UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS
ESCUELA DE POSTGRADO
Programa de Magíster en Educación Matemática

TRAYECTORIAS DE ALGORITMOS DE PREDICCIÓN EN LA MODELACIÓN LINEAL

Tesis para optar al grado de Magíster en Educación Matemática

Carol Elizabeth Sepúlveda Herrera

Dra. Leonora Díaz Moreno, Profesor Tutor
Dr. Luis R. Pino-Fan, Profesor Patrocinante

Noviembre, 2015
Santiago- Chile

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

Programa de Magíster en Educación Matemática

TRAYECTORIAS DE ALGORITMOS DE PREDICCIÓN EN LA MODELACIÓN LINEAL

Dra. Leonora Díaz Moreno, Profesor Tutor

Dr. Luis R. Pino-Fan, Profesor Patrocinante

Noviembre, 2015

Santiago- Chile

AGRADECIMIENTOS

Las palabras nunca alcanzan cuando lo que hay que decir,
Desborda el alma…
(Cortázar)

AGRADECIMIENTOS

En especial…
A mis padres Sonia y Enrique.
A mis hermanos, y a mi sobrino Thiago.

A todos los profesores del Postgrado en Educación Matemática de la Universidad de los Lagos, Dr. Eduardo Carrasco, Dra. María Aravena y en especial a la Dra. Leonora Díaz, por inducirme en este camino de la investigación, por creer en este trabajo.

Al Dr. Jaime Arrieta, por creer en mí y por permitirme terminar este proceso siempre junto a su apoyo y su constante entrega de conocimiento, por no permitirme abandonar y siempre poder contar con su tiempo y ayuda.

A mi familia, a mis cuñadas, a mis amigos y compañeros Iván, Tania, Emilio y Alexis que de alguna u otra forma aportaron en este proceso.

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

INDICE DE FIGURAS

RESUMEN

En este trabajo de investigación se analizan las diferentes trayectorias de algoritmos de predicción que desarrollan los estudiantes participantes en la puesta en escena de un diseño de aprendizaje basado en la modelación del llenado de un recipiente cilíndrico por modelos lineales.

El diseño tiene una trayectoria implícita que conduce, a través de algoritmos de predicción, de un modelo numérico a un modelo algebraico. Sin embargo, los estudiantes de la puesta en escena siguen diferentes trayectorias, de esta forma enriquece la trayectoria implícita del diseño. Los elementos de análisis de las trayectorias corresponden a intenciones, procedimientos, herramientas y argumentos.

ABSTRACT

The present research project analyses different algorithm trajectories of prediction developed by students who participated in a demo of a learning design based on the modelling of a cylindrical container filled by linear models.

This design has an implicit trajectory that leads, throughout algorithm of prediction, from a numeric model to an algebraic one. Although the students who participated in the demo follow different trajectories, this enhances the implicit trajectory of this design. The analysis components from the trajectories correspond to intentions, procedures, analytic tools and arguments.

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales temas de la educación matemática en los últimos años ha sido la modelación y su implementación en el aula. Es posible encontrar un gran número de publicaciones en el área que pretenden aportar a la enseñanza de la matemática, de distintos países y desde distintas miradas. Es por este gran auge que ha tenido éste tema, que nos hemos planteado el propósito de implementar una secuencia de modelación en un aula de matemática de segundo medio y desde la aplicación de ésta secuencia de modelación lineal “El llenado del recipiente cilíndrico”, ha nacido el planteamiento del problema y pregunta de ésta investigación, la cual se presentan en el el primer capítulo.

Es así como nos cuestionamos sobre ¿Qué trayectorias de algoritmos desarrollan los estudiantes de segundo medio al modelar linealmente el llenado de un recipiente cilíndrico?

Para sustentar el planteamiento de la pregunta se presentan la problemática de la investigación, que está en relación con la separación entre la escuela y su entorno. Se argumenta acerca de la construcción social del conocimiento, a modo de introducción del marco teórico de la investigación. De la misma forma se abordan diferentes acercamientos a la modelación, entre ellos, la modelación según PISA, la modelación según los planes y programas del ministerio de educación de Chile, una clasificación realizada por Blomhoj (2009) y por último la modelación como práctica de los autores Arrieta y Díaz (2015).

El segundo capítulo corresponde al marco teórico en el cual se presenta el enfoque teórico de la investigación la Socioepistemología y la perspectiva de modelación que adoptamos: la modelación como una práctica recurrentemente vivenciada por diversas comunidades que articula dos entidades con la intención de intervenir en una a partir de la otra (lo modelado y el modelo).

Así también se caracteriza a lo lineal como una red de prácticas y herramientas que se ejercen y construyen durante la práctica de modelación y lo relacionado con el algoritmo, entendiéndolo como una estructura de acciones que se configuran para realizan una tarea y a las prácticas que estructuran éstas acciones que se configuran para realizar dicha tarea.

El tercer capítulo corresponde a la metodología, ahí se define a la investigación del tipo cualitativa y con metodología de diseño y experimentos de enseñanza.

El cuarto capítulo se trabaja el modelado del llenado de un recipiente cilíndrico en el cual describiremos los objetivos y fases del diseño, la predicción y la construcción de diferentes modelos, los actores en la puesta en escena y la recogida de datos.

El quinto capítulo se refiere al análisis posteriori y la validación, en la cual se analiza cada una de las situaciones y luego se realiza un resumen de éste análisis por equipo. También se presentan las trayectorias por equipos y su caracterización por intenciones, argumentos, herramientas y procedimientos.

En el sexto capítulo se presentan las conclusiones del trabajo de investigación con respecto a las trayectorias de algoritmos en la modelación lineal y acerca de la implementación de la modelación en un aula de segundo medio.

I. ANTECEDENTES

1.1 LA PROBLEMÁTICA: LA SEPARACIÓN DE LA ESCUELA Y SU ENTORNO

Una de las problemáticas que se resiste a los intentos por superarla en educación matemática en nuestro país tiene que ver con la separación entre lo que se enseña en las aulas y lo que vivencian los estudiantes en su vida diaria. Los estudiantes aún continúan preguntando a sus profesores de matemáticas ¿Para qué me sirve esto en mi vida? ¿Algún día lo podré utilizar?

Esta problemática ha sido señalada, al menos, desde la década de los 80. Lave (1988) y Walkerdine (1988) reportan cierta separación entre la escuela y su entorno.

Carraher, Carraher y Schliemann (1991) en su libro "En la escuela diez, en la vida cero", destacan que hay personas que en la vida, vendiendo cocos, se desempeñan muy bien y en la escuela no.

Arrieta y Díaz (2015) presentan el caso de César, un escolar que vende chicles en las calles de Acapulco. Él realizaba operatoria básica con números, para cobrar y dar vuelto a sus clientes. Sin embargo, al momento de enfrentarlo con el mismo problema con lápiz y papel, no los pudo resolver. No es lo mismo vender chicles que resolver problemas en el aula de venta de chicles. Las intenciones, los procedimientos, las herramientas y los argumentos que intervienen son diferentes. Estas diferencias son derivadas de la problemática señalada, la separación de la escuela de su entorno. Los estudiantes no logran relacionar lo que hacen en su día a día con lo que hacen en la escuela.

Según señalan Aravena y Caamaño (2007, p.8)

> Uno de los problemas más complejos que enfrenta la educación secundaria chilena en el ámbito de la enseñanza de la matemática tiene relación con la forma de articular los temas con las otras áreas del conocimiento e incluso con la propia matemática. Esto es, la mayoría de los temas están desconectados del mundo real y de las ciencias, lo que tiene como consecuencia que los estudiantes no conciben la utilidad que tienen las matemáticas en su formación.

La separación entre la escuela y su entorno no es tan sólo vivenciada por los estudiantes, los docentes también la comparten. Profesores se refieren a "problemas de la vida real" cuando se plantean situaciones no escolares, dejando entrever que lo que sucede en la escuela es un mundo irreal. Este es el caso de Alberto, un profesor que al ser sometido a un estudio, declara entender cómo realidad a una propiedad de las situaciones externas a las matemáticas (Villa-Ochoa, Quintero, Arboleda, Castaño, Bedoya, 2009). Ante este tipo de hechos es que Blum, Galbraith, Henn y Niss (citado en Villa-Ochoa, et al, p. 162) se ven en la necesidad de puntualizar que "el mundo real es entendido como todo aquello que tiene relación con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo todo lo referente a la vida cotidiana como a los temas escolares y universitarios y disciplinas curriculares diferentes de las matemáticas". Esta separación de las matemáticas y el mundo real se extiende a investigadores.

Estas afirmaciones chocan con los planteamientos de perspectivas teóricas como la socioepistemología o la etnomatemática que plantean que la matemática es producto de la actividad humana en un entorno determinado y que también está inserta en nuestro quehacer cotidiano.

Alsina no hace tal separación. Alsina (2009) tipifica seis principios fundamentales de la educación matemática realista (EMR): de actividad, de realidad, de niveles, de reinvención guiada, de interacción, de interconexión. En particular, para el principio de Realidad señala que “Las matemáticas se aprenden en contextos reales” (Ibid. p.3). Entendiendo como un contexto real a distintas situaciones problemáticas de la vida cotidiana y *también de aquellas que puedan estar presentes en las mentes de los estudiantes*.

Esta preocupación de las matemáticas realistas por proveer de contextos reales a los estudiantes los ha desvirtuado. Con el problema Si Enrique VIII tuvo seis esposas ¿cuántas tuvo enrique IV?, llama la atención ilustrando con seis desviaciones presentes en las aulas de matemáticas (Alsina, 2007). Se las presenta a través de la siguiente tabla.

Tipos de Realidades	Descripción
Realidades Falseadas y Manipuladas	Son situaciones que cuentan con palabras y datos del uso cotidiano, pero cambiadas para dar lugar a ejercicios matemáticos rutinarios.
Realidades Inusuales	Son situaciones muy pocos frecuentes pero que aparecen planteadas como si fueran cotidianas.
Realidades Caducadas	Se trata de situaciones que ya pasaron en el tiempo, que para los estudiantes del siglo XXI ya son ficciones históricas.
Realidades Lejanas	Están relacionadas con escenas culturales alejadas, hechos exóticos, folclóricos que en absoluto se identificarán con las realidades locales actuales.
Realidades Ocultas	Se trata de hechos no observables directamente, sobre los que no hay intuición ni experiencia.
Realidades no	Son situaciones no adecuadas a la edad y

adecuadas	circunstancias de los estudiantes.
Realidades Inventadas	Se trata de realidades ficticias, maquilladas como situaciones aparentemente posibles.

Tabla 1. Seis principios fundamentales de la educación matemática realista (Alsina, 2009)

Desde nuestra perspectiva no es un problema de realidad, ya que tan importante y "real" es la escuela como el mundo no escolar (Arrieta y Díaz, 2015), desde nuestra propuesta, para aliviar la tensión que provoca esta problemática proponemos a la modelación como puente que vincula lo que se hace en la escuela y lo que se hace en la vida no escolar.

1.1.1 La construcción social del conocimiento

Las prácticas escolares tradicionales, se desarrollan en el entendido que se enseña para después aplicar el conocimiento que el maestro transmite. Esta apreciación se basa en teorías o modelos centrados más en la enseñanza que en el aprendizaje, en las que lo importante es cómo enseña el maestro y no los procesos a través de los que aprende el alumno. En el modelo centrado en el contenido de acuerdo a Brousseau (1997) se considera que la pedagogía es el arte de comunicar un saber. Para este modelo, también llamado normativo, el saber ya está construido y la tarea del maestro es introducir y enseñar los conceptos para posteriormente dar ejemplos con los que se reafirme lo enseñado. El papel del alumno sólo se limita al de un sujeto pasivo que escucha, ejercita, aplica y al final, como consecuencia, viene el aprendizaje.

Otro de los modelos enunciados por Brousseau (1977) es el centrado en la construcción por el alumno, parte de las concepciones con las que el alumno ya cuenta para probarlas, mejorarlas o construir otras nuevas. El papel que el docente juega es más enriquecedor, será quien proponga y organice situaciones, oriente las fases de investigación, formulación, validación e institucionalización. El alumno no es un sujeto pasivo, es quien construye, propone y compara sus soluciones con las que otros han propuesto. El alumno construye el saber, no al final de las actividades, sino desde que inician las situaciones didácticas, es ésta una construcción personal pero siempre en interacción con sus compañeros.

En este trabajo de investigación se retoma el segundo modelo y la premisa de que el conocimiento se construye. Que el conocimiento no se aprende y después se aplica, sino se construye desarrollando actividades. Que el conocimiento se construye con los otros, es decir, en interacción entre los estudiantes y el profesor. Que el conocimiento se aprende interviniendo.

En relación al aprendizaje, Bruner (1987) afirma que no es un mero sumar conocimiento, sino un proceso de crecimiento. Al saber lo conceptualiza como un proceso y no como un producto. D´Ambrosio (1986), por su parte, concibe al aprendizaje como una relación que envuelve reflexión y acción, cuyo resultado es un permanente cambio de realidad. El aprendizaje no se da por acumulación, tampoco se logra al final de un proceso puesto que es el proceso de construcción continuo del individuo.

El que enseña no debe perder de vista que antes que sus deseos están los intereses de sus alumnos, y estos no siempre coinciden con los suyos. Bassanezi (1990) considera que la enseñanza debe estar enfocada en los intereses y prácticas de la comunidad, y no buscar solamente que los alumnos apliquen el conocimiento (el para qué sirve) en su contexto inmediato. Bassanezi (1990) también retoma que la enseñanza no consiste en enseñar una cantidad enorme de datos o saberes, porque no se trata de que el alumno descubra con su poca experiencia lo que a la humanidad le ha tomado años. Este error común nos lleva a cometer otros más, como querer medir la cantidad de conocimiento de nuestros alumnos con pruebas estandarizadas y descontextualizadas que no reflejan sus procesos de pensamiento.

Tal pareciera que la forma de aprender de cada alumno nada tiene que ver con lo que se estudia en la escuela.

Cuando situaciones cotidianas son abordadas en las prácticas educativas el estudiante se involucra en la construcción de su conocimiento, pues las intenciones son compartidas por ellos, e interviene directamente en situaciones que en su vida diaria se presentan. De esta forma, logrará construir herramientas que serán de utilidad para otros contextos. No debe, pues desligarse a la escuela del contexto inmediato del estudiante, pues de otra forma, el alumno concluirá que lo aprendido en la escuela no le sirve en su vida, o incluso que lo que aprende en contextos informales es más importante que lo que aprende en el salón de clases.

Esta situación no es remota, muchos de nuestros estudiantes no saben qué hacer con lo que aprenden, no relacionan su vida y los acontecimientos que se les presentan con lo que hacen en la escuela. No encuentran matemática en su entorno. Por tanto se deben aprovechar las situaciones comunes para de ahí construir modelos matemáticos a partir de hechos cotidianos.

Es precisamente en donde nos es de gran aporte la socioepistemología pues se caracteriza por explicar la construcción social del conocimiento matemático, privilegiando la relaciones entre saber, mente y cultura (Cantoral, 2013).

1.2 LA MODELACIÓN, DIFERENTES ACERCAMIENTOS

1.2.1 PISA

La modelación hoy día se ha posicionado como un tema relevante en la educación en sus diferentes niveles. Un ejemplo de ello son los currículos de Chile, Colombia.

La modelación está presente en pruebas estandarizadas tanto nacionales como PISA y en múltiples artículos de investigación en educación matemática o matemática educativa, un ejemplo de ellos es la gran producción en artículos en Brasil (Arrieta & Díaz, 2015).

El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE (PISA, por sus siglas en inglés) entiende por competencia matemática la "capacidad de los individuos para formular, emplear e interpretar la matemática en una variedad de contextos. Incluye la capacidad para razonar matemáticamente y de utilizar conceptos matemáticos, así como procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos" (OCDE, 2013)

Al revisar los niveles de competencias propuestos por la OCDE, podemos verificar la importancia que tiene la implementación de la modelación en el aula, ya que considera que en sus niveles más altos de rendimiento por parte de los estudiantes, éstos serán capaces de:

Nivel 4 y 5: Trabajar con modelos explícitos por situaciones complejas, como así también podrán seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas complejos relacionados con estos modelos.

Nivel 6: Los estudiantes que alcanzan este nivel son capaces de conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y en su elaboración de modelos para resolver problemas complejos.

Según lo señala, la Agencia Calidad de la Educación, (2014), en Matemática, Chile alcanza el primer lugar de Latinoamérica obteniendo 423 puntos, ubicándolo 51 de los 65 países evaluados, situación igualmente preocupante, ya que, entre los resultados obtenidos entre el 2006 y el 2012, no hay una alza estadísticamente significativa en la medición, lo que quiere decir, que a pesar de ser uno de los países de Latinoamérica con los mejores resultados, no hemos logrado avanzar con el aprendizaje de nuestros estudiantes en la asignatura.

Lo que se representa en los siguientes porcentajes:

a) 52% de los estudiantes evaluados se encuentran bajo el nivel 2, donde se demuestra que saben responder a preguntas en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas.
b) 25% se encuentra en el nivel 2, en el que los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional.
c) 15% se ubica en el nivel 3, es decir, sabe ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos.
d) 6% se incluye en el nivel 4 y en los niveles más altos de desempeño (5 y 6) se ubica sólo el 2% de los estudiantes, porcentaje que representa una alza de un 1% con respecto a lo obtenido en el año 2009.

