f'(x) = x^2$, y la funcion $f(x) = x + x$. Argumento que ‘valida’ en la sentencia “no hay más”.

5.4.3.1.6. Configuración cognitiva interpretación errónea sobre la unicidad de la derivada

Esta configuración de la pregunta 3-B, que reúne respuestas incorrectas, fue activada por el 6% de los estudiantes. El eje central de este tipo de resolución son las respuestas en las que se tiene una concepción errónea sobre la unicidad de la derivada en un punto y la función derivada.

La Figura 5.18 presenta la actividad matemática desarrollada por un estudiante (E83), para la tarea 3-B. La práctica matemática del estudiante comienza con negación a la pregunta propuesta, explicando la no posibilidad de encontrar una función $f(x)$, distinta a la planteada en la parte 3-A de la tarea, a través de argumentos centrados en la unicidad de la función primitiva.

No, ya que es posible que la función f'(x) allí planteada solamente sea originada por una única función primitivo, posteriormente hallada por su antiderivada.

Figura 5.18. Respuesta del estudiante E83 a la tarea 3-B

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E83), es posible identificar elementos lingüísticos tales como la descripción verbal de sus argumentos, los cuales están basados la falsa concepción de unicidad que se origina por la concepción de proceso inverso directo que tiene sobre la antiderivada, es decir, dada la función f' existe una y sólo una f ya que la derivada es única (pensando en que regresa a la función original de la cual se parte para dar f' y no al conjunto de funciones). El estudiante utiliza dos conceptos (función primitiva y antiderivada), que lo describe como únicas, el sentido que el estudiante le confiere a la antiderivada es dado como el procedimiento para hallar la primitiva, este sentido dado por el estudiante es indicador de mala comprensión del concepto matemático, tal como lo describe Hall (2010), puesto que la antiderivada es el procedimiento para encontrar una familia de funciones a partir de una función que se ha derivado, mientras que la primitiva es un elemento de dicha familia de funciones (elemento resultado de asignar el valor cero a la constante real, $C = 0$).

5.4.4. Tarea cuatro: Exploración gráfica de la antiderivada

La pregunta, descrita en el apartado 4.3.2.4, tenía por objetivo identificar algunos integrantes de una familia de funciones que componen la antiderivada de una función, a partir de la gráfica de una función derivada. Para el análisis cuantitativo de las respuestas, se consideró la variable *grado de corrección* (correctas, parcialmente correctas, incorrectas y no responde). Consideramos que una respuesta es correcta, si el estudiante indica las gráficas correctas y argumenta la forma de encontrarlas. Una respuesta parcialmente correcta, si el estudiante proporciona las gráficas correctas y no argumenta la forma de encontrarlas. Respuesta incorrecta es aquella donde el estudiante proporciona las gráficas que no corresponden a las antiderivadas de la función dada.. La Tabla 5.11 muestra los resultados en frecuencias del grado de corrección de la tarea cuatro con sus respectivos porcentajes.

Tabla 5.11
Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 4

Grado de Corrección	*Frecuencia Total*	*%*
Correcta	19	13,9
Parcialmente Correcta	28	20.4
Incorrecta	60	43,8
No responde	30	21,9
Total	137	100

Al tratarse de una pregunta que solicita un *tratamiento* (Duval, 2006) sobre una gráfica, se esperaba que los estudiantes dedujeran la antiderivada de una función, analizando el comportamiento de la gráfica de la función derivada proporcionada. Algunos estudiantes no respondieron la tarea (21,9%); el 64,2% de los estudiantes tuvieron dificultades en responder la pregunta (respuestas incorrectas y parcialmente correctas) como se puede observar en la Tabla 5.11. Sólo el 13,9% de los estudiantes encontraron las gráficas solicitadas, lo que indica que este pequeño grupo de estudiantes pudo inferir, y argumentar, el comportamiento de la gráfica de la función derivada para determinar las gráficas de sus antiderivadas.

5.4.4.1 Análisis de las configuraciones cognitivas: tarea 4

En las soluciones que dieron los estudiantes a la tarea 4, se identificaron tres configuraciones cognitivas, que hemos denominado: *interpretación tabular sobre la gráfica*, *función particular* y *análisis avanzado*. La Tabla 5.12 presenta las frecuencias en cada tipo de configuración.

Tabla 5.12
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 4

Tipos de Configuración Cognitiva	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	*%*
	1	2	3		
Interpretación tabular sobre la gráfica	5	5	20	30	21,9
Función particular	24	14	15	53	38,7
Análisis Avanzado	6	6	12	24	17,5
No da solución	2	2	26	30	21,9
Total	37	27	73	137	100

Como se comento en el apartado 4.3.2.4, la tarea tenía por objetivo inferir algunos miembros de la familia de funciones de una función que se ha derivado, a partir de la gráfica de la función derivada. En la tabla 5.12 se observa que los estudiantes activaron más la configuración cognitiva *función particular* (53). En los apartados 5.4.4.1.1, 5.4.4.1.2, y 5.4.4.1.3, analizaremos un ejemplo prototípico de cada una de las configuraciones identificadas en las soluciones de esta tarea.

5.4.4.1.1. Configuración cognitiva función particular

Esta configuración cognitiva es la que más activaron los estudiantes (53), y reúne respuestas parcialmente correctas e incorrectas. El eje central de este tipo de configuración son las respuestas en las que de forma implícita se particulariza la gráfica de la función derivada dada, es decir se asigna una expresión algebraica que corresponda a la gráfica dada, luego esta expresión algebraica es utilizada para que a través de 'métodos de antiderivación', se identifiquen los miembros de la familia de curvas (antiderivada) que se solicitan en la tarea.

La Figura 5.19 presenta la actividad matemática desarrollada por un estudiante (E8), para la tarea 4. La práctica matemática del estudiante inicia cuando asigna a la gráfica de la función con la expresión $f(x) = -(x-1)^2 + 1$, deriva esta función y luego la integra para encontrar "$-\frac{x^3}{3} + x^2 + C$". Posteriormente, el estudiante asigna valores particulares, con el fin de identificar las funciones dadas en la graficas (e.g., $h(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 1$, $g(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 1{,}3$).

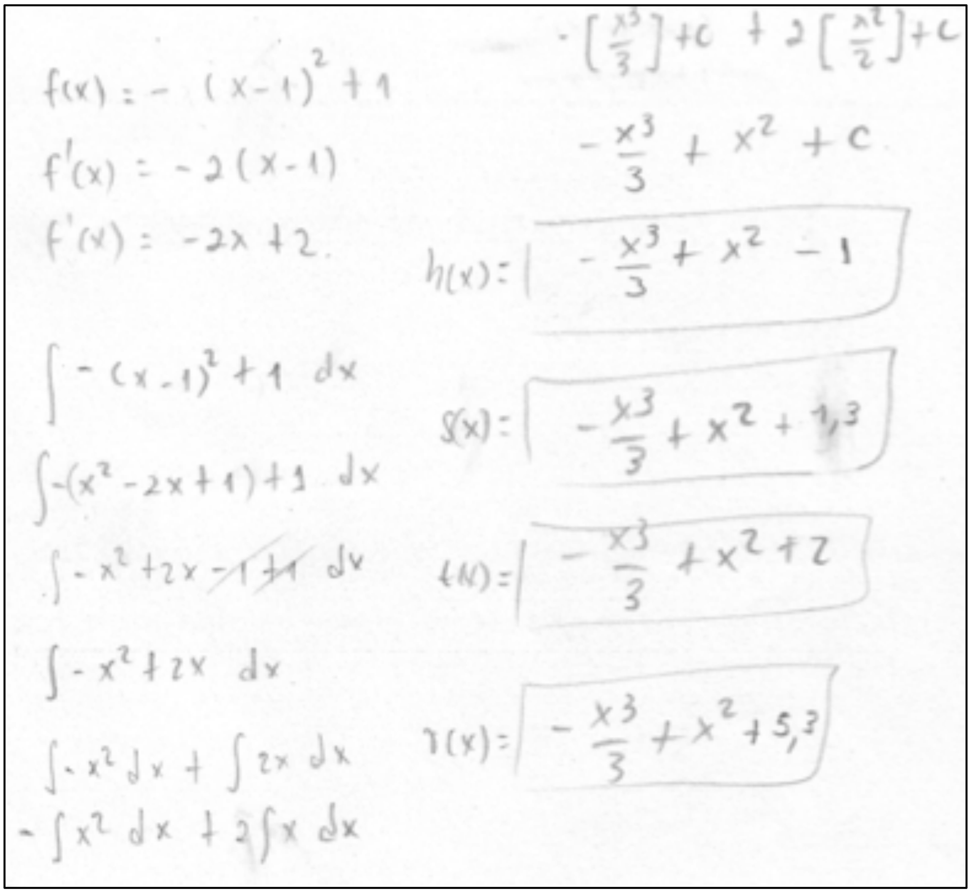


Figura 5.19. Respuesta del estudiante E8 a la tarea 4

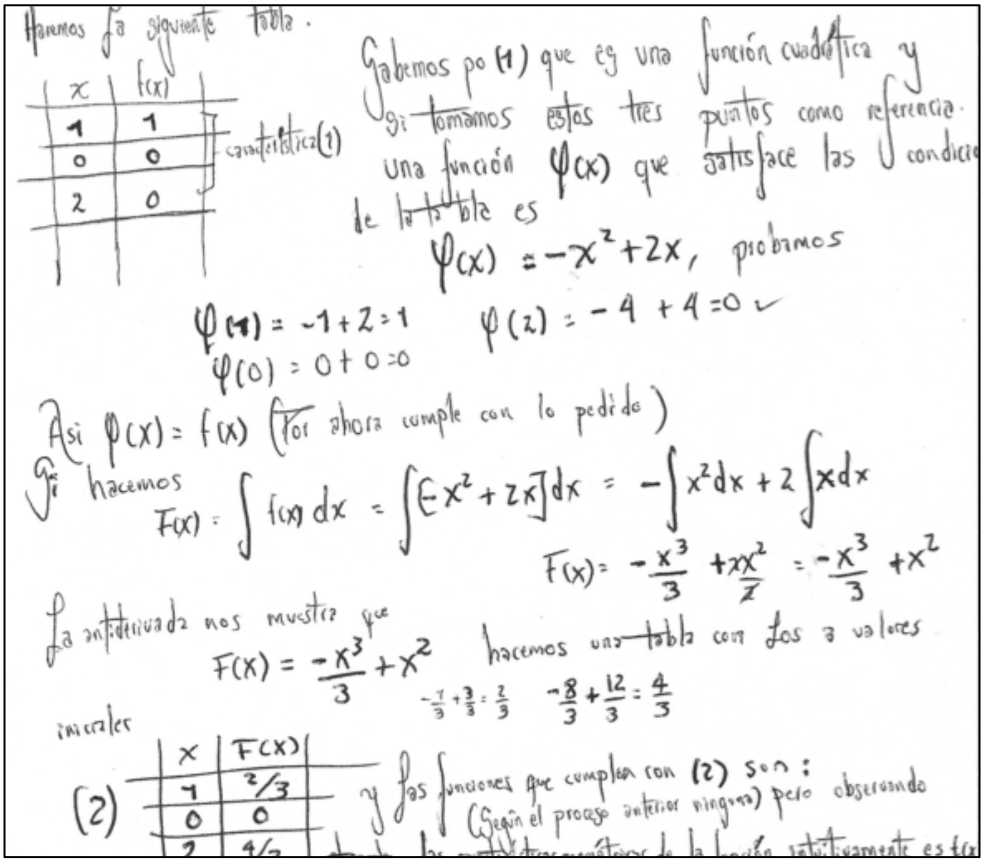
En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E8), es posible identificar elementos lingüísticos algebraicos tales como la expresión algebraica $f(x) = -(x-1)^2 + 1$, $f'(x) = -2x + 2$, entre otros. Los principales conceptos/definiciones que se movilizaron fueron los de derivada, antiderivada, función, suma de expresiones algebraicas y suma de constantes reales. Usa propiedades de la derivación de forma implícita $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$, $\frac{d}{dx}[k] = 0$; al igual que propiedades de la integral $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, y $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$. Los procedimientos para encontrar algunos de los miembros de la antiderivada consisten en la asignación de valores particulares a la 'constante real' para particularizar cada una de las gráficas dadas en la tarea. Los argumentos están sustentados en el la función algebraica asociada a la gráfica, función en la que los procedimientos de integración y asignación de valores 'validan' la identificación de las curvas solicitadas.

La lógica de argumentación de los estudiantes que movilizaron este tipo de configuración, se basa en la habilidad para el cambio de representación gráfica a la representación algebraica, para luego volver a la representación gráfica, es decir una *conversión* (Duval, 2006), entendida como la transformación de una representación, en otro registro diferente al entregado.

5.4.4.1.2. Configuración cognitiva interpretación tabular sobre la gráfica

Esta configuración de la tarea cuatro, activada por el 21,9% de los estudiantes, reúne respuestas parcialmente correctas e incorrectas, y se activó en aquellas respuestas en las que se evidencia la construcción de tablas de valores a partir de la gráfica de la función dada. Procedimiento que se utiliza para interpolar los puntos encontrados, y de esta forma aproximar a una función la gráfica que se entrega. Función que se manipula para identificar las gráficas que corresponden a la antiderivada.

La Figura 5.20 presenta la actividad matemática desarrollada por un estudiante (E47), para la tarea 4. La práctica matemática del estudiante inicia con la tabulación de puntos identificados en la gráfica de la función dada en la pregunta, la cual con procedimientos de interpolación lleva a la gráfica de la función particular $f(x) = -x^2 + 2x$, que corrobora evaluando en los valores que él ha determinado. En la función encontrada procede con la búsqueda de la antiderivada por medio de integración, con lo que encuentra la función $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2$, en la cual evalúa tres valores para encontrar su respectiva imagen, procedimiento con el cual determinar la función antiderivada solicitada.


Hacemos la siguiente tabla.

x	$f(x)$
1	1
0	0
2	0

característica (1)

Sabemos por (1) que es una función cuadrática y si tomamos estos tres puntos como referencia. Una función $\varphi(x)$ que satisface las condicio[nes] de la tabla es

$\varphi(x) = -x^2+2x$, probamos

$\varphi(1) = -1+2=1$ $\quad \varphi(2) = -4+4=0$

$\varphi(0) = 0+0=0$

Así $\varphi(x) = f(x)$ (Por ahora cumple con lo pedido)

Si hacemos

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int[-x^2+2x]dx = -\int x^2dx + 2\int x\,dx$

$F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} = -\frac{x^3}{3} + x^2$

La antiderivada nos muestra que

$F(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2$ hacemos una tabla con los 3 valores iniciales

$-\frac{1}{3}+\frac{3}{3}=\frac{2}{3}$ $\quad -\frac{8}{3}+\frac{12}{3}=\frac{4}{3}$

(2)

x	$F(x)$
1	2/3
0	0
2	4/3

y las funciones que cumplen con (2) son: (Según el proceso anterior ninguna) pero observando

Figura 5.20. Respuesta del estudiante E47 a la tarea 4

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E47), es posible identificar elementos lingüísticos (tabular, algebraico y verbal) tales como: la expresión tabular, construida a partir de algunos puntos que forman la gráfica dada en la tarea, así como la expresión algebraica $\varphi(x) = -x^2 + 2x$, $F(x) = \int f(x)dx$ entre otras. Los conceptos/definiciones de integración, igualdad de funciones, función cuadrática e interpolación. En los procedimientos la construcción tabular (asociada a la gráfica) satisfacen una condición de la función presentada en la tarea. Esta función la integra, y el resultado lo evalúa en tres valores, para obtener imágenes, que son puntos (coordenadas rectangulares), que se utilizan para ubicar en las gráficas de la Figura 7b de la tarea. Entre las propiedades usadas en los procedimientos están: $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, si $x = a$ y $f(x)$ es una función, $f(a)$ es la evaluación de a en la función $f(x)$. Los argumentos verbales “sabemos por (1) que es una función cuadrática y si tomamos tres puntos de referencia…” que ‘validan’ la construcción de una función $\varphi(x)$, la cual es equivalente a otra función $f(x)$, función que usa para aplicar la procedimientos antes descritos.

La lógica de argumentación de los estudiantes que movilizaron este tipo de configuración, se basa en la habilidad para el cambio de representación gráfica a la representación tabular, para luego volver a la representación gráfica, es decir una *conversión* (Duval, 2006).

5.4.4.1.3. Configuración cognitiva análisis avanzado

Esta última configuración de la tarea 4, que agrupa las respuestas de 24 estudiantes, reúne respuestas correctas y parcialmente, y se activó en las respuestas en las que los procedimientos y justificaciones se realizan de forma implícita dando un análisis de la gráfica a partir de criterios de concavidad, puntos de inflexión, máximos, mininos, dominio recorrido, entre otros.

