UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS
ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SISTEMA DE NORMAS QUE INFLUYEN EN PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN: UN CURSO DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO COMO ESCENARIO DE INVESTIGACIÓN

Tesis doctoral

ÓSCAR JAVIER MOLINA JAIME

Director: Dr. LUIS PINO-FAN

Codirector: Dr. VICENÇ FONT

Osorno, Chile, 2019

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SISTEMA DE NORMAS QUE INFLUYEN EN PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN: UN CURSO DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO COMO ESCENARIO DE INVESTIGACIÓN

Tesis Doctoral presentada por Oscar Javier Molina Jaime dentro del programa de Doctorado en Educación Matemática para aspirar al grado de **Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos**, dirigida por el Dr. Luis Roberto Pino Fan, académico de la Universidad de Los Lagos; y codirigida por el Dr. Vicenç Font, académico de la Universidad de Barcelona.

Óscar Javier Molina Jaime

Dr. Luis Pino-Fan

Dr. Vicenç Font

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SISTEMA DE NORMAS QUE INFLUYEN EN PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN: UN CURSO DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO COMO ESCENARIO DE INVESTIGACIÓN

Esta tesis de Doctorado ha sido desarrollada al seno del Grupo de Investigación sobre Didáctica de la Matemática (GIDMAT-ULAGOS) del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos.

A mi Madre, Rosalba Jaime Martínez.

A mi Hermana, Angélica; y sobrino, Julián.

A mi esposa, Martha.

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia, quiero manifestar una inmensa gratitud al Dr. Luis Pino-Fan, director de esta Tesis. Su amplio conocimiento y pasión por la Educación Matemática fueron un factor determinante para llevar a cabo la investigación y orientarme con suficiencia durante su desarrollo.

Elevo mi sentimiento de gratitud al Dr. Vicenç Font, profesor de la Universidad de Barcelona y codirector de la Tesis. Su dilatada experiencia y vasta visión sobre la Didáctica de las Matemáticas fueron luz para tener una mayor claridad de la temática tratada, hecho que permitió enriquecer en gran medida la investigación realizada. Además, su hospitalidad y generosidad con el conocimiento se hicieron ostensivos durante mis estancias investigativas en la Universidad de Barcelona.

A todos los profesores que orientaron los seminarios del programa de Doctorado de la Universidad de Los Lagos; en especial, a los profesores Adriana Breda y Rigoberto Medina. Sus cursos, anécdotas, conocimientos y reflexiones fueron fuente para mejorar como docente e investigador.

A los doctores Ismenia Guzmán Retamal, Walter Castro Gordillo, Maximina Márquez Torres y Jaime García García. Sin duda, sus comentarios y reflexiones al proyecto de Tesis fueron definitivos para la construcción y desarrollo de la investigación, y para la versión final de la tesis.

Un agradecimiento y reconocimiento especial a las profesoras Carmen Samper, Leonor Camargo y Patricia Perry. Su acompañamiento, colaboración y orientaciones, no solo durante el trascurso del doctorado sino durante toda mi vida académica, ha sido un factor fundamental para desarrollar mi carrera profesional. Mi interacción con ellas en el seno del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*

(Universidad Pedagógica Nacional, Colombia) ha sido, sin lugar a duda, el principal soporte para desarrollar mis competencias docentes e investigativas.

A Armando Echeverry, Juan David Serrano y estudiantes del curso de Geometría del Espacio del primer semestre de 2017. Su colaboración durante el proceso de recolección de datos fue clave para el desarrollo de la tesis.

A mi madre, Rosalba; mi hermana, Angélica; y mi esposa, Martha. Sus sacrificios e inmenso apoyo emocional fueron determinantes para lograr mis objetivos en el tiempo destinado para ello.

A mis compañeros del Doctorado. Su amistad y simpatía fueron aspectos fundamentales para sobrellevar la lejanía del seno familiar.

Por último, a la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), institución a la que orgullosamente pertenezco. Su apoyo mediante la Comisión de Estudios que me otorgó a principios del año 2016 fue un factor determinante para desarrollar, con tranquilidad, un doctorado fuera del país. Un agradecimiento especial a los profesores Mauricio Bautista, Lyda Mora y Benjamín Sarmiento, y a Soraya González por las respectivas gestiones.

"*La argumentación es* [*debe ser*] *usada, no como un destino final, sino como una ocasión que provoca la apertura para expandir la discusión e incluir nuevas herramientas y conceptos matemáticos*".

Erna Yackel

RESUMEN

Este estudio tiene el propósito de abordar una problemática planteada por Stylianides, Bieda y Morselli (2016) según la cual es menester que la comunidad académica investigue formas de empoderar a los profesores para que apoyen a sus estudiantes a participar de manera significativa en procesos de argumentación; esto, dada la compleja dinámica social dentro de las aulas y las dificultades que los profesores enfrentan al gestionar la interacción que está en el centro del aprendizaje significativo en matemáticas. El área problemática así descrita, alude al rol del profesor en las prácticas interaccionales del aula con miras a involucrar a sus estudiantes en la argumentación y la prueba.

Desde esta perspectiva, se analizan aspectos interaccionales e instruccionales que tuvieron lugar en un aula de Geometría del Espacio, para este caso de nivel universitario, en que los estudiantes y profesora se involucraron en la resolución de problemas empleando Entornos de Geometría Dinámica (EGD), en procesos de argumentación y en la construcción de un sistema teórico formal. En este marco, dos asuntos son de primordial interés: (i) hacer un seguimiento al sistema de normas que tienen lugar en el aula, y caracterizarlas con miras a determinar su influencia en la actividad matemática relacionada con la argumentación; y (ii) precisar el papel del profesor en relación con su gestión de dicho sistema de normas.

Para tal efecto, en el marco de un enfoque *cualitativo-naturalista* y la estrategia *investigación basada en el aula* (Kelly & Lesh, 2000), se desarrolla un *análisis didáctico* siguiendo los elementos sugeridos por el Enfoque Ontosemiótico –EOS– (Font, Planas, & Godino, 2010), a saber, análisis de *prácticas*, de *interacciones*, de *configuraciones de objetos primarios* y de *normas*. Así mismo, se usa el *Modelo de Toulmin* (2003) para estructurar y tipificar los argumentos (inductivos, abductivos, deductivos y analógicos); y la Teoría de *situaciones instruccionales* (TII) propuesta por Herbst y sus colegas (2010) para caracterizar las *trayectorias didácticas* determinadas como datos de investigación.

Dentro de los resultados del estudio se destacan los siguientes: La ilustración de diferentes tipos de argumentos presentes en cada tipo de situación instruccional y de las diversas maneras en que cada tipo de argumento articula objetos de la configuración ontosemiótica a la que pertenece. La descripción del dinamismo del sistema de normas del curso que fue escenario de investigación y, principalmente, de las formas en que una norma puede influir en procesos de argumentación emergentes en un curso de Geometría del Espacio. Y finalmente, la precisión de responsabilidades específicas del profesor y sus formas de gestionar un sistema normativo, en un aula de indagación que emplea como recursos la resolución de problemas y EGD.

ABSTRACT

The goal of this study is to address a problem raised by Stylianides, Stylianides and Weber (2017) according to which given the complex social dynamics at play inside mathematics classrooms and the difficulties teachers face in managing classroom dialogue which is at the core of meaningful learning in mathematics, it is important that the field investigates ways of empowering teachers to support all of their students to meaningfully participate in argumentation and proof in the mathematics classroom. The problematic area alludes to the teacher's role in the interactive classroom practices to involve her students in the argumentation process.

In this sense, interactive and instructional aspects that took place in a 3D Geometry course at university level, are analyzed. In this course, students and teacher were involved in problem solving using Dynamic Geometry Environments (DGE), in argumentation processes and in the construction of a formal theoretical system. Two issues are of primary interest for study: (i) to monitor the system of norms taking place in the classroom, and to characterize them with a view to determining their influence on mathematical activity related to argumentation; and (ii) to clarify the role of the teacher in relation to her management of that system.

To achieve the above, within of a *qualitative-naturalist* approach and *classroom-based research* strategy (Kelly & Lesh, 2000), a *didactic analysis* is developed using the elements suggested by the Ontosemiotic Approach -OSA- (Font, Planas, & Godino, 2010). These elements are analysis *of practices*, *interactions*, *configurations of primary objects* and *norms*. In addition, the Toulmin Model (2003) is used to structure and typify arguments (inductive, abductive, deductive and analogical); and the Theory of Instructional Situations (TII) proposed by Herbst and his colleagues (2010) is used to characterize the didactic trajectories determined as research data.

The most important results of the study are: The specification of the types of arguments emergent of each type of instructional situation and the description of the different ways in which each type of argument articulates objects of an ontosemiotic configuration. The description of the dynamism of the normative system that regulates the research scenery course and, mainly, of the ways in which a norm can influence the argumentation process that emerge of de 3D geometry course. And finally, the specification of teacher's responsibilities and her ways of managing a normative system in an inquiry classroom that uses problem solving and EGD as resources.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Tabla de acrónimos

Generales

EOS	Enfoque Ontosemiótico para la instrucción y conocimiento matemáticos
TII	Teoría de los intercambios instruccionales
EGD	Entorno de Geometría Dinámica
Æ•G	Grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, de la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá Colombia

Situaciones instruccionales

IC	Instalación de un Concepto
IP	Instalación de una Proposición
HP	Elaboración de una Prueba
E	Exploración de una figura 2D o 3D
Et	Exploración teórica de una situación
CF	Construcción una figura 2D o 3D
	[El prefijo SI~ que antecede a los anteriores acrónimos indica *situación instruccional* y fue usado en el software *Atlas ti.*7 principalmente]

Tipos de Normas EOS

Fe	Faceta epistémica
Fc	Faceta cognitiva
Fi	Faceta interaccional
Fa	Faceta afectiva
Fm	Faceta mediacional
	[El prefijo F~ que antecede a los anteriores acrónimos indica *faceta* y fue usado en el software *Atlas ti.*7 principalmente]
S	Origen social
A	Origen en la administración
C	Origen en el aula de clase
M	Origen en las matemáticas
	[El prefijo O~ que antecede a los anteriores acrónimos indica *origen* y fue usado en el software *Atlas ti.*7 principalmente]

Tipos de Normas TII

Ni	Norma de intercambio
Nt	Norma de temporalidad
Nle	Norma de división de labores (estudiantes)
Nlp	Norma de división de labores (profesor)

Objetos primarios

Pr	Procedimiento

Pp	Proposición
C	Concepto-definición
L	Lenguaje
	[Sobre *argumento* y *problema* ver lo que sigue]

Tipos de Argumentos

Aa	Argumento analógico
Ab	Argumento abductivo
Ad	Argumento deductivo
Ad~Ca	Argumento deductivo construcción auxiliar
Ad~Cd	Argumento deductivo por contradicción
Ad~Cp	Argumento deductivo por contrapositiva
Ad~Dir	Argumento deductivo directo
Ai	Argumento inductivo
Ace	Argumento de convicción externa
	[El prefijo Arg~ que antecede a los anteriores acrónimos indica *argumento* y fue usado en el software *Atlas ti.*7 principalmente]

Función en el argumento durante una interacción cuando se elabora una prueba

A	Se provee Aserción
D	Se provee Dato
G	Se provee Conclusión
R	Se provee Refutación
Paso	Se provee Paso argumental
Id	Se provee Idea de un paso argumental
	[El prefijo FArg~ que antecede a los anteriores acrónimos indica *función en el argumento*. Los sufijos ~P y ~E indican el sujeto que lleva a cabo la función, *profesor* y *estudiantes*, respectivamente. El sufijo ~I indica que los sujetos fungen como *indagadores*. Estos fueron usados en el software *Atlas ti.*7 principalmente]

Función en la participación durante una interacción cuando se elabora una prueba

A	Autor
En	Encubridor
P	Portavoz
R	Repetidor
	[El prefijo FPar~ que antecede a los anteriores acrónimos indica *función en la participación*. Los sufijos ~P y ~E indican el sujeto que lleva a cabo la función, *profesor* y *estudiantes*, respectivamente. El sufijo ~I indica que los sujetos fungen como *indagadores*. Estos fueron usados en el software *Atlas ti.*7 principalmente]

Tipo de Problemas

Bc	Búsqueda de consecuente
Ba	Búsqueda de antecedente
Dd	Determinación de dependencia
Ep	Elaboración de prueba
Et	Exploración teórica
	[El prefijo Prob~ que antecede a los anteriores acrónimos indica *tipo de problema* y fue usado en el software *Atlas ti.*7 principalmente.

INTRODUCCIÓN

Desde la década del noventa, existe una tendencia generalizada hacia la inclusión de los procesos de argumentación y prueba en los currículos escolares, como consecuencia del consenso generalizado sobre su importancia en la actividad matemática de los estudiantes (Mariotti, 2006; Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016; Stylianides, Stylianides, & Weber, 2017). Sin embargo, pese a que existe dicho consenso, existe una gran diferencia entre aceptar la idea de que tales procesos deben tener un lugar importante en la matemática escolar e involucrar realmente a todos los estudiantes en una práctica que los aborde (Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016). Como consecuencia de esta premisa, varias discusiones sobre aspectos (cognitivos, de instrucción y ambientes de aula, y conocimiento del profesor) relativos a la prueba y la argumentación, siguen abiertas al escrutinio y han llevado a un incremento notable de estudios investigativos que las impliquen. Ello se ve reflejado en la gran cantidad de publicaciones a las que aluden capítulos completos de handboooks durante la última década, a través de los cuales se exponen resultados de investigación acerca de la enseñanza y aprendizaje de la prueba (Mariotti, 2006; Harel & Showder, 2007; Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016; Stylianides, Stylianides, & Weber, 2017); incluso existe un handbook concentrado sólo en el proceso de probar (proving en inglés) y la prueba, que es resultado de los trabajos presentados en el ICMI 19 Study (Hanna & de Villiers, 2012).

Vale decir que producto de la afirmación hecha por Mariotti (2006), según la cual la investigación sobre la prueba había estado lejana de las aulas reales de matemáticas, se puede observar en la literatura antes citada que desde el 2005 ha habido un incremento notable en estudios que se abocan a la realidad del aula. Varios de estos estudios exponen maneras novedosas a través de la cuales se ayuda a los estudiantes a apreciar la prueba y la argumentación como procesos, todas fundamentadas en entender la prueba y la argumentación en un sentido más amplio (Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016).

En contraste con lo anterior, llama la atención que la investigación sobre el conocimiento de los profesores en relación con la prueba se centró, principalmente, en su comprensión sobre esta, como producto final de una actividad argumentativa y no tanto en identificarla como un proceso que involucra dicha actividad. Esto puede ser un asunto problemático porque el papel de los profesores en la enseñanza de la argumentación y la prueba es multifacético, y no se limita a los juicios sobre si diferentes argumentos cumplen con el estándar matemático de una prueba válida (Herbst & Chazan, 2012; Lin, Yang, Lo, Tsamir, & Stylianides, 2012). Dentro de tales facetas se destaca aquella según la cual el profesor debe reconocer la importancia de las interacciones entre los estudiantes y entre ellos con el profesor, durante los procesos en cuestión. En ese marco, varios autores han asumido perspectivas que conceptualizan la prueba como un proceso socialmente integrado, y una forma de práctica social en el marco de una teoría social del aprendizaje. A diferencia de las perspectivas cognitivas, en esta perspectiva social, el énfasis tiende a estar en la actividad misma más que en la comprensión (Matos & Rodrigues, 2011). En este escenario, una característica fundamental de la argumentación, y la prueba en particular, adquiere una dimensión social, lo que significa que tales nociones tienen sentido respecto a una comunidad que comparte (más o menos implícitamente) criterios de comunicación y de aceptabilidad de los argumentos en juego (Stylianides, 2007; Mariotti, 2006).

Con base en lo expuesto en los párrafos anteriores y teniendo presente que dicha perspectiva social ha tenido menos desarrollo investigativo que perspectivas como la psicología cognitiva (Stylianides, Stylianides, & Weber, 2017), un área problemática de interés para la comunidad de educadores se puede enunciar de la siguiente manera (Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016):

> Dada la compleja dinámica social en juego dentro de las aulas de matemáticas y las dificultades que los profesores enfrentan al manejar el diálogo que está en el centro del aprendizaje significativo en matemáticas, es importante que la comunidad académica investigue formas de empoderar a los profesores para que apoyen a todos sus estudiantes a participar de manera significativa en la argumentación y la prueba en el aula de matemáticas (p. 344).

Esta área problemática así descrita, alude de manera particular al rol del profesor en las prácticas interaccionales del aula con miras a involucrar a sus estudiantes con la argumentación y la prueba. En esta dirección, la investigación que acá se presenta pretende proveer ciertos elementos previos que pueden ser utilizados por investigadores o profesores para generar herramientas que posibiliten el empoderamiento referido en la cita anterior; en otras palabras, se pretende analizar desde perspectivas teóricas socioculturales, aspectos interaccionales e instruccionales que tienen lugar en un aula de Geometría del Espacio, para este caso de nivel universitario, en que los estudiantes y profesores se involucran en la resolución de problemas empleando Entornos de Geometría Dinámica (EGD), en procesos de argumentación y en la construcción de un sistema teórico formal.

En este marco, dos asuntos son de primordial interés para el estudio: (i) hacer un seguimiento al sistema de normas –contrato didáctico, normas sociales y sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996) y metanormas (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009)– que tienen lugar en el aula, y caracterizarlas con miras a establecer su influencia en la actividad matemática relacionada con la argumentación –en el sentido amplio antes descrito– por parte de los estudiantes; y (ii) precisar específicamente el papel del profesor en relación con la gestión de dicho sistema de normas (su creación, negociación, control, reformulación, etc.). Dar cuenta de estos dos asuntos provee información que permiten justificar acciones que un profesor lleva a cabo en el aula de clase (Herbst & Chazan, 2012); pero además provee información sobre el conocimiento que un profesor, en este caso de nivel universitario, debe tener en relación con la argumentación y la prueba, el cual se infiere, particularmente, de un análisis respecto del sistema de normas que regulan la interacción en el aula con las características descritas.

Ahora bien, ¿por qué escoger un curso de Geometría, en particular de Geometría del Espacio, como escenario de investigación? Históricamente, existen dos argumentos por los cuales el estudio de la geometría se ha considerado importante en los procesos de enseñanza-aprendizaje escolares (Herbst, y otros, 2010): (i) Ha cargado con gran parte de la responsabilidad institucional de involucrar a los estudiantes en prácticas de argumentación y prueba, y en esa medida, en las prácticas que usualmente están presente en las matemáticas como disciplina profesional, (ii) Porque se considera que su estudio proporciona la oportunidad para que los estudiantes se involucren con las prácticas del razonamiento lógico-deductivo, que ellos podrían aplicar a su vida diaria.

Reconociendo la importancia de la Geometría en los procesos educativos instanciada en tales argumentos, el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia) ha venido desarrollando una innovación en el aula para tres cursos[1] de la línea de geometría del programa de formación inicial de profesores de matemáticas ofrecido por tal universidad. Los tres elementos que fundamentan el esfuerzo didáctico de tal innovación para generar un entorno favorable para aprender a demostrar (o hacer pruebas formales) son: (i) los problemas abiertos de conjeturación; (ii) el uso de un Entorno de Geometría Dinámica (EGD) como artefacto que posibilita la exploración de situaciones y en consecuencia, soluciones a los problemas propuestos; y (iii) la interacción social en la clase, compuesta por tres interacciones específicas: *trabajo de los estudiantes* (a través del cual ellos autónomamente realizan tareas propuestas por el profesor -*e.g.*, resolver un problema o escribir una prueba previamente construida colectivamente-), *conversación instruccional* (a través de la cual el profesor gestiona la socialización de las producciones de los estudiantes con miras a guiar a la comunidad en la construcción de significados compartidos y en la organización colectiva de las ideas que encontraron para producir las demostraciones) y *conversación matemática* (*i.e.*, un diálogo entre el profesor y los estudiantes -o entre los estudiantes- en el cual las ideas en torno a un tema específico se comunican, se comentan y se critican).

Gran parte de los estudios llevados a cabo por tal grupo de investigación se han concentrado en los dos primeros cursos (Elementos de Geometría y Geometría Plana) donde se implementa la innovación (Perry, Samper, Molina, Camargo, & Echeverry, 2012; Camargo, Perry, Samper, & Molina, 2015; Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow, & Molina, 2016; Samper & Plazas, 2017; Molina, Samper, Perry, Camargo, & Echeverry, 2010; Molina, Perry, Camargo, & Samper, 2015)[2], dejando de lado, hasta el momento, el estudio de aspectos sucedidos en el curso de Geometría del Espacio.

[1] Los otros cursos se denominan Elementos de Geometría y Geometría Plana, ubicados en el primer y segundo semestre del programa citado. El curso Geometría del Espacio se ubica en el tercer semestre.

[2] Estos estudios han tenido cierto reconocimiento por la comunidad académica; ver, por ejemplo, Selden (2012), Sinclair y Yerushalmy (2016); y Stylianides, Stylianides y Weber (2017).

Experiencias como profesor y observador de la innovación en este curso dejan la percepción de que aspectos relativos a la *interacción social en la clase*, específicamente, en lo que respecta al sistema de normas (*e.g.*, uso de formatos para presentar una prueba y reconocerla como válida, o usos del EGD como Cabri 3D para abordar eficientemente un problema) que circula en el aula y la gestión que hacen los profesores de este, son diferentes a los registrados para los otros cursos. Lo anterior explica por qué el presente estudio considera el curso de Geometría Euclidiana del Espacio (con las características de la innovación antes citadas) como un escenario investigativo de especial interés; además, tal como lo muestra la literatura que hace recopilaciones sobre la investigación en educación geométrica o argumentación y prueba (*e.g.*, Hanna & de Villiers, 2012; Sinclair, et al., 2016; Stylianides, Bieda & Morselli, 2016), este es un contexto que no ha sido tenido en cuenta por la comunidad académica en la misma medida que los cursos de geometría euclidiana plana.

Concretamente, con esta Tesis Doctoral se pretende contribuir al campo de la Educación Geométrica en un escenario que poco se ha abordado: un curso de Geometría del Espacio de nivel universitario que emplea un EGD y se fundamenta en la resolución de problemas; y sobre una temática que es de palpitante interés en el área investigativa de la argumentación y la prueba, los procesos de interacción (y en ese marco, el rol del sistema de normas) en un aula que pretenden involucrar a los estudiantes en procesos de argumentación y prueba, y el papel del profesor en los procesos de instrucción correspondientes (para este caso, en lo que respecta a la gestión de dicho sistema de normas). Hacer un estudio como este, saca a luz aspectos sobre el conocimiento didáctico-matemático que un profesor necesita tener sobre la instrucción en un contexto como el descrito antes, específicamente, mediante la ilustración de herramientas (*e.g.*, papel del sistema de normas) que le permitan desempeñarse de manera idónea en aulas de matemáticas basadas en la indagación (Yackel, 2002).

Para abordar el área problemática antes presentada, este documento está estructurado en 5 capítulos. En el Capítulo 1, *Antecedentes y planteamiento del problema*, se expone aquella literatura que aborda aspectos de interacción e instrucción en el aula en lo que respecta a la argumentación y la prueba desde una perspectiva social; con base en la revisión que se presenta en este capítulo, fue posible tanto ganar precisión en el área problemática y plantear las preguntas principales que orientaron el desarrollo de la investigación, como decantar los marcos teóricos y metodológico utilizados en el estudio.

En el Capítulo 2, *Referentes teóricos, objetivos y metodología*, está conformado por cinco secciones. En la primera, se precisa la conceptualización empleada a lo largo de la investigación para los términos *prueba*, *probar*, *argumentación*, *argumento*, y *tipos y clases de argumentos*, y se precisa la postura asumida para el estudio. En la segunda, se presenta la propuesta que el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero, & Font, 2007) tiene sobre los objetos emergentes de las prácticas matemáticas, en particular sobre los argumentos. En la tercera, se presenta un panorama general sobre perspectivas teóricas que aluden a *sistemas de normas* como escenario que contextualiza las posturas que se asumes al respecto -dimensión normativa del EOS y Teoría de las Intercambios Instruccionales (Herbst, y otros, 2010)-. En la cuarta, se ajustan las preguntas orientadoras del estudio presentadas en el Capítulo 1 y se presentan los objetivos correspondientes. Finalmente, se expone la metodología del estudio; en este apartado se hace una descripción del enfoque *cualitativo-naturalista* y la estrategia *investigación basada en el aula* (Kelly & Lesh, 2000) empleados, y las fases llevadas a cabo para su desarrollo.

El Capítulo 3, *Análisis preliminar*, se concentra en un análisis previo al análisis principal, realizado para determinar los datos de la investigación y la precisión de los códigos con los cuales estos fueron intervenidos durante el análisis didáctico. En tal sentido expone una descripción que da cuenta de un ejercicio analítico-metodológico (Miles & Huberman, 1994) que se compone de dos secciones específicas. En la Sección 3.1 se informa sobre cómo la información recolectada fue organizada, reducida y depurada para obtener los datos de investigación. En la Sección 3.2 se informa sobre cómo se precisaron los códigos preestablecidos en los referentes teóricos para intervenir dichos datos de investigación.

El Capítulo 4, *Análisis didáctico bloque de problemas* (la más extensa del informe de investigación), presenta el análisis pormenorizado de los datos escogidos. Estos se disgregaron en cuatro Bloques de Problemas en los cuales se identificaron 18 Trayectorias Didácticas, 11 relativas a prácticas llevadas a cabo por toda la clase y 7 a prácticas llevadas a cabo por los grupos de estudiantes registrados en video. Los fragmentos de sesiones de clase que componen cada trayectoria fueron intervenidos siguiendo los elementos del *análisis didáctico* propuesto por el EOS. Para ello se usaron las herramientas analíticas expuestas en el Capítulo 2 y los códigos depurados con base en el análisis preliminar ya citado. Al inicio del Capítulo se precisa con detalle la estructura del análisis para cada Bloque y trayectorias correspondientes.

En el Capítulo 5, *Discusión de los análisis*, está focalizado en presentar y comentar con cierto detalle los resultados obtenidos a partir de los análisis didácticos expuestos en el Capítulo 4. Para su elaboración, principalmente fueron tenidos en cuenta los apartados *Síntesis y breves comentarios*, y *Síntesis y conclusiones* presentados, respectivamente, al final de cada trayectoria y de cada Bloque de Problemas. Dicho capítulo está organizado en tres secciones, asociadas, respectivamente, a cada uno de los asuntos involucrados a las tres preguntas específicas orientadoras del estudio: (i) Descripción de los tipos de argumentos (o procesos argumentativos) presentes en cada situación instruccional y la forma como estos articulan objetos primarios de las configuraciones ontosemióticas identificadas (relativo a PE1). (ii) Descripción del sistema de normas correspondiente a cada situación instruccional, destacando su influencia en los procesos de argumentación, y priorizando lo relativo al Dominio de la Geometría del Espacio (relativo a PE2). Y (iii) descripción del papel de los miembros de la clase a la luz del sistema de normas identificado y precisión de la gestión de tal sistema por parte de la profesora, en particular en lo que respecta a los procesos argumentativos (relativo al PE3).

Finalmente, en el Capítulo 6, *Conclusiones del estudio*, se proveen las respuestas a cada una de las preguntas secundarias del estudio y se explicita el cumplimiento de cada uno de los objetivos específicos asociados, indicando los resultados más relevantes de la investigación (expuestos con detalle en el Capítulo 5). Con esa información se concreta el logro del objetivo general del estudio y la respuesta a la pregunta principal de investigación. En el último apartado del dicho capítulo (Sección 6.4) se presenta un apartado en el que se exponen, a manera de comentarios finales, los principales aportes metodológicos y teóricos del estudio respecto a la problemática que motivó la investigación, y las perspectivas para estudios futuros.

Capítulo 1

Revisión de la literatura y área problemática

En este capítulo se presenta un panorama general sobre estudios realizados en el campo de la Educación Matemática relativos al área problemática en la que se enmarca nuestro estudio (Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016):

> Dada la compleja dinámica social en juego dentro de las aulas de matemáticas y las dificultades que los profesores enfrentan al manejar el diálogo que está en el centro del aprendizaje significativo en matemáticas, es importante que la comunidad académica investigue formas de empoderar a los profesores para que apoyen a todos sus estudiantes a participar de manera significativa en la argumentación y la prueba en el aula de matemáticas (p. 344).

Una manera de abordar dicha problemática (y por esa vía, proveer información sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor) implica estudiar de manera particular la instrucción en el aula y el rol del profesor en las prácticas interaccionales, con miras a involucrar a sus estudiantes con la argumentación y la prueba. En esta dirección, la investigación que acá se presenta pretende proveer ciertos elementos previos que pueden ser utilizados por investigadores o profesores para generar herramientas que posibiliten el empoderamiento referido en la cita anterior. Dado este escenario, tiene sentido abordar una perspectiva social para la prueba en la que esta sea concebida como una actividad social (Matos & Rodrigues, 2011). En ese marco, el profesor es considerado el representante de la comunidad de matemáticas y debe convertirse en un mediador cultural que involucre a los estudiantes con los estándares de validación matemática (Mariotti, 2006).

Así las cosas, en este capítulo se exponen estudios investigativos que han abordado ciertos cuestionamientos de la argumentación y la prueba desde un punto de vista sociocultural de la instrucción (Harel & Sowder, 2007): ¿cómo se debe enseñar?, ¿cómo se construyen, verifican y aceptan las pruebas en el aula?, ¿qué ambiente de clase es propicio para el desarrollo del concepto de prueba con los estudiantes?, ¿qué tipo de interacción entre los estudiantes, y entre los estudiantes y el profesor puede fomentar la concepción de los estudiantes sobre la prueba? y ¿qué actividades matemáticas, posiblemente con el uso de la tecnología, pueden mejorar las concepciones de los estudiantes sobre la prueba? Estos estudios se han clasificado en torno a dos de los temas que Stylianides, Bieda y Morselli (2016) proponen para organizar las *investigaciones basadas en el aula de clase*: (i) intervenciones dirigidas a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la argumentación y la prueba; y (ii) maneras de los profesores para abordar la argumentación y la prueba en el aula. La Tabla 1 expone el tema al que está principalmente asociado cada uno de los cuestionamientos antes presentados.

Tabla 1. Relación cuestionamientos perspectiva sociocultural de la instrucción y temas de investigación

Subtemas	**Cuestionamientos**
Intervenciones dirigidas a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la argumentación y la prueba	¿Qué ambiente de clase es propicio para el desarrollo del concepto de prueba con los estudiantes?, ¿qué actividades matemáticas, posiblemente con el uso de la tecnología, pueden mejorar las concepciones de los estudiantes sobre la prueba?
Tratamiento de la argumentación y la prueba en el aula: el papel del profesor	¿Cómo se debe enseñar?, ¿cómo se construyen, verifican y aceptan las pruebas en el aula?, ¿qué tipo de interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor puede fomentar la concepción de los estudiantes de la prueba?

Presentada la literatura, en el aparatado 1.4.1 se expone una síntesis de la misma, en el aparatado 1.4.2 se expone una precisión del área problemática que se pretende abordar en el estudio y se plantea una primera aproximación de las preguntas principales que orientarán el desarrollo de la investigación. Vale decir que, a priori, no es asumida alguna teoría sociocultural particular para escoger los estudios que se reportan en este primer capítulo; las teorías que se tomarán como referentes teóricos, y las posturas epistemológicas y la conceptualización sobre argumentación y prueba que se asumirán en esta investigación, se presentan con detalle en el Capítulo 2.

1.1 Intervenciones dirigidas a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la argumentación y la prueba

Desde la década del noventa ha habido un interés creciente por involucrar a los estudiantes en los procesos de argumentación y prueba (Mariotti, 2006). Haciendo una revisión de la literatura con respecto a las intervenciones de aula (*e.g.*, diseño de tareas o de ambientes de clase), es posible establecer dos características principales en los trabajos surgidos en dicha década: su interés por introducir a los estudiantes en la práctica de actividad demostrativa entendida esta en un sentido amplio (*i.e.*, incluyendo procesos de exploración, conjeturación y prueba), y su interés por fomentar el desarrollo del significado matemático con base en dicha práctica y en el marco de una comunidad del aula que se fundamenta en la *cultura del por qué* (Yackel & Cobb, 1996; Zack, 1997; Bartolini Bussi, 1998).

De manera más específica, varios estudios de la época (Yackel & Cobb, 1996; Zack, 1997) que pretendieron introducir a los estudiantes en la práctica de la argumentación matemática, diseñaron ambientes de clase dentro de los cuales los profesores pudieran negociar *normas sociales* (Cobb, Wood, Yackel, & McNeal, 1992) o *normas sociomatemáticas* (Yackel & Cobb, 1996; Voigt, 1995) para favorecer la producción de argumentos en los discursos de los niños de primaria, o procesos de generalización en álgebra elemental. Cabe señalar que el uso del constructo *norma sociomatemática*, introducido por estos autores en el marco de una perspectiva emergente derivada de enfoques psicológicos -constructivismo (von Glasersfeld, An introduction to radical constructivism, 1984)- y sociales -interaccionismo simbólico (Blumer, 1969)-, ha sido clave para la realización de varios estudios al día de hoy (como se observará a lo largo de esta sección). Si bien las normas sociales dan la posibilidad de argumentar las declaraciones en contexto de clase, las normas sociomatemáticas posibilitan negociar y regular los criterios de aceptabilidad de los argumentos matemáticos en dicho contexto.

La escuela italiana, también a mediados de la década del 90, inició su presencia en el campo de la argumentación y la prueba con propuestas coherentes con una perspectiva sociocultural. La diferencia con las propuestas descritas (*e.g.*, Yackel & Cobb, 1996; Voigth, 1995), es que las experiencias que propone la escuela italiana, además de pretender introducir a los alumnos en la práctica argumentativa, pretende introducirlos en la práctica matemática dentro de un sistema teórico (Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti, 1996; Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, & Garuti, 1997; Bartolini Bussi, 1998). En estos casos, a través de la resolución de problemas en curso de geometría o aritmética de primaria y secundaria, procesos de modelado, trabajos con pequeños grupos y la gestión del profesor, se genera un ambiente a través del cual son negociadas colectivamente ciertas suposiciones –hechos matemáticos– y se argumentan declaraciones específicas con base en ellas. Lo interesante de estos estudios es que muestran una nueva perspectiva según la cual puede existir un vínculo entre la evidencia empírica de certidumbre o incertidumbre de resultados (producto de la solución de problemas) y la perspectiva teórica que los valida matemáticamente, primer paso para ver una posible conexión entre los procesos de argumentación y prueba que denominan hipótesis de *unidad cognitiva* (Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti, 1996).

Finalizando la década del noventa y hasta la fecha, las ideas seminales expuestas mediante los estudios anteriormente descritos fueron desarrolladas y ganaron especificidad. Así, por ejemplo, varios estudios adoptaron una tendencia basada en los constructos normas sociales y sociomatemáticas, y otros en decantar contextos experienciales específicos (*e.g.*, uso de softwares especializados) a través de los cuales los estudiantes puedan involucrarse en procesos de modelización y de investigación. En lo que sigue, se exponen trabajos realizados en el marco de ambas tendencias.

1.1.1 Estudios sobre normas (sociales y sociomatemáticas, contrato didáctico)

En el marco de esta tendencia, algunos estudios realizados por Yackel y sus colegas trascendieron a otros contextos escolares (*e.g.*, clase de ecuaciones diferenciales en un nivel universitario) y abordaron tres asuntos en particular: (i) determinar la forma en que se conforma un sistema de normas (contrato didáctico, normas sociales y sociomatemáticas) con respecto a la explicación (Yackel, Rasmussen, & King, 2000); (ii) buscar una coordinación entre perspectivas psicológicas y socioculturales con miras a precisar la relación entre las creencias de los estudiantes en torno a la actividad matemática (y las matemáticas mismas) con las normas sociales y las normas sociomatemáticas (Yackel & Rasmussen, 2002); y (iii) buscar una coordinación entre las normas sociales y las sociomatemáticas con el Modelo de Argumento propuesto por

Toulmin[3], elaborado para la educación matemática por Krummheuer, con el fin de proporcionar un medio para analizar aspectos de explicación, justificación y argumentación en el aula (Yackel, 2001; Yackel, 2002).

A su vez, Clark (2005), en un curso universitario introductorio al álgebra abstracta en Estados Unidos, cuyo objetivo era aproximar a los estudiantes a la elaboración de demostraciones con el rigor necesario para enfrentarse a cursos formales posteriores, lleva a cabo un estudio mediante el cual analiza el proceso de conformación de una comunidad de práctica de clase, a medida que los estudiantes se involucran con el propósito común de usar argumentos deductivos como criterio para validar una justificación matemática. En este contexto, el profesor es el encargado de apoyar la conformación de normas y de asegurar que la actividad de los estudiantes se corresponda con las prácticas matemáticas.

Matos y Rodrigues (2011), de igual forma que en el estudio de Clark (2005), llevaron a cabo un estudio en el cual también fue central el constructo comunidad de la práctica. Los autores analizaron extractos de interacciones grupales en un experimento de enseñanza sobre geometría en grado noveno, centrándose en el uso de diagramas. Su análisis mostró que, aunque un grupo puede ser visto como una comunidad de práctica donde los estudiantes comparten una misma preocupación por la tarea y desarrollan una práctica compartida, los miembros del grupo pueden comportarse de manera diferente dependiendo de su nivel de competencia matemática. Pese a lo anterior, resultados también mostraron que todos los miembros del equipo aumentaron en algún sentido el significado de los objetos involucrados según su grado de participación. Por otro lado, el análisis destacó la complejidad del proceso de prueba en el trabajo en grupo y el papel del profesor como impulsor del uso de los diagramas como un poderoso medio para compartir el significado de la prueba.

Marrades y Gutiérrez (2000) estudiaron la manera en que los Entornos de Geometría Dinámicos (EGD) pueden ayudar a los estudiantes de secundaria a darse cuenta de la necesidad de las demostraciones formales en matemáticas. Ellos se percataron de que la transición de los estudiantes a las demostraciones es muy lenta.

[3] Este autor plantea que un argumento está compuesto por tres elementos básicos, unos *datos*, una *garantía* y una *aserción* (Toulmin, 2003). En el capítulo siguiente, se presenta una descripción amplia del Modelo de Toulmin.

El principal aporte de este estudio en relación con las normas de clase es que, para que esta transición se lleve a cabo, debe aceptarse un contrato didáctico -término usado por Brousseau (1984)-, el cual puede ser asimilado por otros autores como norma social a través de la cual pueden ser tenidos en cuenta los argumentos de índole empírico de los estudiantes, y los argumentos de autoridad no son considerados.

Bajo la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática –EOS– (Godino, Batanero, & Font, 2007), se han realizado estudios a través de los cuales son explorados las dimensiones normativa y metanormativa (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009) que regulan las interacciones en la clase de matemáticas y dan forma a la participación del profesor y estudiantes. Por ejemplo, Assis, Godino y Frade (2012) reportan un estudio a través de cual, en un curso de grado séptimo de la Enseñanza Básica (alumnos de aproximadamente 12 años), intentan involucrar a los estudiantes en actividades de exploración e investigación con miras a que los estudiantes identifiquen patrones. En ese marco, los investigadores identifican las normas y metanormas utilizando como herramientas teóricas dos modelos de análisis diseñados para describir e interpretar los procesos interactivos en el aula: la dimensión normativa de los procesos de estudio propuesta por el EOS, y la relación entre prácticas, normas y conflictos semióticos (Planas & Iranzo, 2009). En los resultados obtenidos, los autores destacan la importancia de que el profesor tome consciencia de la trama compleja de normas y metanormas involucradas en las prácticas matemáticas y didácticas, así como la necesidad de que las gestione (negociando o cambiando) en cada momento de la actividad, para garantizar la optimización del aprendizaje de los estudiantes.

Dado que varios estudios que aluden a las normas sociales y sociomatemáticas destacan el papel del profesor con miras a negociarlas, instaurarlas, ajustarlas y propiciarlas, en la Sección 1.2 serán presentados otros estudios que abordan este constructo focalizados en este asunto en particular.