1.2.2 Planes y programas del Ministerio de Educación de Chile

Según señalan las bases curriculares (2013), lo que se espera a través de la enseñanza de las matemáticas es que los estudiantes adquieran la capacidad de emplear e interpretar éstas en diversos contextos, por lo que esto implica que deben aprender aplicar el razonamiento matemático y a utilizar conceptos, procedimientos, datos y herramientas para entender, describir, explicar y predecir fenómenos.

Para desarrollar lo antes mencionado, declaran que es necesario desarrollar cuatro habilidades, las cuáles se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas en la aplicación de conocimientos en distintos contextos, las cuáles son: Resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar.

El ministerio de educación, entiende el modelar como:

> Es construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla; asimismo, ese modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades, estimar, comparar impactos y representar relaciones. (Bases curriculares 2013, p. 108)

1.2.3 Clasificación Blomhøj

Existen distintas miradas con respecto a la modelación. Algunos autores se refieren a ella como una habilidad a desarrollar, como una herramienta para enseñar matemáticas o también se considera como el contenido a enseñar.

Según señala Blomhøj (2009) es posible identificar un número de diferentes enfoques y perspectivas de la educación matemática en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la modelación. Esto es, precisamente, la razón para señalar las distintas conceptualizaciones de los modelos matemáticos en los diferentes marcos teóricos y para diferentes propósitos, como uno de los temas para el estudio del tema Grupo de aplicaciones y modelos matemáticos en la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas en ICME-11 año 2008 (TSG21). En esta clasificación, existen 6 perspectivas, las cuáles son:

- ✓ Realista: En esta categoría el modelado matemático es vista como la solución de la aplicación de los problemas con un fuerte énfasis en la vida real, situación que debe ser modelada y que debe estar presente en los distintos enfoques interdisciplinarios.

- ✓ Contextual: Esta perspectiva de investigación se centra en el desarrollo y prueba de diseños para el modelado de actividades que se guían por seis principios: (1) Principio de realidad; (2) Principio de la construcción del modelo; (3) Principio de auto-evaluación; (4) Documentación de construcción principio: (5) Principio de generalización; (6) Principio de simplicidad.

- ✓ Educativa en un modelo matemático: La idea principal de la perspectiva educativa es la integración de los modelos y el modelado en la enseñanza de las matemáticas, tanto como medio para el aprendizaje de las matemáticas y como una competencia importante por derecho propio.

- ✓ Epistemológica: el punto de vista epistemológico modelado matemático está subordinada el desarrollo de teorías más generales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

- ✓ Cognitiva: dentro de ésta perspectiva el interés principal es comprender que las funciones cognitivas se activan en matemática del estudiante individual modelar actividades.

- ✓ Socio-Crítico: Los modelos matemáticos de diferentes tipos y complejidad están jugando importante y creciente papel en el funcionamiento y la formación de las sociedades tanto en la elaboración países y en los países más desarrollados.

1.3 LA MODELACIÓN COMO PRÁCTICA

Otra mirada de modelación es la de los autores Arrieta y Díaz (2015, p. 35), donde la entienden como:

> La modelación es una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo. La intervención sobre lo modelado es diversa, por ejemplo, para la predicción, el diagnóstico y/o la evaluación.

Bajo ésta mirada los autores nombran a ésta articulación como el dípolo modélico, en el cual nombran al modelo (mo) y a lo que resulta modelado (ma), el que se presenta en el siguiente figura 1.

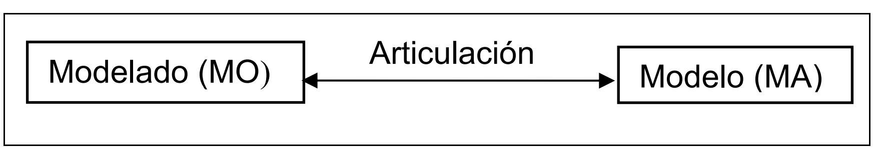


Figura 1. Acto de Modelar

También mencionan que:

> El ente se convierte en modelo cuando el actor lo usa para intervenir en el otro ente, por lo que deviene en herramienta. Los entes matemáticos al modelar, son herramientas (Arrieta y Díaz, 2015, p. 35).

Ejemplificando lo anterior, mencionan el caso de un electro cardiograma, aludiendo a que dependiendo de quién sea el actor es el significado que tendrá para éste. Si un padre se realiza un electrocardiograma, para él simplemente este electro corresponde a los resultados de unos exámenes solicitados por su doctor, pero no le informa sobre la actividad de su corazón. En cambio, el cardiólogo ha articulado la actividad del corazón del paciente con una gráfica, construyendo el dipolo modélico (DM), por lo que se puede afirmar que el cardiólogo modela, el padre no.

Los autores resaltan que las entidades matemáticas permiten contar con un amplio juego de modelos, entre ellos: ecuaciones o sistemas de ecuaciones algebraicas y/o diferenciales, graficas cartesianas, trayectorias, tablas, entre otros.

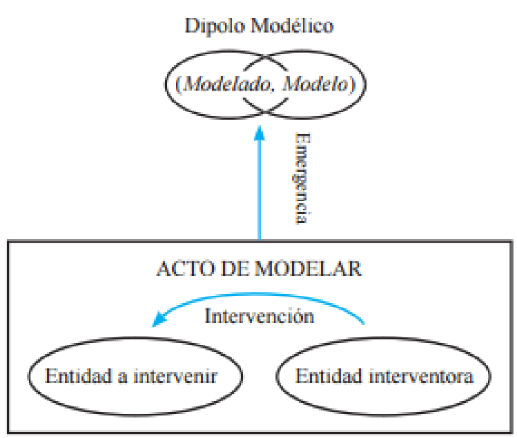


Figura 2. La modelación, el acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico (Arrieta & Díaz, 2015)

Al igual como lo mencionan los autores en esta investigación, el interés de las prácticas de modelación, responden a la intención de construir diseños de aprendizajes basados en éstas prácticas y con la posibilidad de incorporarlas al aula de matemáticas.

1.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En nuestro enseñar damos por sentadas muchas cosas, constantemente se menciona entre los educadores que se aprende mejor a partir del ejemplo, y esa premisa la ponemos en práctica cuando nuestra enseñanza se basa en demostraciones de cómo se deben hacer las cosas, cuando enumeramos instrucciones o procedimientos que deberán seguirse paso a paso, y creemos que el proceso de aprendizaje del alumno es tan simple que se limita a repetir lo que decimos; el estudiante que más sabe no es el que busca por sí mismo, sino el que reproduce fielmente nuestras alocuciones a las cuales les damos un sentido de verdades absolutas. Sin embargo, el aprendizaje no es tan simple como pudiera parecer, tiene que ver forzosamente con las concepciones epistemológicas, las cuales se refieren a las ideas acerca del conocimiento, cómo se estructura, cómo evoluciona y cómo se produce (Hammer, 1994).

En ejemplo de lo antes mencionado tiene relación con el problema que se presenta a continuación, extraído del libro de primero medio SM, entregado por el Ministerio de Educación el año 2014 (Del Valle J., Muñoz G., Santis M., p.134)

> Marta y Samuel están realizando un experimento para aplicar la ley de Hooke, suspendiendo masas distintas en un resorte de un material determinado y registrando la fuerza ejercida por este y el estiramiento que se produce en él. A continuación se muestran los resultados.

Fuerza (N)	Estiramiento(cm)
6	1,0
9	1,5
12	2,0
15	2,5
18	3,0

¿Con qué función se puede modelar la Ley de Hooke?

Figura 3. Ejercicio modelación ley de Hooke (Del valle et al, 2014)

En este ejemplo no sólo llama la atención los datos que se presentan en la tabla, sino también en la forma que al estudiante se le presenta el problema y el modo de modelar la elasticidad del resorte, ya que luego del enunciado se reduce el ejercicio a desarrollar dos pasos los cuáles se le presentan del siguiente modo:

“Paso 1: Identifica la relación de dependencia”

“Paso 2: Modela la situación con lenguaje algebraico y exprésala como función”.

Se añade que primero deben calcular la constante de proporcionalidad que corresponde al cociente entre los correspondientes valores de la deformación y la fuerza, para luego obtener que la longitud del estiramiento se obtenga multiplicando la fuerza por la constante determinada en el segundo paso y de ese modo se representa la función asociada a tal fenómeno.

En lo ejemplificado anteriormente se le presenta al estudiante una situación, que corresponde a la elasticidad del resorte, pero el modo al cual se reduce la forma de trabajar con el fenómeno, implica que para el estudiante este sea un ejercicio más, por lo tanto se sigue trabajando una matemática sin significado, debido a que corresponde a tres pasos que son explicados y que se convierten en una receta para resolver este tipos de ejercicios con un planteamiento similar, no permitiendo desarrollar un análisis de los datos o del fenómeno por parte del estudiante para encontrar la función.

Identifica la relación de dependencia → **Modela la situación con lenguaje algebraico** → **Expresa la función que representa la elasticidad del resorte**

Figura 4. Trayectoria ejercicio modelación Ley de Hooke

Realizando un análisis más exhaustivo con respecto al problema planteado anteriormente, analizaremos ¿Cuáles serían los Procedimientos, Intenciones, Herramientas y argumentos en este problema?

Intención: El estudiante se pregunta ¿Para qué identificar la relación de dependencia? ¿Para qué modelar la situación con lenguaje algebraico y expresarla como función? La intención de quién plantea el problema es que el estudiante logre obtener la longitud del estiramiento y luego en base a ese valor obtenido plantear la función asociada a tal fenómeno.

Procedimiento: Se les da un algoritmo para la "Modelación" primero deben calcular la constante de proporcionalidad que corresponde al cociente entre los correspondientes valores de la deformación y la fuerza, para luego obtener que la longitud del estiramiento se obtenga multiplicando la fuerza por la constante determinada en el segundo paso y de ese modo se representa la función asociada a tal fenómeno.

Herramientas: Constante de proporcionalidad, función, ley de Hooke, tabla de valores.

Argumentos: de la clase, del profesor, del texto

Esta investigación surge por la necesidad de centrar el proceso de aprendizaje en el alumno y como consecuencia, conocer cuáles son las herramientas matemáticas que construyen, los procedimientos que desarrollan, los argumentos que esgrimen y las intenciones de los estudiantes de educación media al modelar una situación concreta, en este caso la trayectoria de algoritmos de predicción que siguen los estudiantes en una situación de modelación lineal.

El conocimiento al que el alumno acceda no se originará por mera transmisión, antes bien, será una construcción al ejercer la experimentación y prácticas emergentes de modelación. A través de su ejercicio se construyen herramientas matemáticas, se desarrollan los procedimientos que sirvan a su necesidad cognitiva, se esgrimen los argumentos que justifiquen su proceso y sus intenciones en situaciones de predicción con modelos lineales de un fenómeno.

Para ello elaboramos diseños de aprendizaje basados en prácticas de modelación lineal.

1.5 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La pregunta de investigación que lleva el desarrollo de esta tesis:

¿Qué trayectorias de algoritmos desarrollan los estudiantes de segundo medio al modelar linealmente el llenado de un recipiente cilíndrico?

Para dilucidar las trayectorias que seguirán los estudiantes al modelar linealmente un fenómeno estudiamos las herramientas procedimientos, argumentos, intencionalidades de sus acciones. Las preguntas complementarias giran alrededor de este tema. Éstas se refieren a por qué lo hacen, intencionalidad, cómo lo hacen, procedimientos, con qué lo hacen, herramientas, y cómo validan lo que hacen, argumentos.

En sí no sólo se analizan las acciones, sino la configuración de éstas que desarrollan los estudiantes.

Objetivo General:

Analizar y describir las trayectorias de algoritmos que los estudiantes desarrollan al modelar linealmente un fenómeno.

Objetivos Específicos:

- ✓ Caracterizar trayectorias de los algoritmos de predicción a través de intenciones.
- ✓ Caracterizar trayectorias de los algoritmos de predicción a través de procedimientos.
- ✓ Caracterizar trayectorias de los algoritmos de predicción a través de herramientas.
- ✓ Caracterizar trayectorias de los algoritmos de predicción a través de argumentos.

II. ANTECEDENTES TEÓRICOS

2.1. SOBRE SOCIOEPISTEMOLOGÍA

La socioepistemología surge como una teoría de la matemática educativa desde Latinoamérica. Según señala Cantoral (2013), ésta corriente de investigación tiene su nacimiento en el cruce de caminos entre Matemáticas, Ciencias Sociales y Humanidades en un intento por explicar las relaciones entre mente, saber y cultura en el campo de las matemáticas apoyándose en la noción de práctica social.

Desde la mirada socioepistemológica, nos distinguimos de perspectivas que aluden a las nociones matemáticas como objetos que precisen ser enseñados desde la obra matemática. En esta investigación privilegiamos la matemática como herramienta además provista de intenciones, de procedimientos y argumentaciones. Una matemática que propicia formas de actuar en contextos específicos.

Así mismo, con base al estudio y lectura de distintas investigaciones que toman como marco a la socioespistemología, podemos señalar que ésta considera cuatro dimensiones principales para la construcción y reconstrucción del conocimiento y a nivel sistémico, a saber, lo epistemológico, lo cognitivo, lo didáctico y lo sociocultural.

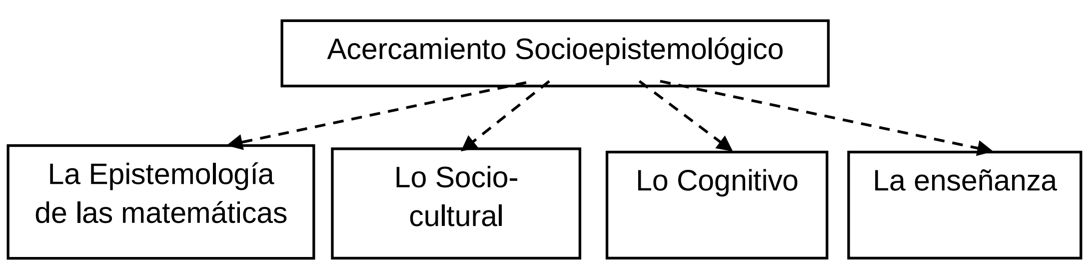


Figura 5. Acercamiento Socioepistemológico

Lo epistemológico se ocupa de problemas tales como las circunstancias históricas, psicológicas y sociológicas que llevaron y propician la construcción y reconstrucción de saberes así como los criterios por los cuales se le justifica o invalida. La dimensión Socio - Cultural es aquella que lleva a considerar el entorno tanto social como cultural al cual se ve enfrentado el estudiante durante el proceso enseñanza – aprendizaje y proyectivamente (el mundo al que se integrará cultural, social y profesionalmente). Lo cognitivo tiene relación con modos de aprender y modos de pensar de los estudiantes. Lo didáctico dice relación con las responsabilidades de la enseñanza (dar cuenta de unos aprendizajes) y el currículum (medio de institucionalización de unos saberes en una población específica, como la de un país o de una comunidad escolar).

El término socioepistemología plantea una distinción con aproximaciones epistemológicas tradicionales. Mientras éstas asumen al conocimiento como el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la toda actividad humana, la socioepistemología, en cambio, se plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socio culturales particulares. El conocimiento, en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre la epistemología y factores sociales (Cantoral & Farfán, 2002).

Por otra parte, Cantoral, Molina y Sánchez (2005) señalan que la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa, centra su atención en el examen de las prácticas sociales que favorecen la construcción del conocimiento matemático, incluso antes que estudiar a los conocimientos mismos.

Del mismo modo, Cantoral (2013), reafirma lo anterior diciendo que los estudios que involucran la Socioepistemología reportan características del ejercicio de prácticas que anteceden y acompañan la producción o construcción de conocimiento: nociones y conceptos, procedimientos y propiedades, que a su vez evolucionan hacia formas del saber socialmente establecidos.

Pudiendo así afirmar que la aproximación teórica Socioepistemológica involucra tanto a los estudiantes como a los profesores. Ambos actores construyen significados, construyen sus identidades, construyen sus realidades y su propia cognición.

La importancia del enfoque socioepistemológico para la investigación en Matemática Educativa es que parte de la realidad del que aprende para construir realidades e identidades necesarias para el aprendizaje humano. Este enfoque se sustenta a su vez, en el constructivismo, que es una teoría que propone que el ambiente de aprendizaje debe sostener múltiples perspectivas o interpretaciones de realidad, construcción de conocimiento y actividades basadas en experiencias ricas en contexto (Jonassen, 1991). Un componente importante del constructivismo es que la educación se enfoque en tareas auténticas, tareas de relevancia y utilidad en el mundo. El aprendizaje de los alumnos debe ser activo, participando en actividades en lugar de permanecer de manera pasiva observando lo que el maestro explica o ejemplifica.

El enfoque socioepistemológico da más importancia a la actividad humana sobre el objeto de aprendizaje, es el individuo quien construye en interacción con el objeto de conocimiento, con el entorno y con los otros; se da más importancia a modelar el papel de la práctica social en la producción de conocimiento a fin de diseñar situaciones para la intervención didáctica (Cantoral, 2006).