La Figura 5.21 presenta la actividad matemática desarrollada por un estudiante (E64) para la tarea 4. La práctica matemática del estudiante inicia haciendo una descripción de la función $f(x)$ cuando se hace cero, de esta forma en la gráfica de $F(x)$ (antiderivada), debe haber un mínimo, máximo o punto de inflexión, de esta forma descarta las funciones $r(x), i(x)$ y $u(x)$. Luego analiza dónde la función $f(x) \leq 0$, cuando $x \leq 0$, la antiderivada $F(x)$ es creciente en esos intervalos, lo que descarta a $s(x)$, quedando sólo las funciones $h(x)$ y $t(x)$.

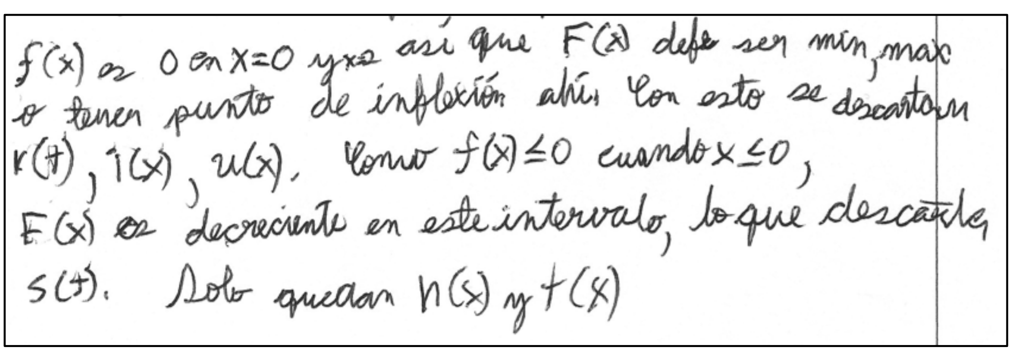

f(x) es 0 en x=0 así que F(x) debe ser min, max o tener punto de inflexión ahí. Con esto se descartan r(x), i(x), u(x). Como f(x)≤0 cuando x≤0, F(x) es decreciente en este intervalo, lo que descarta s(x). Solo quedan h(x) y t(x)

Figura 5.21. Respuesta del estudiante E64 a la tarea 4

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E64), es posible identificar elementos lingüísticos (verbal y algebraico) tales como: la expresión algebraica para iniciar el análisis de $f(x)$, el uso de funciones $r(s), t(x), u(x), h(x)$ y $t(x)$, la evaluación de $x = 0$, $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$. Así mismo podemos observar que el estudiante hace uso de conceptos/definiciones tales como: concavidad, puntos de inflexión, máximos, mínimos, función creciente, función decreciente. Propiedades tales como $f'(x) = 0$ para determinar, un punto máximo, mínimo o de inflexión en $F(x)$, análisis de valores de $f'(x) \leq 0$ cuando $x \leq 0$, para determinar si $F(x)$ es creciente o decreciente. El procedimiento del estudiante segmentar la función dada " $f(x)$ es 0 en $x = 0$… $f(x) \leq 0$ cuando $x = 0$", para usar las propiedades referidas anteriormente. Los argumentos del estudiante están basados en la verificación de cumplimiento de las propiedades antes descritas, para "descartar" algunas de la funciones dadas y determinar la solución correcta.

5.4.5. Tarea cinco: diferencia entre integral y antiderivada

El objetivo de la tarea, tal como señalamos en el apartado 4.3.2.5, es establecer diferencias entres dos nociones a partir de los significados (personales e institucionales). Para esta tarea consideramos que una respuesta es correcta, si el estudiante establece y proporciona justificaciones válidas sobre las diferencias entre la integral y la antiderivada. Respuestas parcialmente correctas son aquellas en la que los estudiantes señalan que sí hay diferencias entre dichas nociones, pero no se justifica o la justificación no es del todo válida. Una respuesta incorrecta es aquella en la que no se encuentran diferencias entre las nociones de integral y antiderivada. La Tabla 5.13 muestra los resultados en frecuencias del grado de corrección de la tarea cuatro con sus respectivos porcentajes.

Tabla 5.13
Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 5

Grado de Corrección	*Frecuencia Total*	*%*
Correcta	64	46,7
Parcialmente Correcta	24	17,5
Incorrecta	40	29,2
No responde	9	6,6
Total	137	100

Al tratarse de una pregunta que solicitaba establecer diferencias entres dos nociones, se esperaba que los estudiantes pusieran en juego los significados de la antiderivada (personales o institucionales) para encontrar la diferencia. Esto ocurrió en 64 de los estudiantes, quienes argumentaron esta diferencia, los otros 73 estudiantes no justificaron la diferencia, respondiendo de forma incorrecta o simplemente no respondieron, por lo que podríamos decir que éste 53,3% de estudiantes miran la derivada y la integral como términos sinónimos, tal como lo encontrado por Hall (2010) en su estudio. Al respecto Hall (2010) realizó un estudio para determinar los significados que los estudiantes le confieren a términos matemáticos que se usan en un curso de cálculo. En que concluye que un indicador de mala comprensión de los términos matemáticos se puede encontrar cuando se establecen sinónimos a términos distintos, como en el caso de la integral y la antiderivada, dado que una integral es generalización de una suma infinita de sumandos infinitamente pequeños y la antiderivada es el procedimiento para encontrar la familia de funciones a partir de una función que ha sido derivada.

5.4.5.1. Análisis de las configuraciones cognitivas: tarea 5

En las soluciones que dieron los estudiantes a la tarea 5, se identificaron tres configuraciones cognitivas, que hemos denominado: *particular-general*, *definiciones para las nociones* y *ejemplos de uso*. La Tabla 5.14 presenta las frecuencias y porcentajes de cada configuración.

Tabla 5.14
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 5

Tipos de Configuración	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	*%*
	1	2	*3*		
Particular-General	9	14	34	57	41,6
Definiciones para las nociones	12	9	21	42	30, 6
Ejemplos de uso	13	3	13	29	21,2
No responde	3	1	5	9	6,6
Total	37	27	73	137	100

En la tabla 5.14, se observa que los estudiantes activaron más la configuración cognitiva *particular-general* (57), en los apartados 5.4.5.1.1, 5.4.5.1.2, y 5.4.5.1.3, analizaremos un ejemplo prototípico para cada una de las configuraciones identificadas en la tarea.

Para el caso de la tarea cinco, la variable tipo de configuración cognitiva estaba relacionada con la argumentación y justificación en la diferencia de las nociones, previa identificación de elementos primarios en la respuesta entregada por los estudiantes.

5.4.5.1.1. Configuración cognitiva particular-general

Esta configuración de la tarea 5, activada por el 41,6% de los estudiantes, agrupa respuestas correctas y parcialmente correctas, el eje central de esta configuración son las respuestas cuyas justificaciones están orientadas en la distinción de la antiderivada (o integral indefinida) como caso general de la integral definida. Aclaramos que la antiderivada es sinónimo de integral indefinida, siempre que la funciones estén establecidas en los números reales. Esta configuración coincide con los resultados descritos por Hall (2010).

La Figura 5.22 presenta la actividad matemática desarrollada por un estudiante (E66), para la tarea 4. La práctica matemática del estudiante inicia haciendo una descripción verbal para indicar que la antiderivada es lo mismo que una integral indefinida y un “caso particular de la función integral”.

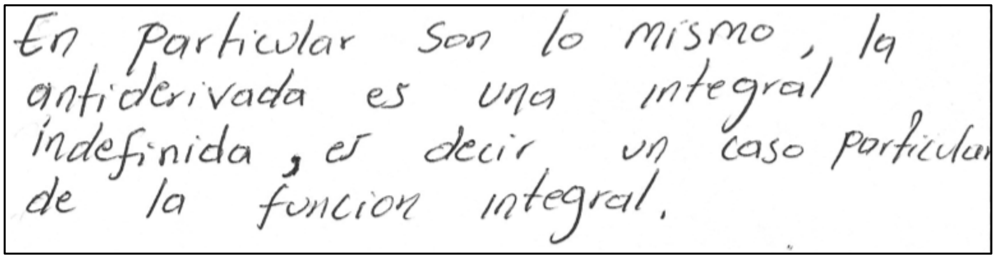

En particular son lo mismo, la antiderivada es una integral indefinida, es decir un caso particular de la funcion integral.

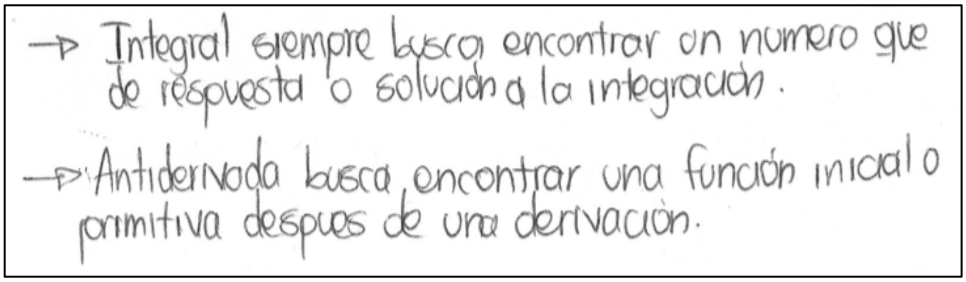
Figura 5.22. Respuesta del estudiante E66 a la tarea 5

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E66), es posible identificar elementos lingüísticos (verbal) que dan cuenta de varios conceptos/definiciones como lo son: antiderivada, integral indefinida y función. Entre las proposiciones están: ‘antiderivada igual integral indefinida’ y ‘la integral indefinida es un caso particular de una función integral’. El argumento principal de los estudiantes que activaron esta configuración esta dado por la concepción de la integral como caso particular de la integral indefinida (antiderivada).

5.4.5.1.2. Configuración cognitiva: definiciones para las nociones

Esta configuración de la tarea 5, es activada por el 30,6% de los estudiantes, agrupa respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, el eje central de esta configuración son las respuestas en las que se justifica la diferencia entre la antiderivada y la integral, proporcionando definiciones (personales o institucionales) para ambas nociones.

La Figura 5.23 muestra la actividad matemática de un estudiante (E73) para la tarea 5. La práctica matemática inicia estableciendo una separación de las nociones, y a través de representaciones verbales para cada noción, expresa significados personales para cada una de ellas.


→ Integral siempre busca encontrar un numero que de respuesta o solución a la integración.

→ Antidervada busca encontrar una función inicial o primitiva despues de una derivación.

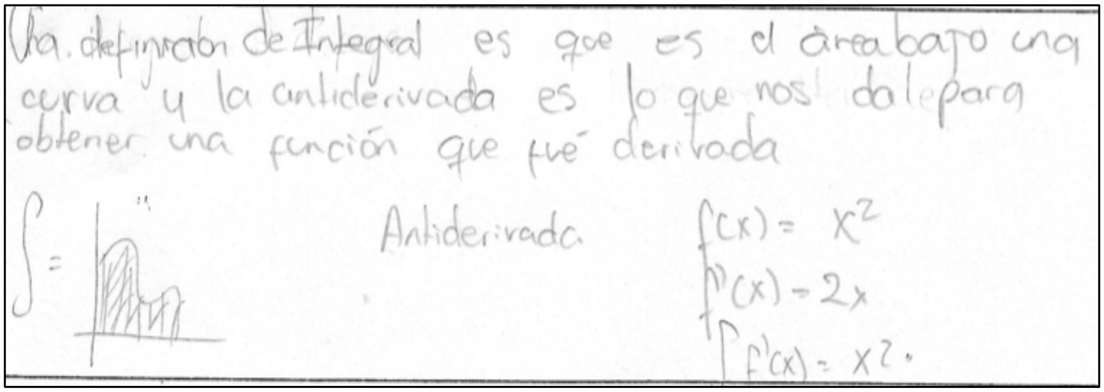
Figura 5.23. Respuesta del estudiante E73 a la tarea 5

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E73), es posible identificar elementos lingüísticos (verbal) que dan cuenta de los siguientes conceptos/definiciones: integral, número, antiderivada, derivada y función. Las proposiciones que estable el estudiante en equivalencia entre "encontrar un número o solución a la integración", al igual la equivalencia entre "función inicial o primitiva" Los procedimientos: para la integral es la búsqueda de un número, para la antiderivada es la búsqueda de la primitiva. Los argumentos: están sustentados al separar los dos conceptos, para establecer la diferencia entre estas dos nociones.

5.4.5.1.3. Configuración cognitiva ejemplos de uso

Esta configuración de la pregunta 5, es activada por 29 estudiantes, reúne respuestas incorrectas, el eje central de esta configuración son respuestas en las que se argumenta la diferencia entre ambas nociones por medio de ejemplos (situaciones/problemas) concretos de su uso o aplicación.

La Figura 5.24 muestra la actividad matemática de un estudiante (E30) para la tarea 5. La práctica matemática, inicia haciendo una descripción verbal de un significado (personal) de lo que es una integral, que ejemplifica con un uso "área bajo la curva", para luego expresar una significado (personal) de la antiderivada como "lo que nos da para obtener una función que fue derivada". Para aclarar la explicación el estudiante muestra un ejemplo gráfico y algebraico de una función, la cual deriva e integra (asumiendo las nociones como un proceso contrario).


La. definición de Integral es que es el área bajo una curva y la antiderivada es lo que nos da para obtener una función que fué derivada

$\int =$

Antiderivada

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$\int f'(x) = x^2.$

Figura 5.24. Respuesta del estudiante E30 a la tarea 5

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E30), es posible identificar elementos lingüísticos: (verbal, gráfico y algebraico), tales como: la descripción verbal para dar las definiciones; gráficos que interpreta como área bajo la curva; algebraico en la función particular $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x$, $\int f'(x) = x^2$. Conceptos/Definiciones: integral, antiderivada y función derivada. Propiedades/ proposiciones: el área de una región dada por una curva $f(x)$ y las líneas $x = a$; $x = b$ y el eje x se define la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ con $a \leq b$ (área bajo la curva), e implícitamente usa $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ y $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$. Sus procedimientos muestran a la derivada como la inversa de antiderivada, al particularizar la función $f(x) = x^2$, la cual deriva y posteriormente integra para obtener $f(x) = x^2$, omitiendo la constante real. En sus argumentos el estudiante 'valida' la definición de integral con un uso de la integral definida y la noción antiderivada con proceso inverso a la derivada.

5.4.6. Tarea seis: funciones elementales

El objetivo de la tarea, tal como señalamos en el apartado 4.3.2.6, es explorar la identificación de la función derivada (integrando), como una función elemental para que la función tenga antiderivada, de lo contrario se debe acudir a los métodos numéricos para encontrar la antiderivada. Para el análisis cuantitativo de las respuestas, se consideró la variable *grado de corrección* (correctas, parcialmente correctas, incorrectas y no responde), para esta tarea consideramos que una respuesta es correcta, en la que el estudiante indique que sí es posible encontrar una función con las características señaladas, y proporcione las justificaciones válidas para la solución. Una respuesta parcialmente correcta, es aquella en las que el estudiante indica que sí es posible encontrar una función con las características pedidas, pero no justifica o el argumento no es del todo válido. Una respuesta incorrecta es aquella respuesta en la que se indica que no es posible encontrar una función que se integre pero que no tenga antiderivada. La Tabla 5.15 muestra los resultados en frecuencias del grado de corrección de la tarea cuatro con sus respectivos porcentajes.

Tabla 5.15
Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 6

Grado de Corrección	*Frecuencia Total*	*%*
Correcta	24	17,5
Parcialmente Correcta	59	43,1
Incorrecta	34	24,8
No responde	20	14,6
Total	137	100

En la tarea 5, se esperaba que los estudiantes no contestaran correctamente, lo cual se comprueba en los resultados encontrados. La forma correctas fue contestada por 24 estudiantes, los 113 estudiantes restantes estuvieron distribuidos en los otros grados de corrección, como se puede observar en la tabla 5.15. Estos resultados concuerdan con la recomendaciones propuestas en el estudio de Howard (2004), quien recomienda el uso técnicas numéricas para la evaluación de las integrales de funciones cuyas antiderivadas son desconocidas. Dado que este tipo de funciones no tiene antiderivada pero si se pueden integrar.

5.4.6.1 Análisis de las configuraciones cognitivas: tarea 6

En las soluciones que dieron los estudiantes a la tarea 6, se identificaron cuatro configuraciones cognitivas, que hemos denominado: *ejemplo clásico, ejemplos particulares contradictorios, falsa concepción de igualdad* y *descripciones verbales no validas*. La Tabla 5.16 presenta las frecuencias y porcentajes en cada configuración.

Tabla 5.16
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 6

Tipos de Configuración	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	*%*
	1	2	3		
Ejemplo clásico	5	11	8	24	17,5
Ejemplos particulares contradictorios	4	1	4	9	6,6
Falsa concepción de igualdad	6	1	30	37	27,0
Descripciones verbales no validas	10	13	24	47	34,3
No da solución	12	1	7	20	14,6
Total	37	27	73	137	100

Como se comentó en el apartado 4.3.2.6, la tarea tenía por objetivo identificar si la función integrando, es una función elemental. En la tabla 5.16 se observa que 47 estudiantes activaron más la configuración *descripciones verbales no validas*. En los apartados 5.4.6.1.1, 5.4.6.1.2, 5.4.6.1.3 y 5.4.6.1.4, analizaremos un ejemplo prototípico para cada una de las configuraciones identificadas en la tarea.