1.1.2 Estudios que abordan contextos experienciales específicos: uso de softwares

Para este apartado, dado el interés particular de esta investigación, se presenta lo relacionado al campo de la geometría. Desde finales de la década del noventa, la creación de ambientes relacionados con el uso de nuevas tecnologías ha tenido un énfasis generalizado, particularmente con el desarrollo de los Entornos de Geometría Dinámica -EGD- (*e.g.*, un número especial de la revista *Educational Studies in Mathematics* editado por Jones, Gutiérrez y Mariotti (2000), fue dedicado a este asunto en especial), hecho que ha revitalizado las actividades matemáticas clásicas de construcción y exploración que casi habían desaparecido del aula de geometría (Mariotti, 2006). En particular, lo anterior ha dado posibilidad de vincular la argumentación informal con la prueba formal (Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti, 1996; Hoyles & Healy, 1999; Olivero & Robutti, 2001). Vale decir que los estudios que acá se reportan, si bien asumen una perspectiva social para el aprendizaje, realizan también estudios de índole cognitivo para precisar, por ejemplo, tipos de argumentos producidos por los estudiantes o las funcionalidades de los tipos de *arrastre*, herramienta característica de este tipo de softwares.

En relación con el número especial de la revista antes citada, Laborde (2000) hace una síntesis de los cuatro artículos previos contenidos en ella. Señala que una preocupación latente en tales documentos es que la oportunidad ofrecida por los EGD para observar las propiedades matemáticas tan fácilmente podría reducir o incluso acabar con la necesidad de hacer la prueba de dicha propiedad, y en consecuencia afectar la oportunidad de aprendizaje en cuanto a cómo construir una prueba (formal). Sin embargo, Jones (2000) en su artículo cuestiona tal idea y plantea que el resultado de su experimento de enseñanza sugiere que el EGD no elimina necesariamente el proceso de hacer demostraciones por parte de los estudiantes, sino que puede mejorar la construcción de argumentos deductivos. Otra conclusión de Laborde (2000) recae en el hecho de resaltar el papel indiscutible de los EGD en cada uno de experimentos presentados; comenta que sin las exploraciones o las facilidades de control que provee el software no es posible obtener los resultados encontrados.

Otros estudios fueron mucho más específicos en términos de precisar maneras de introducir a los estudiantes en procesos de argumentación y prueba, destacando los tipos de arrastre u otras herramientas del EGD. Olivero (2006), por ejemplo, investigó el papel de la herramienta de ocultar/mostrar estableciendo que su uso posibilita a los estudiantes poner su foco de atención en diferentes elementos durante una construcción geométrica que, dependiendo de cuáles se ocultan o permanecen visibles, influyen en el desarrollo de la prueba. Por su parte, otros estudios se centraron en instruir estrategias de tipos de arrastre (o de la función del arrastre en términos generales) para favorecer la producción de argumentos de diverso tipos (inductivos, abductivos) por parte de los estudiantes de secundaria (Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002; Stylianides & Stylianides, 2005; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010), o provocar la construcción de conjeturas y facilitar su prueba en un curso de geometría plana de un programa de formación de profesores (Camargo, Samper, Perry, Molina, & Echeverry, 2009). En un contexto similar a este último estudio (formación de profesores), Hatterman (2010) llevó a cabo estudios descriptivos cualitativos a través de los cuales identificó cinco modos de arrastre diferentes (libre, limitado, indirecto, grado de libertad y verificación de que algo funciona) cuando usan el EGD Cabri 3D.

Leung (2008) por su parte, no desde un punto de vista experimental, sino más bien teórico, usando la teoría de la variación desarrollada por Marton, Runesson y Tsui (2004), propone un uso organizado de diferentes tipos de tareas a través de las cuales un sujeto debe experimentar algo más, para poder discernir. De manera específica, el autor pone en interacción los tipos de arrastre planteados por Arzarello, Olivero, Paola y Robutti (2002) y las funciones de variación propuestos por Marton y sus colegas; la idea de este autor es desarrollar un modelo epistémico mediante el cual pudiese investigar cómo la variación podría desempeñar un papel epistémico (*i.e.*, tomar conciencia de la conexión lógica que existe entre la visualización y las relaciones entre propiedades) en la formación de conceptos geométricos y la generalización de propiedades. En un mismo sentido, Jones y Herbst (2012) mencionan que, a través de varias formas de variación en la exploración y comparación de medidas de magnitud proporcionadas por los EGD, los estudiantes pueden extraer características esenciales de las figuras, mientras que las características no esenciales se desechan simultáneamente.

Otros estudios abordan lo que varios autores han denominado la tensión entre la naturaleza empírica y la naturaleza teórica de las matemáticas (Mariotti, 2006; Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, & Stevenson, 2012). En los resultados de intervenciones que abordan dicha tensión, plantean cómo este fenómeno regula las acciones de los estudiantes cuando abordan la solución de un problema en los que deben hacer exploraciones con EGD, formular conjeturas adecuadas y demostrarlas.

Exponen que los procesos abductivos e inductivos, y no sólo los deductivos, son cruciales en todas las actividades matemáticas, haciendo hincapié en la importancia de los componentes experimentales en la enseñanza de la prueba (Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010; Pedemonte, 2007; Pedemonte & Balacheff, 2016). Para dar cuenta de estos resultados, llama la atención la amalgama de marcos teóricos empleados tanto desde una perspectiva sociocultural como cognitiva. Así, por ejemplo, algunas investigaciones adaptan el constructo de comportamiento racional de Habermas (1998) para estudiar diferentes aspectos de la prueba y otras actividades matemáticas (Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010; Boero & Planas, 2014). El trabajo de Boero y sus colegas (Boero, et al., 2010) ilustra cómo integrando otras herramientas teóricas como el modelo de argumento de Toulmin (2003), se puede proporcionar un marco integral que permita analizar mejor los procesos de argumentación de los estudiantes, y planificar e implementar actividades intervenciones innovadoras.

Para finalizar este apartado, vale decir que poco a poco han ido incursionando ambientes de aula que pretende involucrar a los estudiantes en proceso de argumentación que si bien emplean EGD, son diferentes a los antes presentados: por ejemplo, unos se enfocan en el empleo de applets-web y enseñanza por medio de entornos web (Miyazaki, Fujita, & Jones, 2015), y otros en el uso de paquetes de interfaz móvil o touch-based (Ng, 2016). Particularmente, en relación con el primer tipo de estudios, los investigadores precisaron cambios en las normas sociales al emplear entornos de comunicación web.

1.1.3 Estudios que abordan otros contextos experienciales

En este apartado se presentan algunos estudios que emplearon otros ambientes o estrategias y marcos teóricos que complementan sus posturas socioculturales, diferentes a los EGD, para involucrar a los estudiantes en prácticas de argumentación o prueba.

Cheng y Lin (2006; 2007) implementaron y evaluaron una estrategia de aprendizaje, en un curso de geometría de secundaria, que denominaron *lectura y coloración*, cuyo objetivo fue apoyar a los estudiantes a tener en cuenta toda la información necesaria para desarrollar una prueba. La estrategia se deriva de consideraciones teóricas sobre los procesos cognitivos subyacentes a la producción de prueba que tiene varios pasos. La estrategia resultó ser eficiente en el sentido de que los estudiantes no tenían que recurrir tanto a la memoria para organizar los pasos en la secuencia de la prueba; por otro lado, cuando hay saturación de colores, estos causan disturbios visuales y generan algún grado de confusión en los estudiantes.

Miyazaki, Fujita y Jones (2015), con el propósito de que estudiantes de grado octavo de Japón apreciaran la estructura de una prueba, propusieron combinar dos ideas: el uso de diagramas de flujo que exponen la *historia* de la prueba y el uso de problemas abiertos. La construcción de la prueba fue considerada por ellos como un problema abierto pues los estudiantes tenían la posibilidad de construir soluciones múltiples decidiendo las suposiciones y las proposiciones intermedias necesarias para deducir una conclusión dada. Por otro lado, el uso del diagrama de flujo fue usado como instrumento para presentar la prueba que se va construyendo como resultado de la solución del tipo de problema abierto antes descrito. Los resultados del estudio muestran que el empleo de estos diagramas de flujo ayudó a los estudiantes a identificar las condiciones necesarias y combinarlas para obtener las conclusiones que conformaban una prueba válida.

Para finalizar este apartado, se presentan tres estudios en los cuales el tratamiento de la prueba se da en un meta-nivel. Por un lado, Heinze, Reiss y Groß (2006) basados en la propuesta de Boero y sus colegas, sobre las fases para construcción de un teorema, y en la idea para enseñar métodos heurísticos en la resolución de problemas de Schoenfeld, diseñaron un entorno de aprendizaje implementado para estudiantes alemanes de grado octavo. Estas heurísticas se incluyeron en historias basadas en procesos de demostraciones de personajes hipotéticos que estaban acompañadas de comentarios y explicaciones a nivel meta sobre la prueba. Los estudiantes debían entonces explicar lo que ocurría en la historia y completar textos que incluían espacios en blanco. Los hallazgos mostraron que este ambiente de aprendizaje fue particularmente eficiente para estudiantes con bajo rendimiento.

Kuntze (2008) por otro lado, estableció un ambiente de aprendizaje llamado *método de estudio de un tópico*, en el que se solicitaba a los estudiantes alemanes de nivel universitario que escribieran textos sobre diferentes aspectos del proceso de prueba con miras a fomentar su meta-conocimiento en relación con la prueba. Así, por ejemplo, se le pidió que evaluaran argumentaciones que contenían errores -basado en el método de Heinze, Reiss y Groß (2006)-, o que comentaran citas de matemáticos sobre la prueba. El autor encontró que el método de estudio propuesto le permitió establecer una posible correlación entre meta-conocimiento sobre la prueba, y la competencia para construirla y comprenderla.

Finalmente, Blanton, Stylianou y David (2003) no propusieron ambientes específicos de clase; más bien, en el marco de una perspectiva Vigotskyana, han investigado la naturaleza y el papel de varios tipos de andamiajes en el aprendizaje y la enseñanza de la prueba. Entre sus resultados se destaca que aquellas propuestas en las cuales los estudiantes deben participar en discusiones de toda la clase, que incluyen acciones de carácter metacognitivo, y negociaciones sobre tales asuntos metacognitivos, favorecen ostensiblemente la capacidad para construir pruebas matemáticas –consecuencia que se corresponde con Kuntze (2008)–.

1.2 TRATAMIENTO DE LA ARGUMENTACIÓN Y LA PRUEBA EN EL AULA: EL PAPEL DEL PROFESOR

En la Sección anterior se describieron estudios que permiten tener una mirada panorámica sobre cómo investigadores del campo de la Educación Matemática han propuesto ambientes para involucrar a los estudiantes en procesos de argumentación y prueba, teniendo en cuenta enfoques teóricos que complementan la perspectiva sociocultural de la prueba. En esta Sección, se presentan algunos estudios empíricos o teóricos que específicamente se concentran en el papel del profesor en la gestión de la argumentación y la prueba en el aula. Vale decir que, probablemente, serán retomados estudios que fueron expuestos en la Sección anterior; no obstante, acá el foco recaerá en el profesor y no tanto en el ambiente general de aprendizaje.

En el marco de una perspectiva social del aprendizaje y la enseñanza en general, y de los procesos de argumentación y prueba en particular, se reconoce como necesario un ajuste considerable en la labor del profesor, acostumbrado a una interacción basada en una postura expositiva del conocimiento (desde una perspectiva tradicional). En la perspectiva social, las formas de interacción estudiante-estudiante, estudiante-profesor y estudiante/profesor-conocimiento, se reconocen diferentes a las perspectivas tradicionales, por cuanto están engendradas generalmente en comunidades caracterizadas por la *cultura del por qué* o *la indagación*; esto lleva a que los profesores deban gestionar maneras que involucren a los estudiantes con procesos ciertamente complejos de la actividad matemática (*e.g.*, la argumentación matemática), y ganar conciencia de todos los cambios que ello genera en la comunidad de la clase. A continuación, se exponen varios estudios que, empleando diversos enfoques teóricos, han referido al papel del profesor en sus interacciones con los estudiantes. Estos se han organizado en tres grupos de estudios según su contexto: (i) el papel del profesor en clases de secundaria diferentes a la de geometría; (ii) el papel del profesor en clases (o seminarios con profesores) relativos a la geometría específicamente; y (iii) el papel del profesor en clases de nivel universitario.

1.2.1 Papel del profesor en clases de secundaria

En dos investigaciones llevadas a cabo en clases de probabilidad de grado octavo (Schwarz, Hershkowitz, & Azmon, 2006; Azmon, Hershkowitz, & Schwarz, 2011) fueron identificados patrones recurrentes de interacción entre dos profesores y sus estudiantes. Uno de los profesores (A) desempeñó un papel mediador, mientras que el otro (B) pidió respuestas breves y rápidas, sin disposición para la argumentación. En el primero de los casos, los estudiantes se sienten obligados a justificar las aserciones provistas y estás son usadas para llegar a acuerdos y negociar significados matemáticos. En el segundo de los casos, los estudiantes tienden a adoptar las explicaciones del profesor como suyas, sin ganar autonomía. Al hacer una comparación entre las explicaciones de los estudiantes en las dos clases, los autores identificaron que estas se diferenciaban en términos de riqueza y no tanto en términos de corrección; fue usual que las explicaciones dadas en la clase del profesor A ofrecieran argumentos más sofisticados que los de la otra clase. Concluyeron que estos resultados se justifican porque en la clase del profesor A fueron instauradas normas sociomatemáticas relativas a la responsabilidad de los estudiantes para la elaboración de sus explicaciones y participación en la construcción de su conocimiento. Los investigadores resaltan la importancia del papel mediador del profesor y sugieren la importancia de educar a los profesores para que puedan manejar eficientemente las discusiones en el aula de clase.

La escuela italiana ha abordado la mediación semiótica como otra perspectiva teórica en relación con el rol del profesor en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la argumentación, particularmente cuando se emplea un artefacto en dicho proceso, como EGD. Un ejemplo de ello es expuesto por Mariotti (2009) quien, usando la idea seminal de Vygotsky sobre artefacto, postula que este puede ser explotado por el profesor como una herramienta de mediación semiótica que permite desarrollar signos matemáticos genuinos, que se separan del uso del artefacto, pero que mantienen con él un vínculo semiótico profundo. Alude a un ciclo didáctico que organiza la instrucción pedagógica para estudiantes de grado décimo (implementada en Italia y Francia), en el cual las actividades semióticas con el artefacto y la discusión matemática colectiva juegan un papel crucial. En dicha discusión, la acción intencional del profesor se centra en orientar el proceso de mediación semiótica, con el uso de artefacto, que conduce a la evolución esperada de los signos, que para este caso se relacionaron con el objeto función. La autora llama la atención, como se ha visto con otros estudios, sobre el sistema de normas asociado a este proceso; específicamente para este estudio, menciona que la evolución de significados personales de los estudiantes a significados matemáticos requiere el desarrollo de un contrato didáctico específico relacionado con el reconocimiento de la relación entre la experiencia con el artefacto y el conocimiento matemático. Este "nuevo" contrato requiere intervenciones del maestro dirigidas a cambiar el discurso, a un metanivel, sobre el objeto en cuestión. En otras palabras, el profesor requiere promover el paso de normas sociales a normas sociomatemáticas: si bien la comunidad de clase tiene como norma social declarar lo que se comparte o debe hacerse, es responsabilidad del maestro precisar la norma sociomatemática consistente en usar términos y criterios específicos para reconocer lo que se puede llamar matemáticas y cómo se puede hacer referencia a tales matemáticas (*e.g.*, tal generalización o tal síntesis es válida desde lo matemático).

Para finalizar este apartado, se trae a colación el estudio de Cusi & Malara (2009); ellos no se centraron tanto en los procesos de interacción en el aula, sino que asumieron una perspectiva del profesor como modelo. Ellos, en el marco de un curso de teoría de números de grado noveno, decantaron una aproximación teórica según la cual un modelo de profesor debe tener las siguientes características: a) estimular la actitud de los estudiantes en la investigación y actuar él como parte integral en dicho trabajo de investigación; b) actuar como una guía práctica-estratégica y como una guía reflexiva para identificar modelos prácticos-estratégicos efectivos durante las actividades de clase; c) mantener un equilibrio entre los aspectos semántico y sintáctico del lenguaje algebraico; d) interpretar acciones y enunciaciones de los estudiantes con el objetivo de anticipar pensamientos; y e) provocar actitudes reflexivas como activador de acciones meta-cognitivas. Dicen los autores que esta es una caracterización útil que puede tener implicaciones para la formación de profesores.

1.2.2 Papel del profesor en clases de geometría

Lampert (1993) llevó a cabo un estudio con profesores de geometría de la escuela secundaria. Sus resultados mostraron que no fue suficiente usar EGD, trabajar colaborativamente por grupos pequeños de estudiantes, ni cambiar el rol del profesor de *sabio expositor* a *guía del estudiante*, para involucrar a los estudiantes con actividades de exploración y conjeturación. Pese a la introducción de estas modificaciones al ambiente de clase, los estudiantes seguían presentando ciertas dificultades, algunas similares a las que sucedían en clases tradicionales. Con ello, la autora quiso ilustrar que, además de lo anterior, otros ajustes deben ser llevados a cabo tanto por los estudiantes como por el profesor. De manera específica, indicó que era necesario instaurar un contrato didáctico diferente al que era usual para la clase de geometría; por ejemplo, los estudiantes debían abandonar la manera en que usualmente abordaban el sistema axiomático (ellos ahora proponían las conjeturas a estudiar) y el profesor ya no debía estar preocupado por la cobertura de un cuerpo estándar de contenido, sino por la misma producción de los estudiantes. Vale decir que, específicamente, esta autora en un estudio llevado a cabo con estudiantes de grado quinto, basado en la resolución de problemas y la formulación de conjeturas en clases aritmética, abordó aspectos relativos al papel del profesor en el establecimiento de normas sociomatemáticas de la clase; como resultado infiere que el desarrollo de tales normas en torno a la argumentación lleva a los estudiantes a aprender cierta virtud intelectual un poco en consonancia con los trabajos de Yackel y sus colegas (Lampert, 2001).

Herbst y sus colegas han llevado a cabo estudios tanto en contextos escolares (principalmente en cursos de secundaria) como en contextos de formación de profesores. En lo que respecta a las clases de geometría, advierten que un papel clave del profesor en la instrucción, consiste en administrar lo que han denominado los intercambios de instrucción –cláusula del contrato didáctico generalizable para varios contextos educativos– (Herbst P. , 2006; Herbst & Chazan, 2012). Entiéndase esto como crear tareas u oportunidades de trabajo en las que los estudiantes puedan actuar informados por el conocimiento puesto en juego. Identifican dos maneras claves en las que los profesores pueden gestionar los intercambios de instrucción: (i) a través de negociar normas que involucren a los estudiantes en una tarea completamente nueva, y (ii) enmarcando una tarea determinada como un caso de otras tareas realizadas antes, donde las normas que advierten la responsabilidad de los estudiantes ya son tácitas o fueron establecidas previamente. Vale decir que en relación con el ítem (ii), los autores indican que tanto las tareas como las normas asociadas determinan una situación instruccional; prototipos de tales situaciones instruccionales en las clases de geometría son situaciones *de exploración*, de *hacer pruebas* y de *construcción* (Herbst, Chen, Weiss, & González, 2009; Herbst, y otros, 2010).

Estos autores, además, proponen una perspectiva según la cual los profesores de geometría tienen una racionalidad práctica (Herbst, Nachlieli, & Chazan, 2011; Herbst & Chazan, 2012; Herbst & Kosko, 2014); esto es, una cierta sensación cuando enseñan conformada por: 1) sus principios y valores que permiten justificar (o descartar) acciones posibles en una situación de instrucción; y 2) sus disposiciones o prácticas, es decir, qué valores, compromisos y tendencias puede utilizar un observador para describir las acciones de los maestros. El principal hallazgo del estudio es que tanto las acciones de los profesores y los estudiantes en un aula de geometría están en gran medida conformadas, pero por sobre todo justificadas, por normas institucionales que especifican cuáles son sus responsabilidades en el aula. En este caso, las normas de la clase se convierten en un medio para analizar las interacciones. De alguna forma, esta conclusión complementa la mirada que estudios antes referenciados daban al constructo *norma* (social, sociomatemática o contrato didáctico); pues en ellos se estudiaba el papel del profesor para instaurar normas que favorezcan la producción de argumentos (*e.g.*, Clark, 2005; Azmon, Hershkowitz & Schwarz, 2011; Matos & Rodrigues, 2011), o la conformación de ciertas normas relacionadas con determinar lo que cuenta como un argumento válido o lo que se considera como una idea relevante o interesante desde un punto de vista matemático (Yackel & Cobb, 1996; Yackel, 2001; Yackel & Rasmussen, 2002). En los trabajos de Herbst y sus colegas, el sistema de normas se utiliza como herramienta analítica que permite explicar las acciones que puede tomar un profesor con base en lo que concibe y practica. Estos estudios proporcionan un medio para discutir la enseñanza desde un punto de vista que no reduce todas las consideraciones a una descripción de los atributos personales del profesor (su conocimiento, comprensión, creencias y actitudes). En contraste, esta perspectiva permite considerar al profesor como un participante en una actividad colectiva cuya individualidad se manifiesta en la promulgación (y violaciones) de normas colectivas.

1.2.3 Papel del profesor en contexto universitario

Ubuz, Dinçer y Bulbul (2013) realizan un estudio en cursos universitarios de cálculo y análisis real sobre la estructura de la argumentación durante las interacciones profesor-estudiante. El análisis de datos fue realizado bajo el Modelo de Toulmin, y sus resultados sugieren que el profesor tiene un papel crucial sobre todo como guía en el proceso, ya sea aprobando o no, procederes de los estudiantes, respaldando las conclusiones intermedias dadas por los estudiantes y redireccionando acciones de los estudiantes proponiendo ejemplos o sugerencias cuando los ellos están atascados o no empiezan la argumentación.

Yackel (2002) por su parte, realizó un análisis de la argumentación colectiva en una variedad de contextos de aula, desde la escuela primaria hasta clases de ecuaciones diferenciales de nivel universitario, con el propósito de ilustrar varios roles que desempeña un profesor en ese proceso. Estos incluyen el inicio de la negociación de las normas de clase que fomentan la argumentación como el núcleo de la actividad matemática de los estudiantes, el apoyo mientras interactúan entre sí para desarrollar argumentos (orientar o redirigir conversaciones), y el suministro de elementos de un argumento que se omiten o están implícitos (datos y garantías). La autora rescata dos ideas importantes de estos análisis. En primer lugar, un énfasis en la argumentación puede utilizarse de manera productiva para proporcionar aberturas en las discusiones matemáticas de forma tal que surjan nuevos conceptos y herramientas matemáticas; en segundo lugar, los análisis demuestran que los profesores necesitan tener una comprensión profunda del desarrollo conceptual matemático de los estudiantes y una comprensión sofisticada de los conceptos matemáticos que subyacen en las actividades de instrucción que se están utilizando –lo cual se corresponde con visiones como las de Schoenfeld y Kilpatrick (2008) las cuales señalan que el profesor debe tener un conocimiento profundo y amplio de las matemáticas escolares–.

1.3 Argumentación y Prueba en el Contexto Colombiano

La profesora Leonor Camargo, en su tesis doctoral (Camargo, 2010), comenta que el énfasis curricular en las clase de geometría, tanto en primaria como en secundaria, continúa centrándose en el reconocimiento visual de algunas representaciones gráficas (diagramas) de objetos geométricos, su clasificación, la memorización de algunas fórmulas para encontrar áreas y perímetros y en la memorización de demostraciones de algunos teoremas, aun cuando la documentación institucional promovida por el Gobierno Colombiano –lineamientos curriculares vigentes (MEN, 1998) y los estándares básicos de aprendizaje (MEN, 2006)– suscitan una concepción de las clases de matemáticas como espacios en los cuales los estudiantes se deben involucrar en la exploración de situaciones, la comunicación oral y escrita de ideas matemáticas y la verificación, negociación y validación de éstas (Camargo, 2010). Si bien, en el último quinquenio ha habido intentos para que el escenario antes descrito cambie en el contexto escolar, estos todavía son minúsculos en relación con el enfoque tradicional de la enseñanza de la geometría, consecuencia esto, entre otros aspectos, del poco espacio que los profesores les dan a tales prácticas en el currículo que implementan en sus clases. En consecuencia, un reto de los programas de formación de profesores -tal como explicita el MEN en cuanto a las características específicas de calidad de los programas de Licenciatura (MEN, 3 de febrero de 2016)- consiste en tener la capacidad de garantizar la pertinencia y el logro de los procesos educativos a partir de la apropiación de los Estándares Básicos de Competencias y lineamientos curriculares antes citados, con el fin de fortalecer los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Para esto, los programas deben incluir formación en pedagogía, didáctica de los saberes escolares, y formación disciplinar.

Los esfuerzos de cambios en esa vía, se han fundado en dos escenarios distintos: (i) en los programas de formación de profesores de matemáticas tanto de pregrado como de posgrado, incursionando con propuestas alternativas para abordar los procesos de prueba y argumentación en geometría (*e.g.*, Universidad Distrital Francisco José de Caldas en cabeza del profesor Martín Acosta, Universidad Industrial de Santander en cabeza del profesor Jorge Fiallo, y Universidad Pedagógica Nacional en cabeza del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría -Æ•G-); y (ii) en proyectos de investigación de índole teórico y empírico llevados a cabo por grupos de investigación de la universidades antes citadas.

A continuación, se presenta algunos estudios que han abordado los procesos de argumentación y prueba, no necesariamente en geometría, con el propósito de dar una panorámica general del estado de la investigación en Colombia, respecto de dicho tema.

Estudios encabezados por el profesor Fiallo se ha concentrado en actividades de argumentación y prueba en dos contextos, estudiantes de grado décimo (14-15 años) y profesores en ejercicio. En el primer escenario, los estudios se han concentrado en análisis de índole cognitivo sobre los tipos de argumentos (utilizando, entre otros, el Modelo de Toulmin) o rupturas entre los procesos de conjeturación y prueba en un curso de trigonometría (Fiallo & Gutiérrez, 2017). En el otro escenario, los estudios se han concentrado en investigar una comunidad de práctica de educadores matemáticos que incorporan tecnologías digitales en sus prácticas profesionales en el contexto colombiano; específicamente, abordan la problemática del uso de EGD para la enseñanza de la geometría de grado octavo y el uso restringido de ésta, lo que impide un verdadero impacto en el aprendizaje del área. Concluyen que el conjunto de procesos reflexivos explica cómo provocan el cambio de rumbo de la clase planeada por el profesor, a consecuencia de los recursos didácticos concretos o virtuales que selecciona y usa para promover actividad matemática por parte de sus estudiantes (Conde, Parada, & Fiallo, 2016).

Por otro lado, el profesor Acosta se ha concentrado más en los programas (o seminarios) de formación de profesores -bien sea inicial, avanzada o continua-, incentivando desde allí, maneras alternativas de involucrar a los estudiantes en procesos de argumentación en Geometría. Su trabajo se focaliza en estudiar de manera minuciosa el papel de EGD, aludiendo a técnicas de una praxeología (en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas) en problemas de construcción, exploración y razonamiento empleando dichos entornos (Acosta, 2005; Acosta, Mejía, & Rodríguez, 2013).

El grupo *Æ•G* es quien más ha aportado en el campo de la argumentación y la prueba en geometría tanto con proyectos de investigación que involucran contextos de formación de profesores, principalmente, como en propuestas de innovación en el aula (Perry, Camargo, & Samper, 2006; Samper, Perry, Camargo, Molina, & Echeverry, 2010; Echeverry, Molina, Samper, Perry, & Camargo, 2012; Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2013). Sus estudios han abordado varios aspectos de nivel cognitivo, de nivel semiótico o de nivel sociocultural, todos en el marco de experimentos de enseñanza que se fundamentan en el constructo actividad demostrativa (conjunción de los procesos de conjeturación y justificación) y en una aproximación metodológica para la enseñanza alternativa a la tradicional. Esta aproximación se fundamenta en tres aspectos específicos: la resolución de problemas abiertos de conjeturación, el uso de EGD y la interacción en el aula (Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2013). Desde un punto de vista cognitivo, el grupo ha indagado sobre el uso de la función del arrastre para generar experiencias de aprendizaje de la prueba en geometría (Camargo, Samper, Perry, Molina, & Echeverry, 2009), la influencia de los EGD en la comprensión de la condicional (Samper, Perry, Camargo, Molina, & Echeverry, 2010; Echeverry, Molina, Samper, Perry, & Camargo, 2012). Desde un punto de vista sociocultural, se ha ilustrado cómo la aproximación metodológica descrita involucra a los estudiantes en la actividad demostrativa conformando una comunidad de práctica. Desde un punto de vista semiótico, utilizando la propuesta de signo tríadico de Peirce (Sáenz-Ludlow & Zellweger, 2012; Molina, Perry, Camargo, & Samper, 2015; Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow, & Molina, 2016), se ha estudiado el proceso de construcción del significado holístico de varios objetos geométricos, bien sean definiciones o teoremas (Molina, Perry, Camargo, & Samper, 2015; Camargo, Perry, Samper, Sáenz-Ludlow, & Molina, 2015; Samper & Plazas, 2017).

Vale decir que, si bien en todos los estudios se destaca el papel del profesor como el experto de la comunidad de práctica de la clase, el análisis del rol del profesor ha sido protagonista, específicamente en los estudios que asumen una perspectiva semiótica. En ellos, se destaca el papel del profesor como mediador entre el significado de un objeto por parte de los estudiantes y el significado matemático de este.

1.4 Aproximación al problema y preguntas de investigación

Esta Sección tiene como propósito precisar el área problemática que se pretende abordar en esta investigación, y una aproximación a los marcos de teóricos y metodológicos de la misma. Para ambos propósitos, la revisión de la literatura expuesta en las secciones anteriores es fundamental: en primera instancia, una síntesis de esta permite destacar algunos resultados recurrentes en los estudios consultados y aquellos asuntos que se reconocen como áreas abiertas de investigación. En segunda, permite decantar los marcos teórico y metodológico que pueden ser útiles para desarrollar el estudio. En conformidad con ello, a continuación, se presentan dos apartados que se corresponden con estos dos asuntos. Como resultado del primero, se expone la motivación particular para desarrollar este trabajo y la explicitación del área problemática.

1.4.1 Síntesis de la literatura

Los textos consultados proveen un panorama general sobre la investigación en Educación Matemática que, desde una perspectiva que concibe la prueba y la argumentación como prácticas sociales (de aula), se ha venido desarrollando desde la década del noventa. Se presentaron documentos que (i) proponen y analizan diversas intervenciones de aula dirigidas a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la argumentación y la prueba, y (ii) analizan el papel del profesor en el proceso de instrucción de tales prácticas. A manera de síntesis, algunos resultados o consensos que se han establecido en la comunidad de educadores matemáticos al respecto de estos dos elementos son los siguientes.

1.4.1.1 *Sobre las intervenciones en el aula*

En el marco de los estudios presentados que pretenden generar ambientes que involucren a los estudiantes en procesos de argumentación y prueba, entendidas estas como prácticas sociales del aula, tres asuntos se destacan como recurrentes en sus propuestas: (i) tareas que inviten a la exploración y formulación de conjeturas empleando EGD; (ii) una intención de generar comunidades de aula en las cuales la regulación, instauración y cambios en el sistema de normas (contrato didáctico o normas sociales y sociomatemáticas) de la clase se concibe como determinante para que los estudiantes ganen autonomía en tales prácticas; y (iii) tareas centradas en actividades metacognitivas.

En relación con el primer asunto, la intención de los académicos de emplear los EGD como mediadores, entre otros, es disminuir la tensión existente entre la naturaleza empírica y la naturaleza teórica de las matemáticas, en este caso, de la geometría en particular. La exploración en el EGD en busca de la solución de problemas y la respectiva formulación de la conjetura implica considerar argumentaciones abductivas o inductivas –que se ven favorecidas por los tipos de arrastre empleados–, cruciales en las actividades matemáticas que buscan ser significativas para los estudiantes. En estos estudios son determinantes una concepción amplia de la actividad demostrativa y una postura epistemológica consistente en la posible relación entre los procesos de argumentación y prueba (*e.g.*, Boero, Garuti, Lemut & Mariotti, 1996; Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997; Olivero & Robutti, 2001; Pedemonte, 2007; Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010). De hecho, otros estudios resaltan cómo los EGD favorecen la construcción de demostraciones (Olivero, 2006) y al contrario de lo que se puede pensar, no elimina la necesidad de llevar a cabo esta actividad (Jones, 2000); al considerar que la prueba en Geometría está socio-culturalmente delimitada e íntimamente relacionada con el mundo perceptivo, una prueba matemática está estrechamente vinculada con la correspondiente conjetura y, en particular, con la forma en la que esta surgió (Jones & Tzekaki, 2016; Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, & Stevenson, 2012; Sinclair & Yerushalmy, 2016; Sinclair, et al., 2016).

En relación con el segundo asunto, al considerar la argumentación y la prueba como prácticas sociales, y al tener la pretensión de generar ambientes basados en comunidades de indagación (cultura del por qué) e investigación (cultura de exploración), se considera como determinante la discusión matemática que tiene lugar durante la interacción en el aula (Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, & Stevenson, 2012; Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012; Sinclair, et al., 2016; Stylianides, Stylianides, & Weber, 2017). En ese marco, toman un lugar preponderante las normas de clase que favorecen tanto los procesos de interacción entre profesor y estudiantes, y entre estudiantes, como la interacción entre profesor y estudiantes con el conocimiento. En particular esta última interacción no sólo permite precisar las responsabilidades de cada uno con las tareas matemáticas puestas en juego, sino que también permite decantar aquello que cuenta como válido o aceptable desde un punto de vista matemático para la comunidad de la clase. Algunos estudios se concentraron en precisar cómo se constituye el sistema de normas en el aula y cómo los estudiantes ganan autonomía en la actividad matemática correspondiente (Yackel & Cobb, 1996; Yackel, Rasmussen, & King, 2000; Clark, 2005; Matos & Rodrigues,

2011) y otros en identificar las normas (o precisar sus cambios) para que los estudiantes se involucren con las prácticas de argumentación y prueba (Marrades & Gutiérrez, 2000; Planas & Iranzo, 2009; Assis, Godino, & Frade, 2012).

En cuanto al tercer asunto, las experiencias investigativas muestran cómo abordar aspectos metacognitivos tales como complementar o precisar errores en una prueba aumenta las competencias argumentativas de los estudiantes (Heinze, Reiss, & Groß, 2006; Kuntze, 2008). Vale decir que los trabajos que estudian normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996; Yackel, Rasmussen, & King, 2000; Yackel & Rasmussen, 2002) o metanormas (Planas & Iranzo, 2009; Assis, Godino, & Frade, 2012) abordan también asuntos de nivel meta puesto que describen la forma en que los estudiantes ganan autonomía en términos de poder precisar cuándo una argumentación es válida en matemáticas o cuándo una práctica se concibe como matemática.

En términos generales, de los estudios consultados se puede concluir que involucrar a los estudiantes en prácticas de argumentación y prueba implica considerar: los tipos de tareas (*e.g.*, problemas abiertos, estudio crítico de los argumentos de los estudiantes, discusión sobre la base de la justificación, trabajar en el desarrollo de pruebas, etc.); la gestión de actividades (*e.g.*, discusiones estudiantiles, producción de trabajos escritos, uso de software, diagramas e instrumentos, técnicas de gestión de clase -uso de diagramas de razonamiento, discursos a nivel meta, gestión de diferentes registros, debate de toda la clase-); y las funciones y responsabilidades de los estudiantes y profesores en las actividades de clase (Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016; Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012; Sinclair, et al., 2016).

1.4.1.2 *Sobre el rol del profesor en la instrucción*

Independientemente del nivel educativo en donde se lleve a cabo el proceso de instrucción, la mayoría de los estudios citados sobre este aspecto, indican que el profesor desempeña un papel central en el establecimiento de normas para las actividades matemáticas de los estudiantes y, en ese sentido, en el establecimiento de la calidad matemática que tiene lugar en el ambiente de aula. En ese contexto, el profesor no sólo debe intentar constituir normas que precisen las responsabilidades de los estudiantes y las suyas, sino que debe favorecer normas a través de las cuales se discuta y decida lo que cuenta como una argumentación o explicación válida o lo que cuenta como matemáticamente sofisticado, elegante, eficiente y diferente (Yackel & Cobb, 1996). En otras palabras, y entre otras cosas, un profesor necesita considerar cómo renegociar de manera productiva un sistema de normas (contrato didáctico, normas sociales o sociomatemáticas) que favorezca la producción de argumentos y la participación de los estudiantes en la actividad asociada (Lampert, 2001; Schwarz, Hershkowitz & Azmon, 2006; Mariotti, 2009; Azmon, Hershkowitz & Schwarz, 2011; Jones & Herbst, 2012; Lin, Yang, Lo, Tsamir & Stylianides, 2012; Selden, 2012; Sinclair & Yerushalmy, 2016; Stylianides, Bieda & Morselli, 2016; Stylianides, Stylianides & Weber, 2017). Sobresalen los trabajos del profesor Herbst y sus colegas, quienes además de lo anterior, emplean el sistema de normas como herramienta analítica que permite explicar las acciones que puede realizar un profesor con base en lo que practica y concibe (Herbst, Chen, Weiss, & González, 2009; Herbst & Chazan, 2012; Herbst & Kosko, 2014).

Otras acciones que el profesor debe llevar a cabo en un aula donde se pretende involucrar a los estudiantes en prácticas de argumentación y prueba, que se han destacado en los estudios consultados son: (i) guiar a los estudiantes en el proceso de argumentación, ya sea aprobando o no, procederes de los estudiantes, respaldando sus conclusiones intermedias si son correctas, o redireccionando sus acciones cuando están atascados; (ii) comprender profundamente el desarrollo conceptual matemático de los estudiantes y tener una comprensión sofisticada de los conceptos matemáticos que subyacen a las actividades de instrucción que se están utilizando (Yackel, 2002); y (iii) particularmente, cuando se emplean EGD en los ambientes de clase, explotar tal artefacto como una herramienta de mediación semiótica que favorezca el desarrollo de significados por parte de los estudiantes (Mariotti, 2009).

1.4.2 Precisión del área problemática de investigación

Los trabajos investigativos expuestos en las secciones previas se constituyen en antecedentes que han abordado la problemática planteada por Stylianides, Bieda y Morselli (2016, p. 344), citada al comienzo del presente Capítulo. En este apartado se especifica el área problemática que se abordará en el estudio, y la primera versión de las preguntas generales que orientarían su desarrollo. Para ello, se presentará a manera de síntesis la *situación* que contextualiza la problemática, y las *consecuencias indeseables* de dicha situación que se pretenden abordar con el estudio.

1.4.2.1 *Área problemática específica*

Situación: Existe una tendencia curricular e investigativa en torno a involucrar a los estudiantes en procesos de argumentación y prueba en matemáticas, en particular, en Geometría. Desde una perspectiva sociocultural, ello implica considerar varios aspectos del rol de profesor durante la instrucción relativa a tales procesos; entre estos se destacan: Interpretar la actividad de los estudiantes para tener idea de su comprensión matemática; tener un amplio bagaje sobre el conocimiento matemático inmerso; tener un uso idóneo de los recursos (e.g., EGD); proponer tareas que impliquen exploración o actividades metacognitivas, y tener un cuidado especial en la constitución-instauración-negociación de normas que regulen interacciones y prácticas de forma tal que sean diferentes a las de las clases tradicionales. (Para mayor ilustración de estos asuntos ver la Sección 1.4.1.2).

En el contexto colombiano, reconociendo los aspectos citados previamente y la importancia de la Geometría en los procesos educativos relativos a los procesos de argumentación, el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (*Æ•G*) de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia) ha venido desarrollando una innovación en el aula para tres cursos[4] de la línea de geometría del programa de formación inicial de profesores de matemáticas ofrecido por tal universidad. Gran parte de los estudios llevados a cabo por tal grupo de investigación se han concentrado en los dos primeros cursos (Elementos de Geometría y Geometría Plana) donde se implementa la innovación (Perry, Samper, Molina, Camargo, & Echeverry, 2012; Camargo, Perry, Samper, & Molina, 2015; Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow, & Molina, 2016; Samper & Plazas, 2017; Molina, Samper, Perry, Camargo, & Echeverry, 2010; Molina, Perry, Camargo, & Samper, 2015)[5], dejando de

[4] Los otros cursos se denominan Elementos de Geometría y Geometría Plana, ubicados en el primer y segundo semestre del programa citado. El curso Geometría del Espacio se ubica en el tercer semestre.
[5] Estos estudios han tenido cierto reconocimiento por la comunidad académica; ver, por ejemplo, Selden (2012), Sinclair y Yerushalmy (2016); y Stylianides, Stylianides y Weber (2017).

lado, hasta el momento, el estudio de aspectos sucedidos en el curso de Geometría del Espacio.