La socioepistemología aborda el problema de la representación de los objetos pero no a través de artefactos, herramientas o signos, sino por medio de las prácticas y de la forma en que se relacionan con las prácticas sociales. La práctica social se entiende como normativa de la actividad, más que como actividad humana reflexiva o reflexión sobre la práctica; o aun como señala Radford (2006), como interiorización reflexiva de prácticas sociales históricamente constituidas.

Ahí radica una de las principales distinciones teóricas del enfoque socioepistemológico: la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen (Covián, 2005). De este modo, se pretende explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático con base en prácticas sociales. En sus investigaciones, los socioepistemólogos reportan más bien caracterizaciones del ejercicio de las prácticas que anteceden a la producción o construcción de conceptos y al desarrollo del saber.

Para esta investigación la importancia de la Socioepistemología radica en que modela la construcción social del conocimiento matemático, esto es, modeliza el conocimiento puesto en uso. Además de considerar los escenarios históricos y culturales particulares, dando más importancia a la actividad humana que al objeto de aprendizaje, ya que es el individuo quien construye en interacción con el objeto, en ésta ocasión el estudiante construye algoritmos de predicción a través de la modelación.

Lo que se pretende con el enfoque socioepistemológico es estudiar las prácticas ejercidas por los estudiantes y llevar al aula situaciones comunes para el alumno, de modo que por medio de las actividades desarrolladas surja el conocimiento.

2.2 SOBRE MODELACIÓN

Biembengut y Hein (1997) entienden a la modelación como un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático, donde este proceso, desde cierto punto de vista, puede ser considerado artístico, ya que para elaborar un modelo, se debe tener algo más que el conocimiento matemático, ya que éste permite no solo obtener una solución particular sino también sirve como soporte para otras aplicaciones o teorías. Así mismo, en su reseña del 2011 en Recife con ocasión de la XIII CIAEM, reporta las orientaciones con que entra en las aulas escolares, a saber: a) justificación del proceso: donde se señala que es importante el que el profesor justifique el proceso de aprendizaje a sus estudiantes, para tornar que los estudiantes sean participantes activos y responsables de su proceso enseñanza - aprendizaje ; b) elección del tema: sugiere que el tema a trabajar sea escogido con la participación de los estudiantes, para que éstos se sientan participantes del proceso; y, c) desarrollo del contenido pragmático: se debe tener en consideración que el contenido pragmático deberá fluir del tema, ya sea a través de interrogantes que plantee el docente o bien las interrogantes acordadas con los estudiantes.

En Aravena y Caamaño (2007), se establece que la modelación corresponde a una clasificación en la que se interrelaciona lo algebraico, lo geométrico y lo analítico, potenciando la interconexión entre tales aspectos. Añaden que la modelización participa en el carácter formativo de la matemática, potenciando la heurística de los estudiantes.

Otra de las miradas concibe a la modelación como una práctica. Ella en sí misma es el pretexto que permite identificar y descubrir otros elementos consustanciales a la re-significación del conocimiento matemático escolar y a propiciar su carácter funcional. Funcionalidad en el sentido de que la matemática escolar se pueda integrar y resignificar permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla (Suárez & Cordero, 2005).

Para Villa-Ochoa y otros autores, cuyos estudios se ocupan de la enseñanza obligatoria de su país Colombia, el proceso de modelación matemática es considerado como “una actividad científica en matemáticas que se involucra en la obtención de modelos propios de las demás ciencias”. (Villa- Ochoa et al., p.160). Para los autores su mayor riqueza a nivel didáctico, se da en la medida en que propicia un contexto científico en los estudiantes, en el que puedan indagar, observar, plantear o proponer, cuestionar, validar y comprobar, experimentar, conjeturar, generalizar, discutir, entre otros tantos aspectos que la ciencia genera con base en la estrategia de la modelación.

La modelación que se suscribe en planes y programas de educación media de formación general de nuestro país (Mineduc, 2011) subyace a los enunciados de “Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado” (Mineduc, p. 51) y como habilidad asociada a éste aprendizaje esperado: “Modelar situaciones o fenómenos en diferentes contextos, utilizando funciones lineales” (op. cit, p. 51). Por una parte, identifican a la modelación con la ecuación y por otra la centran en el uso de funciones, exhibiendo una centración en la actividad de un dominio pseudo-concreto. No se esclarece la interacción entre los modelos y el fenómeno.

Finalmente desde la mirada socioepistemológica, en la cual, se encuentra inserto nuestro trabajo, se entiende a la modelación como una práctica que vive en diversas comunidades.

En este sentido corresponde a una práctica convivencia que articula dos entidades con la intención de intervenir en una a partir de otra (lo modelado y el modelo), entendiendo a ésta intervención como el acto de modelar.

Nos distinguimos de perspectivas de la modelación que entienden a esta como un acto de representar o bien a la realidad o bien a los objetos matemáticos.

Como señalan De Almeida y Ferruzzi (2009): Podemos dizer que, de modo geral, o termo ‘modelagem matemática’ refere-se à busca de uma representação matemática para um objeto ou um fenómeno que pode ser matemático ou não

Para esta investigación, la naturaleza de la modelación radica en la potencia que imprime la articulación y la intencionalidad de intervenir. Esto implica la necesidad de interactuar con la entidad en la que se desea intervenir, es decir la necesidad de la experimentación en sentido amplio. Sin embargo, la interacción con lo que se pretende modelar, no es suficiente para caracterizar a las prácticas de modelación, esta suficiencia se establece con el acto de articular dos entes con la intención de intervenir en uno a partir del otro.

2.3. SOBRE LO LINEAL

Hacemos una distinción entre el objeto matemático función lineal y la red de modelos lineales articulada con el fenómeno modelado que llamamos lo lineal. En este sentido, desde nuestra perspectiva, los modelos no solo lo son las expresiones analíticas, sino que lo son también las tablas de datos numéricos y las distintas gráficas.

Según señala Méndez (2008) el modelar linealmente un fenómeno, significa ejercer una práctica de modelación creando distintos modelos lineales, como herramientas que servirán para predecir el comportamiento de éste. Algunos modelos lineales son los de carácter gráfico, numérico y algebraico.

Lo lineal corresponde a una red de prácticas y herramientas que se ejercen y construyen durante la práctica de modelación, esta red se muestra en la figura 6.

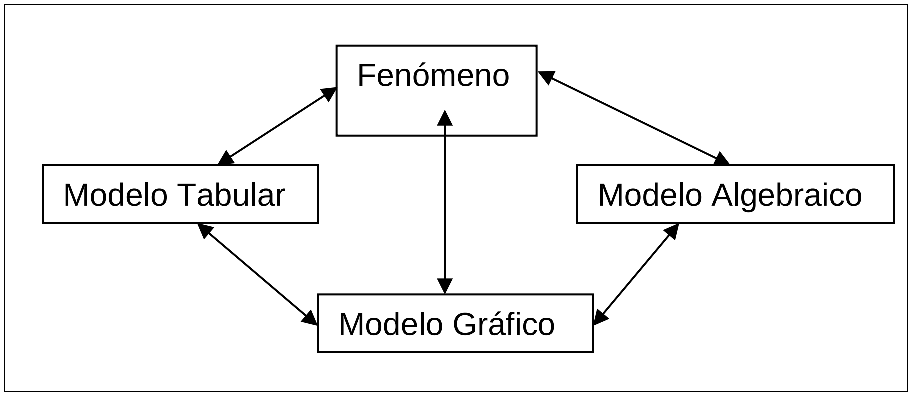


Figura 6. Lo lineal

2.4. SOBRE ALGORITMO

Con base en la lectura de algunas investigaciones que tienen relación con el concepto de algoritmo, se puede deducir que en la mayoría de éstas se mencionan o desarrolla el concepto, pero no se realiza una definición o caracterización de ésta, ya que existe una percepción intuitiva hacia los algoritmos.

Según señala Jiménez (2005, p. 38)

> La noción de algoritmo se ha manejado a lo largo de la historia de manera totalmente informal e intuitiva. La idea de algoritmo como secuencia de instrucciones elementales ha parecido siempre tan obvia que nadie se había planteado, hasta a finales del siglo XIX, dar una definición formal del mismo. Es muy claro cuándo un problema se

resuelve algorítmicamente: basta con encontrar un procedimiento mecánico que puede ser considerado como tal.

Desde la especialización que posea cada sujeto, será el constructo que tendrá de la definición del concepto de algoritmo, si nos encontramos desde la vereda de la informática, la entenderemos como que todo algoritmo corresponde a los pasos que se deben desarrollar y contemplar para realizar un programa escrito en un lenguaje de programación, y en sí todo programa es un algoritmo.

Asimismo, una definición más general de este concepto, lo señala la real academia española, en la cual entiende a un algoritmo como un conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema.

Desde la mirada del algoritmo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, su uso es variado y está presente en varios artículos como por ejemplo: En el caso de los autores Godino, Font, Wihelmi (2006) realizan mención del concepto de algoritmo de sumar y restar como procedimientos de la configuración empírica, dentro de su línea de investigación.

Por otro lado Hitt (2003) señala que en su acercamiento de enseñanza propone problemas que requieran una actividad bien delimitada, como la utilización de un algoritmo o proceso por etapas como cálculo de mínimos, máximos y puntos de inflexión de alguna función derivable.

Del mismo modo en Gallardo (2004), en su trabajo de investigación sobre el caso del algoritmo estándar para la multiplicación de los números naturales, define a un algoritmo como una sucesión finita de reglas elementales, regidas por una prescripción precisa y uniforme, que permite efectuar paso a paso, en un encadenamiento estricto y riguroso, ciertas operaciones de tipo ejecutable, con vistas a la resolución de los problemas pertenecientes a una misma clase" (Ifrah, citado en Gallardo 2004, p. 72), y también como una prescripción, un orden o sistema secuenciado de órdenes que encadena una serie de operaciones elementales que llevan desde los datos iniciales al resultado" (Gairín & Sancho, citado en Gallardo 2004, p. 72).

Las definiciones y uso del concepto de algoritmo, se presenta de forma heterogénea en el área de educación matemática o matemática educativa, pero en ésta investigación entendemos a un algoritmo como una estructura de acciones que se configuran para realizar una tarea.

Cabe hacer presente que no es lo mismo seguir algoritmos que construirlos (esto último persigue cada diseño). Para construir algoritmos se tiene que entender cómo se realizan las tareas a profundidad, desagregarlas en acciones y volver a integrarlas, estructurándolas.

2.5 SOBRE ALGORITMOS DE PREDICCIÓN

Hoy día la modelación ha cobrado relevancia en la matemática educativa, enseñanza de la matemática o didáctica de la matemática. Las trayectorias de algoritmos de predicción en esta investigación son una herramienta que nos permitirá distinguir entre diferentes aproximaciones a la modelación en el sistema escolar a partir de las actividades propuestas a desarrollar en el aula.

Según ya se precisó en esta investigación un algoritmo corresponde a una estructura de acciones que se configuran para realizar una tarea, así mismo, se entenderá a la predicción, como una práctica utilizada con el fin de anticipar los eventos con cierta racionalidad.

Sin dudarlo, es importante diferenciar entre los conceptos de adivinación y predicción. La adivinación es un pronóstico generado por señales o sucesos sin un fundamento científicamente aceptado, mientras que la predicción es una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce (Cantoral, Molina, & Sánchez, 2005).

Con base en lo anterior, podemos declarar que un algoritmo de predicción corresponde a una estructura de acciones o rutas que siguen los actores en la puesta en escena de un diseño basado en la modelación, con el fin de anticipar los eventos con cierta racionalidad.

III. METODOLOGÍA

Esta investigación está caracterizada desde la perspectiva cualitativa, la cual según Merriam S. (1998) señala que la clave de ésta, consiste en entender el fenómeno de interés desde las perspectivas de los participantes y no del investigador y que el investigador es el instrumento primario para la colección de datos y análisis.

La metodología utilizada en este trabajo de investigación corresponderá a una investigación de diseño y experimentos de enseñanza, en la cual su objetivo es:

> Analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémico de formas particulares del aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, de la enseñanza y de la evaluación. Todo ello la convierte en un paradigma metodológico potente en la investigación del aprendizaje y la enseñanza (Molina, Castro & Molina, 2011, p. 76).

Se vuelve relevante el uso de esta metodología, ya que, como lo señala su autora, la intención de esta investigación no consiste en primera instancia el conocer si el diseño es efectivo para algún aprendizaje, si no que se persigue explicar por qué el diseño instruccional propuesto funciona para luego sugerir formas con las cuáles puede ser adaptado a nuevas circunstancias, siendo ésta la principal relevancia que obtendrán los posibles resultados de ésta investigación.

Así también como se muestra a continuación, “los experimentos de diseños son complejos, multivariables, multiniveles, intervencionistas, iterativos, orientados por la teoría y hacia la práctica, generadores de modelos teóricos", según señalan Cobb, Shavelson, Phillips, Towne y Feuer (mencionados en Molina et al., p. 76).

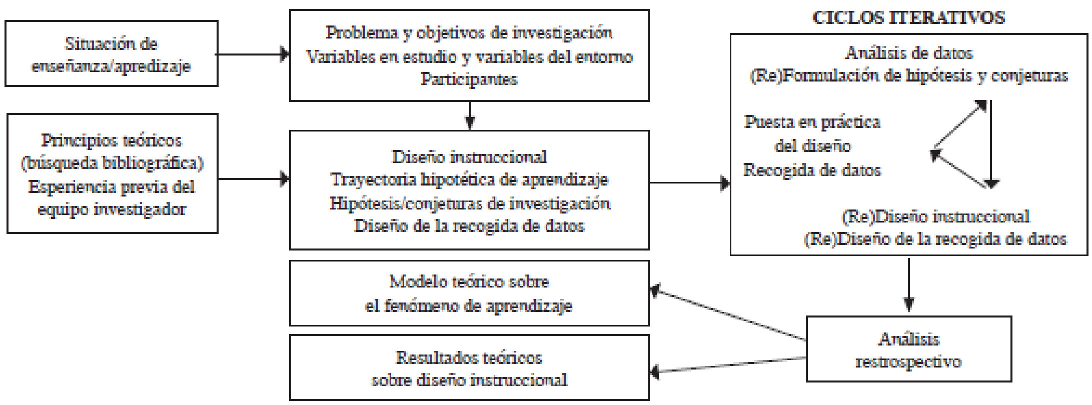


Figura 7. Estructura general de una investigación de diseño (Molina et al., p. 76).

Así también, se señala que la multiplicidad de contextos en los que este tipo de estudio puede tener lugar junto con el tipo de personas involucradas, presenta la existencia de diversos tipos de investigación de diseño, utilizando en ésta investigación la correspondiente a experimentos de enseñanza.

Un experimento de enseñanza, consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en que los participantes de ésta, en la cual comúnmente están presentes un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores según señalan Steffe y Thompson (2000, mencionado en Molina et al.)

Resulta importante destacar de esta metodología, lo que señala Kelly (2003, mencionado en Molina, 2007) que el típico rol del investigador se ve modificado, ya que, deja de ser un observador externo de la situación, sino que en ésta ocasión éste intenta comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje, cuando participa activamente como un educador, abordando simultánea e iterativamente los procesos científicos de descubrimiento, exploración.

En ésta investigación lo antes mencionado es muy relevante, ya que el docente del aula del curso en el cual se realizará la intervención cumple también con el rol de investigador, el cual está motivado por la intención de conocer qué es lo que está sucediendo en su aula y con sus estudiantes al momento de adquirir conocimiento.

Es importante también señalar que en la ejecución de un experimento de enseñanza, Cobb y Gravemeijer (2008) distinguen tres fases: preparación del experimento, experimentación para promover el aprendizaje y la ejecución del análisis retrospectivo de los datos.

Del mismo modo, Castro y Molina, (2007); Molina y Ambrose (2008); Molina, Castro, y Castro (2009), indican las diferentes acciones que identificaron en cada una de las fases, una vez aplicada esta metodología, lo antes mencionado se presenta en la siguiente tabla, mostrando las acciones con respecto a las 3 fases utilizadas en ésta investigación.

Fases	**Acciones**
Preparación del experimento	Definir el problema y los objetos de investigación Diseñar la recogida de datos Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.

Experimentación	Ultimar el diseño de la intervención, a partir de la información empírica y teórica disponible. Elaborar hipótesis/ conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención. Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención Analizar los datos recogidos en la intervención. Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación.
Análisis retrospectivos de los datos	Recopilar y organizar toda la información recogida. Analizar el conjunto de los datos, lo que implica: a) Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad. b) Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno, por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del investigador-docente que contribuyeron a dichos cambios.

Tabla 2. Acciones de las fases de la metodología de investigación de diseños y experimentos de enseñanza.

El rol de investigador - educador y cada una de las fases antes mencionadas presentes en ésta investigación, según como se detallan en la metodología de investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza se pormenorizan en el capítulo posterior.

IV MODELANDO EL LLENADO DE UN RECIPIENTE CILÍNDRICO

En este capítulo presentamos el análisis predictivo del diseño de aprendizaje “El Llenado de un recipiente cilíndrico”, y sus condiciones experimentales, este diseño corresponde a una secuencia de modelación de lo lineal, secuencia validada internamente por su autora (Méndez, 2008) a través de la ingeniería didáctica, cumpliendo con las cuatro fases correspondientes a dicha metodología: análisis a priori, puesta en práctica, análisis a posteriori y validación interna. A la secuencia de modelación a utilizar se modificó según lo presentado por la autora.