5.4.6.1.1. Configuración cognitiva descripciones verbales no validas

Es la configuración de la pregunta 6, es la más activada por los estudiantes (34,3%). Reúne respuestas incorrectas. El eje central de esta configuración son las respuestas que proporcionan justificaciones verbales, en las que se trata de articular diversas nociones matemáticas (e.g., continuidad, derivabilidad, funciones complejas). Sin embargo, dicha articulación no es suficiente para justificar de forma válida la solución a la tarea.

La Figura 5.25 presenta la actividad matemática de un estudiante (E40) para la tarea 6. La práctica matemática inicia con una relato verbal, “si la función no es continua en número finito de puntos y es integrable, la derivada del resultado no se puede evaluar…”

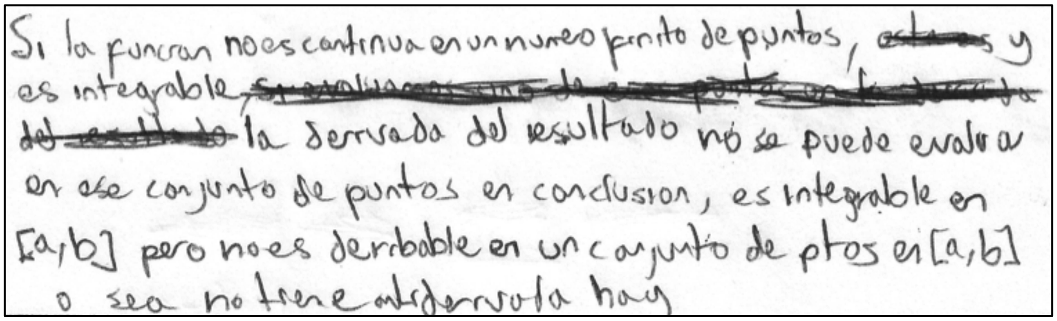

Si la funcion no es continua en un numero finito de puntos, y es integrable, la derivada del resultado no se puede evaluar en ese conjunto de puntos en conclusion, es integrable en [a,b] pero no es derivable en un conjunto de ptos en [a,b] o sea no tiene antiderivada hay

Figura 5.25. Respuesta del estudiante E40 a la tarea 6

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E40), es posible identificar elementos lingüísticos, verbales que dan cuenta de conceptos/definiciones como: función continua, numero finito de puntos, derivada, conjunto de puntos, integración, intervalo cerrado y antiderivada. Las proposiciones descritas por, “si la función no es continua…. y es integrable la derivada del resultado no se puede evaluar”. Los procedimientos descritos de evaluación de la derivada para que la función sea integrable, denotan la integración como procedimiento.

5.4.6.1.2. Configuración cognitiva falsa concepción de igualdad

Esta configuración de la tarea 6, es activada por el 27% de los estudiantes. Reúne respuestas incorrectas. El eje central de esta configuración son las respuestas en las que el estudiante señale que no es posible encontrar una función con las características dadas, porque la noción de antiderivada y de integral son iguales.

La Figura 5.26, muestra la actividad de un estudiante (E134) a la tarea 6. La práctica matemática inicia con la negación a la pregunta, aludiendo que las nociones son conceptos similares.

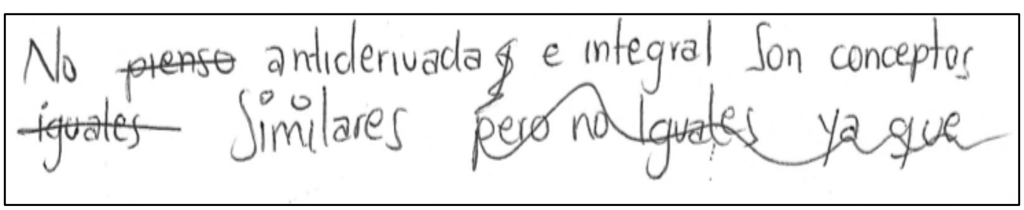

No ~~pienso~~ antiderivada e integral son conceptos ~~iguales~~ similares pero no iguales ya que

Figura 5.26. Respuesta del estudiante E134 a la tarea 6

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E134), es posible identificar elementos lingüísticos verbal, en donde se usan los conceptos/definiciones: integral e antiderivada. La proposición se denota la establecer la similitud entre la integral y la antiderivada, "…antiderivada e integral son conceptos similares". El argumento de la negación de pregunta, es la misma proposición.

5.4.6.1.3. Configuración cognitiva ejemplo clásico.

Esta configuración de la tarea 6, es activada por el 17,5% de los estudiantes, el eje central de esta configuración son las respuestas que señalan la posibilidad de encontrar un función con las características dadas, y los argumentos se centran en explicar a través del ejemplo 'clásico' que generalmente aparece en los libros de texto, $f(x) = e^{x^2}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

En la Figura 5.27 se muestra la actividad matemática de un estudiante (E48). La práctica matemática inicia con la afirmación de la pregunta, y proporcionando un ejemplo de una función, concretamente $f(x) = e^{-x^2}$, que no posee antiderivada, pero si puede integrarse.

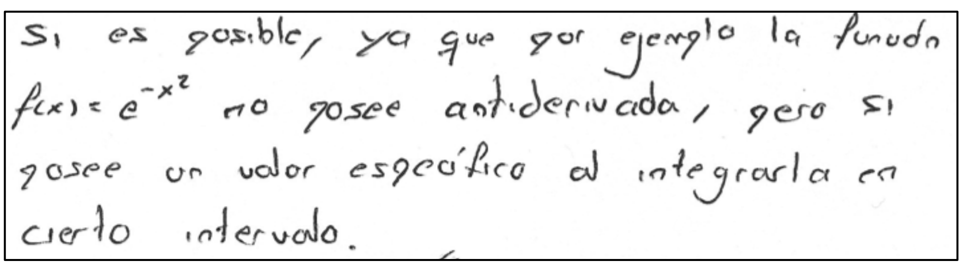

Si es posible, ya que por ejemplo la funcion $f(x) = e^{-x^2}$ no posee antiderivada, pero si posee un valor específico al integrarla en cierto intervalo.

Figura 5.27. Respuesta del estudiante E48 a la tarea 6

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E48), es posible identificar elementos lingüísticos verbales y simbólicos. Entre los conceptos/definiciones destacan: función, antiderivada e intervalo. La proposición está dada por: "…$f(x) = e^{-x^2}$ no posee antiderivada pero sí se puede integrar". El estudiante argumenta que la función "si posee un valor especifico". El procedimiento dado por el estudiante se nota al indicar la palabra "integrarla" asumiendo la integración como procedimiento.

5.4.6.1.4. Configuración cognitiva ejemplos particulares contradictorios

Esta es la cuarta configuración activada por el 6.6% de los estudiantes para la tarea 6. Reúne respuestas incorrectas. El eje central de esta configuración son las respuestas que afirman la posibilidad de encontrar una función con las características pedidas, y se da un ejemplo de una función concreta que no las cumple (función elemental).

La figura 5.28 muestra un ejemplo en esta configuración dada por un estudiante (E45) para la tarea 6, la descripción de la práctica matemática inicia con la afirmación de posibilidad, dando como ejemplo la función $f(x) = |x|$, argumentado que la función dada es posible integrarla, pero no posee antiderivada.

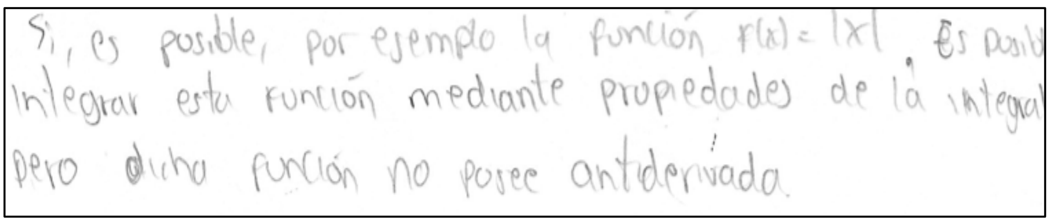

Si, es posible, por ejemplo la función $f(x) = |x|$. Es posib
integrar esta función mediante propiedades de la integral
pero dicha función no posee antiderivada.

Figura 5.28. Respuesta del estudiante E45 a la tarea 6

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E45), es posible identificar elementos lingüísticos verbales y algebraicos. Conceptos/Definiciones: función, integral y antiderivada. Propiedades enunciada por la frase "propiedades de la integral". La Proposición/Propiedad, dada por la función $f(x) = |x|$, función que no es derivable en $x = 0$, propiedades de la integral de la función $\int |x| dx$, que corresponden a $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\int c dx = cx + c$. Sus argumentos El validan la función propuesta por el estudiante argumento esta en justificación para hacer validar la función que el estudiante propone.

5.4.7. Tarea siete: reglas de "antiderivación".

La pregunta es descrita en el apartado 4.3.2.7, el objetivo de la tarea es la exploración de procedimientos para identificar una regla de "antiderivación". Para el análisis cuantitativo de las respuestas, se consideró la variable *grado de corrección* (correctas, parcialmente correctas, incorrectas y no responde), para esta tarea consideramos que una respuesta es correcta, cuando el estudiante identifique que la antiderivada para la función $h(x)$ es $f(x)g(x) + C$. Una respuesta parcialmente correcta, es aquella donde el estudiante logra identificar que la función $h(x)$ representa la "regla" de derivación de un producto de funciones, $f(x)g(x)$. Una respuesta incorrecta, es aquella en la que el estudiante no logra identificar que la antiderivada para $h(x)$ es $f(x)g(x) + C$. La Tabla 5.17 muestra los resultados en frecuencias y porcentajes del grado de corrección de la tarea siete con sus respectivos porcentajes.

Tabla 5.17
Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 7

Grado de Corrección	*Frecuencia Total*	*%*
Correcta	16	11,7
Parcialmente Correcta	47	34,3
Incorrecta	54	39,4
No responde	20	14,6
Total	137	100

En esta tarea se esperaba que los estudiantes contestaran correctamente, lo cual sólo ocurrió en 16 estudiantes que contestaron de forma correcta. De los restantes 121 estudiantes, 47 de ellos respondieron parcialmente a la pregunta, omitiendo la constante *C*. Lo anterior es evidencia de que, al menos esos 47 estudiantes, piensan en la antiderivada no desde un punto de vista conceptual (Kiat, 2005), sino más bien como proceso inverso a la integración, y más concretamente, como procedimiento que les permite obtener directamente el "resultado de la operación inversa", tal como multiplicar y dividir.

5.4.7.1 Análisis de las configuraciones cognitivas: tarea 7

Como se comentó en el apartado 4.3.2.7, la tarea 7 tenía por objetivo la identificación de una regla de 'antiderivación'. En las soluciones que dieron los estudiantes a la tarea 7, se activaron dos configuraciones cognitivas, que hemos denominado: *identificación de la regla de derivación* y *manipulación algebraica*. La Tabla 5.18 muestra los resultados en frecuencias y porcentajes para cada configuración.

Tabla 5.18
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 7

Tipos de Configuración	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	%
	1	2	3		
Manipulación algebraica	14	12	43	69	50,4
Identificación de la regla de derivación	18	15	15	48	35,0
No da solución	5	0	15	20	14,6
Total	37	27	73	137	100

En la tabla 5.18 se observa que la configuración más activada es *manipulación algebraica*. En los apartados 5.4.7.1.1 y 5.4.7.1.2, analizaremos un ejemplo prototípico para cada una de las configuraciones identificadas en la tarea.

5.4.7.1.1. Configuración cognitiva manipulación algebraica.

Esta configuración de la tarea 7, como se indicó anteriormente, es la más activada por los estudiantes (69), reúne respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas. El eje central de esta configuración son las respuestas en las que se manipula algebraicamente la función $h(x)$ con la finalidad de encontrar su antiderivada.

La Figura 5.29 muestra un ejemplo de esta configuración, dada por el estudiante E43. La práctica matemática inicia con la representación de la función propuesta en la tarea, luego separa el integrando de la función en dos nuevas funciones a integrar, para resolver una de las funciones aplicando el método de integración por partes, y por último sumarla a la otra función, obteniendo como resultado un producto de dos funciones.

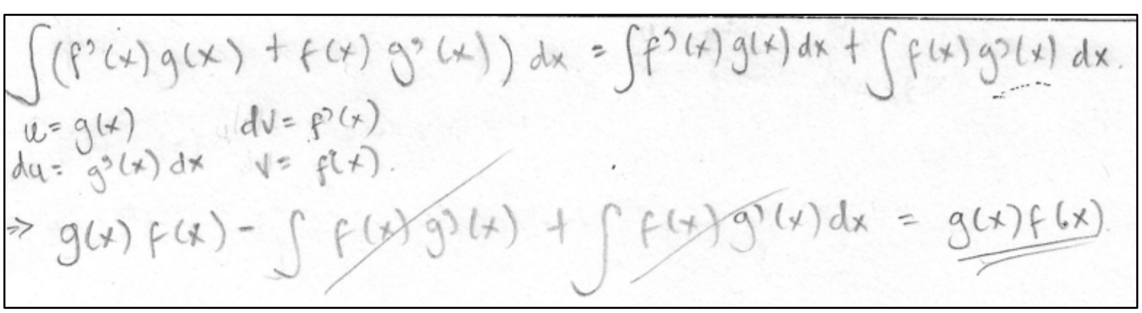


Figura 5.29. Respuesta del estudiante E43 a la tarea 7

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante, es posible identificar elementos lingüísticos algebraicos en toda la solución de la tarea. Así como conceptos/definiciones: antiderivada, expresado desde el inicio de la tarea como $\int\big(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\big)dx$. Proposiciones/Propiedades: utilizada para expresar la 'integral' indefinida de una suma, como la 'integral' de cada uno de los sumandos $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$. En sus procedimientos separa la integral de la suma, en una suma de integrales, luego resuelve la integral en uno de los sumandos, utilizando un 'método' de integración y por último suma su resultados. Los argumentos para encontrar la respuesta 'validan' el procedimiento descrito anteriormente.

La lógica de los argumentos de los estudiantes que activaron esta configuración, es deducida al desarrollar de algebraicamente la función propuesta para encontrar la antiderivada.

5.4.7.1.2. Configuración cognitiva identificación de la regla de derivación

Esta configuración de la tarea 7, es activada por 48 de los estudiantes. Reúne respuestas correctas y parcialmente correctas. El eje central de esta configuración son las respuestas que identifican a la función $h(x)$, como una expresión que corresponde a la "regla de derivación del producto de dos funciones", es decir, que la antiderivada solicitada para la función $h(x)$ es el proceso inverso a la derivada.

La Figura 5.30 muestra un ejemplo de esta configuración, dada por un estudiante (E5) para la tarea 7. La práctica matemática inicia con la identificación de la regla de producto para encontrar la antiderivada solicitada, indicando que las funciones deben estar definidas

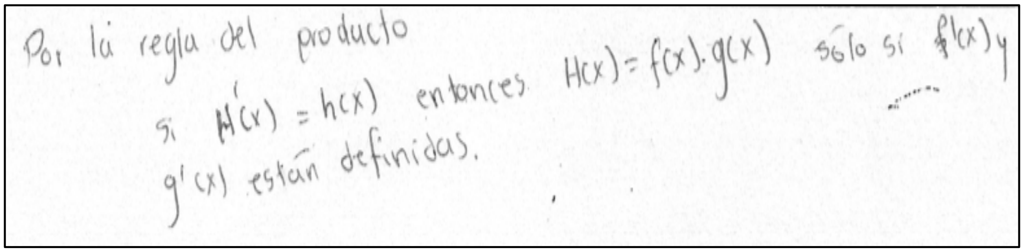

Por la regla del producto si $H'(x) = h(x)$ entonces $H(x) = f(x).g(x)$ sólo si $f'(x)$ y $g'(x)$ están definidas.

Figura 5.30. Respuesta del estudiante E5 a la tarea 7

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E5), es posible identificar elementos lingüísticos algebraicos: $h(x) = f(x)g(x)$, $H'(x) = h(x)$, entre otras, y verbales para conectar lógicamente las expresiones algebraicas. Así como conceptos/definiciones: derivada, producto de funciones. Procedimientos: identificación de la regla de derivación del producto de dos funciones. Proposiciones: al establecer que la funciones $f'x)$ y $g'(x)$ "solo si… están definidas" que indica que la funciones deben ser derivables. Los argumentos, descritos verbalmente 'validan' el procedimiento de la regla de derivada de un producto, para encontrar la función solicitada.

