UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSENO.

Tesis Magíster

Gonzalo Daniel Olguín Pino

Directora: Dra. Ismenia Guzmán Retamal.

Santiago, Chile 2016

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSENO.

Tesis de Magíster presentada por **Gonzalo Daniel Olguín Pino** dentro del Programa de Magíster en Educación Matemática para aspirar al grado de **Magíster en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos**, dirigida por la **Dra. Ismenia Guzmán Retamal,** académica de la Universidad de Los Lagos.

Gonzalo Daniel Olguín Pino

Dra. Ismenia Guzmán Retamal

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

A Paola Ojeda, mi esposa
Por su amor, comprensión y paciencia en este largo proceso.

A Josefa , mi hija
Que es mi motivo para superarme como persona.

A Susana Pino y Guillermo Ormazábal, mis padres
Por confiar infinitamente en mí.

A Soledad y Estefany, mis hermanas
Por su constante apoyo.

A la Dra. Ismenia Guzmán, mi tutora
Por su ayuda desde el inicio de esta etapa.

A la Dra. Verónica Díaz
Por su apoyo incondicional.

Al Dr. Wilson Gordillo, mi amigo
Por sus constantes consejos y sugerencias

Y a todos aquellos profesores que fueron participes en este largo proceso

A todos ustedes muchas gracias.

INTRODUCCIÓN

En base a las experiencias en aulas podemos afirmar que el estudio de la trigonometría es considerado difícil por los estudiantes, ya que utiliza algunos elementos nuevos para ellos como son las razones trigonométricas. Estas han sido la base del desarrollo histórico de esta rama de las matemáticas por ser la herramienta utilizada desde la antigüedad para medir de forma indirecta distancias y ángulos, elementos usados por ciencias como la astronomía, la física y la ingeniería para el diseño de modelos y teorías basados en la comparación de magnitudes mediante la proporcionalidad y la semejanza.

Conceptos como magnitud y cantidad forman parte de la construcción de la teoría de la proporcionalidad, para la comparación de segmentos. Dicha comparación al ser tomada sobre triángulos rectángulos y asociados a los criterios de semejanza deriva en las razones trigonométricas y sus aplicaciones. Dado que el paso de la razón trigonométrica a la función trigonométrica se omite en algunos libros textos de trigonometría escolar y que en ellos se utiliza indistintamente las palabras "función trigonométrica" y "razón trigonométrica" sin establecer sus diferencias, se crea en el estudiante una falta de claridad entre uno y otro concepto.

Por esta razón se hace necesario el diseño de una propuesta didáctica que permita facilitar el estudio de la enseñanza de la trigonometría. Esto se hará mediante una micro ingeniería didáctica basada en la construcción de la función trigonométrica seno y coseno.

RESUMEN

Este trabajo de tesis para optar al grado de magister tiene como objetivo favorecer el aprendizaje de las funciones trigonométricas, relacionando los diferentes elementos que participan en su construcción, principalmente el caso del seno y del coseno. Una revisión de lecturas dejó en evidencia carencias de significado del objeto matemático tanto en estudiante como en profesores. Esta investigación se propone implementar una micro ingeniería didáctica que ayude a favorecer la comprensión de los significados de las funciones trigonométricas como objeto matemático y sus propiedades; esta micro ingeniería se sustentara en el marco teórico de la TSD.

Al diseñar la propuesta se decidió considerar esta teoría, ya que focaliza la construcción del conocimiento para lograr dar sentido a lo que está aprendiendo, de tal manera que sus aprendizajes le permitan comprender los conceptos matemáticos tratados de modo que el aprendizaje sea durable.

La propuesta didáctica ha concebido dos situaciones: la primera tiene como objetivo construir la circunferencia trigonométrica a partir de la construcción de triángulos rectángulos simétricos haciendo variar el ángulo del centro de modo de encontrar los simétricos de un triángulo en el segundo cuadrante en el plano cartesiano y la segunda tarea tiene como objetivo construir la función trigonométrica a partir de los resultados obtenidos en la actividad n°1, aplicando simetría de triángulos y traslaciones según un vector dado, utilizando instrumentos de construcción y Geogebra. Sigue una institucionalización con ayuda del Geogebra donde se establece que la

curva construida tiene características como periodicidad, ondas y amplitud, conocidas por las estudiantes desde la física y la tercera tarea tiene como objetivo analizar los elementos de la función trigonométrica (amplitud, dominio, recorrido, periodicidades).

Se espera que los estudiantes con base en el sistema de coordenadas rectangulares puedan llegar de la generalización de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas útiles en las matemáticas para describir fenómenos físicos por medio de conceptos como simetría y traslaciones. Y por último, se espera que se establezcan varias diferencias entre razón trigonométrica y función trigonométrica.

El desarrollo de este estudio se hará en los siguientes capítulos:

Capítulo I: Historia y epistemología de la trigonometría.

Capítulo II: Problemática y pregunta de investigación.

Capítulo III: Marco teórico.

Capítulo IV: Metodología de la investigación.

Capítulo V: Análisis a posteriori de la secuencia.

Capítulo VI: Confrontación de los análisis a priori y a posteriori

Capítulo VII: Conclusiones

Capítulo VIII: Bibliografía

ABSTRACT

This work of thesis for master's degree aims to promote the learning of trigonometric functions, relating the different elements involved in its construction, mainly the case of sine and cosine. A review of readings made evidence lack of meaning of the mathematical object both student and teachers. This research intends to implement a micro didactic engineering that will help to promote understanding of the meanings of the trigonometric mathematical object and its properties; This micro engineering support in the theoretical framework of the TSD.

To the design it proposed is decided to consider this theory, since focuses the construction of the knowledge to achieve give sense to what is learning, of such way that their learning you allow understand them concepts mathematical treated so that the learning is durable.

Didactic proposal has designed two situations: the first aims to build the circumference trigonometric from the construction of triangles symmetrical making vary the angle from the center of mode find the symmetric of a triangle in the second Quadrant in the Cartesian plane, and the second task aims to build the trigonometric function from the results obtained in the activity n ° 1 , applying symmetry of triangles and translations according to a vector given, using instruments of construction and Geogebra. Follow an institutionalization with the help of the Geogebra which States that built curve has features such as periodicity, waves and amplitude, known by the students from physics and the third task aims to analyze the elements of the trigonometric function (amplitude, domain, travel, periodicities).

He is expected that students based on rectangular coordinate system can reach the generalization of trigonometric ratios useful trigonometric functions in mathematics to describe physical phenomena by means of concepts like symmetry, and translations. And finally, is expected that will establish several differences between reason trigonometric and function trigonometric. The development of this study will be done in the following chapters:

Chapter I: history and epistemology of trigonometry.

Chapter II: Problem and research question.

Chapter III: Marco theoretical.

Chapter IV: Research methodology.

Chapter V: analysis ex post of the sequence.

Chapter VI: Comparison of analysis a priori and a posteriori

Chapter VII: Conclusions

Chapter VIII: Bibliography

CAPÍTULO I

HISTORIA Y EPISTEMOLOGÍA DE LA TRIGONOMETRÍA

La trigonometría en sus inicios se desarrolla de forma práctica y posteriormente aparece el aspecto conceptual, es decir sus fundamentos teóricos. Los inicios prácticos se encuentran en diferentes actividades que no son consideradas actividad matemática propiamente. Las actividades que dan inicio a la trigonometría en concreto son la medición y la astronomía. Esta última se constituye en actividad científica cuando comienza la sistematización de experiencias, esencialmente en forma de reconocimiento de los periodos, es decir tiempo en el cual se repite el fenómeno. Este periodo se convirtió en el puente entre la actividad empírica y la teoría predictiva. En la repetición periódica, la regla abstracta evoluciona a partir de hechos concretos.

La astronomía surge al intentar explicar muchas de las dinámicas cíclicas del universo y cómo estas afectan el estilo de vida del hombre, por ejemplo la plaga de langostas aparecía después de largos periodos de sol y los eclipses, aunque fascinantes, causaban un comportamiento diferente en los animales, produciendo curiosidad en el hombre. Las observaciones entre el siglo 1200 A.C. y 400 A.C. mostraron que había dos clases de fenómenos, los que se repetían periódicamente como la salida y puesta del sol o las fases de la luna y los que duraban días o semanas. Se hizo necesario para el hombre tratar de entender estos patrones de la naturaleza y es ahí donde aparecen las matemáticas en conceptos como espacio y cantidad. El hombre empezó entonces a hacer conexiones e identificar las pautas de estas secuencias ordenando el mundo que los rodeaba, iniciando por el estudio de los astros.

La trigonometría aparece como una herramienta útil para la astronomía; su primer uso es la resolución de los triángulos ya que permite calcular distancias no medibles por métodos directos, cómo distancias entre puntos geográficos y entre astros.

Ahora bien, la fuente de información más importante sobre la actividad matemática antigua es el papiro del Rhind (1700 a.c. aproximadamente). En este papiro se encuentran algunas reglas para el cálculo de áreas de formas cuadradas, triangulares, circulares y algunos cimientos de trigonometría que se basan en los cálculos necesarios para la construcción de pirámides y monumentos.

El problema en la construcción de las pirámides consistía en mantener la pendiente constante (en el contexto de avance versus subida) en cada cara y la misma en las cuatro caras. Este pudo haber sido el problema que llevó a los egipcios a introducir un concepto equivalente a la cotangente de un ángulo, encontrado en el problema 56 del papiro.

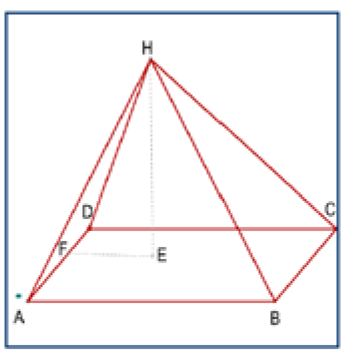


Figura 1

Para lograr sus construcciones calculaban la separación de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación de la altura. Dicho cálculo recibía el nombre de se-qet, y con ello se mantienen las proporciones de la pirámide y la inclinación de sus caras (Figura 1).

Siglos después y tomando el conocimiento de los egipcios, Thales de Mileto (624-547 d.c.) introduce la geometría a Grecia y desarrolla la teoría de la semejanza, Thales formula que “Los lados correspondientes a ángulos iguales en triángulos semejantes son proporcionales”, afirmación que permite generalizar la regularidad encontrada al modificar el tamaño de los lados de triángulos semejantes y que expresó en términos de razones constantes. La utilidad de su teoría se hizo manifiesta al emplearla en la toma de medidas indirectas cuando logró calcular la altura de una de las pirámides de Egipto comparando su sombra con la de una vara vertical.

Con Aristarco (310 – 230 A. C.) se tiene la primera muestra existente de la geometría pura utilizada con un objeto trigonométrico. Aristarco sostenía que la media luna tenía que ser el vértice de un ángulo recto (90°) formado por las líneas Sol - Luna y Luna - Tierra. Aristarco, como todos sus contemporáneos, suponía que la órbita de la Luna era un círculo en cuyo centro está la Tierra y que la Luna lo recorría siempre a la misma velocidad. Si el sol se encuentra a una distancia infinita los cuartos de la Luna ocurrirían cuando el ángulo Sol – Tierra - Luna es recto, es decir, el lapso entre Cuarto creciente - Luna llena, Luna llena - Cuarto menguante, Cuarto menguante - Luna nueva y Luna nueva - Cuarto creciente, serían iguales.

En cambio si el Sol se encuentra a una distancia finita, sus rayos divergen formando un ángulo (Fig. 2). El lapso entre la Luna nueva y el cuarto creciente es menor que el lapso entre éste último y la luna llena. Por la misma razón el intervalo entre la luna llena y el cuarto menguante es mayor que el intervalo entre éste y la siguiente luna nueva.

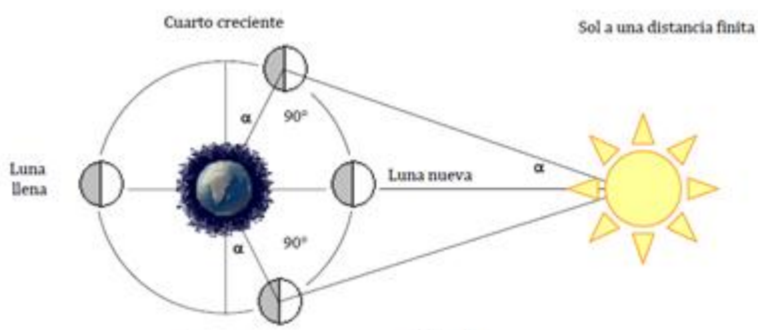


Fig. 2

Aristarco encontró que el ángulo α, que forman los rayos del Sol que abarcan la órbita de la Luna, tiene que ser igual a la diferencia angular entre la posición de la media luna. Si llamamos *A* la distancia de la Tierra a la Luna y *B* a la distancia de la Luna al sol, resulta que hay una sencilla razón entre A, B y el ángulo α, que hoy conocemos como tangente: $\tan\alpha = \frac{A}{B}$

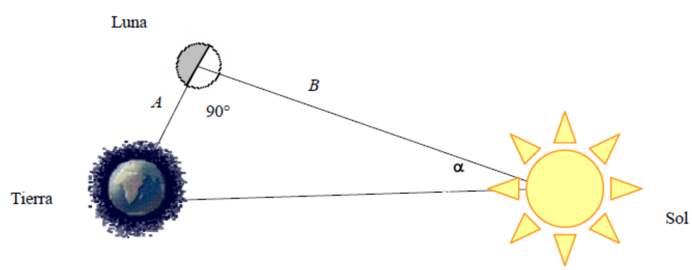


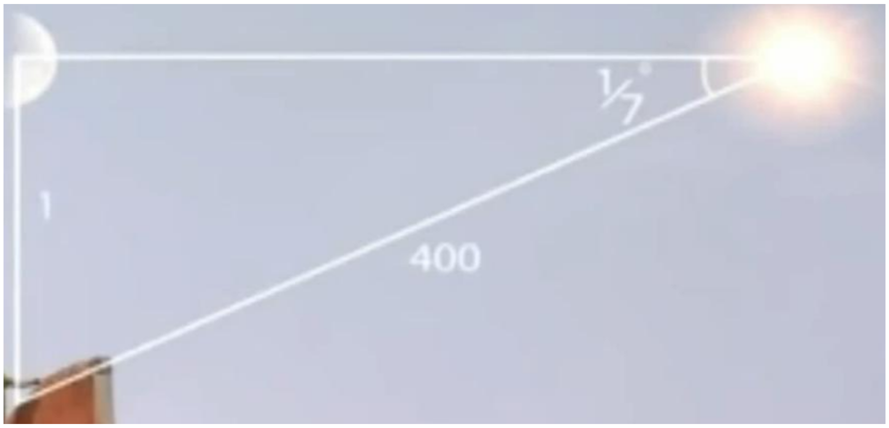
Fig. 2

En otras palabras, determinando α se puede calcular qué tanto más lejos está el Sol de la Luna que la Luna de la Tierra. Si para Aristarco la Luna se movía en una órbita circular y con velocidad constante alrededor de la tierra, debía medir cuánto tarda la luna en darle una vuelta completa a la Tierra, para lo cual bastaba con medir el tiempo que transcurre, por ejemplo, entre dos Lunas nuevas. Una vez determinado ese lapso, y si el sol estuviera a una distancia infinita, hay que dividirlo entre cuatro para obtener el tiempo que debería transcurrir entre cada fase de la luna. Entonces, la secuencia de las fases de la Luna estaría dividida en cuatro intervalos iguales.

Empleando números concretos, si el periodo de la luna es 29 días y medio, o 708 horas y las fases sucedieran a intervalos perfectamente regulares, entre cualquier fase y la siguiente transcurrirían 177 horas (708 ÷ 4). Aristarco observó que el cuarto creciente ocurría seis horas antes de lo esperado, si el sol estuviera a una distancia infinita. El ángulo α de nuestra figura correspondía, por lo tanto, a seis horas de movimiento de la Luna. De aquí, Aristarco deduce que, puesto que la Luna recorría su órbita con velocidad constante, el ángulo α que se busca determinar debería estar en la misma proporción a una vuelta completa (360°) y que las seis horas de discrepancia al periodo completo de 708 horas: $\frac{\alpha}{360°} = \frac{6}{708}$, donde $\alpha = \frac{6}{708} \cdot 360°$.

Aristarco expresó la relación entre las distancias $\frac{tierra - luna}{luna - sol}$ que hoy día es tan 3° = 0. 05, cómo "*la distancia del Sol a la Luna es veinte veces la distancia de la Luna a la Tierra*". Este cálculo es erróneo, pero no por el método, sino por los datos numéricos. El método geométrico es perfectamente válido, el problema estriba en que la discrepancia entre el lapso Luna nueva – Cuarto creciente con el sol a una distancia infinita y el mismo lapso con el sol a la distancia infinita que se encuentra no es de seis horas sino de cerca de 18 minutos (Ruiz y de Regules, 2002). Con esta cifra y el razonamiento anterior se obtiene la cifra correcta: *el sol esta 400 veces más lejos de la Luna que la Luna de la Tierra*.