4.1 OBJETIVO DEL DISEÑO

Modelar el llenado de un recipiente cilíndrico con modelos lineales, desarrollando diversos procedimientos, construyendo herramientas matemáticas para realizar estos procedimientos y argumentando sus acciones.

4.2 LAS FASES DEL DISEÑO

El diseño se estructura en cuatro fases, la experimentación, el acto de modelar, la construcción de modelos y la articulación en una red de los modelos y el fenómeno llamada lo lineal.

4.2.1 Fase 1: La experimentación

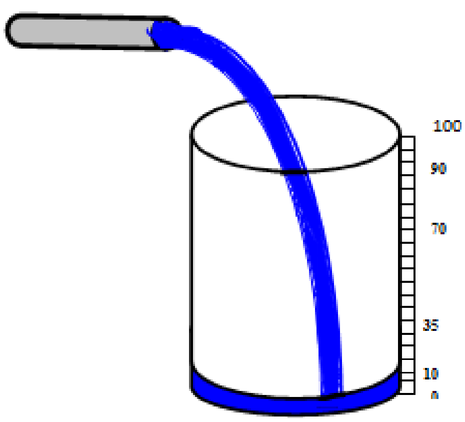
La experimentación puede plantearse en forma presencial con el fenómeno, de forma virtual, recurriendo a simulaciones del fenómeno con aplicaciones informáticas, o bien, a través de una experimentación discursiva, que corresponde al caso cuando se recurre a la narración desde la tabla inicial de los datos. Siendo ésta última experimentación la utilizada en esta investigación, donde los estudiantes se encontrarán con una tabla de datos y el planteamiento de una situación, como se muestra a continuación:

I. PLANTEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

Vamos a investigar cómo se comporta el llenado de un estanque.

Tenemos un estanque cilíndrico que se va llenando con un chorro de agua constante. Al inicio el estanque tiene un nivel de agua de 25 cm.

Entonces vamos llenado el estanque y tomamos el nivel del agua cada 20 segundos, según la regla graduada que se encuentra en él, con estos datos hacemos una tabla.



Tiempo de llenado (segundos) t	Nivel del agua (centímetros) h
0	
20	
40	
60	
80	
100	
120	

Figura 8. Diseño llenado de un recipiente cilíndrico

A ésta fase del diseño pertenecen las tres primeras situaciones:

Situación 1: "Explica con tus propias palabras el experimento".

Situación 2: Si han transcurrido 60 segundos, ¿Cuántos centímetros se ha llenado el estanque?

Situación 3: Si el nivel del agua es de 85 centímetros ¿Cuánto tiempo ha transcurrido?

En las situaciones 2 y 3, los estudiantes leen la tabla de datos para dar respuesta a lo solicitado.

4.2.2 Fase 2: La predicción

En esta fase, los estudiantes tendrán que utilizar la tabla de datos para determinar lo que sucederá con el llenado del recipiente cilíndrico. El diseño de aprendizaje en esta fase plantea las siguientes situaciones:

Situación 4: Si han transcurrido 50 segundos, ¿Cuántos centímetros marca el nivel de agua? Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

Situación 5: Si han transcurrido 85 segundos, ¿Cuántos centímetros marca el nivel de agua? Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

Situación 6: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel del agua, si han transcurrido 38,3 segundos? Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

Situación 7. ¿Cuántos centímetros marcará, si han transcurrido 62,6 segundos? Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

4.2.3 Fase 3: La construcción de diferentes modelos

En esta fase, los estudiantes construyen el modelo algebraico y modelo gráfico asociado al fenómeno. Las situaciones planteadas lo llevarán a optimizar sus métodos de predicción, encontrando así el modelo algebraico para este fenómeno, a través de la situación en la cual se solicita que entregue la expresión algebraica asociada al fenómeno. Las preguntas posteriores a encontrar la fórmula algebraica permitirán al estudiante, hacer uso del modelo algebraico encontrado, para así introducirlo en la construcción del modelo gráfico asociado al fenómeno.

A ésta fase, pertenecen las siguientes situaciones:

Situación 8: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel del agua, si han transcurrido *t* segundos? ¿Por qué?

Situación 9: ¿Cuántos centímetros marcará el nivel del agua, si han transcurrido 18,45 segundos? ¿Por qué?

Situación 10: ¿Cuál es la expresión algebraica que puede asociarse al llenado del estanque?. Identifiquen en ella sus valores fijos o parámetros y describan los que representan.

Situación 11: ¿En qué tiempo el nivel del estanque corresponde a 35 centímetros? Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

Situación 12. ¿En qué tiempo al estanque le faltan 90 centímetros para que se llene? Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

Situación 13.¿Cuál es la gráfica que modela el llenado del estanque? ¿Qué características tiene?

4.2.4 Fase 4: La articulación en una red del fenómeno con los modelos

En esta fase del diseño los estudiantes articulan los modelos entre sí, y estos con el fenómeno, configurando una red que llamamos red de lo lineal. A esta fase pertenecen, las siguientes situaciones:

Situación 16: Si cae más agua de la llave ¿cómo es la gráfica, la tabla, la razón de cambio, la fórmula? Explica

Situación 17: ¿Cómo le hacemos para que la gráfica este más arriba, más alta? Explica

4.3 LOS ACTORES DE LA PUESTA EN ESCENA

El colegio donde se trabaja dicha investigación, corresponde a un colegio particular de la región metropolitana de Chile, cuya comuna es Vitacura. Este colegio aborda la educación de estudiantes de situación económica media alta de nuestro país, desde los 3 años hasta los 18 años de edad, cubriendo tanto la educación básica y media que son obligatorias y educación prebásica (Medio Mayor, Prekinder y Kinder) que son optativas.

Los actores participantes en el estudio, corresponden a 20 estudiantes, que cursan segundo año medio, fluctuando entre los 15 y 16 años de edad.

4.4 LA DINÁMICA DE LA PUESTA EN ESCENA

La intervención de la autora de este trabajo en el aula tendrá lugar en un total de cuatro sesiones realizadas durante distintos días, durante el horario escolar y durante las horas de aula de matemática, las primeras cuatro sesiones el primer semestre académico 2013. La distribución de los estudiantes en el aula tanto en la primera será en grupos de tres personas y en algunos casos en parejas, distribuidos por la sala de clases, según se muestra en la figura 9.

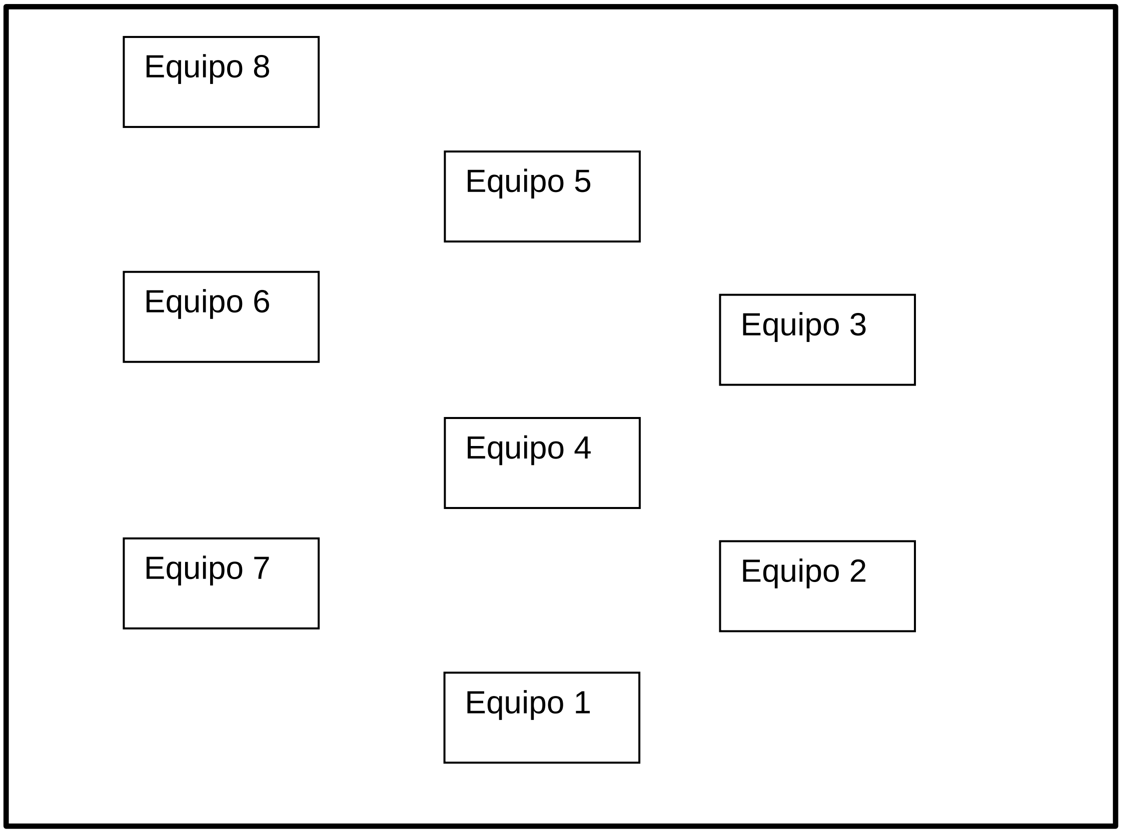


Figura 9. Distribución de los equipos en el aula

4.5 RECOGIDA DE DATOS

Con respecto a la recogida de datos, ésta se realizará en dos ocasiones, con 8 grupos de estudiantes distintos, en un total de un año, utilizando cuatro sesiones de 45 minutos para cada uno, lo que corresponde a 4 horas de aula en nuestra distribución horaria de clases en nuestro país. Los diseños serán aplicados por la investigadora que simultáneamente es la profesora titular de la asignatura de matemática en el establecimiento al que los estudiantes asisten a clases.

Las producciones de los estudiantes que se recogieron son de tres tipos, documentos físicos, grabaciones de audio y de video.

V ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

El análisis a posteriori y la validación se realizan considerando el análisis predictivo en confrontación con las producciones de los actores. El análisis se delimita a la fase dos del diseño, la predicción, sin embargo, se analiza la fase de experimentación de manera diferente. Se realiza por cada situación y se concentra en una matriz para esclarecer el abanico de trayectorias que proponen los actores de la puesta en escena.

5.1 LA EXPERIMENTACIÓN DISCURSIVA

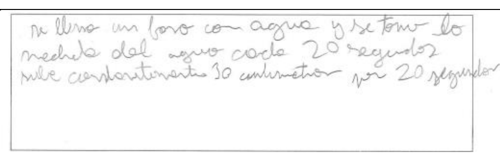
A continuación se presenta el análisis con respecto a la situación 1

"Explica con tus propias palabras el experimento"

Análisis predictivo: Los estudiantes utilizarán lenguaje natural para explicar el experimento y reconocerán las variables presentes en el fenómeno.

Producciones de los actores por equipo:

Equipo 1:

	Se llena un vaso con agua y se toma la medida del agua cada 20 segundos, sube constantemente 30 centímetros por 20 segundos.

Análisis: Los estudiantes utilizan lenguaje natural para describir el experimento, identifican las variables (tiempo y distancia), Enuncian y numerizan la razón de cambio, esto se refleja al reconocer que "sube constantemente 30 centímetros por 20 segundos".

Equipo 2:

se llena un estanque que tiene un nivel del agua de 25 cm, que se va llenando con un chorro de agua constante y se mide cada 20 cm	Se llena un estanque que tiene un nivel del agua de 25 cm, que se va llenando con un chorro de agua constante y se mide cada 20cm.

Análisis: Los recursos para describir el experimento son los del lenguaje natural. Enuncian la posición inicial, no está la razón de cambio. Identifican solo una variable (distancia). La variable tiempo no aparece explícitamente en la producción como resultado de la constantificación del incremento tiempo. La altura "se mide cada 20 cm".

Equipo 3:

Un estanque en el cual van midiendo la cantidad de agua que se llena y en cuanto tiempo.	Un estanque en el cual van midiendo la cantidad de agua que se llena y en cuanto tiempo

Análisis: Utilizan lenguaje natural para describir el experimento, identifican las variables de cantidad de agua (volumen) y de tiempo, aunque éstas no son numerizadas pero si relacionadas (evidencian una noción precursora a la razón matemática, cuando relacionan "cantidad" agua con "cantidad" de tiempo), no hay posición inicial.

Equipo 4:

100 centimetros Sabemos que 0 seg. hay 25 cm. y si aumentan 20 seg. aumentan 30 cm y 10 seg son 15 cm. Sabemos que 40 seg son 85 cm + 10 seg, osea 15 cm son 100 cm	100 centímetros. Sabemos que 0 segundos hay 25 cm. y si aumentan 20 segundos, aumentan 30 cm y 10 segundos son 15 cm. Sabemos que 40 segundos son 85 cm + 10 segundos, o sea 15 cm son 100 cm.

Análisis: Utilizan lenguaje natural, identifican y cuantifican las variables tanto tiempo como distancia, identifican posición inicial "Sabemos que 0 segundos hay 25 cm", con respecto a la razón de cambio ésta se encuentra explícita y cuantificada "Si aumentan 20 segundos, aumentan 30 cm".

Equipo 5:

se va llenando un estanque cilindrico- que cada 20 segundo el nivel del agua sube en 30 centimetros	Se va llenando un estanque cilíndrico que cada 20 segundos el nivel del agua sube en 30 centímetros.

Análisis: Utilizan lenguaje natural, identifican y cuantifican las variables tiempo y distancia, del mismo modo, explicitan y numerizan razón de cambio "Cada 20 segundos el nivel del agua sube 30 centímetros"

Equipo 6:

ESTE EXPERIMENTO NOS TRATA DE EXPLICAR COMO SE llENA UN ESTANQUE EN UN DETERMINADO TIEMPO.	Este experimento nos trata de explicar cómo se llena un estanque en un determinado tiempo.

Análisis: Utilizan el lenguaje natural para describir el experimento y comprenden su objetivo, reconocen la variable tiempo, pero no se reconoce explícitamente relación de las variables tiempo y distancia y por lo mismo no se reconoce la razón de cambio.

Equipo 7:

Al estanque se le va agregando agua cons-tantemente y cada 20 seg aumenta 30 centíme-tros.	Al estanque se le va agregando agua constantemente y cada 20 segundos aumenta 30 centímetros

Análisis: Utilizan lenguaje natural para describir el experimento, identifican las variables tiempo y distancia, explicitan y numerizan la razón de cambio "Cada 20 segundos aumenta 30 centímetros".

Equipo 8:

Es el seguimiento del llevado de agua de un embase cilíndrico, el Chorro de agua es constante	Es el seguimiento del llenado de agua de un envase cilíndrico, el chorro de agua es constante.

Análisis: Utilizan lenguaje natural para describir el experimento, no reconocen las variables, posición inicial y razón de cambio.

Equipo	**Utilizan Lenguaje Natural**	**Identifican variables**	**Explicitan razón de cambio**	**Numerizan razón de cambio**
1	X	X	X	X
2	X	X (Variable distancia)		
3	X	X		
4	X	X	X	X
5	X	X	X	X
6	X	X (Variable tiempo)		
7	X	x	X	X
8	X			

Tabla 3. Resumen de los equipos en situación 1

Análisis de las producciones de los equipos en la situación 1:

Todos los equipos utilizan lenguaje natural para explicar el experimento, sólo un equipo no identifica las variables que están presentes en el fenómeno, 4 de los 8 equipos explicitan y numerizan a través del lenguaje natural la razón de cambio relacionada con en el fenómeno.

5.2 LECTURA DE LA TABLA

A continuación se presenta el análisis con respecto a las situaciones 2 y 3,

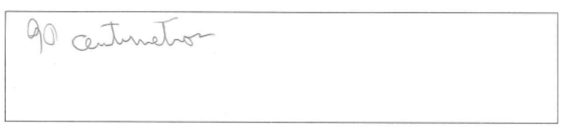
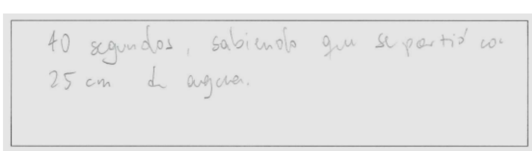
Situación 2: Si han transcurrido 60 segundos, ¿Cuántos centímetros se ha llenado el estanque?

Situación 3: Si el nivel del agua es de 85 centímetros ¿Cuánto tiempo ha transcurrido?

Análisis predictivo: Los estudiantes leerán la tabla relacionada con el fenómeno para responder a las situaciones planteadas.

Producciones de los actores por equipo:

Equipo 1:

Situación 2:  90 centimetros	90 centímetros
Situación 3:  40 segundos, sabiendo que se partió con 25 cm de agua.	40 segundos, sabiendo que se partió con 25 cm de agua

Análisis: Este equipo en la segunda situación no lee la tabla, pero utiliza su producción en la situación uno, "sube constantemente 30 centímetros por 20 segundos”. No consideran la posición inicial.

En el caso de la tercera situación, leen la tabla. Consideran el nivel inicial del agua, consideración que no se presenta en la situación dos.