5.4.8. Tarea ocho: notaciones de una función derivada

El objetivo de la tarea, tal como señalamos en el apartado 4.3.2.8, es identificar $\frac{d}{dx}$ y $\int$ como operadores inversos. Para el análisis cuantitativo de las respuestas, se consideró la variable *grado de corrección* (correctas, parcialmente correctas, incorrectas y no responde), para esta tarea consideramos que una respuesta es correcta, es aquella en la que el estudiante identifica $\frac{d}{dx}$ y $\int$ como operadores inversos y se proporciona como respuesta la expresión $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, se añade la una constante real. Una respuesta parcialmente correcta, es aquella respuesta en las que se identifica $\frac{d}{dx}$ y $\int$ como operadores inversos y se proporciona como respuesta la expresión $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sin la adición de la constante. Una respuesta incorrecta, es aquella en las que no se identifica cuál es la antiderivada de la función dada simbólicamente. La Tabla 5.19 muestra los resultados en frecuencias del grado de corrección y porcentajes para cada configuración activada en la tarea 7.

Tabla 5.19
Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 8

Grado de Corrección	*Frecuencia Total*	*%*
Correcta	18	13,1
Parcialmente Correcta	52	38,0
Incorrecta	54	39,4
No responde	13	9,5
Total	137	100

Se esperaba que los estudiantes contestaran correctamente, lo cual sólo ocurrió con 18 estudiantes. De los restantes 119 estudiantes, sólo 52 respondieron parcialmente a la pregunta, omitiendo la constante *C*. Al igual que en la tarea anterior es evidencia de que, al menos esos 52 estudiantes, han cometido un error procedimental de acuerdo con la clasificación propuesta de Kiat (2005), para identificar errores cuando se resuelven problemas que involucran la integral.

5.4.8.1 Análisis de las configuraciones cognitivas: tarea 8

En las soluciones que dieron los estudiantes a la tarea 8, se identificaron dos configuraciones cognitivas, que hemos denominado: *identificación de los operadores inversos* y *manipulación algebraica de* $f(x)$. La Tabla 5.20 presenta las frecuencias y porcentajes en cada tipo de configuración activada en la tarea.

Tabla 5.20
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 8

Tipos de Configuración	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	*%*
	1	2	3		
Manipulación algebraica de f(x)	14	8	48	70	51,1
Identificación operadores inversos	19	19	16	54	39,4
No da solución	4	0	9	13	9,5
Total	37	27	73	137	100

Como se comentó en el apartado 4.3.2.8, la tarea tenía por objetivo la identificación de la notación diferencial de una función y la identificación de $\frac{d}{dx}$ y $\int$ como operadores inversos. En la tabla 5.20 se observa que 70 estudiantes activaron más la configuración *manipulación algebraica de* $f(x)$. En los apartados 5.4.8.1.1 y 5.4.8.1.2, analizaremos un ejemplo prototípico para cada una de las configuraciones identificadas en la tarea.

5.4.8.1.1. Configuración cognitiva: manipulación algebraica de $f(x)$

Esta configuración de la tarea 8, es la más activada en los estudiantes (70). Reúne respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas. El eje central de esta configuración son las respuestas en la que manipulan algebraicamente la función $f(x)$ para obtener, por medio de propiedades de derivación, una expresión simbólica para $f'(x)$, y posteriormente, 'integrar' $f'(x)$.

La Figura 5.31 muestra un ejemplo de esta configuración dada por un estudiante (E7)..La práctica matemática inicia con la función dada en la tarea, identifica que puede hacer una sustitución trigonométrica de la forma $x = tan\theta$, luego obtiene una nueva expresión para el integrando y por propiedades de la integral encontrar la solución a la tarea propuesta.

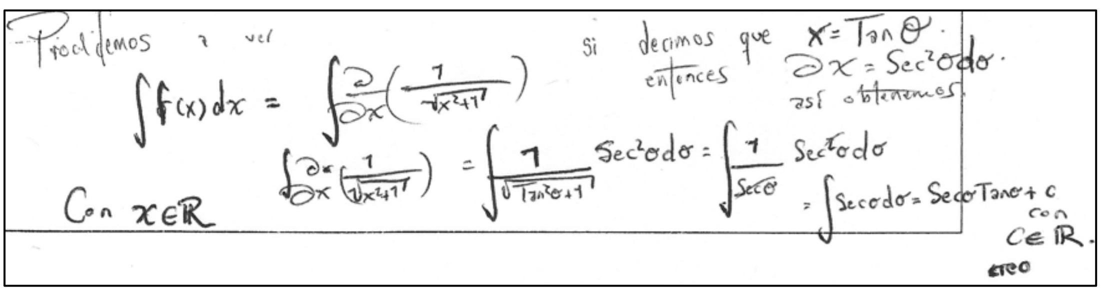


Figura 5.31. Respuesta del estudiante E7 a la tarea 8

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E7), es posible identificar elementos lingüísticos algebraicos en que dan cuenta de conceptos/definiciones: integral, derivada, número real, expresión trigonométrica. Procedimientos: sustitución trigonométrica para la expresión $\sqrt{x^2+1}$, en donde $x = tan\sigma$, derivación para la expresión $x = tan\sigma$. Proposiciones/propiedades: $\int sec\sigma d\sigma = sec\sigma tan\sigma + C$. El argumento para validar su procedimiento está dado al descartar el operador $\frac{d}{dx}$, en la integral, como lo describe "s$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \int \frac{1}{\sqrt{tan^2\sigma+1}} sec^2\sigma\, d\sigma$" para dar solución y encontrar de esta forma la antiderivada.

5.4.8.1.2. Configuración cognitiva identificación de operadores inversos

Esta configuración de la tarea 8, es la más activada por el 39,4% de los estudiantes, reúne respuestas correctas y parcialmente correctas. El eje central de esta configuración son las respuestas en las que el procedimiento para calcular la antiderivada de $f(x)$ se centró en la identificación de $\frac{d}{dx}$ y $\int$ como operadores inversos.

La Figura 5.32 muestra un ejemplo dado por un estudiante (E3). La práctica matemática inicia con la función dada en la tarea, identifica que la antiderivada de la función dada es la misma función sin notación diferencial.

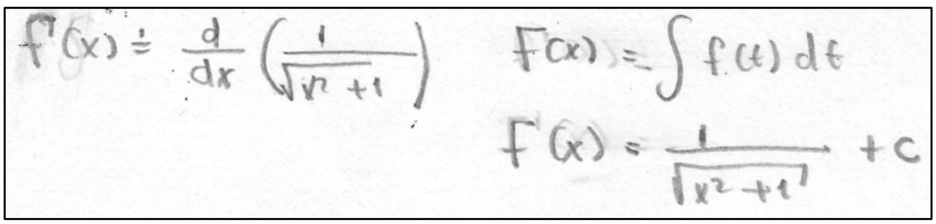


Figura 5.32. Respuesta del estudiante E3 a la tarea 8

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E7), es posible identificar elementos lingüísticos algebraicos, que dan cuenta de conceptos/definiciones: integral, derivada, función y familia de funciones. La proposiciones/propiedad que el estudiante utiliza implícitamente esta es la derivada de función $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ y la integración de función $\int f(t)dt$. Procedimientos: regla de derivación para la función $f'(x)$ y regla de integración para la función $f(t)$. Sus argumentos están centrados en la identificación de $\frac{d}{dx}$ y $\int$ como operadores inversos y no procedimentalmente como derivada inversa directa de la integral. Se puede ver como el estudiante E3 si contempla la C, lo que podría deberse a que dicho estudiante piensa en la antiderivada en términos de la familia de funciones, a diferencia de otros estudiantes que movilizaron esta configuración pero no escribieron la constante C.

5.4.9. Tarea nueve: Aplicación de la antiderivada en la economía

El objetivo de la tarea, tal como señalamos en el apartado 4.3.2.9, es conferir un significado a k (constante real) que agrupa la familia de funciones de una función que se ha derivado, en el contexto económico. Para el análisis cuantitativo de las respuestas, se consideró la variable *grado de corrección* (correctas, parcialmente correctas, incorrectas y no responde), para esta tarea consideramos que una respuesta es correcta si el estudiante proporciona una expresión que modela el costo total de producir q unidades. Una respuesta parcialmente correcta es aquella en la que el estudiante proporciona una expresión correcta que modela los costos variables ($\frac{5q^3}{3} - \frac{q^2}{2}$, que son parte del costo total), pero no se agrega el costo fijo (i.e., la constante k). Una respuesta incorrecta es aquella en la que no se proporcione una expresión simbólica válida para la función de costo total. La Tabla 5.21 muestra los resultados en frecuencias del grado de corrección de la tarea siete con sus respectivos porcentajes.

Tabla 5.21
Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 9

Grado de Corrección	*Frecuencia Total*	*%*
Correcta	45	32,8
Parcialmente Correcta	64	46,7
Incorrecta	23	16,8
No responde	5	3,7
Total	137	100

Debemos mencionar que las respuestas que consideramos parcialmente correctas (64), fue porque se omitió la constante k en la respuesta final. Sin embargo no tuvimos evidencia suficiente para corroborar el por qué dicha constante fue omitida, pudiendo considerar al menos las siguientes dos hipótesis:

1) los estudiantes calcularon la antiderivada de la función dada pues identificaron que el cuestionario se trataba de antiderivadas. Lo cual debido a los resultados obtenidos en las tareas anteriores sobre las concepciones de la antiderivada que tienen los estudiantes, explicaría la omisión.

2) los estudiantes no confirieron significado a k en el contexto económico.

Esta segunda hipótesis la formulamos debido a que el 32,8% de los estudiantes (respuestas correctas), además de proporcionar la antiderivada correctamente, describieron correctamente el significado de k (costo fijo) y de los otros términos de la antiderivada (costos variables), en el contexto económico.

5.4.9.1 Análisis de las configuraciones cognitivas: tarea 9

En las soluciones que dieron los estudiantes a la tarea 9, se identificaron tres configuraciones cognitivas, que hemos denominado: *cálculo de los costos variables, cálculo de costo total* y *otras manipulaciones algebraicas*. La Tabla 5.22 presenta las frecuencias y porcentajes en cada tipo configuración.

Tabla 5.22.
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 9

Tipos de Configuración	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	*%*
	1	2	*3*		
Cálculo de los costos variables	17	11	36	64	46,7
Cálculo del costo total	14	15	16	45	32,8
Otras manipulaciones algebraicas	4	1	18	23	16,8
No da solución	2	0	3	5	3,7
Total	37	27	73	137	100

Como se comentó en el apartado 4.3.2.9, la tarea tenía por objetivo explorar la relación de la antiderivada con el contexto de un problema en economía en el cual se pueda identificar los componentes de la función de costo total (i.e., costos variables y costos fijos). En la tabla 5.20 se observa que 64 estudiantes activaron más la configuración *cálculo de los costos variables*, en los apartados 5.4.9.1.1, 5.4.9.1.2 y 5.4.9.1.3 analizaremos un ejemplo prototípico para cada una de las configuraciones identificadas en la tarea.

5.4.9.1.1. Configuración cognitiva cálculo de costos variables

Esta configuración de la tarea 8, es la más activada por el 47,6% de los estudiantes, agrupa las respuestas parcialmente correctas. El eje central de esta configuración son las respuestas en las que el estudiante no identifica el uso de la constante k en el contexto del problema.

La Figura 5.33 muestra un ejemplo dado por un estudiante (E1). La práctica matemática inicia con una representación algebraica, indicando un operador sobre la función matemática (costo marginal), para dar como resultado una función matemática.

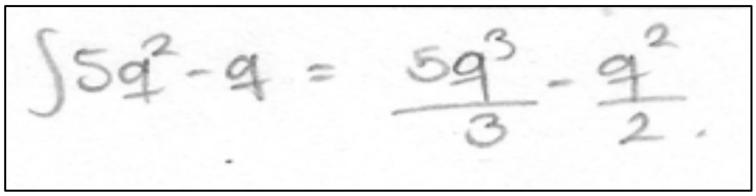


Figura 5.33. Respuesta del estudiante E1 a la tarea 9

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante E1, es posible identificar elementos lingüísticos algebraicos. Al igual se identifica un concepto/definición dado por la integral de una función. el uso de la propiedad $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ que usa el estudiante en sus procedimientos para encontrar la función de costos. Procedimientos: asocia el costo marginal con una función matemática, que luego integra. Sus argumentos, dados implícitamente al asociar el costo marginal con la función matemática, que validan el procedimiento de integración.

5.4.9.1.2. Configuración cognitiva: cálculo de costo total

Esta configuración de la tarea 9, es activada por el 32,8% de los estudiantes. Agrupa las respuestas incorrectas. El eje central de esta configuración son las respuestas en las que el estudiante identifica correctamente los términos que componen la función de costo total (i.e., costos variables y costos fijos).

La Figura 5.34 muestra un ejemplo dado por un estudiante (E14) para la tarea 9. La práctica matemática inicia con una representación gráfica y verbal indicando cómo puede asociar el costo total con el área bajo la curva de la función $C = f(q) = q^2 - q$; función que integra para obtener $C_T(q)$.

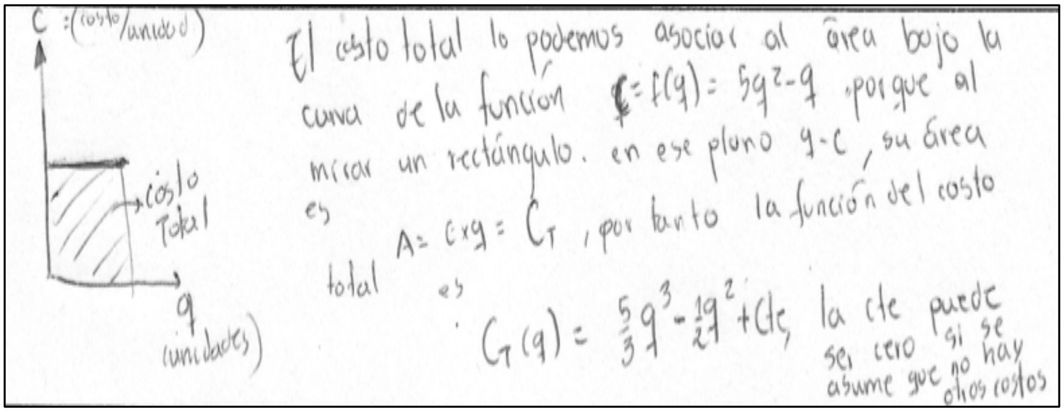


Figura 5.34. Respuesta del estudiante E14 a la tarea 9

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E14), es posible identificar elementos lingüísticos (gráficos, verbales y algebraicos) que dan cuenta de conceptos/definiciones: costo total, rectángulo, área e integración. Proposiciones/Propiedades: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, área bajo la curva asociada a una función de costo. En los procedimientos del estudiante describe la asociación del costo total con el área bajo la curva de la función $f(q) = 5q^2 - q$, la cual integra para encontrar la función de costo total. En en sus argumentos descritos verbalmente como siguen: "por que al mirar un rectángulo su área $c \times q = C_T$ por lo tanto la función de costo es…"

5.4.9.1.3. Configuración cognitiva otras manipulaciones algebraicas

Esta configuración de la tarea 9, es activada por el 16,8% de los estudiantes. Agrupa las respuestas incorrectas. El eje central de esta configuración son las respuestas en las cuales el estudiante no le confiere significado a los objetos matemáticos involucrados, en contextos de la economía.

La Figura 5.35 muestra un ejemplo en esta configuración dado por un estudiante (E61). La práctica matemática inicia con una representación algebraica, indicando un operador sobre la función matemática (costo marginal), la cual factoriza.

$$C' = 5q(x)^2 - q(x).$$
$$C' = q(x)(5q(x) - 1).$$

Figura 5.35. Respuesta del estudiante E61 a la tarea 9

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E61), es posible identificar elementos lingüísticos algebraicos que dan cuenta de algunos conceptos/definiciones como son: derivada, función de costo y expresiones algebraicas. Proposiciones/Propiedades: agrupación de términos semejantes en expresiones algebraicas. Procedimientos: factorización. Argumentos: el planteamiento de la ecuación que representa una derivada, que validan la factorización de la expresión algebraica.

5.4.10. Tarea diez: solución de ecuaciones diferenciales ordinarias

La pregunta es descrita en el apartado 4.3.2.10, tiene por objetivo explorar el proceso para encontrar la solución de una ecuación diferencial de primer orden. El análisis cuantitativo de las respuestas, consideró la variable *grado de corrección* (correctas, parcialmente correctas, incorrectas y no responde), para esta tarea consideramos que una respuesta es correcta, en las que el estudiante argumente de forma válida para encontrar la solución de la ecuación diferencial planteada, y que la solución sea también correcta. Una respuesta parcialmente correcta, en las el estudiante argumente de forma válida para encontrar la solución de la ecuación diferencial planteada, pero la solución proporcionada no es del todo correcta. Una respuesta incorrecta, es aquella en que el estudiante no proporciona, ni se explica, una forma válida para encontrar la solución solicitada. La Tabla 5.23 muestra los resultados en frecuencias y porcentajes del grado de corrección de la tarea diez.