El mismo descubrimiento realizaron los indios años después pero descubrieron que el ángulo que se forma entre la tierra y el sol era $\frac{1}{7}$ de un grado, la función seno de la séptima parte de un grado da la proporción de 400 : 1 eso significa que el sol está 400 veces más lejos de la tierra que la luna por lo que al utilizar la trigonometría los matemáticos indios pudieron explorar el sistema solar sin tener que abandonar la superficie terrestre.



Otro cálculo que utiliza medidas geométricas fue el originado por la medida de la tierra, hecho por Eratóstenes con un alto grado de precisión. La descripción es la siguiente: En Siena, actual ciudad de Asuán (al sur de Alejandría), había fama que los rayos del sol caían a plomo el día del solsticio de verano, el reflejo del sol se veía en el fondo del pozo justo a medio-día. Clavando una vara en el suelo de Alejandría, en el mismo solsticio de verano, Eratóstenes observó que allí el sol no pasaba por el cenit, sino que la vara proyectaba una sombra (Fig. 3).

Geométricamente dedujo lo siguiente: Si los rayos del sol inciden directamente en Siena, pero en Alejandría hacen un ángulo con la vertical, ese ángulo sería igual al que formarían las verticales de las dos ciudades si las proyectamos hasta el centro de la tierra, es decir, es igual a la diferencia entre la latitud geográfica de Siena y Alejandría.

Eratóstenes comprobó que el ángulo era de alrededor de 7.5° y dado que las distancias entre las dos ciudades se calculó en 5250 estadios1, concluyó que el ángulo α (7.5°) es la cuadragésima octava parte del círculo completo (360°), por lo tanto, la distancia entre Alejandría y Siena (5250 estadios) debe estar en la misma proporción a la circunferencia total de la tierra, o sea, esta debe ser 48 veces 5250 estadios, o 252000 estadios.

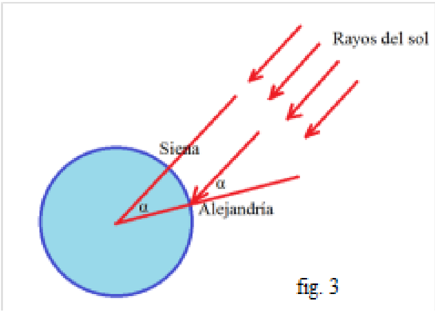


fig. 3

Los antecedentes sentados por la cultura babilónica, egipcia y griega en sus inicios muestran que la problemática de construir un modelo a escala, con base en datos empíricos de una realidad macro no manipulable para la construcción de un cuerpo teórico recibirá el nombre de trigonometría.

Nacimiento de la Trigonometría

En el siglo II a. C, el astrónomo Hiparco de Nicea construye la primera tabla trigonométrica ganándose así el nombre del padre de la trigonometría. Sin embargo las observaciones que tenía eran insuficientes para explicar el movimiento de los planetas con exactitud, lo que si logro con los movimientos del sol, la tierra y la luna. Su método y rigor de razonamiento son los elementos que hacen de Hiparco un astrónomo destacado.

Con una diferencia de tres siglos entre Hiparco y Ptolomeo, se hereda una serie de observaciones, hipótesis de epiciclos y las cónicas, así como también los cálculos astronómicos; con base en lo anterior construyó su sistema.

El sistema de Ptolomeo fue aceptado por la vertiente matemática de la época y en el mundo árabe hasta la era de Copérnico.

Los aportes de Ptolomeo a la trigonometría se puntualizan con los elementos básicos que usa en la construcción de la tabla de cuerdas subtendidas por los arcos de una circunferencia dividida en 360 partes cuyo diámetro supone dividido en 120 unidades. Cada una de esas partes está dividida en otras sesenta que a su vez están subdivididas en sesenta, es decir el sistema es sexagesimal. Este sistema ya existía en Mesopotamia y de allí es llevado a Grecia.

Ptolomeo realiza el siguiente análisis: sea un semicírculo ABC de centro en D, diámetro AC y desde el centro D trácese una línea DB que forme ángulos rectos con el diámetro AC. Divídase DC en dos partes iguales por el punto medio E y únase EB, con el que se construye EF de la misma forma para obtener F, y únase FB. Afirmó que la línea FD es el lado del decágono, en cambio BF es el del pentágono (Fig. 4). Puesto que la línea DC está dividida en dos partes iguales por el punto E, y a esta se la alarga añadiendo la línea recta DF, el cuadrángulo encerrado sobre CF y FD, junto con el cuadrado de la línea ED es igual a aquel cuadrado que se construye partiendo de EF, por lo tanto es igual a EB, porque EB se construyó igual a FE.

Como los cuadrados de las líneas ED y DF son iguales al cuadrado de EB, se tiene que el rectángulo que está encerrado bajo CF y FD, junto con el cuadrado de la línea DE, es igual a aquellos cuadrados que se forman con las líneas BD y DE.

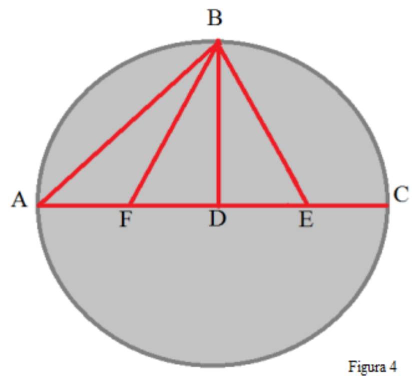


Figura 4

Por lo tanto si eliminamos por ambas partes el cuadrado de la línea ED, el rectángulo que queda construido con las líneas CF y FD es igual al cuadrado BD, con lo que lo es también al cuadrado DC. Por consiguiente, la línea FC está dividida en el punto D según extrema razón y media razón. Ahora bien , dado que los lados de un hexágono y de un decágono (inscritos en el mismo circulo) dividen a la recta continua que forman alineados en extrema y media razón, al ser la línea CD el lado del hexágono partiendo del mismo centro, entonces la línea DF será la correspondiente al lado del decágono. De la misma manera, ya que el lado del pentágono puede ser descrito mediante el lado del hexágono y el del decágono inscritos en el mismo círculo, al ser BF el lado del triángulo rectángulo BDF cuyo cuadrado es igual a dos cuadrados, la línea del hexágono BD y el lado del decágono DF, se concluye necesariamente que BF ha de ser el lado del pentágono. Una comprobación numérica podríamos hacerla usando el teorema de Pitágoras así:

$$\overline{BE} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{900 + 3600} = 67{,}08203932$$

$$\overline{DF} = \overline{BE} - 30 = 37{,}08203932$$

$$\overline{BF} = \sqrt{\overline{DF}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{\overline{DF}^2 + 3600} = 70{,}5342302$$

En el sistema sexagesimal de Ptolomeo se establece lo siguiente: como el diámetro del círculo era de 120 partes, entonces 30 partes serán las contenidas en DE, que va desde la mitad hasta el centro del círculo y su cuadrado es 900, ahora BD, al ser el centro tendrá 60 partes y su cuadrado 3600 partes, así pues el cuadrado de la línea EF, tendrá 4500 partes. Por lo cual, la longitud EF se aproxima a 67°4’55” partes y la restante DF de 37°4’55” de las mismas. Luego el lado del decágono que se subtiende bajo un arco de 36 partes de la clase de las 360 que tiene el círculo es de 37°4’55” de la que el diámetro tiene 120 (Fig. 5)

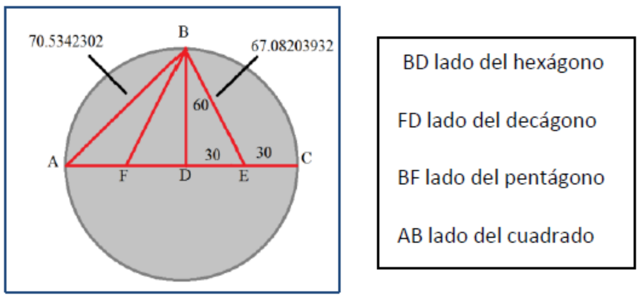


Figura 5

Con estos cálculos Ptolomeo establece el teorema que le permite operar con las longitudes encontradas, seguido de tres corolarios de donde se pueden calcular más longitudes de cuerda, como la cuerda de la diferencia de dos arcos, la cuerda de la mitad de un arco y la cuerda de la suma de dos arcos. Estos corolarios son equivalentes a las actuales identidades trigonométricas.

Con la caída del imperio romano, el centro de la investigación matemática se desplazó a la India y luego a Mesopotamia. Los documentos que aún existen de la cultura India son los Siddhantas (libros antiguos hindúes), de los cuales el Surya, todavía existe muy parecido a su forma original (300-400 d.C.). Los contenidos eran de astronomía fundamentalmente y explican cómo operan los epiciclos y fracciones sexagesimales, con marcada influencia griega.

El término trigonometría aparece hasta 1595 en el libro “Trigonometriae sive de dimensione triagulorum libri quinque” de Bartolomaus Piticus (1561-1614), que era un sacerdote alemán interesado en las matemáticas, quien abordaba la trigonometría con un carácter más analítico. La consecuencia fue el abandono de la compilación de tablas trigonométricas y destacar las relaciones trigonométricas, sin embargo el origen de las relaciones continuaba en un contexto geométrico. Seguían representando las cuerdas subtendidas por un arco.

La Función trigonométrica.

El aporte importante lo hizo Leonard Euler (1707-1783), aunque la serie infinita para el seno, ya era conocida por Newton. Senos y cosenos se consideraban longitudes de segmentos de línea relativos a un círculo dado de radio R, el seno del ángulo A era la mitad de la cuerda en un círculo, subtendida por el ángulo central 2A, y el coseno de A era la longitud de la perpendicular que va del centro de la circunferencia a la cuerda.

El estudio de las funciones para el análisis lo hace en 1967, en “Introductio in analysin infinitorum”, donde reconoce a las cantidades trigonométricas como relaciones funcionales trascendentes como el logaritmo y la exponencial. Las cantidades trascendentes que nacen del círculo son tomadas del primer tomo, capítulo VIII, “De quantitatibus ex circulo ortis”, y aunque no se usa la palabra radián muestra que es la semicircunferencia de un círculo (de radio 1) y en consecuencia es la longitud de arco de 180°, entonces,

$$sen 0\pi = 0,\ \cos 0\pi = 1,\ sen\frac{1}{2}\pi = 1,\ \cos\frac{1}{2}\pi = 0,\ sen\pi = 0,\ \cos\pi = -1,\ sen\frac{3}{2}\pi = -1,$$
$$\cos\frac{3}{2}\pi = 0,\ sen 2\pi = 0\ \ y\ \cos 2\pi = 1$$

Además discute las propiedades periódicas de la función trigonométrica y establece las igualdades para la suma de ángulos, suma de senos y cosenos, multiplicación y división.

Otro aporte importante se encuentra en el capítulo IX, de “De investigatiore Factorum trinomialium”, en donde se discute y generaliza el teorema de Moivre, fusionando la trigonometría con el álgebra y el análisis cuando encuentra una solución poco convencional al problema de factorizar un polinomio de la forma $x^{2n} + px^{n} + 1$. Esta generalización se establece así: $(\cos\phi + isen\phi)^{n} = \cos n\phi + isen\, n\phi$, para todo n que pertenezca a los reales.

En el capítulo XI, “De aliis Arcuum atque Sinum expressionibus infinitis”, se expone la serie infinita para las cantidades trigonométricas.

Euler consideró las series de potencias como “polinomios infinitos” que obedecen a las mismas reglas que los polinomios finitos ordinarios, tal que si la función seno es igual a cero en x=0, $x = \pm\pi;\ x = \pm 2\pi;\ x = \pm 3\pi,\ etc,$ tenemos que el polinomio infinito compuesto en factores que cumple tal condición es:

$$
\begin{aligned}
senx &= \ldots\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\times\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\ldots \\
&= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots
\end{aligned}
$$

Por último en el capítulo XXI del tomo II, “On Trascendental Curves”, en donde la periodicidad se distingue como una propiedad de la función [5], Euler construye una curva de $\frac{y}{c} = arc\,sen = \frac{x}{c}$, señalando el número infinito de arcos de un círculo cuyo seno es $\frac{x}{c}$, y donde la ordenada y es una función multivariada.

El eje y, y cualquier otra línea vertical paralela, intersecta a la curva en un número infinito de puntos.

CAPÍTULO II

PROBLEMÁTICA Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La trigonometría se presenta como un obstáculo tanto para profesores como para los estudiantes a la hora de comprender sus propiedades y sus aplicaciones, es por esto que surge la necesidad de generar una propuesta que facilite el aprendizaje de los estudiantes y ayude a las prácticas docentes. (Kee, Mura y Dionne 1996; Maldonado, Montiel & Cantoral, 2004; Montiel 2005, Maldonado, 2005, Cavey y Berenson, 2005; Jacome 2011; Salcedo 2012)

Hoy en día las prácticas pedagógicas introducen la trigonometría de manera teórica, lo que se evidencia en el análisis del programa de cuarto año medio plan diferenciado de trigonometría del nivel y de algunos textos de uso común utilizados por los estudiantes de cuarto año de educación secundaria entre otros *Geometría y trigonometría editorial Santillana, Algebra y Trigonometría de Baldor, Cálculo de Stewart y, Apostol de Calculo.*

En base a lo mencionado anteriormente es que pueden surgir algunos cuestionamientos como, ¿La organización de los programas de estudios obstaculizan los aprendizajes?; ¿Existen obstáculos epistemológicos que impidan el aprendizaje?; ¿Es el poco conocimiento didáctico de los profesores un problema en la enseñanza?

Las nociones trigonométricas en general se tratan de forma descontextualizada, como queda en evidencia del estudio de los textos mencionados anteriormente lo que podía ser una dificultad para un aprendizaje significativo de las nociones involucradas, y en consecuencia traería una desmotivación de los estudiantes.

De esta manera el estudio de la trigonometría podría convertirse en un proceso memorístico y rutinario,

Lo anterior plantea un problema para la enseñanza y para un aprendizaje significativo, por esta razón, esta investigación quiere hacerse cargo de este problema y plantear una modalidad exploratoria para encarar el proceso de enseñanza y aprendizaje que incluya no solo una serie de conceptos y fórmulas, sino también problemas que permitan a los estudiantes poner en juego herramientas y estrategias para explorar, relacionar, conjeturar y demostrar.

En consecuencia, se plantea en esta tesis una propuesta didáctica basada en la TSD para la enseñanza de la trigonometría en el nivel de cuarto año medio plan diferenciado.

Esta investigación exploratoria que considerará una vinculación con los conocimientos previos del estudiante tales como razones trigonométricas, proporcionalidad y transformaciones isométricas, a través del diseño de una micro ingeniería didáctica que contemplará problemas contextualizados que permitan construir las funciones trigonométricas, en especial la función seno y coseno fundamentales en la teoría.

Se tomará como referente teórico la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986), que presenta una forma de relacionar directamente al estudiante y el objeto a enseñar interactuando en una sala de clase.

Margolinas (2009) señala:

"La situación didáctica es construida intencionalmente con el fin proporcionar a los alumnos un saber determinado, el cual se da directamente en la sala de clase, el propósito de enseñar y aprender están directamente relacionados, es así como esta se gobierna por el contrato didáctico". (p. 35)

Además Santa Cruz afirma:

"... los maestros no hacen alusión explicita a lo que la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría aporta al desarrollo del pensamiento variacional, pues, la variación, el cambio y la dependencia son aludidos a las funciones en general pero no, cómo estos se aprecian en las trigonométricas al variar por ejemplo, los valores de las amplitudes de los ángulos y su relación con las variaciones del seno (variación periódica)." (p.192)

El presente proyecto de tesis aporta elementos en pro de la reflexión dedicada a docentes en ejercicio y en formación, facilitando herramientas que contribuyan a su labor, en las diferentes dimensiones: matemática, curricular, didáctica y tecnológica.

Del estudio anterior y las experiencias de aula surge la siguiente pregunta de investigación ¿Enfocar la enseñanza de las funciones trigonométricas a través de problemas contextualizados ayuda a los estudiantes a lograr un aprendizaje significativo?

Objetivo general

Diseñar una propuesta didáctica que promueva el aprendizaje de las funciones trigonométricas seno y coseno a partir de problemas de sus construcciones en el plano euclidiano y en el plano cartesiano.

Objetivos específicos

- Construir la circunferencia trigonométrica a partir de la búsqueda de triángulos rectángulos
- Construir una curva a partir de la búsqueda de triángulos rectángulos simétricos en el primer y segundo cuadrante
- Presentar la curva construida con el Geogebra con el fin de visualizar para constatar las características de sinusoidal, periodicidad, amplitud.
- Presentar la representación algebraica de la función seno destacando el dominio y el recorrido
- Cambiar del registro gráfico al algebraico para completar el tratamiento de las funciones trigonométricas en la institucionalización

CAPÍTULO III

MACO TEÓRICO

Teoría De Situaciones Didácticas (TSD)

La Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau es un referente teórico que posibilita no solo el diseño de una secuencia didáctica sino también la investigación, proporcionando herramientas teóricas para el análisis de secuencias didácticas.