Equipo 2:

Situación 2: se ha llenado 115 cm, en 60 segundos.	Se ha llenado 115 cm, en 60 segundos
Situación 3: · Han transcurrido 40 segundos.	Han transcurrido 40 segundos

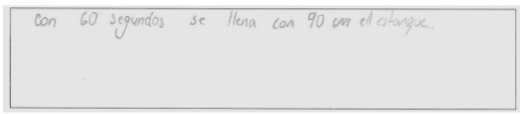
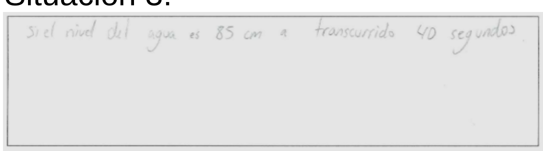
Análisis: Con base a las respuestas que han entregado los estudiantes, podemos inferir que recurren a la lectura de la tabla para responder. Con esto garantizamos que hay una correspondencia entre los datos numéricos y el fenómeno planteado.

Equipo 3:

Situación 2: 115 , es cosa de ver la tabla arriba.	115, es cosa de ver la tabla arriba
Situación 3: 60 segundos , 1 minuto	60 segundos, 1 minuto

Análisis: Los estudiantes en la situación dos explicitan que leen la tabla para responder. En la situación tres, no leen la tabla adecuadamente. No tenemos evidencias del porqué de la respuesta. Posiblemente leen la celda equivocada.

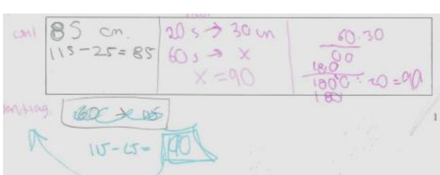
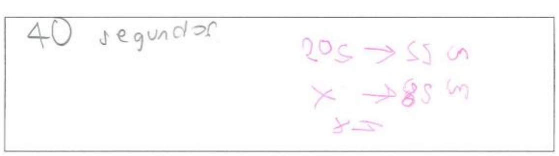
Equipo 4:

<table>
<tr><td>Situación 2:

</td><td>Con 60 segundos se llena con 90 cm el estanque</td></tr>
<tr><td>Situación 3:

</td><td>Si el nivel del agua es 85 cm han transcurrido 40 segundos</td></tr>
</table>

Análisis: Este equipo en la situación 2 no lee la tabla, pero comprende e interpreta la situación presentada. No consideran la posición inicial.

En el caso de la situación 3, leen la tabla y consideran la posición inicial.

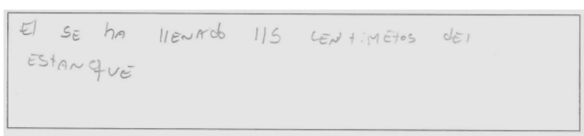
Equipo 5:

<table>
<tr><td>Situación 2:

</td><td><table><tr><td>Est. 1
85 cm
115-
25=85</td><td>Est. 2
20 s→
30 cm
60 s→ x
x= 90</td><td>Est. 3
115-
25=90</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Situación 3:

</td><td>40 segundos
20 s→ 55 cm
X → 85 cm
x=</td></tr>
</table>

Análisis: En la situación 2, el equipo no logra un consenso y presentan cada estudiante su método. Mientras que los estudiantes uno y tres recurren a la lectura de la tabla para posteriormente restar el nivel inicial. Mientras que el estudiante dos, utiliza la regla de tres. Los resultados deberían serlos mismos sin embargo el estudiante uno se equivoca en la resta. De todos modos, ninguno de los tres estudiantes considera la posición inicial.

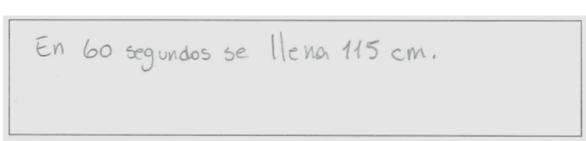
En el caso de la situación 3, los estudiantes en base a la economía de la práctica, eligen la regla de tres para el cálculo, dejando de lado el método de los otros dos estudiantes.

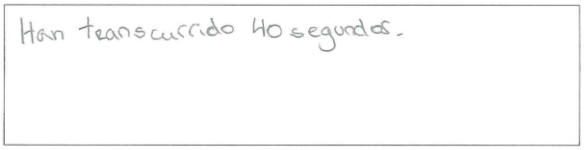
Equipo 6:

Situación 2:  El se ha llenado 115 centímetos del estanque	El se ha llenado 115 centímetros del estanque
Situación 3:  han transcurrido 40 segundos	Han transcurrido 40 segundos

Análisis: Con base a la respuesta que han entregado los estudiantes en la situación 2 y 3, podemos deducir que existe la lectura de la tabla y consideran la posición inicial.

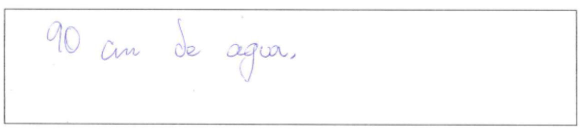
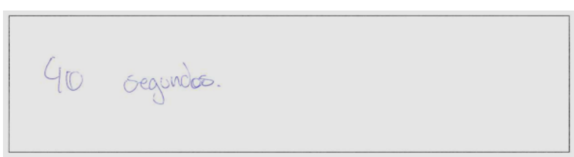
Equipo 7:

Situación 2:  En 60 segundos se llena 115 cm.	En 60 segundos se llena 115cm.

Situación 3:  Han transcurrido 40 segundos.	Han transcurrido 40 segundos

Análisis: Con base a las respuestas que han entregado los estudiantes, podemos deducir que existe la lectura de la tabla, entregando dos valores relacionados, valores que corresponden al fenómeno presentado.

Equipo 8:

Situación 2:  90 cm de agua.	90 cm. de agua
Situación 3:  40 segundos.	40 segundos

Análisis: Este equipo no lee la tabla, pero comprende e interpreta la situación presentada. No considera la posición inicial. Pero en el caso de la situación 3, podemos deducir que leen la tabla y consideran la posición inicial.

Equipo	Situación	Leen la tabla	Utilizan razón de cambio	Consideran posición inicial	Utilizan regla de tres	Comprenden e interpretan el fenómeno
1	2		x			
	3	x		x		
2	2	x				
	3	x				
3	2	x				
	3	x				
4	2					x
	3	x		x		
5	2	x			x	
	3				x	
6	2	x		x		
	3	x		x		
7	2	x				
	3	x				
8	2					x
	3	x		x		

Tabla 4. Resumen de los equipos en situación 2 y 3

Análisis de las producciones de los equipos en la situación 2 y 3:

La gran mayoría de los estudiantes leen la tabla, solo dos equipos en una de las situaciones no lo hacen: Los estudiantes que no hacen lectura de la tabla y responden que los 60 segundos corresponden a los 90 cm, no consideran la posición inicial del fenómeno; siendo esos 25 cm los que les faltan para los 115 cm. que se ha llenado a los 60 segundos. Sin embargo, con respecto a la lectura de la tabla, los estudiantes tienen dificultades con respecto al nivel del agua, pero no con relación al tiempo de llenado.

5.3 PRIMERA SITUACIÓN DE PREDICCIÓN

A continuación se presenta el análisis con respecto a la situación 4, cuya objetivo tiene relación con la predicción sobre el fenómeno. Se quiere inducir a los estudiantes a que busquen o creen sus propios algoritmos de predicción, para encontrar los valores intermedios presentes en ésta situación.

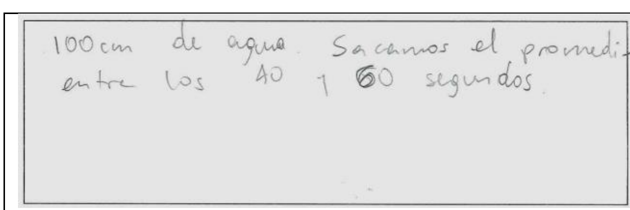
Situación 4:

4. Si han transcurrido 50 segundos, ¿Cuántos centímetros marca el nivel del agua? Explique muy bien cómo lo hicieron para encontrar el resultado.

Análisis predictivo: Se puede predecir que los estudiantes utilizarán el algoritmo de puntos medios, el cual corresponde a que tomarán los valores correspondientes al tiempo de llenado que son 20 segundos y al nivel del agua correspondiente a 30 cm., entonces, si en 20 segundos aumentan 30 cm, entonces en 10 segundos aumentan 15 cm, siendo éste el punto medio de los datos anteriores, y luego deberán sumar el valor obtenido al valor que ya les entrega la tabla que corresponde a 85 cm. Por lo que en los 50 segundos el recipiente debiese marcar 100 cm.

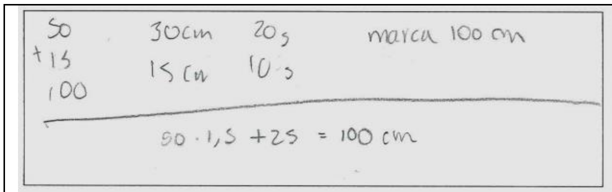
Producciones de los actores por equipo:

Equipo 1:

 100 cm de agua. Sacamos el promedi entre los 40 y 60 segundos.	100 cm. de agua, sacamos el promedio entre los 40 y 60 segundos

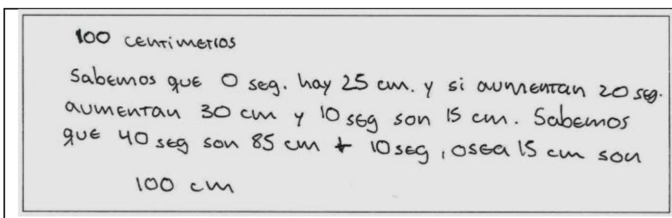
Análisis: Leen la tabla y la relacionan con la posición inicial, utilizan el procedimiento de promediar los valores correspondientes a los 40 y 60 segundos, entendiendo que los centímetros correspondientes a los 50 segundos, se encuentran entre esos valores.

Equipo 2:

	50 30 cm 20 s marca 100 m. +100 15 15 cm 10 s ________________________ 50·1,5+25=100 cm

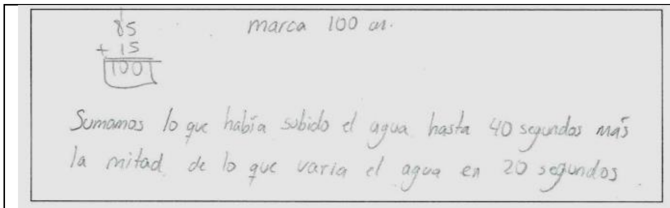
Análisis: Leen la tabla y utilizan el procedimiento de puntos medios, ya que asumen que tiene que haber aumentado la mitad de lo anterior, y cómo el último valor obtenido era igual a 85, suman los 15 cm, correspondientes a la mitad de los 30 cm de la tabla, obteniendo como resultado 100 cm.

Equipo 3:

	100 centímetros Sabemos que 0 seg. hay 25 cm y si aumentan 20 seg aumentan 30 cm y 10seg son 15 cm. Sabemos que 40 seg son 85 cm + 10 seg, o sea 15 cm son 100 cm.

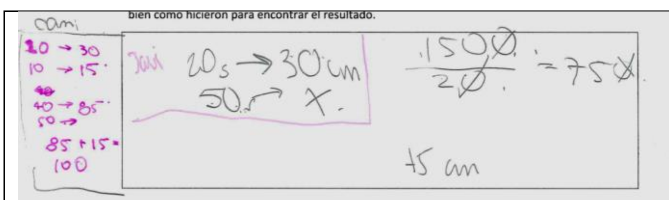
Análisis: Leen la tabla, consideran la posición inicial correspondiente a que en 0 segundos hay 25 cm. Luego utilizan el procedimiento de puntos medios, ya que si en 20 segundos aumentan 30 cm, entonces en 10 segundos aumentan 15 cm. En la tabla leen el valor correspondiente a los 40 segundos, siendo éste el valor anterior más cercano al que se pide y a eso le suman los 15 cm obtenidos anteriormente.

Equipo 4:

	85 Marca 100 cm. +15 ____ 100 Sumamos lo que había subido el agua hasta 40 segundos más las mitad de lo que varía el agua en 20 segundos.

Análisis: Leen la tabla, utilizan el procedimiento de puntos medios y ese valor lo suman la mitad de lo que varía en 20 segundos el agua, correspondiente a la mitad de los 30 cm, hasta el último valor más cercano entregado que correspondiente a los 85 cm.

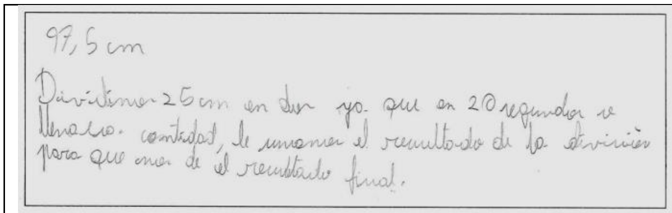
Equipo 5:

	20 → 30 10 →15 40→ 85 50→ 85+15= 100	20 → 30 50 → x $\frac{150\cancel{0}}{2\cancel{0}}=750$ 75 cm.

Análisis: Al igual que en la situación anterior, éste equipo considera dos procedimientos distintos siendo el primera de ellos la de puntos medios, ya que en 20 segundos aumenta 30 cm, entonces en 10 segundos aumenta 15 cm, correspondiendo éstos valores a la mitad de las los primeros.

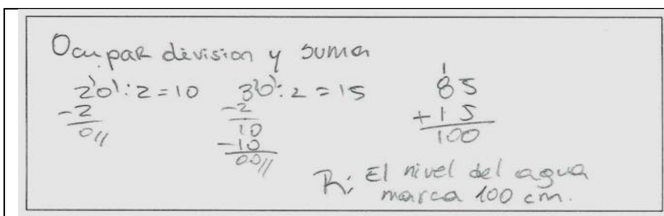
El segundo algoritmo de predicción utilizado es regla de 3, teniendo un primer acercamiento a la razón de cambio, pero no considera la posición inicial.

Equipo 6:

	97,5 cm. Dividimos 25 cm en dos ya que en 20 segundos se llenara cantidad, le sumamos el resultado de la división para que nos dé el resultado final.

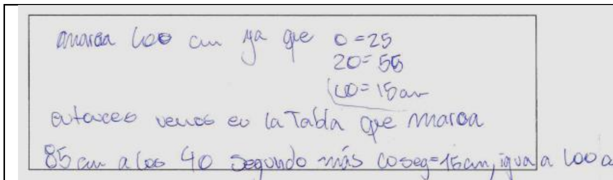
Análisis: Utilizan el procedimiento de puntos medios, ya que dividen en 2 al valor que corresponde a los 20 segundos, pero se puede deducir que hubo un error en el momento de la lectura de ésta ya que los 25 cm que consideran corresponden al valor inicial y no a los 20 segundos no permitiéndoles encontrar el valor esperado.

Equipo 7:

	Ocupar división y suma 20:2=10 30:2=15 85 -2 -2 +15 0 10 100 -10 00 R: El nivel del agua marca 100 cm.

Análisis: Leen la tabla, utilizan puntos medios, ya que calculan la mitad correspondientes a los 20 segundos y a los 30 cm, obteniendo de esa forma los 10 segundos faltantes, para así encontrar la respuesta a lo solicitado. Consideran el último valor más cercano entregado y suman los 15 cm obtenidos con los puntos medios.

Equipo 8:

	Marca 100 cm ya que 0 = 25 20=55 10 =15 cm Entonces vemos en la tabla que marca los 85 cm a los 40 segundos más 10 seg = 15 cm, igual a 100 cm.

Análisis: Utilizan el procedimiento de puntos medios, ya que dividen en 2 al valor que corresponde a los 20 segundos obteniendo los 15 cm, luego leen la tabla y buscar el valor correspondiente a los 40 segundos correspondientes a los 85cm sumando el valor obtenido anteriormente.

Equipo	Leen la tabla	Consideran posición inicial	Utilizan puntos medios	Utilizan regla de tres	Utilizan Promediación
1	X	X			X
2	X		X		
3	X		X		
4	X		X		
5	X	No	X	X	
6	X		X		
7	X		X		
8	x		X		

Tabla 5. Resumen de los equipos en situación 4

Análisis de las producciones de los equipos en la situación 4:

Todos los equipos leen la tabla, 7 de los equipos utilizan el algoritmo que se revela en la predicción de la situación, siendo éste el algoritmo de "puntos medios”, sólo uno de los equipos utiliza un algoritmo distinto al anterior que es el del “promedio”, permitiéndoles de igual modo encontrar el valor esperado en la situación plateada.

Al realizar un análisis más exhaustivo con respecto a la primera situación de predicción, podemos decir que:

Intención: Predecir cuántos centímetros marcará el nivel del agua a los 50 segundos.

Los procedimientos presentes son promediación, regla de tres y subdivisión de intervalos en dos.

Las herramientas asociadas a esos procedimientos son: promedio, regla de tres, tablas de datos.

Los argumentos son referidos al fenómeno, como por ejemplo señalan:

Equipo 1: “100 cm. de agua, sacamos el promedio entre los 40 y 60 segundos.”

Equipo 3:” Sabemos que 0 seg. hay 25 cm y si aumentan 20 seg. aumentan 30 cm y 10seg son 15 cm. Sabemos que 40 seg. son 85 cm + 10 seg, o sea 15 cm son 100 cm”

Equipo 4: “Sumamos lo que había subido el agua hasta 40 segundos más las mitad de lo que varía el agua en 20 segundos”.