Tabla 5.23
Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 10

Grado de Corrección	*Frecuencia Total*	%
Correcta	43	31,4
Parcialmente Correcta	26	19,0
Incorrecta	25	18,2
No responde	43	31,4
Total	137	100

La tarea no la responden 43 estudiantes, planteamos como hipótesis que esto puede ser por que curricularmente, el curso de ecuaciones diferenciales, es siguiente a un curso de cálculo integral.

5.4.10.1 Análisis de las configuraciones cognitivas: tarea 10

En las soluciones que dieron los estudiantes a la tarea 10, se identificaron tres configuraciones cognitivas, que hemos denominado: *verbal, simbólica* y *verbal-simbólica*. La Tabla 5.24 presenta las frecuencias en cada configuración.

Tabla 5.24
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 10

Tipos de Configuración	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	%
	1	2	3		
Verbal	5	2	17	24	23,9
Simbólica	14	16	29	59	30,4
Verbal-Simbólica	1	6	4	11	8,7
No da solución	17	3	23	43	37,0
Total	37	27	73	137	100

Como se comento en el apartado 4.3.2.10, la tarea tenía por objetivo para encontrar la ecuación que satisface una ecuación diferencial. En la tabla 5.24 se observa que 64 estudiantes activaron más la configuración *simbólica*, en los apartados 5.4.10.1.1, 5.4.10.1.2 y 5.4.10.1.3 analizaremos un ejemplo prototípico para cada una de las configuraciones identificadas en la tarea.

5.4.10.1.1. Configuración cognitiva simbólica

Esta configuración de la tarea 10 es activada por el 30,4% de los estudiantes. Agrupa las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas. El eje central de esta configuración son las respuestas en las que se utiliza un lenguaje simbólico en el procedimiento y justificación de la solución.

La Figura 5.36 muestra un ejemplo en esta configuración dado por un estudiante (E27) para la tarea 10. La práctica matemática inicia con una representación algebraica de una ecuación diferencial, hace una separación de variables para luego ‘integrar’ en ambos lados de la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)\,dx \Rightarrow y = f(x)$$

Figura 5.36. Respuesta del estudiante E27 a la tarea 10

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E27), es posible identificar elementos lingüísticos algebraicos. Así como los conceptos/definiciones: derivada, función y ecuación diferencial. Las Proposiciones/Propiedades: están implícitas en la separación de variables en la ecuación diferencial y las propiedades de la integral $\int dy = y + C, \int f'(x)dx + C$. Los procedimientos: al identificar la ecuación diferencial procede a separar variables por el método de variables separables, luego integra en ambos lados de la ecuación. Los argumentos: el estudiante ‘valida’ el procedimiento en la propiedades de la integral y en la aplicación sucesiva de estas propiedades dado que matemáticamente es un procedimiento para la solución de una ecuación diferencial de primer orden y primer grado.

5.4.10.1.2. Configuración cognitiva verbal

Esta configuración de la tarea 10, es activada por el 23,9% de los estudiantes. Agrupa las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas. El eje central de esta configuración son la respuestas en las que el estudiante utiliza un lenguaje verbal descriptivo para resolver la tarea pero no usa ninguna expresión simbólica, es decir, describe lo que se debe hacer más no se lleva a cabo.

La Figura 5.37 muestra un ejemplo en esta configuración dado por un estudiante (E137) para la tarea 10. La práctica matemática inicia con una descripción verbal “separando los diferenciales e integrando”.

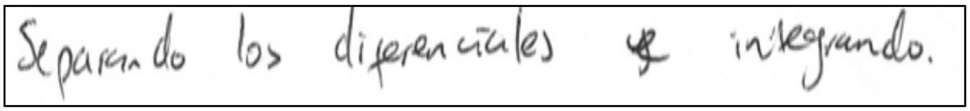


Figura 5.37. Respuesta del estudiante E137 a la tarea 10

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E137), es posible identificar un elementos lingüísticos verbales que dan cuenta de los conceptos/definiciones: diferenciales e integral. Proposiciones: implícitamente método de variables separables para la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado. Procedimientos: integración de los términos de la ecuación diferencial. Argumentos: implícitamente el procedimiento se justifica dado que la solución de una ecuación diferencial de primer orden y primer grado se obtiene por ‘integración’ sucesiva.

5.4.10.1.3. Configuración cognitiva verbal-simbólica

Esta configuración de la tarea 10, es activada por el 8,7% de los estudiantes. Agrupa las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas. El eje central de esta configuración son las respuestas que explican la forma de encontrar una solución para la ecuación planteada, mediante descripciones verbales y simbólicas.

La Figura 5.38 muestra un ejemplo en esta configuración dado por un estudiante (E47) para la tarea 10. La práctica matemática inicia con una descripción verbal para indicando el método de separación de variables y de esta forma expresar la ecuación diferencial de primer orden de la forma lineal $\frac{\partial y}{\partial x} + p(x)y = g(x)$ y tomar algunos elementos de esta ecuación de la forma lineal como factor integrante, para dar solución a la ecuación.

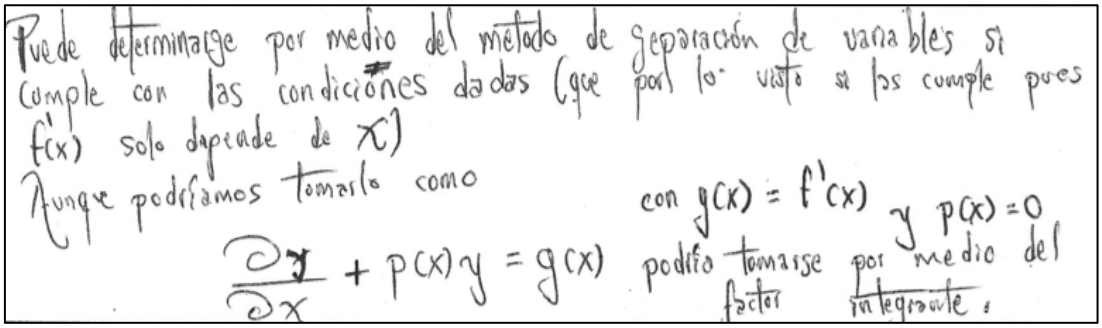

Puede determinarse por medio del método de separación de variables si cumple con las condiciones dadas (que por lo visto si los cumple pues $f(x)$ solo depende de x)
Aunque podríamos tomarlo como con $g(x) = f'(x)$ y $p(x) = 0$
$\frac{\partial y}{\partial x} + p(x)y = g(x)$ podría tomarse por medio del factor integrante.

Figura 5.38. Respuesta del estudiante E47 a la tarea 10

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante E47, es posible identificar elementos lingüísticos verbales, para describir procedimientos, y algebraicos, dado por la ecuación $\frac{\partial y}{\partial x} + p(x)y = g(x)$. Los conceptos/definiciones dados por variable dependiente, derivada, integral y ecuación diferencial. Las proposiciones/propiedades dadas por la ecuación diferencial de la forma lineal con una variable independiente, en la que se pueden identificar un factor integrante. Los procedimientos dados el método de variables separables en la ecuación diferencial, del cual el estudiante identifica la variable independiente y el método de factor integrante para la solución de la ecuación diferencial. Los Argumentos dados por el estudiante 'validan' el procedimiento descrito anteriormente, cuando expresa una nueva forma de la ecuación diferencial de la forma lineal.

5.4.11. Tarea once: aplicación de la antiderivada en la física

La pregunta es descrita en el apartado 4.3.2.11, tiene como objetivo explorar el proceso que los estudiantes usan para encontrar una función de posición a partir de una función de velocidad. Para el análisis cuantitativo de las respuestas, se consideró la variable *grado de corrección* (correctas, incorrectas y no responde), en esta tarea consideramos que una respuesta es correcta, si el estudiante logra describir de forma válida cómo encontrar la función de posición del objeto. Una respuesta incorrecta, en las que el estudiante no logre describir de forma válida cómo encontrar la función de posición del objeto. La Tabla 5.25 muestra los resultados en frecuencias del grado de corrección de la tarea siete con sus respectivos porcentajes.

Tabla 5.25
Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 11

Grado de Corrección	*Frecuencia Total*	*%*
Correcta	121	88,3
Incorrecta	11	8,0
No responde	5	3,7
Total	137	100

En general, como se muestra en la Tabla 5.25, los estudiantes no tuvieron dificultades para proporcionar una respuesta correcta, sólo 5 estudiantes no respondieron a la misma.

5.4.11.1 Análisis de las configuraciones cognitivas: tarea 11

En las soluciones que dieron los estudiantes a la tarea 10, se identificaron dos configuraciones cognitivas que hemos denominado: *descripción verbales* y *relaciones físicas*. La Tabla 5.26 presenta las frecuencias y porcentajes en cada configuración.

Tabla 5.26.
Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 11

Tipos de Solución	*Frecuencia por grupo*			*Frecuencia Total*	*%*
	1	2	3		
Descripciones verbales	21	11	48	80	58,4
Relaciones de física	16	14	22	52	38,0
No da solución	0	2	3	5	3,6
Total	37	27	73	137	100

En la tabla 5.26 se observa que la configuración mas activada por los estudiantes (80), es la configuración *descripciones verbales*. En los apartados 5.4.11.1.1 y 5.4.11.1.2 analizaremos un ejemplo prototípico para cada una de las configuraciones identificadas en la tarea.

5.4.11.1.1. Configuración cognitiva descripciones verbales.

Esta configuración de la tarea 11, es la más activada por los estudiantes (58,4%), agrupa respuestas correctas e incorrectas. El eje central de esta configuración son las respuestas en las que se utiliza un lenguaje verbal descriptivo para resolver la tarea.

La Figura 5.39 muestra un ejemplo en esta configuración dado por un estudiante (E121) para la tarea 11. La práctica matemática inicia con una descripción verbal narrativa para explicar un procedimiento “devolver” un proceso de derivación con una integral.

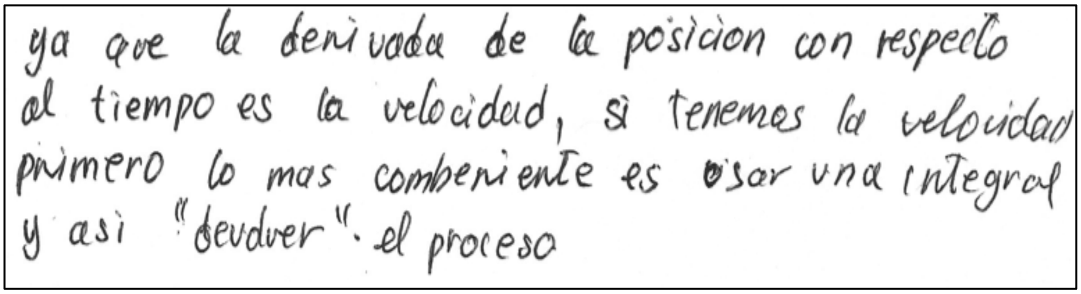

ya que la derivada de la posicion con respecto al tiempo es la velocidad, si tenemos la velocidad primero lo mas combeniente es usar una integral y asì "devolver". el proceso

Figura 5.39. Respuesta del estudiante E121 a la tarea 11

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante E121, es posible identificar elementos lingüísticos verbales en toda la solución. Los conceptos/definiciones que están inmersos en la solución son: derivada, tiempo, posición, y velocidad. Proposiciones/Propiedades que aplica para el desarrollo de la tarea esta dado por: la derivada de la velocidad es la posición. Los Procedimientos para dar solución a la tarea son: “usar una integrar y así devolver el proceso” usado en la función de velocidad. Los argumentos que validan sus procedimiento esta en una acción contraria “devolver” entendido como proceso inverso de la derivada.

5.4.11.1.2. Configuración cognitiva relaciones de física

Esta configuración de la tarea 11 es activada por el 38% de los estudiantes. Agrupa respuestas correctas e incorrectas. El eje central de esta configuración son las respuestas en las se evidencien fórmulas (o reglas) propias de la física para justificar la solución de la tarea.

La Figura 5.40 muestra un ejemplo en esta configuración dado por un estudiante (E73) para la tarea 11. La práctica matemática inicia al establecer varias fórmulas, para orientar la narrativa verbal en el procedimiento “integro a ambos lados” en la función de velocidad.

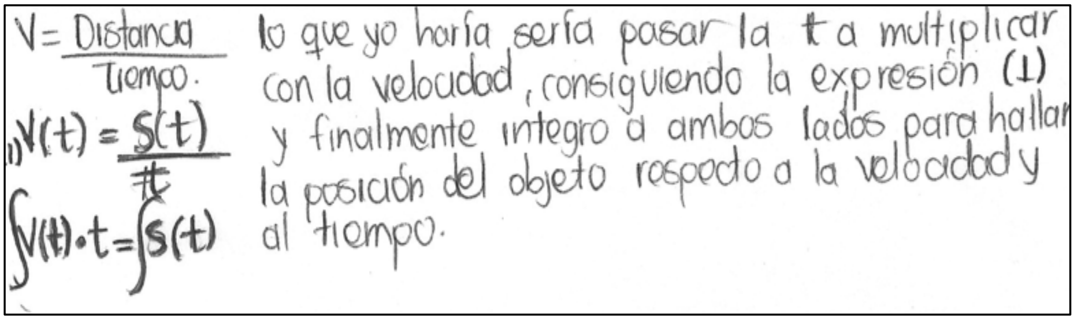


Figura 5.40. Respuesta del estudiante E73 a la tarea 11

En la actividad matemática desarrollada por el estudiante (E73), es posible identificar elementos lingüísticos verbales para describir el proceso, y algebraicos tales como $v(t) = \frac{s(t)}{t}$, $\int v(t) \cdot t = \int s(t)$.Conceptos/Definiciones: integral, velocidad, distancia, tiempo y posición. Proposiciones/Propiedades: expresa la velocidad como cociente de la distancia y el tiempo, representar estas magnitudes físicas en forma matemática. Procedimientos: separación de variables, en la ecuación $v(t) = \frac{s(t)}{t}$, luego integra cada uno de los lados de la ecuación. Argumentos: 'valida' los procedimientos en la descripción verbal que hace "integro a ambos lados para hallar la posición".

5.5. CONSIDERACIONES FINALES

En general, el cuestionario *CNM-Antiderivada* aplicado a estudiantes universitarios, tuvo una dificultad mediana, la cual se obtuvo a partir del índice de dificultad[17] de cada uno de las preguntas tal y como se ilustra en la Tabla 5.27. Como se observó en las secciones dedicadas al análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas, las tareas del cuestionario que les resultaron más difíciles de resolver, fueron la 4, 6 y 8.

[17] La dificultad de un ítem se entiende como la proporción de personas que responden correctamente un reactivo de una prueba, Entre mayor sea esta proporción, menor será su dificultad. a mayor dificultad del ítem, menor será su índice (Wood, 1960).

Tabla 5.27
Índice y nivel de dificultad de las tareas del cuestionario *CNM-Antiderivada*

Tarea	*Índice de Dificultad*	*Nivel de Dificultad*
Tarea 1: Significados de la antiderivada	0,96	Fácil
Tarea 2: Modelo sinóptico estructurado	0,96	Fácil
Tarea 3: Cálculo de la función primitiva	0,80	Medianamente Fácil
Tarea 4: Exploración gráfica de la antiderivada	0,14	Medianamente Difícil
Tarea 5: Diferencia entre integral y antiderivada	0,47	Dificultad Mediana
Tarea 6: Funciones elementales	0,18	Medianamente Difícil
Tarea 7: Reglas de "antiderivación"	0,46	Dificultad Mediana
Tarea 8: Notaciones de una función derivada	0,13	Medianamente Difícil
Tarea 9: Aplicación de la antiderivada en la economía	0.80	Medianamente Fácil
Tarea 10: Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias	0,50	Dificultad Mediana
Tarea 11: Aplicación de la antiderivada en la física	0,88	Medianamente Fácil
Media =0,59		

El análisis de ontosemiótico realizado para cada una de las tareas muestran que los objetos matemáticos y sus significados identificados en las soluciones plausibles de las tareas (ver capitulo 4), se adaptan a los objetos matemáticos, sus significados y los procesos involucrados en las configuraciones cognitivas asociadas a las prácticas. Así, la técnica de análisis denominada análisis ontosemiótico (Godino, 2002; Malaspina & Font, 2010; Godino, Font, Wilhelmi &Lurduy, 2011) y el análisis de contenido realizado previo a la aplicación del cuestionario, nos permitió observar y describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por estudiantes al resolver tareas, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas que permiten la resolución de las tareas (Godino, Batanero & Font, 2007).

Por otra parte y al como se ha podido constatar con los análisis realizados para cada una de las tareas, aunque en principio éstas fueron planificadas para activar un significado parcial concreto para la antiderivada (ver capitulo 4), los estudiantes que participaron en el estudio confirieron a la *antiderivada* el significado de "proceso inverso a la derivación".

No obstante, tal como se reflejó en los resultados de las últimas cinco tareas del cuestionario, el "proceso inverso" que confieren los estudiantes a la antiderivada, es desde un punto de vista más operacional (procedimiento) que conceptual, es decir, los estudiantes perciben un "proceso inverso directo". Esto es, cuando los estudiantes aplicaban las "reglas de integración" para obtener la antiderivada de cierta función (función derivada), muchos de ellos lo hacían pensando en que obtendrían la función concreta (i. e., el elemento particular de la familia de funciones de las antiderivadas) de la cual provino dicha función derivada, sin comprender realmente lo que sucede con el "proceso inverso" (Figura 5.41).