La TSD está sustentada de algún modo en una concepción constructivista en el sentido piagetiano del aprendizaje. Brousseau, (1986) afirma:

> "*El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje."* (p.63)

En torno a esta adaptación, nos dice cuál es la actitud del estudiante frente a una situación didáctica, es decir, "*el conocimiento proviene en buena parte del hecho que el alumno lo adquiera en su adaptación a las situaciones didácticas que le son propuestas*" (Brousseau 1986, p. 67).

La perspectiva de diseñar una situación por parte del profesor, para ofrecerla al alumno y se pueda construir un conocimiento, da lugar a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como momentos en los cuales el alumno en forma autónoma se enfrenta a la resolución de cualquier problema, sin intervención directa del profesor en las cuestiones relativas al saber en juego.

El concepto de medio para la acción y su estructuración permiten modelar las rupturas necesarias realizadas en los cambios de referencia del sujeto en un contexto didáctico. Este concepto, introducido desde los principios de la teorización de los hechos didácticos, ha sido retomado y abordado en profundidad por Margolinas, en particular para analizar la acción del profesor en las clases ordinarias.

El conocimiento, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por sus respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. Y es en este contexto surge la noción de **medio**, Brousseau señala:

> *"En esta perspectiva, son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema.*
>
> *Así, un problema o un ejercicio no pueden considerarse como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio que " interpela al sujeto" siguiendo algunas reglas.*
>
> *... ¿Qué información, qué sanción pertinente debe recibir el sujeto por parte del medio para orientar sus elecciones y comprometer un conocimiento tal en lugar de otro? Estas preguntas conducen, pues, a considerar el medio como un sistema autónomo, antagonista del sujeto, y es de este del que conviene hacer un modelo...." (p. 63)*

Se entiende por situación adidáctica aquella compuesta por una actividad, problema, o un ejercicio o una pregunta y un medio.

Cabe resaltar que el medio está construido intencionalmente con el objeto de generar retroacciones del estudiante respecto de la actividad. La intención didáctica del medio está fundamentada en la naturaleza de las elecciones de las variables movilizadas en el diseño mismo de la situación didáctica o adidáctica.

La Situación adidáctica es una situación de aprendizaje que trae consigo diferentes fases por las cuales el estudiante debe pasar (acción, comunicación, validación) para cumplir el objetivo de la situación.

Por contrato didáctico se entiende como la consigna establecida entre profesor y alumno, de esta forma, comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente.

El proceso de institucionalización se describe como aquél que consiste en fijar a partir de los conocimientos elaborados en las situaciones, los elementos que van a participar en el reconocimiento explícito del saber y asegurar así la coherencia entre los aprendizajes y los objetivos de enseñanza fijados por el profesor y /o por la institución.

Para un buen desarrollo de las situaciones mencionadas es necesario establecer un contrato didáctico, el cual Brousseau lo describe como el conjunto de reglas que determinan las tareas que cada participante de la relación didáctica (interacciones profesor/alumnos) debe realizar. En otras palabras describe el conjunto de tareas que el profesor propone y el conjunto de comportamientos de los estudiantes que el profesor espera de ellos.

Situación Didáctica

Esta situación se caracteriza por focalizar la enseñanza, por lo que son preparadas con fines de enseñar algún conocimiento o poner en juego el conocimiento construido y adquirido en las fases de la situación adidáctica.

La situación didáctica no puede reducirse a la Institucionalización, en la cual es esencial la organización del saber y su formalización.

Ella requiere de una preparación en vista de un objetivo determinado, el cual puede ser de diagnóstico, reforzamiento de conocimientos tratados o evaluación de conocimientos que se espera hayan sido adquiridos.

Cabe resaltar la diferencia que existe entre situación didáctica y situación adidáctica, la primera tiene en vista la enseñanza de un conocimiento y la segunda tiene en vista el aprendizaje de un conocimiento nuevo.

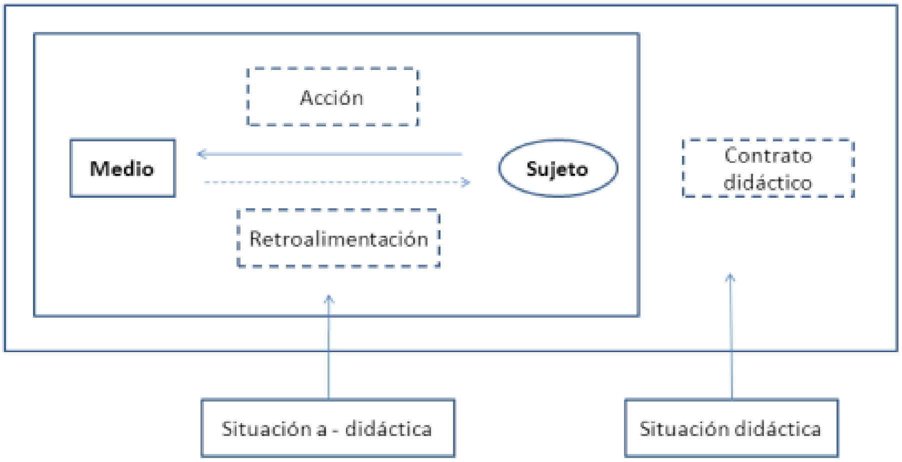


Ilustración XX: Sistema didáctico y a-didáctico. Tomado de Perrin - Glorian (2009)

En resumen, la teoría de situaciones es un modelo que permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase concebidas con el fin de disponer de un medio para realizar un cierto proyecto de enseñanza y aprendizaje.

Construcción de conceptos desde la teoría de los registros de representación semiótica de R. Duval,

Los estudios experimentales de Duval (1988, 1993, 1995), donde un Registro de representación, es un sistema semiótico que permite las tres actividades cognitivas siguientes:

1) *La presencia de una representación identificable de un objeto...*

2) *El tratamiento de una representación dentro de un registro que puede transformarse dentro del mismo registro.*

3) *La conversión es una operación que permite cambiar una representación desde un registro en otra representación en otro registro de modo que se conserve la totalidad o parte del significado de la representación inicial...*

Sobre la construcción de conceptos matemáticos Duval (idem, p. 46) establece que dado que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, debemos considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para la formación del concepto.

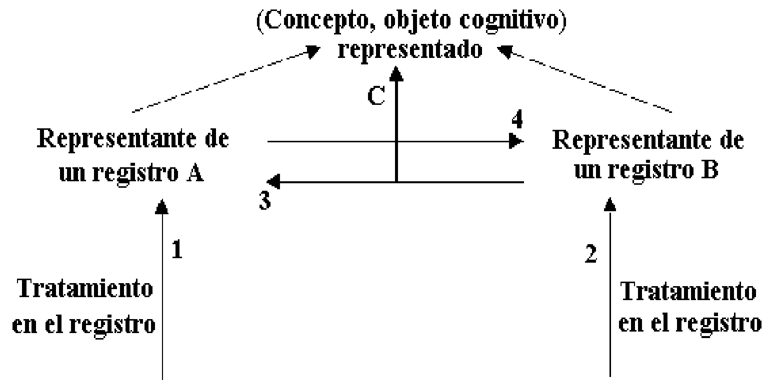


Figura 2. Modelo de la representación centrado en la función de objetivación. Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha C corresponde a lo que llamaremos comprensión integradora de una representación: supone una coordinación de dos registros. Las flechas punteadas corresponden a la clásica distinción entre representante y representado. Naturalmente, este esquema considera el caso más simple de la coordinación entre dos registros.

El acercamiento de Duval recupera dos aspectos teóricos importantes desarrollados por Piaget y Skemp. En este contexto, la adquisición de un concepto en un individuo se dará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático. Debemos señalar que bajo este punto de vista siempre el concepto estará en construcción.

Los autores antes citados nos centran en la discusión de la importancia de las representaciones semióticas, en su interacción y su potencialidad al construir redes que conecten conocimiento.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La metodología que hemos elegido es cualitativa y un estudio de casos, considerando algunas fases de la Ingeniería didáctica de investigación. a partir del diseño de una propuesta didáctica, la cual está sustentada por la TSD y se compone de dos situaciones, la primera contempla tres actividades, mientras que la segunda cuenta con cuatro actividades.

Concretamente se trata del diseño de una nueva propuesta que toma en cuenta el sentido que cobran los objetos matemáticos para los alumnos, en este caso las funciones trigonométricas con la intención de favorecer el aprendizaje de las funciones seno y coseno, entendiendo además el significado de esas palabras. Esto se ha intentado poniendo en juego, objetos matemáticos fundamentales tales como la circunferencia trigonométrica, triángulos rectángulos, las nociones de simetría central y axial. Lo que permitirá construir las curvas que serán las representaciones gráficas de las funciones seno y coseno y cuya visualización dará sentido a los aprendizajes de dichos objetos y sus propiedades.

El diseño metodológico para este estudio ha considerado las siguientes fases:

- Fase 1. Estudio histórico epistemológico. Cap. I pág. 14
- Fase 2. Elaboración de la propuesta y análisis apriori de la misma
- Fase 3. Experimentación
- Fase 4 : Elaboración de un protocolo con el fin de organizar los datos recogidos
- Fase 5 : Análisis a posteriori de los datos obtenidos de los protocolos
- Fase 6 : Confrontación de los Análisis a priori y a posteriori
- Fase 7: Validación

Por otra parte, señalamos que este diseño metodológico se inscribe en la ingeniería didáctica que aborda estudios de casos en los que se distinguen las siguientes fases (Artigue, 1989): a) Análisis preliminares; b) Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas; c) Experimentación; d) Análisis a posteriori y validación.

La fase de confrontación tiene la finalidad de comparar ambos análisis para rechazar o confirmar las hipótesis sobre las cuales está basado el diseño. Esta comparación se realiza teniendo en cuenta el marco teórico y los objetivos específicos de la investigación.

La validación del diseño es interna, se fundamentará en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Esta metodología de investigación, se sustenta en el marco teórico elegido que en nuestro caso es la teoría de situaciones didácticas (TSD) la cual tiene una visión sistémica del aula donde la relación didáctica contempla las interacciones entre los subsistemas profesor, alumno y saber enseñado.

Desde el punto de vista epistemológico hay evidencia de que los matemáticos hindúes, griegos y egipcios hicieron sus construcciones y conclusiones astronómicas basándose en el comportamiento del triángulo rectángulo, es por ello que hemos pensado en crear escenarios que hagan posible el desarrollo de la construcción de las funciones trigonométricas específicamente la función seno y coseno a partir del uso del triangulo rectángulo.

Desde el punto de vista cognitivo el diseño, está basado en la visualización e intuición de las representaciones gráficas de funciones, de este modo se solicitará a las estudiantes describir el comportamiento gráfico de la circunferencia trigonométrica y distinguir las similitudes entre las representaciones graficas de funciones seno y coseno.

Desde el punto de vista didáctico didáctica, en el estudio de los textos hemos encontrado que ellos abordan normalmente el tema de funciones trigonométricas desde un enfoque que enfatiza los cálculos algorítmicos y se da muy poca importancia a la visualización de las representaciones gráficas y a tareas de análisis de las mismas.

Por otra parte, los profesores se apoyan con frecuencia en el esquema de los textos, aun cuando consideren importante la visualización, a veces tienen limitaciones para implementarla en el aula, no se disponen de medios necesarios como computadoras, datas, internet o el profesor no ha actualizado sus conocimientos en educación matemática. Además los cambios curriculares desde 2013 dan poca o nula cabida a este tema.

En consecuencia nosotros procuraremos en el diseño de la secuencia que considere un ambiente que enfatice la visualización, permita la actividad matemática de los estudiantes para que logren asignar significados y se favorezca el aprendizaje.

IV. 1. Elaboración de la propuesta y análisis a priori de la misma

La propuesta consta de dos situaciones la primera tiene como objetivo “Construir la circunferencia trigonométrica a partir de un triangulo rectángulo utilizando instrumentos : regla, transportador y compás”. Ella se compone de tres actividades que describimos a continuación

La situación I

La Actividad 1 plantea la siguiente pregunta :

¿Qué figura resulta al construir sucesivamente distintos triangulos rectangulos OAB en el plano cartesiano de modo que tengan un vertice en el origen los catetos OA en el eje x y las hipotenusas OB de igual longitud?

La Actividad 2

¿De que manera varian los catetos OA y AB en el primer cuadrante y de que depemde el cambio?

La Actividad 3 plantea :

En los cuadrantes 3 y 4 : ¿Qué ocurre con los catetos OA y AB? Justifique su respuesta

IV.2 Análisis a priori de la situación I

Para la Actividad 1: El medio consiste en una tarea de construcción de triángulos rectángulos en el plano cartesiano y para ello se proveen útiles de geometría.

Suponemos que en esta actividad las construcciones no presentarán demasiadas dificultades ya que las instrucciones dadas son precisas y al alcance de las estudiantes.

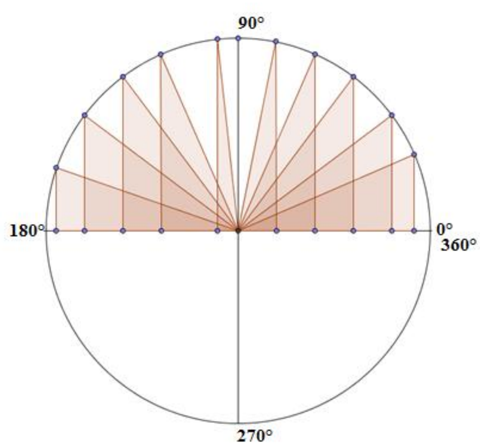
La segunda pregunta requiere de la construcción anterior y de la visualización de variaciones para detectar la dependencias, suponemos que pueden haber dificultades en encontrar la dependencia porque se podría suponer (las estudiantes) que la variación de los catetos es proporcional, además se podría suponer que ellas no asociaran el cambio de los catetos con el ángulo AOB.

Para la pregunta 3) La dificultad podría ser que se continúe visualizando variaciones proporcionales de los catetos entones no podrían visualizar las simetrías ni la variación del ángulo de vértice O.

La Situación II

Esta situación consta de cuatro actividades y tiene como objetivo "Construir las representaciones graficas de las funciones seno a partir de simetrías de triángulos rectángulos y la traslación de figuras dado un vector". Ella consta de cuatro preguntas las tres primeras son preguntas en relación a la figura dada (1, 2, 4) y la 3) es una tarea de construcción de simetrías. A continuación las actividades:

Dada la siguiente figura:



Pregunta 1.

Entre los triángulos dibujados ¿existen triángulos simétricos? Justifica tu respuesta

Pregunta 2

Que curva se forma al unir los vértices B del segundo al primer cuadrante

Pregunta 3

Realiza una simetría central o puntual en torno al punto de la circunferencia que marca los 0°, de los triángulos del primer cuadrante y del segundo cuadrante respectivamente

Pregunta 4

¿Qué curva se forma al unir todos los vértices que pertenecen a la circunferencia en el caso anterior

IV.3 Análisis a priori de la situación II

El medio en esta situación es una configuración a partir de la cual se plantearon cuatro preguntas y se pone a disposición útiles de geometría, los cuales se propone utilizarlos.

Para responder a la pregunta 1 las alumnas deben identificar triángulos simétricos que están dibujados ellas deben poner en juego el significado de simetría y disponen de instrumentos que pueden facilitarles comprobación de distancias entre puntos y el eje de las ordenadas. La dificultad sería que no recuerden la definición de simetría axial.

Para la pregunta 2) se responde por visualización de la figura pueden responder y no deberían presentarse dificultades a las alumnas.

Para la pregunta3) las alumnas deben construir una simetría central y la dificultad podría presentarse por desconocimiento u olvido del significado de simetría central y las condiciones para su construcción.

Para la pregunta 4) la respuesta es por visualización después de realizar la tarea pedida lo que les ayudará a describir la curva que se forma y darse cuenta que la curva es de tipo periódica formada por dos semicircunferencias simétricas. Además pueden señalar algunas características de las curvas.

IV.4 Experimentación.

La fase de experimentación de la secuencia didáctica, se llevó a cabo con un grupo de un curso de cuarto año medio plan diferenciado de educación secundaria del Colegio María Teresa Cancino Aguilar, el cual presta un servicio educativo de carácter católico en la comuna de recoleta.

El grupo se componía de 16 estudiantes (mujeres) con edad promedio de 16 a 17 años.

Estas las estudiantes están familiarizadas con actividades de construcciones geométricas sencillas haciendo uso de la regla y el compás para el reconocimiento de propiedades.

La aplicación de esta secuencia didáctica se realizó en una sesión de clases, con un tiempo 95 minutos.

Situación 1

"Construyendo la circunferencia trigonométrica" está dividida en tres tareas en donde se solicita a las estudiantes una construcción con regla y compás, además de un análisis sobre los elementos participantes en dicha construcción (catetos de los triángulos rectángulos). Esta situación está definida como una situación de acción.

Contrato didáctico:

En la experimentación el profesor presenta la situación I en una hoja de oficio indicando que el trabajo será de manera individual y tendrán a disposición instrumentos de construcción y papel milimetrado. Luego vendrá una puesta en común para conocer los resultados obtenidos por grupo acerca de cada actividad.

El tiempo previsto para el trabajo individual es de 15 minutos.

Puesta en Común: discusión de resultados

Culminado el trabajo individual se solicita a las estudiantes formar grupos de 4 estudiantes.