Consecuencias indeseables de la situación: Aun cuando la literatura especializada expone asuntos concretos que debe considerar un profesor para involucrar a los estudiantes en procesos de argumentación; y en particular, el grupo de investigación *Æ•G* de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia) ha venido desarrollando una innovación que los tiene en cuenta, tres asuntos problemáticos se desprenden de tales planteamientos:

1. No hay suficientes trabajos empíricos (con reflexión teórica) que ilustren el dinamismo de un sistema de normas que influye en diferentes tipos de argumentación, particularmente en las diferentes situaciones instruccionales –Herbst, et al. (2010)– que toman lugar en cursos de Geometría del Espacio de nivel universitario (Hanna & de Villiers, 2012; Sinclair, et al., 2016; Stylianides, Bieda & Morselli, 2016) que se basan en la resolución de problemas y uso de EGD.
2. Experiencias como profesor y observador de la innovación en cursos de Geometría del Espacio dejan la percepción de que aspectos relativos a la *interacción social en la clase*, específicamente, en lo que respecta al sistema de normas (*e.g.*, uso de formatos para presentar una prueba y reconocerla como válida, o usos del EGD como Cabri 3D para abordar eficientemente un problema) que circula en el aula y la gestión que hacen los profesores de este, son diferentes a los registrados para otros cursos de geometría (e.g., Geometría Plana).
3. Dada la compleja dinámica social en juego dentro de las aulas de matemáticas y las dificultades que los profesores enfrentan al manejar el diálogo [las interacciones en general] que está en el centro del aprendizaje significativo en matemáticas, no se perciben formas de empoderar a los profesores –en términos de su papel en la gestión del sistema de normas– para que apoyen a todos sus estudiantes a participar de manera significativa en la argumentación en el aula de matemáticas (Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016), más aún cuando se pretenden abordar diferentes tipos de procesos argumentativos (analógicos, abductivos, inductivos, deductivos, incluyendo la prueba).

Estos tres asuntos se pueden sintetizar de la siguiente manera:

Dada la compleja dinámica social dentro de aulas de Geometría del Espacio y las dificultades que los profesores enfrentan al gestionar las interacciones en ellas, es importante que la comunidad de investigación en Educación Matemática describa, por un lado, un sistema de normas que regule la actividad demostrativa e influya la producción de argumentos de diferente tipo -inductivo, abductivo, deductivo, por analogía- en cursos que se fundamentan en la Resolución de Problemas empleando EGD; y por otro lado, el papel que tiene el profesor para gestionar dicho sistema de normas durante el proceso de instrucción correspondiente.

La investigación que acá se presenta pretende proveer ciertos elementos previos que pueden ser utilizados por investigadores o profesores para generar herramientas que posibiliten el empoderamiento referido por Stylianides y colegas; en otras palabras, se pretende analizar desde perspectivas teóricas socioculturales, aspectos interaccionales e instruccionales que tienen lugar en un aula de Geometría del Espacio, para este caso de nivel universitario, en que los estudiantes y profesores se involucran en la resolución de problemas empleando Entornos de Geometría Dinámica (EGD), en procesos de argumentación y en la construcción de un sistema teórico formal. Abordar tal problemática desde un punto de vista investigativo, no sólo precisa el sistema de normas referido en el marco de un curso real de Geometría Euclidiana del Espacio de nivel universitario con las características ya mencionadas, sino que provee información sobre el conocimiento que debe tener un profesor cuando pretende involucrar a estudiantes de tal nivel educativo en la actividad demostrativa; en este caso particular, sobre el sistema de normas que regula la interacción y la producción de argumentos en un curso tal. La principal implicación de un estudio como este es llamar la atención sobre la toma de conciencia por parte de investigadores y profesores, con respecto al sistema de normas que condicionan y soportan las prácticas matemáticas en aulas que tienen características similares a la que sirve de escenario para esta investigación (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009).

Un estudio que aborde estos asuntos está en consonancia con lo planteado por Stylianides, Stylianides y Weber (2017), quienes mencionan que, pese a los avances notorios de orden teórico y empírico en el área, es necesario todavía más investigación sobre cómo elevar el papel de la prueba en las aulas ordinarias y cómo apoyar el trabajo de los profesores para que sus estudiantes se involucren en procesos de argumentación y mejoren su comprensión sobre la prueba.

1.4.2.2 *Preguntas de investigación*

Hasta acá se ha presentado el área problemática específica que se aborda en esta disertación; a continuación, se expone la *pregunta principal* que orientará el desarrollo posterior de este trabajo investigativo y cuya respuesta intenta aportar a la problemática planteada.

> PP: *¿Cuál es el sistema de normas que influye en la práctica de argumentación y en la producción de varios tipos de argumentos específicos que tienen lugar en un curso de Geometría del Espacio de nivel universitario que se fundamenta en la resolución de problemas abiertos de conjeturación y el uso de EGD*?

Como se expuso en el área problemática específica, tanto la práctica de argumentación como el papel del profesor son centrales para que el sistema de normas que se identifique como resultado de la pregunta principal, emerja, se instaure o se modifique. Así las cosas, indicios de respuestas a las siguientes *preguntas secundarias*, también se pretenden dilucidar con el estudio:

PS1: *¿Cómo los procesos de argumentación (y los tipos de argumentos asociados) articulan notaciones, conceptos, procedimientos, proposiciones, etc. presentes en la actividad matemática que tiene lugar en diferentes situaciones de una clase de geometría*?

PS2: *¿Cuál es el papel del profesor durante el proceso de instrucción en un curso de Geometría del Espacio de nivel universitario que se fundamenta en la resolución de problemas abiertos de conjeturación y el uso de EGD, respecto de la gestión del sistema de normas que regula la práctica de argumentación*?

En el siguiente capítulo, luego de que el marco teórico del estudio sea presentado, se tendrá un escenario suficiente para precisar tales preguntas y exponer los objetivos generales y específicos del estudio asociados a las mismas.

Capítulo 2

Referentes teóricos, objetivos y metodología

En este capítulo se presenta los presupuestos teóricos que se tendrán como referente para el estudio. En consonancia con la problemática y los antecedentes presentados en la Sección 1.4.2, el capítulo tratará sobre los siguientes aspectos: En la Sección 2.1.1 se presentan varias conceptualizaciones sobre *argumentación* y *prueba* (y término asociados -argumento, argumentar, probar-) desde diversas perspectivas de la Educación Matemática. Con base en ello, específicamente en el apartado 2.1.3.1 se presenta la postura que al respecto de tales términos y sus asociados (argumento, prueba, estructura de un argumento, y tipos y clases de argumento) se asumirá para el estudio. En la Sección 2.2 se presentan planteamientos teóricos respecto a la emergencia de los objetos matemáticos en las prácticas matemáticas, incluyendo el *argumento* como uno de tales objetos. Tal sección servirá de puente entre las secciones 2.1 y 2.3, dado que, en esta última se presentan varias posturas sobre *sistemas de normas* (provenientes de diversas perspectivas de la Educación Matemática) que regulan tales prácticas matemáticas. De manera particular, en los apartados 2.3.4 y 2.3.5 se exponen las posturas asumidas para este estudio con respecto a los sistemas de normas (y sus tipificaciones) y situaciones instruccionales frecuentes en las clases de geometría caracterizadas, a priori, por normas muy específicas. A partir del escenario presentado en las secciones previas del Capítulo 2, en el apartado 2.4 se exponen la versión final de las preguntas que orientan el estudio y los objetivos asociados. Finalmente, se expone la metodología del estudio, específicamente, se describen las fases para desarrollar la investigación y las herramientas analíticas empleadas.

2.1 Argumentación y prueba en Educación Matemática

Dada la variedad de interpretaciones que existen sobre los términos *argumentación* y *prueba* que se puede encontrar en el campo de la Educación Matemática (Balacheff, 2002; Reid & Knipping, 2010), es necesario precisar la postura epistemológica que a lo largo de este estudio se tendrá en cuenta en relación con tales conceptos; con esto, se procura evitar posibles interpretaciones no afortunadas al respecto (Balacheff, 2002; Mariotti, 2006). Para ello, en primera instancia se presentan diversas perspectivas y posturas que varios autores tiene con respecto a los términos *argumentación* y *argumento* en Educación Matemática; en seguida, se expone lo correspondiente para los términos *probar* y *prueba.* Luego se presenta un apartado que discute la relación entre la argumentación y la prueba ilustrando las dos perspectivas epistemológicas hegemónicas con respecto a esto. Con este contexto, en el apartado 2.1.3.1 se presenta tanto la postura que para este estudio se tuvo con respecto a todos los conceptos referenciados y su relación, como la descripción de los tipos y clases de argumentos tenidos en cuenta para el mismo.

2.1.1 Sobre Argumentación en Educación Matemática

En la educación matemática hay un creciente interés sobre la Argumentación (ver literatura citada en el capítulo anterior). Duval (1999) destaca dos razones por las cuales este fenómeno se presenta: (i) El reconocimiento de que, en la filosofía y la lingüística, la comunicación del pensamiento humano se basa en las lenguas naturales más que los lenguajes formales; y (ii) el reconocimiento de la importancia de los procesos sociales en el aprendizaje en la Educación Matemática. No obstante, lo anterior, existe una diversidad de aproximaciones para *Argumentación.* Reid y Knipping (2010) destacan por lo menos tres: Como un asunto sobre el convencimiento a otra persona (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1989), como un asunto relativo a la estructura del argumento y su referencia a las premisas aceptadas en una comunidad (Toulmin, 2003)[6], y como un asunto que se sitúa en el corazón de la actividad del discurso y focalizada en estructuras gramaticales (Anscombre & Ducrot, 1994).

[6] Reimpresión de su obra original The Uses of Arguments publicado en 1958.

Desde estas perspectivas (particularmente las dos primeras), tales autores presentan cuatro descripciones (o definiciones) sobre la *argumentación* reconocibles en la literatura especializada: como un tipo de razonamiento, como un comportamiento social, como un proceso que produce discurso lógico, o como un proceso que da lugar a la formulación de conjeturas. A su vez, destacan sus diversos roles en el campo de la Educación Matemática: es un obstáculo para el aprendizaje de la demostración –o prueba matemática– (Duval, 1991; 1999); es parte integral de la actividad matemática incluyendo el proceso de demostrar (Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti, 1996; Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010; Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, & Garuti, 1997); o es una precondición para el aprendizaje (Krummheuer, 1995; Yackel & Cobb, 1996). En lo que sigue, con el ánimo de ganar un poco de claridad sobre los conceptos *argumentación* y *argumento*, se describirán con mayor detalle las posturas de estos autores; esto posibilitará un escenario para asumir la postura que se tomará en este estudio tanto para tales conceptos como para el de *prueba matemática* y su relación con la *argumentación*.

Duval (1991) entiende por *argumentación* un tipo de razonamiento que tiene reglas implícitas provenientes tanto de la estructura del lenguaje, como del conocimiento de los hablantes. En consecuencia, el contenido semántico de las proposiciones puestas en juego es un aspecto esencial. Dicho autor asume la aproximación de Perelman según la cual la argumentación está ligada a la justificación o convencimiento de una tesis o pronunciamiento. En este escenario, Duval entiende por *argumento* cualquier elemento (hecho, resultado de un experimento, un ejemplo, una definición, un teorema, etc.) que pueda ser usado para justificar o refutar una proposición. En esencia, para Duval un argumento es la respuesta a las preguntas *por qué tú dices esto* o *porque tú crees aquello*.

Duval (1999) comenta que aquello que puede tomar valor y fuerza de argumento no depende tanto del dominio de conocimientos (e.g., matemáticas, derecho, historia, política) como del contexto particular que motiva el recurso a los argumentos. Este contexto de producción se determina en función de dos asuntos: por una parte, hay un motivo, aquello que pide el recurso de los argumentos (dar cuenta del sentido de una decisión, resolver un conflicto, resolver un problema que presenta restricciones lógicas); por otra, hay un propósito, aquello que se refiere a lo que está en juego, es decir, convencer a otro o disminuir los riesgos de error o de incertidumbre de una elección determinada. A su vez, Duval habla de la fuerza del argumento, aspecto que es variable y depende del contexto. Por ejemplo, en las matemáticas o en las ciencias, tanto el motivo como el objetivo de la argumentación son relativos al problema a resolver. En este contexto, lo que determina la elección de los argumentos, y la fuerza de estos, depende principalmente de la pertinencia en la situación: ni las creencias de la persona a quien se le dirige el argumento influyen en la escogencia de los mismos, ni la fuerza del argumento depende de qué tanto pueda influir en esta persona. A este caso, en el cual los argumentos de alguna manera aseguran que la solución funciona o que puede funcionar, Duval lo denomina *argumentación heurística*. En contraste, cuando se trata de convencer a alguien para que tome una decisión, para que se resuelva un conflicto de intereses, o para obtener consenso en relación con un asunto, se ponen en juego otras cosas, esto porque se toma en cuenta principalmente las creencias o el universo del interlocutor. Duval llama a este último caso, *argumentación retórica*. De ninguna manera se puede pensar que las argumentaciones heurísticas dan cuenta de razonamientos; estas pueden consistir en una explicación, esto es, una descripción del funcionamiento de un sistema a partir de ejemplos o casos particulares. Este caso es empleado por el autor para precisar la importancia que tiene el discurso, y en este escenario, el sistema semiótico que ello implica. Precisamente, es esta faceta discursiva la que genera la postura según la cual existe brecha cognitiva entre la argumentación y la prueba matemática: las operaciones discursivas llevadas a cabo en un leguaje formal (de las matemáticas) son diferentes a las que se pueden llevar a cabo dentro del lenguaje natural (de las argumentaciones retóricas, por ejemplo).

Boero y sus colegas (Boero, 1999; Douek, 2007; Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010; Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012) han asumido una postura según la cual son otorgados dos significados a *argumentación*. En primera instancia, es el discurso escrito u oral conducido de acuerdo con reglas compartidas, y que apunta a una conclusión mutuamente aceptable acerca de una declaración, cuyo contenido o verdad están bajo debate. En segunda, es el proceso colectivo o individual que produce dicho discurso. Así, Boero y sus colegas entienden *argumento* como una razón o razones a favor o en contra de una opinión o proposición. En este sentido, una argumentación consiste en uno o más argumentos lógicamente conectados por medio de una deducción, una inducción o una analogía, por ejemplo. Esta conceptualización de *argumento* se corresponde con la provista por Duval (citada previamente); no obstante, en lo que respecta a *argumentación*, sus posturas difieren sensiblemente. Para Duval, la argumentación y la prueba matemática tienen una brecha casi insalvable dados los marcos de sus operaciones discursivas (lenguaje natural y leguaje formal, respectivamente. En contraste, la propuesta de la escuela italiana asume la argumentación en un sentido tan amplio que concibe la prueba matemática como un tipo especial de argumentación; más aún, reconociendo la diferencia entre ambos procesos, conciben la posibilidad de continuidad entre ellos salvando la brecha descrita por Duval. De manera más específica, precisan que la argumentación está presente en las siguientes fases de la actividad matemática: la producción de una conjetura[7], la formulación de una proposición, la exploración del contenido de la conjetura, selección y encadenamiento de argumentos teóricos en cadenas deductivas, la organización de tales cadenas de argumento en una aceptable según los estándares matemáticos actuales o una demostración (prueba formal). Vale decir que en uno de sus trabajos ven el potencial de usar el Modelo de Toulmin para estudiar la estructura de los argumentos presentes en estas fases de la actividad matemática (Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010). Más adelante (ver apartado 2.1.3), su uso será precisado.

Krummheuer (1995), por su parte, en concordancia con la postura de la escuela italiana, concibe *argumentación* como un proceso; no obstante, asume que el producto del tal proceso es un *argumento*. Su caracterización deja claro que dicho proceso (la argumentación) lleva al pronunciamiento (aceptación o rechazo) de una aserción (o proposición) dada que, como se expone enseguida, podría incluir una deducción de índole deductivo. Este autor asume que este proceso es principalmente un fenómeno social que tiene lugar cuando los individuos, cooperativamente, tratan de adaptar sus intenciones e interpretaciones por medio de la presentación verbal de la *racionalidad* de sus acciones. Vale precisar que, para este autor, la *racionalidad* no necesariamente se fundamenta en la lógica formal; más bien, asumiendo una postura etnometodológica

[7] Una conjetura es una aserción (proposición) hecha por un individuo o un colectivo cuya validez (teórica) están aún por establecer (Harel & Sowder, 2007).

(Garfinkel, 2006)[8] e interaccionista, la racionalidad debe entenderse como aquello que permite tomar la mejor decisión entre un conjunto de varias opciones, recalcando que aquello que se considera como "lo mejor" se decide a partir de un proceso de negociación surgido en el marco de la interacción entre individuos (de ahí, la propuesta de usar el término *argumentación colectiva*). En consecuencia, sugiere que los conceptos *argumento* y *argumentación* no tienen que estar exclusivamente relacionados con la forma lógica como sucede en una prueba formal en matemáticas; insiste que hay más actividades humanas que son argumentativas, y que no tienen un sentido estrictamente lógico deductivo. Dado este escenario, Krummheuer (1995) usa la postura de Toulmin[9] (2003) según la cual, los argumentos fundamentados en deducciones lógicamente correctas se denominan *argumentos analíticos*; en contraste, aquellos que se fundamenta en otro tipo de racionalidad se denominan *argumentos sustanciales*. Para una argumentación sustancial la declaración o decisión se verifica en la medida en que sean convincentes los antecedentes, las explicaciones o las justificaciones que se provean y en los significados que se le otorgan en el proceso. Dado que Krummheuer, al fundamentarse en una aproximación etnometodología, enfatiza que los participantes en los asuntos de la vida cotidiana constituyen su modelo de racionalidad interactivamente, que denomina *lógica informal*.

Krummheuer (2015) concibe la argumentación en un sentido bastante amplio, pues la entiende como un aspecto esencial para el aprendizaje de las matemáticas. Asume que el sentido de una argumentación matemática es una condición previa para la posibilidad de aprender matemáticas y no sólo el resultado deseado de un proceso de aprendizaje. En este sentido, aprender matemáticas es esencialmente un aprendizaje argumentativo que se basa en la participación de los estudiantes en una práctica explicativa y justificativa. En correspondencia con esto último, para este autor no sólo es de interés estudiar (i) cómo se estructura un argumento realizado durante el

[8] Traducción del texto original titulado *Studies in ethnomethodology* escrito por Garfinkel en 1968.

[9] Probablemente, el principal aporte de la aproximación de Toulmin se resume en dos asuntos: (i) la concepción de *argumento* como aquello que permite justificar una *aserción* (que se convierte en *conclusión* si su justificación es aceptable) y la manera de concebir *lógica* como una actividad que trasciende de lo técnico de la lógica formal. Desde esta aproximación, tiene sentido aludir a los argumentos sustanciales como aquellos que no aluden estrictamente a la lógica formal para justificar una aserción.

trascurso de una interacción, sino también indicar (ii) cómo el profesor y los estudiantes (en un proceso educativo que tiene lugar en la microsociedad de la clase de matemáticas) participan en la producción interactiva-colectiva de tal argumento. De manera específica, para abordar la primera cuestión, el autor se focaliza en un *análisis de la argumentación* que se fundamenta en el enfoque teórico de Toulmin (Toulmin, 2003); concretamente emplea el Modelo de Argumento[10] propuesto por este último, aterrizado a la Educación Matemática (Krummheuer, 1995; 2015). Vale anotar que otros investigadores han visto el potencial de la postura de este autor; Yackel (2001; 2002) por ejemplo, utiliza el Modelo citado como una herramienta para analizar el progreso de aprendizaje en un aula universitaria fundamentado en los procesos de argumentación y en las normas sociales y sociomatemáticas de la microcultura del aula (Yackel & Cobb, 1996; Cobb, Wood, Yackel, & McNeal, 1992).

2.1.1.1 *Síntesis sobre Argumentación*

La Tabla 2 sintetiza las posturas antes presentadas en relación con los conceptos de *argumentación* y *argumento*. Al respecto, hay que destacar varios aspectos: (i) Tal como proponen Stylianides, Bieda y Morselli (2016), puede haber cierta consonancia en el hecho de considerar la *argumentación* en una dimensión social, esto es, como aquello (proceso, tipo de razonamiento, discurso o medio retórico) llevado a cabo por un individuo o un grupo para convencer a otros sobre la postura (aceptación o rechazo) asumida al respecto de una aserción dada. Vale indicar que la consonancia descrita es consecuencia de que varios de los autores toman como referente la aproximación de Perelman. (ii) Puede haber cierta consonancia en entender *argumento* como la razón

[10] Vale aclarar que Krummheuer (1995) usa el término *Modelo de argumentación*. En relación, con esto, el autor hace una precisión en torno al empleo de los términos *argumentación* y *argumento*: Cita a Kopperschmidt (1989) para decir que frecuentemente, el concepto *argumento* se usa con el fin de apoyar una afirmación; más aún, un argumento debe ser lo suficientemente convincente como para que otros aprueben la afirmación que se pretende apoyar. En tales situaciones, el concepto *argumento* se utiliza como una parte específica dentro del proceso de *argumentación*, mientras que en la definición previamente dada es considerado como el producto de dicho proceso. El autor comenta que estas dos miradas no son contradictorias: bajo la primera, un argumento es una razón comúnmente aceptada que hace parte de una argumentación más compleja (i.e., compuesta por varios argumentos que pueden ser reconstruidos); pero a la vez, cada uno de tales pasos cumple con la segunda definición de argumento, por cuanto se puede concebir, en sí mismo, como un producto de una argumentación mínimamente compleja.

o razones que permiten justificar la postura que se toma sobre la aserción. (iii) No hay un acuerdo respecto a término empleado para aludir al producto de una *argumentación*: unos le denominan *argumentación* (e.g., Boero y colegas) y otros *argumento* (e.g., Krummheuer). iv) No hay un acuerdo en la relación existente entre argumentaciones de índole lógica-deductiva (e.g., una prueba formal matemática) con otras maneras de argumentación; Duval advierte que existe una brecha insalvable; lo contrario advierte Boero y sus colegas.

Tabla 2. Síntesis posturas sobre argumentación

Perspectiva según	**Enfoque teórico usada**	**Acepción de Argumentación**	**Acepción de Argumento**	**Relación con la Deducción Lógico-Formal**
Duval	Perelman	Tipo de razonamiento no deductivo que emerge cuando hay un argumento.	Cualquier cosa (hecho, definición, acción, teorema, etc.) que justifique o refute una proposición.	Prueba matemática (deductiva en matemáticas) no guarda alguna relación con la argumentación.
Boero y colegas	Toulmin (como herramienta analítica)	Discurso escrito u oral conducido de acuerdo con reglas compartidas, que apunta a una conclusión mutuamente aceptable acerca de una declaración. Proceso colectivo o individual que produce dicho discurso. Puede estar compuesto por uno o más argumentos conectados.	Razón o razones que se da a favor o en contra de una proposición u opinión.	Puede haber relación entre argumentos deductivo (prueba matemática) y no deductivos
Krummheuer; Yackel y colegas	Perelman brevemente, Garfinkel, Toulmin	Proceso que tiene lugar en la interacción social en busca de tomar la decisión. Explicación intencional del razonamiento de una solución. Conjunto de técnicas o métodos que permiten establecer la postura sobre una proposición. Es una condición para aprender.	Resultado de una argumentación. Razón de una argumentación más compleja.	Argumentos sustanciales (basados en la semántica) y argumentos analíticos (lógico-deductivos). No se precisa si pueden estar relacionados.

Antes de precisar una postura con respecto estos conceptos, y teniendo presente que estos pueden tener algún tipo de vínculo con el concepto de prueba matemática (tal como se ha podido observar a lo largo de este apartado), es pertinente hacer una descripción de este concepto también y otros afines como probar o demostración. El siguiente apartado abordará este asunto. Con ello, se tendrá un contexto suficiente para poder precisar la postura sobre dichos conceptos y su relación, los cuales se tendrán en cuenta para el desarrollo de la presente investigación.

2.1.2 Prueba, Probar y Demostración en Educación Matemática

En el uso cotidiano, la palabra *probar* frecuentemente se refiere a la acción de *convencer* a alguien de algo, o de *testear* algo para ver si está correcto. Bajo el primer significado, *prueba* significa *evidencia* mientras que para el segundo está asociado al *objeto* (o instrumento) que te permite testear que algo es correcto (Reid & Knipping, 2010). Ahora bien, en el contexto de las matemáticas, estos términos parecen tener una referencia sensiblemente diferente a los empleados en ese uso cotidiano. Por ejemplo, Recio y Godino (2001) distingue por lo menos dos escenarios en los cuales se le da un tratamiento diferente a tales conceptos, en la lógica y fundamentos de las matemáticas, y en las matemáticas profesionales. En el primer escenario, una *prueba* aparece vinculada con la deducción y los sistemas formales: "La argumentación lógica es esencialmente una argumentación deductiva. La argumentación deductiva pura toma lugar en un sistema axiomático y formal[11]" (p. 94). De manera específica, en las matemáticas puras (en la teoría matemática), una *prueba* es una secuencia de proposiciones cada una de las cuales ha sido derivada de los axiomas u otros teoremas a partir de las reglas de inferencia. En el segundo escenario, la *prueba* se vincula a "un proceso argumentativo que los matemáticos desarrollan para justificar la verdad de las proposiciones matemáticas, en lo cual es esencial un proceso lógico. La prueba deductiva es el patrón prototípico de la prueba matemática" (Recio & Godino, 2001, p. 94). Manifiestan los autores que, en el segundo escenario, el rigor que genera la formalización de los fundamentos de las matemáticas decrece en la práctica de los matemáticos profesionales, particularmente porque en algunas ocasiones, una argumentación menos formal pone en manifiesto la trivialidad de una propiedad (o su prueba formal) cuando esta se hace siguiendo los estándares formales. En un sentido análogo al presentado anteriormente para el segundo escenario, (Hanna, 2000) plantea

[11] Recio y Godino (2001) citan a Garnier y Taylor (1996) para precisar que un sistema axiomático como una colección de términos y símbolos; y unas reglas sintácticas para construir oraciones y formales que se construyen a partir de tales términos indefinidos y símbolos; y una colección de oraciones correctamente construidas llamadas acciones. Las reglas de inferencia son las que permiten determinar que una oración que representa un teorema pueda ser deducida de los axiomas.

que la concepción de prueba esencialmente formal ha venido cambiando en las últimas décadas; esto por cuanto varios matemáticos y educadores matemáticos han cuestionado que el aspecto más significativo de la matemática es el razonamiento por deducción y las respectivas pruebas formales.

Las dos visiones planteadas por estos autores para la prueba reconociendo la realidad de la práctica matemática, admiten que las pruebas puedan tener diversos grados de validez formal, pero además tener el mismo grado de aceptación: en ocasiones los aspectos formales de una demostración, sin tener espacio para el contenido (su significado), no posibilitan que una prueba cumpla con su función de convencimiento.

Las ideas planteadas en los párrafos anteriores, deja ver el reconocimiento de por lo menos dos tipos de *pruebas* (basadas en argumentos de índole deductivo) en el contexto de las matemáticas: unas estrictamente formales fundamentadas en las sintaxis de la lógica formal y otras en las cuales las exigencias de rigor se flexibilizan, pero aceptables para la práctica real de los matemáticos. Reid y Knipping (2010) denominan a cada tipo, respectivamente, *pruebas formales* y *pruebas semi-formales*. Es importante señalar que, en lenguas como el español o el francés, la palabra *demostración* es otro término que suele usarse para hacer referencia a *prueba matemática*. Balacheff (2002), por ejemplo, usa el término *prueba* para aludir a una explicación aceptada por una comunidad específica en un momento determinado, mientras que con *demostración* refiere sólo a las explicaciones que se aceptan en la comunidad matemática, esto es, aquellas que cumplan con las condiciones de la argumentación deductiva formal. En adelante, con el ánimo de no causar confusiones, se empleará los términos acuñados por Reid y Knipping (2010) en el mismo sentido que ellos proponen. Cuando haya necesidad de hacer alguna acepción específica distinta de la palabra *prueba* esto será resaltado.

En lo que respecta a la Educación Matemática, al igual que lo sucedido para los conceptos *argumentación* y *argumento*, a los términos *prueba* y *probar* se le han adjudicado diversos significados. Reid y Knipping (2010), luego de hacer una revisión de la literatura, reconocieron, por ejemplo, que el término *prueba* ha sido considerado como un *objeto* en algunos casos y como *proceso* en otros; a su vez destacan que, como *objeto*, este puede ser distinguido según su *forma* y su *función*. A continuación, se presentará una descripción de cada una de estas acepciones. Luego, con el ánimo de tener un panorama más o menos completo de los usos que se les ha dado a tales conceptos, se presentarán las posturas que algunos autores (representativos de cada una) tiene en relación con ellos. Finalmente, se presentará una síntesis de las posturas con base en las acepciones descritas.

2.1.2.1 *Dualidad objeto-proceso en la conceptualización de prueba*

Como *objeto*, el término *prueba* puede referirse a un *texto escrito* (bien sea en *forma* de párrafo, o puesto en un *formato* a doble columna), o *un argumento convincente* (bien sea en *forma* escrita o verbal) que tiene la *función* de convencer a alguien (un enemigo, un sujeto experto, o sencillamente a un escéptico). A su vez, para cada una de tales referencias el término *probar* tiene su acepción: en la primera, *probar* puede hacer referencia a escribir el texto-prueba (aunque no necesariamente esta acepción es universal para este caso); mientras en la segunda, *probar* implica la acción de convencer a alguien de algo, en resumen, de producir un argumento convincente.

Como *proceso*, los términos *prueba* y *probar* pueden referirse a un *proceso psicológico de razonamiento* o a un *proceso social*; de igual forma a la consideración de tales términos como objeto, es posible hacer referencia a acepciones según su *forma* o su *función*. La acepción de *probar* en el marco de un *proceso psicológico de razonamiento*, según su *forma*, se refiere a un razonamiento estrictamente deductivo: este puede ser descrito como una cadena de proposiciones conectadas que inicia de unas que son tomadas como verdaderas y avanza hacia una conclusión de acuerdo con ciertas reglas lógicas (tautologías de la lógica aristotélica como *Modus Ponens*). En este contexto, la *prueba* es usualmente tomada como un *objeto* prueba-texto que deja ver esta cadena. De otro lado, la acepción del proceso según su *función* puede hacer referencia a dos asuntos específicos: (i) al proceso que busca remover o instalar dudas (estar seguro uno mismo o convencer a otros) de la veracidad de una aserción dada; o (ii) al proceso que busca dar sentido a la justificación de la veracidad o falsedad de una aserción (proceso de comprensión). En este caso, la *prueba* es un argumento convincente no necesariamente de carácter deductivo.

La acepción de *probar* en el marco de un *proceso social*, según su *forma*, se refiere esencialmente al proceso colectivo a partir del cual se construye un discurso deductivo para generar argumentos aceptables. En este contexto, la *prueba* es usualmente tomada como un objeto texto-prueba. Según su *función*, este proceso se refiere a un proceso colectivo de exposición de ideas y negociación que, además de producir razones para la veracidad o falsedad de una aserción, también tiene la intención de comunicar, sistematizar o explicar. Con lo cual, la *prueba* es un discurso argumentativo convincente verbal o escrito, no necesariamente deductivo.

Tabla 3. Síntesis acepciones sobre probar y prueba

<table>
<tr><th rowspan="2">Proceso</th><th rowspan="2">Función</th><th rowspan="2">Forma</th><th colspan="2">Producto del proceso</th></tr>
<tr><th>Función</th><th>Forma</th></tr>
<tr><td>Razonamiento-acto mental de razonar</td><td>Remover o instalar dudas sobre aserción
Comprensión de la justificación</td><td rowspan="2">No necesariamente deductiva</td><td rowspan="2">Convencer
Explicar
Comunicar
Sistematizar</td><td rowspan="2">Prueba-texto Matemática formal o semiformal (si la forma del proceso es deductiva).
Argumento convincente verbal o escrito (si la forma del proceso no es deductiva)</td></tr>
<tr><td>Social-acto social de negociación discursiva</td><td>Producir razones aceptables por todos de la veracidad o falsedad de una aserción.
Comunicar, explicar</td></tr>
<tr><th colspan="3">Probar</th><th colspan="2">Prueba como objeto</th></tr>
</table>

Se presentan los usos que algunos autores, presentados en el Capítulo 1, hacen de prueba y probar procurando, en lo posible, caracterizarlas con las acepciones presentadas en la Tabla 3. Esto proporcionará una mirada más completa a partir de la cual se podrá precisar cómo conciben la relación entre la argumentación y la prueba, y un escenario para generar la postura de este estudio al respecto de tales conceptos y su relación. En primera instancia, se recuerda que, en el Capítulo previo, se partió de la base de presentar trabajos que tenían una postura con tendencia social hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general, y del tratamiento de la argumentación y prueba en particular; esto, principalmente por dos razones: (i) ha sido una tendencia en el campo de la Educación Matemática que, en comparación con otras, tiene menos trabajos investigativos en esta área (argumentación y prueba); en consecuencia precisa de mayor desarrollo; y (ii) a partir del contexto planteado en el ítem previo, surge el interés de indagar sobre la interacción en el aula, la argumentación y la prueba en Geometría, y la gestión del profesor; asuntos que concretaron en la pretensión de abordar temáticas relativas al Sistema de Normas y su relación con la práctica argumentativa que tiene lugar en el aula. Como se observará en los párrafos siguientes, el escenario planteado por los ítems anterior lleva a considerar que varios de los investigadores referenciados se fundamentan en una perspectiva filosófica *falibilista* o *quasiempirista* propuesta por Lakatos (1976) o *socioconstructivista* propuesta por Ernest (1998). La primera perspectiva no sólo cuestiona la propuesta de la perspectiva *a apriorista,* fundamentada en que las verdades de las matemáticas son certezas a priori universales y absolutas; sino también la perspectiva *infalibilista*, fundamentada en que las verdades en matemáticas son absolutas dentro de un sistema axiomático. Alude a que este tipo de sistemas usados en matemáticas no son fijos pues, tal como la historia de las matemáticas ha mostrado, pueden variar en el tiempo. En consecuencia, Lakatos (1976) propone que cada proposición, su prueba y las definiciones o axiomas en la que esta se soporta, puede ser susceptible de un ciclo de pruebas y refutaciones a través del cual tal proposición se puede mejorar (Reid & Knipping, 2010). La segunda perspectiva también cuestiona la perspectiva infalibilista; esta corriente (Ernest, 1991) propone que el método deductivo es una construcción social, y lo que cuenta como argumento deductivo válido es relativo a la comunidad; también se alude a la historia para soportar la idea.

En primera instancia, se hace referencia a Duval (1991; 1999), cuya aproximación se corresponde con una perspectiva infalibilista: este autor concibe probar como un razonamiento esencialmente deductivo en el que prima la forma (lógica-deductiva) y no el contenido (lo semiótico está presente en la argumentación, tal como se presentó en el Apartado 2.1.1). En este sentido, dado el distanciamiento que este autor concibe entre el razonamiento deductivo y la argumentación, el término prueba está estrictamente relacionado al producto del proceso de probar, esto es, un texto-prueba matemática (semiformal o formal) que garantiza la validez de la proposición que está en juego y provee convencimiento sobre la misma.

En contraste con la perspectiva anterior expresada por Duval, se presentan enseguida representantes de aproximaciones más consonantes con posturas cuasiempíricas o socioconstrutivistas. Por ejemplo, tal como citan Reid y Knipping (2010), Balacheff ha asumido dos posturas, una cuasiempirista previa a 1991, y otra con rasgos socioconstrutivistas luego de tal fecha. El aspecto central que provocó ese cambio se fundamenta en sus experiencias investigativas según las cuales, tanto en la historia de las matemáticas como en el aula de clase, la negociación en una comunidad específica es la que produce las reglas para argumentar; en ese contexto, recalca que dichas reglas no tienen por qué ser absolutas o infalibles ya que al ser parte de las matemáticas son producto de un proceso socialmente construido. Tal como se presentó el apartado 2.1.2, este autor hace una diferencia entre los términos prueba y demostración (*prueba* alude a una explicación aceptada por una comunidad específica en un momento determinado; *demostración* a argumentación deductiva formal o semiformal). Con lo anterior, concibe probar como un proceso social de negociación que tiene la función de convencer, aclarando que, dentro de la comunidad de matemáticas, el discurso debe propiciar una prueba semiformal o formal.

Otro ejemplo representativo de la postura socioconstuctivista se tiene con la escuela italiana. Mariotti (2006) precisa el reconocimiento que ella, junto con sus colegas italianos, dan al concepto de *teoría* y *prueba* en su caracterización del objeto *teorema* (Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti, 1996; Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, & Garuti, 1997), esto es, *teorema* debe ser entendido como un sistema ternario compuesto por un *enunciado* (o proposición), su *prueba* (matemática formal o semiformal) y *la teoría* (reglas de inferencia, axiomas, definiciones y teoremas) en la cual la prueba posibilita considerar tal proposición como válida en la teoría. Esta concepción se fundamenta en una revisión de carácter histórico-epistemológico según la cual una *prueba* ha estado discutida a la luz de dos elementos: su validez lógica y su papel explicativo. Con esta mirada, pareciera que la postura de esta escuela italiana es infalibilista, en el sentido de proveer un papel importante a la prueba matemática; no obstante, hay un aspecto que los distancia rotundamente: la función de convencimiento que una prueba debe tener como parte de un proceso argumentativo a parir del cual deben ser removidas todas las dudas de la veracidad de una proposición. En la postura italiana, la dimensión social tiene lugar, al menos, en dos momentos específicos: en tales momentos de argumentación (ver Tabla 2) y en el proceso mediante el cual los argumentos (algunas veces informales) se pueden transformar en cadenas deductivas.

En el marco de una perspectiva sociocultural, otras varias posturas han surgido: por ejemplo, Hanna (2000) asume una postura similar a la propuesta por la escuela italiana, otorgándole un papel primordial a la teoría. No obstante, advierte que, si bien una prueba debe tener un carácter deductivo, toma ejemplos de matemáticos profesionales a partir de los cuales ilustra cómo ellos comentan que existen pruebas matemáticas que no necesariamente convencen por cuanto son poco comprensibles. Desde esta perspectiva, alude a una categorización, no necesariamente disjunta, de pruebas deductivas: aquellas que pueden explicar, otras que pueden convencer y otras estrictamente formales. Cuando ella refiere a una prueba, en contraste a la escuela italiana, alude un texto-prueba más que a un discurso. Otra propuesta resonante en el campo de la Educación Matemática ha sido la de Harel y Sowder (2007), la cual se caracteriza por cuatro conceptos específicos, a saber: *Prueba* es todo lo que establece la verdad para un individuo o una comunidad (p. 806); *Probar* es un proceso de razonamiento empleado por un individuos o comunidad pare remover dudas sobre la verdad de una aserción (p. 808). Este proceso incluye dos subprocesos, *asegurar* y *persuadir*; el primero hace referencia a la remoción de las propias dudas, mientras que el segundo a la eliminación de las dudas de otros. *Esquema de Prueba* de un individuo (o comunidad) hace referencia a aquello que para dicho individuo (o comunidad) constituye tales subprocesos. En ese escenario, estos autores proponen una taxonomía para los Esquema de Prueba: (i) de *convicción externa* clasificadas en prueba Autoritarias, pruebas Ritual y pruebas simbólicas no referenciales; (ii) *empíricas* clasificadas en pruebas Inductivos y Perceptuales; y (iii) *deductivas* clasificadas en Transformacionales y Axiomáticos. Por su puesto, bajo la aproximación de estos autores, el escenario para la prueba es bastante amplio pues aluden a la posibilidad de argumentos no necesariamente como pruebas matemáticas, y sus respectivas funciones van más allá del convencimiento; referencia al trabajo de Villiers (1999), para aludir a la explicación, el descubrimiento, la sistematización, desafío intelectual y la comunicación.

2.1.2.2 *Síntesis usos de acepciones sobre prueba y probar*

A partir de la Tabla 3, en el apartado anterior, se ha descrito el uso que, desde perspectivas filosóficas (infalibilismo, quasiempirismo o sociocultural), algunos autores han dado a los conceptos de prueba y probar en sus trabajos investigativos; la Tabla 4 presenta la síntesis correspondiente.

Tal síntesis ilustra la variedad de usos que los investigadores consultados dan a los términos en cuestión, aun cuando puedan asumir la misma perspectiva filosófica.