Equipo 6: “Dividimos 25 cm en dos ya que en 20 segundos se llenara cantidad, le sumamos el resultado de la división para que nos dé el resultado final”.

Equipo 8: “Entonces vemos en la tabla que marca los 85 cm a los 40 segundos más 10 seg = 15 cm, igual a 100 cm”.

5.4 SEGUNDA SITUACIÓN DE PREDICCIÓN

A continuación se presenta el análisis con respecto a la situación 5, cuya objetivo tiene relación con la predicción sobre el fenómeno. Se quiere inducir a los estudiantes a que busquen u optimicen su algoritmo de predicción ya presentado en la situación anterior.

5. Si han transcurrido 85 segundos, ¿Cuántos centímetros marcan el nivel del agua? Explique muy bien cómo lo hicieron para obtener el resultado.

Análisis predictivo: Los estudiantes utilizarán el algoritmo de predicción de puntos cuartos, el cual consiste en calcular el punto medio del punto medio ya obtenido en la situación anterior.

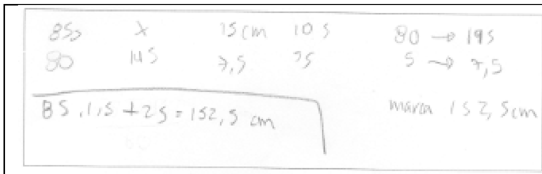
Producciones de los actores por equipo:

Equipo 1

152,5 cm del nivel. Lo hicimos sacando un promedio entre 175cm y 145 cm y nos dio 160 cm a los 90 seg. Luego promediamos los 80 y 90 seg, es decir, 145cm y 160cm	152,5 cm del nivel. Lo hicimos sacando un promedio entre 175 cm y 145 cm y nos dio 160 cm a los 90 seg. Luego promediamos los 80 y 90 seg, es decir, 145 cm y 160 cm.

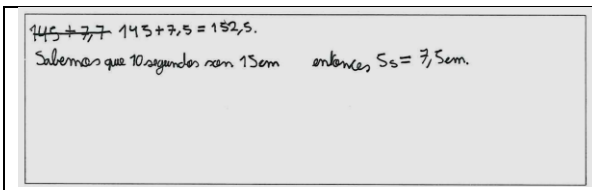
Análisis: Utilizan un procedimiento del promedio del promedio, primero calculan el promedio entre 175 y 145 cm, obteniendo como resultado 160 cm a los 90 segundos y luego promedian los valores correspondientes a los 80 y 90 segundos, obteniendo de ese modo el valor esperado.

Equipo 2

	85s x 15cm 10 s 80 195 80 145 7,5 5s 5 7,5 $85 \cdot 1{,}5 + 25 = 152{,}5$ cm — Marca 152,5

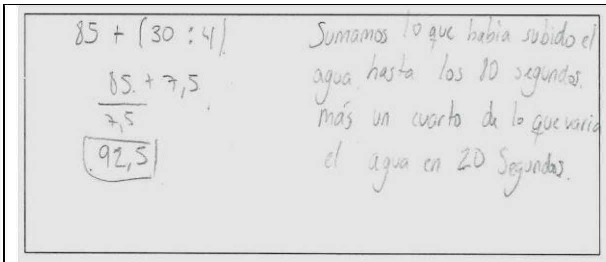
Análisis: Utilizan el procedimiento de puntos medios de puntos medios, la cual se nombró puntos cuartos. Como en esta ocasión necesitan el valor correspondiente a 5 segundos que es la información faltante para ser complementado con el valor de la tabla correspondiente a los 80 segundos, obtienen los 5 segundos faltantes calculando el punto medio de 15 cm y 10 seg, y de ese modo suman ese valor a los 195 cm de la tabla.

Equipo 3

	145+7,5=152,5 Sabemos que 10 segundos son 15 cm entonces 5s=7,5 cm

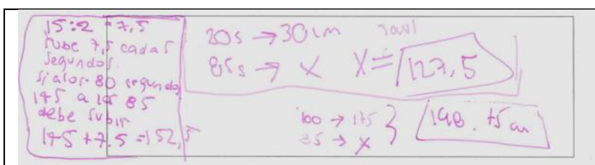
Análisis: Utilizan el procedimiento puntos cuartos, con la información ya obtenida en la situación anterior la vuelven a dividir por 2 y así encuentran el valor correspondiente a los 5 segundos, para luego sumarlo los centímetros correspondiente a los 80 segundos.

Equipo 4

	85+(30:4) 85 + 7,5 7,5 92,5 Sumamos lo que había subido el agua hasta las 80 segundos más un cuarto de lo que varía el agua en 20 segundos.

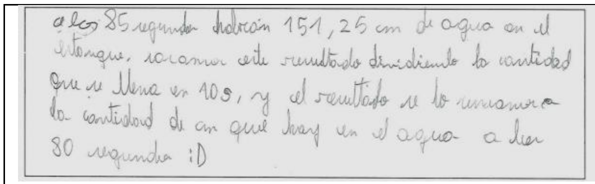
Análisis: Utilizan el procedimiento de puntos cuartos y a que calculan un cuarto de lo que varía el agua a los 20 segundos, entendiendo que ahí encontraran los 5 segundos faltantes.

Equipo 5

	15:2=7,5 Sube 7,5 cada 5 segundos Si a los 80 segundos 145 a los 85 debe subir 145+7,5=152,5	20 s → 30 cm 85 s → x x= 127,5 100 → 175 85 → x 148+5 cm

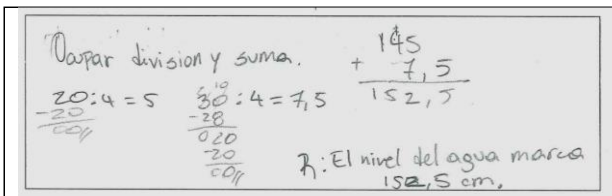
Análisis: Este equipo continúa sin lograr un consenso con respecto al procedimiento que utilizarán, en el caso que anteriormente había usado puntos medios, continúa con su procedimiento y utiliza puntos cuartos. En el segundo caso continúa desarrollando regla de tres y sin considerar la posición inicial.

Equipo 6

	A los 85 habrán 151,25 cm de agua en el estanque, sacamos este resultado dividiendo la cantidad que se llena en 10 s, y el resultado se lo sumamos a la cantidad de cm que hay en el agua a los 80 segundos :D

Análisis: Utilizan el procedimiento puntos cuartos, con la información ya obtenida en la situación anterior la vuelven a dividir por 2 y así encuentran el valor correspondiente a los 5 segundos, para luego sumarlo los centímetros correspondientes a los 80 segundos.

Equipo 7

	Ocupar división y suma 20:4=5 30:4=7,5 145 -20 -28 + 7,5 00 020 152,5 -20 00 R: El nivel del agua marca 152,5 cm.

Análisis: Utilizan el procedimiento puntos cuartos, con la información ya obtenida en la situación anterior la vuelven a dividir por 2 y así encuentran el valor correspondiente a los 5 segundos, para luego sumarlo los centímetros correspondientes a los 80 segundos.

Equipo 8

80 en la Tabla es 145cm y lo seg divididos en 2 son 7,5 cm más 145cm es es 152,5cm, de agua transcurrido 85 segundos	80 en la tabla es 145 cm y los segundos dividido en 2 “4” son 7,5 cm más 145 cm es 152,5 cm, de agua transcurrido 85 segundos

Análisis: Utilizan el procedimiento puntos cuartos, con la información ya obtenida en la situación anterior la vuelven a dividir por 2 y así encuentran el valor correspondiente a los 5 segundos, para luego sumarlo los centímetros correspondientes a los 80 segundos.

Equipo	Leen la tabla	Consideran posición inicial	Utilizan puntos cuartos	Utilizan regla de tres	Utilizan Promediación	Utilizan Razón de Cambio
1	X	X			X	
2	X		X			X
3	X		X			
4	X		X			
5	X	No	X	X		
6	X		X			
7	X		X			
8	x		X			

Tabla 6. Resumen de los equipos en situación 5

Análisis de las producciones de los equipos en la situación 5:

Todos los equipos leen y utilizan la tabla relacionada con el fenómeno. Con relación al algoritmo de predicción, 7 de los 8 equipos utilizan el algoritmo de puntos cuartos, aunque se pueden ver dos desarrollos distintos de este algoritmo, siendo una de ellas el cálculo del punto medio del punto medio de la situación anterior, como lo hacen los equipos 2, 3, 5, 6, y 8. En el caso de los equipos 4 y 7, utilizan el algoritmo de puntos cuartos pero lo obtienen entre el cociente del valor original de la tabla y 4, entendiendo que los 5 segundos corresponden a una cuarta parte de los 20 segundos ahí presentes. Sólo uno de los equipos utiliza el algoritmo de predicción de "promedio del promedio", donde recurre a una segunda aplicación del algoritmo que utilizó en la situación anterior.

Al realizar un análisis más exhaustivo con respecto a la segunda situación de predicción, podemos decir que:

Intención: Predecir los centímetros que marca el nivel del agua a los 85 segundos.

Los procedimientos presentes son: Promediación, regla de tres y subdivisión de intervalos en cuatro.

Las herramientas asociadas a esos procedimientos son: promedio, regla de tres, tablas de datos, razón de cambio.

Los argumentos son contextuales, como por ejemplo señalan:

Equipo 1: "Lo hicimos sacando un promedio entre 175 cm y 145 cm y nos dio 160 cm a los 90 seg. Luego promediamos los 80 y 90 seg, es decir, 145 cm y 160 cm."

Equipo3: "Sabemos que 10 segundos son 15 cm, entonces 5s=7,5 cm"

Equipo 4: "Sumamos lo que había subido el agua hasta los 80segundos más un cuarto de lo que vería el agua en 20 segundos"

Equipo 5: “Sube 7,5 cada 5 segundos. Si a los 80 segundos 145 a los 85 debe subir 145+7,5=152,5”

Equipo 6: “A los 85 habrán 151,25 cm de agua en el estanque, sacamos este resultado dividiendo la cantidad que se llena en 10 s, y el resultado se lo sumamos a la cantidad de cm que hay en el agua a los 80 segundos”

Equipo 7: Ocupar división y suma.

Equipo 8: “80 en la tabla es 145 cm y los segundos dividido en 2”4” son 7,5 cm más 145 cm es 152,5 cm, de agua transcurrido 85 segundo”

5.5 TERCERA SITUACIÓN DE PREDICCIÓN

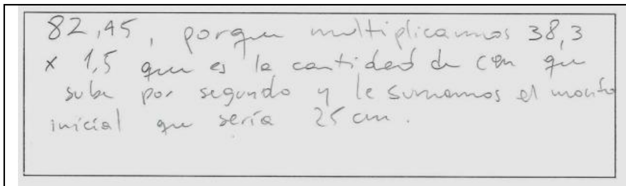
A continuación se presenta el análisis con respecto a la situación 6, cuya objetivo tiene relación con la predicción sobre el fenómeno. Se quiere inducir a los estudiantes a que busquen o creen sus propios algoritmos de predicción, para encontrar los valores intermedios presentes en ésta situación.

6. ¿Cuántos centímetros marcará el nivel del agua, si han transcurrido 38,3 segundos? Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

Análisis predictivo: Los estudiantes utilizarán el algoritmo de puntos décimos, el cual consiste en calcular los centímetros correspondientes a 1 segundo del llenado del recipiente cilíndrico. Éste cálculo lo realizarán, utilizando la información ya obtenida en las situaciones anteriores, si en 10 segundos aumentó 15 cm, entonces al dividir los 15 cm por 10, se obtendrá que sube 1,5 cm por 1 segundo.

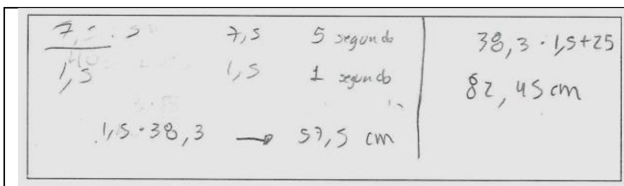
Producciones de los actores por equipo:

Equipo 1

	82,45, porque multiplicamos 38,3 x 1,5 que es la cantidad de cm que sube por segundo y le sumamos el monto inicial que sería 25 cm.

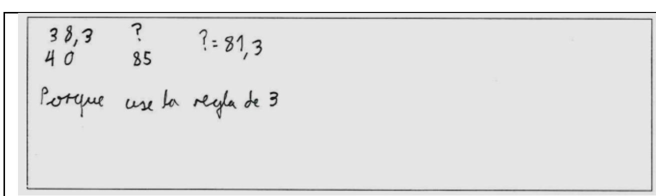
Análisis: Utilizan el procedimiento de puntos décimos para así obtener el valor correspondiente a 1 segundo, luego multiplican el valor solicitado por 1,5 para finalmente este valor sumarlo a la posición inicial.

Equipo 2

	7,5 5 segundos 1,5 1 segundo 1,5*38,3 → 57,5 cm	38,3*1,5+25 82,45 cm

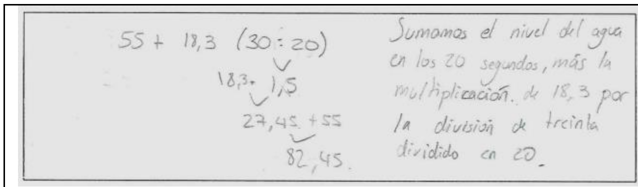
Análisis: Utilizan procedimiento de puntos quintos para así obtener el valor correspondiente a 1 segundo, luego multiplican el valor solicitado por 1,5 para finalmente este valor sumarlo a la posición inicial

Equipo 3

	38,3 ? ? = 81,3 40 85 Porque usé la regla de 3

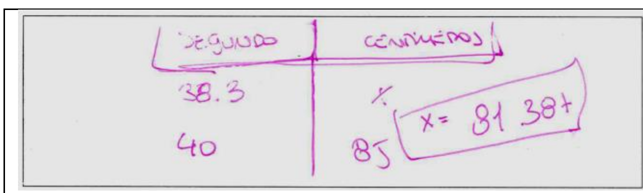
Análisis: Utilizan procedimiento regla de tres, pero no consideran la posición inicial del fenómeno

Equipo 4

	55+18,3 (30:20) 18,3*1,5 27,45+55 82,45 Sumamos el nivel del agua en los 20 segundos, más la multiplicación de 18,3 por la división de 30:20.

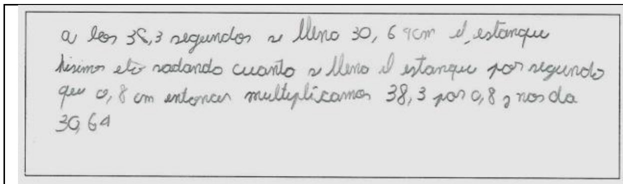
Análisis: Utilizan razón de cambio, ya que multiplican el valor solicitado por el cociente de 30: 20 que corresponde a la variación entre los centímetros y los segundos.

Equipo 5

	Segundos centímetros 38,3 x 40 85 X=81,38+

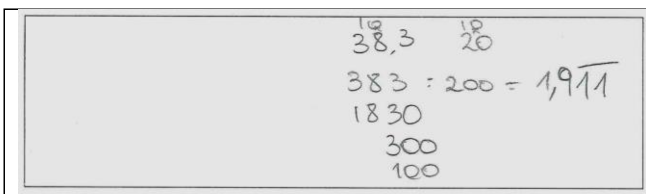
Análisis: Utilizan la regla de tres como algoritmo de predicción, sin embargo, los estudiantes no obtienen el valor solicitado, debido a que olvidan la posición inicial del fenómeno. A pesar de que en las situaciones anteriores eran dos procedimientos los que venían utilizando, éste equipo decide continuar con una de ellas, en este caso la regla de tres, a esto lo llamaremos economía de la práctica.

Equipo 6

	A los 38,3 segundos se llena 30,69 cm el estanque hisimos (hicimos) esto sacando cuanto se llena el estanque por segundo que 0,8 cm entonces multiplicamos 38,3 por 0,8 y nos da 30,64

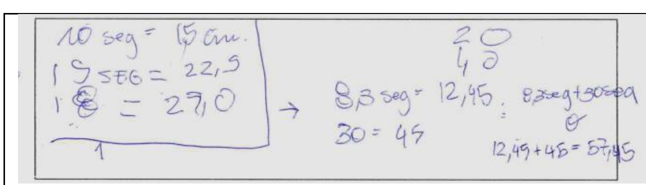
Análisis: Utilizan procedimiento de puntos décimos, pero al continuar con el desarrollo del ejercicio no obtienen el valor esperado, ya que al obtener el valor equivalente a 1 segundo que estaban buscando, obtienen el valor de 0,8 y no 1,5 cm como corresponde.

Equipo 7

	38,3 20 383:200=1,911 1830 300 100

Análisis: Este equipo toma el valor solicitado y el valor de los 20 segundos; y luego obtiene el cociente entre estos dos valores, no obteniendo el valor solicitado.

Equipo 8

	10 seg = 1,5 cm 20 15 seg =22,5 40 18 =27,0 8,3 seg = 12,45 30=45 8,3 seg+30seg o 12,45+45=57,45

Análisis: Utilizan procedimiento de puntos décimos, pero se puede deducir que confunden los 10 segundos con el segundo que corresponde al valor de dividir los cm en 8, no consideran posición inicial, descomponen el 30 y el 8,3 para calcular cada uno de los valores por separado.