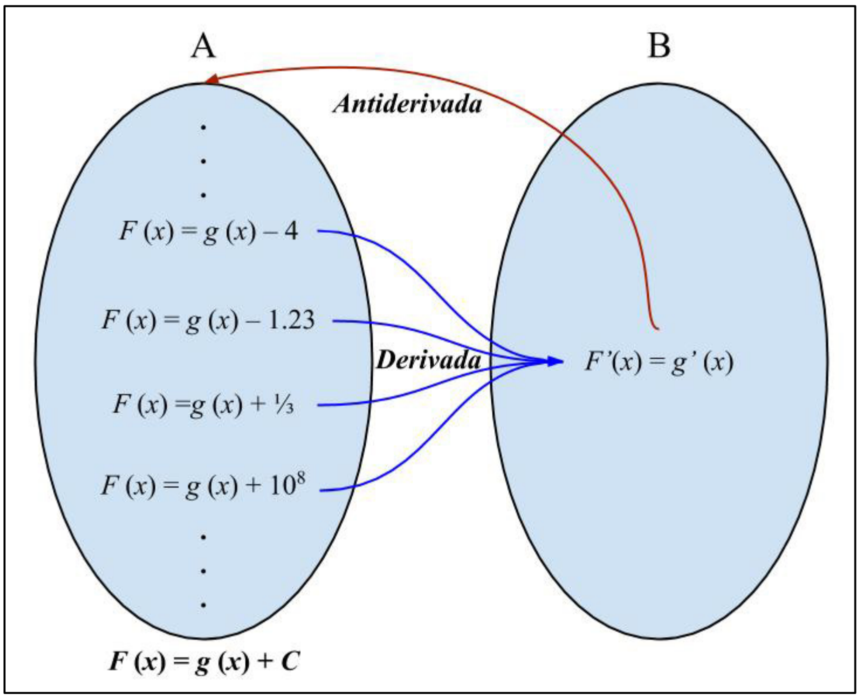


Figura 5.41. La antiderivada como proceso inverso de la derivada

Por ejemplo, si consideramos A el conjunto de los elementos de la familia de funciones del tipo $F(x) = g(x) + C$, donde C pertenece a los números reales, y tomamos un elemento de este conjunto, por ejemplo $F(x) = g(x) - 4$, para someterlo al proceso de derivación, entonces obtenemos $F'(x) = g'(x)$, que es el único elemento que conforma el conjunto B (derivadas de los elementos del conjunto A). Si seguidamente sometemos al proceso de antiderivación a $F'(x) = g'(x)$, obtenemos como resultado el conjunto A y no el elemento particular $F(x) = g(x) - 4$. Es decir, la antiderivada como "proceso inverso" a la derivada, es un proceso más conceptual que procedimental u operatorio, es un *proceso inverso no directo*.

Lo anterior ya había sido indagado por Kiat (2005) quien en su estudio señala que aquellos estudiantes que omiten la constante de "antiderivación" C, no son consientes que una constante debe ser escrita para especificar la función antiderivada dentro de una familia de funciones, en otras palabras, los estudiantes no son consientes de que una integral está constituida por un conjunto de antiderivadas con C como constante que varía.

CAPÍTULO 6

Conclusiones e Implicaciones

6.1. INTRODUCCIÓN

En este último capítulo presentaremos una síntesis de los resultados que se han obtenido con el desarrollo de cada uno de los capítulos que conforman esta investigación. Dichos resultados son producto de las preguntas de investigación, planteadas en el Capítulo 2, y de los objetivos específicos que nos propusimos para la consecución de las respuestas a dichas preguntas. En las siguientes secciones vinculamos los resultados obtenidos con los objetivos específicos de nuestra investigación y de esta forma se responde hasta qué punto se han respondido las preguntas de investigación planteadas.

Así mismo, presentamos perspectivas de investigación y con ellas, posibles vías de continuidad del presente trabajo.

6.2. UN BREVE RESUMEN DE NUESTRO PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Como lo señalamos en el Capítulo 1, las investigaciones sobre la comprensión de la antiderivada son escasos, resaltando la investigación de Metaxas (2007) que explora las dificultades en la comprensión de la integral indefinida. En los otros trabajos referidos, se indican, en general, como sugerencias, la importancia de separar los estudios de la integral definida de los de la integral indefinida, lo que conlleva dar independencia y relevancia a este objeto matemático.

En ese sentido nos propusimos vincular el objeto matemático antiderivada con un modelo de compresión. Para hacer estos, nos apoyamos sobre los posicionamientos pragmatistas del EOS, que llevan a entender la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental. Este posicionamiento nos amplia la perspectiva vinculando el término *conocimiento,* en el sentido de *constructo epistémico–cognitivo general que incluye comprensión, competencia y disposición* (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209).

En este sentido y apoyados por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos, nos planteamos las siguientes preguntas generales de investigación (ver sección 2.3.1):

> *PI-1: ¿Comprenden los estudiantes universitarios la noción de antiderivada?*

> *PI-2: ¿Qué aspectos o criterios, se deben contemplar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la antiderivada, para lograr que los estudiantes comprendan esta noción matemática?*

Para dar respuesta a preguntas de investigación *PI-1* y *PI-2*, nos propusimos el objetivo general de esta investigación:

> *Evaluar y caracterizar el conocimiento matemático (el cual vincula comprensión, competencia y disposición) de estudiantes universitarios sobre la noción antiderivada.*

Con la finalidad de lograr este objetivo general y, en consecuencia, las respuestas a las preguntas generales de nuestra investigación, en la sección 2.3.1, planteamos objetivos específicos cuya consecución contribuirían a dicho fin. En las siguientes secciones, presentamos los resultados y discutimos en qué medida se lograron cada uno de esos objetivos específicos.

6.3. SOBRE EL LOGRO DE LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS Y SU REPERCUSIÓN EN LAS RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Para la consecución del objetivo general, y así dar respuesta a la preguntas de investigación *PI-1* y *PI-2*, fue necesario el planteamiento de una serie de objetivos específicos (OE). Estos objetivos se derivaron de preguntas de investigación más concretas (PCI), cuyas respuestas contribuyeron a la consecución del objetivo general, y por ende, a responder las preguntas de investigación *PI-1* y *PI-2*.

6.3.1. Sobre la pregunta de investigación *PCI-1*

Como señalamos en la sección 2.3, nuestra intención era analizar la comprensión del objeto matemático antiderivada en estudiantes universitarios, para esto fue primordial revisar investigaciones que orientaran nuestra investigación. Al respecto nuestra primera pregunta de investigación (*PCI-1*) fue:

> *¿Qué sugiere la literatura de investigación en Educación Matemática, sobre los factores involucrados en la comprensión de una noción matemática, y particularmente sobre la antiderivada?*

Para responder a esta pregunta nos planteamos un objetivo específico. A continuación lo describimos.

6.3.1.1. Sobre el objetivo específico OE-1

El primer objetivo específico que nos propusimos para entender como abordar la compresión del objeto matemático antiderivada y poder determinar criterios para nuestra investigación, fue:

> *Estudiar y caracterizar las investigaciones en torno a la problemática sobre la comprensión de los objetos matemáticos, particularmente aquellas que tratan sobre la antiderivada, con el fin de determinar criterios específicos para la comprensión de dicha noción matemática. sobre la derivada, para identificar los distintos significados parciales de dicho objeto matemático.*

Para lograr este objetivo, y como primera fase de nuestro estudio (Fase 1), en el

Capítulo 1 (ver sección 1.3) se realizó una revisión, clasificación y caracterización de la literatura específica del campo de Didáctica de la Matemática, y concretamente de aquellos estudios orientados a la comprensión de la antiderivada, con la finalidad de determinar antecedentes específicos (criterios, pautas, directrices…) para la comprensión de dicha noción matemática.

Esta revisión exhaustiva de estudios reveló la importancia de nuestro objeto matemático antiderivada, así como la escasez de investigaciones realizadas en torno a este objeto matemático. Es así, como Metaxas (2007), da identidad al objeto antiderivada en un estudio que involucra conocimiento matemático sobre la integral indefinida (antiderivada). El estudio de Metaxas (2007) aborda la perspectiva teórica de la *abstracción reflexiva* y el esquema de comprensión (*interiorización-condensación-reificación*), propuesto por Sfard (1991). Sus conclusiones afirman, que los estudiantes del estudio alcanzan una comprensión procedimental para manejar la integral indefinida como herramienta o una 'técnica'.

Por su lado, Kiat (2005) presentó un estudio que caracteriza errores en la resolución problemas de integración (definida e indefinida). La clasificación de Kiat (2005) describe una categoría en la que pueden ubicarse los errores que cometen los estudiantes cuando abordan dichos problemas los cuales resultan en tres tipos de errores: conceptuales, procedimentales y técnicos. La Figura 6.1 muestra el tipo de error, la descripción del error y algunos ejemplos en antiderivadas en cada una de estas categorías.

Tipo de Error	*Descripción*	*Ejemplo*
Conceptual	• No comprender los conceptos en el problema. • Falta de apreciaciones en las relaciones en el problema.	La antiderivada de la función $f(x) = \ln x$ El estudiante no entiende el concepto de antiderivada
Procedimental	• Errores de falta de manipulaciones o algoritmos, aunque se entienden conceptos del problema.	$\int \ln x dx = \frac{1}{x}$ El estudiante confunde la diferenciación con la integración El estudiante omite la C
Técnico	• Los errores debidos a la falta de conocimiento del contenido matemático en otros temas. • Los errores debidos a la falta de cuidado • No responder cuando curricularmente se han abordado los contenidos	$\int 2(3x-2)^5 dx = \int (6x-4)^5 dx$ El estudiante no tiene conocimientos algebraicos $\int \frac{-3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx$ El estudiante no tiene cuidado de escribir el signo

Figura 6.1. Clasificación de errores en la antiderivada

La clasificación hecha por Kiat (2005) es orientadora en la investigación, dado que nos indica de cómo categorizar las respuestas de los estudiantes cuando abordan problemas con antiderivadas.

Otro de los trabajos relevantes encontrado en la revisión de esta investigación, es el presentado por Hall (2010), investigación sobre algunos términos matemáticos y significados matemáticos, que generalmente se usan en la enseñanza del cálculo, en particular con la integral indefinida. Entre la diversidad de respuestas que encuentra Hall

(2010), concluye que respuestas como, "la integral definida es más precisa que la integral indefinida y la integral indefinida es un termino vago", "la primitiva", "la inversa de la derivada", son respuestas que funcionan como indicativo de la mala comprensión del concepto matemático, y a su vez evidencian un conflicto entre el conocimiento de términos matemáticos.

Como respuesta a este primer objetivo especifico, se estudiaron y caracterizaron las investigaciones en torno a la problemática sobre la comprensión de la antiderivada, se dio realce a las investigaciones que le dan independencia y relevancia a este objeto matemático, y se identificaron directrices para el diseño de nuestro instrumento de evaluación, respecto a los tipos de representaciones y principales errores y dificultades que presentan los estudiantes de cara a la comprensión de la antiderivada.

6.3.2. Respuesta a la pregunta de investigación *PCI-1*

En la sección anterior hemos presentado en qué medida se ha logrado responder a la pregunta *¿Qué sugiere la literatura de investigación en Educación Matemática, sobre los factores involucrados en la comprensión de una noción matemática, y particularmente sobre la antiderivada?* Para dar respuesta a dicha pregunta se propuso un objetivo específicos el cual fueron logrados en las Fase 1 de nuestra investigación (ver sección 2.4.1). En respuesta a la pregunta podemos decir que se reunieron y caracterizaron investigaciones sobre la comprensión de objetos matemáticos desde el PMA, y particularmente sobre la antiderivada, relevando las sugerencias propuestas en las investigaciones

6.3.3. Sobre la pregunta de investigación *PCI-2*

Como señalamos en la sección 2.3, el objetivo general de esta investigación es evaluar y caracterizar la comprensión de la antiderivada, en este sentido, si lo que queremos es evaluar, inicialmente se debe delimitar qué se entiende por dicha noción matemática. Al respecto nuestra segunda pregunta de investigación (*PCI-2*) fue:

¿Qué es, o cuál es el significado, de la antiderivada?

Para responder a esta pregunta nos planteamos dos objetivos específicos. A continuación describimos cada uno de ellos.

6.3.3.1. Sobre el objetivo específico OE-2

El segundo objetivo especifico que nos propusimos para entender la naturaleza del objeto antiderivada y poder entender qué es, fue:

> *Identificar y caracterizar los pares <Prácticas, Configuraciones ontosemióticas epistémicas activadas en dichas prácticas>, mediante un estudio histórico-epistemológico de tipo documental sobre la antiderivada, lo cual permitirá la identificación de los distintos significados parciales de dicho objeto matemático.*

Para lograr este objetivo, y como segunda fase de nuestro estudio (Fase 2), en el Capítulo 3 (ver sección 3.2) realizamos un estudio histórico-epistemológico del objeto antiderivada, recogiendo información sobre las problemáticas relevantes que contribuyeron tanto para el surgimiento de dicho objeto matemático, como para su fundamentación. Dicho estudio se llevó a cabo considerando que la determinación del significado global, u holístico, de un objeto matemático, requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Una vez identificadas las prácticas que dieron paso al origen y evolución de la derivada, mediante la noción de *configuración epistémica* que nos proporciona el EOS, en la sección 3.3, describimos sistemáticamente dichas prácticas en términos de las configuraciones de objetos matemáticos primarios que se activaron mediante los desarrollos de las mismas. De esta forma, para cada práctica nos dimos a la tarea de identificar los elementos lingüísticos utilizados, los conceptos, propiedades y procedimientos a los que refieren dichos elementos lingüísticos, y los argumentos mediante los cuales se vinculan los objetos matemáticos primarios anteriores.

Como respuesta a este segundo objetivo específico, se identificaron cuatro sistemas de prácticas cada uno de los cuales, siguiendo los supuestos teóricos del enfoque ontosemiótico, representan un significado parcial para el objeto antiderivada, y por tanto, cada uno de esos sistemas de prácticas llevan implícita la activación de una configuración epistémica de objetos matemáticos primarios. La descripción sistemática, que da cuenta del logro de este segundo objetivo, de las cuatro configuraciones epistémicas que dan lugar a los cuatro significados parciales de referencia para el objeto antiderivada puede encontrarse en la sección 3.3 del Capítulo 3.

6.3.3.2. Sobre el objetivo específico OE-3

Cuando nos planteamos la reconstrucción del significado global u holístico de la antiderivada, sabíamos que era necesaria la identificación de los significados parciales de dicha noción, pues dentro del EOS se entiende que el significado global, también denominado significado holístico u holo-significado, comprende o está compuesto de los diferentes significados parciales de un objeto matemático (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). Así, nuestro tercer objetivo específico fue:

> *Reconstruir el significado global de referencia para la antiderivada, mediante la consideración de los significados parciales obtenidos con el objetivo anterior.*

El logro de este tercer objetivo especifico se evidencia con el esquema de la Figura 3.6 ubicada en la sección 3.4 del Capítulo 3. Dicho esquema muestra la complejidad del significado global de la antiderivada, mostrando las relaciones entre los distintos significados parciales y el nivel de generalización referente a las configuraciones epistémicas asociadas a cada significado parcial. Nuestra propuesta de significado global de referencia queda recogido con el esquema que presentamos en la Figura 3.6. El cumplimiento de este objetivo era importante para los fines generales de esta investigación y, en general, ha resultado ser un avance significativo y relevante para la educación matemática (concretamente para quienes estamos interesados en la didáctica del cálculo), evidencia de ello son los trabajos sobre este tema que se han publicado en revistas del alto impacto. Por esta razón, la reconstrucción del significado holístico de referencia de la antiderivada es uno de los aportes importantes de esta tesis doctoral.

6.3.4. Respuesta a la pregunta de investigación *PCI-2*

En las secciones 6.3.31 y 6.3.3.2, hemos discutido en alguna medida un acercamiento a responder a la pregunta *¿Qué es, o cuál es el significado, de la antiderivada?* Para dar respuesta a dicha pregunta se propusieron dos objetivos específicos los cuales fueron logrados en las Fase 2 de nuestra investigación (ver sección 2.4.1). En respuesta a la pregunta podemos decir que se logró reconstruir tanto el significado holístico de la antiderivada, y la identificación de significados de referencia.

6.3.5. Sobre la pregunta de investigación *PCI-3*

Una vez identificados y caracterizados los significados de referencia de la antiderivada, un aspecto relevante fue determinar qué es lo que conocen los estudiantes universitarios sobre dichos significados. Así, nuestra tercera pregunta de investigación fue:

> *¿Cuál es el conocimiento sobre la antiderivada, que efectivamente tienen los estudiantes universitarios de carreras de matemáticas y afines?*

Para responder a esta peгunta nos propusimos cuatro objetivos específicos. A continuación describimos cada uno de ellos.