Los grupos formados fueron cuatro con la tarea de redactar una respuesta en común y nombrar una vocera la cual da a conocer los resultados de su grupo. Lo que se verá al término del análisis.

El profesor divide la pizarra en cuatro y solicita a las voceras pasar a escribir sus resultados y comentarlos e intercambiar sus resultados.

Situación II

Tiene como objetivo “Construir las graficas de las funciones seno a partir de simetrías de triángulos rectángulos y la traslación de figuras dado un vector”. Esta actividad permite graficar la curva de la función seno a partir de la construcción de simetrías y la traslación de figuras.

Contrato didáctico

En la experimentación el profesor presenta la situación II en una hoja de oficio indicando que el trabajo será de manera individual y tendrán a disposición instrumentos de construcción y papel milimetrado. Luego vendrá una puesta en común para conocer los resultados obtenidos por grupo acerca de cada actividad.

El tiempo previsto para el trabajo individual es de 15 minutos.

Puesta en Común: discusión de resultados

Culminado el trabajo individual se solicita a las estudiantes formar grupos de 4 estudiantes.

Los grupos formados fueron cuatro con la tarea de redactar una respuesta en común y nombrar una vocera la cual da a conocer los resultados de su grupo. Lo que se verá al término del análisis.

El profesor divide la pizarra en cuatro y solicita a las voceras pasar a escribir sus resultados y comentarlos e intercambiar sus resultados.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Primera situación I "Construyendo la circunferencia trigonométrica"

*a) **¿Qué figura resulta al construir sucesivamente distintos triangulos rectangulos OAB en el plano cartesiano de modo que tengan un vertice en el origen los catetos OA en el eje x y las hipotenusas OB de igual longitud?***

Imágenes de *E4* trabajando individualmente :

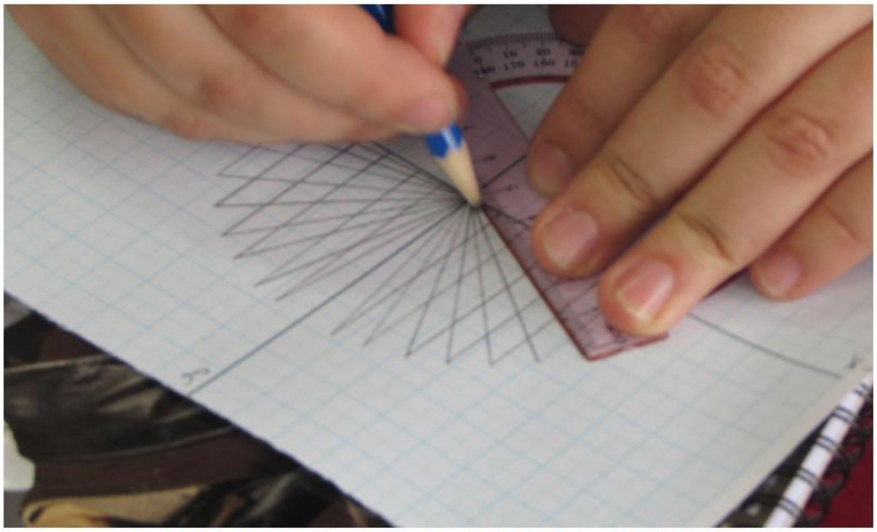
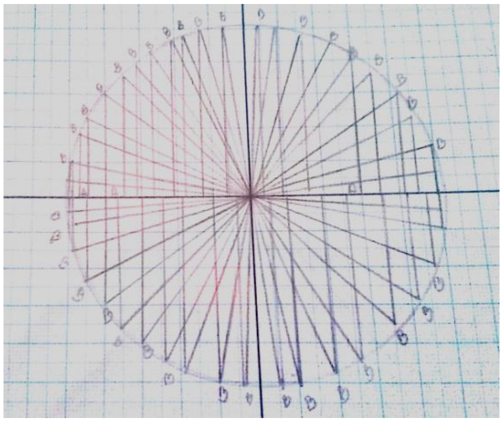


Ilustración I Estudiantes realizando la construccion de la primera actividad "Construccion de la función trigonométrica"

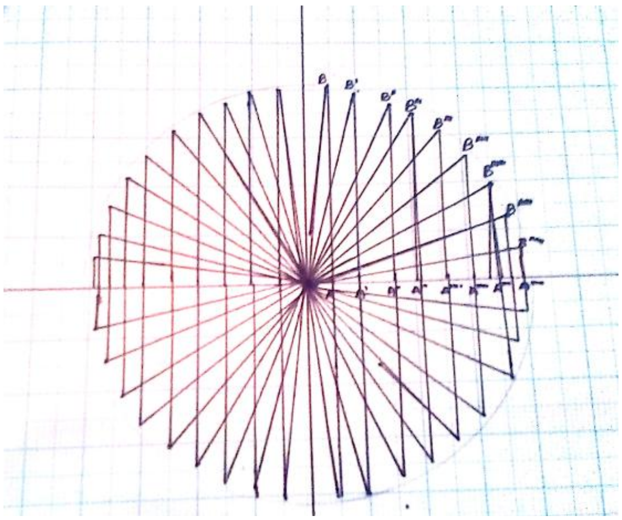
Cabe destacar que el trabajo se realiza sobre un papel milimetrado, junto con instrumentos de construcción.

Logra:



Se puede evidenciar que no existe diferencia en las construcciones, cada una de las estudiantes logra construir la circunferencia a partir de triángulos rectángulos.

Logro de *E16*



Actividad 2 ***¿De que manera varian los catetos OA y AB en el primer cuadrante y de que depemde el cambio?***

Las respuestas a esta actividad 2 las hemos tabulado considerando tres categorías a saber:

Categoría 1: Variación inversamente proporcional (respuestas equivocadas)

Categoría 2: Dependencia de la variación según la hipotenusa, su tamaño o posición

Categoría 3: respuesta correcta

Según lo previsto en el análisis a priori, se consideró que podría surgir la idea de que la variación que sufren los catetos de los triángulos rectángulos es inversamente proporcional, ya que es habitual en las respuestas de estudiantes que cuando una cantidad aumenta y la otra disminuye se trata de una proporción inversa, en particular estas estudiantes lo justifican expresando : “a medida que un cateto aumenta el otro disminuye”. (Ver anexo 1)

Esto podría deberse a que en algunas prácticas docentes a la hora de presentar el concepto de proporción, se enfatiza que se trata de proporción directa cuando una variable aumenta, la segunda también lo hace. De lo contrario si una variable aumenta y la otra disminuye se trata de una proporción inversa. Ya lo mencionaba Cavey y Berenson (2000) haciendo referencia a algunas prácticas docentes a la hora de introducir la noción de razón y proporción en clases. Además De kee, Mura y Dionne (1996) y Maldonado (2005) han dejado en evidencia las dificultades y las concepciones más clásicas de los estudiantes sobre este tema.

Para la tercera y última actividad de la primera situación

En los otros cuadrantes II, III y IV:

¿Qué ocurre con los catetos OA y AB? Justifique su respuesta

Estas respuestas dejan en evidencia el concepto de simetría (Ver anexo 2), gran parte de ellas mencionan que los triángulos son simétricos con respecto a algún eje o al origen. Algunas estudiantes mantienen en sus respuestas la proporcionalidad como variación principal de los catetos. Son respuestas bastante precisas según lo que se pretende.

Protocolo de la Puesta en común respecto a la respuestas de la Actividad II

Momento del intercambio:

Profesor: ¿Están seguras de que la variación de los catetos es inversamente proporcional?

Estudiantes: Si, porque si uno aumenta el otro disminuye

Profesor: ¿Pero siempre en la misma proporción?

Estudiantes: (Silencio)

Profesor: ¿Solo basta con que los catetos aumenten y disminuyan a la vez para que se trate de una proporción inversa?

Las estudiantes discuten entre sí y una de ellas utilizo su celular para encontrar la definición de proporción inversa y sus propiedades.

E13: Profesor, según lo que dice la definición para que una relación se trate de una proporción inversa, se deben multiplicar todos los valores y si da el mismo resultado entonces es una variación proporcional inversa, en nuestro caso deberíamos tomar todos los valores de los catetos de cada triángulo y si estos son iguales seria inversa.

Después de esto cada estudiante comenzó a medir cada cateto y multiplicaron sus medidas encontrando que los resultados no coincidían.

E9: Profesor no da el mismo resultado

Profesor: ¿Entonces?...

Estudiantes: No es una variación inversamente proporcional

Profesor: ¿Entonces de que depende la variación de los catetos OA y AB?

E6 levanta la mano, *Profesor, yo respondí que la variación dependía del ángulo que se forma entre la hipotenusa OB y el cateto OA*

Profesor: ¿están todas de acuerdo?

Instantes de Silencio

Profesor: Haber Romina ¿Nos podrías explicar lo que dice tu compañera?

Romina: según lo que entiendo es que lo importante es la variación de los catetos y eso ocurre a medida que el ángulo del centro va cambiando ya que la hipotenusa es una constante y no importa su tamaño

Profesor: eso es correcto

En ese instante profesor recurre a una animación en Geogebra para mostrar lo que ha dicho Romina.

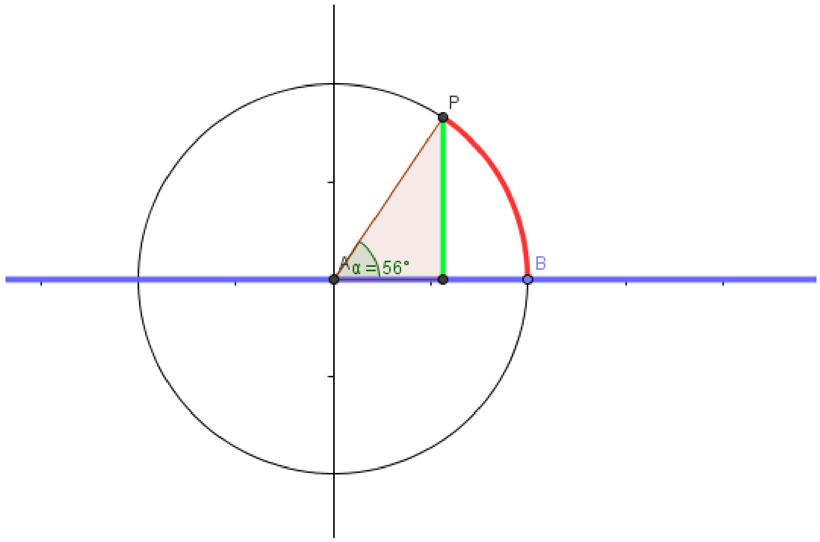


Ilustración en Geogebra "Circunferencia Trigonométrica"

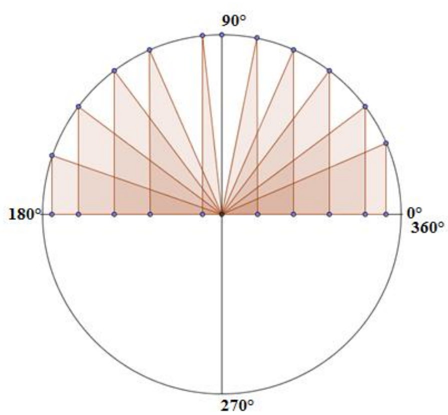
Profesor: Se dieron cuenta?

Estudiantes afirman

Profesor : Muy bien, la variación depende del ángulo del centro de la circunferencia, no depende tampoco de la hipotenusa ya que no importa el tamaño de esta sino lo que pasa con los catetos, y en este caso podemos darnos cuenta que tal variación depende del ángulo.
Esto es lo que se conoce como circunferencia trigonométrica o lo que en algunos libros se denomina circunferencia unitaria, ya que se generalizan propiedades para un radio OB de una unidad.

Para la situación 2 se obtuvieron las siguientes respuestas:

Dada la siguiente figura:



a. Entre los triángulos dibujados ¿existen triángulos simétricos? Justifica tu respuesta

Las respuestas dejan en evidencia que el concepto de simetría está dominado por las estudiantes, además podemos notar que las respuestas se dividen en dos grupos, uno que maneja un concepto cultural de simetría y otro que maneja el concepto matemático de la misma. (Ver anexo 3)

Para la segunda actividad ***"Que curva se forma al unir los vértices B del segundo al primer cuadrante"*** no hubo mayor problema la mayoría de las estudiantes logra visualizar que al unir los vértices B del primer y segundo cuadrante se forma una semicircunferencia.

Para la tercera actividad

Realiza una simetría central o puntual en torno al punto de la circunferencia que marca los 0°, de los triángulos del primer cuadrante y del segundo cuadrante respectivamente

Se obtuvieron los siguientes resultados:

E1:

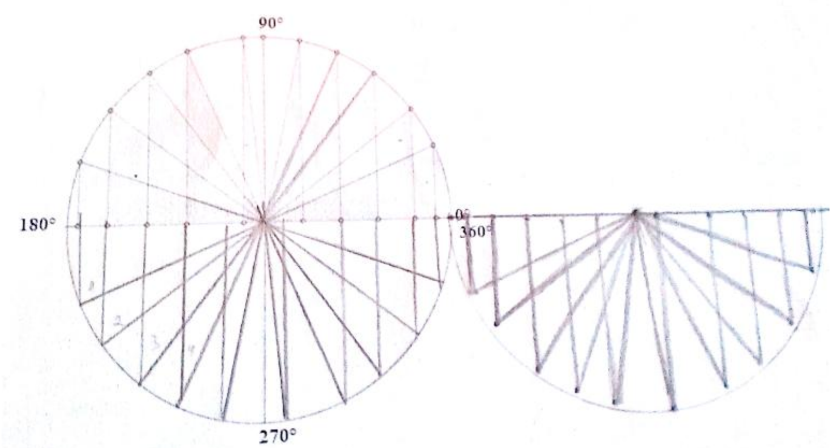


Ilustración V " Trabajo realizado por *E1 hacia la tercera actividad*"

E4:

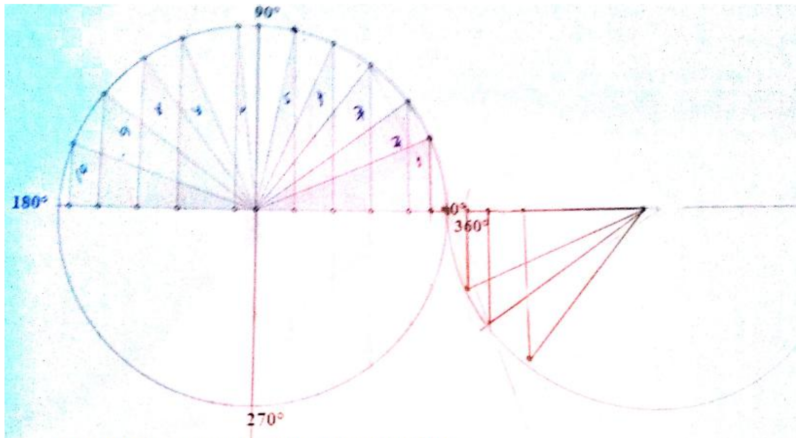


Ilustración VI " Trabajo realizado por *E4 en la tercera actividad"*

E5:

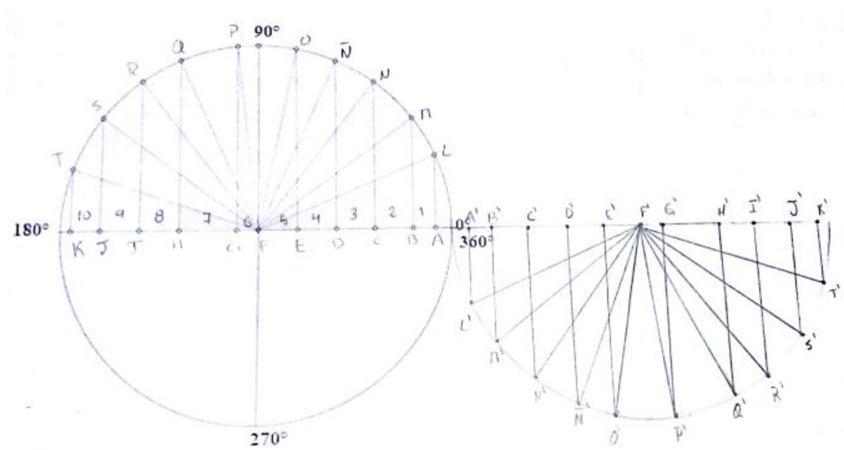


Ilustración VII " Trabajo realizado por *E5 hacia la tercera actividad"*

E6:

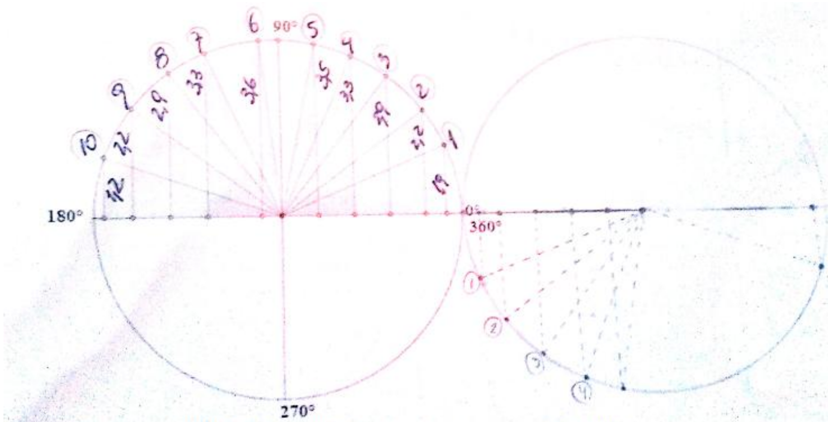


Ilustración VIII " Trabajo realizado por *E6* hacia la tercera actividad"