Por ejemplo, en relación con la socioconstructivista, hay aproximaciones donde la *prueba*, puede tener varias acepciones, una amplia como en el caso de Harel y Sowder (2007) o reducida como en la escuela italiana; a su vez, el proceso asociado respectivamente, razonamiento y proceso social difieren. Pese a la diversidad, dos aspectos se pueden destacar de las posturas asumidas: (i) puede existir una cierta coincidencia relativa a asumir que el proceso de *probar* tiene la función de convencer (salvo Hanna); (ii) puede existir una cierta coincidencia relativa a asumir que el proceso de *probar* tiene una función semántica-explicativa (salvo Duval y eventualmente Hanna), y (iii) no existe una tendencia clara respecto a la relación entre la argumentación y prueba matemática: si bien varios aluden a la prueba como un tipo de argumentación (*e.g.*, Balacheff, escuela italiana, Harel y Sowder) otros conciben que son procesos distintos (*e.g.,* Duval) o no aluden a ello (*e.g.* Hanna).

Tabla 4. Síntesis usos acepciones sobre probar y prueba

<table>
<tr><th>Uso según</th><th>Perspectiva filosófica</th><th>Acepción de Probar</th><th>Acepción de Prueba</th><th>Función</th><th>Amplitud en la acepción</th></tr>
<tr><td>Duval</td><td>Infalibilista</td><td>Razonamiento deductivo</td><td>Texto-prueba formal o semiformal</td><td>Convencer</td><td>Pruebas matemáticas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Balacheff</td><td rowspan="2">Quasiempirista
Socio-constructivista</td><td rowspan="2">Proceso social</td><td>Prueba: Discurso verbal o escrito</td><td rowspan="3">Convencer
Explicar</td><td>Cualquier argumento</td></tr>
<tr><td>Demostración: Texto-prueba formal o semiformal</td><td rowspan="2">Pruebas matemáticas como tipo de argumentación</td></tr>
<tr><td>Escuela Italiana</td><td>Socio-constructivista</td><td>Proceso social</td><td>Discurso deductivo verbal o escrito</td></tr>
<tr><td>Hanna</td><td>Socio-constructivista</td><td>Proceso social</td><td>Texto-prueba formal o semiformal</td><td>Posiblemente convencer o explicar</td><td>Pruebas deductivas no necesariamente convincentes o comprensibles</td></tr>
<tr><td>Harel y Sowder</td><td>Socio-constructivista</td><td>Razonamiento</td><td>Argumento verbal o escrito</td><td>Convencer
Explicar
Descubrir
Sistematizar
Desafiar intelectualmente
Comunicar</td><td>Pruebas de convicción externa, empíricas o deductivas</td></tr>
</table>

Con el ánimo de ganar claridad respecto a los ítems (iii) de los apartados 2.1.1.1 y 2.1.2.2, en el siguiente apartado se presenta una discusión al respecto.

2.1.3 Relación entre argumentación y prueba matemática

En concordancia con varios reportes (Mariotti, 2006; Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012; Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016; Stylianides, Stylianides, & Weber, 2017), las síntesis presentadas sobre argumentación (y argumento) y prueba (y probar) matemática, dejan ver dos perspectivas epistemológicas respecto de la relación entre los conceptos: una clásica según la cual existe una ruptura irreconciliable entre ellos representada principalmente por Duval (1991; 1999), y otra a partir de la cual es posible su continuidad representada especialmente por la escuela italiana (Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti, 1996). Pero ¿por qué existe la tensión entre la argumentación y la prueba?

Desde un punto de vista cognitivo, Duval (1991; 1999) plantea una respuesta. Como se describió en apartados anteriores, este autor afirma una clara distinción entre lo que comúnmente se denomina argumentación y lo que se conoce como prueba matemática. La argumentación puede considerarse como un proceso en el que el discurso se desarrolla con el objetivo específico de hacer que un interlocutor cambie el valor epistémico[12] dado a una afirmación particular; este proceso consiste en cualquier medio retórico que se emplee para convencer a alguien de la verdad o de la falsedad de una aserción particular. En contraste, una prueba matemática consiste en una secuencia lógica de implicaciones que derivan la validez teórica de una proposición. En síntesis, el punto crucial de Duval se centra en la diferencia entre el nivel semántico de una argumentación (que depende del contexto -ver apartado 2.1.1-), en el que es fundamental el valor epistémico de una declaración, y el nivel teórico que hace referencia solamente a la validez de una proposición que se soporta en dependencia lógica con respecto a axiomas y teoremas de la teoría. Desde esta perspectiva, Duval justifica las dificultades presentes en la instrucción sobre la prueba por cuanto si se acepta la concepción de la prueba como proceso que persigue convencer al interlocutor en términos de afectar el valor epistémico de una proposición puede entrar en conflicto con los requisitos lógico-deductivos de una prueba matemática.

[12] Al considerar el papel de la prueba como verificación, es importante reconocer que mientras que lógicamente una afirmación sólo puede ser verdadera o falsa, sicológicamente puede tomar de muchos valores. El valor epistémico es un juicio personal de si y cómo una proposición es entendida. Puede asumir valores como la opinión, la creencia, la certeza, el principio, la hipótesis, etc. (Duval, 1991).

Por su parte, Mariotti (2006) provee un escenario histórico-epistemológico y cognitivo para dar respuesta a la pregunta. Desde un punto histórico-epistemológico, la autora se remonta a dos momentos cruciales de la historia: (i) a la manera como Euclides, a partir de sus Elementos, transmitió conocimiento con base en argumentos lógicos hipotético-deductivos; y (ii) a la aparición de la necesidad del rigor del siglo XIX, a partir de la cual, los sistemas lógico-formales tienen su auge. Mariotti plantea que desde la época de Euclides la comunicación del conocimiento matemático con base en argumentos se convirtió en una práctica compartida y una parte relevante de la cultura matemática (este reconocimiento, justifica en parte la tendencia socioconstructivista de ella y sus colegas italianos). No obstante, a pesar de los aportes de los Elementos en cuanto la forma de tratar con el conocimiento fue recurrente el cuestionamiento sobre sus descuidos de rigor (i.e., la necesidad de validación dentro un sistema teórico formal). La principal diferencia entre los dos escenarios, la validación hipotético-deductiva y la validación lógico-formal reside en el hecho de que la primera depende de la comprensión y de la asimilación previa del significado de los conceptos de los cuales ciertas propiedades deben seguir lógicamente; en la segunda, esto no se necesita, la derivación es independiente del contenido. Mariotti destaca que los Elementos de Euclides cumplen con dos objetivos específicos, de un lado la necesidad de comprensión y por otro la necesidad de validez (aceptación por una comunidad). Alude a que, no obstante la perspectiva del siglo XIX que llevó a los matemáticos a una revisión radical de la idea de verdad, la relación entre la comprensión y la aceptabilidad de las afirmaciones matemáticas no ha cambiado sustancialmente durante los siglos y sigue constituyendo un elemento caracterizador de esta disciplina.

Ahora, desde un punto de vista cognitivo, la autora comenta que la producción del conocimiento matemático tiene dos momentos fundamentales (también ratificado por hechos históricos): en primera instancia existe un momento a partir del cual se producen conjeturas en el cual emergen ideas y métodos (conocimiento) y en segunda, tiene lugar la sistematización de tal conocimiento (una prueba) dentro de un corpus teórico válido para la comunidad de matemáticos; la prueba no solo sistematiza, sino que tiene la función de explicar y en consecuencia, de posibilitar comprensión. Con la descripción de la respuesta de Mariotti, aun reconociendo diferencias entre los niveles semánticos y teóricos, parece imposible hacer una separación rotunda entre ellos, como lo exige una perspectiva puramente formal como la descrita a partir de las ideas de Duval.

Las respuestas dadas por los autores proveen escenarios cognitivos y epistemológicos para comprender la ruptura, pero también para tomar una postura al respecto de si esta es irreconciliable (Duval) o si existe una posibilidad de relación entre los asuntos semánticos de la argumentación y los formales de la prueba (escuela italiana). Para que la postura que se tome al respecto de este sea consistente, es necesario también tomar postura sobre las acepciones de argumentación y prueba. El siguiente apartado se encarga de ello.

2.1.3.1 *Argumentación (y Argumento), Probar (y Prueba) y su relación: la postura para este estudio*

Tal como plantean varios autores (Balacheff, 2002; Mariotti, 2006; Reid & Knipping, 2010), es necesario hacer explícita las concepciones que se asumen al respecto de términos complejos como argumentación, prueba y su relación. Siguiendo esta sugerencia, este apartado tiene el propósito de exponer las acepciones que son usadas a lo largo de este estudio.

En primera instancia se asume una perspectiva socioconstructivista a partir de la cual *argumentación* se reconoce como un proceso en el sentido que lo hace la escuela italiana (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, & Garuti, 1997; Boero, 1999; Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010) y Krummheuer (1995); de estos referentes, además de tomar el hecho de que tal proceso es un fenómeno social, se asume también que el proceso de *probar* es una forma de argumentación. Desde esta aproximación, una *prueba* (matemática formal o semiformal[13]) se concibe como un tipo de *argumento*, entendiendo *argumento* como el producto (discurso oral o escrito) de la argumentación. La Tabla 5 presenta una síntesis de la postura asumida con las descripciones específicas.

[13] O *demostración*, según la terminología usualmente empleado en el lenguaje castellano.

Tabla 5. Argumentación y prueba: postura para el estudio

	Acepción de Argumentación	Acepción de Argumento	Funciones
Argumentación y argumento	Es el proceso colectivo o individual, de acuerdo con reglas compartidas, que apunta a una conclusión mutuamente aceptable acerca de la veracidad o falsedad de una aserción o acción (Escuela Italiana, Balacheff, 2002), o a la búsqueda de la toma de una decisión (Krummheuer, 1995).	Es el discurso oral o escrito producto del proceso descrito -Argumento General-. Puede estar compuesto por uno o más argumentos conectados (argumento particular o paso argumental) (Krummheuer, 1995)	Convencer Explicar Descubrir Sistematizar Desafiar intelectualmente Comunicar (Harel & Sowder, Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof, 2007) Posibilita aprendizaje (Krummheuer, 1995; Yackel & Cobb, 1996)
	Acepción de Probar	**Acepción de Prueba**	
Probar y prueba	Tipo de argumentación de índole deductivo (Escuela Italiana)	Argumento de índole deductivo – Prueba Matemática formal o semiformal (Argumento General deductivo compuesto de Argumentos Particulares).	

Tres asuntos precisan de aclaración: (i) Tal como Krummheuer (1995) indica, un Argumento (que en adelante se llamará *Argumento Global* o *Argumento -A* mayúscula-) puede estar compuesto por varios argumentos (que en adelante se denominarán *argumentos particulares*, *paso argumental* o simplemente *argumento -a* minúscula-). De este autor, otros dos aspectos particulares se rescatan: el concepto de *racionalidad* implicado el proceso de argumentación traído de la perspectiva interaccionista (ver apartado 2.1.1) y el Modelo de Toulmin como herramienta para estudiar la estructura de un argumento (que será descrito en el apartado 2.1.4.1). (ii) Aun cuando Harel y Sowder (2007) formulan funciones para la *prueba*, en este estudio estas se proponen como funciones de la argumentación (y los argumentos asociados); esto, por cuanto tales autores tienen una postura de prueba bastante amplia que perfectamente se corresponde con la de argumentación asumida para este escrito y el conjunto de funciones que proponen contiene las propuestas de otros autores. (iii) Al asumir la prueba matemática como una forma de argumento, se ha adoptado una postura que se corresponde con la propuesta de Stylianides (2007) quien indica que:

> La *prueba* es un *argumento* [Argumento] *matemático* compuesta por una secuencia conectada de aserciones a favor o en contra de una afirmación matemática, con las siguientes características:

1. Utiliza proposiciones aceptadas por la comunidad del aula (*conjunto de proposiciones aceptadas*[14]) que son verdaderas y están disponibles sin más justificación;
2. Emplea formas de razonamiento (*modos de argumentación*[15]) que son válidos y conocidos por, o dentro del alcance conceptual, de la comunidad de la clase; y
3. Se comunica con formas de expresión (*modos de representación de argumentos*[16] [Argumentos]) que son apropiadas y conocidas por, o dentro del alcance conceptual, de la comunidad de aula (p. 291) [cursivas del original].

Esta definición es lo suficientemente flexible pues parece fusionar adecuadamente puntos de vista matemáticos, sociales, cognitivos y didácticos (Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016). Desde un punto de vista matemático, la caracterización se corresponde con las condiciones que de tener una prueba matemática, por lo menos, semiformal. Desde un punto de vista social, la caracterización requiere que las proposiciones y formas de razonamiento o comunicación que cumplan con el estándar de una prueba matemática formen parte de los conocimientos compartidos de la comunidad de aula (o del conocimiento potencialmente accesible). Desde un punto de vista cognitivo, la definición se puede utilizar para describir las concepciones que los miembros de la comunidad (profesor y estudiantes) tienen con respecto a cada una de las tres características previamente descritas. Desde un punto de vista didáctico (de instrucción), la definición puede apoyar juicios sobre si los argumentos surgidos en la comunidad de la clase cumplen con el estándar de una prueba matemática y si puede apoyar las decisiones sobre qué componentes específicos de los argumentos requieren abordarse para aproximarse a tal estándar.

2.1.3.2 *Otra relación entre la argumentación y el proceso de probar*

Anteriormente se indicó que una prueba matemática es un modo de Argumento. Además de esta, es posible precisar otra relación entre el proceso de argumentación (retórico - semántico) y el proceso de probar matemáticamente; dicha relación emerge cuando, en contra de la postura de Duval (1991; 1999), se aborda la posibilidad de superar la ruptura aparente entre tales procesos –asumiendo la descripción de Mariotti

[14] Definiciones, axiomas o postulados, teoremas.

[15] Aplicación de reglas lógicas de inferencia (e.g., modus ponens, modus tollens), uso de definiciones para derivar proposiciones generales, estudio de todos los casos en el caso en que estos sean finitos, construcción de contraejemplos, desarrollo de razonamientos que llevan a una contradicción, etc.

[16] Lingüísticos (lenguaje oral o escrito), diagramáticos, simbólicos, físicos, etc.

(2006) expuesta en el apartado 2.1.3–. La escuela italiana habla del constructo *Unidad Cognitiva* como una manera de describir una relación de continuidad entre ellos:

- Durante la producción de la conjetura, el estudiante desarrolla progresivamente su enunciado a través de una intensa actividad argumentativa funcionalmente entremezclada con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones.
- Durante la etapa posterior de probar el estamento, el estudiante se vincula con este proceso de manera coherente, organizando algunos de argumentos producidos durante la construcción de la declaración de acuerdo con una cadena lógica (Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti, 1996, pág. 113).

Por su puesto, la caracterización del constructo Unidad Cognitiva no pretende ser categórica pues los mismos autores indican claramente que la congruencia entre ambas fases puede o no puede ocurrir. El principal aporte de este constructo es el de proporcionar una forma de escapar de la postura clásica rígida que establece la argumentación en contra de la prueba. Por su puesto, la distancia posible entre la argumentación y probar no se niega, pero tampoco se supone definitivamente como un obstáculo.

La caracterización de la unidad cognitiva, junto con sus orígenes -tanto histórico-epistemológicos como cognitivos (Mariotti, 2006)-, dejan ver dos subprocesos clave que llevan a la formulación de una prueba, reconocidos por varios autores además de los italianos, por ejemplo, Perry, Samper, Camargo y Molina (2013), y Stylianides, Bieda y Morselli, (2016):

- Construcción de Conjetura: proceso a través del cual se construye y formula una conjetura como una proposición condicional, en el que tiene lugar una rica actividad argumentativa, no necesariamente deductiva que tiene por objetivo ganar certeza sobre la conjetura.
- Construcción de Prueba: proceso a través del cual se construye y formula una prueba (semiformal o formal) de la conjetura formulada. En este proceso se deben organizar argumentos de manera deductiva que no necesariamente están presente en la etapa previa.

En relación con esto, Pedemonte (2007) en sus estudios investigativo indagó la relación entre los dos procesos. Dos resultados se destacan de su estudio: (i) En frecuentemente reconocible la posibilidad de *unidad cognitiva referencial* caracterizada porque elementos del sistema referencial (conocimientos disponibles por la comunidad de la clase) empleados durante el proceso de la construcción de la conjetura están presentes en los pasos argumentales que componen la cadena deductiva de la prueba. En otras palabras, hay una correspondencia entre el sistema referencial puesto en juego durante la construcción de la conjetura y la teoría que enmarca su respectiva prueba. (ii) Es un poco más complejo encontrar la *unidad cognitiva estructural*; esto es, aun cuando puede haber unidad cognitiva referencial, encadenar deductivamente los elementos del sistema referencial para lograr una prueba válida no es un proceso fácil. En resumen, no necesariamente existe una correspondencia entre la estructura de los argumentos presentes en el proceso de conjeturación, y la estructura de los argumentos presentes en prueba. Pero ¿a qué hace referencia la estructura de un argumento? El aparatado siguiente da respuesta a la pregunta.

2.1.4 Tipos de argumentos y clases de Argumentos

Al igual que lo sucedido con los términos argumentación y prueba, tampoco hay un mismo criterio en la literatura para aludir a *estructura* o *tipo* de argumento. Por ejemplo, Pedemonte (2007) y Krummheuer (2007) utilizan los términos *inductivo*, *abductivo* y *deductivo* para referirse a las posibles *estructuras* de los argumentos. Por su parte, Reid y Knipping (2010) entienden tales términos como *tipos* de razonamiento (aclarando que estos autores conciben la argumentación como un tipo de razonamiento). Peirce (1878) se refiere a ellos como *formas de inferencia* y Eco (1989) como *tipos de razonamiento inferencial.*

Independientemente de la terminología empleada por los autores (tipo, estructura, formas de inferencia), parece claro que un argumento puede ser catalogado, por lo menos, de alguna de las siguientes maneras: *inductivo*, *abductivo*, *deductivo* o *por analogía* (Reid & Knipping, 2010). En este estudio, se utiliza el término *tipo* o *forma* de un argumento para aludir a cada una de tales maneras, y se usa el término *estructura* en el sentido de Toulmin (2003), esto es, para aludir a la manera en cómo está constituido. A continuación, se describe la *estructura* de un argumento, y a partir de ella (específicamente de la manera en cómo se relacionan los elementos que la componen), los *tipos* o *formas* de un argumento. Así mismo, con base en la propuesta de este último autor, finalmente se presenta una clasificación de argumentos que atiende principal dos aspectos: el discurso semántico de convencimiento y la estructura de inferencias deductivas.

2.1.4.1 *Estructura de un argumento*

Como se presentó en la revisión de la literatura del Capítulo previo, lo que se conoce en la literatura como Modelo de Toulmin (2003) de un argumento, se ha utilizado por varios investigadores para: (i) documentar cómo progresa el aprendizaje de los estudiantes en un aula a parir de la actividad argumentativa y precisar el papel del profesor en ello (Krummheuer, 1995; 2015; Yackel, 2001; Yackel, 2002); y (ii) comparar y analizar el contenido y los tipos de los argumentos surgidos en el proceso de conjeturación con el contenido y tipos de argumentos de las pruebas, desde un punto de vista cognitivo (Pedemonte, 2005; Pedemonte, 2007; Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010). Ello evidencia el potencial de dicho Modelo para dar cuenta de los objetivos que se pretenden abordar en este estudio. A continuación, se describe dicho Modelo (Layout en el texto original), el cual, tal como dice Toulmin (2003), precisa la estructura de un argumento.

Un argumento consta de tres elementos: (i) La aserción (A), conclusión o un punto de vista pronunciado por alguien -*claim* según Toulmin (p. 90)-; (ii) los datos (D) -*data* según Toulmin (p. 90)- que soportan la aserción C cuando esta es desafiada; y (iii) la garantía (G) -*warrant* según Toulmin (p. 91)- que presenta la incidencia de los datos D en la aserción A, cuando se desafía cómo los datos pueden ser conectados (o soportan) la aserción A. La garantía G puede ser expresada por una regla que actúa como un puente entre los datos D y la aserción A; en otras palabras, la garantía G autoriza el paso de los datos D a la aserción A. La Figura 1 presenta el diagrama asociado al Modelo o estructura del argumento indicando los elementos descritos; este es denominado por algunos autores como el modelo básico de Toulmin para un argumento (*e.g.* Pedemonte, 2007).

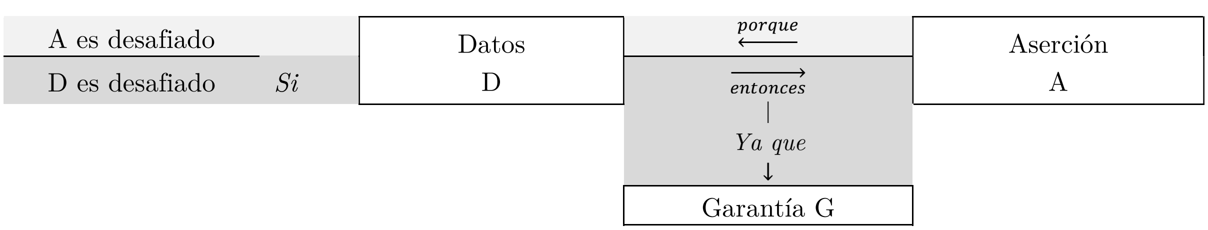


Figura 1. Diagrama Modelo de Toulmin

Se ilustra el empleo del Modelo con la siguiente situación (tomado del curso objeto de este estudio):

Ejemplo 1. *Se tienen dos puntos X e Y tales que equidistan de los puntos A y B. ¿Qué puede decir de tales puntos X e Y con respecto al $\overline{AB}$?*

Alguien puede asentir, como respuesta a la pregunta, que *los puntos X e Y pertenecen a la mediatriz del* $\overline{AB}$. Esto puede ser considerado como la aserción A. Para este caso, los datos (D) hacen parte del enunciado mismo de la situación; esto es: *X e Y equidistan de los puntos A y B*. Si tales datos son desafiados como soporte de la aserción (para alguien, ello no es suficiente justificación), quien pronunció la aserción (o la comunidad que estudia la validez de la aserción pronunciada, un aula de clase, por ejemplo) debe aludir a alguna garantía (G) que conecte los datos dados con la aserción pronunciada; sea esta, la *Definición de Mediatriz*[17]. La Figura *2* expone el argumento descrito utilizando el Modelo de Toulmin.

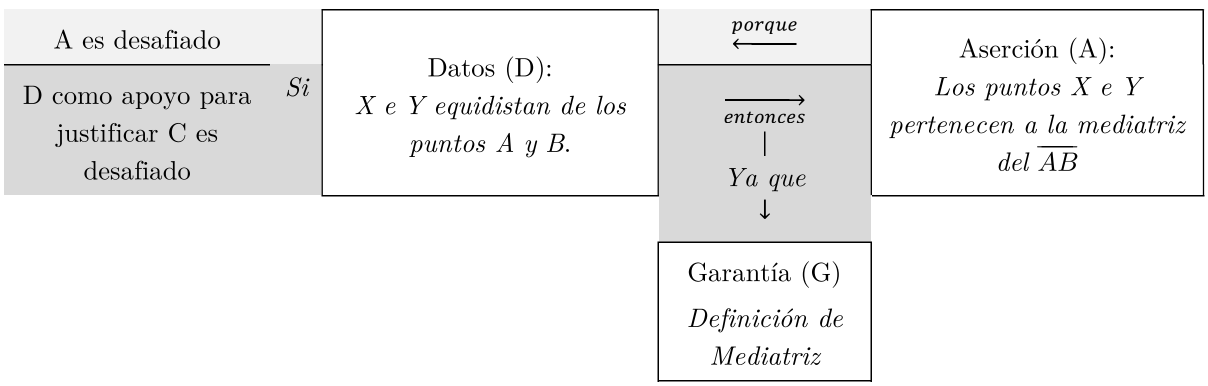


Figura 2. Ejemplo Modelo (básico) de Toulmin

Ahora bien, Toulmin (2003) menciona elementos auxiliares que pueden estar presentes en un argumento. Para explicarlo, el autor sugiere poner cierta atención sobre las garantías dado que, dependiendo de ellas, se le puede conferir varios grados de fuerza a la conclusión que justifican (o al argumento mismo). Algunas, por ejemplo, autorizan el paso de los datos a la aserción inequívocamente, razón por la cual posibilitan denominar tal conclusión como *necesaria*. Otras autorizan el paso de los datos a la aserción tentativamente, dado que puede haber excepciones o condiciones que deben ser clarificadas; en este caso, la garantía indica que la conclusión es *probable* o *presumible*, pero no necesaria. Esto implica considerar otros dos elementos en un

[17] La mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos de un plano que contiene al $\overline{AB}$ tales que equidistan de los extremos de tal segmento.

argumento: (iv) los calificadores (C) -*quilifiers* según Toulmin (p. 94)- que indican la fuerza conferida por la garantía G al paso que conecta los datos D con la aserción A, de este modo, dependiendo de la fuerza, la conclusión C será necesaria de los datos D, probable o presumible; y (v) las condiciones de refutación (R) -*rebuttal* según Toulmin (p. 94)- que indican las circunstancias en las que habría que anular la autoridad general de la garantía, en otras palabras, precisa las excepciones que llevan a que la conclusión no pueda ser considerar como necesaria de los datos a partir de la garantía usada.

Finalmente, un tercer cuestionamiento puede aparecer sobre la garantía G: aquel referido a su generalidad o campo en el cual este tiene una autoridad aceptable. Ello da lugar a un tercer elemento auxiliar: (vi) el soporte (S) -*backing* según Toulmin (p. 97)-, el cual provee el contexto en el que la garantía es verdadera y valida la inferencia de los datos a la conclusión. La Figura 3 ilustra el diagrama asociado al Modelo de Toulmin para un argumento incluyendo los seis elementos.

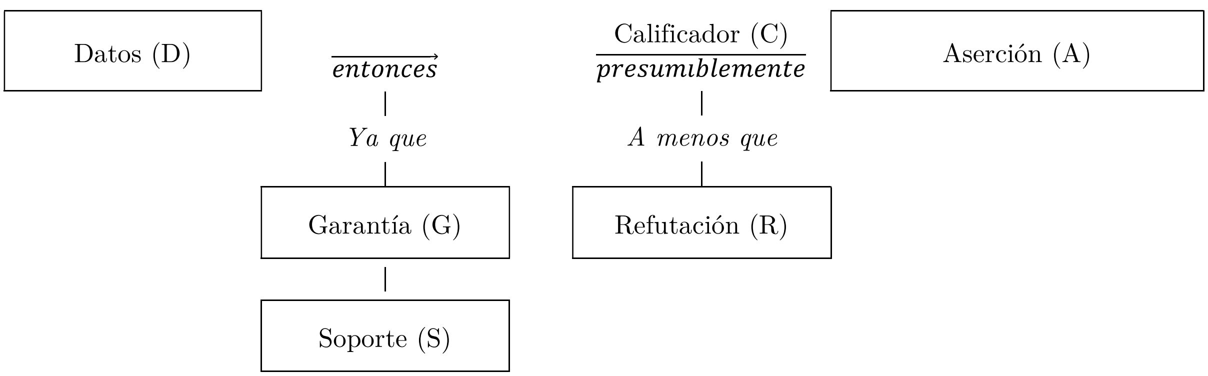


Figura 3. Diagrama Modelo (completo) de Toulmin

Para ilustrar los tres elementos auxiliares, empleamos el mismo ejemplo anterior: supóngase que alguien dice que la aserción (A) no necesariamente es conclusiva (es probable -C-), dado que puede pasar que los puntos X e Y puede no estar contenidos en un mismo plano donde esté el $\overline{AB}$ (condición de refutación R). Para el ejemplo empleado, claramente el soporte (B) es una Teoría de la Geometría Euclidiana Plana -*e.g.*, la propuesta de Birkhoff (1932)-. La Figura 4 presenta el diagrama asociado.

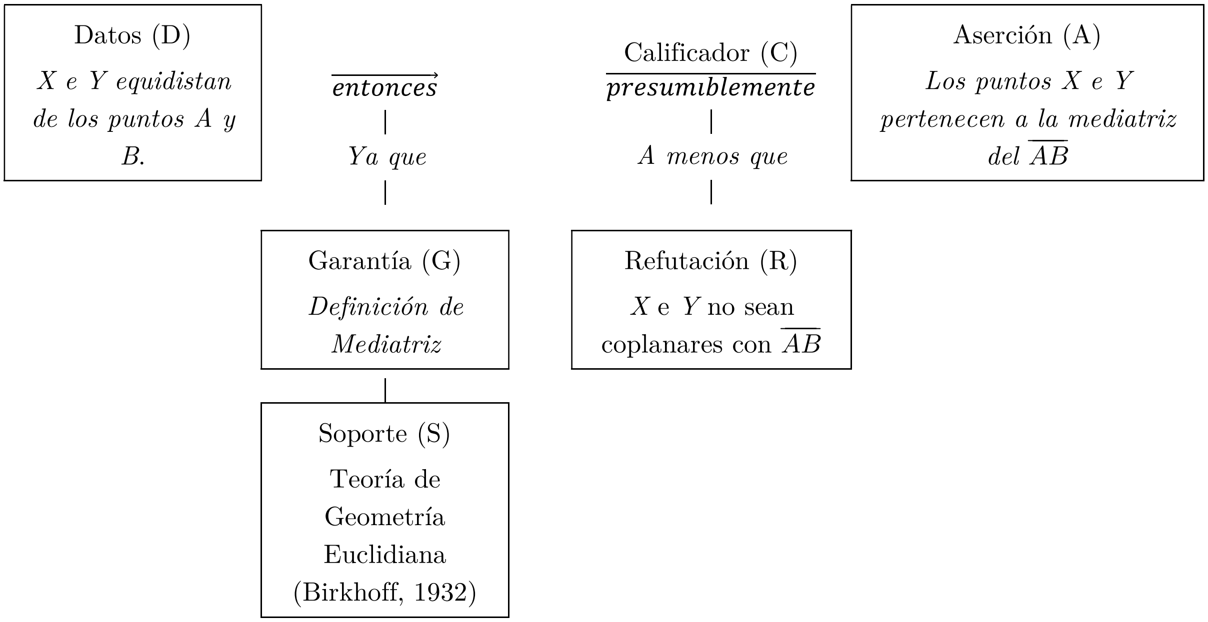


Figura 4. Ejemplo Modelo (completo) de Toulmin

2.1.4.2 *Tipos de argumentos*

El Modelo de Toulmin provee una estructura útil para caracterizar los tipos de argumentos inductivos, abductivos y deductivos (Pedemonte, 2005; 2007; Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010; Molina & Samper, 2018). A continuación, se presenta la caracterización correspondiente a cada tipo de argumento, usando el Modelo básico de Toulmin, el cual es suficiente para ello (los demás elementos del Modelo tienen lugar en un proceso argumentativo dialógico específicamente). En cada caso, se presenta un ejemplo que pretende ilustrar la respectiva descripción y se advierte en cuál de los dos subprocesos que llevan a una prueba están principalmente presentes (proceso de construir de una conjetura y proceso de construir su prueba).

En un *argumento deductivo* se aplica una proposición general conocida ($r: p \to q$) a unos datos que se tienen (p_1: particularización de p), para obtener necesariamente la aserción (q_1: particularización de q). El esquema del argumento es: $(p_1 \wedge r) \to q_1$, conocido como *Modus Ponens* (Figura 5[18]). La Figura 6 usa el Ejemplo 1 para ilustrar la situación. Este tipo de argumentos ocurre primordialmente en el proceso de probar una conjetura.

[18] Se presenta, en un cuadro en negrilla, lo que se infiere en cada tipo de argumento.

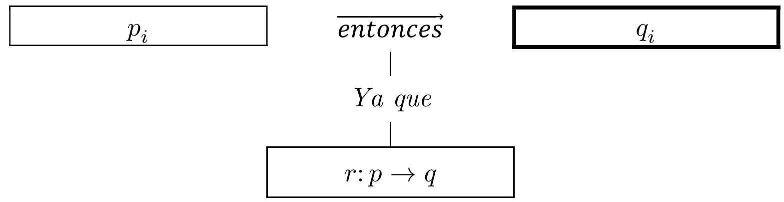


Figura 5. Modelo de Toulmin para argumento deductivo

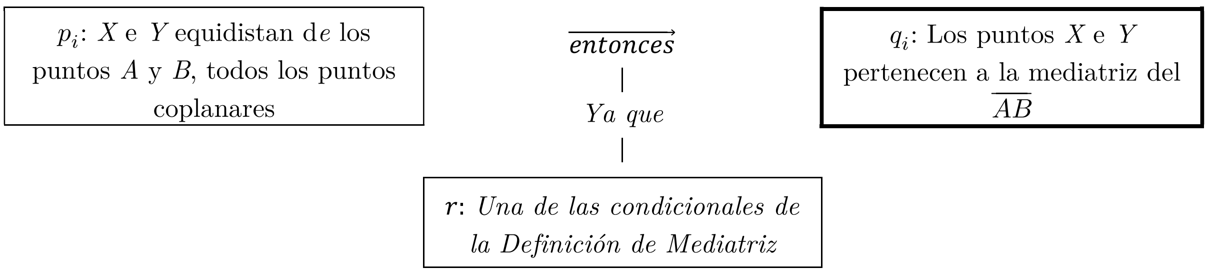


Figura 6. Ejemplo para argumento deductivo

En un *argumento abductivo* (Peirce, 1878; Eco, 1989; Pedemonte, 2007) la proposición particular que se tiene se refiere a un hecho que se observa q_1 (caso de q), y se cuenta con la proposición general $r: p \rightarrow q$. Se infiere que es posible el hecho p_1 (caso de $\boldsymbol{p}$). El esquema del argumento es $(q_1 \wedge r) \dashrightarrow p_1$ (Figura 7). La inferencia así obtenida es de índole provisional y plausible; indicamos esto en el esquema con el símbolo "$\dashrightarrow$" y en el diagrama con el borde punteado. Cabe mencionar que la procedencia de la regla general no es única: o es una regla hipotética que proviene de una exploración empírica o es una regla aceptada como elemento de un sistema teórico con el que se cuenta, elegida en una exploración teórica (Eco, 1989). Este tipo de argumentos puede ocurrir tanto en el proceso en el que se pretende construir una conjetura, como en aquel en donde se pretende probar.

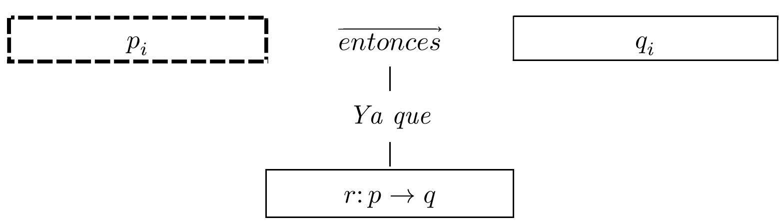


Figura 7. Modelo de Toulmin para argumento abductivo

Para ilustrar con un ejemplo este tipo de argumento, supóngase la siguiente situación tomado de Molina y Samper (2018):

Ejemplo 2 *Sean* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que* ΔABE *y* ΔCDE *sean congruentes?*

Quien aborde la situación podría hacer una representación en un EGD, por ejemplo, que satisfaga las condiciones (subrayadas) dadas en el enunciado, y buscar condiciones del punto E para obtener como consecuencia necesaria la congruencia del ΔABE y ΔCDE. En otras palabras, tendría la pretensión de completar la siguiente proposición abierta con el objetivo de que la misma sea verdadera:

> *Si* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *son dos segmentos congruentes y* E *es un punto tal que* ______________________________, *entonces* ΔABE *y* ΔCDE *son congruentes.*

En otras palabras, estaría buscando un antecedente de la conjetura y con ello, establecer la solución del problema. Buscar dicho antecedente, ya sea por medio de una exploración empírica o evocando conocimientos de un sistema teórico, lleva a la producción de un *argumento abductivo* durante el proceso de conjeturación. Antes de exponerlo, piénsese primero que un camino para establecer la congruencia de los triángulos es garantizar la congruencia de sus lados correspondientes (*e.g.*, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$, $\overline{BE} \cong \overline{ED}$). Esto llevaría, en un segundo momento, a que se evoque una propiedad que posibilite la congruencia de tales lados correspondientes; sea esta propiedad r: *si* □$ABCD$ *es un paralelogramo*, *entonces sus diagonales se bisecan.* Con ello, mediante un *argumento abductivo* (Figura 8), se podría inferir que un posible p_i es tomar el □$ABCD$ como un paralelogramo; así se haría referencia implícita a los segmentos congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (dato dado) y a su paralelismo (dato *nuevo*).

p_i: □$ABCD$ es un paralelogramo, (*y* E es la intersección de sus diagonales)

$\xrightarrow{\textit{entonces}}$

q_i: Diagonales se bisecan en E ($\overline{AE} \cong \overline{EC}$, $\overline{BE} \cong \overline{ED}$)

| *Ya que* |

r: Si □$ABCD$ es un paralelogramo, entonces sus diagonales se bisecan

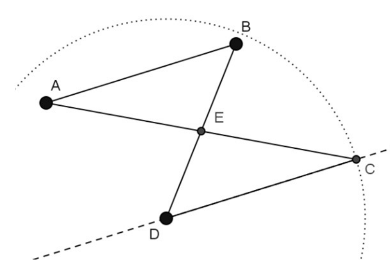


Figura 8. Ejemplo de argumento abductivo

Los *argumentos inductivos* pueden ser reconocidos a partir de dos tipos de generalización (Harel, 2001; Pedemonte, 2007): (i) en una generalización producto de un patrón de resultados; y (ii) en una generalización producto de un patrón de procesos. En seguida se describe cada tipo de generalización a partir del argumento inductivo asociado.

El primer tipo de generalización se focaliza en la regularidad de resultados. Este puede ser descrito mediante el siguiente *argumento inductivo* (*sobre resultados*): se tienen n casos p_1, p_2, p_3, …, p_n, que particularizan una proposición p tales que, para uno de ellos se satisface una proposición q. Como consecuencia de ello es posible generalizar los resultados a través de una proposición general (r: $p \to q$). El esquema del argumento es: $(p_1 \wedge q_1) \wedge (p_2 \wedge q_2) \wedge (p_3 \wedge q_3) \wedge \cdots \wedge (p_n \wedge q_n) \to r$. La Figura 9 ilustra el argumento con base en el Modelo de Toulmin; nótese que cada a diferencia de los otros diagramas, en este se ha omitido el *entonces* que conecta los casos p_n con q. Esto es porque, en sentido estricto, tales proposiciones no están conectadas con una condicional (*si… entonces…*), sino con una conjunción ($\wedge$) que ilustra que las proposiciones p_n y q_n "coexisten" por decirlo de alguna manera. La conclusión obtenida es de índole provisional, es una conclusión plausible y para indicarlo en el diagrama usamos una línea punteada. Sería una conclusión válida si q coexiste con todos los casos posibles de p, situación que se podría esquematizar con la tautología: $(p \wedge q) \to (p \to q)$.

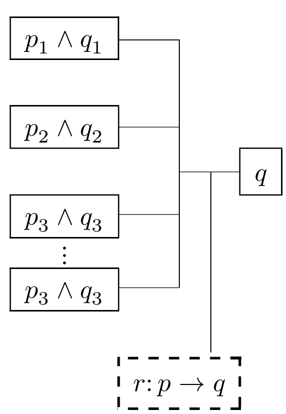


Figura 9. Modelo de Toulmin para argumento inductivo sobre resultado

El segundo tipo de generalización se focaliza en la regularidad de un proceso. Este puede ser descrito mediante el siguiente *argumento inductivo* (*sobre procesos*): se tienen n casos p_1, p_2, p_3, … , p_n, que particularizan una proposición p tales que, por recurrencia se tiene que $(p_1 \wedge q_1)$, $(p_1 \wedge q_1) \rightarrow (p_2 \wedge q_2)$, $(p_2 \wedge q_2) \rightarrow (p_3 \wedge q_3)$,…, $(p_{n-1} \wedge q_{n-1}) \rightarrow (p_n \wedge q_n)$. Como consecuencia de ello es posible generalizar los resultados a través de una proposición general (r: $p \rightarrow q$). El esquema del argumento es: $(p_1 \wedge q_1) \wedge [(p_1 \wedge q_1) \rightarrow (p_2 \wedge q_2)] \wedge [(p_2 \wedge q_2) \rightarrow (p_3 \wedge q_3)] \wedge … \wedge [(p_{n-1} \wedge q_{n-1}) \rightarrow (p_n \wedge q_n)]$. La Figura 10 ilustra el argumento inductivo sobre proceso con base en el Modelo de Toulmin. Ambos tipos generalizaciones (que llevan a argumentos inductivos sobre resultados o sobre proceso) de argumentos se presentan principalmente en el proceso mediante el cual se pretende construir una conjetura. El segundo tipo (sobre el proceso) es determinante para la prueba de la conjetura ya que, como se ilustrará más adelante, puede hacerse corresponder con parte de las exigencias para llevar a cabo una demostración por el método de inducción matemática. Vale destacar que, en Geometría Euclidiana, el primer tipo de generalización (y su respectiva inducción) es el que puede presentarse con mayor frecuencia, especialmente cuando se explora una situación por medio de la toma de medidas y estudio de varios casos.