6.3.5.1. Sobre el objetivo específico OE-4

El cuarto objetivo especifico que nos propusimos para realizar una aproximación a la comprensión de la antiderivada, fue:

> *Diseñar un cuestionario que sea representativo de la complejidad del significado holístico de la antiderivada. Dicho cuestionario debe contemplar los criterios identificados a partir de los objetivos OE-1, OE-2 y OE-3.*

Para lograr este objetivo, y como parte de la tercera fase de nuestro estudio (Fase 3), se diseñó un instrumento para realizar una aproximación a la comprensión de la antiderivada. Diseño que busca obtener, observar y analizar respuestas de los estudiantes a diferentes tareas propuestas, que ayuden a determinar si comprenden los significados de la antiderivada, y si a través de diversas representaciones presentadas en las tareas, el estudiante coloca en el escenario 'conocimiento matemático' en el sentido de *constructo epistémico–cognitivo general que incluye comprensión, competencia y disposición* (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209) para la noción de antiderivada, el cual se abordo en la sección 2.2.6 del capítulo 2.

A partir del banco de tareas elaborado, se eligieron aquellas tareas que cumplieran, básicamente con tres aspectos clave:

1) Uso de diversos significados del objeto antiderivada.
2) Uso de diversidad de representaciones para la antiderivada.
3) Las relaciones matemáticas entre la antiderivada y otros objetos matemáticos.

En este sentido, el cuestionario diseñado se compone de once tareas, ver sección 4.3 del Capítulo 4. Cada una de las tareas está en estrecha relación con alguno de los cuatro significados parciales de la antiderivada que se identificaron por medio del estudio de tipo histórico-epistemológico realizado en el Capítulo 3. En la Figura 6.2 presentamos un resumen de las características y fines que se persiguen con cada una de las tareas.

Tarea	Fuente	Objetivo	Representación que activa	Significado Parcial activado
Tarea 1: Significados de la antiderivada	Badillo (2003); Hähkiöniemi (2006); Habre & Abboud (2006); Bingolbali & Monaghan (2008); Badillo, Azcárate & Font (2011); Pino-Fan (2014).	Explorar significados personales y acepciones conferidas a la antiderivada.	Verbal/ Escrita	Global
Tarea 2: Modelo sinóptico estructurado	Bencomo, Godino & Wilhelmi (2004).	Relación de la antiderivada con otros objetos matemáticos del cálculo.	Mapa conceptual y grafos	Global
Tarea 3: Cálculo de la función primitiva (partes A y B)	Delos Santos (2006); Pino-Fan (2014).	Construcción de familia de funciones a partir de una función derivada.	Simbólica, gráfica y tabular.	Diferencial-Sumatoria
Tarea 4: Exploración gráfica de la antiderivada	Gordillo & Pino-Fan (2015).	Tratamiento de la representación gráfica de la antiderivada	Gráfica	Tangentes - Cuadraturas
Tarea 5: Diferencia integral - antiderivada	Gordillo & Pino-Fan (2015).	Explorar si se establecen diferencias conceptuales entre las nociones integral y antiderivada.	Verbal/escrita y simbólica.	Funciones elementales
Tarea 6: Funciones elementales	Gordillo & Pino-Fan (2015).	Identificación de la función derivada como función elemental	Verbal/escrita y simbólica	Funciones elementales
Tarea 7: Reglas de 'Antiderivación'	Haeussler, Paul & Wood (2008); Pinzón, Riaño & Gordillo (2014).	Identificación de la antiderivada a partir de una regla básica de derivación	Simbólica	Tangentes - Cuadraturas
Tarea 8: Notaciones de una función derivada	Haeussler, Paul & Wood (2008); Pinzón, Riaño & Gordillo (2014).	Identificación de una forma de denotar una función derivada	Simbólica	Tangentes - Cuadraturas
Tarea 9: Aplicación de la antiderivada en economía	Haeussler, Paul & Wood (2008); Arya & Lardner (2004).	Aplicación del objeto matemático antiderivada en las ciencias económicas	Verbal/escrita y simbólica.	Tangentes - Cuadraturas
Tarea 10: Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias	Stewart (2013); Pinzón, Riaño & Gordillo (2014).	Uso de la antiderivada en la solución de ecuaciones diferenciales	Verbal/escrita y simbólica	Fluentes-Fluxiones
Tarea 11: Aplicación de la antiderivada en la física	Stewart (2013); Pinzón, Riaño & Gordillo (2014).	Aplicación del objeto matemático antiderivada en contextos de la física.	Verbal/escrita y simbólica.	Fluentes-Fluxiones

Figura 6.2. Resumen de las tareas del cuestionario

Para cada tarea incluida en el cuestionario se realizó un análisis detallado del contenido que evalúan. Para realizar dicho análisis se presentó inicialmente, para cada tarea, una descripción *general* de los aspectos que evalúan, atendiendo a los criterios mencionados en la sección 4.3.1. del Capítulo 4. Luego se realizó de manera detallada el análisis del contenido de cada una de las tareas en dos niveles. El primer nivel refiere al *contenido ontosemiótico*, el cual se obtiene mediante un análisis epistémico exhaustivo en el cual se hace uso de la herramienta teórica *configuración ontosemiótica* en su versión epistémica que proporciona el EOS, y que fue presentado en el Capítulo 2. El segundo nivel refiere al *contenido curricular,* que son los conocimientos que evalúan las tareas y que pueden ser medidos con los conocimientos sobre antiderivada pretendidos en una institución, plasmado a través del plan de estudios.

Como respuesta a este cuarto objetivo específico, se construyó un instrumento, que contiene once tareas, cada una de las tareas está en estrecha relación con alguno de los cuatro significados parciales de la antiderivada. El análisis a priori realizado, junto con la determinación de las posibles dificultades en la resolución de cada una de las tareas, permite observar, describir y predecir la actividad matemática como un conjunto complejo de prácticas en las cuales se movilizan y articulan una serie de objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y sus significados, a los cuales idealmente se deberán aproximar las prácticas matemáticas de los estudiantes cuando resuelvan cada una de dichas tareas. Así mismo, tanto con los análisis a priori de contenido, como el estudio mediante juicio de expertos como se detalla en la sección 4.4 del Capítulo 4, se garantizó y consolidó la validez de contenido de nuestro cuestionario, dando evidencia de que las tareas del cuestionario, en efecto evalúan aspectos representativos de la comprensión de la antiderivada. El cuestionario en sí mismo constituye otro de los aportes relevantes de nuestra investigación.

6.3.5.2. Sobre el objetivo específico OE-5

El quinto objetivo especifico que nos propusimos para realizar una aproximación a la comprensión de la antiderivada, fue:

> *Implementar el cuestionario diseñado, para evaluar la comprensión de la antiderivada, en muestras intencionales de estudiantes universitarios colombianos.*

Para lograr este objetivo, y como parte de la tercera fase de nuestro estudio (Fase 3), de manera estricta, podemos decir que la evaluación, y por ende el logro de este objetivo, se realizó al aplicar el cuestionario a una muestra de 137 estudiantes universitarios de carreas de matemáticas o afines a las matemáticas en diferentes universidades en Colombia. El condicionante para la aplicación de la prueba a los estudiantes que participaron, fue el haber tomado el curso de cálculo integral o cálculo II (momento curricular donde se aborda la noción).

Es de señalar que estos estudiantes se reagruparon para el estudio en tres grupos, discriminados de la siguiente forma:

- Grupo 1: 27.01% (37) estudiantes de Licenciatura en Matemáticas
- Grupo 2: 19.71% (27) estudiantes de Matemática.
- Grupo 3: 53.28% (73) estudiantes de Ingeniería.

Cada cuestionario aplicado permitió profundizar en la exploración y descripción de las configuraciones cognitivas utilizadas por los estudiantes universitarios al resolver las tareas del cuestionario.

6.3.5.3. Sobre el objetivo específico OE-6

El sexto objetivo especifico que nos propusimos para realizar una aproximación a la comprensión de la antiderivada, fue:

> *Caracterizar, a partir de los resultados obtenidos con la implementación del cuestionario, el conocimiento sobre la antiderivada de los estudiantes universitarios colombianos.*

Para lograr este objetivo, y como parte de la tercera fase de nuestro estudio (Fase 3), Como resultado de la aplicación del cuestionario, lo cual se puso de manifiesto a lo largo del Capitulo 5. Los tres grupos en estudio presentaron ideas similares en las respuestas, y en varias ocasiones cometieron errores que se caracterizaron de acuerdo a la categoría propuesta por Kiat (2005), así como las concepciones erradas que se tienen de la antiderivada, que son indicador -tal como lo afirma Hall (2010)- de mala comprensión de las ideas básicas del cálculo o de confusión de términos matemáticos. Estos indicadores de "mala comprensión" adquirieron énfasis cuando los estudiantes se enfrentaron a tareas tales como la Tarea 5 y, en general, de aquellos ítems que requerían la movilización del significado –proceso para encontrar una familia de funciones a partir de una función derivada–. Del mismo modo, esta limitada comprensión se evidenció mediante la desconexión de los significados parciales de la derivada en los futuros profesores, desconexión de la que dan cuenta las dificultades que presentaron para resolver la tarea 6. Además esta falta de asociación entre los significados parciales, y en consecuencia en la carente comprensión del objeto antiderivada, se reflejó a lo largo del cuestionario.

En general, los resultados obtenidos a partir de los análisis cuantitativos y cualitativos de las soluciones que los estudiantes dieron a las tareas incluidas en el cuestionario, exhiben ciertas dificultades para resolver tareas que relacionan la antiderivada. Por ejemplo, los resultados obtenidos con la tarea 9 desvelan que los estudiantes usan la antiderivada en su acepción de "proceso inverso de la derivada", y no dan sentido a la constante C real. Esta acepción de "proceso inverso" también es observada en las tareas 7 y 8 esta forma equivocada, es vista más concretamente, como procedimiento que les permite obtener directamente el 'resultado de la operación inversa', tal como multiplicar y dividir. Como menciona Hitt (2005, p. 82), podríamos hallar la razón de esto en que "… generalmente, se restringen a una manipulación algebraica que produce una limitación en su comprensión". Los resultados de la tarea 4 pone de manifiesto este argumento de Hitt (2005) cuando al solicitar encontrar la antiderivada de una función a partir de una gráfica, los resultados muestran preferencia por las manipulaciones algebraicas al realizar un tratamiento (Duval, 2006) sobre la gráfica.

La tarea 6, dan cuenta de insuficiencias o falta de conocimiento matemático en los estudiantes, así como de la desconexión entre los distintos significados parciales de la antiderivada. Los resultados apoya la necesidad de mejorar el conocimiento matemático, que les faculte de competencias para resolver tareas con características similares a las que se les planteó con el cuestionario.

El cuestionario sobre la compresión de la antiderivada (*Cuestionario CNM-Antiderivada*) ha permitido evidenciar aspectos relevantes del conocimiento matemático que ponen en juego los estudiantes en la resolución de tareas sobre antiderivadas con diversas características. Podemos decir que hemos alcanzado el objetivo específico 6, puesto que se logró identificar, con la ayuda de las configuraciones cognitivas, tipos de respuestas y significados personales sobre la antiderivada que los estudiantes activan para resolver los problemas (ver sección 5.4.1.1).

6.3.5.4. Sobre el objetivo específico OE-7

El séptimo objetivo especifico que nos propusimos para realizar una aproximación a la comprensión de la antiderivada, fue:

> *Identificar, a partir de los resultados de los objetivos OE3 y OE6, los aspectos que, a futuro, se deberán tener en cuenta para el diseño de procesos de instrucción sobre la antiderivada.*

Para lograr este objetivo, y como parte de la tercera fase de nuestro estudio (Fase 3), podemos decir que nuestro trabajo de investigación sí contribuye teórica y metodológicamente al campo de investigaciones sobre la comprensión de nociones matemáticas, mediante el planteamiento de pautas y criterios específicos que permitieron la exploración y análisis de la faceta epistémica y cognitiva sobre la antiderivada. Por una parte, nuestra variable *tipo de configuración cognitiva*, asociada a las respuestas de los estudiantes, es de suma importancia si queremos "comprender" la naturaleza de los conocimientos matemáticos que éstos efectivamente "poseen". De manera específica, en el trabajo que hemos desarrollado, la noción de configuración cognitiva nos ayudó a profundizar en aspectos relevantes del conocimiento de estudiantes sobre la antiderivada.

Una de las características fundamentales de los ítems sobre el conocimiento matemático, incluidos en el cuestionario, es la reflexión, de los estudiantes, sobre los objetos matemáticos, sus significados y las relaciones complejas entre ellos, que se ponen en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las relaciones entre objetos y significados se concreta y se operativiza mediante la noción de configuración de objetos y procesos (Godino, et al., 2007). Dicha noción favorece no sólo la identificación sistemática de diferentes procedimientos de resolución, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que se ponen en juego en su formulación, sino también la identificación de argumentaciones o justificaciones de los procedimientos y las propiedades. Además, el análisis del tipo de tarea propuesta y de las variables que intervienen en la misma, orientan la reflexión sobre posibles generalizaciones, o particularizaciones, y las conexiones con otros contenidos matemáticos (Godino, 2009).

De esta manera, en este trabajo hemos puesto de manifiesto que la herramienta "*configuración de objetos matemáticos primarios y procesos*" facilita el análisis y la categorización de algunas características de la faceta epistémica y cognitiva del conocimiento matemático de los estudiantes universitarios. El objetivo de un plan de a futuro, se deberán tener en cuenta para el diseño de procesos de instrucción sobre la antiderivada será que las configuraciones cognitivas (como las identificadas en la sección 5.4.3.1), se adapten progresivamente a las configuraciones epistémicas identificadas a priori (como las del sección 4.3.2), tal y como lo sugiere Pino-Fan (2014, p. 347), para la derivada.

El modelo ontológico y epistemológico propuesto por el EOS revela la complejidad inherente a los significados (conocimientos) institucionales y personales que se ponen en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La evaluación de los conocimientos que un estudiante debe comprender requerirá el uso de una variedad de instrumentos (tareas) y representaciones.

6.3.5. Respuesta a la pregunta de investigación *PCI-3*

En la sección anterior hemos discutido en qué medida se ha logrado responder a la pregunta *¿Cuál es el conocimiento sobre la antiderivada, que efectivamente tienen los estudiantes universitarios de carreras de matemáticas y afines?* Para dar respuesta a dicha pregunta se propusieron cuatro objetivos específicos los cuales fueron logrados en la Fase 3 de nuestra investigación (ver sección 2.4.1). En respuesta a la pregunta podemos decir que se logró construir y diseñar un cuestionario que se validó por expertos (ver Capítulo 4). El cuestionario se aplicó a una muestra intencional de estudiantes, los resultados se analizaron cuantitativamente y cualitativamente (ver Capítulo 5). De esta forma, se logró caracterizar y determinar el conocimiento que efectivamente tienen estudiantes universitarios sobre la antiderivada.

6.4. RESPUESTA A NUESTRAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Para dar respuesta a nuestras preguntas de investigación *¿Comprenden los estudiantes universitarios la noción de antiderivada? ¿Qué aspectos o criterios, se deben contemplar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la antiderivada, para lograr que los estudiantes comprendan esta noción matemática?* Se propuso un objetivo general y siete objetivos específicos, los cuales fueron logrados en las tres fases de nuestra investigación (ver sección 2.4.1). Esta investigación evidenció las insuficiencias del conocimiento matemático de los estudiantes universitarios, las cuales fueron detectadas con el cuestionario y justifican la pertinencia de diseñar acciones formativas específicas para desarrollar del conocimiento matemático de los estudiantes. El desarrollo de estas acciones formativas debe tener en cuenta la complejidad del significado global de la antiderivada (ver Capítulo 3). Además deben tenerse, en el diseño de dichas acciones formativas, la vinculación de competencias que le permitan articular las diversas representaciones en las cuales se puede presentar el objeto matemático, así como la vinculación con otros objetos matemáticos cercanos a la antiderivada.

6.5. RESUMEN DE LOS APORTES Y CUESTIONES ABIERTAS

A continuación presentamos un resumen de las principales aportes de nuestra investigación. Debemos señalar que no profundizaremos en ellas dado que han sido ampliamente comentadas a lo largo del desarrollo de este trabajo de investigación.