E7:

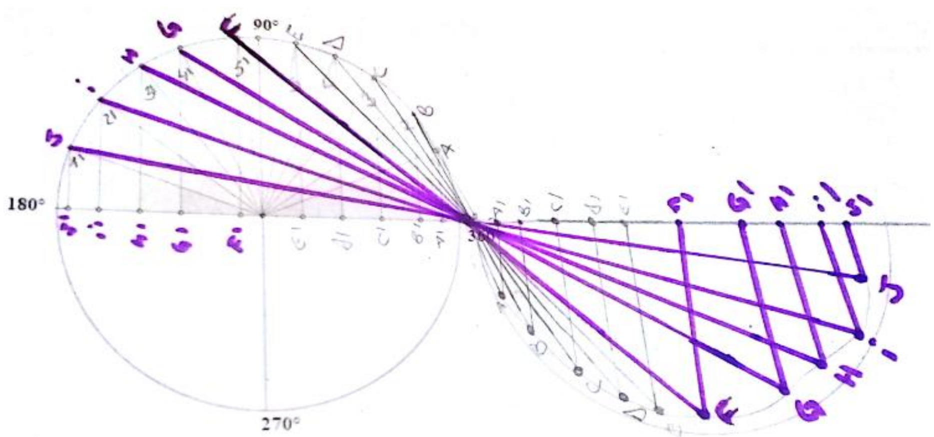


Ilustración IX "Trabajo realizado por *E7 en la tercera actividad*"

E9:

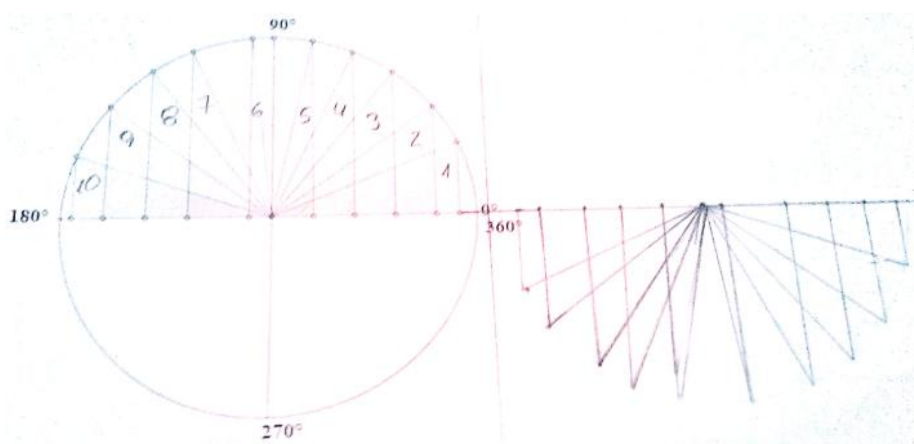


Ilustración X " Trabajo realizado por *E9* en la tercera actividad"

E10:

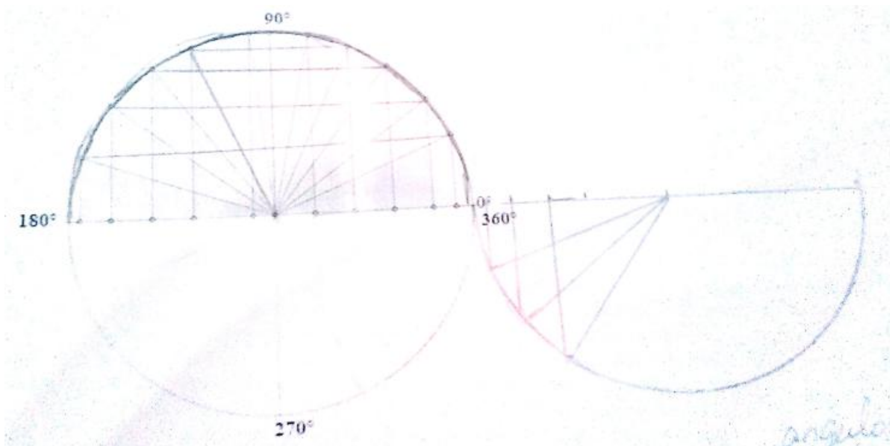


Ilustración XI " Trabajo realizado por *E10* en la tercera actividad"

E11:

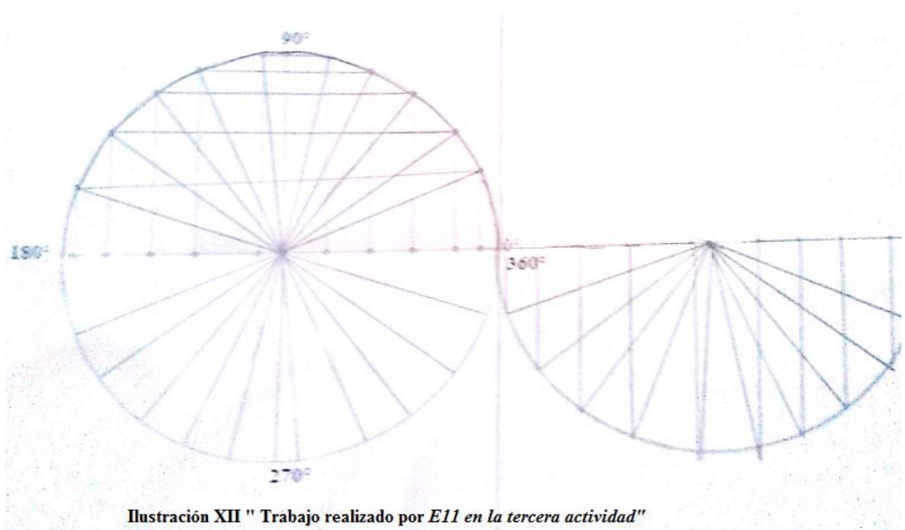


Ilustración XII " Trabajo realizado por *E11 en la tercera actividad"*

E12:

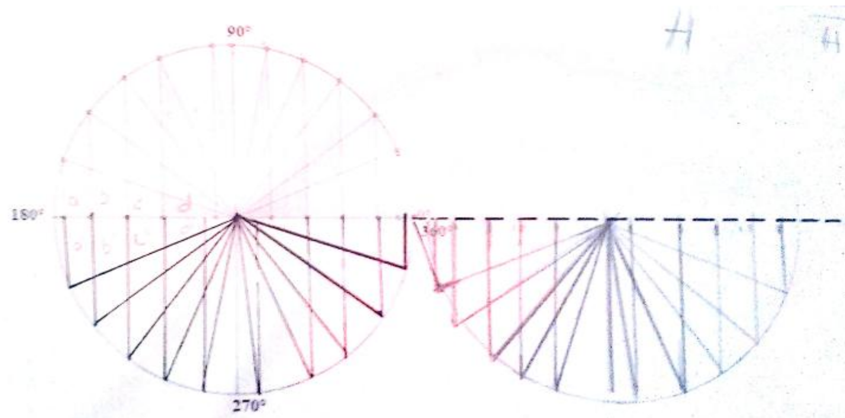


Ilustración XIII "Trabajo realizado por *E12 en la tercera actividad*"

E13:

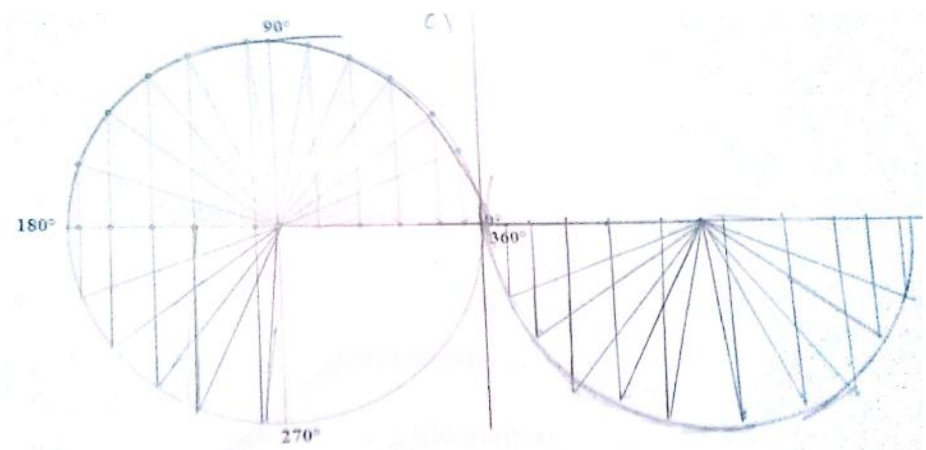


Ilustración XIV "Trabajo realizado por *E13* en la tercera actividad"

E16:

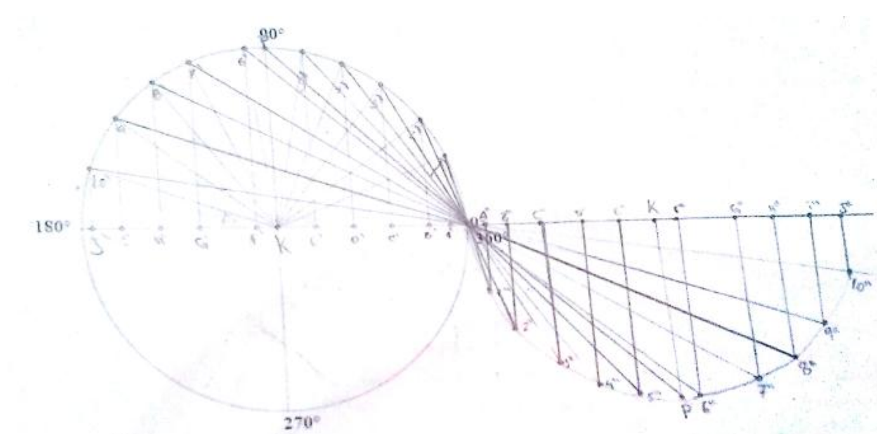


Ilustración XV " Trabajo realizado por *E16* en la tercera actividad"

Con respecto a la cuarta actividad

¿Qué curva se forma al unir todos los vértices que pertenecen a la circunferencia en el caso anterior?

Con respecto a esta actividad las estudiantes lograron describir la curva resultante, mencionando algunas características de estas, como por ejemplo que tiene forma de "s", que es una curva simétrica y que se acerca a una curva periódica. (Ver anexo 4)

Protocolo de la puesta en común de la Situación 2

Una vez terminado el trabajo individual, tiene lugar la puesta en común.

Profesor: Alguna de ustedes, Tamara, Pía, Constanza, Valentina, entrego algunas características de la curva resultante, como son la doble concavidad, la forma de "s", oscilaciones, periodos, entre otras, pero ¿Pueden explicar de dónde se obtienen todas esas características?

Después de un silencio una estudiante en particular entrega una respuesta:

Constanza: debe ser de la circunferencia trigonométrica porque se obtiene al separar el contorno de la circunferencia y unirlo en un punto en particular.

Profesor: Haber Tamara ¿podrías complementar la respuesta de tu compañera?

Tamara: se refiere a que al ser curvas simétricas la parte de arriba se refleja en torno a un punto con la parte de abajo, en este caso el punto de la circunferencia que marca el 0 °

Profesor: ¿Cómo se llama esa simetría?

Una estudiante responde

Estudiante 6: central

Profesor: ¿están de acuerdo?...

Estudiantes: (a coro) si.

Profesor: ¿A que se refieren cuando mencionan período?

Valentina: lo que pasa profesor es que en Física trabajamos ondas con sus propiedades y la curva que nos resulto representa un periodo, por eso es una curva periódica.

Profesor: entonces ¿Dos periodos que significa?

Pía: que la circunferencia dio dos vueltas

Profesor: ¿la circunferencia?

Ocurre un silencio

Constanza: Profesor es el ángulo del centro, 360° es un período

Profesor: entonces dos periodos

Una estudiante responde

Estudiante 8: 720 grados

Profesor: que pasa si el ángulo del centro da "n" vueltas

A coro todas las estudiantes

Estudiantes: tenemos "n" periodos

Profesor: muy bien, un periodo son 360° y "n" períodos serian 360° multiplicado por "n" vueltas a la circunferencia.

CAPÍTULO VI CONFRONTACIÓN DE LOS ANÁLISIS A PRIORI Y A POSTERIORI

	Actividad	A priori	A posteriori	Comentarios
Situación I	1. ¿Qué figura resulta al construir sucesivamente distintos triangulos rectangulos OAB en el plano cartesiano de modo que tengan un vertice en el origen los catetos OA en el eje x y las hipotenusas OB de igual longitud?	Suponemos que en esta actividad que solicita construcciones no presentará demasiadas dificultades ya que las instrucciones dadas son precisas y al alcance de las estudiantes. Y por otra parte las estudiantes tienen familiaridad con las construcciones geométricas y la utilización de instrumentos, por lo que se les facilitara la construcción de los triángulos rectángulos	En la construcción geométrica de la circunferencia trigonométrica no hubo problema, como se supuso en los análisis a priori; el 100% de las estudiantes logró la construcción exacta, además de mencionar que se trataba de una circunferencia, además de mencionar que las estudiantes trabajaron de manera autónoma	En términos generales la situación didáctica fue bastante productiva, ya que se logro el objetivo de la actividad que era construir la circunferencia trigonométrica y conocer además las propiedades de la misma. En la fase de institucionalización, se aclaran las dificultades que se encontraron en las respuestas de las estudiantes en la actividad 2 y 3, el profesor precisa el concepto de circunferencia trigonométrica y el rol del ángulo del centro en la generación de la misma.
	2. ¿De que manera varian los catetos OA y AB en el primer cuadrante y de que depemde el cambio?	Esta actividad requiere de la construcción anterior y de la visualización de variaciones de los catetos para detectar las dependencias, suponemos que pueden haber dificultades en encontrar la dependencia. Las estudiantes podrían suponer que la variación de los catetos es proporcional, además se podría suponer que no asociaran el cambio de los catetos con el ángulo AOB.	Ocurrió lo esperado, un grupo de estudiantes dejo en evidencia que existía proporcionalidad inversa en la variación de los catetos, debido a que verificaban que un cateto aumentaba y el otro disminuía, pero en estas respuestas no hubo justificación matemática. Otro grupo mostro en sus respuestas que la variación dependía de la posición de la hipotenusa en el plano, pero ninguna de las respuestas señala que dicha posición dependía del	

			ángulo del centro.	
	3.En los cuadrantes 3 y 4 : ¿Qué ocurre con los catetos OA y AB? Justifique su respuesta	La dificultad podría ser que las estudiantes continúen visualizando variaciones proporcionales de los catetos. Y por otro lado no visualizar las simetrías ni la variación del ángulo de vértice O.	Un grupo de estudiantes señala la existencia de simetría en los cuadrantes 3 y 4 con los catetos OA y AB. La hipótesis planteada en los análisis a priori con respecto a las simetrías se rechaza ya que ellas visualizaron la existencia de estas. Otro grupo de estudiantes remarca la existencia de variación proporcional inversa, como consecuencia de las respuestas obtenidas en la actividad 2.	
	Actividad	**A priori**	**A posteriori**	**Comentarios**
Situación II	1. Entre los triángulos dibujados ¿existen triángulos simétricos? Justifica tu respuesta	Pensamos que la pregunta no presentará dificultades ya que se presento una imagen de la circunferencia trigonométrica con los triángulos en su interior. Las estudiantes por visualización deberían reconocer si existen triángulos simétricos y luego justificarlas; disponen de instrumentos que pueden facilitar la comprobación de distancias entre puntos y el eje de las ordenadas.	Las respuestas dejaron en evidencia que existe en las estudiantes dos conceptos de simetría una cultural que carece de justificación por propiedades y otra matemática en la cual algunas de las respuestas remarcan la presencia de propiedades como distancias y longitudes de catetos. Esto no impidió que se cumpliera el objetivo de la actividad que era reconocer los triángulos simétricos tanto en el primer como en el segundo cuadrante.	El diseño de la secuencia didáctica como tal, funcionó bien las estudiantes entendieron las consignas sin ningún problema, al momento de explorar las figuras no surgió inconveniente y los resultados de esta aplicación fueron positivos. También podemos decir que la aplicación de esta situación didáctica es muy positiva debido a que las estudiantes estuvieron siempre a la expectativa de lo que pasaba, las estrategias de las estudiantes fueron en su mayoría las que se esperaban en el análisis *a priori* y por último la manifestación por parte de ellas al interés de otras actividades como esta.