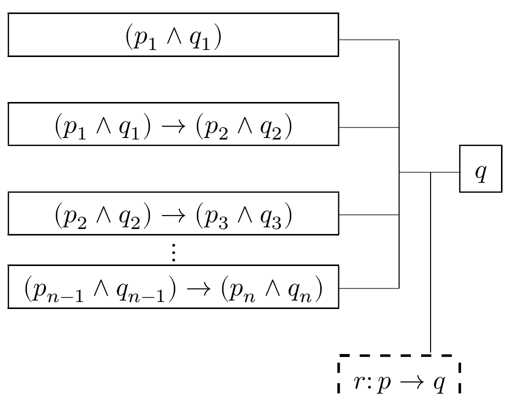


Figura 10. Modelo de Toulmin para argumento inductivo sobre proceso

Para ilustrar ambas maneras de generalización, supóngase la siguiente situación:

Ejemplo 3 *Se quiere saber cuánto es el resultado de sumar la medida de los ángulos de un polígono convexo según sus lados*[19].

Una primera manera de abordar la situación es emplear un EGD, por ejemplo, construir un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, y así sucesivamente, tomar las

[19] La situación se toma de Pedemonte (2007); la descripción de los argumentos que acá se presenta complementa la realizada por esta autora.

medidas de los ángulos en cada caso. Dos observaciones pueden ser establecidas: (i) para cada tipo de polígono convexo, independiente de su forma, es posible establecer como regularidad que la suma no varía; y (ii) es posible obtener una regularidad a partir de los resultados obtenidos entre los tipos de polígonos. La Figura 11 ilustra la regularidad de los resultados y el argumento inductivo (sobre el resultado) asociado a la primera observación, usando como ejemplo el caso del triángulo (si este es se nombra ΔABC, las medidas de sus ángulo son tomadas, su suma realizada y es arrastrado uno de sus vértices -A- para estudiar varios casos; se puede observar como regularidad que tal suma no varía); mientras que la Figura 12 presenta el argumento inductivo respectivo para la segunda observación.

Varias instanciaciones del ΔABC	**Suma medida de sus ángulos**
p_1: Posición A_1 del vértice A	q_1: 180
p_2: Posición A_2 del vértice A	q_2: 180
p_3: Posición A_3 del vértice A	q_3: 180
⋮	⋮
p_4: Posición A_n del vértice A	q_n: 180

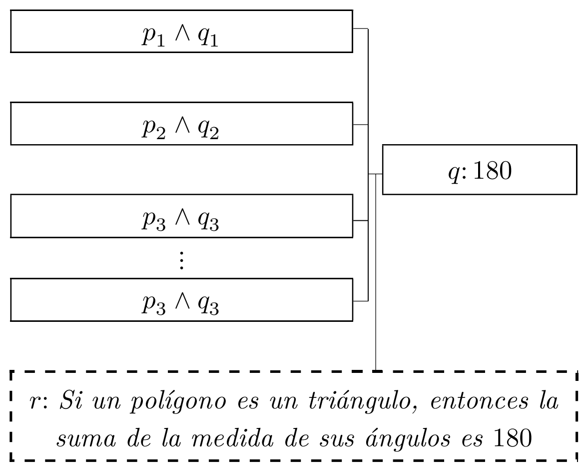


Figura 11. Ejemplo argumento inductivo sobre resultado caso triángulo

Número lados del polígono	**Suma medida de sus ángulos**
$p_1: n = 3$	$q_1: S(3) = 180$
$p_2: n = 4$	$q_2: S(4) = 360 = 180 \times 2$
$p_3: n = 5$	$q_3: S(5) = 540 = 180 \times 3$
⋮	⋮
$p_4: n$	$q_n: S(n) = 180 \times (n-2)$

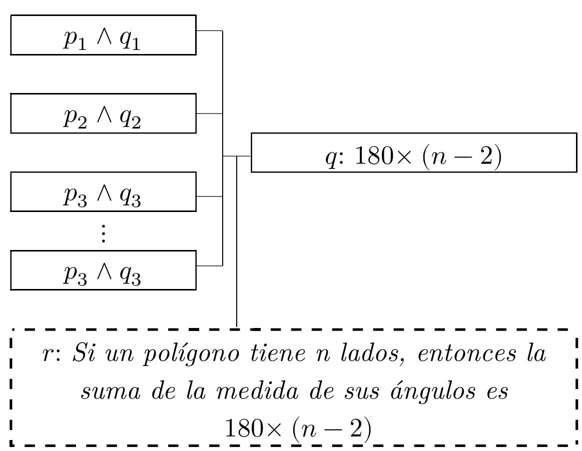


Figura 12. Ejemplo argumento inductivo sobre proceso - caso polígono

Una segunda manera para tratar con la situación consiste, de igual manera que en el método anterior, en construir un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, y así sucesivamente; pero, en lugar de tomar las medidas de los ángulos en cada caso, lo que se hace es dividir el polígono respectivo en triángulos cuyos vértices son vértices del polígono, cuyos interiores son disjuntos entre sí y que comparten un mismo vértice (Figura 13). Luego, utilizando el hecho de que para el triángulo la suma de la medida de los ángulos es 180, establecer la regularidad (sobre el proceso) consistente en que por recurrencia se puede obtener el resultado para el caso n con base en el resultado obtenido para el caso n-1. La Figura 14 ilustra la regularidad del proceso y el argumento inductivo asociado según el Modelo de Toulmin.

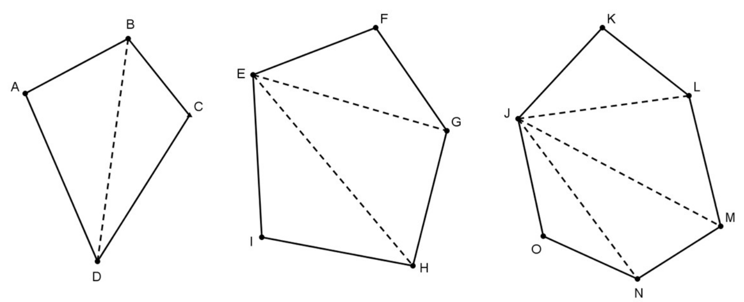


Figura 13. Polígonos cuyo interior se divide en triángulos

Número lados del polígono	**Suma medida de sus ángulos**
$p_1: n = 3$	$q_1: S(3) = 180$
$p_2: n = 4$	$q_2: S(4) = S(3) + 180 = 360$
$p_3: n = 5$	$q_3: S(5) = S(4) + 180 = 540$
$\vdots$	$\vdots$
$p_4: n$	$q_n: S(n) = S(n-1) + 180$

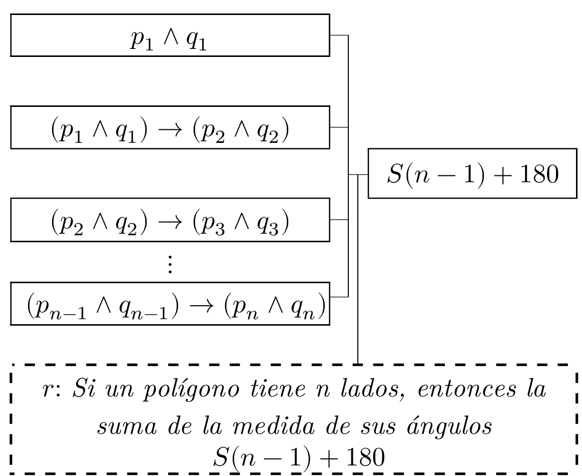
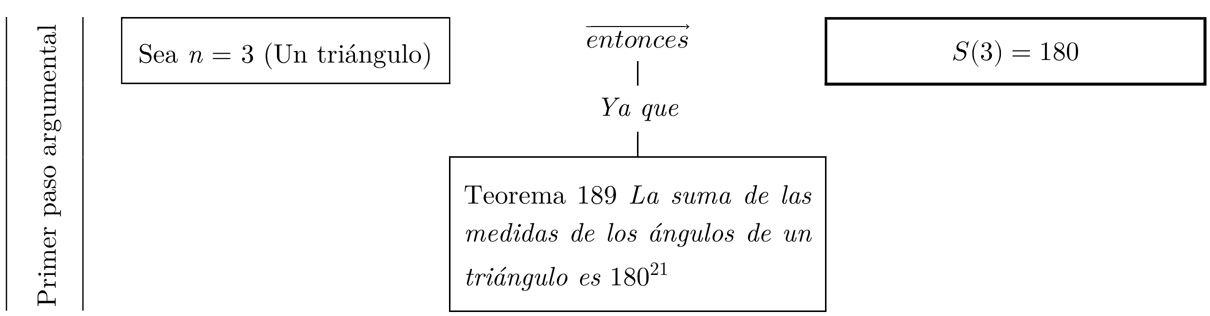


Figura 14. Ejemplo argumento inductivo sobre proceso

Hay que destacar un asunto interesante que se hace evidente a partir de los ejemplos ilustrados. Al comparar los procesos inductivos, específicamente, los casos sombreados que indican el estudio para el caso n, uno de los dos está mucho más cercano a lo que se denomina una prueba por inducción matemática, a saber, el que surge de la generalización sobre el proceso: para el n-gono (caso n o proposición p_n) se tiene que la suma de la medida de sus ángulos es $S(n) = S(n-1) + 180$ (o proposición q_n). La razón de esta afirmación radica en el hecho de que $S(n) = S(n-1) + 180$ no es nada más que el paso necesario para poder emplear la *hipótesis de inducción* ($S(n) = 180 \times (n-2)$) y probar, por el método de inducción matemática, la proposición r. Es necesario aclarar que, tal como mencionan varios autores (Harel & Sowder, 1998; 2007; Reid & Knipping, 2010), este método de prueba matemática es de carácter deductivo.

Para ilustrar esto último, se retoma el ejemplo descrito con el argumento de la Figura 14. Hasta ese punto, solo se ha presentado una generalización sobre un proceso a partir de un patrón identificado; si se quiere formalizar dicha generalización, es decir, probarla formalmente, es necesario emplear el método de inducción matemática. En la Figura 15 se presenta dicha prueba o Argumento compuesto por dos pasos argumentales (o dos argumentos de tipo deductivo), el segundo de los cuales, emplea la hipótesis de inducción (HI) y la generalización sobre el proceso (r); de estas dos proposiciones, se infiere deductivamente que[20] $S(n+1) = 180 \times [(n+1) - 2]$, con lo cual se prueba que *Si un polígono tiene n lados, entonces la suma de la medida de sus ángulos es* $180 \times (n-2)$.



[20] Vale decir que, en la caja correspondiente resaltada en negrilla, los pasos de una igualdad a otra que permiten inferir $S(n+1) = [180 \times (n+1) - 2]$ de $S(n+1) = S(n) + 180$, son susceptibles de ser discriminados mediante otros argumentos deductivos cuya garantía son propiedades de los números reales. No se presentan para no hacer engorrosa la lectura.

[21] El esquema de su prueba se ilustra en el ejemplo

Segundo paso argumental

HI: $S(n) = 180 \times (n-2)$ $\xrightarrow{\textit{entonces}}$

$S(n+1) = S(n) + 180$
$S(n+1) = 180 \times (n-2) + 180$
$S(n+1) = 180n - 180$
$S(n+1) = 180 \times (n-1)$
$S(n+1) = [180 \times (n+1) - 2]$

Ya que

r: *Si un polígono tiene n lados, entonces la suma de la medida de sus ángulos es* $S(n-1) + 180$

Figura 15. Prueba por inducción matemática

Con base en los tipos de argumentos que se han descrito hasta el momento (inductivos, abductivos y deductivos), es posible caracterizar otros tipos de argumentos, de manera análoga a como sucedió con la prueba por inducción matemática, cuya caracterización se fundamentó en un argumento inductivo (según la generalización de un proceso) y en un argumento deductivo. A continuación, serán caracterizados otros tipos de argumentos siguiendo el mismo criterio, particularmente, aquellos que pueden ser descritos a partir de un argumento deductivo; por su puesto, se empleará el Modelo de Toulmin para ello.

Recuérdese que en un *argumento deductivo* se aplica una proposición general conocida (r: $p \to q$) a unos datos que se tienen (p_1: particularización de p), para obtener necesariamente la aserción (q_1: particularización de q). El esquema del argumento es: $(p_1 \wedge r) \to q_1$ (Figura 5). Sin embargo, existen casos en donde emplear directamente la proposición general r no conduce a los resultados esperados (la inferencia de q_1) razón por la cual es necesario emplear proposiciones equivalentes a r para establecer la inferencia, por ejemplo, $\neg q \to \neg p$, y $(p \wedge \neg q) \to (s \wedge \neg s)$ (donde s es una proposición cualquiera). En este sentido, obtener necesariamente la aserción q_1 de los datos p_1 lleva a considerar nuevos datos y aserciones (de hacer una *transformación* en ellos) que aludan a las proposiciones equivalentes a r antes citadas: para aplicar la proposición general r': $\neg q \to \neg p$ se debe emplear $\neg q_1$ dato y $\neg p_1$ como aserción; y para aplicar la proposición general r'': $(p \wedge \neg q) \to (s \wedge \neg s)$, se debe emplear $(p_1 \wedge \neg q_1)$ como dato y $(s_1 \wedge \neg s_1)$ como aserción. Hacer este tipo de *transformaciones,* para aludir a las proposiciones equivalentes a r citadas previamente, es lo que se denomina *método* *indirecto*; si se alude a r' *método indirecto por contrapositiva* (*o contrarrecíproca*) y si se alude a r'' *método indirecto por contradicción* (Antonini & Mariotti, 2008).

La Figura 16 expone el argumento de *método indirecto por contrapositiva* mientras que la Figura 17 lo correspondiente al *método indirecto por contradicción*. La Figura 18 y la Figura 19 ilustran con ejemplos cada tipo de argumento respectivamente (tomados del curso objeto de este estudio):

$\neg q_1$ $\xrightarrow{\textit{entonces}}$ $\neg p_1$

Ya que

$r' \colon \neg q \to \neg p$

$(r' \colon \neg q \to \neg p) \leftrightarrow (r \colon p \to q)$

Figura 16. Modelo de Toulmin para argumento de método indirecto por contrapositiva

$p_1 \wedge \neg q_1$ $\xrightarrow{\textit{entonces}}$ $s_1 \wedge \neg s_1$

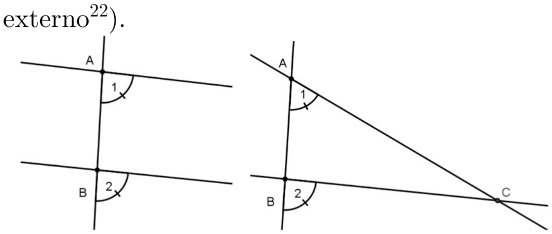
Ya que

$r'' \colon (p \wedge \neg q) \to (s \wedge \neg s)$

$[r'' \colon (p \wedge \neg q) \to (s \wedge \neg s)] \leftrightarrow (r \colon p \to q)$

Figura 17. Modelo de Toulmin para argumento método indirecto por contradicción

Ejemplo 4 *Se pregunta sobre la relación existe entre las rectas k y m, si* $p_1 \colon \angle 1 \cong \angle 2$.
Alguien responde que $q_1 \colon k \parallel m$.
Para justificar q_1, se supone $\neg q_1 \colon k \nparallel m$. Con ello, se determina ΔABC, y con ello que $\neg p_1 \colon \angle 1 \ncong \angle 2$ (por Teorema del ángulo externo[22]).



$\neg q_1 \colon k \nparallel m$ $\xrightarrow{\textit{entonces}}$ $\neg p_1 \colon \angle 1 \ncong \angle 2$

Ya que

$r' \colon \neg q \to \neg p$: Teorema del ángulo externo

Figura 18. Ejemplo para argumento de método indirecto por contrapositiva

[22] Teorema Ángulo externo *Si $\angle ABD$ un ángulo externo al ΔABC, entonces $m\angle ABD > m\angle BAC$ y $m\angle ABD > m\angle ACB$.*

Ejemplo 5 *Dado un* ΔABC *cualquiera y las mediatrices* k, m, n *de sus lados* (p_1), *se pregunta si tales mediatrices son concurrentes.* Alguien responde que sí lo es, pero dice que primero es necesario probar que dos de tales mediatrices se intersecan, $q_1\colon k \cap m \neq \emptyset$. Para justificar q_1, se supone $\neg q_1\colon k \parallel m$. Sea $\overleftrightarrow{BC} \perp k$ (por Teorema Paralelas - perpendicular[23]). En consecuencia, $s_1\colon \overleftrightarrow{BC} \perp k$ y $\overleftrightarrow{AB} \perp k$ por B. Pero, existe una única recta perpendicular a otra por un punto externo $(\neg s_1)$.

$p_1\colon \Delta ABC$, mediatrices k, m, n; y $\neg q_1\colon k \parallel m$.

$\overrightarrow{entonces}$

Ya que

$s_1\colon \overleftrightarrow{BC} \perp k$, $\overleftrightarrow{AB} \perp k$; y $\neg s_1$: Existe una única recta perpendicular a otra por un punto externo

$r''\colon (p \wedge \neg q) \rightarrow (s \wedge \neg s)$

Figura 19. Ejemplo para argumento de método indirecto por contradicción

Otra situación que se presenta con frecuencia en los procesos de prueba de una conjetura consiste en realizar construcciones auxiliares que posibiliten su elaboración; en otras palabras, mediante tales construcciones la hipótesis (o datos) de la conjetura es enriquecida (se "transforma") de manera deliberada por cuanto con ello se considera plausible inferir deductivamente el consecuente de la conjetura. Esta manera de abordar una prueba puede ser considerado como otro tipo de argumento deductivo (en adelante argumento de *construcción auxiliar*) el cual puede ser descrito de la siguiente manera: se aplica una proposición general conocida (r: $t \rightarrow q$) a unos datos que se tienen (p_1) en conjunción con una particularización de t (t_1), para obtener necesariamente la aserción (q_1: particularización de q). El esquema del argumento se fundamenta en las tautologías $[(p_1 \wedge t_i) \wedge r] \rightarrow q_1$ y $[(p_1 \wedge t_i) \wedge r] \rightarrow (p_1 \rightarrow q_1)$ (Figura 20). La Figura 21 toma como referencia la prueba del Teorema 180, empleado en un paso argumental de la prueba por inducción matemática ilustrada en la Figura 15, para ejemplificar un argumento de construcción auxiliar.

$p_i \wedge t_i$

$\overrightarrow{entonces}$

Ya que

q_i

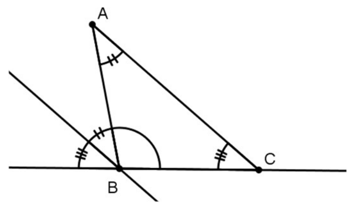
$r\colon t \rightarrow q$

$[(p \wedge t) \wedge r] \rightarrow (p \rightarrow q)$

Figura 20. Modelo de Toulmin para argumento de construcción auxiliar

[23] Teorema Paralelas-perpendicular *Si* $k \parallel m$ *y* $k \perp s$; k, m, s *rectas coplanares, entonces* $m \perp s$.

Ejemplo 4 *Probar que dado un* ΔABC (p_1), *entonces la suma de las medidas de sus ángulos es 180* (q_1). Para hacer la prueba, alguien sugiere construir $t_1\colon m \parallel \overleftrightarrow{AC}$, pues con ello, empleado Teorema PAI[24] y sustituciones, se obtiene q_1.



$p_1 \wedge t_1$: ΔABC y $m \parallel \overleftrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{entonces}$	$q_1\colon m\angle A +$ $m\angle B+$ $m\angle$C =180
	Ya que	
	$r\colon t \to q$ Teorema PAI y sustitucione s	

Figura 21. Ejemplo para argumento de construcción auxiliar

Finalmente, se presenta una caracterización para el *argumento por analogía* que, tal como plantean varios autores (*e.g.*, English, 2004; Reid & Knipping, 2010; Lee & Sriraman, 2010) no ha tenido el mismo desarrollo investigativo con respecto a los anteriormente descrito. Antes de caracterizar dicho tipo de argumento, conviene hacer lo respectivo al término *analogía.* Cotidianamente, una *analogía* se concibe como las similitudes resultantes de la comparación entre las respectivas estructuras de dos sistemas (English, 2004; Juthe, 2005; Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1989; Polya, 1954). Desde la etimología del término, dichos autores definen formalmente *analogía* con referencia a una relación *proporcional* que involucra cuatro términos: p es a q como p' *es a* q'. Una definición más detallada del término es presentada a continuación (basada en Juthe, 2005 y Steinhart 2001):

El Dominio de Partida [DP] es *análogo* con el Dominio de Llegada [DL] con respecto al Predicado Asignado [PA] si hay una correspondencia biunívoca entre los elementos del DP y los elementos del DL que determinan el PA. Esto es, cada elemento del DP tiene un elemento contraparte en el DL. Un elemento p' del DL es una contraparte de un elemento p del DP si el elemento p' tiene una relación $\mathcal{R}$ (determinada por PA) con otro elemento q' en el DL, y el elemento p tiene una relación $\mathcal{R}$ con otro elemento q en el DP. Es decir, existe una función f_{PA}: DP→DL tal que $f_{PA}(p) = p', f_{PA}(q) = q'$ y $f_{PA}[\mathcal{R}(p,q)] = \mathcal{R}(p',q')$, lo cual usualmente se lee "(p es a q) como (p' es a q')", donde "es a" se entiende en términos de $\mathcal{R}$ y "como" indica la asignación según f_{PA}. En síntesis, una analogía es una terna $(\mathrm{DP}, \mathrm{DL}, f_{PA})$ con la cual

[24] Teorema PAI *Si dos rectas son paralelas y una trasversal a ella, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.*

DP y DL tienen estructuras similares según f_{PA}. Vale decir que la relación en DP y la relación en DL no necesariamente deben ser la misma, sino guardar cierta similitud que permite significar una con respecto a la otra (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1989).

De acuerdo con lo anterior, la estructura de un *argumento por analogía* se describe como sigue: Dados dos dominios DP y DL, el segundo menos conocido que el primero, comparados mediante una función f_{PA} que relaciona biunívocamente sus elementos (G). Sea $p, q, \mathcal{R}(p,q) \in \text{DP}$, $p', q' \in \text{DL}$ y $f_{PA}(p) = p'$, $f_{PA}(q) = q'$ (D), es posible inferir $\mathcal{R}(p', q')$ (A). Usando el Modelo de Toulmin, se tiene el siguiente diagrama (Figura 22).

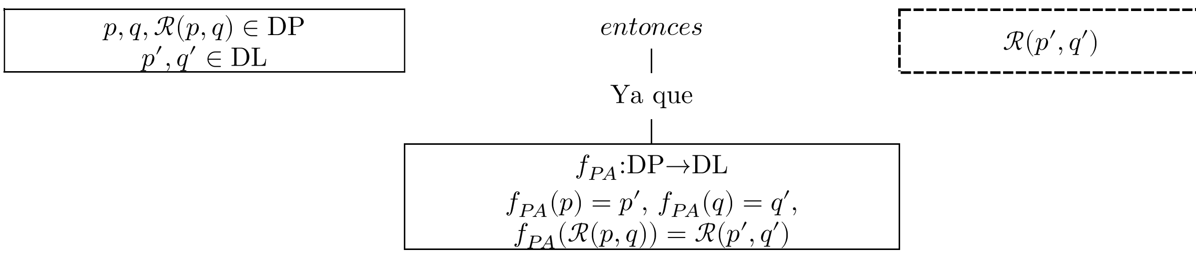


Figura 22. Modelo de Toulmin para argumento por analogía

Es posible identifican así tres fases en dicho proceso de argumentación (Steinhart, 2001): de acceso; de correspondencia; y de trasferencia:

La *fase de acceso* inicia con la precisión de un DL y tiene el propósito de identificar candidatos $(\text{DP}_1, \dots, \text{DP}_n)$ para ser Dominios de Partida, que son potencialmente análogos con DL. En esta fase se buscan elementos y relaciones viables que puedan generar, en términos metafóricos, un isomorfismo entre DL y DP.

La *fase de correspondencia* consiste en producir la función f_{PA}:DP→DL de forma tal que preserve en DL la mayor parte de la estructura relacional del DP como sea posible; es decir, busca generar analogías [PA] y con ellas garantizar, en términos metafóricos, un isomorfismo entre ambos dominios.

En la *fase de transferencia* se usan las analogías generadas en la fase anterior e interpretarlas en términos de DL. Para ello, es necesario mover el conocimiento adquirido de las relaciones en DP y ponerlo en juego en DL; esto, con miras a realizar inferencias analógicas (crear nuevas proposiciones no necesariamente válidas) en DL. Estas nuevas proposiciones ($\mathcal{R}(p', q') \in \text{DL}$) pueden generarse de dos formas distintas bajo f_{PA}: (i) si $\mathcal{R}$ ya existe en DL, mediante una simple sustitución de (p, q) por (p', q');

y (ii) si dicha $\mathcal{R}$ no existe en DL, mediante la generación de una relación tal, que puede ser la misma $\mathcal{R}$ en DP, o ser una $\mathcal{R}'$ muy similar a $\mathcal{R}$; hecho esto se debe seguir (i). Esta fase produce el argumento por analogía descrito en la Figura 22. Modelo de Toulmin para argumento .

Considérese la situación del Ejemplo[25] 2. Alguien[26] pudo haber propuesto como solución al problema considerar los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ congruentes y coplanares (proposición s) y a E como el punto de intersección de las *mediatrices* de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ (proposición r), para así lograr que equidiste de los puntos A y C, y B y D (q) (y con ello la congruencia de los ΔABE y ΔCDE) (Figura 23). Por supuesto, esta solución es correcta por cuanto la proposición $t\colon (s \wedge r) \rightarrow q$ es válida dentro del sistema teórico para la Geometría Euclidiana.

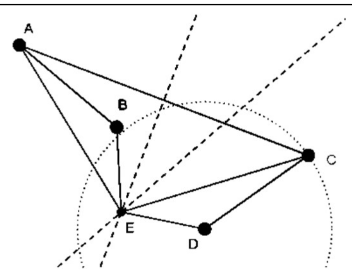


Figura 23. Solución al problema del Ejemplo 2, segmentos coplanares

Esta persona se le ocurre aludir a la siguiente proposición analógica (w): *El plano es al espacio como la recta es al plano*. Este hecho indica que este sujeto está inmerso en un proceso de argumentación por analogía:

Fase de acceso. Con el ánimo de buscar una solución para el caso en el que los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ congruentes y alabeados -proposición s'- (*i.e.*, en el Dominio de la Geometría del Espacio -DL), recurrió al Dominio de la Geometría Plana (DP) en el cual ya tenía una solución.

Fase de correspondencia. Luego, usa su analogía (w) para implícitamente formar f_w: DP$\rightarrow$DL a través de la cual determina dos correspondencias básicas: $h{:}f_w(recta) = plano$; $k{:}f_w(segmentos\ coplanares) = segmentos\ alabeados$. Toma h y la particulariza

[25] El enunciado del problema es: *Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes*?

[26] Estas soluciones son tomadas del Molina & Samper (2018) y el curso objeto de este estudio, respectivamente.

a una clase de rectas y planos mediante la siguiente proposición j:$f_{Pp3}(mediatriz\ segmento) = plano\ mediador$. En términos del problema, las correspondencias quedan instanciadas así: k': $f_w\left(\overline{AB}, \overline{CD}\ coplanares\right) = \left(\overline{AB}, \overline{CD}\ alabeados\right)$ y j': $f_w(\mathcal{M}_{\overline{AC}}) = \beta_{\overline{AC}}$, $f_w(\mathcal{M}_{\overline{BD}}) = \beta_{\overline{BD}}$. Otra correspondencia necesaria para hacer el problema consistente en considerar *la recta intersección entre los planos mediadores* como la contraparte del *punto de intersección entre las rectas mediatrices*, objetos que se instancian en r y $m = \beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}}$ (r'). Tal correspondencia queda determinada por h: $f_w(r) = r'$.

Fase de trasferencia: Tiene lugar la inferencia analógica, a partir de la cual puede asentir que un *punto de la recta m equidista de los puntos A y C, y B y D* (q'), usando, principalmente, z: $f_w(q) = q'$. La Figura 24 muestra el esquema asociado al argumento por analogía que tiene lugar en esta fase.

$\overline{AB}, \overline{CD}\ coplanares \in \mathrm{DP}$,
$\mathcal{M}_{\overline{AC}}, \mathcal{M}_{\overline{BD}}, r \in \mathrm{DP}$
$\mathcal{R}$: $q \in \mathrm{DP}$
$\overline{AB}, \overline{CD}\ alabeados \in \mathrm{DL}$,
$\beta_{\overline{AC}}, \beta_{\overline{BD}}, r' \in \mathrm{DL}$

$\xrightarrow{entonces}$

$\mathcal{R}$: $q' \in \mathrm{DL}$

Ya que

f_w: DP → DL
k': $f_w\left(\overline{AB}, \overline{CD}\ coplanares\right) = \left(\overline{AB}, \overline{CD}\ alabeados\right)$
j': $f_w(\mathcal{M}_{\overline{AC}}) = \beta_{\overline{AC}}$, $f_w(\mathcal{M}_{\overline{BD}}) = \beta_{\overline{BD}}$
h: $f_w(r) = r'$
z: $f_w(q) = q'$

Figura 24. Ejemplo para argumento por analogía

2.1.4.3 *Clase de argumentos*

Descritos los tipos de argumentos, a continuación, se presenta una clasificación de estos atendiendo principalmente a la propuesta de Toulmin (2003) y acuñada por Krummheuer (1995). Tal como se describió en el apartado 0, estos autores precisan dos clases de argumentos, los *analíticos* y los *substanciales*. Los primeros se caracterizan porque se fundamentan en la lógica formal deductiva, razón por la cual, la aserción se infiere como consecuencia necesaria de los datos; vale decir que tales argumentos se emplean especialmente, pero no exclusivamente, en la elaboración de un Argumento tipo prueba semiformal o formal. En contraste, en los argumentos sustanciales la aserción (o conclusión) se apoya de manera gradual: tal apoyo (datos, garantías, soporte y su relación, etc.) no conduce a la conclusión por medio de una inferencia deductiva de la cual esta es consecuencia necesaria de los datos, ni por un regla arbitraria como la evidencia (un postulado o axioma, por ejemplo), sino que está motivado por la realización de una convincente presentación de datos, relaciones entre datos y resultados, calificadores, etc.

Con este escenario, los tipos de argumentos presentados en el apartado anterior pueden ser clasificados o bien como argumentos analíticos, o bien como argumentos substanciales. La Tabla 6 sintetiza tal clasificación: los argumentos de tipo inductivo, abductivo y la analogía se han clasificado como argumentos substanciales. Esto porque no se corresponden con un esquema de inferencia basado en una tautología; en los términos de Krummheuer, se fundamentan en la lógica informal; por ejemplo, los inductivos se soportan en la verificación empírica de resultados (de una aserción) para varios casos (datos), e identificación de patrón de regularidad para argumentos inductivos; los abductivos, en la posibilidad de establecer ciertos datos (empíricos o teóricos) que soporten una aserción realizada; los argumentos por analogía en comparaciones que permiten hacer correspondencias entre elementos de dos dominios (uno más conocido que el otro) que llevan a inferir ciertas propiedades en el dominio menos conocido, cuya validez es plausible producto de la existencia de una propiedad similar ya validada en el domino más conocido. Algunos autores (*e.g.*, English, 2004; Juthe, 2005) proponen que en un argumento por analogía pueden emerger argumentos inductivos por cuanto en el primero, de alguna forma, puede ser necesario detectar patrones (relacionales) en medio de la variación de elementos, para detectar posibles correspondencias que conlleven a establecer proposiciones nuevas en el dominio de llegada.

Por su puesto, como era de esperarse, todos los subtipos de los argumentos deductivos son clasificados como argumentos analíticos. Los argumentos deductivos directos, indirectos y de construcción auxiliar se fundamentan en tautologías de la lógica formal bivalente. Un asunto interesante respecto de los argumentos deductivos indirectos y de construcción auxiliar, es que, a diferencia de lo que sucede con un argumento deductivo directo fundamentado en el *Modus Ponens* explícitamente (Ver Figura 5 y Figura 6), en estos las tautologías en las que se fundamentan no permiten determinar que la relación entre los datos y las aserciones sea *causal* (Harel & Sowder, 2007), en otras palabras, no permite decantar que la aserción q es causa de p, sino que permiten establecer que la proposición $(p \rightarrow q)$ es verdadera (ver esquemas sombreados en las Figuras 16, 17 y 20).

Para finalizar, es importante hacer dos observaciones: (i) Otra clase de argumentos que puede estar presente en una comunidad pero que se diferencia notablemente con las clases de argumentos descritos previamente, es aquella que Harel y Sowder (1998; 2007) denominan de *convicción externa*; en esta, los argumentos, independientemente de su tipología, no se fundamentan con base en una *racionalidad* de un individuo o una comunidad (utilizado los términos de Krummheuer, 1995), sino en virtud de un mandato que proviene de un agente externo (principalmente, por medio de un sujeto un objeto que ostenta autoridad -*e.g.*, un profesor o un libro-). (ii) Una clase de argumentos citado con frecuencia en la literatura es la de *ejemplo y contraejemplo* (Harel & Sowder, 1998; 2007; Reid & Knipping, 2010). En la propuesta de clasificación empleada para este estudio tal clase no se cita de manera explícita, pero ello no significa que no esté presente: los contraejemplos están contemplados con el elemento *condiciones de refutación*; los ejemplos pueden ser parte de un argumento cuasi-inductivo cuando solo es considerado un caso; incluso pueden existir argumentos que basados en un ejemplo pueden ser deductivos.

Tabla 6. Síntesis clase y tipos de argumentos

Clase de argumento	**Tipo de argumento**			**Proceso en el que principalmente puede emerger**
Substancial	Inductivo			Proceso de construcción de una conjetura
	Abductivo			
	Analogía			Proceso de construcción de una conjetura o de su prueba.
Analítico	Deductivo	Directo (Modus Ponens)		Proceso de construcción de una prueba
		Método indirecto	Por contrapositiva	
			Por contradicción	
		Construcción auxiliar		
Convicción externa	Cualquier tipo de argumento			Proceso de construcción de una conjetura o de su prueba

2.2 OBJETOS PRIMARIOS EMERGENTES DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

En esta sección se describe una ontología matemática propuesta por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos -EOS-, sistema teórico inclusivo que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos, socioculturales y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza (Godino, Batanero, & Font, 2007). Uno de los objetivos de este Enfoque es desarrollar un modelo ontológico y epistemológico útil para analizar la actividad matemática que se desarrolla en las aulas de clase de matemáticas. Para ello, asume dos postulados: Uno antropológico, según el cual las matemáticas son una actividad humana, y uno semiótico, según el cual las entidades involucradas en esta actividad provienen o emergen de las acciones o discursos a través de los cuales se expresan y comunican. En el marco de su modelo, el EOS explica la naturaleza de los diferentes tipos de objetos y su aparición a través de prácticas matemáticas (Font, Godino, & Gallardo, The emergence of objects from mathematical practices, 2013).

En el lenguaje ordinario, la palabra objeto se usa para referirse a cosas que son materiales, tangibles o reales; en contraste, en el lenguaje filosófico un objeto es una categoría metafísica básica y universal, un sinónimo de entidad, cosa o algo que puede ser individualizado. En la ontología propuesta por el EOS, basada en la postura sociocultural del interaccionismo simbólico (Blumer, 1969; Cobb & Bauersfeld, 1995), se emplea *objeto,* en un sentido amplio, para referirse a cualquier entidad que está involucrada de alguna manera en la práctica o actividad matemática y que puede ser separada o individualizada. Como consecuencia de esto, el objeto adquiere un estatus derivado de la práctica que lo precede.

Una forma de conceptualizar las prácticas matemáticas es considerarlas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual se leen y producen textos matemáticos, y una práctica discursiva, que permite la reflexión sobre la práctica operativa. Ambas prácticas podrían ser reconocidas como matemáticas por un observador experto. Esta forma de entender la práctica matemática requiere considerar las facetas personales e institucionales, entre las cuales se establecen complejas relaciones dialécticas que ponen en juego significados.

En tales prácticas matemáticas, estos significados están determinados por la función que una determinada práctica cumple en los procesos de resolución de problemas o en la comunicación de la solución a otra persona, validando la solución y generalizándola a otros contextos y tipos de problemas. Se debe enfatizar que esta forma de entender el significado de las prácticas matemáticas implica que éstas sean consideradas como gobernadas por normas de diversa índole (en la sección 2.3, y más específicamente en el apartado 2.3.4, se hace una conceptualización de los sistemas de normas que regulan tales prácticas).

Con base en lo anterior, al concebir la matemática es una actividad humana, es posible indicar que las entidades u objetos involucrados en esta actividad vienen o emergen de las acciones y el discurso a través del cual se expresan y comunican (Font, Godino, & Gallardo, 2013). En síntesis, el EOS propone una ontología de los *objetos matemáticos* derivada de la *práctica matemática*. De manera concreta, este Enfoque propone seis objetos primarios que pueden emerger de dicha práctica:

- *Elementos lingüísticos*: términos, expresiones, anotaciones, gráficas, etc. en sus diferentes registros (escritos, orales, etc.).
- *Situaciones/problemas*: aplicaciones matemáticas, tareas, ejercicios, etc.
- *Conceptos/definiciones*: introducidos por medio de definiciones o descripciones, explícitas o no (recta, punto, mediatriz, etc.).
- *Proposiciones*: declaraciones sobre conceptos (postulados, teoremas, etc.).
- *Procedimientos*: algoritmos, técnicas de cálculo, técnicas para probar, etc.
- *Argumentos*: discursos utilizados para validar o explicar proposiciones y procedimientos.

Estos objetos están relacionados entre sí y forman configuraciones (Figura 25) que pueden ser consideradas *cognitivas* -vistas desde la perspectiva del estudiante- o *epistémicas* -vistas desde una perspectiva institucional- (Font, Godino, & Gallardo, 2013).

Figura 25. Objetos primarios y sus relaciones en una configuración ontosemiótica

En lo que respecta al *argumento*, objeto central para esta investigación, la conceptualización propuesta por el EOS en torno a él se corresponde con la asumida para este estudio (ver el apartado 2.1.3.1), en términos generales. Para ser más exactos, en adelante un *argumento* se entenderá como *objeto primario* de una configuración que es producto (discurso escrito u oral) de un proceso de argumentación. Un asunto importante que el EOS provee a los procesos de argumentación como práctica matemática, se fundamenta en la utilidad que ofrece la configuración ontosemiótica (Figura 25) como herramienta analítica para precisar cómo un proceso articula los objetos que conforman la configuración de la cual forma parte el argumento involucrado (Pino-Fan, Godino, & Font, 2018).

2.3 Sistemas de Normas en la Práctica Matemática

Tal como se presentó en la sección previa, al asumir las matemáticas como una práctica (o actividad) humana (presupuesto socioculturales o antropológicos), tiene sentido conceptualizar sobre los sistemas de normas que regulan dicha práctica. En esta sección se aborda una conceptualización sobre los sistemas normativos propuestos para la Educación Matemática por varios autores. Para ello, en el apartado 2.3.1 se exponen las principales propuestas sobre el tema, desde perspectivas sociológicas (patrones), emergentes (normas sociales y sociomatemáticas) y situacionales (contrato didáctico). Ello posibilitará un contexto para presentar la postura asumida para este estudio, correspondiente con la dimensión normativa propuesta por el EOS. Finalmente, se presenta una descripción de situaciones instruccionales para la clase de geometría que, a priori, sugieren un conjunto de normas presentes para cada una de tales situaciones.

2.3.1 Principales propuestas teóricas sobre sistemas de normas

Tal como se percibió en el primer capítulo, durante los últimos 20 años, la investigación en Educación Matemática se ha abocado a examinar los procesos de enseñanza y aprendizaje con respecto a las interacciones sociales que tienen lugar en las aulas. En algunos casos, esta dirección surgió como respuesta a las limitaciones que las perspectivas psicológicas tuvieron para describir el aprendizaje del estudiante dentro de un ambiente de clase (Yackel & Cobb, 1996) o a la cantidad insuficiente de estudios centrados en tales interacciones en comparación con una perspectiva psicológica (Bauersfeld, 1988). Estudiar las interacciones del aula llevó a identificar ciertos patrones que se convertían en normas, en tanto estaban subyacentes a lo que significaba estar en la escuela y hacer matemáticas escolares. En este sentido, diversas perspectivas, desde las puramente sociológicas hasta las epistemológicas, pasando por la emergente (uso de aspectos psicológicos empleado en conjunto el interaccionismo simbólico), han desarrollado estudios que abordan los procesos interaccionales-normativos, tanto en escenarios locales (microsociedad del aula) como escenarios mucho más amplios (macrosociedad de una cultura determinada). A continuación, se presenta una breve descripción de las principales propuestas teóricas sobre normas. Ello provee un contexto para luego presentar los referentes teóricos que, al respecto del sistema de normas, se tomarán para la presente investigación, a saber: *dimensión normativa propuesta por el EOS* (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009) *y la teoría de los intercambios interaccionales* (Herbst, y otros, 2010).