Equipo	Utilizan puntos décimos	Utilizan regla de tres	Utilizan puntos quintos	Utilizan Razón de Cambio
1	x			
2			X	
3		X		
4				X
5		X		
6	X			
7	---	---	---	---
8	X			

Tabla 7. Resumen de los equipos en situación 6

Análisis de las producciones de los equipos en la situación 6:

Los algoritmos de predicción utilizados por los distintos equipos es diversa, como es el caso del equipo 1, donde los estudiantes venían utilizando la estrategia de promediación en esta situación el diseño los lleva a utilizar el algoritmo de predicción planteado por el diseño que es "puntos décimos". Este algoritmo de predicción es utilizado por los equipos 1, 6 y 8, aunque cabe mencionar que estos dos equipos no llegan al valor solicitado, ya que ambos equipos no consideran la posición inicial de fenómeno.

El algoritmo de predicción de "regla de tres" es utilizado por los equipos 3 y 5, ambos no obtienen el valor solicitado, ya que el fenómeno no es directamente proporcional como lo plantean los estudiantes al resolver la situación con este algoritmo de predicción.

Sólo uno de los equipos utiliza la razón de cambio como algoritmo de predicción, respondiendo de forma correcta a la situación planteada.

En el caso del equipo 2, utilizan una variante del algoritmo de puntos décimos, ya que obtienen los centímetros correspondientes a 1 segundo, pero no lo obtienen de la división del valor de los 15 cm por 10, si no el de los 7,5 segundos divididos en 5, para obtener los centímetros correspondientes a un segundo, este equipo responde de forma correcta a la situación.

Con respecto a un segundo análisis se ésta situación de predicción, tenemos que:

La intención es predecir cuánto marcará el nivel del agua si han transcurridos 38,3 segundos.

Los procedimientos utilizados son: Subdivisión de intervalos en 5 y 10 subintervalos, regla de tres, razón de cambio.

Las herramientas asociadas a los procedimientos son: regla de tres, razón de cambio, tablas de datos numéricos.

Los argumentos utilizados son:

Equipo 1: “82,45, porque multiplicamos 38,3 x 1,5 que es la cantidad de cm que sube por segundo y le sumamos el monto inicial que sería 25 cm”

Equipo 3:”Porque usé regla de tres”

Equipo 4: “Sumamos el nivel del agua en los 20 segundos, más la multiplicación de 18,3 por la división de 30:20”

Equipo 6: “A los 38,3 segundos se llena 30,69 cm el estanque hicimos esto sacando cuanto se llena el estanque por segundo que 0,8 cm entonces multiplicamos 38,3 por 0,8 y nos da 30,64.

5.6 CUARTA SITUACIÓN DE PREDICCIÓN

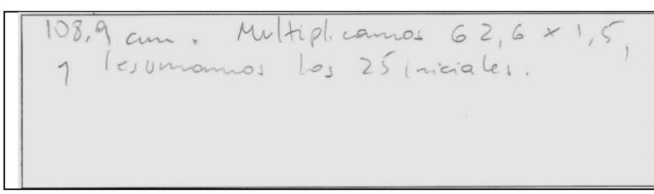
A continuación se presenta el análisis con respecto a la situación 7, cuya objetivo tiene relación con la predicción sobre el fenómeno. Se quiere inducir a los estudiantes a que busquen o creen sus propios algoritmos de predicción, para encontrar los valores intermedios presentes en ésta situación.

7. ¿Cuántos centímetros marcará, si han transcurrido 62,6 segundos?. Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

Análisis predictivo: Los estudiantes utilizarán la “razón de cambio” como algoritmo de predicción para dar solución a esta situación.

Producciones de los actores por equipo:

Equipo 1

 108,9 cm. Multiplicamos 62,6 x 1,5, y lesumamos los 25 iniciales.	108,9 cm. Multiplicamos 62,6 x 1,5, y le sumamos los 25 iniciales

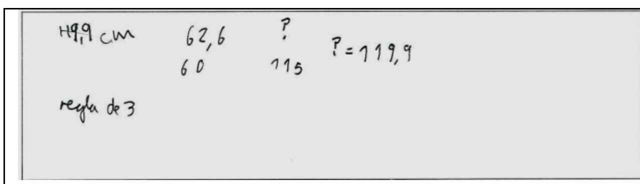
Análisis: Este equipo obtuvo los cm, que suben luego de transcurridos 1 segundo del llenado del recipiente cilíndrico, que corresponden a 1,5 siendo éste valor la razón de cambio relacionada con este fenómeno, por lo que multiplican el valor solicitado por la razón de cambio obtenida y le suman el valor inicial, no obteniendo los centímetros que marcará a los 62,6 segundos, debido a un error de cálculo solamente.

Equipo 2

	62,6 x 1,5 +25 118,9 cm

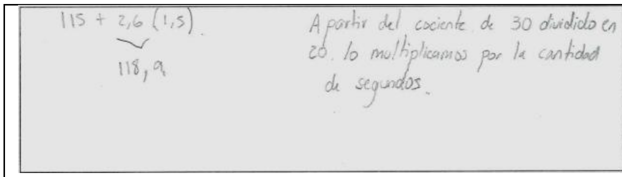
Análisis: Este equipo utiliza el algoritmo de predicción de razón de cambio, aplicando el valor ya obtenido en la situación anterior, correspondiente a los 1,5 cm que sube cada 1 segundo. Luego multiplican el valor solicitado por la razón de cambio y suman los 25 centímetros iniciales del fenómeno.

Equipo 3

	9,9 cm 62,6 ? 60 115 ?=119,9 Regla de 3

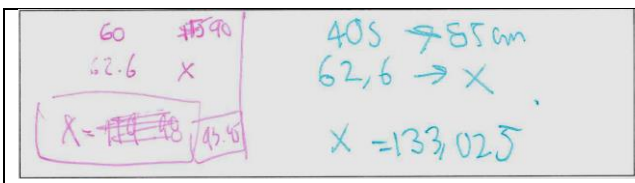
Análisis: Los estudiantes de este equipo consideran el valor entregado en la tabla correspondiente a los 60 segundos, y con esa información completan el algoritmo de predicción de regla de tres. El equipo no logra obtener el valor correspondiente a ésta situación planteada.

Equipo 4

	115+2,6 (1,5) 118,9 A partir del cociente de 30 dividido en 20 lo multiplicamos por la cantidad de segundos.

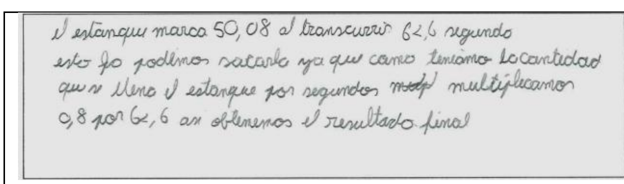
Análisis: Este equipo utiliza el algoritmo de predicción de razón de cambio, narrándola de forma explícita en el desarrollo de la situación. La razón de cambio obtenida es multiplicada por los 2,6 segundos que no se entregan en la tabla. Este valor obtenido lo suman con los 115 centímetros que ha aumentado al trascurrir los 60 segundos que se muestran en el modelo tabular.

Equipo 5

	60 90 | 40 s 85 cm 62,6 x | 62,6 x X=1~~79,98~~ 45 45 X=133,025

Análisis: Este equipo utiliza el algoritmo de regla tres, sin encontrar en valor correspondiente a ésta situación.

Equipo 6

	El estanque marca 50,08 al transcurrir 62,6 segundos esto lo podemos sacarla ya que como teníamos la cantidad que se llena el estanque por segundos multiplicamos 0,8 por 62,6 así obtenemos el resultado final.

Análisis: Utilizan el algoritmo de predicción razón de cambio, pero el valor correspondiente a los centímetros que aumenta por un segundo encontrado en la situación anterior 0,8 no es el valor correcto. De igual modo, realizan el producto entre la razón de cambio y el valor solicitado. Cabe destacar, que olvidan sumar la posición inicial del fenómeno.

Equipo 7

No responden	

Análisis: Los estudiantes no responden, se puede asumir que éste equipo abandonó el algoritmo de predicción utilizando en las situaciones anteriores, debido a que los valores que han obtenido no tienen relación con el fenómeno.

Equipo 8

1=1,5 cm x 2,6 seg o=3,9 a 115+3,9 =118,9 60seg=115.	1=1,5 cm x 2,6 seg o=3,9 a 115+3,9=118,9 60 seg=115

Análisis: Este equipo utiliza el algoritmo de predicción de razón de cambio. La razón de cambio obtenida es multiplicada por los 2,6 segundos que no se entregan en la tabla. Este valor obtenido lo suman con los 115 centímetros que ha aumentado al trascurrir los 60 segundos que se muestran en el modelo tabular.

Equipo	Utilizan regla de tres	Utilizan Razón de Cambio
1		X
2		X
3	X	
4		X
5	X	
6		X
7	---	---
8		X

Tabla 8. Resumen de los equipos en situación 7

Análisis de las producciones de los equipos en la situación 7:

Los algoritmos de predicción utilizados por los distintos equipos corresponden a regla de tres y razón de cambio. Sólo uno de ellos no da solución a la situación planteada. Los equipos 3 y 5 que utilizaron el algoritmo de regla de tres, no obtuvieron el valor correspondiente a los 62,6 segundos; sin embargo, los equipos 2, 4 y 8 que utilizaron el algoritmo de predicción implícito en el diseño que es razón de cambio logrando obtener el valor solicitado. Los equipos 1 y 6 tuvieron un valor cercano y el algoritmo de predicción utilizado también fue la razón de cambio, pero se puede asumir que tuvieron dificultades al realizar operatoria aritmética, lo que les impidió encontrar el valor correcto de la situación.

Un análisis con respecto a las intenciones, procedimientos, herramientas y argumentos de ésta situación son:

Intenciones: Predecir cuántos centímetros marcará, si han transcurrido 62,6 segundos.

Los procedimientos utilizados son razón de cambio y regla de tres.

Las herramientas utilizadas son razón de cambio y regla de tres.

Los argumentos utilizados por los distintos equipos son:

Equipo 1: “108,9 cm. Multiplicamos 62,6 x 1,5 y le sumamos los 25 iniciales”.

Equipo 4: “A partir del cociente de 30 dividido en 20 lo multiplicamos por la cantidad de segundos”

Equipo 6: “El estanque marca 50,08 al transcurrir 62,6 segundos esto lo podemos sacar ya que como tenemos la cantidad que se llena el estanque por segundos multiplicamos 0,8 por 62,6 así obtenemos el resultado final”

5.7 QUINTA SITUACIÓN DE PREDICCIÓN

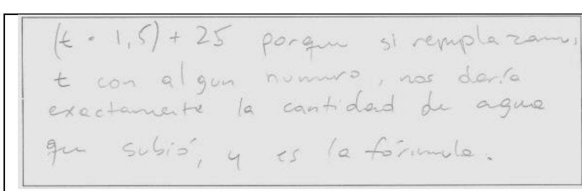
A continuación se presenta el análisis con respecto a la situación 8, cuyo objetivo tiene relación con la construcción del modelo algebraico. Se quiere inducir a los estudiantes a concretar el modelo algebraico.

8. ¿Cuántos centímetros marcará el nivel del agua, si han transcurrido t segundos? ¿Por qué?

Análisis predictivo: Los estudiantes construirán el modelo algebraico asociado al fenómeno.

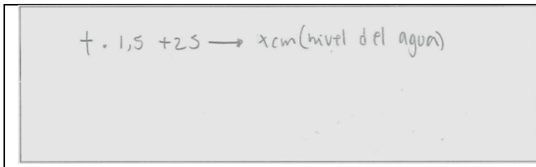
Producciones de los actores por equipo:

Equipo 1

 (t · 1,5) + 25 porque si remplazamos t con algun numero, nos daría exactamente la cantidad de agua que subió, y es la fórmula.	(t·1,5)+25 porque si reemplazamos t con algún número, nos daría exactamente la cantidad de agua que subió, y esa es la fórmula.

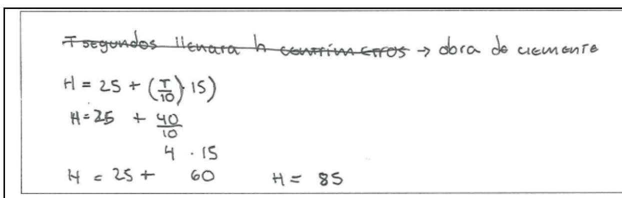
Análisis: Los estudiantes de este equipo construyen el modelo algebraico y declaran que si reemplazan *t* con algún número les daría exactamente el valor solicitado, aunque para ellas lo construido es una fórmula.

Equipo 2

 t · 1,5 +25 ⟶ x cm (nivel del agua)	*T*·1,5 +25 ➔ x cm (nivel del agua)

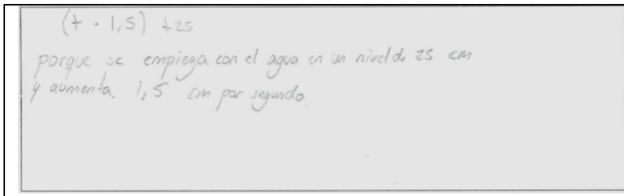
Análisis: Este equipo logra la construcción del modelo algebraico, entendiendo que el valor que ahí se obtengan corresponde a los cm alcanzados por el nivel del agua.

Equipo 3

 ~~T segundos llenara h centimetros~~ → dora de clemente H = 25 + (T/10) 15) H=25 + 40/10 4 · 15 H = 25 + 60 H = 85	*T* segundos llenará *h* centímetros dora de clemente $H = 25 + \left(\frac{T}{10}\right) \cdot 15$ $H = 25 + \frac{40}{10} \cdot 15$ $H = 25 + 60$ $H = 85$

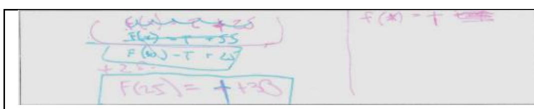
Análisis: Este equipo logra la construcción del modelo algebraico, teniendo presente en ella el valor inicial del fenómeno y la razón de cambio. También presenta un ejemplo de reemplazo en la variable para mostrar la utilidad de lo construido. Llama la atención la igualdad que presentan como respuesta a la situación, ya que sólo se le situación cuánto marcará el nivel de agua si han transcurrido t segundos.

Equipo 4

	(t · 1,5)+25 Porque se empieza con el agua en un nivel de 25 cm y aumenta 1,5 cm por segundo.

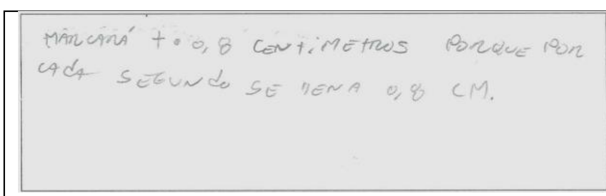
Análisis: Este equipo logra la construcción del modelo algebraico, tanto algebraica como verbalmente, ya que realizan una narración de lo representado con respecto a lo que pasará a los *t* segundos.

Equipo 5

Análisis: Este equipo no construye el modelo algebraico

Equipo 6

	Marcará t · 0,8 centímetros por cada segundo se llena 0,8 cm.

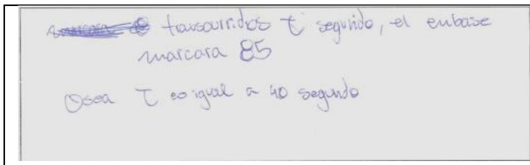
Análisis: Los estudiantes de este equipo construyen el modelo algebraico, pero son considerar la posición inicial y con un valor distinto de la razón de cambio, error que se arrastra desde situación anterior.

Equipo 7

No responden	

Análisis: Este equipo no responde, presentándose lo mismo en la situación anterior.

Equipo 8

 transcurridos t segundo, el embase marcara 85 Osea t es igual a 40 segundo	Transcurridos *t* segundo, el embase (envase) marcará 85. O sea t es igual a 40 segundo

Análisis: Este equipo no logra construcción del modelo algebraico, pero sin embargo, se puede deducir que entienden lo solicitado, ya que entregan la situación valorizada, pero no expresada en forma algebraica.

Equipo	Construcción modelo algebraico	Utiliza razón de cambio	Considera posición inicial	Valoriza modelo algebraico
1	X	X	X	
2	X	X	X	
3	X	X	X	X
4	X	X	X	
5				
6		X		
7				
8				X

Tabla 9. Resumen de los equipos en situación 8

Análisis de las producciones de los equipos en la situación 8:

Con respecto a la construcción del modelo algebraico, los equipos 1,2,3 y 4 logran la construcción de éste, sin embargo el equipo 6 logra un acercamiento al modelo algebraico.

Con respecto al análisis de intenciones, procedimientos, herramientas y argumentos de ésta quinta situación de predicción, tenemos que:

Las intenciones son las de predecir cuántos centímetros marcará el nivel del agua, transcurridos t segundos.

Los procedimientos utilizados son: razón de cambio y manipulación algebraica.

Las herramientas utilizadas son: Razón de cambio, ecuación lineal.