	2. Que curva se forma al unir los vértices B del segundo al primer cuadrante	Mediante la visualización de la figura las estudiantes podrían llegar a la respuesta.	Como fue previsto el 100% de las estudiantes logro responder la pregunta.	
	3. Realiza una simetría central o puntual en torno al punto de la circunferencia que marca los 0°, de los triángulos del primer cuadrante y del segundo cuadrante respectivamente	La dificultad podría presentarse por el desconocimiento u olvido del significado de simetría central y sus propiedades, cuestiones necesarias para resolver la tarea.	Las respuestas obtenidas dejaron en evidencia que la construcción es posible aplicando criterios de simetría central; las estudiantes obtuvieron la curva logrando el objetivo y de acuerdo a nuestra hipótesis.	
	4. ¿Qué curva se forma al unir todos los vértices que pertenecen a la circunferencia en el caso anterior	Se podría prever que la visualización ayudaría a describir una curva de tipo periódica formada por dos semicircunferencias simétricas. Además les permitiría señalar algunas características de las curvas: forma de "s", forma de onda, lo periódico.	Todas las respuestas obtenidas lograron entregar algunas características de la curva, su forma de "s", una doble concavidad, y de acuerdo con los análisis a priori lograron identificar, el periodo, valles. En la fase de institucionalización el profesor le puso nombre a la curva y la identifico como la representación gráfica de la función seno, además dio la representación algebraica f(x)=seno(x). Con la ayuda de Geogebra presento la función coseno como la función inversa de la función seno.	

CAPÍTULO VII

SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN:

A partir de la recolección de los escritos de las estudiantes y de las opiniones vertidas entre ellas se genera una prolongación de las situaciones, en una secuencia de tres clases.

Profesor: Recordemos lo que dijo Romina

"según lo que entiendo es que lo importante es la variación de los catetos y eso ocurre a medida que el ángulo del centro va cambiando ya que la hipotenusa es una constante y no importa su tamaño"

Centrémonos ahora en la circunferencia trigonométrica:

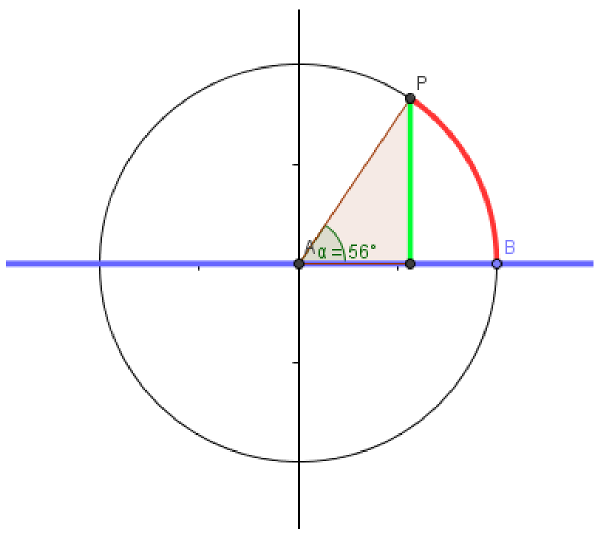


Ilustración en Geogebra "Circunferencia trigonométrica"

Observemos que cuando el ángulo cambia cambian los catetos, pero los catetos son las coordenadas del punto P.

Fijarse que la ordenada de P describe la curva sinusoidal que ustedes construyeron. Esta curva matemáticamente es la ***representación gráfica de una función que se llama seno*** *y que asocia la medida del ángulo anotada x a la ordenada del punto P.*

Hasta aquí hemos trabajado en el registro gráfico, encontrando la representación gráfica de la función seno.

Ahora Vamos a estudiar esta función en el registro simbólico algebraico, interpretando los resultados encontrados gráficamente en forma algebraica. .

LA FUNCIÓN SENO EN EL REGISTRO SIMBÓLICO ALGEBRAICO.

Simbólicamente la función seno asocia a un valor de x la imagen, se anota $x \Rightarrow y$ *, donde x es un número que representa una medida de ángulo, la medida de la ordenada y es otro número que en término de funciones se dice que* ***y es la imágen de x por la función seno, lo que se anota y = sen (x). O simplemente y = senx***

Como x e y son las coordenadas de un punto P cualquiera, son nùmeros reales., lo que significa que y = sen x es un número. Podemos dar significado a las siguientes expresiones:

f(x)=2sen x ; g(x)=senox+3. h(x) = sen^2x*, etc.*

Todas estas expresiones representan funciones a las que se les puede encontrar su representación gráfica (tarea).

Veamos algunos valores particulares de la función seno (lo que se puede ver en la curva construida en la situación II y en la circunferencia trigonométrica dibujada anteriormente)

Si x=0, entonces sen(0)=0,

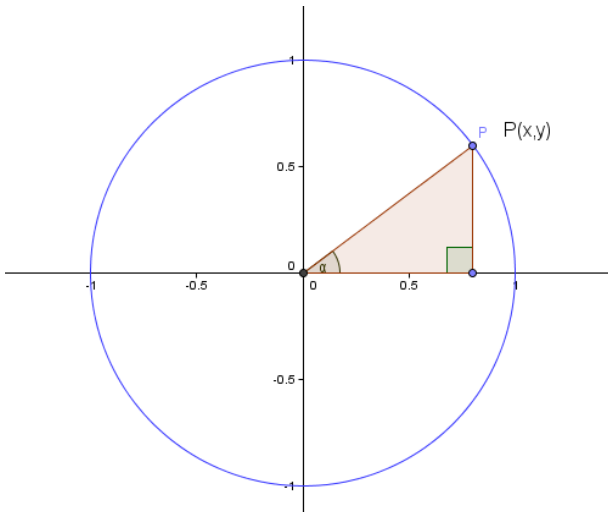
Si x= $\frac{\pi}{2}$ *entonces sen (* $\frac{\pi}{2}$ *) = 1*

Si x= π *, entonces sen(* π *)=0,* *Si x=* $\frac{3\pi}{2}$ *, entonces sen(*$\frac{3\pi}{2}$*)=-1,*

Si x= 2π *, entonces sen(*2π*)=0*

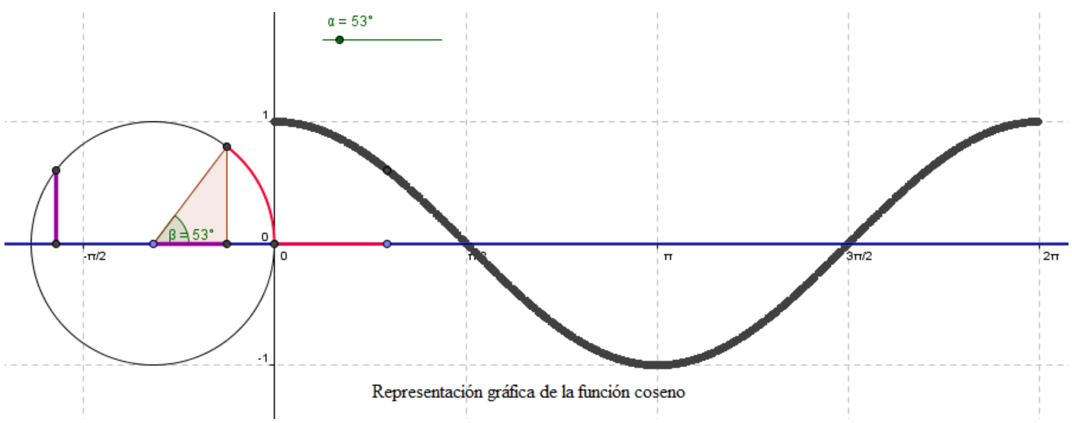
FUNCIÓN COSENO.

La representación gráfica de la función coseno se puede visualizar por la variación de la medida del ángulo del centro y la variación simultanea de la medida de la abscisa del punto P. (Ambos son números reales).



La variación de la abscisa es la que describe la función coseno cuando varia simultáneamente con el ángulo del centro.

La representación gráfica de la función coseno es la siguiente:



Representación gráfica de la función coseno

Interpretación algebraica del la función coseno

La función coseno asocia a cada x, la abscisa del punto P, que en términos de funciones se llama pre-imágen, se anota cos x.

$$x \Rightarrow \cos(x)$$

Simbólicamente se escribe: f(x)=cos x.

Como el cos x es un número real podemos dar significado a las expresiones:

g(x)=2cos(x); h(x)=cos(x)-3, i(x)= $\cos^2(x)+1$

Algunos valores de la función coseno son:

Si x=0, entonces cos(0)=1;

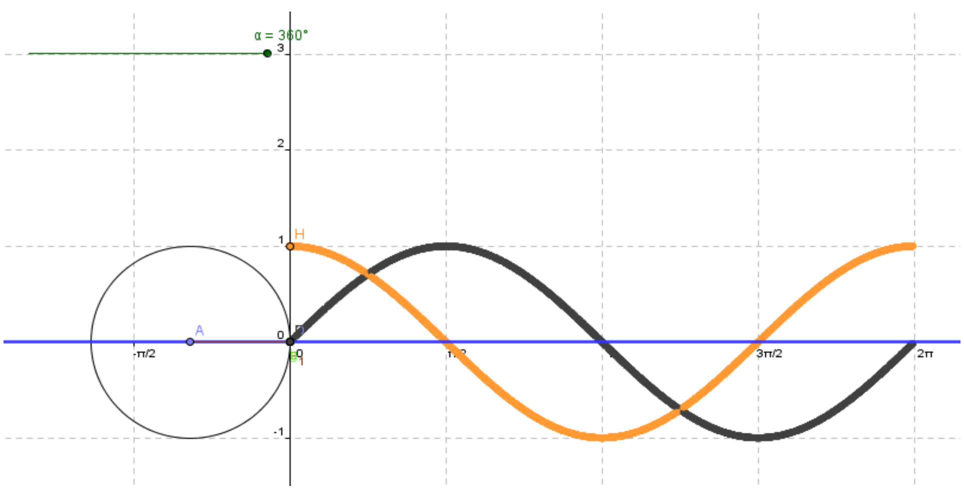
Si x= $\frac{\pi}{2}$*, entonces cos(* $\frac{\pi}{2}$ *)=0;*

Si x= π *, entonces cos(* π *)=-1,*

Si x= $\frac{3\pi}{2}$ *, entonces cos(* $\frac{3\pi}{2}$ *)=0,*

Si x= 2π *, entonces cos(* 2π *)=1*

Las representaciones gráficas de las funciones seno y coseno



En este gráfico podemos notar lo siguiente:

Para la función seno:

Cuando x es $\frac{\pi}{2}$ *la imagen de sen x es 1*

Cuando x = $\frac{3\pi}{2}$ *senx = -1*

Cuando x=0 sen 0=0

Cuando x= π *sen* π *=0*

Para la función coseno:

Si x = 0 , la imagen cos x = 1

x= 2π *, cos x = 1*

x= π *cos x = -1*

Podemos visualizar también que la función coseno es periódica de periodo 2 π *tal como la función seno Además podemos notar que tanto la función seno vista en la situación II en la construcción de la curva.*

Dominio y Recorrido de la Funciones Seno y coseno.

El dominio es el conjunto de definición que está representado por todos los valores de x. Esto significa que la función seno está definifa en todos los números reales.

En cambio las imágenes sen x, están defindas en un subconjunto de R, o intervalo que se anota [-1, 1]. (Constatar en la repesentación gráfica de la función seno que se ha construido).

El dominio de la función coseno también está definido en todos los números reales.

Las imágenes cos x, están definida en un subconjunto de R, o intervalo que se anota [-1, 1]. (Constatarlo en la representación gráfica de la función coseno)

Propiedades de paridad e imparidad

Definiciones:

Se dice que una función f es impar cuando f(x)= - f (- x), en la representación gráfica de f se puede constatar que f es simétrica con respecto al origen.

Se dice que una función f es par cuando f(x) = f(-x).

Ahora constatemos que la función seno es impar, ya que su representación gráfica vimos que es simétrica con respecto al origen.

Algebraicamente tenemos para algunos valores particulares:

$sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *(imágenes simétricas con respecto al origen)*

Otras imágenes simétricas son

$Sen(\pi) = -\,sen(0)$

$Sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\,sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

Otras funciones trigonométricas que resultan operando las imágenes sen x y cos x

Función tangente

Como las ambas funciones están definidas en los números reales, se pueden operar, por ejemplo si dividimos sus imágenes damos origen a la función tangente.

$\frac{senx}{\cos x} = \tan x$; $\frac{\cos x}{senx} = \cot an\ x$; $\frac{1}{\cos x} = \sec x$; $\frac{1}{sen\,x} = \cos ec\,x$

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES

Esta investigación nace de idea de romper con la enseñanza tradicional de las funciones trigonométricas, la experiencia me había mostrado la dificultad de los alumnos con la comprensión de ellas. Planteada esta inquietud a mi profesora Guía nos pusimos en posición de alumnos y surgieron las preguntas ¿Qué es el seno de x? Y ¿Qué es el coseno de x? ¿Por qué se llaman así? La primera tarea entonces fue investigar esto, lo que me llevó a realizar un estudio histórico epistemológico realizado, encontrando que gracias a la astronomía es que nacen estas funciones donde el triangulo rectángulo juega un rol en el origen de la función seno como herramienta para calcular distancia.

Este hallazgo nos llevo a elaborar situaciones didácticas a partir del movimiento de un triángulo rectángulo en el plano cartesiano donde la circunferencia trigonométrica jugaba también un rol fundamental.

Las tareas en las cuales se enfocaron las situaciones se basaban en construir objetos matemáticos. La primera tarea fue la construcción de la circunferencia trigonométrica en base a triángulos rectángulos, y que a partir de la representación gráfica de ésta las estudiantes visualizaran la variación del ángulo del centro que daba origen a la circunferencia, junto con el desplazamiento de uno de los vértices en torno a la circunferencia.

Con la ayuda de sus construcciones y un procesador geométrico como Geogebra se logra comprender la definición de circunferencia trigonométrica y mostrar además el trabajo realizado por las estudiantes con regla y compas.

La segunda tarea consistía en construir con la circunferencia trigonométrica de la primera tarea la función seno, aplicando simetrías centrales a los triángulos rectángulos de la primera tarea. Las estudiantes a partir de un trabajo individual y con la ayuda de sus instrumentos de construcción (regla, compás y transportador) realizan la tarea siguiendo las instrucciones entregada por escrito por el profesor.

El trabajo grupal a partir de la discusión de resultados entregada por cada grupo y con la ayuda de la mediación del profesor se logra analizar el comportamiento de la curva resultante que se denominó función seno.

Gracias a las situaciones generadas es posible dar una prolongación al trabajo donde cada elemento estático que tienen las funciones trigonométricas seno y coseno cobran sentido, las estudiantes visualizan las representaciones graficas de las funciones que el profesor muestra gracias a Geogebra y las propiedades de periodicidad, dominio y recorrido son definidas, se muestran características de paridad e imparidad de las funciones según sea la función, se verifica que la función seno es impar ya que se genera a partir de una simetría central con respecto al origen y que la función coseno es par ya que es una curva simétrica al eje de las ordenadas.

Las estudiantes al comprobar que las funciones seno y coseno son números reales, ya que en la institucionalización del concepto se comprobó, se les solicita que generen otras funciones trigonométricas a partir de las distintas operaciones como son la tangente, secante y cosecante.

Nuestra pregunta de investigación ¿Enfocar la enseñanza de las funciones trigonométricas a través de problemas contextualizados a través de actividades de construcción y de visualización ayudaría a los estudiantes a lograr un aprendizaje significativo sobre las representaciones gráficas de las funciones seno y coseno?

Hemos elegido el registro gráfico como medio didáctico para contextualizar la propuesta de enseñanza, puesto a través de conocimientos matemáticos adquiridos ellos favorecen los procesos de construcción y visualización. Posteriormente la posibilidad de que se articulen con el registro algebraico y simbólico favorecerá la comprensión y por lo tanto el aprendizaje significativo de las funciones seno y coseno.

Según la TSD, nuestro marco teórico de apoyo, el sujeto aprende adaptándose a un medio donde puede explorar libremente las situaciones a las que se le enfrenta, el medio elegido lo desafía y le permite al interacciones con este, poniendo práctica sus conocimientos para construir respuestas que tengan sentido.

Por otra parte, el uso de software Geogebra como herramientas de construcción ha permitido el dialogo bidireccional entre la práctica y la teoría. De esta forma el estudiante se ha encontrado con los objetos matemáticos (teóricos) a través de lo que él mismo ha realizado y así apropiarse del conocimiento asociado. .

Cabe resaltar que el resultado que se ha obtenido con nuestra secuencia, está ligado a la importancia del marco teórico de base para diseñar la propuesta y el dispositivo experimental que ha permitido el trabajo autónomo de las alumnas.

La dimensión epistemológica nos ha permitido situar la enseñanza de las funciones seno y coseno de modo que cobraran un sentido y un significado a través del registro gráfico como medio de aprendizaje y el dispositivo experimental elegido.

La dimensión cognitiva estuvo ligada a las actividades geométricas, de construcción de visualización, ellas han exigido poner en juego los conocimientos matemáticos disponibles para responder a lo solicitado.

La dimensión didáctica ha sido considerada en la estructura de la clase que ha contemplado el trabajo individual, en grupos para comparar y acordar respuestas, que en las puestas en común se discutían y se ponían a prueba.