2.3.2 Perspectiva sociológica y perspectiva emergente: normas sociales y sociomatemáticas

A finales de la década del ochenta, Bauersfeld (1988) y Voigt (1985), desde una *perspectiva sociológica*, empiezan a involucrar la descripción de fenómenos interaccionistas del aula de matemáticas a la luz de patrones que se convierten en *normativos* que no necesariamente son explícitas para los participantes y que consisten en redes de rutinas y obligaciones. Estos patrones son clave en la actividad del aula, dado que continuamente surgen con el propósito de ayudar a reducir las complejidades asociadas con la ambigüedad de los significados que se producen cuando las personas interactúan. Ejemplos de tales patrones son: el uso por parte del profesor de preguntas abiertas a las que se espera una respuesta definitiva; una sugerencia; la descomposición de un proceso de resolución en pequeños trozos de acciones subsecuentes; la rutina de ensayo y error para cumplir con las expectativas del maestro; etc.

Voigt (1989) distingue los *patrones de interacción* (que pueden ocurrir en cualquier aula) con los *patrones temáticos de interacción* que son más específicos para las aulas que abordan áreas particulares, por ejemplo, las matemáticas. Este último tipo de interacción ocurre cuando profesor y estudiantes constituyen intersubjetivamente un tema relativo a las matemáticas. Sin embargo, este proceso lleva a interpretaciones variables por parte de los sujetos, sobre el supuesto tema en común. Esto implica que, para desarrollar un significado intersubjetivo, debe haber un proceso de negociación. La *negociación* se caracteriza como un proceso de adaptación compartida durante el cual los participantes crean interactivamente responsabilidades para su actividad (Voigt, 1985). Además, sólo los significados matemáticos *compartidos* pueden ser producidos a través de una negociación; un indicador de que tales significados son ya compartidos ocurre cuando los participantes en la interacción ignoran que podrían interpretar algo diferente y su interacción continúa sin conflicto. En tanto que en el aula de clases de matemáticas los temas se toman como compartidos, la perspectiva sociológica alude a una *microcultura* del aula. De lo anterior, se infiere que las características de una microcultura dependen en gran medida de los patrones o convenciones normativos de interacción o temáticos de interacción usualmente ocultos en un aula de clase. Así las cosas, esta perspectiva sociológica se encarga de describir estos patrones más que de estudiar su emergencia.

Pero, desde esta perspectiva *¿dónde tiene lugar la comprensión matemática*? Para dar respuesta a ello, en primera instancia, hay que señalar que la *comprensión matemática* se estudia a través del examen de los temas matemáticos que emergen de la interacción. Esto es, el desarrollo cognitivo de los estudiantes (su comprensión) se corresponde con la evolución de los temas matemáticos que toman lugar en las interacciones (Voigt, 1985). Ahora bien, debido a que esta perspectiva se centra en un análisis sociológico que reconstruyen los *temas* entre las personas, no consideran los procesos cognitivos que ocurren dentro de una persona individual. Las normas se relacionan con los patrones temáticos de interacción.

Un poco más tarde Cobb y sus colegas (Cobb, Wood, Yackel, & McNeal, 1992; Yackel & Cobb, 1996) a partir de una aproximación que denominan *perspectiva emergente* -que articula el constructivismo de von Glasersfeld (1984); el interaccionismo simbólico de (Blumer, 1969), y la etnometodología de Leiter (1980), y Mehan y Wood (1975)- se interesan también en estudiar la interacción en el aula y su influencia en el aprendizaje de las matemáticas. De la perspectiva sociológica, se define *norma* como la caracterización de "las regularidades en la actividad del aula comunitaria o colectiva que se consideran establecidas conjuntamente por el profesor y los alumnos como miembros de la comunidad del aula" (Cobb & Yackel, 1996, p. 178). Algunas de las *normas sociales* que abordaron Cobb y sus colegas fueron: explicar y justificar soluciones, escuchar y dar sentido a las soluciones de los demás, indicar no entender y plantear preguntas clarificadoras cuando no se entiende, y explicar por qué no aceptan explicaciones que se consideran inválidas (McClain & Cobb, 2001).

El principal aporte de esta perspectiva emergente consistió en distinguir entre *normas sociales* y *normas sociomatemáticas*. Esto es, diferenciar, respectivamente, entre las normas de interacción generales y las relacionadas más particularmente con el dominio de las matemáticas. Para citar un ejemplo, se puede aludir a una *norma social* según la cual *las soluciones que los estudiantes proveen a un problema deben ser explicadas* (*descritas*) *y justificadas*[27]. Una *norma sociomatemática* asociada a tal norma social, incluye "lo que cuenta como una explicación y justificación *aceptable*". Pero, además, lo que cuenta en un aula determinada como *matemáticamente elegante*, *sofisticado*, *diferente* o *eficiente* también es considerado como norma sociomatemática (Yackel & Cobb, 1996, pág. 461). En síntesis, las *normas sociales* en el seno de la clase son convenciones que describen cómo: 1) colaborar unos con otros; 2) reaccionar socialmente ante un error o una indicación; y 3) asumir la responsabilidad que la acción cooperativa conlleva (y que, en particular, supone cumplir las expectativas recíprocas

[27] En términos de la presente investigación, *justificar* implica proveer garantías y datos para la solución (aserción) que se establezca.

entre los participantes en la interacción). Algunas de estas normas sociales son generales y se pueden aplicar en cualquier aula, independientemente de la disciplina.

Los estudios realizados por estos investigadores han mostrado que la emergencia de normas sociomatemáticas permite comprender: 1) el progreso de los estudiantes en el desarrollo de una disposición matemática; y 2) la creciente autonomía intelectual de los estudiantes en matemáticas. Las normas sociomatemáticas, además de ser relativas al domino de las matemáticas en particular, se caracterizan porque de alguna forma implican la valoración sobre el aspecto que involucra o normaliza (qué es *elegante*, qué es un argumento *válido* o *legítimo*, etc., cuándo una solución a un problema es *correcta*, etc.). Es clave precisar que estas normas son *sociomatemáticas,* y no únicamente *matemáticas,* puesto que su emergencia, determinación, descripción y valoración solo es posible dentro de un contexto social -clase, institución, etc.- (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009).

Como se infiere de lo anterior, las prácticas matemáticas se consideran un telón de fondo para la actividad matemática y la comunicación (o discurso o diálogo) matemático del aula. Son las normas las que regulan esas prácticas, pero a su vez, las prácticas (e interacción y negociación) las que pueden hacer emerger dichas normas. Esta idea fue adoptada a partir de la noción sociocultural de *práctica cultural*, la cual se considera parte de la actividad humana y es vista como *emergente*.

De manera diferente a como se plantea en la perspectiva sociológica, las negociaciones entre los participantes de la interacción no siempre son implícitas, puesto que puede pasar que, en ocasiones, sea el profesor quien explicita las normas sociales y sociomatemáticas a los estudiantes en su papel de autoridad en el aula (tal como se sugiere desde una perspectiva psicológica). La sinergia entre ambas perspectivas (psicológicas-constructivista y sociológica-interaccionista) implica que cada perspectiva constituye el trasfondo contra el cual se interpreta la actividad matemática desde la otra perspectiva. Esto es, al tomar una perspectiva social, la *comprensión* de un estudiante se ubica dentro de una microcultura de aula en evolución, y al tomar una perspectiva psicológica, esa microcultura se entiende como un fenómeno emergente reconstruido por el profesor y los estudiantes durante sus interacciones continuas, producto de sus comprensiones subjetivas indicadas principalmente por sus cambios de discurso y cambios en su participación (Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997).

En la medida en que los estudiantes participan en una comunidad de práctica, en la que es normativo argumentar y explicar su actividad, y es regulado aquello que es considerado correcto o válido, los estudiantes logran una comprensión matemática de manera más autónoma y en correspondencia con la cultura a la que pertenecen (Yackel & Cobb, 1996).

2.3.3 Perspectiva situacional: el contrato didáctico

Esta sección se refiere principalmente al trabajo realizado en el marco de la perspectiva epistemológica de la Teoría de las Situaciones Didácticas -TSD- (Brousseau, 1984; Brousseau, 2002). En tal teoría se alude a la idea de *contrato didáctico* la cual se centra en la naturaleza normativa de la interacción entre profesor, estudiantes, padres, sociedad, etc. De manera más específica, un *contrato didáctico* es una interpretación de los compromisos, las expectativas, las creencias, los medios, los resultados y las penalizaciones previstas por uno de los protagonistas de una situación didáctica (estudiante, profesor, padres, sociedad) para sí mismo y para cada uno de los otros, una propuesta del conocimiento matemático que se enseña (Brousseau, 2002). El objetivo de estas interpretaciones es dar cuenta de las acciones y reacciones de los participantes en una situación didáctica. El *contrato didáctico* puede dividirse en dos partes: (i) Un contrato de *devolución*, caracterizado porque el profesor organiza la actividad matemática del alumno quien, en respuesta, se compromete a la realización de tal actividad; y (ii) un contrato de *institucionalización,* consistente en que los alumnos proponen los resultados de su actividad y el profesor se responsabiliza de ajustar tales resultados de manera que estos se corresponden con el conocimiento de referencia. En otras palabras, por medio de dicho contrato *el profesor está obligado a enseñar*, y *el alumno está obligado a aprender*. Vale decir que experiencias reales de aula muestran que contratos didácticos, explícitos o no, no conducen a solventar por completo las divergencias entre lo esperado y lo ocurrido; en otras palabras, contratos que lleven a resultado completamente satisfactorios son una utopía. En consecuencia, los contratos son una herramienta que permiten explicar los fenómenos del aula más que hacer diseños óptimos de clase.

El *contrato didáctico* en la TSD es, por definición, caduco y cambiante. Esto se explica porque el aprendizaje, por parte de los estudiantes, tiene lugar cuando dicho contrato tiene una a ruptura; en otras palabras, la ruptura del contrato didáctico es condición necesaria para el aprendizaje; véase (Brousseau, 2002): El alumno está en disposición de aprender cuando acepta su responsabilidad de resolver un problema matemático, esto es, asume la búsqueda de una estrategia más eficaz y económica (*i.e.*, se encuentra inmerso en una situación didáctica). La aceptación de la responsabilidad en el plano matemático y no de la culpabilidad (contrato de devolución) lleva consigo la desvinculación de la intención didáctica original y, por lo tanto, de la relación escolar que tiene el alumno con el profesor y con el saber (de alguna forma, el contrato se rompe); más bien, son las restricciones y necesidades del medio -*milieu*- las que determinan respuestas que exigen al alumno la adaptación de sus conocimientos.

2.3.3.1 *Contraste entre los sistemas de normas*

En esta sección, de manera sucinta, se hace una comparación entre las caracterizaciones de los sistemas de normas que proponen las perspectivas con tendencia socio-cultural descritas previamente (sociológica, emergente y situacional). Esto, con el ánimo de ganar claridad sobre principales similitudes y diferencias, y así tener un contexto para comprender de mejor manera la postura teórica que, al respecto del sistema de normas, se asumirá para este estudio.

Dentro de las similitudes se destacan las siguientes (Herbel-Eisenmann, Hoffmann, & Seah, 2003): (i) Todas las perspectivas dan un valor importante a los conocimientos y funcionamientos desde un punto de vista matemático –el contrato (de devolución e institucionalización) toma lugar en los proceso de resolución de problemas particularmente; los patrones temáticos (normas de la perspectiva sociológica) aluden a los temas matemáticos que son objeto de estudio constituidos por parte de la microsociedad; las normas sociomatemáticas (normas de la perspectiva emergente) son patrones en tornos a asuntos de nivel meta relacionados con aspectos muy específicos de las matemáticas (*e.g.*, qué caracteriza que una solución a un problema sea elegante, que un procedimiento sea sofisticado, o que un argumento sea aceptable, etc.)–. (ii) Todas las perspectivas asumen que los procesos de enseñanza y aprendizaje trasciende de lo estrictamente matemático; así las cosas, estos también se soportan en normas sociales de comportamiento e interacción, y en las regulaciones o expectativas culturales del sector educativo por ejemplo (ya sea en un nivel micro o macro). (iii) Vale destacar que todas las perspectivas citadas asumen que los sistemas normativos presentes en las prácticas del aula usualmente están allí de manera implícita, es decir, están más allá del nivel de conciencia de los participantes; pese a ello, tienen el poder de regular tales prácticas y, principalmente, son determinantes para aprendizaje de los estudiantes. iv) Todas las perspectivas reconocen a los profesores como representantes de la comunidad matemática –en la situacional, mediante la idea de *institucionalización* el profesor sitúa las contribuciones e ideas de un estudiante con respecto a lo que es cultural y científicamente relevante; en la emergente, se describen el aprendizaje matemático en términos de una enculturación promovida por el profesor como representante de una cultura–.

Enseguida, se exponen las principales discrepancias entre dichas perspectivas, con respecto a sus propuestas normativas (Herbel-Eisenmann, Hoffmann, & Seah, 2003): (i) La perspectiva situacional distingue el contrato didáctico en dos niveles contextuales diferentes, uno macro (institucional) y uno micro (sala de clase); en contraste, las demás perspectivas aluden a los patrones o normas sociales y sociomatemáticas, principalmente para el nivel micro. Este hecho lleva a que tales perspectivas (sociológica y emergente) no tengan en cuenta otras prácticas en las que participan los estudiantes (fuera del aula) y no examinen la forma en que los profesores utilizan sus conocimientos del macro-contexto en sus interacciones con los estudiantes. (ii) Aunque todas las perspectivas conciben que su sistema normativo es susceptible de ser negociado, usualmente las normas del contrato didáctico preexisten, particularmente, en lo que respecta al contexto de nivel macro; en contraste, indagaciones hechas bajo la perspectiva emergente, muestran evidencia de cómo *normas sociales* o *sociomatemáticas* emergen de prácticas de la sociedad del aula (son subjetivas) y, por tanto, no existen a priori.

2.3.4 Dimensión normativa del EOS

Como se observó anteriormente, las nociones de contrato didáctico, norma social y sociomatemática, son claves en distintas perspectivas que aluden a la didáctica de las matemáticas, siendo diversa su conceptualización y ámbito de aplicación. En este sentido, vale la pena asumir una perspectiva que integre estas nociones como parte de una *dimensión normativa de los procesos de estudio*. Para este estudio, es asumida la propuesta del EOS (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009), a partir de la cual se provee una categorización de las normas según la faceta de los procesos de estudio a la que se refieren las normas: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica.

El EOS, como enfoque que tiene bases socioculturales, asume la educación como una actividad social que es regulada explícita o implícitamente. Todos los elementos reguladores conforman lo que se denomina *dimensión normativa de los procesos de estudio*, que influye en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Este enfoque propone el estudio de esta *dimensión normativa* para dos asuntos concretamente: (i) Poder describir con mayor precisión el funcionamiento de los procesos cognitivos e instruccionales normados; y (ii) incidir en aspectos de la dimensión normativa (modificándolos si fuera necesario) para facilitar la mejora de dichos procesos de estudio de las matemáticas.

Como se vio en las secciones previas, el tema de las normas ha sido objeto de investigación en Didáctica de las Matemáticas, claro, en enfoques que consideran "lo socio-cultural" como clave. En el EOS se considera que tanto el sistema de normas (o patrones) de la perspectiva emergente (o sociológica), como el contrato didáctico de la perspectiva situacional, constituyen modelos del complejo sistema de normas que soporta y condiciona la educación en general y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular. En este sentido, dicho Enfoque propone abordar el estudio sistemático y global de estas nociones teóricas, tratando de identificar sus conexiones mutuas y complementariedades, así como el reconocimiento de nuevos tipos de normas que faciliten el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La perspectiva sobre la dimensión normativa de los procesos de estudio de las matemáticas en Didáctica de las Matemáticas, que propone el EOS, se basa en los siguientes supuestos (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009):

i) Tal como lo propone Wittgenstein (1999)[28], no es posible describir un proceso de instrucción sin comprender las reglas del juego de lenguaje en el que se desarrolla. Esto es, el sistema de normas que regulan el funcionamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico en un contexto institucional determinado. Estas normas, explícitas o implícitas, pueden ser establecidas por diversos entes de nivel macro o micro (*e.g.*, agentes externos al ámbito escolar, la institución escolar, el profesor, etc.) y afectan a las diversas

[28] Traducción del original titulado *Philosophische Untersuchungen* (1953).

dimensiones del proceso de estudio. Este primer supuesto lleva a considerar que es necesario identificar y describir las normas que regulan el proceso de instrucción, para realizar un análisis que permita su descripción y explicación. Conocer dichas normas es un aspecto fundamental dar cuenta de lo *qué ha ocurrido y por qué.*

ii) Es necesario que la Didáctica de las Matemáticas tenga como uno de sus propósitos mejorar el funcionamiento de los sistemas didácticos. En consecuencia, precisa de unos criterios de idoneidad o adecuación (Breda, Font, & Pino-Fan, 2017) que permitan valorar los procesos de instrucción realizados y orientar su mejora. Se trata de realizar una acción de valoración que recae sobre las acciones realizadas en los procesos de instrucción. Debe considerarse, entonces, una racionalidad axiológica que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc. Con este supuesto se postula la necesidad de unos criterios de idoneidad que permitan precisar aspectos que puede incidir para la mejora de los procesos de instrucción y cognición matemáticas. Por su puesto, estas reglas deben ser producto de un proceso de argumentación de la comunidad científica, que tiene por objetivo precisar un consenso sobre lo que se puede considerar como mejor. Es decir, deben ser entendidos como horizonte (ideal) de los criterios, que puede ir consensuando dicha comunidad, sobre la mejora de los procesos de instrucción. Vale decir que la aplicación de estas reglas de corrección es situada; es decir dependen del contexto institucional en el que se desarrolla el proceso de instrucción y del criterio pedagógico y didáctico del profesor que las debe tener en cuenta. Son una guía de orientación para la mejora y no criterios que produzcan frustración al profesor cuando no puede seguirlos. Los criterios de idoneidad son reglas útiles en dos momentos de los procesos de estudio: A priori, los *criterios de idoneidad son principios que orientan cómo se deben hacer las cosas*. A posteriori, *los criterios sirven para valorar el proceso de estudio efectivamente implementado*.

2.3.4.1 *EOS: ¿Por qué una dimensión normativa?*

La noción genérica de *contrato*, heredada del mundo jurídico, busca especificar las reglas de juego en el marco de una interacción. En las relaciones pedagógicas y didácticas que se establecen en las instituciones escolares, intervienen diversos agentes y facetas. Esto hace que no todas las reglas, que determinan dichas relaciones, sean de la misma naturaleza. Por ello se habla de contratos: social, educativo, institucional, pedagógico y didáctico, según sea su ámbito de aplicación y agentes intervinientes, a saber: la sociedad, el conjunto de personas y de grupos interesados en la creación y comunicación de saberes de un cierto campo, la institución, la clase, o la clase de matemáticas. Las reglas en la clase de matemáticas no son únicamente las del contrato didáctico (como lo asume la perspectiva situacional descrita en secciones anteriores), sino todas las que constituyen los contratos mencionados. El EOS hace un esfuerzo por integrarlos en una sola noción teórica.

De hecho, el estudio del sistema normativo que regula los procesos de enseñanza y de aprendizaje, es uno de los cinco elementos que propone el EOS para el análisis didáctico de procesos de estudio (*e.g.*, D'Amore, Font, & Godino, 2007; Font & Contreras, 2008; Font, Godino, & Contreras, 2008; Font, Planas, & Godino, 2010; Assis, Godino, & Frade, 2012; Pino-Fan, Assis & Godino, 2015):

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4) Identificación del sistema de normas y metanormas.
5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Estos elementos son el resultado de un trabajo de síntesis teórica de diferentes análisis parciales consolidados en el área de Didáctica de la Matemática. Particularmente, el cuarto elemento es propuesto para integrar aspectos de análisis de normas sociomatemáticas (normas de nivel meta; ver apartados 2.3.3.1 y 2.3.4.2.1) desarrollados por la perspectiva emergente en educación matemática descritos previamente.

Con el *primer elemento* de análisis se pretende estudiar las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de estudio matemático. En el EOS, estas prácticas son secuencias de acciones tendientes a la resolución de un problema realizadas por algún agente (profesores, estudiantes, grupos de estudiantes, comunidad de la clase, etc.) en un contexto determinado.

En estas secuencias de acciones es necesario considerar, entre otros aspectos, los objetos y procesos matemáticos activados en (o emergentes de) tales prácticas. El *segundo elemento* se concentra en el análisis de dichos objetos y procesos que posibilitan dichas prácticas. Su finalidad es describir la complejidad ontosemiótica, vía configuraciones de objetos (epistémicas o cognitivas), de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los asuntos semióticos (significados surgidos, conflictos entre significados, etc.) consustanciales a su realización.

Dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar usualmente bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros estudiantes, en el *tercer elemento* tiene lugar el estudio de las *configuraciones didácticas* y su articulación en *trayectorias didácticas*. Este análisis didáctico está orientado, principalmente, a la descripción de los patrones de interacción y su relación con los aprendizajes adquiridos por parte de los estudiantes (trayectorias cognitivas).

Las configuraciones didácticas (*i.e.*, unidad identificada por prácticas determinadas por el observador) y su articulación en trayectorias didácticas están condicionadas y soportadas por una compleja trama de *normas* y *metanormas*, que regulan la dimensión epistémica/cognitiva de los procesos de estudio (decantada por el primer y segundo elemento del análisis). En el *cuarto elemento* de análisis se estudia esta compleja trama de normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio; es el resultado de tener en cuenta fenómenos de interacción social que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los cuatro elementos antes descritos son herramientas de análisis esencialmente descriptivas y explicativas; en consecuencia, permiten informar sobre lo que ha ocurrido y por qué. El *quinto elemento* de análisis se centra en responder a la pregunta ¿qué se puede mejorar?, es decir, con base en los cuatro análisis previos, se centra en la valoración de la *idoneidad didáctica* de los procesos de estudio.

Como se puede inferir de la problemática e intenciones presentadas en el primer capítulo de este reporte, este estudio investigativo se concentra en el *cuarto elemento* de análisis. En ese sentido, su interés se focaliza en la identificación y descripción de normas como aspectos determinantes de los procesos de argumentación que tienen lugar en un curso de Geometría del Espacio de contexto universitario.

A continuación, se presenta la conceptualización que hace el EOS en relación con las normas, de manera tal que haya claridad del uso de los términos que se usarán a lo largo de este texto.

2.3.4.2 *Conceptualización del sistema de normas desde el EOS*

Para el EOS, la comprensión individual es el resultado de la participación en un *juego de lenguaje* cuyas normas son públicas. Comprender, entonces, consiste en *saber orientarse* mediante el reconocimiento de las normas correspondientes. Desde esta perspectiva, se considera necesario comprender el sistema de normas que regulan el proceso de instrucción para poder hacer un análisis del mismo (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009). Este Enfoque asume que nociones como *contrato didáctico*, *normas sociales* y *sociomatemáticas*, son usadas para referirse al conjunto de normas de dicho *juego de lenguaje* en el que participan profesores y alumnos (u otros participantes) cuando intervienen en un proceso de cognición e instrucción. Para que tales nociones contemplen las facetas que permiten describir los procesos de estudio, el EOS hace una reconstrucción de ellas de forma que se ajusten a tales dimensiones. En consecuencia, adopta una perspectiva que integra estas nociones como parte de una *dimensión normativa de los procesos de estudio*. Las facetas a las que hacen referencia son las siguientes (Godino, Contreras, & Font, 2006):

1) Epistémica: Distribución, a lo largo del tiempo de enseñanza, de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
2) Cognitiva: Desarrollo de los significados personales (aprendizajes).
3) Mediacional: Distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
4) Interaccional: Secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados.
5) Afectiva: Distribución temporal de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
6) Ecológica: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico… que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Al seguir esta clasificación, es posible tener una primera tipología de normas según la faceta del proceso de estudio a la que refiere la norma: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. A continuación, se describe esta tipología de normas.

2.3.4.2.1 Faceta epistémica de la dimensión normativa

La *faceta epistémica de la dimensión normativa* (o *normas epistémicas*) alude al conjunto de normas que determinan la actividad matemática que es posible desarrollar en una determinada institución. Las normas epistémicas regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje y las representaciones que se utilizan para los distintos contenidos. En otras palabras, las normas epistémicas determinan las configuraciones epistémicas y las prácticas matemáticas que dichas configuraciones posibilitan. Como se vio en la Sección 2.2, la herramienta configuración epistémica permite identificar la estructura de los objetos que posibilitan la práctica matemática. Las normas epistémicas esencialmente son componentes de tales configuraciones (lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, etc.) que regulan la práctica matemática en un contexto específico. De otro lado, cada uno de los componentes de la configuración epistémica puede estar relacionado con una metanorma, esto es, una norma sobre la norma (D'Amore, Font, & Godino, 2007). Por ejemplo, con relación al objeto *proposición* (que es una norma en sí misma) el estudiante necesita saber qué condiciones debe tener para considerarla como válida en la clase (*i.e.*, precisar normas -tales condiciones- sobre una norma -la proposición-). Si proveer un *argumento* es una norma de la clase, entonces las condiciones que caracterizan un argumento y aquellas que determinan cuándo es válido o legítimo en la clase de matemáticas, pueden ser consideradas como metanormas. En otras palabras, las metanormas (epistémicas en este caso) versan *sobre* los objetos primarios (*e.g.*, proposiciones o argumento) y surgen de una discusión/reflexión *sobre* ellos. En el EOS, las normas sociomatemáticas se identifican con las metanormas epistémicas.

2.3.4.2.2 Faceta cognitiva de la dimensión normativa

La *faceta cognitiva de la dimensión normativa* (*Normas cognitivas*) alude al conjunto de normas relacionadas con *cómo aprenden los sujetos y cómo se les debe enseñar*. En el EOS se considera que la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados. Para que esta apropiación sea posible, el referente ya no son las normas epistémicas que nos dicen *qué matemáticas se deben aprender*, sino que se recurre a ciencias como la Psicología, la Pedagogía y, en especial, a la Didáctica de las Matemáticas, para la descripción de los procesos de construcción y comunicación de nociones, procesos y significados matemáticos y de la intervención en los sistemas didácticos. Estas ciencias han generado un cuerpo de conocimientos del cual se derivan normas, que en este trabajo llamaremos cognitivas, cuyo seguimiento permite conseguir que los sujetos aprendan lo que se les enseña. Dichas normas desarrollan el principio (de cualquier contrato didáctico) de que el alumno debe aprender y que la institución escolar debe hacer lo posible para que ello sea posible. Entre este tipo de normas tenemos las que establecen que la institución debe asegurarse: (i) que el alumno tiene los conocimientos previos necesarios; (ii) que lo que se le va a enseñar está dentro de la zona de desarrollo próximo del alumno y (iii) que la institución se adaptará a la diversidad del alumnado. Como resultado del aprendizaje, los alumnos pueden generar sus propias interpretaciones de las reglas matemáticas, cuyo campo de validez será necesario explicitar y discutir en la clase a fin de superar posibles conflictos cognitivos.

Algunos de los constituyentes de las configuraciones cognitivas de los alumnos se pueden considerar como normas que regulan el comportamiento matemático de los alumnos; dichas normas personales (o cognitivas) pueden concordar o no con las normas epistémicas correspondientes.

2.3.4.2.3 Faceta interaccionista de la dimensión normativa

En la *faceta interaccionista de la dimensión normativa* (*normas interaccionales*), se alude al conjunto de normas que regulan los modos de interacción (normas sociales de las propuestas de Cobb y sus colegas) entre las personas que intervienen en los procesos de estudio matemático. Las secuencias de interacciones por una parte están sujetas a reglas y, por otra parte, generan pautas de actuación. Muchas de las interacciones que se producen en el aula han sido gestadas en las acciones e interacciones producidas en otros contextos. Un buen ejemplo de cómo los formatos o patrones de interacción en el aula están con frecuencia condicionados (normados) por agentes externos al propio sistema didáctico son los dispositivos *clase de teoría*, *clase de prácticas*, *sesiones de tutoría*, etc. No obstante, los comportamientos se reconstruyen por medio de procesos sociales del aula y deben interpretarse desde el microcontexto del aula (Civil & Planas, 2004).

El objetivo central de las interacciones didácticas es conseguir el aprendizaje de los alumnos de la manera más autónoma posible, aprendizaje que en nuestro caso concebimos en términos de apropiación de significados, por medio de la participación en una comunidad de prácticas que permite identificar los conflictos semióticos y pone los medios adecuados para resolverlos. Por ejemplo, es plausible afirmar que formatos de interacción de tipo dialógico y de trabajo cooperativo tendrán potencialmente mayor idoneidad interaccional que las de tipo magistral y de trabajo individual, puesto que los estudiantes (en los primeros formatos) podrían tener mayor relación con los objetos matemáticos y, por lo tanto, el profesor tendría indicadores explícitos de dicha relación. Estos indicadores pueden permitir al profesor valorar la relación de los estudiantes con los objetos matemáticos y, eventualmente, determinar la intervención más adecuada (según las restricciones matemático-didácticas asociadas a la situación).

La realización efectiva de un proceso de estudio puede implicar cambios en las interacciones respecto a las modalidades inicialmente previstas, las cuales a su vez dependen del *paradigma educativo* asumido. Así, en un modelo constructivista social el profesor tiene como papel clave la búsqueda de buenas situaciones y crear un medio en el que el alumno construya el conocimiento trabajando cooperativamente con sus compañeros. En un modelo de enseñanza expositivo, el profesor asume el papel de presentar los contenidos, y los estudiantes, de retenerlos. En el primer escenario una norma emergente puede ser *en una conversación, se debe poner mucha atención a las intervenciones de los demás y preguntar si se tienen dudas*.

En algunas ocasiones, las normas interactivas, emergentes de la interacción que estas regulan, pueden hacer emerger nuevas normas y metanormas epistémicas. Por ejemplo, en el marco de una interacción (donde es norma que los estudiantes expongan sus producciones luego de que han tenido oportunidad de explorar situaciones) puede decantarse cuándo un argumento empírico (inductivo o abductivo, o un contraejemplo) es legítimo o cuando un registro es considerado como un elemento genérico y cuándo debe ser usado.

2.3.4.2.4 Faceta mediacional de la dimensión normativa

En la *faceta mediacional de la dimensión normativa* (*normas mediacionales*), se alude al sistema de reglas relativas al uso de medios técnicos y temporales que apoyan los procesos de enseñanza-aprendizaje. El uso apropiado de todos estos recursos (pizarra, proyector, ordenador, pizarra interactiva, materiales manipulativos, programas informáticos de áreas específicas, etc.) está sujeto a reglas técnicas específicas que el profesor debe conocer y que debe poner en disposición de los estudiantes. Esta apropiación requiere la implementación de procesos de instrumentación que conviertan tales artefactos en instrumentos de la actividad matemática. Estas normas, en relación con los artefactos como medios, son respuestas a las preguntas *qué medios se pueden utilizar, cuándo, para qué y de qué manera*.

En lo que respecta al tiempo, gestionarlo es principalmente responsabilidad del profesor, aun cuando parte del tiempo de estudio puede estar bajo la responsabilidad de los estudiantes. No obstante, existen aspectos que están normados por estamentos oficiales o institucionales, por ejemplo, la duración de las clases o el tiempo asignado para el desarrollo del programa de estudio en cada curso.

2.3.4.2.5 Faceta afectiva de la dimensión normativa

La *faceta afectiva de la dimensión normativa* (*normas afectivas*) alude al conjunto de normas que busca relacionar el afecto con el proceso de estudio de las matemáticas. Cláusulas genéricas de la faceta afectiva de la dimensión normativa es *el alumno debe estar motivado*, *debe tener una actitud positiva*, *no debe tener fobia a las matemáticas*, etc. En tal sentido, con frecuencia se alude al profesor como responsable de *motivar a los estudiantes*, *elegir unos contenidos atractivos* y *crear un propicio para el aprendizaje*. Por su puesto, tales normas no indican el tipo de acciones específicas al alcance del profesor en lo que respecta a la actividad matemática.

La principal motivación intrínseca hacia el estudio de las matemáticas parece estar en la elección de los *tipos de situaciones problema matemáticas* o *las tareas*, las cuales deben reunir unas características específicas. Además, el *modelo instruccional* (*e.g.*, tradicional o socioconstructivista) que se implementa en la clase (concretados en tipos de configuraciones y trayectorias didácticas que organiza y gestiona) condiciona las oportunidades de aprendizaje autónomo de los alumnos, y por tanto su autoestima y compromiso con el estudio.

Una regla afectiva será, pues, que el profesor *debe buscar o inventar situaciones matemáticas ricas*, *que pertenezcan al campo de intereses a corto y medio plazo de los* *estudiantes*. Como la experiencia personal de resolver un problema es un factor importante que favorece la autoestima del resolutor, además de capacitarle para afrontar nuevos problemas no rutinarios, otra cláusula afectiva se refiere a *la creación de las condiciones para que el alumno acepte la responsabilidad de resolver los problemas* (*devolución* en términos de Brousseau), esto es, *que se sientan responsables de las respuestas que dan a los problemas en la medida en que estas sean tenidas en cuenta por el profesor, de una u otra forma.*

Por su puesto, este tipo de normas son reguladas también por otros agentes diferentes al profesor y estudiantes (*e.g.*, la escuela, la familia, la administración educativa y la sociedad). Los padres son responsables de crear un ambiente agradable y propicio al estudio en la casa, de valorar positivamente las materias y tareas que proponen los profesores, etc. A nivel del centro educativo, un reglamento de régimen interno excesivamente rígido, o bien otro excesivamente laxo que no pone coto a los desmanes de algunos alumnos, puede desmotivar a otros alumnos. La escuela debe crear un ambiente material y un clima social agradable en la medida de sus posibilidades. Finalmente, la administración educativa y la sociedad en su conjunto también tienen una parte de las obligaciones del contrato afectivo (medios materiales, espacios, etc.). Por ejemplo, la falta de perspectivas de empleo en algunas carreras universitarias es, sin duda, un factor desmotivador para muchos estudiantes. Pese a que estos factores externos son clave, no parece acertado considerarlos como los únicos aspectos aceptables para explicar *lo afectivo* en los procesos de estudio. El EOS propone que un giro hacia los propios estudiantes, en términos de la posibilidad de ver escenarios en los cuales ellos acepten y asuman su propia responsabilidad y compromiso ético con el estudio, permite decantar normas afectivas que regulen tales escenarios.

2.3.4.2.6 Faceta ecológica de la dimensión normativa

La *faceta ecológica de la dimensión normativa* (*normas ecológicas*), alude al conjunto de normas que relacionan la escuela con la sociedad. Es decir, pretenden buscar información sobre cómo el entorno social, político y económico donde se ubica la escuela, influyen sobre el tipo de prácticas matemáticas que se van a realizar en el aula. Las normas ecológicas tienen como objetivo, en lo que respecta a la educación superior, lograr el siguiente tipo de competencia en los estudiantes: Conseguir una formación inicial de profesionales competentes para su futuro ejercicio profesional. Por tanto, en el momento de tomar decisiones sobre las metas del proceso educativo se han de tener presentes los amplios sectores sociales no relacionados directamente con esta situación educativa pero sí afectados por la sociedad en su conjunto que será atendida por los nuevos profesionales.

Las normas ecológicas tienen que ver con los contenidos que se van a enseñar. El cumplimiento de los programas (pauta institucional establecida) es un requisito que condiciona el trabajo del profesor, ya que los aprendizajes logrados por sus estudiantes constituyen el punto de partida de los estudios en cursos posteriores. La obligación de asegurar un determinado nivel de conocimientos y la obligación de informar de él a la sociedad está en el origen de la obligación que tiene el profesor de matemáticas de hacer evaluaciones sumativas que informen a los padres y a la sociedad en general del nivel de logro matemático alcanzado por los estudiantes.

Un aspecto interesante por considerar en este tipo de normas tiene que ver con la incorporación de las nuevas tecnologías. Dicha incorporación es el resultado de la necesidad que tiene la sociedad de que sus ciudadanos sean profesionales competentes para su futuro ejercicio profesional. Si bien *la obligación de incorporar las TIC puede considerarse una cláusula normativa de índole ecológico*, el tipo de tecnología de la información, el momento de su uso, etc., implica cláusulas de las otras facetas (tal como se ilustró en la dimensión mediacional, por ejemplo).

2.3.4.2.7 Otra tipología de normas

Las normas que regulan los procesos de estudio matemáticos se pueden categorizar desde otros puntos de vista complementarios a la clasificación presentada previamente. En particular, se pueden clasificar según los *momentos o fases* de desarrollo de dichos procesos (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), el *origen* de las normas (la administración educativa, la sociedad, la escuela, el aula, la disciplina), y el grado de *coerción/rigidez* de las normas (aquellas que se presentan como verdades necesarias, *e.g.*, $2 + 2 = 4$; convenciones de cumplimiento obligatorio, *e.g.*, la prioridad de operaciones; convenios basados en hábitos culturales, *e.g.*, los que rigen algunas interacciones en el aula; etc.). Con respecto a esto último, vale decir que el grado de coerción de una norma es determinado por la autoridad que la determina (una norma establecida por el profesor o un decreto dictaminado por el Ministerio de Educación Nacional no se deben vulnerar). El grado de coerción de una norma permite clasificar si esta es una *regla* o un *principio*: las *reglas* son normas cuyos criterios son claramente identificables por todos, se aplican o no, se siguen o no, son obligatorias o no. En contraste, los *principios* son normas que no funcionan de manera binaria; por lo tanto, su grado de coerción es variable y se determina según las circunstancias en las que la norma está puesta en juego (Breda, Font, & Pino-Fan, 2017). Los *principios* son normas fundamentales que guían la conducta o el pensamiento y cuyo nivel de cumplimiento es gradual o variable. Para ilustrar esto, considérese la norma: *los estudiantes deben argumentar sus ideas de forma legítima* (metanorma epistémica). Esta es norma es un principio en tanto propósito fundamental de la Educación, pero también por su carácter de variabilidad infundado por aquello que se pueda considerar como legítimo en un contexto determinado. Por ejemplo, si tal argumento es de carácter informal, un profesor tiene la posibilidad de no catalogarlo como un "mal argumento" a priori: un argumento informal-inductivo puede ser considerado como legítimo, si es producido en un proceso de exploración y conjeturación; ahora bien, si tal argumento es producido en el marco de una prueba matemática, este puede ser deslegitimado por parte de la comunidad del aula al no tener un carácter meramente deductivo. En síntesis, para este caso, es variable lo que determina cuándo un argumento es legítimo pues depende de las circunstancias de la clase o lo "negociado" por los participantes de esta.

2.3.4.3 *Síntesis de la propuesta normativa del EOS*

En este apartado se presenta una síntesis de la dimensión normativa propuesta por el EOS. Como se describió previamente, este Enfoque propone varias formas de tipificar las normas, a saber: (i) Si son normas o metanormas; (ii) según su faceta (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica); (iii) según el *momentos o fases* de desarrollo (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación); (iv) según su *origen* (la administración educativa, la sociedad, la institución, el área disciplinar); y (v) según su grado de *coerción/rigidez* (es regla o principio; y depende de quién la promulgue y circunstancias de emergencia). La Figura 26 explicita y codifican algunas normas, o preguntas genéricas cuyas respuestas dan lugar a normas, según estas tipificaciones.