Los argumentos utilizados son:

Equipo 1: "(t·1,5)+25 porque si reemplazamos t con algún número, nos daría exactamente la cantidad de agua que subió, y esa es la fórmula"

Equipo 6: "Marcará t · 0,8 centímetros por cada segundo se llena 0,8 cm".

Equipo 8: "Transcurridos *t* segundo, el embase (envase) marcará 85.
O sea t es igual a 40 segundo"

5. 8 TRAYECTORIAS POR EQUIPO

A partir del análisis de las producciones de los estudiantes se mencionan las diferentes trayectorias de algoritmos de predicción que los estudiantes construyen. Estas trayectorias de algoritmos no necesariamente son iguales a la planteada por el diseño.

A continuación se presentan las trayectorias construidas por los equipos:

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
Promedio Promedio del Promedio Puntos Décimos Razón de Cambio Construcción del modelo algebraico Uso del modelo algebraico Construcción del modelo gráfico (sin considerar posición inicial)	Puntos Medios Puntos Cuartos Puntos Décimos Razón de Cambio Construcción del modelo algebraico Uso del modelo algebraico Construcción del modelo gráfico	Puntos Medios Puntos Cuartos Regla de tres Regla de tres Construcción del modelo algebraico Regla de tres _____	Puntos Medios Puntos Cuartos Razón de Cambio Razón de Cambio Construcción del modelo algebraico Uso del modelo algebraico Construcción del modelo gráfico

Tabla 10. Trayectorias de los equipos 1,2, 3 y 4

Equipo 5	Equipo 6	Equipo 7	Equipo 8
Puntos Medios /Regla de tres Puntos Cuartos /Regla de tres Regla de tres Regla de tres _____ Regla de tres Construcción del modelo gráfico	Puntos Medios Puntos Cuartos Puntos Décimos Razón de Cambio Acercamiento a la construcción del modelo algebraico Uso del modelo algebraico Construcción del modelo gráfico	Puntos Medios Puntos Cuartos ---- ---- ---- __ __ ___	Puntos Medios Puntos Cuartos Puntos Décimos Razón de Cambio No logran la construcción del modelo algebraico Razón de cambio Construcción del modelo gráfico

Tabla 11. Trayectorias de los equipos 5, 6, 7 y 8

Las trayectorias de algoritmos de predicción utilizados por los estudiantes para predecir el llenado del recipiente cilíndrico son variadas, con algunas diferenciaciones de la trayectoria de algoritmo implícita el en diseño, la cual corresponde a puntos medios, puntos cuartos, regla de tres, razón de cambio hasta llegar a la construcción del modelo algebraico.

La trayectoria de algoritmos de predicción del equipo 1 es una variación a lo mencionado anteriormente, ya que, los estudiantes utilizan promedio, promedio del promedio, puntos décimos, razón de cambio, construcción del modelo algebraico y uso del modelo algebraico.

Asimismo, la trayectoria del equipo 4 varía de la correspondiente al diseño, la cual se construye como puntos medios, puntos cuartos, razón de cambio, razón de cambio, cconstrucción del modelo algebraico.

VI CONCLUSIONES

6.1 SOBRE LAS TRAYECTORIAS DE ALGORITMO EN LA MODELACIÓN LINEAL

Éste diseño se implementó con estudiantes de segundo medio, los cuáles en su práctica diaria en el aula de matemáticas reciben clases expositivas por parte del profesor, pero en muy pocos casos los estudiantes se ven enfrentados a situaciones donde son los protagonistas de su aprendizaje y el profesor sólo un facilitador. Para dar inicio a la actividad de modelación el profesor- investigador señala el objetivo de la actividad, por lo que los estudiantes comienzan con el desarrollo de ésta y a medida que avanzan en la secuencia se van apropiando de ella, debido a que sienten que tienen las herramientas necesarias para resolver cada una de las situaciones que se les presentan.

En esta investigación se considera a la modelación como una práctica que vive en diversas comunidades. En este sentido, corresponde a una práctica convivencia que articula dos entidades con la intención de intervenir en una a partir de otra (lo modelado y el modelo) (Arrieta & Díaz, 2015).

Se implementó un diseño de aprendizaje relacionado con el modelado del llenado de un recipiente cilíndrico con modelos lineales. La experimentación fue de carácter discursivo. Nuestro interés se centró en el análisis de las trayectorias de algoritmos de predicción que configuran los estudiantes y que los conducen de un modelo numérico a un modelo algebraico.

En el diseño de aprendizaje que analizamos distinguimos una trayectoria de actividades que lo soporta, particularmente en la fase de predicción, que si bien no es explícita, nosotros la reconstruimos (figura 10).

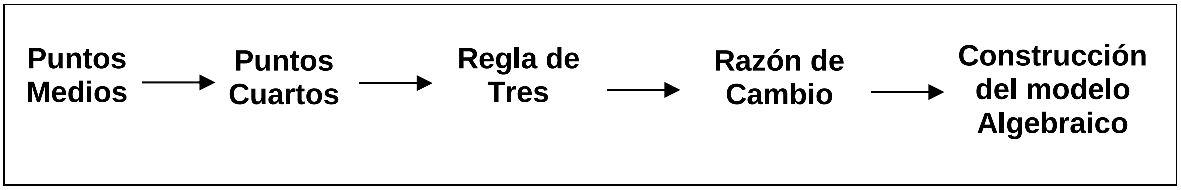


Figura 10. Trayectoria de algoritmo del diseño

Sin embargo, cuando se pone en escena el diseño esta trayectoria no es seguida por todos los actores. Existen diferentes rutas, que si bien llevan de un modelo numérico a un algebraico, esta no es única. Los estudiantes exponen sus procedimientos y en el debate surgen diversas formas de predicción, algunas logran el consenso de los actores, es decir, prevalecen sobre otras.

El análisis de los argumentos, procedimientos, herramientas e intenciones nos permite identificar tres trayectorias de algoritmos de predicción alternativas a la trayectoria que el diseño sustenta. En la trayectoria alternativa 1, a diferencia de la trayectoria del diseño, el uso del promedio como procedimiento es relevante, debido a que el algoritmo de promediación, no es parte de ésta, sin embargo en la práctica si es posible utilizarla con el fin de predecir sobre el fenómeno, siendo un algoritmo de predicción que emerge en la práctica de modelación lineal.

En la trayectoria 2 el procedimiento de subdividir en dos el intervalo, posteriormente en cuatro y en diez es el que guía la trayectoria, solo es hasta que se confronta con procedimientos de predicción utilizando la razón de cambio cuando abandonan la subdivisión.

En la trayectoria 3 la utilización de la razón de cambio para predecir fue uno de los primeros algoritmos de predicción que utilizan.

Promedio → Promedio del promedio → Puntos Décimos → Razón de Cambio → Construcción del modelo Algebraico

Figura 11. Trayectoria de algoritmo alternativa 1

Puntos Medios → Puntos Cuartos → Puntos Décimos → Razón de Cambio → Construcción del modelo Algebraico

Figura 12. Trayectoria de algoritmo alternativa 2

Puntos Medios → Puntos Cuartos → Razón de Cambio → Razón de Cambio → Construcción del modelo Algebraico

Figura 13. Trayectoria de algoritmo alternativa 3

Nosotros pusimos atención a la fase del diseño de predicción del fenómeno utilizando una tabla de datos. Al proceder los estudiantes tenían la intención de predecir situaciones del fenómeno. En la modelación la intención es intervenir en el fenómeno a modelar a partir de otra entidad, en este caso la intervención es la predicción y la otra entidad desde donde se interviene es la tabla de datos numéricos.

Los procedimientos presentes al modelar el llenado de un recipiente cilíndrico, son diversos, utilizan promediación, interpolación lineal, subdivisión de intervalos en dos, cuatro y diez subintervalos, procedimientos utilizando regla de tres o razón de cambio y manipulación algebraica. Las herramientas asociadas a esos procedimientos también son variadas, promedio, regla de tres, razón de cambio, ecuación lineal. Utilizan el leguaje natural, tablas de datos numéricos, ecuaciones lineales, gráficas cartesianas y figuras icónicas.

Los argumentos que vierten los estudiantes para justificar sus resultados y procedimientos están relacionados con los procedimientos y herramientas que utilizan. Los argumentos son referidos al fenómeno, es en este caso a la predicción del llenado del recipiente, es decir los argumentos son contextuales. Por ejemplo, el equipo 4 argumenta *“Porque se empieza con el agua en un nivel de 25 cm y aumenta 1,5 cm por segundo”* para justificar su modelo $(t \cdot 1,5) + 25$

En otro ejemplo, el equipo 1en la situación 5 tiene la intención de predecir el nivel del agua a los 85 segundos, y para para predecir utilizan un procedimiento de promediación, calculan el promedio del promedio, la herramienta es el promedio, y su argumento es: “Lo hicimos sacando un promedio entre 175 cm y 145 cm y nos dio 160 cm a los 90 seg. Luego promediamos los 80 y 90 seg., es decir, 145 cm y 160 cm”

6.2 PERSPECTIVAS

Desde la problemática que emerge de situaciones cómo las prácticas de modelación se incorporan al aula de matemáticas y cobran cotidianidad, se propone analizar actividades que se desarrollan cotidianamente en el aula de matemáticas y actividades que se proponen para incorporarse al discurso matemático escolar. Nos preguntamos sobre ¿cuáles son los procesos donde actividades que se incorporan al aula cobran cotidianidad?

Desde esta problemática se espera incorporar constructos que permitan analizar dichas actividades. Un constructo que ha de ser muy funcional es el de trayectorias de actividades. Dada una actividad se espera desmenuzar en sus actividades que la componen y plantear las posibles rutas de ellas por medio de trayectorias de algoritmos de predicción.

De estás trayectorias de actividades distinguimos las constituidas de las emergentes. Las constituidas son aquellas que han cobrado cotidianidad y que con pocas variantes se encuentran en diferentes sistemas educativos. Las emergentes son las que se proponen para incorporarse al discurso matemático escolar, y que pueden constituirse a lo largo del tiempo y de la iteración de la trayectoria.

VII BIBLIOGRAFIA

Agencia de la calidad de la Educación (2014). Informe Nacional Resultados Chile PISA, 2012, https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/documentos-web/Informes/Resultados+PISA+2012+Chile.pdf

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? *Revista Iberoamericana de Educación,* n. 43, p. 85-101, 2007. Recuperado el 10 de marzo de 2013 de http://www.rieoei.org/rie43a04.htm.

Alsina, À. (2009). *El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado*.

Aravena, M., & Caamaño, C. (2007). *Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca*, Chile. *Estudios pedagógicos 33*(2), 7-25.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Arrieta, J. & Diaz, L. (2015). *Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), 19-48. doi:10.12802/relime.13.1811

Bassanezi, C. (1990). *Modelagem como metodologia de ensino de matemática*. *In Actas de la Séptima Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática* (p. 130-155).

Biembengut, M. & Hein, N. (1997). *Modelo, modelación y modelaje: Métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas.* Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales", (38), 209-222.

Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. Educación matemática, *16*(2), 105-125.

Blomhøj, M. (2009). *Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics, 1.*

Brousseau, M., & Kubisch, R. G. (1977). *Continuous versus intermittent extraoral traction: An experimental study*. American journal of orthodontics,*71*(6), 607-621.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques (1970-1990).

Bruner, J. (1987). *La importancia de la educación*. http://beceneslp.edu.mx/PLANES2012/3er%20Sem/01%20Adecuaci%F3n%20curricular/Materiales/Unidad%20de%20Aprendizaje%20II/La%20importancia%20de%20la%20educacion%20Bruner.pdf

Cantoral, R., Molina, J. G., & Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción.

Cantoral, R. (2006). La Socioepistemología como una Escuela del Pensamiento en el campo de la matemática educativa.

Cantoral, R. *(2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa:* Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa

Cantoral, R., & Farfán, R. (2002). *Sur la sensibilité a la contradiction en mathématiques; l'origine de l'analyse complexe*. Recherches en Didactique des mathématiques, *22*(2).

Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (1995). *En la vida diez, en la escuela cero*. Siglo XXI.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). *Experimenting to support and understand learning processes*. Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching, 68-95.

Cordero, F., & Suárez, L. (2005). Modelación en matemática educativa.

De Almeida, L. y Ferruzzi, E. (2009). *Uma Aproximação Socioepistemológica para a Modelagem Matemática*. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2 (2), pp.117-134.

D'Ambrósio, U. (1986). *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. Editora da UNICAMP

Del Valle J., Muñoz G., Santis M., (2014) Matemática 1° medio. Texto del estudiante. Ediciones S&M http://leoitu.comunidadviable.cl/media/users/27/1382708/files/448448/matamtica_1ero.pdf

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Font V.. (2006). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*. RELIME. *9*(1), 131-156.

Hammer, D. (1994). *Epistemological beliefs in introductory physics*. Cognition and Instruction, *12*(2), 151-183.

Hitt, F. (2003). *Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos* *en Ambientes con Tecnología.* Edición Especial: Educación Matemática, 213.

Jiménez, A. J. P. *Algoritmos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.*

Jonassen, D. H. (1991). Objectivism versus constructivism: Do we need a new philosophical paradigm?. *Educational technology research and development*,*39*(3), 5-14.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge University Press.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education. Revised and Expanded from" Case Study Research in Education."*. Jossey-Bass Publishers, 350 Sansome St, San Francisco, CA 94104.

Ministerio de Educación Chile (2013) Bases Curriculares 2013. 7° a 2° Medio http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_17_09.pdf

Molina. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. Retrieved from http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/16546167.pdf

Molina, M., Castro, E., & Molina, J. L. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75–88.

Ministerio de Educación de Chile (2014) *Matemática primero medio SM*, Chile.

Méndez (2008). *Un estudio de la evolución de las prácticas: la experiencia de modelar linealmente situaciones análogas*. Tesis de Maestría en Ciencias no publicada. Guerrero, México: Universidad Autónoma de Guerrero.

OCDE, El programa PISA de la OCDE, qué es y para qué sirve, http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

Radford, L. (2006). Semiótica cultural y cognición. *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica. México*.

Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, *19*, 63-85.

Villa-Ochoa, J. A., Quintero, C. A. B., Arboleda, M. D. J. B., Castaño, J. A. O., & Bedoya, D. A. O. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*,*2*(2), 159-180.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*. Taylor & Frances/Routledge.

VIII ANEXOS

SECUENCIA DE EXPERIMENTACIÓN Y MODELACIÓN

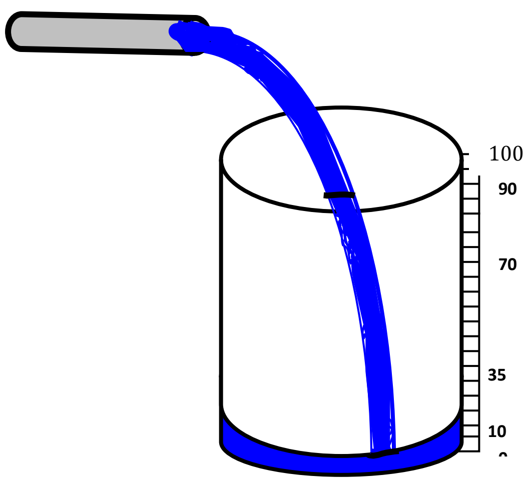
NOMBRE:_________________ Curso:________ Fecha: _______________

I. PLANTEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

Vamos a investigar cómo se comporta el llenado de un estanque.

Tenemos un estanque cilíndrico que se va llenando con un chorro de agua constante. Al inicio el estanque tiene un nivel de agua de 25 cm.

Entonces vamos llenado el estanque y tomamos el nivel del agua cada 20 segundos, según la regla graduada que se encuentra en él, con estos datos hacemos una tabla.



Tiempo de llenado (segundos) t	Nivel del agua (centímetros) h
0	
20	
40	
60	
80	
100	
120	

1. Describe el experimento con tus propias palabras.

2. Si han transcurrido 60 segundos, ¿Cuántos centímetros se ha llenado el estanque?

3.Si el nivel del agua es 85 centímetros, ¿Cuánto tiempo ha transcurrido?

4. Si han transcurrido 50 segundos, ¿Cuántos centímetros marca el nivel de agua?. Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

5. Si han transcurrido 85 segundos, ¿Cuántos centímetros marca el nivel de agua?. Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

6. ¿Cuántos centímetros marcará el nivel del agua, si han transcurrido 38,3 segundos? Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

7. ¿Cuántos centímetros marcará, si han transcurrido 62,6 segundos? Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

8. ¿Cuántos centímetros marcará el nivel del agua, si han transcurrido t segundos? ¿Por qué?

9. ¿Cuántos centímetros marcará el nivel del agua, si han transcurrido 18,45 segundos? ¿Por qué?

10. ¿Cuál es la expresión algebraica que puede asociarse al llenado del estanque?. Identifiquen en ella sus valores fijos o parámetros y describan los que representan.

11. ¿En qué tiempo el nivel del estanque corresponde a 35 centímetros? Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

12. ¿En qué tiempo al estanque le faltan 90 centímetros para que se llene? Explique muy bien cómo hicieron para encontrar el resultado.

13.¿Cuál es la gráfica que modela el llenado del estanque? ¿Qué características tiene?

16. Si cae más agua de la llave ¿cómo es la gráfica, la tabla, la razón de cambio, la fórmula?. Explica

17. ¿Cómo le hacemos para que la gráfica este más arriba, más alta?. Explica