La metodología de enseñanza utilizada ha evidenciado una perspectiva diferente para enseñar las funciones trigonométricas a partir de actividades geométricas que pusieron en prácticas conocimientos sobre el triángulo rectángulos, la simetría central entre otros, para encontrar la curva sinusoidal. Aquí a través de una institucionalización parcial se le llamó la representación gráfica de la función seno.

De esta manera cobró sentido y significado para las alumnas involucradas en la experiencia, el objeto matemático, función seno con su propiedad de periodicidad. Análogamente cobró sentido la función coseno.

Finalmente una situación de institucionalización en el registro algebraico simbólico ha presentado las expresiones simbólicas de las funciones seno y coseno dándole sentido a la expresión $f(x) = \text{sen } x$, donde x es un número real. Se han analizado sus propiedades.

Y por el hecho de reconocer que sen x y cos x son números reales, se encuentran las otras funciones trigonométricas.

Esta propuesta de enseñanza ha sido un cambio positivo, que claramente ha ayudado al proceso de aprendizaje de este objeto matemático, superando las dificultades de comprensión que se encuentran con frecuencia con las propuestas tradicionalmente expositivas en que se presentan las funciones trigonométricas.

En términos generales la propuesta buscó romper con el tratamiento típico expositivo de la función trigonométrica poniendo en práctica las actividades geométricas que ponen en juego a su vez actividades cognitivas de visualización y de construcción las que favorecen el sentido y significado del objeto matemático focalizado.

CAPÍTULO IX

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1992). *Didactic Engineering*. Recherches en Didactique des Mathématiques (Selected Papers, pp. 41-66).

Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica*. En Pedro Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). *Ingeniería didáctica*. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Colombia. Una empresa docente.

Artigue, M. (2011). *L'ingénierie didactique: un essai de synthèse*. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 225-237). Grenoble: La penséesauvage.

Baldor. A. (1994). *Geometría plana y del espacio y trigonometría*, Ed, Publicaciones cultural. S. A. México.

Boyer C. (1989). *A history of mathematics*. New York: Wiley.

Brousseau G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática.* Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau G. (1994). *Los diferentes roles del maestro en Didáctica de Matemáticas*. Aportes y reflexiones, C. Parra; I. Saiz (comp.) Buenos Aires, Paidós Educador.

Brousseau G. (1995). *Glossaire de didactique des mathématiques*, en Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE, Copirelem, IREM d'Aquitaine & LADIST.

Brousseau G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques, Grenoble, La Pensée Sauvage*.

Brousseau G. (1999). *"Educación y Didáctica de las matemáticas"*, en Educación Matemática, México.

Brousseau, G. (2007). I*niciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, 1 edición, buenos aires: Libro de zorzal.

Cavey, L., Berenson, S. (2005). *Learning to teach high school mathematic: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study*. Journal of Mathematical Behavior 24(2), 171 – 190.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. AIQUE, Argentina.

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). *La comprensión des notions de sinus et de cosinus chez des éléves du secondaire*. For The Learning of Mathemathics 16(2), 19 – 22.

Douady, R. (1996). *Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde.* En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Gálvez, G. (1994): *La didáctica de las matemáticas, en Didáctica de Matemáticas.* Aportes y reflexiones., C. Parra, I. Saiz (comp.), Buenos Aires, Paidós Educador.

García, R.(2000): *El conocimiento en construcción,* Barcelona, Gedisa Editorial.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica.* Tesis de maestria no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Margolinas C. (1993): De *l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Montiel. G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada del IPN. México.

Perrin Glorian. M. (2009). *Utilidad de la teoría de las situaciones didácticas para incluir los fenómenos vinculados a la enseñanza de las matemáticas en las clases normales*. En: Revista Internacional Magisterio. No. 39. Junio - Julio. 2009.

Perrin Glorian. M. (2011). *L"ingénierie didactique à l"interface de la recherche avec l"enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants*. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble: La penséesauvage.

Salcedo. G. (2012). *Elementos básicos de la trigonometría desde el paso de la razón trigonométrica a la función trigonométrica.* Universidad Nacional de Colombia. Facultad de ciencias. Departamento de Matemática. Bogotá, D.C.

Santacruz, M. (2009). *Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en educación primaria.* Tesis de maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

ANEXOS

Anexo 1

Categoría 1. : Variación inversamente proporcional (respuestas equivocada)

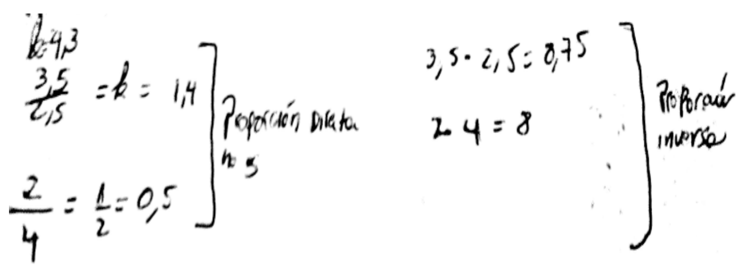
Estudiantes	Respuestas
E4	*Varían pero de forma proporcional ya que la hipotenusa OB y el ángulo recto se mantienen en todos los triángulos construidos.*
E8	*Van variando de tamaño porque cada vez se hacen más pequeños, esto depende del ángulo*  *Es proporción inversa porque la constante es parecida.*
E10	*El cateto OA varía según el desplazamiento que se realiza y varía en su longitud y el cateto AB sólo varía en su posición y en su longitud siendo paralelas al resto, son inversamente proporcionales.*
E11	*El cateto OA y AB varían dependiendo del movimiento de desplazamiento de su hipotenusa.* *Son inversamente proporcionales porque se mantiene la longitud de la hipotenusa en base al origen y su mismo ángulo, sus catetos se proporcionan con respecto a la hipotenusa, su radio siempre es el mismo y su ángulo varía.*
E12	*Varían de manera inversamente proporcional ya que si OA aumenta AB disminuye, se mantiene la longitud de la hipotenusa y el ángulo de 90°.*
E14	*Varían de forma proporcional en sus longitudes para lograr mantener la longitud de la hipotenusa depende del vértice fijo en el centro y la constante de la hipotenusa.*

Tabla 1: Respuesta de un grupo de estudiantes de la actividad 2

Comentario:

Estas estudiantes sostienen que la variación es inversamente proporcional, haciendo alusión a que mientras un cateto aumenta el otro disminuye.

E8 en particular hace dos tipos de cálculos, tratando de encontrar propiedades de proporcionalidad, ignora sus cálculos de la izquierda y se queda con aquellos de la derecha, concluyendo que la proporción es inversa ya que sus resultados son aproximados.

Categoría 2 : Dependencia de la variación según la hipotenusa, su tamaño o posición

Estudiantes	Respuestas
E2	*Los cambios dependen de los puntos en los cuales se realiza en la hipotenusa, ésta será igual para todos los triángulos pero los catetos tendrán la misma medida.*
E5	*Varían en su medida, aumentando o disminuyendo a medida que se avanza en el plano cartesiano, específicamente en el eje x, todo esto dependiendo de lo que mida la hipotenusa de los triángulos sucesivos y del punto o en el origen (vértice).*
E6	*Los catetos OA y AB varían según donde vaya dirigida la hipotenusa, acortando en algunas ocasiones o alargando las longitudes de los distintos catetos.*
E9	*Varían en sus medidas aumentando o disminuyendo a medida que avanza en el plano cartesiano, todo esto dependiendo de lo que mida la hipotenusa de los triángulos.*
E13	*Varían sus longitudes y posición para mantener el largo de la hipotenusa.* *Depende del punto fijo del vértice en el origen y del largo de la hipotenusa.* *No se puede determinar cte. de proporcionalidad al medir catetos y proceder a multiplicar o dividir según proporción.*
E15	*Varían respecto a sus medidas y ubicación en el cuadrante, depende del vértice y del largo de la hipotenusa.*
E3	*Los catetos OA van aumentando o disminuyendo su longitud de acuerdo a la ubicación del vértice B en el plano. El cateto AB también aumenta y disminuye su longitud.*

Tabla 2: Respuestas de un segundo grupo de estudiantes a la actividad 2

Comentarios	Las respuestas tienen en común que la variación depende del tamaño de la hipotenusa, o de la posición que tome ésta en el plano cartesiano. Existe algún tipo de imprecisión en las respuestas ya que al mencionar la posición que toma la hipotenusa en el plano tiene que ver con el ángulo del centro de la circunferencia el que no consideran. Por ejemplo *E3* menciona a la ubicación del vértice B pero no especifica que dicha posición depende del ángulo del centro AOB.

Estudiantes	Respuestas
E6	*Cuando el cateto OA aumenta su longitud, el cateto AB disminuye sus medidas, por el contrario si disminuye el segundo cateto aumenta. Esto se debe a las variaciones del ángulo que se forma entre la hipotenusa y el eje de las abscisas. Por ejemplo si la recta de la hipotenusa se acerca al ángulo llano, es decir al eje x, los catetos varían de forma en que OA aumenta y AB disminuye, respetando siempre la longitud del lado OB que es además de la hipotenusa el radio de la circunferencia*

	graficada.
	Tabla 3: Respuesta correcta de una estudiante a la actividad 2
Comentarios	Esta respuesta es bastante completa menciona la variación que depende del ángulo del centro y como varían los catetos sin decir que esto ocurre de manera proporcional.

Anexo 2

Categoría 1 Respuestas basadas en simetrías y variaciones proporcionales. (Respuestas precisas)

Estudiantes	Respuestas
E3	*Varían proporcionalmente, el cuadrante I es simétrico con el cuadrante IV.*
E6	*Ocurre que los catetos OA y AB son los reflejos de los catetos originados en el primer cuadrante en donde sufren las mismas variaciones mencionadas anteriormente, es decir, si OA aumenta, AB disminuye, según las variaciones formadas entre la hipotenusa y el eje x.*
E7	*En los catetos OA y AB quedan en forma invertida en comparación a los triángulos del primer cuadrante.*
E9	*Ocurre lo mismo que en el primer cuadrante, ya que en el segundo se hizo una reflexión con respecto al eje "y", en el tercer cuadrante se hizo una reflexión con respecto al origen y lo mismo en el cuarto cuadrante.*
E11	*El cateto OA cambia su longitud ya que algunos vértices A están más cerca del origen y otros más lejanos manteniendo el vértice O en el origen y los catetos AB varían en su longitud y se reflejan en el cuadrante III y IV con los cuadrantes I y II.*
E12	*Los catetos OA y AB en los otros cuadrantes, se dice que son simétricos a los catetos del primer cuadrante*
E13	*Que la figura que se forma en los cuadrantes son simétricos*
E14	*Varían de igual manera que en el primer cuadrante, ya que el II cuadrante es una reflexión respecto al eje "y" y el III del II y el III del IV.*
E15	*Varían de igual manera y son simétricos.*

Tabla 4: Respuestas de un grupo de estudiantes a la tercera actividad

Comentarios	Estas respuestas dejan en evidencia el concepto de simetría, gran parte de ellas mencionan que los triángulos son simétricos con respecto a algún eje o al origen. *E3* mantiene en su respuesta la proporcionalidad como variación principal de los catetos. Son respuestas bastante precisas según lo que se pretende.

	E6 señala en su respuesta que la variación de los catetos depende del ángulo

Categoría 2: Respuestas basadas en variaciones inversamente proporcionales. (Respuestas equivocadas)

Estudiantes	Respuestas
E2	*Serán distintos en la mayoría de los triángulos ya que la hipotenusa podrá tener la misma longitud pero no estará ubicada siempre en los mismos puntos del plano cartesiano.*
E4	*También varían de manera proporcional, dependiendo del ángulo que forma el cateto OA y la hipotenusa OB.* *Inversamente proporcional.*
E5	*E5: Ocurre lo mismo que en el primer cuadrante, el cateto OA y AB aumentan o disminuyen a medida que avanzan en el plano cartesiano.*
E8	*Van disminuyendo y aumentando mientras que uno va haciendo los triángulos a la mitad de cada cuadrante y tiene una proporción inversa.*
E10	*Ocurre lo mismo que en el primer cuadrante el cateto OA y AB aumentan o disminuyen.*
E16	*E16: Van disminuyendo y aumentando mientras que uno va haciendo triángulos a la mitad de cada cuadrante y tiene una proporción inversa.*

Tabla 5: Respuestas de un segundo grupo de estudiantes a la tercera actividad

Comentarios	Como ya se evidencio en la primera actividad estas respuestas muestran que la variación que ocurre en todos los cuadrantes es una proporción inversa, claramente son respuestas erróneas ya que tampoco dan indicios del concepto de simetría que es el propósito de la actividad

Anexo 3

Categoría 1 : Respuestas referidas a la existencia de simetría (conocimiento cultural más que matemático)

Estudiantes	Respuestas
E1	*Si existen algunos triángulos simétricos entre el primer y segundo cuadrante, como los primeros cuatro triángulos.*
E2	*Si porque algunos triángulos del cuadrante I son el reflejo del cuadrante II.*

E10	*Si son simétricos al eje y*
E11	*Son triángulos simétricos al eje y*
E12	*Si, son simétricos al eje y*
E13	*Si existen algunos triángulo simétricos ya que al realizar la reflexión con respecto al eje y se obtienen algunos reflejos.*
E14	*Si hay ciertos triángulos simétricos axialmente debido a que conservan sus distancias.*
E15	*Si son simétricos con respecto al eje y, pero no todos.*
E3	*Si, ya que los triángulos del primer del primer cuadrante son reflejo al eje y del segundo cuadrante.*
	Tabla 6: Respuesta de estudiantes a la primera actividad de la situación 2
Comentarios	Las respuestas dejan evidencia que las estudiantes reconocen que existe una simetría pero no logran diferenciar cuales son los triángulos simétricos, ya que estudiantes como *E1, E2, E13, E14 y E15*, mencionan que no todos lo son. Podríamos señalar que el concepto de simetría que manejan puede ser cultural más que matemático ya que no se evidencian propiedades o algún trabajo previo para comprobar simetría.

Categoría 2: Existencia de simetría matemática más que cultural

Estudiantes	Respuestas
E4	*El triángulo 2 y 9 son simétricos entre sí al igual que los triángulos 3 y 8.*
E5	*(sigue la misma enumeración que E4) de los diez triángulos graficados, seis son simétricos entre ellos los pares de triángulos 2 y 9, 3 y 8, 4 y 7, ya que cumplen una simetría axial con respecto al eje y.*
E6	*(La estudiante mide uno de los catetos y sigue la enumeración de E4 y E5) si, ya que unos son el reflejo de otros a su posición en el primer y segundo cuadrante. Son simétricos 2-9, 3-8, 4-7*
E7	*(siguiendo con la misma enumeración anterior) Los triángulos que son simétricos son 2 y 9, 3 y 8, 4 y 7, ya que mantienen sus distancias*
E8	*(Presenta una numeración como E3) el reflejo de los triángulos 1 y 5 no son simétricos ya que poseen medidas diferentes, en cambio los triángulos 2, 3, 4 son simétricos sus reflejos porque presentan las mismas medidas.*
E9	*(Muestra la enumeración de E4) el triángulo 2 y 9 son simétricos entre sí al igual que los triángulos 3 y 8*

E16	*(enumera como E4) los triángulos que son simétricos 2 con 9, 3 con 8, 4 con 7, porque tienen las mismas distancias*

Tabla 7: Respuestas de las estudiantes a la primera actividad de la situación 2

Comentarios	Las respuestas dejan en evidencia que este grupo de estudiantes tiene un concepto más matemático sobre la simetría ya que logran identificar aquellos triángulos simétricos, se menciona el tipo de simetría y algunas propiedades como las distancias y medidas de lados, este grupo se caracterizo por recurrir a técnicas de enumeración y de medición como se muestra en las siguientes imágenes:

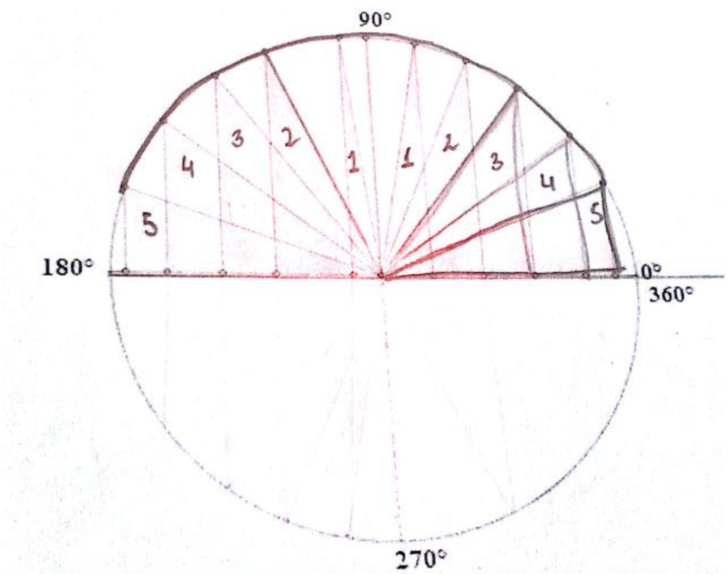


Ilustración II "Trabajo realizado por *E3* en la primera actividad de la situación 2"