	Norma [N]	Metanorma [M]
Epistémica [Fe]	a. ¿Qué matemáticas aprender? Definición [D], Procedimiento [P]; Proposición [P]; Lenguaje [L].	Creencias, concepciones, reflexiones sobre objetos de la actividad (Normas sociomatemáticas)
Cognitiva [Fc]	a. ¿Cómo aprenden los sujetos? (*e.g.* participando resolución de problemas) b. ¿Cómo se les debe enseñar? (*e.g.*, Mediante resolución de problemas)	a. Creencias, concepciones, reflexiones sobre cómo aprendo (*e.g.* para resolver un problema debo…) b. Expectativas sobre las responsabilidades del profesor (*e.g.*, el profesor debe resolver dudas o darme una evaluación del trabajo realizado).
Afectiva [Fa]	a. ¿Cómo motivar a los estudiantes? b. ¿Qué ambiente favorece que los estudiantes asuman su responsabilidad? c. ¿Qué tipo de tareas se propone?	
Interaccional [Fi]	a. ¿Cómo interaccionan los individuos y por medio de qué lenguajes? (Normas sociales)	Concepciones, creencias, reflexiones sobre el proceso de instrucción que motivan la elección de recursos y modos de interacción.
Mediacional [Fm]	a. ¿Qué medios se pueden utilizar? b. ¿Cuándo? c. ¿Para qué? d. ¿De qué manera?	
Ecológica [Fec]	a. ¿Cómo el entorno social, político y económico influye sobre el tipo de prácticas matemáticas?	

↑

Origen	**Facetas** / **TIPOS DE NORMAS** / **Coerción**	Momentos
Sociedad [S]	**Facetas**	Diseño curricular [Mc]
Administración [A]	**TIPOS DE NORMAS**	Planificación [Mp]
Escuela [E]-Aula [C]		Implementación [Mi]
Matemáticas [M]	**Coerción**	Evaluación [Me]

Social (Cs)	Disciplinar (Cd)
Reglas [R]: Leyes, decretos, Resoluciones Principios [P]: Costumbres, hábitos	Reglas [R]: Objetos primarios. Principios [P]: *e.g.*, ciertas normas sociomatemáticas

Figura 26. Tipologías de Normas

2.3.5 Sistemas de normas y situaciones instruccionales

Herbst y sus colegas, desde hace casi dos décadas han venido desarrollando una propuesta teórica (que denominan Teoría de los Intercambios Interaccionales -TII-) que permite caracterizar y analizar las clases de Geometría de secundaria, particularmente en los Estados Unidos, y en ese marco, explicar las prácticas de los profesores en tal contexto (Herbst, Chen, Weiss, & González, 2009; Herbst, y otros, 2010; Herbst & Chazan, 2012; Herbst & Kosko, 2014; Herbst, Fujita, Halverscheid, & Weiss, 2017). De manera específica, ellos fundamentan su trabajo en la noción de *contrato didáctico* (Brousseau, 1984; Brousseau, 2002) y, en consecuencia, postulan que existe un contrato tal que hace posible la geometría de la escuela secundaria como respuesta a ciertas condiciones y demandas. A su vez, proponen que este contrato es instanciado en situaciones específicas que ofrecen oportunidades para que los estudiantes argumenten[29]. Como se dijo previamente, un *contrato didáctico* se establece en respuesta a demandas de nivel macro o micro, bien sean sociales, institucionales o profesionales, sobre la enseñanza. Esta propuesta teórica identifica que entre esas exigencias que condicionan y regulan el trabajo de la enseñanza, se encuentran cuatro principales: (i) Una disciplinaria según la cual existe la exigencia de representar la geometría y las formas de argumentación de manera compatible con la forma en que estas se presentan en la disciplina; (ii) una individual, según la cual hay una exigencia de atender quién es el estudiante de geometría y cómo él puede participar en el los procesos de argumentación; (iii) una interaccional, según la cual hay una exigencia de mantener un espacio colectivo seguro y productivo, compartido por muchos individuos con los mismos derechos y obligaciones; y (iv) una institucional, según la cual hay exigencia de enseñar un curso de geometría, situado en el tiempo y el espacio junto a otros cursos, sujeto a horarios y dispositivos similares.

Desde esta perspectiva, tales autores consideran dichas obligaciones como las fuentes principales del *contrato didáctico* que relaciona a profesores, estudiantes y matemáticas durante las prácticas que tiene lugar en una clase particular de geometría. Intentar un cambio en tales prácticas implica un esfuerzo sistémico que requiere, de

[29] Vale decir que estos autores hablan de razonamiento como proceso social en lugar de argumentación. No obstante, luego comentan que esta forma del ver el razonamiento coincide con procesos de argumentación, interpretación análoga a la tomada para este escrito.

antemano, que se entienda cuáles son esas prácticas (con las normas del contrato que las regulan) y cómo un potencial cambio en ellas o una preservación de las mismas posibilitan que los propósitos deseados (en cuanto el aprendizaje de los estudiantes) se puedan lograr (asunto que coincide con la propuesta de la EOS: un sistema normativo no solo es explicativo, sino también sugieren mejoramiento de en procesos de aprendizaje si este es modificado en caso de ser necesario). Para ello, estos autores indagaron la práctica que tienen lugar en las clases de geometría de la escuela secundaria, fijándose específicamente, en cómo la actividad que tiene lugar en dicha práctica aborda aspectos relativos a la argumentación. A partir de ello, indujeron varias *situaciones de instrucción* prototípicas en las que los estudiantes tienen la oportunidad de argumentar; para tales situaciones precisaron cómo se crean y sostienen estas oportunidades mediante la explicitación de normas del contrato didáctico que las identifican.

En esta sección se presentan las características de tales situaciones de instrucción. En el marco de tales descripciones, se exponen las normas del contrato didáctico (en adelante, normas desde la perspectiva EOS) que los autores han determinado como parte de tales situaciones. Vale decir que, con base en mi experiencia como profesor e investigador de cursos universitarios de geometría, es posible plantear como hipótesis que tales situaciones se presentan también en estos contextos, inclusive en cursos de Geometría del Espacio. Con este estudio se pretende recabar evidencia que permita ratificar o refutar tal hipótesis y, en ese marco, identificar normas que caracterizan dichas situaciones en tal contexto, más aún cuando se emplean EGD y la resolución de problemas como pilares del mismo. Para ello, las situaciones y normas propuestas por el equipo de Herbst se convierten en referente teórico con el cual analizar las prácticas argumentativas que tiene lugar en el curso escenario de esta investigación. Entre otras cosas, como los autores comentan, hacer un estudio como este, ayuda a explicar las tensiones y contradicciones experimentadas durante la enseñanza por parte del profesor (Herbst, 2006). Se presentan enseguida algunos presupuestos conceptuales dados por los autores que permiten comprender mejor su propuesta.

2.3.5.1 *Contrato didáctico: una transacción*

En su propuesta teórica, Herbst y su colegas (Herbst, y otros, 2010) plantean que el *cumplimiento* del *contrato didáctico* (normas en un sentido más amplio) puede entenderse como la ejecución de una serie de *transacciones* entre, por un lado, el *trabajo* que los estudiantes hacen (para este caso, su práctica argumentativa) y por otro, el *conocimiento* institucional que se supone está en juego y que ellos pueden "reclamar" una vez hacen el trabajo correspondiente. Específicamente, durante el tiempo asignado a un contrato particular (un año o un semestre), un número de piezas de conocimiento deben ser adquiridas por los estudiantes, a menudo en una secuencia establecida por un plan de estudios determinado. A cada una de estas piezas de conocimiento se le denomina *objeto del contrato* (que se puede hacer corresponder con los objetos primarios propuestos por el EOS). Cada uno de estos objetos deberían ser involucrados en la clase, y los estudiantes deberían tanto esperar que les sean enseñados como aprenderlos durante la clase. La adquisición de cada uno de esos objetos por parte de los estudiantes se hace por medio de su *trabajo* en el aula y en la interacción continua, entre el maestro y los estudiantes, a propósito de las diversas tareas del aula. Los estudiantes actúan en respuesta a las tareas, las cuales involucran objetos que se espera que ellos aprendan: si ellos no tienen la oportunidad de aprender un objeto determinado (no se les ofrece esa oportunidad), no tienen por qué atestiguar sobre el conocimiento del mismo. Si bien, al menos en teoría, el alumno es responsable de hacer la mayor parte del trabajo, el profesor es el responsable de crear y sostener oportunidades para que ellos puedan hacerlo. Esto último describe perfectamente la transacción citada al inicio de este párrafo: Por un lado, el profesor tiene que crear oportunidades de trabajo para los estudiantes que les permitan "reclamar" los objetos de conocimiento, y tiene que certificar que su participación (la de los estudiantes) en ese trabajo equivale a hacer tal reclamación. Por otro, los estudiantes deben trabajar aprovechando las oportunidades dadas por el profesor; si lo hacen, pueden reclamar los objetos puestas en juego.

2.3.5.2 *Situaciones instruccionales: respuesta a diferentes transacciones*

El escenario descrito antes implica identificar los tipos de trabajo que se realizan y los objetos de conocimiento que están en juego. Por su puesto, los intercambios (o transacciones) entre el trabajo realizado y el conocimiento pretendido en un curso de geometría no son uniformes a lo largo de un año o semestre de estudio; por ejemplo, es posible identificar que, por ciertos momentos, se invite a los estudiantes a explorar empíricamente una situación plasmada en una representación gráfica (estática o dinámica) con el ánimo de identificar propiedades; pero en otras ocasiones se espera que los estudiantes argumenten sus afirmaciones desde la teoría siendo castigados si los argumentos provistos se basan en lo empírico. Al respecto, estos autores plantean la noción de *situación de instrucción* para explicar esta diversidad en los intercambios de instrucción. En otras palabras, proponen cada situación de instrucción administran sus propios tipos de trabajo y las piezas de conocimiento que se pueden intercambiar con ellos.

En lo que respecta al proceso que interesa en esta tesis, esta propuesta teórica asume que en la medida en que las diversas situaciones de instrucción invitan a los estudiantes a hacer diferentes tipos de trabajo, tales situaciones dan lugar a diferentes procesos de argumentación (y tipos de argumentos asociados). Precisar cuáles son las oportunidades que tienen los estudiantes tienen en las clases de geometría del espacio para argumentar se reduce a describir las diferentes situaciones de instrucción en las que los estudiantes tienen la oportunidad de participar. No obstante, hacer una descripción de estas situaciones quizá no es suficiente para comprender las prácticas del aula. Es necesario también precisar cómo un profesor necesita administrar los intercambios entre los objetos del conocimiento y el trabajo matemático (de argumentar, para este caso). Ello implica considerar la noción de *negociación del sistema normativo*. La existencia de un sistema tal que alude a grandes rasgos lo que hay que aprender y lo que hay que enseñar, no determina explícitamente lo que el maestro y los estudiantes tendrán que hacer cuando se involucren con piezas de conocimientos específicas que apuntan a algún tipo de argumentación. Esto significa que cada nuevo objeto de conocimiento, cada nueva oportunidad de aprender algo nuevo, puede requerir que el profesor y los estudiantes negocien cómo se aplican los términos del contrato –incluyendo lo que significa conocerlo, lo que el estudiante tiene que hacer para aprenderlo, y lo que el maestro tiene que hacer para enseñarlo–. De alguna manera, la identificación de las situaciones de instrucción evita la necesidad de negociar el contrato para cada tarea, o al menos, simplifica la acción de negociar. Por su puesto, al asumir que tales situaciones son recurrentes en las prácticas de aula, es suficiente actuar en correspondencia con normas ya conocidas durante las tareas de una misma clase de situación (quizá, hacerles algunos pequeños ajustes -renegociarlas- si se considera necesario). Desde estas perspectivas, estas situaciones de instrucción funcionan como un menú de formas disponibles de organización de la actividad y son activadas a través del uso de palabras claves por parte de los participantes que explican lo que todo se supone debe hacer (*e.g.*, construir, probar, resolver).

Para finalizar esta sección, vale comentar que Herbts y sus colegas distinguen, por lo menos, tres tipos de normas en las situaciones instruccionales (clasificación que complementa la propuesta por el EOS): de *intercambio*, de *división de trabajo* y de *temporalidad*. Las primeras, expresan las expectativas del conocimiento que está en juego y el trabajo que se debe hacer para poder obtenerlo (*i.e.*, que debe hacer el estudiante para poder obtener tal o cual conocimiento de estudio); las segundas, expresan expectativas que se refieren a quién tiene que hacer qué y con qué herramientas; las terceras, aluden a la organización del tiempo y expresan expectativas acerca de cuándo hay que hacer las cosas y cuánto tiempo puede tardar hacerlas. Las descripciones que se presentan a continuación para cada situación instruccional tienen en cuenta esta tipología de normas para su caracterización.

2.3.5.3 *Situaciones instruccionales en clases de Geometría*

Un profesor de geometría es responsable de enseñar todos los objetos del contrato. Para ello, necesita involucrar a los estudiantes en algún trabajo que proporcione evidencia de que la enseñanza y el aprendizaje de tales objetos de contrato ha ocurrido. Hay básicamente dos opciones para un profesor (Herbst, y otros, 2010): Una de ellas es que, teniendo en cuenta las ideas que deben aprenderse y las tareas de argumentación específicas en las que estas ideas están en juego, el profesor se compromete a negociar un contrato didáctico específico dentro del cual los estudiantes pueden asumir la responsabilidad de esa tarea respectiva. Esto requeriría, por ejemplo, negociar cómo delegar la responsabilidad de los estudiantes para algunos aspectos del trabajo en una tarea o serie de tareas y que el profesor acepte la responsabilidad de otros. La otra posibilidad es confiar en situaciones de instrucción usuales y predeterminadas, dentro de las cuales se involucra a los estudiantes en tareas que son bastante acostumbradas en términos de sus demandas de argumentación para los estudiantes (y las demandas de trabajo para el maestro). Esta segunda opción no elimina toda necesidad de negociación, pero reduce drásticamente la necesidad de esas negociaciones, así como las posibilidades de incumplimientos en la actividad de los estudiantes. Se corresponde con la idea de Bauersfeld (1988) según la cual, a través del tiempo, las interacciones se vuelven estables para ayudar a reducir la complejidad del intercambio, de manera que las ambigüedades (de significado o actuación) no interrumpan la comunicación. Los patrones establecen, a medida que se van tomando los turnos, las expectativas, interpretaciones, obligaciones y relaciones (Bauersfeld, 1988; Voigt, 1985).

Las situaciones de instrucción son contextos que se corresponde con la segunda opción. En consecuencia, son contextos que ponen en juego diferentes tipos de trabajo argumentativo, en el marco de actividades específicas determinadas por normas concretas que involucran piezas de conocimientos puntuales. En este sentido, son escenarios que se han desarrollado en los procesos de enseñanza de la geometría, con el fin de decantar las responsabilidades de estudiantes y profesores para cumplir con los contratos didácticos correspondientes. Enseguida, se describen las características de tales situaciones de instrucción identificadas para las clases de geometría. Para esta investigación, se considera que estas *situaciones instruccionales* componen cada una de las *trayectorias didácticas* (ver apartado 2.3.4.1) a las que alude el EOS para hacer el análisis correspondiente a la dimensión normativa propuesto por tal enfoque.

2.3.5.3.1 Instalación de un concepto

En esta situación están en juego al menos tres asuntos: la apropiación por parte de los estudiantes del significado oficial de una palabra en términos de los atributos de los objetos que responden a esa palabra, la visualización por parte de los estudiantes de una forma prototípica y de una gama de formas que responden a esa palabra, y la disposición de los estudiantes a recurrir a una definición cuando utilizan un término. Esta situación hace espacio para el trabajo del profesor, que genera usos previos de la palabra en las experiencias de los estudiantes, explica la definición de la palabra, ilustra el significado de la palabra mediante el dibujo o la construcción de diferentes formas que respondan a la palabra, les pide a los estudiantes que consideren un objeto dado con respecto a si la palabra se aplica a ella, y relaciona o incita a los estudiantes a relacionar el término definido con otros objetos o términos. Los estudiantes podrían tener oportunidades de argumentar inductivamente cuando se genera una definición a partir de la consideración de los elementos comunes en diferentes formas, y deductivamente cuando ejemplos o no ejemplos son puestos en consideración. En la Tabla 7 se presentan normas que pueden estar presentes en situaciones como la descrita; cuando sea el caso, se presenta preguntas generales cuyas respuestas, establecidas en un análisis de instrucción, proveen las normas para el aula de clase que está siendo estudiada.

Tabla 7. Normas Instalación de un Concepto

Normas de intercambio [NiIC]: Se considera que el estudiante puede reclamar que se ha instalado un concepto para él, si:

1. Tiene claro los signos para denotar el concepto (palabras, símbolos icónicos).
2. Expresa el concepto en un diagrama (representación gráfica) de manera correcta o si lo reconoce en un diagrama que lo incluye.
3. Expresa la definición del objeto.

Normas de división de labores [NlIC]:

a. ¿Quién da el nombre a los objetos que se definen y a los objetos auxiliares involucrados en él?
   1. Es responsabilidad del profesor dar los nombres a los objetos que se definen y que están involucrados en su definición.
   2. El estudiante puede nombrar a los objetos si reconoce (evoca) de sus experiencias previas.

b. ¿Quién provee las definiciones de los objetos?
   1. Los estudiantes pueden participar en la construcción de la definición proveyendo las propiedades del objeto en cuestión, su representación y eventualmente, su ícono simbólico, bien sea mediante procesos abductivos (si se tiene una representación gráfica del objeto, se deben especificar las propiedades que lo definen), inductivos (si se tienen varias representaciones del objeto, se deben identificar las propiedades invariantes que lo definen).
   2. El profesor provee la definición y registros icónicos del objeto en cuestión.
   3. El profesor activa maneras para introducir objetos (definiciones y sus representaciones) en el sistema teórico (por medio de un problema, porque es necesario introducirlo para continuar un procedimiento o una demostración).

Normas de temporalidad [NtIC]:

a. ¿En qué momento se instala un concepto-definición?
   1. Cuando se etiqueta un objeto con nombre específico, sin precisar formalmente su definición.
   2. Cuando se usa en un procedimiento o prueba.
   3. Cuando se provee su definición formal.

b. ¿Cuánto debe durar el proceso de la construcción de definición?
   1. Si la tarea es consiste en ello, el tiempo suficiente para el análisis respectivo.
   2. Si se hace en medio de un procedimiento o prueba, porque el objeto es necesario para poder avanzar en estas actividades, se introducen sin gastar mucho tiempo en su análisis.

2.3.5.3.2 Instalación de una proposición (postulado, teorema) sobre ideas conocidas[30]

En esta situación están en juego el conocimiento y la creencia de los estudiantes de que una proposición es verdadera, de la conexión de una proposición con otras, y

[30] Originalmente, Herbst y sus colegas aluden a *propiedades* y *fórmulas* en lugar de *proposiciones*.

la autoridad y disposición de los estudiantes para utilizar la proposición en el trabajo futuro. La situación da espacio para la delineación de la proposición, el compromiso en actividades de verificación conducentes a la convicción de los estudiantes, la prueba de la proposición, el dibujo y reconocimiento de diagramas que ilustran el teorema, la instanciación del teorema en el caso de objetos genéricos (uso del teorema), y el desarrollo de medios verbales (nombre del teorema) para recordar el teorema en el trabajo futuro. Los estudiantes pueden tener la oportunidad de razonar deductivamente cuando traducen o verifican la traducción de la declaración del teorema al caso de un objeto geométrico en particular, y cuando prueban o siguen la prueba de un teorema. La Tabla 8 presenta las posibles normas asociadas a la situación de *instalar una proposición*.

Tabla 8. Normas Instalación de una Proposición

Normas de intercambio [NiIP]: El estudiante sabe que se ha instalado un teorema, y en consecuencia puede saber (reclamar) que ha sido instalado si: 1. Se prueba (formalmente) su enunciado, o 2. Un enunciado se etiqueta como tal sin probarlo, o 3. Se usa en la clase.
Normas de división de labores [NlIP]: ¿Quién es el responsable de instalar un teorema? 1. El profesor sancionándolo como tal (independiente de si el estudiante previamente lo usó, por ejemplo) 2. El estudiante usándolo.
Normas de temporalidad [NtIP]: ¿En qué momento se instala un teorema? 1. Cuando se etiqueta una proposición como tal 2. Cuando se usa en un procedimiento o prueba 3. Cuando se demuestra

2.3.5.3.3 Elaboración de una Prueba

Este tipo de situación tiene lugar cuando se pide a los estudiantes realizar una prueba de una aserción (tesis) a partir de unos datos (hipótesis) dados de manera verbal, escrita o pictórica. En este tipo de situación está en juego el conocimiento y la habilidad de los estudiantes para usar teoremas, definiciones y postulados conocidos. También la habilidad de los estudiantes para hacer inferencias deductivas de proposiciones o diagramas provistos. Los estudiantes tienen la oportunidad de argumentar deductivamente al reconocer que una proposición condicional dada es un caso de una definición más general, teorema, o postulado, y que al usar reglas de deducción (como modus ponens) puede derivar una nueva aserción (tesis de un enunciado). Vale decir que las *funciones de la prueba*[31] (de Villiers, 1999), al ser consideradas como normas en ciertos momentos de la situación de *hacer pruebas*, decantan formas de actuación o explican las decisiones que los profesores toman en tales momentos y pueden determinar normas de temporalidad y de división de labores. La Tabla 9 presenta ejemplos de posibles normas relativas a esta situación (Herbst, Chen, Weiss, & González, 2009).

Tabla 9. Normas elaboración de pruebas

Normas de intercambio [NiHP]:

La producción satisfactoria de una prueba por parte de los estudiantes, según las siguiente normas -que indican la conformación de una prueba válida- les permite reclamar que ellos saben hacer pruebas (y pueden argumentar deductivamente):

1. Escribir una secuencia de pasos (cada uno de los cuales consiste en una *aserción*, un *dato* y una *garantía*), donde
2. el *dato*, es una propiedad de la figura geométrica considerada como verdadera,
3. la *garantía* es una proposición que conecta en forma condicional el dato con la aserción,
4. y la *aserción* es una proposición inferida mediante algún esquema de razonamiento lógico-formal, necesaria para continuar con la prueba por cuanto se convierte en dato para un paso siguiente. Si tal aserción coincide con la tesis del enunciado de teorema, marca el final del proceso de construcción de la prueba.

Normas de división de labores [NlHP]:

a. El maestro (o el libro de texto) es responsable de:
    1. Declarar que una proposición no se prueba.
    2. Declarar que la tarea consiste en producir una prueba.
    3. Establecer lo dado en términos de propiedades de una figura representada en un diagrama.
    4. Cuál es la aserción que se debe probar.
    5. Activar las ideas que se utilizarán en la prueba mediante la propuesta de un problema, por ejemplo.

---

[31] Dentro de tales funciones pueden ser: i) Probar un enunciado es la *continuación natural* del trabajo de constituir una proposición como teorema; es la esencia de las matemáticas. (ii) Probar un teorema es una obra que *expone* aquello de lo que consiste formalmente cualquier prueba (*i.e.*, *procedimientos específicos que la validan desde un punto de vista lógico-formal*). iii) Probar un teorema es un trabajo que *explica* de dónde viene la proposición enunciada. iv) Probar un teorema *comunica* las ideas valiosas respecto de un concepto en específico.

6. Estimular la producción de afirmaciones y garantías mediante el trazado de los formatos para presentar una prueba (garantía-datos, o núcleos-pilares o párrafo) o la generación de instrucciones diferenciadas (¿qué dirás ahora?, ¿cuál será tu razón?).

b. ¿Quién se responsabiliza de precisar el formato con el cual se comunica la prueba de manera escrita?
   1. El profesor establece, de antemano, los formatos a emplear (garantía-datos, o núcleos-pilares o párrafo).

c. ¿Quién se responsabiliza de admitir que tal o cual objeto se debe usar en la prueba?
   1. El maestro es responsable de precisar los objetos que se pueden emplear en la prueba.
   2. Los estudiantes tienen la libertad de introducir objetos que no se ha instalado previamente en el proceso de construir una prueba.

d. ¿Quién se responsabiliza de validar que las secuencias de pasos argumentales? Los estudiantes podrían ser responsables de:
   1. Producir las declaraciones en su orden secuencial apropiado.
   2. Identificar la garantía de cada declaración después de que se hace
   3. Agregar marcas al diagrama (si este es usado) para indicar propiedades del objeto al que hace referencia.

e. ¿Qué información de un diagrama puede ser tomada como válida?
   1. El profesor decide qué información se puede tomar perceptualmente de las figuras (por ejemplo, asumir como cierto que los ángulos son correspondientes -o alternos internos-).

Normas de temporalidad [NtHP]:

a. ¿En qué momento deben ser introducidos objetos (teoremas y postulados) involucrados en la prueba de una proposición?
   1. Las declaraciones se producen en secuencia, de modo que las garantías u objetos involucrados en la prueba escrita se instalan antes.
   2. Las garantías u objetos involucrados en la prueba se producen después de su uso en la prueba de una proposición.

b. ¿En qué momento se hace una prueba?
   1. La prueba podría hacerse inmediatamente después de que el teorema haya sido declarado, porque su declaración como teorema requiere de su prueba.
   2. La prueba podría hacerse inmediatamente antes de establecer un teorema, porque el razonamiento hecho en la prueba admite instaurar un teorema de manera natural.
   3. La prueba podría hacerse mucho antes de lo que el teorema puede ser declarado, porque cuando el teorema es eventualmente declarado, la prueba podría ser demasiado trivial para pasar tiempo haciéndolo.
   4. La prueba podría hacerse mucho más tarde de cuando se instaura el teorema, quizás porque los conceptos necesarios para establecer el teorema están disponibles mucho antes que los conceptos necesarios para producir su prueba. Por la misma razón, la prueba podría ser forzada mucho antes de lo razonable y para todos los efectos prácticos equivale a una pérdida de tiempo.

c. ¿Cuánto debe durar el proceso de prueba de una proposición?
   1. La duración de la prueba se mide en función del número de etapas.
   2. Cada una de las proposiciones necesarias para la prueba que no han sido probadas, se prueban en muy poco tiempo.
   3. Cada uno de los objetos-definición necesarios para la prueba que no han sido introducido previamente, se introducen sin gastar mucho tiempo en su análisis.

2.3.5.3.4 Exploración de una figura 2D o 3D

En esta situación está en juego el conocimiento de la definición, los nombres y las propiedades de las figuras geométricas, el conocimiento de los símbolos para expresar las propiedades de un objeto geométrico en particular, la habilidad para manipular instrumentos de medición y otros instrumentos para comprobar las propiedades, la práctica de identificar varios objetos después de términos geométricos, y el aprendizaje experiencial de la geometría. La situación hace espacio para la inspección visual, medición y manipulación de modelos geométricos, para la traducción de las propiedades del objeto modelado desde el registro del modelo (por ejemplo, diagramático u concreto) a un registro genérico o conceptual. Un caso particular de esta situación consiste en "conjeturar" a partir de la percepción -cuando se espera que los estudiantes produzcan afirmaciones genéricas o conceptuales después de observar o medir un diagrama (ver también Aaron, 2010). Una situación de exploración también puede incluir la construcción de varios modelos para examinar sus propiedades comunes, en cuyo caso emergen argumentos inductivos o abductivos. Si se verificar que un modelo determinado coincide con la definición de una figura conocida, puede emerger un argumento deductivo. La Tabla 10 presenta ejemplos de posibles normas relativas a esta situación de instrucción.

Tabla 10. Normas de Exploración

Normas de intercambio [NiE]: El estudiante puede reclamar un conocimiento asociado a una exploración si: 1. Semántica-sintáctico: Su proceso de exploración se corresponde con la conjetura establecida (condiciones impuestas al diagrama o representación es la hipótesis, los resultados identificados es la tesis). 2. Semántico: El resultado de su proceso de exploración se corresponde con los resultados esperados por el profesor. 3. Se han usado todos los recursos disponibles en el marco de la actividad de exploración (medir, arrastrar, construir, etc.). 4. Se han abordado todos los casos posibles dados por la situación tanto en el plano como en el espacio. 5. Si los resultados se reportan de manera general en términos de un enunciado condicional o una definición. 6. Si la expectativa que se tiene respecto a que los estudiantes establezcan la propiedad esperada por el profesor es baja (*i.e.*, no aportan declaraciones generales que se correspondan con la esperada, o aportan declaraciones particulares), ellos no son "castigados". En este caso, se flexibilizan las normas anteriores.
Normas de división de labores [NlE]: a. ¿Quién es el responsable de hacer exploraciones?

1. Los estudiantes pueden ver, medir, marcar o dibujar en un diagrama dado o emplear las herramientas de mediación y arrastre si se emplean EGD.
2. Si se emplean EGD, se espera que se representen figuras que soporten el arrastre según las propiedades dadas, e induzcan las propiedades deseadas con base en el uso de la herramienta del arrastre.
3. Los estudiantes deben explorar las situaciones considerando los objetos en el espacio y no solo en el plano.
4. Los estudiantes deben establecer enunciado verbales o escritos que manifiesten las propiedades de un objeto producto de su exploración (bien sea producto de un proceso inductivo o abductivo).
5. Los estudiantes deben proveer los enunciados de forma tal que se correspondan con condicionales si es una conjetura - propiedad de un objeto.

b. ¿Quién es el responsable de validar que el resultado de la exploración?
1. El profesor revisa las propiedades mediante (i) la separación de las propiedades compuestas en simples, que afirman una sola cosa; (ii) sondeando y eventualmente indicando si la propiedad se aplica realmente a una clase de figuras más grande que la que el diagrama debe mostrar; (iii) pidiendo razones para algunas propiedades que podrían derivarse de otras o del conocimiento existente; (iv) marcando aquellas que son triviales.
2. El profesor permite que los estudiantes que hagan las acciones indicadas en el paso anterior y entre todos decidan si el resultado es válido.
3. Si se usan EGD, estos son considerados como un instrumento legítimo para refutar enunciados producidos producto de una exploración.
4. El profesor admite por la validez de una conjetura falsa, porque más adelante tiene mayor sentido estudiar a profundidad la situación.

Normas de temporalidad [NtE]:

a. ¿En qué momento se explora?
1. En situaciones que preceden la instalación de una definición o teorema sobre un tipo particular de objetos. Justo antes de instalar un teorema o definición (por medio de un problema o situación de conjeturación).
2. En situaciones donde se quiere verificar empíricamente la validez de una idea sobre un concepto-definición o proposición (usualmente en el marco del análisis de la plausibilidad de una conjetura o de una definición de un concepto).

b. ¿Cuánto tiempo se tiene para hacer una exploración?
1. Si es el marco de un problema de conjeturación, el necesario para establecer la conjetura.
2. Si es en un momento de verificación empírica, es relativo.

2.3.5.3.5 Construcción de una figura 2D o 3D

En este tipo de situaciones se involucra el conocimiento sobre la forma prototípica de un objeto-concepto geométrico, su definición o propiedades, de cómo sus propiedades posibilitan construir un diagrama de esta, de un procedimiento para su construcción, de un registro diagramático incluyendo convenciones para apoyar indicar sus propiedades y la disposición para traducir proposiciones a este registro diagramático. En otras palabras, estas piezas de conocimiento tienen dos facetas: Una instrumental según la cual los estudiantes deberían ser capaces de usar diversas herramientas geométricas (*e.g.*, regla y compás, transportador, menús de construcción de un EGD, material concreto especializado) para convertir descripciones verbales en diagramas (representaciones gráficas). Una procedimental-conceptual, según la cual los estudiantes deberían poner en juego propiedades particulares y procedimientos de construcción para la realización de tal diagrama.

Se podría decir que el trabajo a realizar es algo inverso al de la exploración. En este caso, se les dan a los estudiantes descripciones verbales de las figuras desde un punto de vista conceptual, junto con algunas instrucciones y herramientas para ser usadas. Se espera que los estudiantes produzcan versiones diagramáticas de los objetos mencionados en la descripción; en las situaciones de exploración los estudiantes deben precisar propiedades partiendo de diagramas dados. Vale decir que el trabajo está enmarcado por la declaración del objetivo de realizar un diagrama con ciertas propiedades y por los recursos disponibles (*i.e.*, herramientas de construcción) para hacerlo; dependiendo de la naturaleza del tal objetivo (qué tan detalladas y ordenadas son las instrucciones) y de las herramientas disponibles, los estudiantes pueden estar más o menos involucrados en tomar decisiones (de qué hacer después y qué herramienta usar). En este tipo de situaciones, los estudiantes tendrían la oportunidad de argumentar deductivamente al inferir reglas de acción para construir un diagrama específico a partir de las definiciones; también existe la posibilidad de inferir propiedades nuevas a partir de aquellas que posibilitaron la construcción del diagrama. La Tabla 11 presenta ejemplos de posibles normas relativas a esta situación de instrucción.

Tabla 11. Normas Construcción de una figura

Normas de intercambio [NiCF]:
La producción satisfactoria de una construcción por parte de los estudiantes (teniendo presente las siguientes normas -que implica la construcción de una figura-) les permite reclamar que ellos saben construir un objeto:
1. Tener conocimiento de la definición o propiedades de una figura
2. Tener conocimiento de cómo las propiedades de una figura ayudan a construir un diagrama de esta.
3. Tener conocimiento de un procedimiento de construcción (según las herramientas que se pueden emplear al respecto, *e.g.*, EGD).
4. Tener conocimiento de un registro diagramático incluyendo convenciones para apoyar el diagrama en la transmisión de propiedades y la disposición para traducir proposiciones a este registro diagramático.

Normas de división de labores [NlCF]:

a. ¿Quién se responsabiliza de proveer las herramientas legítimas para construir?
   1. El profesor explicita las herramientas que se pueden usar para construir objetos (*e.g.*, herramientas del EGD)

b. ¿Quién se responsabiliza de proveer procedimientos de construcción?
   1. La profesora, si el proceso de construcción del objeto de pretendido es complejo.
   2. El estudiante si debe abordar un problema cuya solución consiste en establecer la existencia de un objeto (*i.e.*, proveer un procedimiento de su construcción).

c. ¿Quién se responsabiliza de validar el procedimiento?
   1. El profesor reconoce si un procedimiento es válido. Puede ser flexible dado espacio a los estudiantes para que ellos valoren si un procedimiento es correcto aludiendo, por ejemplo, a la "prueba" del arrastre y "revisión de la construcción" en un EGD, para tener un control sobre un procedimiento provisto.

Normas de temporalidad [NtCF]:

a. ¿En qué momento de la clase se hacen construcciones de objetos?
   1. Cuando se aborda un problema en el que se debe hacer una exploración de un objeto con propiedades dadas.
   2. Cuando se aborda un problema en el que se debe proveer un procedimiento de construcción de un objeto cuya existencia se debe demostrar posteriormente.
   3. Cuando se quiere demostrar un teorema y se emplea un diagrama (producto de un proceso de construcción) como apoyo para su prueba.

2.4 OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Con el contexto generado a partir de los referentes teóricos para el estudio presentados en las secciones previas, se tiene un escenario tanto para ajustar las preguntas que orientarán el estudio presentadas en Apartado 1.4.2.2, como los objetivos general y específicos del estudio asociados a tales preguntas. A continuación, se expone cada pregunta orientadora (ajustada si es el caso) con el correspondiente objetivo del estudio.

2.4.1 Pregunta principal y objetivo general

Ajustando la pregunta PP presentada en el Capítulo 1, la pregunta principal que orientará el desarrollo de este trabajo investigativo y cuya respuesta intenta aportar a la problemática planteada en dicho capítulo es la siguiente:

> PP: ¿*Cuál es el sistema de normas que influye en la práctica de argumentación y en la producción de varios tipos de argumentos específicos* (*inductivos, abductivos, deductivos y por analogía*) *que tienen lugar en un curso de Geometría del Espacio de nivel universitario que se fundamenta en la resolución de problemas abiertos de conjeturación y el uso de EGD*?

Asociada a esta pregunta, el Objetivo General del estudio, es el siguiente:

> OG: Caracterizar el sistema de normas que influye en la práctica de argumentación y fomenta la producción de varios tipos de argumentos específicos (inductivos, abductivos, deductivos y por analogía) que tienen lugar en un curso de Geometría del Espacio de nivel universitario que se fundamenta en la resolución de problemas abiertos de conjeturación y el uso de EGD.

2.4.2 Preguntas secundarias y objetivos específicos

La pregunta principal y el objetivo general asociado implícitamente involucran varios aspectos, a saber: los procesos de argumentación como articuladores de la actividad matemática; sistema de normas que regula la práctica argumentativa; y el papel del profesor como agente que favorece la emergencia, la instauración o modificación del tal sistema. Así las cosas, las siguientes preguntas secundarias (ajustadas con respecto a las expuestas en el Capítulo 1), junto con los objetivos específicos asociados, son las que se pretenden abordar con el presente estudio:

PS1 (ajusta PS1 del Capítulo 1): *¿Cómo los procesos de argumentación (y los tipos de argumentos asociados) articulan los objetos primarios emergentes de las prácticas matemáticas que tiene lugar en diferentes situaciones instruccionales (instalar un concepto, instalar una proposición, hacer una prueba de un teorema, construir una figura plana o del espacio, y explorar una figura plana o del espacio) presentes en un curso de Geometría Euclidiana el Espacio basado en la Resolución de Problemas y uso de EGD, en un programa de formación de futuros profesores de matemáticas*?

Los objetivos específicos asociados a PS1 (que precisan el OE1 del Capítulo 1) son:

> OE1: Determinar configuraciones epistémicas o cognitivas en cada trayectoria didáctica identificada para precisar los objetos primarios (problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que emergen en las prácticas matemáticas asociadas.

> OE2: Describir las maneras en que los diferentes tipos de argumentos presentes en las configuraciones (epistémicas o cognitivas) identificadas en cada trayectoria didáctica, articulan los demás objetos primarios emergentes en la configuración de la cual hace parte el argumento.

PS2: *¿Cómo el sistema de normas de las situaciones instruccionales presentes en el curso que sirve de escenario de investigación influye en las prácticas argumentativas involucradas en tales situaciones instruccionales*?

Los objetivos específicos asociado a PS2 son:

> OE3: Describir el sistema de normas que regula las prácticas matemáticas presentes en cada una de las situaciones instruccionales que toman lugar en curso de Geometría Euclidiana el Espacio basado en la Resolución de Problemas y uso de EGD, en un programa de formación de futuros profesores de matemáticas.
>
> OE4: Describir el sistema de normas que influye en los procesos de argumentación (y tipos de argumentos) emergentes en las situaciones instruccionales que toman lugar en el curso de Geometría Euclidiana el Espacio basado en la Resolución de Problemas y uso de EGD, en un programa de formación de futuros profesores de matemáticas.

PS3 (Ajusta PS2 del Capítulo 1): *¿Cuál es el papel del profesor durante el proceso de instrucción en un curso de Geometría del Espacio de nivel universitario que se fundamenta en la resolución de problemas abiertos de conjeturación y el uso de EGD, respecto a la generación y uso del sistema de normas que influye en los procesos de argumentación*?

Los objetivos específicos asociado a PS3 (que precisan el OE2 del Capítulo 1) son:

> OE5: Identificar las responsabilidades que debe cumplir el profesor en cada una de situaciones instruccionales del curso que sirve de escenario de investigación.
>
> OE6: Describir las maneras mediante las cuales el profesor gestiona las normas del curso escenario de investigación, en particular aquellas que influyen en los procesos de argumentación presentes en situaciones instruccionales específicas.

2.5 METODOLOGÍA

Dados los intereses investigativos del presente estudio, sintetizados en los objetivos presentados en la sección previa, el estudio se enmarcó en una tradición naturalista-cualitativa (Moschkovich & Brenner, 2000) que empleó como estrategia una *investigación basada en el aula* (Kelly & Lesh, 2000) con algunos rasgos *etnográficos* (Ary, Jacobs, & Sorensen, 2010). Fue un estudio de corte naturalista dado que, al asumir una postura teórica con rasgos antropológicos, su interés consistió en precisar para un curso de geometría real lo que pasó y por qué pasó, con el fin de describir y caracterizar, de manera holística, parte del sistema de prácticas que tomó lugar en él sin interferir (Moschkovich & Brenner, 2000). De manera más específica, fue un estudio que pretendía describir y caracterizar el sistema normativo que regula las prácticas argumentativas de un curso de geometría del espacio de nivel universitario que se fundamenta en la resolución de problemas y uso de EGD. En vista de lo anterior, este tipo de enfoque fue una buena forma para contrastar, relacionar o verificar los referentes teóricos que se asumen para el estudio (*e.g.*, dimensión normativa del EOS y situaciones instruccionales de la TII) con el escenario elegido para hacer la indagación; y, en consecuencia, generar una comprensión de las prácticas de aula poniendo en interacción aspectos que tomaron lugar en ella (Moschkovich & Brenner, 2000). Vale decir que este tipo de estudio no pretenden develar realidades objetivas sino lograr interpretaciones de las prácticas de los participantes.