- *Reconstrucción del significado holístico de la antiderivada.* Para poder explorar el conocimiento matemático sobre la antiderivada, inicialmente debíamos tener una "visión amplia" sobre lo que es la antiderivada o sobre cuál o cuáles son sus significados. Así, en el Capítulo 3 realizamos un estudio histórico-epistemológico que nos permitió, a partir de la identificación de las configuraciones epistémicas activadas en los sistemas de prácticas que dieron paso al surgimiento de la antiderivada, los significados parciales que constituyen el significado global u holístico. Esta reconstrucción es de interés puesto que los significados de la derivada pretendidos por una institución, o profesor como representante de la institución, deben ser representativos de este significado global. Además, las configuraciones epistémicas primarias (ver sección 3.4) podrían orientar el diseño de acciones formativas que permitan "construir" o "lograr comprensión" sobre el objeto antiderivada hasta llegar a su formalización.
- *Criterios para activar cada significado parcial en la actualidad.* Actualmente no se puede hacer uso de todos los elementos primarios identificados en cada significado parcial, sin embargo, adaptando algunas situaciones/problema, planteadas en cada uno de los significados, pueden ser llevados al aula en forma de tareas, y activar en los estudiantes un significado parcial específico. A continuación se describe cómo se identifica la activación de un significado parcial:
    a) *Tangentes-Cuadraturas*: Utiliza definiciones matemáticas de dominio de una función, simetría, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión. Argumenta a través de los criterios matemáticos la construcción de una curva (gráfica). Para encontrar la antiderivada de una función, dada la curva (gráfica) de una función.
    b) *Fluxiones–Fluentes*: El estudiante, utiliza lenguaje, definiciones propias de la física para argumentar el cambio entre magnitudes físicas (aceleración, velocidad, posición), para resolver situaciones que

impliquen fenómenos físicos de variación o rapidez.

c) *Sumatorias-Diferencias*: Utiliza, lenguaje propio de las matemáticas y definiciones que refieren al uso de alguna "regla de integración" o "método de integración" para resolver situaciones matemáticas simbólicas (algebraico).

d) *Funciones elementales*: Utiliza, lenguaje propio de la matemáticas y definiciones que refieren a un análisis detallado de funciones transcendentes, o uso de algún 'método numérico' para expresar funciones como series y así resolver situaciones matemáticas simbólicas (algebraico).

- *Diseño de un cuestionario que evalúa comprensión de la antiderivada.* El diseño de cuestionarios nos llevó a utilizar una metodología existente para el diseño de cuestionarios (Pino-Fan & Font, 2015; Pino-Fan *et al.,* 2015). Metodología que parte desde un análisis a priori de las tareas propuestas, junto con la determinación de las posibles dificultades en la resolución, hasta el contenido curricular que se evalúa. Esta metodología permite observar, describir y predecir la actividad matemática como un conjunto complejo de prácticas en las cuales se movilizan y articulan una serie de objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y sus significados, a los cuales idealmente se deberán aproximar las prácticas matemáticas de los estudiantes cuando resuelvan cada una de dichas tareas. Así mismo, los análisis a priori de contenido, evalúan una muestra representativa de aspectos parciales de los objetos matemáticos, en nuestro caso la antiderivada.

  La metodología utilizada y descrita nos llevó un diseñar un cuestionario que puede ser útil de diferentes maneras:

  1) Se puede utilizar para evaluar la comprensión de la antiderivada que tienen los estudiantes universitarios.
  2) Las tareas que integran el cuestionario podrían ser adaptadas para potenciar, en los estudiantes de los primeros cursos universitarios, la comprensión de la antiderivada, o bien, para introducir dicha noción.

- *La identificación configuraciones cognitivas.* Una variedad de configuraciones cognitivas de los estudiantes se identificaron en el capitulo 5. Mediante éstas se pueden describir habilidades que ponen en juego los estudiantes en la resolución de tareas sobre la antiderivada, y pueden ser replicadas para determinar la complejidad de los objetos y procesos requeridos para la resolución de las tareas en la antiderivada. La caracterización de las configuraciones cognitivas reflejaron los significados personales que movilizan los estudiantes cuando resuelven problemas sobre antiderivadas.

A continuación presentamos algunas cuestiones abiertas que podrían estudiarse con la finalidad de seguir avanzando en el sentido de nuestro estudio y, por ende, en el desarrollo de metodologías didácticas que permitan la exploración y desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de la antiderivada, y en general, de cualquier tema matemático, siempre y cuando se consideren las adecuaciones necesarias relativas al tópico matemático en cuestión.

1. *Exploración de la compresión con el uso de tecnología.* En este trabajo hemos abordado la comprensión de la noción antiderivada, aplicando un cuestionario para cuya solución no se contempló el uso de la tecnología. Sin embargo, se debería seguir avanzando en aspectos como: (haciendo las adecuaciones necesarias sobre las tareas de nuestro cuestionario), ¿cómo abordan los estudiantes la resolución de las tareas con el uso de la tecnología?
2. *Indagar sobre el objeto matemático en los profesores.* Nuestro estudio refleja una serie de carencias en cuanto a los conocimientos matemáticos que evidencian los estudiantes universitarios. En varias de esas “carencias” nos preguntamos, ¿se deberán, quizá, al tipo de instrucción recibida? Para poder responder a esta pregunta, sería conveniente estudiar el objeto matemático desde el conocimiento del profesor. Se hace necesario indagar en el conocimiento sobre la antiderivada que tienen tanto futuros profesores como profesores en servicio.

6.6. NUESTRA CONTRIBUCIÓN A LA COMUNIDAD DE INVESTIGACIÓN

Para finalizar este trabajo de investigación, hemos querido recoger en este última sección, las aportaciones que hemos realizado al campo de investigación de Educación Matemática, a partir de los desarrollos y resultados obtenidos a lo largo de nuestra investigación. A continuación se hace mención a cada uno de los aportes por orden cronológico descendente:

Artículos

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (En prensa). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada . *BOLEMA*.

Gordillo, W., Pino-Fan, L., Font, V., & Ponce-Campuzano, J. C. (Enviado). Diseño de un cuestionario para evaluar la comprensión sobre el objeto matemático antiderivada. *Enseñanza de las Ciencias.*

Pino-Fan, L., **Gordillo, W**., & Larios, V. (Enviado). Meanings of the antiderivative activated by engineering students. *International Journal of Science and Mathematics Education.* Article under review.

Conferencias en eventos especializados

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2015, Noviembre). *Un ejemplo de análisis ontosemiótico para una tarea sobre la antiderivada.* Paper presentado en IXX Jornadas Nacionales de Educación Matemática – SOCHIEM, Villarrica, Chile.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2015, Mayo). *Reconstrucción del significado holístico de la antiderivada.* Paper presentado en XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Tuxtla Guerrero, México.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2014, Noviembre). *Significado de referencia del objeto matemático antiderivada.* Paper presentado en XVIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática – SOCHIEM, Santiago, Chile.

Gordillo, W. (2013, Noviembre). *Comprendiendo la antiderivada.* Paper presentado en XVII Jornadas Nacionales de Educación Matemática – SOCHIEM, Santiago, Chile.

REFERENCIAS

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *EMA*, *8*(1), 30-46.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2/3), 243-285.

Arya, J. C. & Lardner, R. W. (2004). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.* México: Pearson Educación.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and development in ungraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2,* 1-32**.**

Avital, S., & Libeskind, S. (1978). Mathematical induction in the classroom: didactical and mathematical issues. *Educational Studies in Mathematics, 9*(4), 429-438. doi: 10.1007/BF00410588

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E., & Lewin, P. (1988). Computer experiences in the teaching of composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(3), 246-259.

Azcárate, C. & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *X* (2), 135-149.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia*. (Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España).

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191-206.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A Calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578.

Barrow, I. (1735). *Geometrical Lectures.* (Translated from the Latin Edition by Edmund Stone). Londres: Cambridge University.

Bencomo, D., Godino, J. D., & Wilhelmi, M. (2004). Elaboración de redes ontosemióticas de configuraciones didácticas con atlas/ti. En Cañas, A. J, Novak, J. D. & González, F. M. (Eds.). *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. 2*, 71-74. Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*(1), 19-35.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. Londres: The Macmillan Press.

Bressoud, D. (1992). How should we introduce integration? *The College Mathematics Journal, 23*(4). 296-298.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Bos, H. J. M. (1984). Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. 69-124. Madrid: Alianza Universidad.

Boyer, C. (1959). *The history the calculus and its conceptual developtmen.* New York: Dover Publications,Inc.

Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. (Tesis Doctoral, CINVESTAV- IPN, Mexico).

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo.* Australia: Thompson.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approache anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

Cohen, L., & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Collete, J. (1985). *Historia de las matemáticas II.* México: Siglo XXI.

Contreras, A., Font, V., Luque, L., & Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(2), 151–186.

Cordero, F. (2002). *Reconstrucción de significados del cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Crisostomo, E. (2012). *Idoneidad de Procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didactica del cálculo y el conocimiento profesional.* (Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España).

D'Ambrosio, U. (2013). Priorizar história e filosofia da matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11),175-186.

D'Amore, B. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria superior. *Épsilon, 58,* 25-43.

Dahan, J. J. (2002, Marzo). *Another way to teach derivative and antiderivative functions with cabri*, paper presentado en The Annual T3 International Conference, Calgary, Ontario, Canada.

Delos Santos, A. (2006). *An investigation of student's understanding and representation of derivative in a graphic calculator-mediated teaching and learning environment*. (Tesis Doctoral, University of Auckland, New Zealand).

Doorman, M., & Maannen, J. V. (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. *Australian Senior Mathematics Journal, 22*(2), 4-14.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Switzerland: Peter Lang.

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

Eco, U. (1991). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York: SUNY.

Euler, L. (1770). *Intitutionum Calculi Integralis* (Vol. 1) (Translated from the Author's Latin Original). St. Petersburg.

Faerna, A. M. (2006). Significado y valor. La crítica pragmatista al emotivismo. *Quaderns de filosofía i ciència, 36,* 27-39.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada.* (Tesis doctoral, Universitat de Barcelona, España).

Font, V. (2001). Processos mentals versus competència, *Biaix, 19*, 33-36.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97-124.

Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En F.K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 225-256). Charlotte, NC: NCTM y IAP.

Gallardo, J., & González, J. L. (2007). Fronteras en la investigación sobre comprensión en educación matemática. *Números: Revista de Didáctica en Matemáticas, 66*, 23-30 .

Gil, F., & Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(1), 27-47.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics 39,* 111–129.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno: Revista de didáctica en matemáticas. 25*, 77-87

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska, y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity*, 177- 195. Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. & De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27(1)*, 59–76.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2)*,* 247-265.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students’ conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(1), 52-72.

Haeussler, E. F., Paul, R. S. & Wood, R. J. (2008). *Matemáticas para administración y economía*. México: Pearson Educación.

Haciomeroglu, S. E., & Chicken, E. (2012) Visual thinking and gender differences in high school calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(3), 303–313. doi:10.1080/0020739X.2011.618550

Hall, Jr., W. L. (2010). Student misconceptions of the language of calculus: definite and indefinite integrals. In *Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1-16). Raleigh, NC: Mathematical Association of America.

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del Cálculo. En J. C. Cortés & F. Hitt (Eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). Morelia, México: Morevallado Editores.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos.

Horowitz, D. (1990). Tabular integration by parts. *The College Mathematics Journal*. *21*(4), 307–311.

Howard, R. (2004). Antiderivative series for differentiable functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(5), 725-731. doi:10.1080/0020739042000232538

Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative*. (Tesis doctoral, University of Jyväskylä, Finland).

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *Educational Research, 33*(7), 14-26.

Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A., & Turner, L. (2007). Toward a definition of mixed methods research. *Journal of Mixed Methods Research, 1*(2), 112-133.

Kiat, S. E. (2005). Analysis of students' difficulties in solving integration problems. T*he Mathematics Educator, 9*(1), 39-59.

Kirsch, A. (2014). The fundamental theorem of calculus: visually?. *ZDM Mathematics Education 46*(1), 691–695. doi:10.1007/s11858-014-0608-9

Leibniz , W. G. (1920). *The early mathematical manuscrpts of Leibniz*. New York: Dover Publication, Inc.

Mateus, E. (2011). Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, *2* (Especial), 3-21.

Maturana, H., & Varela, F. (1984). *El árbol del conocimiento*. Debate, 1996.

Martínez, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado.* (Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, España).

Metaxas, N. (2007). Difficulties on understanding the indefinite integral. En Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 265-272). Seoul, Korea: PME.

Moreno, M. (2001). *El profesor universitario de matemáticas. Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de caso.* Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98.

Morin, E. (1994). *Introducción al pensamiento complejo*. Barcelona: Gedisa.

Murty, V. N. (1980). Integration by parts. *The Two-Year College Mathematics Journal*. *11*(2), 90–94.

Newton, I. (1686a). *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Translated from the Autho'r Latin Original). Londres.

Newton, I. (1686b). *The method of fluxions and infinite series* (Translated from the Autho'r Latin Original by Jhon Colson). Londres.

Nikolski, S. (1985). *Elementos de Análisis Matemático*. Editorial Mir, Moscú.

Tall, D. (1991). *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*. En: Tall, D. (ed.). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Eductional Studies in Mathematics,12(2), 151- 169. doi:10.1007/BF00305619*

Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de las ciencias.* México D.F.: Editorial Siglo XXI

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3)165-190. doi: 10.1007/BF01273662

Pino-Fan, L. (2011). *Conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre la derivada: clarificando los significados de la derivada desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje***.** Alemania: Editorial Académica Española.

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Assis, A., & Godino, J. D. (2015). Análisis del proceso de acoplamiento entre las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento matemático en el contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones. *Educación Matemática, 27*(1), 37-64.

Pino-Fan, L., Castro, W., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma, 34* (2), 123-150.

Pino-Fan, L., & Font, V. (2015). A methodologolgy for the desing of questionnaries to explore relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of teachers. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 4, pp. 25-32). Hobart, Australia: PME.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2010). *Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada*. Memorias XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México. 206-213.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico- matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema 29*(51), 60-89.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore the mathematical dimension and the epistemic facet of didactic-mathematical knowledge of teachers. *CERME 9, WTG 20: Mathematics teacher knowledge, beliefs and identity*. Recuperado de http://www.cerme9.org/products/twg20/

Pinzón, W., Riaño, O., & Gordillo, W. (2014). *Cálculo Integral en una variable*. Bogotá: Universidad Distrital.

Ponce-Campuzano, J. C. (2013). Isaac Barrow y su versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo. *Números: Revista de Didáctica en Matemáticas, 83*, 123-30.

Ponce-Campuzano, J.C. & Maldonado-Aguilar, M.A. (2015): Vito Volterra's construction of a nonconstant function with a bounded, non-Riemann integrable derivative, *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 30*(2), 143-152, doi: 10.1080/17498430.2015.1010771

Ponce-Campuzano, J.C. & Rivera-Figueroa, A. (2011a). A discussion on the substitution method for trigonometric rational function. *Mathematics and Computer Education, 45*(1), 44-51.

Ponce-Campuzano, J. C., & Rivera-Figueroa, A. (2011b). Unexpected results using computer algebraic systems for computing antiderivates. *Far East Journal of Mathematical Education, 7*(1), 57-80.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 1, pp. 195-210). Lisboa, Portugal: PME.

Posso, A., Uzuriaga, V. L., & Martinez A. (2011). Algunas reflexiones sobre la enseñanza de los métodos de integración. *XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.* Recuperado de http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2489.pdf

Patton, M. Q. (1980). *Qualitative Evaluation Methods.* Beverly Hills, CA: Sage.

Peirce, C. S. (1931-58). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. C. Hartshorne, P. Weiss y A.W. Burks (Ed.). Cambridge: Harvard University Press.

Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Número especial, 7-22.

Ramos, A. B. (2006). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. (Tesis doctoral, Universitat de Barcelona, España).

Robles, M. G., Tellechea, E., & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática, 26*(2), 69-109.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.* (Tesis doctoral, Universitat de Barcelona, España).

Schwalbach, E., & Dosemagen, D. (2000). Developing student understanding: contextualizing calculus concepts. *School Science and Mathematics*, *100*(2), 90-98. doi:10.1111/j.1949-8594.2000.tb17241.x

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the learning of Mathematics, 10*(3), 24-39.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. UK: Flamer. P. xi.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinski & G. Harel (Eds.), *The Concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*, (pp. 25-58). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Stewart, J. (2013). *Cálculo de una variable transcendentes y tempranas*. México: Cengaje Learning.

Swidan, O., & Yerushalmy, M. (2014). Learning the indefinite integral in a dynamic and interactive technological environment. *ZDM Mathematics Education*, *46*(1), 517-531. doi:10.1007/s11858-014-0583-1

Thompson, A. (1992). Teacher's belief and conceptions: a synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 127–146). New York: MacMillan.

Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2), 229-274. doi:10.1007/BF01273664

Thompson, P. W. & Silverman, J. (2007). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117–131). Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Yoon, C., Thomas M., & Dreyfus, T. (2010). How high is the tramping track? mathematising and applying in a calculus model-eliciting activity. *Mathematics Education Research Journal* , *22*(1), 141-157.

Yoon, C., Thomas M., & Dreyfus, T. (2011a). Grounded blends and mathematical gesture spaces: developing mathematical understandings via gestures. *Education Studi Math, 78*(1), 371–393. doi:10.1007/s10649-011-9329-y

Yoon, C., Thomas M., & Dreyfus, T. (2011b). Gestures and insight in advanced mathematical thinking. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(7), 891–909.