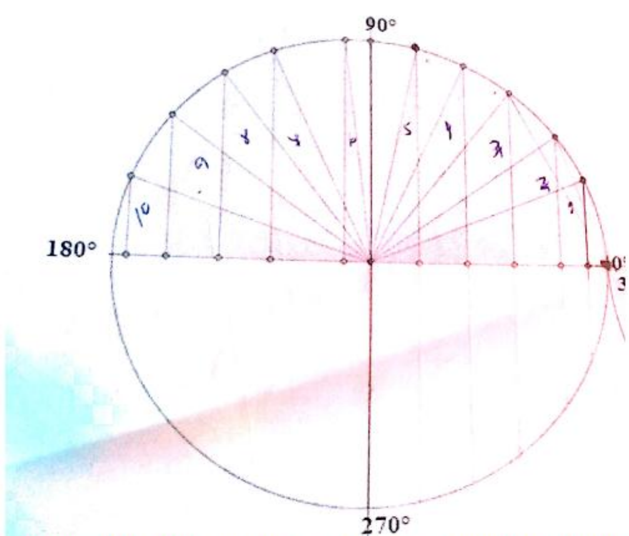


Ilustración III " Trabajo realizado por *E4* a la primera actividad de la situación 2"

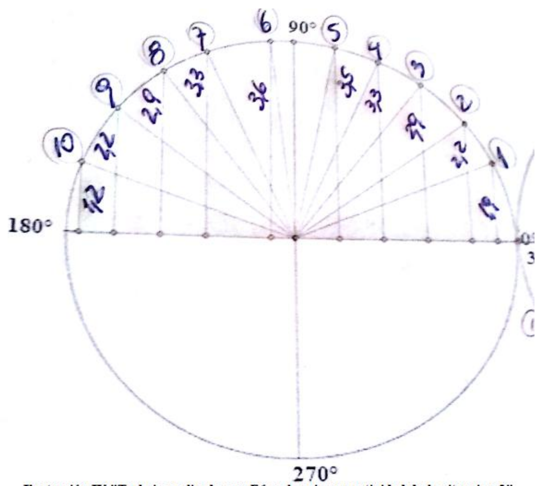


Ilustración IV "Trabajo realizado por *E6* en la primera actividad de la situacion 2"

Anexo 4

Categoría 1: características como, su forma, concavidad y existencia de perímetro

Estudiantes	Respuestas
E1	*Una curva en forma de "s", la curva se va creando a medida que el ángulo de la circunferencia se va completando.*
E4	*La curva tiene forma de "s", es simétrico y presenta una forma invertida de la primera semicircunferencia.*
E9	*La curva tiene una forma de "s", es simétrica y presenta una forma invertida de la primera semicircunferencia.*
E12	*Forma de "s", con doble concavidad que genera una oscilación que tiene un período.*
E13	*Se forma una "s", se va formando según va variando el ángulo del triángulo (vértice O), es el perímetro de la circunferencia, genera curvas simétricas de doble concavidad.*
E14	*Es en forma de "s", doble concavidad, son simétricas, se hace de una traslación y una reflexión, es el perímetro de la circunferencia.*

	Tabla 8: Respuestas a la cuarta actividad de la situación 2
Comentarios	Las estudiantes mencionan que la curva tiene una forma de “s”, se menciona además que la curva es simétrica. *E13 y E14* señalan que la curva presenta una doble concavidad y simétrica entre sí, respuesta que ayudara en la puesta en común más adelante. Además señalan que la curva se forma a partir del perímetro de la circunferencia.

Categoría 2: Características propias de las ondas y existencia de perímetro

Estudiantes	Respuestas
E5	*Se forma una curva de doble concavidad, que es el perímetro de la circunferencia, ya que a medida que se completa el ángulo de la circunferencia se forma la curva. Se forma una oscilación.*
E7	*Las curvas son simétricas, se traslada y se invierte, se forma una curva periódica, se forma una curva de doble concavidad.*
E11	*Son simétricas, doble concavidad, una oscilación, período, valle, curvas periódicas, depende de vueltas que de la circunferencia.*
E16	*Las curvas son simétricas, se trasladan y se invierte, se forma una curva de doble concavidad, se forma una función periódica.*
Comentarios	Estas respuestas mencionan algunas características propias de las ondas como son oscilación, período, valle, nuevamente se señalan las curvas simétricas, respuestas como las de *E5*, *E11*, mencionan que las curvas que se forman dependen de las vueltas que se dé en la circunferencia o del perímetro de la misma.

Anexo 5

Imágenes de las representaciones seno y coseno con Geogebra

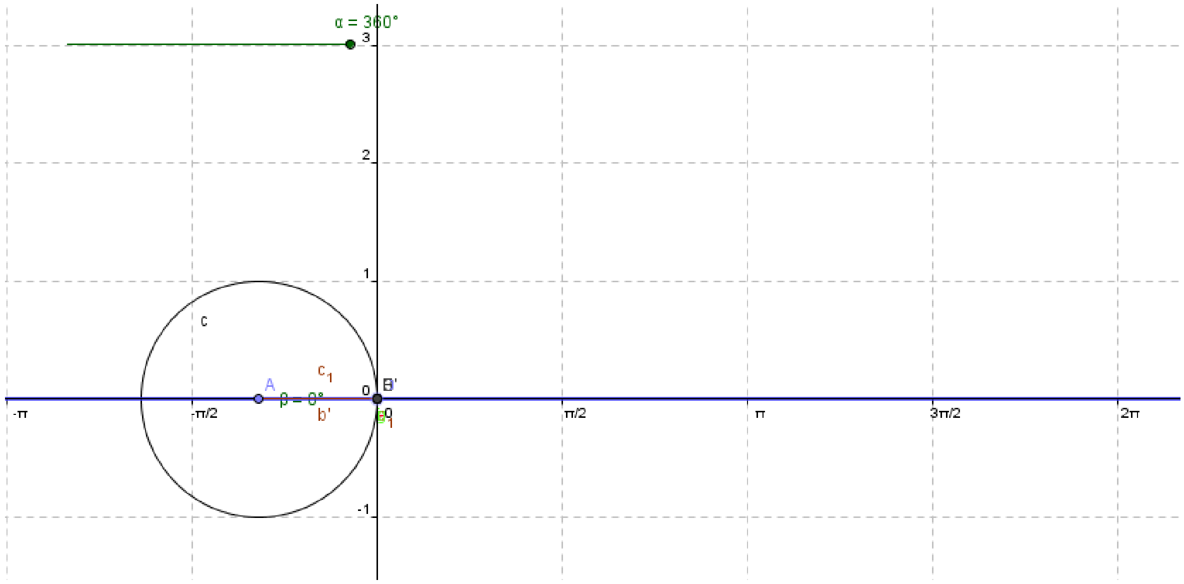


Ilustración XVI "Presentación Geogebra relación entre la circunferencia y la curva"

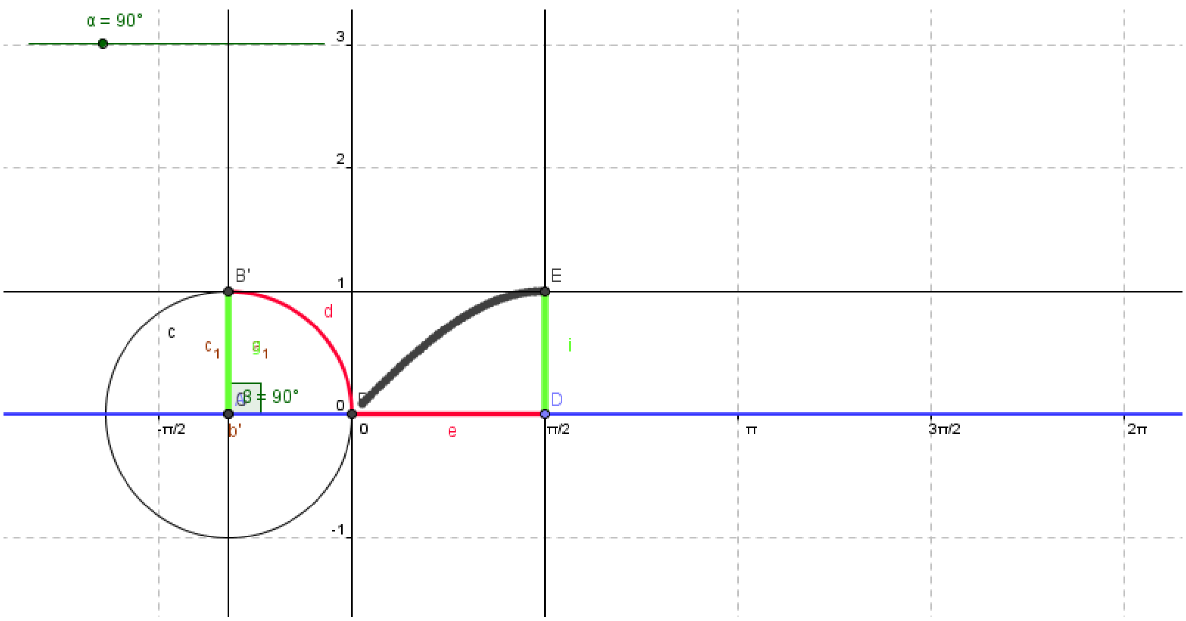


Ilustración XVII "Presentación en Geogebra relacion entre la circunferencia y la curva en 90°"

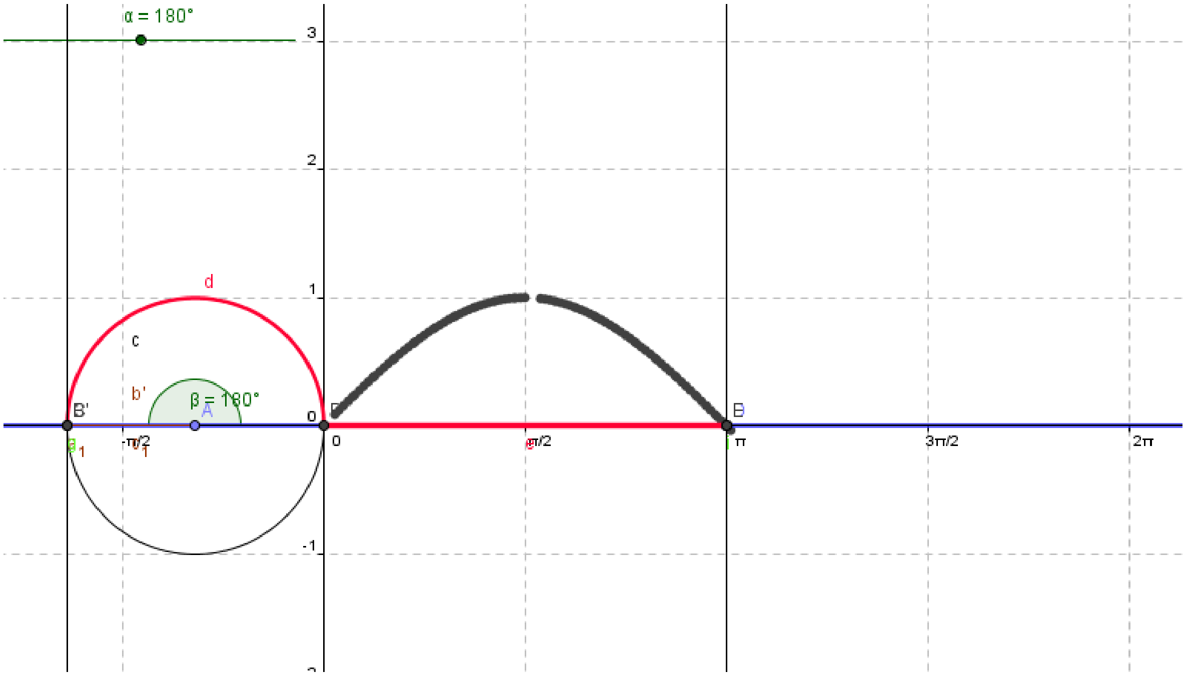


Ilustración XVIII "Presentación en Geogebra relacion entre la circunferencia y la curva en 180°"

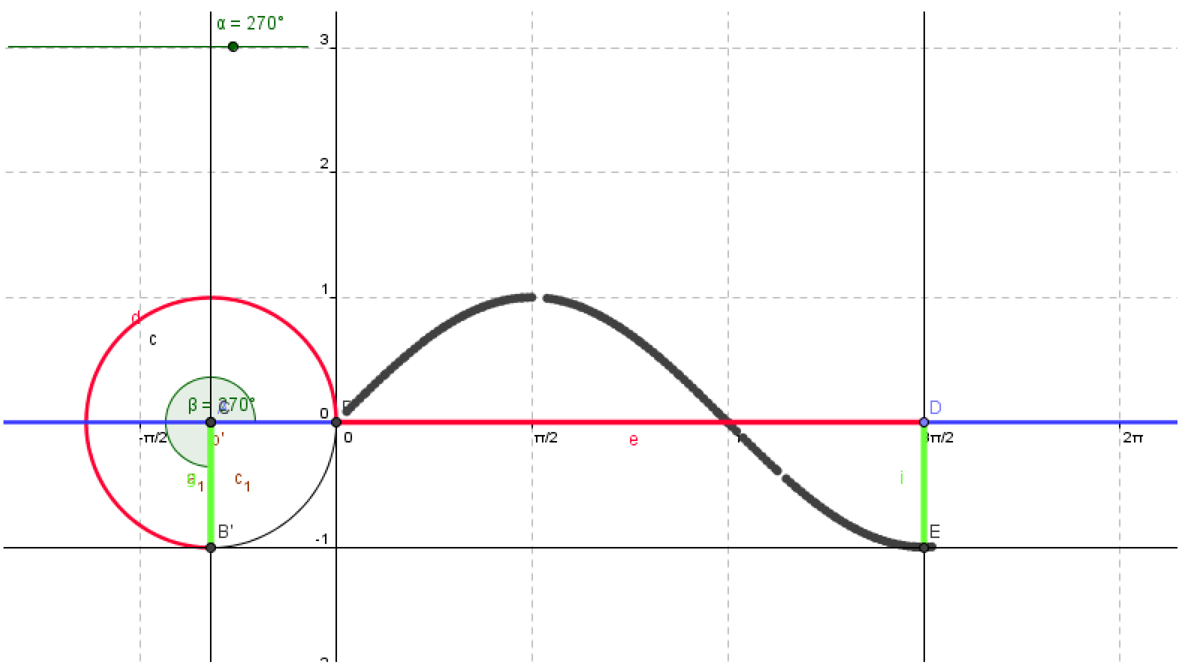


Ilustración XIX " Presentación en Geogebra relacion entre la circunferencia y la curva en 270°"

Ilustración XX "Presentacion en Geogebra relacion entre la circunferencia y la curva en 360°"

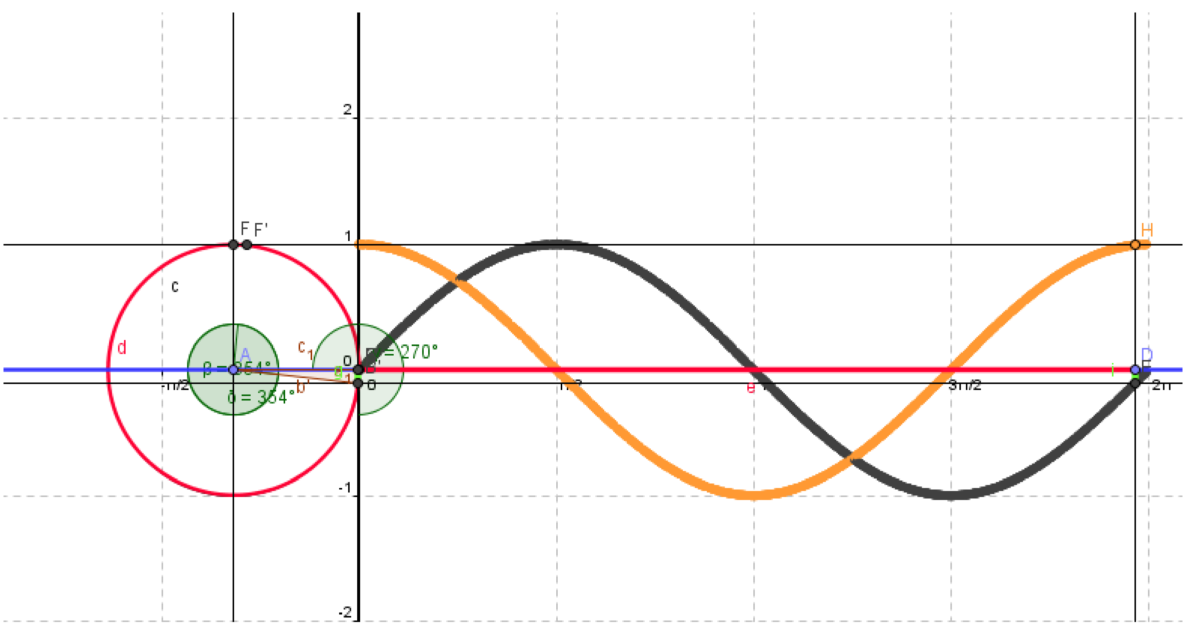


Ilustración XXI " Diferencia entre la función seno y la función coseno"