Se empleó la estrategia *investigación basada en el aula* ya que se pretendía hacer un estudio sistemático para describir un fenómeno (*e.g.*, sistema de normas que regula las prácticas argumentativas) que usualmente pasaba desapercibido para los miembros del aula (Kelly & Lesh, 2000). Vale decir que, en este tipo de estrategias, los participantes del estudio son los investigadores y las personas que usualmente interactúan en el escenario investigativo. En lo que respecta a este caso, los investigadores del estudio fueron el autor y tutores de la tesis, mientras que las personas que interactuaron en el ambiente natural de la clase fueron la profesora y los estudiantes de un curso de Geometría del Espacio de un programa de formación inicial de profesores (Universidad Pedagógica Nacional) desarrollado durante el primer semestre de 2017. En tal estrategia, los participantes no investigadores llevan a cabo sus prácticas de manera natural, como suelen hacerlo; por su parte, los investigadores se introducen en el escenario intentado producir la menor alteración posible. El que acá se reporta tuvo algunos rasgos *etnográficos* (Ary, Jacobs, & Sorensen, 2010) porque, además de estudiar la práctica de una microsociedad en particular (curso de geometría del espacio), se utilizaron métodos de la corriente etnometodológica, empleada por trabajos referenciados en los antecedentes -ver Capítulo 1- (Voigt, 1995; Krummheuer, 1995; Yackel & Cobb, 1996; Yackel, 2002; Krummheuer, 2015) y que serán descritos posteriormente.

2.5.1 Fases del estudio

Con base en la estratega de investigación definida, se describen las fases mediante las cuales se desarrolló la investigación. En el marco de tales fases serán enunciados los métodos y herramientas analíticas que se emplearon para el estudio.

2.5.1.1 *Fase I. Precisión de problemática y marco de referencia*

Dado que esta estrategia postula que la fundamentación teórica, y la selección del fenómeno y del escenario se configuran una en relación con la otra, en un primer momento fue precisada la problemática general del estudio (expuesta en la introducción de este documento) y se expuso, a grandes rasgos, el fenómeno de interés para el estudio. A partir de ello, fue estudiada literatura especializada en Educación Matemática para precisar antecedentes, con lo cual se precisó el problema y la primera versión de las preguntas de investigación (ver apartado 1.4.2) y se tuvo una idea de las posibles posturas teóricas que usarían como referente para el estudio.

Luego, fueron precisadas las posturas y enfoques que se tomaron como referente para la investigación (Ver Capítulo 2). En términos generales, estas aducen a una postura sobre *Argumentación* y *Probar* -basada fundamentalmente en la escuela italiana (Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010), y los planteamientos de Toulmin (2003) y Krummheuer (1995)- y sobre sistemas normativos (basada en la perspectiva del EOS y la TII). A continuación, de manera específica, se presenta cómo los diferentes aspectos del marco de referencia proveyeron unos lentes para abordar el escenario investigativo, o más precisamente, una versión preliminar de las unidades de análisis, los códigos y las categorías para intervenir el escenario investigativo y en la información recolectada.

Específicamente, la TII (Herbst, y otros, 2010) precisa las diferentes situaciones instruccionales que pueden estar presentes en un curso de geometría de secundaria en Estados Unidos (ver apartado 2.3.5.3). Para este estudio, a priori, se asumieron tales situaciones como una manera para describir las unidades de análisis (Tabla 12). Esto implicó, que al momento de abordar el aula de clase y la información que se recolectó, una primera manera para caracterizar una sesión (o fragmento) de clase fue identificándola con una de tales situaciones instruccionales. Por su puesto, si una situación emergente surgía, en su momento se precisaba.

Tabla 12. Códigos Situaciones Instruccionales

Situación instruccional	**Código**
Instalar un Concepto	Si~IC
Instalar una Proposición	Si~IP
Elaborar una Prueba	Si~HP
Explorar una figura 2D o 3D	Si~E
Construir una figura 2D o 3D	Si~CF

La TII junto con la *dimensión normativa* propuesta por el EOS (D'Amore, Font, & Godino, 2007; Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009), permite contar tanto con una tipificación de normas como con posibles normas (o preguntas genéricas cuyas respuestas se convierten en normas) que posiblemente pueden estar presentes en la actividad matemática que toma lugar en las *situaciones instruccionales*. La Figura 26 expone la tipificación de normas -codificadas- y algunas normas (o preguntas genéricas) propuestas por el EOS; y las Tablas 7, 8, 9, 10 y 11, exhiben la tipificación -codificadas- y algunas normas (o preguntas genéricas) correspondientes a dichas situaciones propuestas por la TII. La Tabla 13 expone una síntesis de las dos tipologías de normas (y la codificación respectiva) que se pusieron en juego en el escenario investigativo, específicamente en las situaciones instruccionales que conforman las unidades de análisis.

Tabla 13. Síntesis tipificación de normas y códigos asociados

Tipología EOS					**Tipología TII**
Nivel	**Coerción**	**Origen**	**Momento**	**Facetas**	
Norma [N] Metanorma [M]	Regla [R] Principio [P]	Social [S] Administración [A] Aula de clase [C] Matemáticas [M]	Implementación [I] Evaluación [E]	Epistémica [Fe] Cognitiva [Fc] Interaccional [Fi] Afectiva [Fa] Mediacional [Fm] Ecológica [Fe]	Intercambio [Ni] División de labores [Nl] Temporalidad [Nt]

Por otro lado, en lo que respecta a la práctica matemática (específicamente, práctica argumentativa) presente en cada situación instruccional, la Configuración Ontosemiótica propuesta por el EOS se utilizó como una herramienta teórica-analítica que permite precisar los objetos primarios involucrados (o emergentes) en ella (Ver Figura 25) y cómo los argumentos de tal configuración articulan tales objetos. De manera más concreta, el Modelo de Toulmin (2003) para un argumento adaptado por Krummheuer (1995), proveyó una manera para identificar los argumentos que pueden estar presentes en tales situaciones y dotarlos de una estructura (ver el apartado

2.1.4.1); además, permitió establecer una clasificación para los argumentos. Así mismo, se empleó la propuesta de Pedemonte (2007) principalmente (que usa el Modelo de Toulmin), para precisar una tipología para los argumentos. La Tabla 14 presenta las clases y tipos de argumentos (codificados) que se usaron para abordar los datos de la investigación.

Tabla 14. Síntesis clase y tipos de argumentos codificados

Clase de argumento	Tipo de argumento			Situación instruccional en que puede emerger
Substancial	Inductivo [Ai]			Explorar una figura [E], instalar un concepto [IC]
	Abductivo [Ab]			Explorar una figura [E] o elaborar una prueba [EP].
	Analogía [Aa]			
Analítico	Deductivo [Ad]	Directo (Modus Ponens)		Instalar un concepto [IC] o una proposición [IP], elaborar una prueba [EP] o construir una figura [CF]
		Método indirecto	Por contrapositiva	
			Por contradicción	
		Construcción auxiliar		
Convicción externa	Cualquier tipo de argumento [Ace]			En cualquier situación.

2.5.1.2 *Fase II. Precisión de población y sus características*

El contexto escogido como escenario de investigación fue un curso de geometría del espacio de la Universidad Pedagógica Nacional -UPN- (Bogotá, Colombia) implementado en el primer semestre de 2017. Este curso hace parte una innovación para el aula que el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) viene implementando en el programa de Licenciatura en Matemáticas (programa de formación inicial de profesores para secundaria) desde el año 2005. Específicamente, esta innovación se desarrolla en tres cursos[32] de la línea de geometría del programa de formación antes citado. El esfuerzo didáctico de tal innovación que busca generar un entorno favorable para que los estudiantes aprendan a hacer pruebas formales se soporta en tres elementos básicos (Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2013): (i) los problemas abiertos de conjeturación; (ii) el uso de un EGD (Cabri o Geogebra instalados en computador) como artefacto que posibilita la exploración de situaciones y en consecuencia, soluciones a los problemas propuestos; y (iii) la

[32] Los cursos se denominan *Elementos de Geometría*, *Geometría Plana* y *Geometría del Espacio* ubicados, respectivamente, en el primer, segundo y tercer semestre del programa citado.

interacción social en la clase, compuesta por tres interacciones específicas: *trabajo de los estudiantes* (a través del cual ellos autónomamente realizan tareas propuestas por el profesor -*e.g.*, resolver un problema o escribir una prueba previamente construida colectivamente-), *conversación instruccional* (a través de la cual el profesor gestiona la socialización de las producciones de los estudiantes con miras a guiar a la comunidad en la construcción de significados compartidos y en la organización colectiva de las ideas que encontraron para producir las pruebas) y *conversación matemática* (*i.e.*, un diálogo entre el profesor y los estudiantes -o entre los estudiantes- sobre un tema matemático específico en el cual las ideas se comunican, se comentan y se critican). Ello implica que los estudiantes, al tomar el curso Geometría del Espacio, ya habían experimentado este entorno durante los cursos previos y habían generado una cierta manera de actuación (habían adoptado un cierto sistema normativo) en el aula que se vería reflejada en curso en mención. De alguna forma, el estudio que acá se reporta, intentó sacar a la luz el sistema normativo, tanto previo como emergente. En lo que sigue, se caracteriza de manera más concreta los participantes del estudio.

En primera instancia, vale decir que la profesora del curso fue una docente con una extensa experiencia docente e investigativa. De hecho, es pionera de la innovación citada antes y ampliamente reconocida como impulsora de la Educación Geométrica en el País. En el curso estaban registrados 31 estudiantes (15 mujeres, 16 hombres) cuyas edades oscilaban entre los 16 y 34 años. Once de estos estudiantes habían tomado este curso en una ocasión anterior y lo perdieron por bajo rendimiento académico. La gran mayoría de los estudiantes (21) habían realizado algún tipo de estudio luego de su escuela secundaria, la mayoría de ellos de tipo técnico o tecnológico; solo 6 tenía una experiencia universitaria previa al ingreso a la UPN, pero ninguno culminó sus estudios. Como se dijo previamente, al haber tomado los cursos de la línea de Geometría previos al de Geometría del Espacio, conocían las herramientas provistas por los softwares GeoGebra y Cabri II Plus, y tenían un manejo aceptable de las mismas; solo los estudiantes repitentes (11) conocían el software Cabri 3D, central para el curso en cuestión.

Un asunto que vale la pena comentar es que los estudiantes tenían una experiencia relativamente amplia en cuanto a la práctica de probar formalmente, propósito central del curso Geometría Plana. Como norma establecida en este curso, los estudiantes tenían como costumbre presentar una prueba en un formato a doble columna (Aserción-Garantía) usual en ciertos libros de texto. Tal como reporta la profesora Camargo (2010) en su tesis, normas sociales que regulan las interacciones en el curso de Geometría Plana que ella indagó son: *es necesario escuchar a los compañeros*; *se debe respetar el uso de la palabra*; *toda contribución es importante; la participación es esencial para generar ideas útiles, aunque sean erróneas*; mientras que las normas sociomatemáticas son *dar el porqué de toda afirmación que se haga* y *usar en las pruebas formales solo aquellas proposiciones que se han validado dentro del sistema teórico.* En consecuencia, era plausible considerar que los estudiantes actuarían en conformidad con tales normas en el curso de Geometría del Espacio.

2.5.1.3 *Fase III. Recolección de información y determinación de datos*

Llevadas a cabo las Fases I y II, se tuvieron las herramientas para hacer la inmersión en el curso escenario de investigación, con el fin de recolectar la información, y si es el caso, refinar el marco de referencia (Kelly & Lesh, 2000). Es importante resaltar que, en términos generales, dada la amplitud del marco teórico presentado en el Capítulo II, no hubo necesidad de realizarle cambios sustanciales luego de hacer la primera inmersión en el aula (la cual tuvo lugar durante el primes mes del desarrollo del curso). Más bien, mediante un análisis preliminar que se describe en el Capítulo 3 se logró identificar un primer conjunto de normas para la clase en general y para situaciones instruccionales en particular, base para hacer seguimientos posteriores. En lo que sigue se hace una descripción de la recolección de información y determinación de los datos de investigación.

Dado el interés investigativo de este estudio la recolección de la información fue de carácter longitudinal; esto es, fue tomada a lo largo de un semestre académico (Romberg, 1992). En primer lugar, fueron dispuestas tres videograbadoras en el aula de clase: una que registraba a la profesora, el tablero y la pantalla del televisor que proyectaba el EGD usado (Cabri II Plus o Cabri 3D); otra que registraba frontalmente a todos los estudiantes; y una tercera que registraba a la profesora, a los estudiantes, al tablero y a la pantalla del televisor (registraba la panorámica del salón). Cuando los estudiantes debían resolver un problema (organizados por grupos de tres), las últimas dos cámaras registraban, cada una respectivamente, la actividad de un grupo de estudiantes y el computador que usaban. Los dos grupos escogidos para hacer estas grabaciones fueron escogidos siguiendo solo dos criterios: (i) que estuvieran tomando el curso por primera vez; y (ii) que tuvieran una asistencia frecuente a las sesiones del curso. La primera de tales condiciones garantizaría que las producciones de los estudiantes fueran no estuvieran basadas en experiencias pasadas de un curso de geometría del espacio que ya hubieren tomado; y la segunda garantizaría tener información completa de la producción del grupo, realizada a lo largo de todas las sesiones de clase.

Para complementar la información videograbada, fueron fotocopiadas las producciones escritas de todos los grupos, y realizadas entrevistas semiestructuradas tanto a estudiantes como a la profesora. Tales entrevistas fueron realizadas luego de que los videos de clase fueron observados; esto, para identificar fragmentos en los cuales se debía precisar información, hacer una reflexión sobre lo que sucedía en ellos (basada en los referentes teóricos) y, en consecuencia, diseñar la entrevista. Cuando dichas entrevistas se implementaban, los fragmentos de videos escogidos eran mostrados a los estudiantes o a la profesora, según el caso, para que ellos fueran estimulados al evocar lo sucedido en el momento registrado (Mackey & Gass, 2005). Los registros audiograbados de la información que fueron escogidos como datos de investigación fueron transcritos posteriormente.

Con base en la información registrada en video, fueron realizadas unas bitácoras (denominadas recuentos de clase) que contenía un recuento detallado de lo que sucedía en cada sesión de clase (*i.e.*, fecha y número de la sesión, tipos de situaciones instruccionales, problemas u objetos primarios abordados en tales situaciones, resumen de las interacciones y síntesis de las conclusiones producto de dichas interacciones). En la medida de lo posible se destacaban aquellos asuntos que llamaban la atención con respecto a los temas de interés (normas o argumentación), teniendo de base los referentes citados en la fase II. En el Capítulo 3 se hace una descripción más detallada de la estructura de los documentos *Recuento de Clase*.

Dada la gran cantidad de información recolectada (3120 minutos aproximadamente) hubo necesidad de organizarla, reducir y depurar tal información hasta precisar los datos de investigación. Para ello, se llevó a cabo un ejercicio metodológico-analítico (Miles & Huberman, 1994) que se describe con detalle en el Capítulo 3. Precisamente, los documentos *Recuento de Clase* fueron determinantes en dicho ejercicio al punto de ser considerados como los *documentos matriz de información*, a partir de los cuales se identificaron los datos de investigación.

2.5.1.4 *Fase IV. Análisis de datos*

Una vez identificados los datos de investigación, estos fueron intervenidos para hacer su análisis. Este siguió fundamentalmente los elementos sugeridos por el *análisis didáctico* propuesto por el EOS (Font, Planas, & Godino, 2010) y expuestos en el apartado 2.3.4.1. Tal como lo proponen Pino-Fan, Assis y Godino (2015), el estudio de las *interacciones* (tercer elemento) se puede interpretar como el eje que articula los demás elementos del análisis didáctico de los procesos de instrucción. Comentan que es con base en tales interacciones que pueden ser analizadas las *prácticas matemáticas* realizadas para la resolución de una situación-problema (primer elemento), las *configuraciones de objetos* que emergen de dichas prácticas (segundo elemento) y *las normas y metanormas* que regulan las interacciones y el proceso de instrucción mismo (cuarto elemento). En otras palabras, las interacciones son el centro de las dinámicas de instrucción a través de los cuales se da cuenta de los fenómenos que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para este caso en particular, de la argumentación en un curso de Geometría del Espacio.

Hay que decir que cada proceso de enseñanza y aprendizaje que toma lugar durante el tiempo de implementación de una actividad específica y que se desarrolla a través de la interacción de los agentes partícipes del aula de clase (profesor-estudiante, estudiante-estudiante, estudiantes-medio) es denominado *trayectoria didáctica* (Pino-Fan, Assis, & Godino, 2015). Siguiendo esta idea, para el estudio que acá se reporta, cada *trayectoria didáctica* concebida como unidad de análisis se identificó con *situaciones instruccionales* específicas constituidas por prácticas y normas particulares.

En correspondencia con lo anterior, el proceso mediante el cual se desarrolló el análisis didáctico fue el siguiente:

Para el análisis de cada una de las *trayectorias didácticas* asociadas a un problema (unidades de análisis), fue necesario analizar las *prácticas* (de los estudiantes o profesora) que se desarrollaron en el aula a través de las *interacciones* estudiante-estudiante, profesora-estudiante, estudiante-EGD, etc., y de las cuales emergieron dichas prácticas (análisis paralelos del primer y tercer elemento). En ese contexto, cada que fue posible, se hicieron ostensivos: (i) las *configuraciones de objetos matemáticos primarios* (segundo elemento del análisis didáctico) bien sea cognitivas o epistémicas, que emergieron de las prácticas desarrolladas a lo largo de la trayectoria didáctica; y (ii) el *sistema de normas* que regularon las interacciones y que emergieron de las prácticas identificadas (cuarto elemento del análisis didáctico), particularmente, en lo que tiene que ver con el proceso de argumentación[33]. Las herramientas analíticas empleadas para llevar a cabo el proceso de análisis descrito anteriormente se presentan a continuación.

Las situaciones instruccionales descritas en el apartado 2.3.5.3 y sintetizadas en la Tabla 12, explicitaron unas *prácticas específicas* según las cuales cada trayectoria didáctica se pudo identificar con situaciones instruccionales particulares.

A su vez, la configuración ontosemiótica (ver sección 2.2) y los tipos de argumentos (ver Tabla 14), descritos con el Modelo de Toulmin (ver apartado 2.1.4), fueron usados sinérgicamente para precisar los *objetos matemáticos primarios* emergentes en cada trayectoria didáctica y la manera en que estos se articularon por los argumentos producidos. Los resultados del análisis producido con tales herramientas dieron ocasión para dar respuesta concreta a la PS1 y, en consecuencia, lograr el OE1 y OE2.

En lo que respecta a la identificación y análisis del *sistema de normas*, la tipología sintetizada en la Tabla 13 fue empleada para intervenir las interacciones y prácticas que tuvieron lugar en cada trayectoria didáctica. El proceso de codificación se hizo por medio del software *Atlas.ti* 7 cuya utilidad y características se describen en el Capítulo siguiente. Hay que precisar que la manera de identificación de una norma se hizo mediante tres maneras específicas: (i) a través de su declaración explícita por parte de la profesora o estudiantes (*e.g.*, en el análisis relativo a la *presentación del curso* -ver sección 4.1-, las normas identificadas fueron todas declaradas dado que la profesora tenía el propósito de precisar la “reglas de juego” que regularían el desarrollo del curso). (ii) A través de las acciones sobre la marcha (recurrentes o no) realizadas por profesora

[33] Nótese que producto de la idea sugerida por Pino-Fan, Assis y Godino (2015), es posible intepretar que los elementos del análisis didáctico no necesariamente se deben desarrollar en el orden indicado por el número que los identifica. Acá por ejemplo, el tercer elemento es eje articulador de los demás, lo que implica que los análisis correspondientes a los elementos 4 y 2 dependen de los elementos 1 y 3.

o estudiantes; en este caso, las normas se interpretaron como aquello implícito que posibilitó la realización de tal o cual acción (*e.g.* en el análisis relativo a la trayectoria didáctica asociada al primer problema propuesto en el curso -ver apartado 4.2.1-, tuvo lugar una acción según la cual los radios de una circunferencia representada en un EGD se midieron y arrastraron para verificar que estos fueran congruentes. La interpretación asociada fue que los estudiantes actuaron como consecuencia de una norma emergente -*una exploración sirve para verificar y no necesariamente para descubrir*- calificada de tal forma por cuanto fue un ajuste a una norma que la profesora antes había sugerido -*una exploración sirve para descubrir*-). Y (iii) a través de acciones que los demás miembros de clase calificaron como inapropiadas en un momento dado (Cobb & Yackel, 1996; Herbst, Nachlieli, & Chazan, 2011; Dawkins & Weber, 2017); en este caso, las normas se identificaron como aquello (casi siempre implícito) que llevó a alguien a considerar un actuar de otro (o de sí mismo) como algo no válido (*e.g.*, en el análisis de la trayectoria asociada al primer problema del Bloque N° 4 –ver apartado 4.3.1.1– una manera para tener cierta certeza de que el estudiante Brayan 2 estaba cumpliendo con una Norma específica –argumentar todo lo que se dice o hace con objetos instalados en el sistema– fue mediante su manifestación de que una idea planteada por su compañero Andrés **no** se puede hacer pues viola tal Norma).

La Tabla 15 fue el instrumento por medio del cual se presentó el compendio de las normas presentes en las situaciones instruccionales que constituyeron cada trayectoria didáctica. En la primera columna se alude tanto a las normas como a los objetos primarios (problemas, procedimientos, conceptos, proposiciones, argumentos, lenguajes) ocurridos para cada situación; en cada fila se pusieron los elementos, en orden cronológico, correspondientes a las normas y objetos presentes[34] en cada situación instruccional. Vale indicar que, en el primer Bloque de Problemas analizado, dicha tabla fue complementada estipulando los códigos de las Normas según el EOS y TII. Esto para ver las características de cada Norma. Luego ello no se consideró prudente hacerlo pues las normas tendieron a repartirse. Es importante comentar que las tablas diligenciadas fueron un insumo valioso para dar respuesta concreta a la PS2 y, en consecuencia, tener un acercamiento parcial a OE3 y OE4.

[34] Algunas normas que podrían presentarse se exponen en la Figura 26 y las Tablas 7, 8, 9, 10 y 11.

Tabla 15. Modelo cronología de normas, objetos y situaciones

Situaciones				
Objetos	**Problemas**			
	Procedimientos			
	Conceptos/Definición			
	Proposiciones			
	Argumentos			
	Lenguajes			
Normas				

Finalmente, con el ánimo de tener insumos para precisar el papel del profesor en el proceso de instrucción, los análisis previos serán enriquecidos con herramientas de análisis de participación propuestas por Krummheuer (2015). Un análisis tal permite precisar la responsabilidad matemática y la originalidad en las expresiones de los estudiantes y la responsabilidad del profesor para orientar y enriquecer su participación. Para diferenciar las expresiones de los agentes en cuanto su responsabilidad, originalidad y calidad, Krummheuer (2015) alude a la propuesta de Goffman (1981), según la cual se puede descomponer una expresión en las siguientes funciones parciales: (i) La forma sintáctica con su elección específica de palabras y su formulación específica (función de formulación) y (ii) la contribución (semántica) relacionada con el contenido (función de contenido). Ahora bien, en las interacciones de clase, incluso entre dos, un agente no tiene que asumir necesariamente la responsabilidad y originalidad de ambas funciones; formalmente, se pueden diferenciar cuatro casos (ver Tabla 16):

- Un emisor que es completamente responsable (en sintaxis y semántica) de lo que declara. En tal caso, el agente que asume esta responsabilidad se llama *autor*. En otras palabras, es alguien que expresa su propia idea con sus propias palabras.
- Un emisor que no es responsable de la forma sintáctica ni del aspecto semántico de su declaración. Una persona que habla en este estado se llama *repetidor*. En otras palabras, es un alguien que recibe una declaración y es capaz de repetirla.
- Un emisor que usa formulaciones muy parecidas de partes de un enunciado anterior (usa una sintaxis ya formulada) e intenta, con base en ellas, expresar una idea nueva (se responsabiliza de la semántica). Este estado se llama

encubridor[35]. En otras palabras, es alguien que traduce su propia idea en las palabras de otra persona.

- Un emisor que se hace cargo de la idea de un enunciado previo (no se responsabiliza de la semántica) e intenta expresarla con sus propias palabras (se responsabiliza de la sintáctica). Este estatus se llama *portavoz.* Tal persona parafrasea con sus propias palabras el contenido de una declaración previa.

Tabla 16. Función en la participación

	Responsable del contenido (Semántico)	**Responsable de la formulación (Sintáctico)**
Autor	✓	✓
Repetidor	×	×
Encubridor	✓	×
Portavoz	×	✓

Como parte de los análisis de *interacción* que se exponen en el Capítulo 3 (particularmente en las *trayectorias didácticas* donde existe una conversación matemática entre profesora y estudiantes), fue usada esta clasificación para analizar la participación (de estudiantes y profesora). De manera paralela, se hace un análisis de la interacción en relación con la argumentación que implica identificar el enunciado pronunciado por el agente, con alguna parte estructural del argumento según el Modelo de Toulmin (*e.g.* aserción, dato, garantía, refutación, etc.). La Tabla 17 muestra la matriz con la cual se pretende presentar el análisis de participación y función en el argumento para fragmentos de situaciones instruccionales centradas en la realización de una prueba. Con el resultado de tal análisis, se tendría información sobre el papel del profesor (y de los estudiantes) a lo largo de las interacciones, y con ello, la identificación de normas que regulan sus prácticas (*e.g.*, quiénes son los principales responsables en proveer las partes estructurales de un argumento, cuál es la función principal -ver Tabla 16- de la profesora o los estudiantes en las conversaciones matemáticas que toman lugar en tales situaciones, etc.). Con este proceso, se tuvo un insumo para dar respuestas a PS1 (en tanto se involucra el objeto primario *argumento*), PS2 (en tanto se involucran identificación de normas) y, de manera más específica, a

[35] En el idioma inglés, el autor denomina *ghostee* a este tipo de participación No hay una traducción literal al español. Se usa *encubridor* como la más cercana.

la PS3 (en tanto se alude a función del profesor en situaciones de elaboración de una prueba).

Tabla 17. Modelo tipos de interacción

Emisor: Función del emisor	**Enunciado**	**Función en el argumento del enunciado (dato, garantía, aserción, etc.)**
	Referencia a un agente anterior	

2.5.1.5 *Fase V. Discusión de los análisis y conclusiones*

En la última fase de la investigación se realizó una discusión de los análisis previos a partir de la interpretación de estos. Mediante un proceso inductivo, se establecieron conexiones entre el sistema de normas, los tipos de argumentos y la gestión del profesor identificados y descritos para cada tipo de situación instruccional. Esto proveyó un escenario para precisar las respuestas a las preguntas (secundarias y principal) que orientaron el estudio, dar alcance al objetivo principal del mismo y destacar los principales resultados de la investigación realizada.

Capítulo 3

Análisis preliminar

Este capítulo se concentra en el análisis preliminar realizado para determinar los datos de la investigación y la precisión de los códigos con los cuales estos fueron intervenidos durante el análisis didáctico realizado. de los datos de investigación. En tal sentido se expone una descripción que da cuenta de un ejercicio analítico-metodológico (Miles & Huberman, 1994) que se compone de dos secciones específicas. Con la primera (Sección 3.1) se informa sobre cómo la información recolectada fue organizada, reducida y depurada para obtener los datos de investigación; con la segunda (Sección 3.2) se informa sobre cómo fueron precisados los códigos preestablecidos en los referentes teóricos para intervenir dichos datos de investigación. En ambos casos, hubo necesidad de hacer un análisis preliminar en el que se emplearon los códigos explicitados en el capítulo anterior.

3.1 Organización, reducción y depuración de información

La gran cantidad de minutos videograbados (3120 aproximadamente, distribuidos en 26 sesiones de clase, cada una con una duración 120 minutos), y de producciones escritas escaneadas de los estudiantes (relativas tanto a su actividad en la clase como a entrevistas que les fueron implementadas), condujo a una saturación de información que desbordaba la posibilidad de trascripción y de análisis de la información. En este sentido, fue necesario precisar una manera para organizar, reducir y depurar la información que permitiera hacer una escogencia pertinente de los fragmentos de sesiones de clase a trascribir, suficientes para lograr los objetivos del estudio y, por lo tanto, se convirtieran en los datos de investigación.

3.1.1 Organización de la información

Desde el inicio de la recolección de datos en el curso de Geometría del Espacio escenario de la investigación, se tuvo la intención de salvar toda la información recogida en formato magnético-digital. Esa intención implicó un ejercicio de organización de la información el cual se describe a continuación. En primera instancia, en un disco duro exclusivo para los archivos asociados a la investigación, se generó una carpeta con nombre ARCHIVOS DIGITALES 2017. La carpeta estaba compuesta de 26 subcarpetas etiquetadas CLASE X dd-mm-año, donde la X indica el número de la sesión de clase registrada y la fecha en que esta se desarrolló (*e.g.*, CLASE 20 25-04-2017). Estas subcarpetas, a su vez, contenían los siguientes archivos: (i) Las tres videograbaciones relativas a las tres cámaras dispuestas en el salón de clase. (ii) Digitalización de las producciones escritas de los estudiantes, asociadas a las actividades hechas en clase (*e.g.*, resolución de un problema, tareas extraclase, entrevistas). (iii) Un documento denominado *Recuento de clase* cuyo contenido son descripciones detalladas de lo sucedido en cada sesión de clase. Para realizar el recuento se diseñó un formato constituido por dos apartados: uno de identificación mediante el cual se estipulada el número de la sesión de clase, la fecha respectiva, y la identificación de los fragmentos o asuntos centrales que se había abordado en la sesión; y otro que reconstruía, con algo de detalle, tales asuntos. La Figura 27 ilustra un ejemplo del formato de recuento diligenciado para el caso de la sesión de clase 20.

Clase Nº:	20
Fecha:	25-04-2017
Curso:	Geometría del Espacio
Profesora:	Carmen Samper
Fragmentos de clase:	1. Comentarios de la Tarea Extraclase 10 sobre el siguiente ítem: Escribir la prueba de los siguientes teoremas enunciados al finalizar la clase [sesión 19]. **T. unicidad Plano-recta perpendicular punto interno:** Sea un plano α y un punto A, tal que $A \in \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$. 2. Comentarios de la Tarea Extraclase 10 sobre el siguiente ítem: Escribir la prueba de los siguientes teoremas enunciados al finalizar la clase [sesión 19]. **T. Recta-plano perpendicular punto externo:** Sea m una recta y $A \notin m$. Entonces existe un único plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A. **T. Plano-recta perpendicular punto externo:** Sea un plano α y un punto A tal que $A \notin \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$. 3. Abordaje, por grupos, del Problema Principal 10: Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que $\triangle ABE$ y $\triangle CDE$ sean congruentes? En la actividad se pedía un reporte de construcción, exploración, conjetura y su correspondiente demostración.

OSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Le vamos a seguir un seguimiento a este problema... esto, por cuanto es un problema que no es tan evidente en su solución; es el más abierto que se ha propuesto hasta el momento. Permite introducir el plano mediador.

Figura 27. Formato de Recuento - Ejemplo Recuento sesión de clase 20

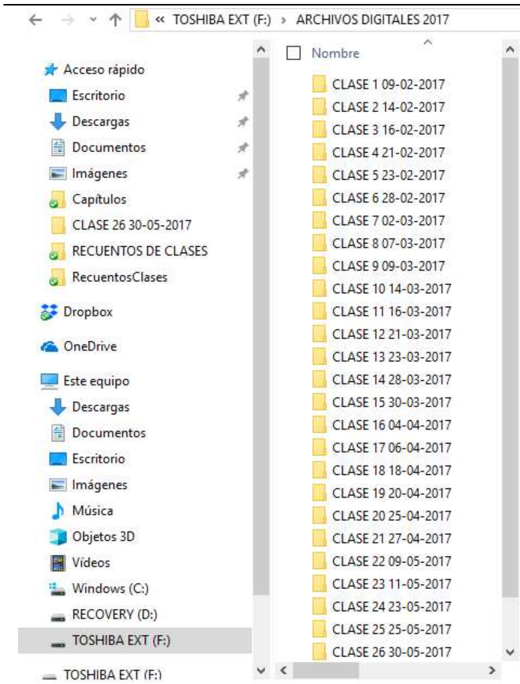
Estos recuentos fueron realizados a partir de tres fuentes diferentes:

a) Las anotaciones hechas in situ por el autor de este informe, durante el trascurso de la sesión de clase. Estas anotaciones precisaban las actividades generales que se desarrollaron en la sesión y que permitían distinguir los fragmentos de la misma (*e.g.*, revisión, orientada por la profesora, de producciones de estudiantes con relación a problemas de alguna tarea; abordaje autónomo de un problema por parte de los grupos de estudiantes, socialización de las producciones de los estudiantes a problemas propuestos en clase, implementación de entrevista, implementación de parciales); qué *situaciones de instrucción* tomaban lugar en ella; los aspectos generales que constituían tales situaciones; y, quizá lo más importante, comentarios sobre ciertos fragmentos de la clase que se percibían con una riqueza en términos de la argumentación o normas presentes en la interacción. En la digitalización de los recuentos, tales comentarios eran escritos a través de la herramienta respectiva del programa Word de Office.

b) La respectiva videograbación que tomaba panorámicamente todo el salón de clase, y los videos que registraron la actividad autónoma de los dos grupos de estudiantes seleccionados para ello. Para indicar fragmentos o apartados del video que podrían ser de interés, en el documento de recuento digitalizado se marcó entre corchetes y resaltado en color amarillo el tiempo del video en cual estos tomaban lugar (*e.g.*, [3:50 C.Pan1], donde C.Pan1 indica Cámara Panorámica, video 1). En el Anexo 1. Recuento de Clase N° 20 se presenta un fragmento del Recuento relativo a la sesión de clase 20 como ilustración.

c) Las notas de clase, exigidas por la profesora, que debía hacer un grupo de estudiantes por sesión de clase, en el cual se reportaba los asuntos que se discutieron (enunciados del problema y las propuestas de solución surgidas en clase, comentarios sobre las tareas extraclase hechos por la profesora, etc.) y los acuerdos obtenidos en relación con ello. De manera más específica, tal como lo planteó la profesora en la primera clase, estas notas de clase debían incluir las respuestas a las preguntas *¿qué aprendimos de geometría*? (*i.e.*, explicitación de objetos primarios como definiciones, notaciones, teoremas, postulados, pruebas, etc.) y *¿qué aprendimos de geometría dinámica*? (*i.e.*, herramientas, funciones, procedimientos de construcción y exploración, etc.).

Para ilustrar lo anterior, se presentan las Figuras 28 y 29. La primera muestra el contenido de la carpeta ARCHIVOS DIGITALES 2017, mientras que la segunda ilustra el contenido de la subcarpeta CLASE 20 25-04-2017. En esta última, las carpetas *Estudiantes 20*, *Profesora 20* y *Panorámica 20* indican, respectivamente, los registros videograbados asociados a estudiantes, profesora y la vista panorámica de la clase; la carpeta *Producciones Estudiantes PP9* contiene la digitalización en PDF de los documentos realizados por los estudiantes, asociadas al Problema Principal 9; el archivo Entrevista Grupo I PP9 contiene un video de la entrevista hecha al grupo de estudiantes I sobre el Problema Principal 9. Finalmente, el archivo docx, *Recuento 20*, indica el documento que contiene el recuento de la sesión de clase 20.



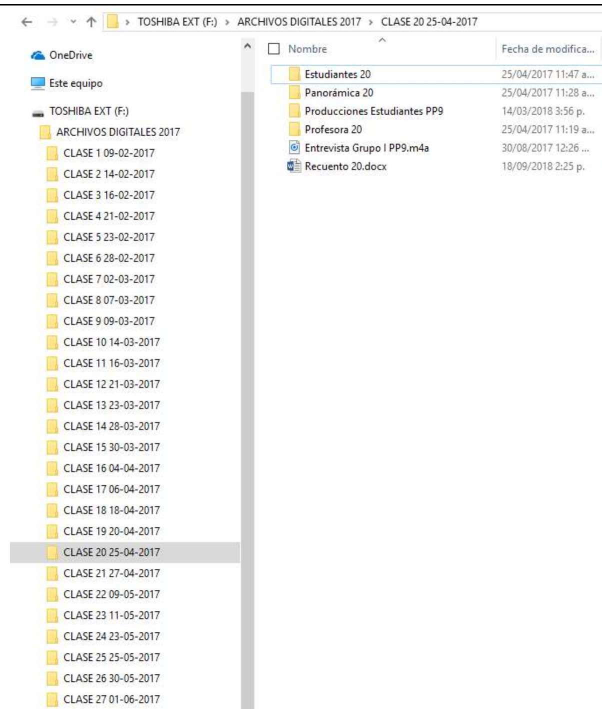


Figura 28. Contenido carpeta ARCHIVOS DIGITALES 2017	Figura 29. Contenido subcarpeta CLASE 20 25-04-2017

3.1.2 Reducción de la información

Tal como sugieren Miles y Huberman (1994), una vez hecha una primera organización de la información recolectada, se desarrolló una fase relacionada con el análisis, según la cual se tomaron decisiones sobre el material registrado inducidas por las inquietudes investigativas, el marco de referencia y lo que se identifica en los registros. Como lo sugieren dichos autores, esta fase lleva a un reagrupamiento de la información y a la eliminación de registros de poco interés. Siguiendo tales indicaciones, se llevó a cabo una reorganización de la información recolectada. Para este caso, esta se fundamentó en los recuentos de clase antes descritos los cuales, como se dijo previamente, se convirtieron en los documentos matriz de la investigación. En seguida, se describe el proceso llevado a cabo para reducir la información.

Con el fin de ganar claridad, coherencia, consistencia y fluidez en la realización y presentación de los análisis, la información recolectada organizada por sesiones de clase fue reorganizada atendiendo a bloques de problemas que giraban en torno a una temática específica y que la profesora iba construyendo según el desarrollo mismo del curso. Una primera observación de la información llevó a identificar que cada bloque se constituía de Problemas Principales (PP), Problemas Auxiliares (PA) y Problemas de Tareas Extraclase (TE). Los primeros son aquellos que la profesora previamente había planeado con el fin de introducir objetos primarios al sistema teórico (definiciones, teoremas –usualmente de existencia–, postulados). Los segundos son aquellos que la profesora planteaba luego de que los estudiantes habían hecho alguna producción en relación con los PP; estos tenían el propósito de solventar algún estancamiento o precisar algún hecho geométrico surgido de tales producciones y expresados durante su socialización. Vale indicar que tanto los PP como los PA fueron problemas que se abordaron autónomamente por parte de los estudiantes durante las sesiones de clase. Los terceros tienen las mismas características de los PA (eventualmente de los PP), pero eran propuestos como tarea extraclase.

Con base en los anterior, para cada bloque de problema se generó un documento (llamado *Recuento por Bloque de Problemas*) cuyo formato tenía la siguiente estructura: En un párrafo se presentaba, a manera de síntesis, el total de problemas que conformaba el bloque (distinguiendo el número de PP, PA y TE), la temática general abordada y los dominios (Geometría Plana o Geometría del Espacio) asociados. Enseguida, se indicaba mediante una tabla (i) el dominio y la temática general tratada en el bloque; (ii) los enunciados de los problemas (PP, PA y TE) dispuestos cronológicamente; (iii) el objetivo asociado a cada problema inferido por el investigador y las sesiones de clase en la que este se trataba (el Anexo 2. Enunciados Problemas por Bloques, presenta la tabla correspondiente a cada bloque de problemas). Luego, se exponía el recuento relativo a cada problema. Con ello, todo lo sucedido en relación con cada problema quedaba agrupado en un solo recuento y no estaba disperso como ocurría con los recuentos matriz. A manera de ejemplo, en el Anexo 3. Recuento Bloque N° 6 se presenta el recuento del Bloque de Problemas N° 6.

Se identificaron siete bloques de problemas constituidos por diez Problemas Principales, trece Problemas Auxiliares y veintiún Problemas propuestos en Tareas Extraclase. La Tabla 18 presenta, para cada bloque, el dominio y temáticas respectivas, y el total de PP, PA y TE indicando la sesión de clase en la que cada uno tomó lugar (el número en el paréntesis al lado de TE indica el total de problemas asociado a la Tarea correspondiente). Como se evidencia en dicha tabla, aun cuando el curso se llama Geometría del Espacio, los tres primeros bloques y el cuarto parcialmente se focalizaron en asuntos relativos a la Geometría Plana. Esto por cuanto la temática respectiva no se abordó en su totalidad en el curso previo; así, hubo la necesidad de emplear sesiones de clase del curso escenario de investigación para complementarlo. Este fenómeno es recurrente en el programa de Licenciatura al que pertenecen los cursos, razón por la cual no se concibe como un asunto anormal; más bien, responde a la norma (de faceta ecológica) consistente en la necesidad de cumplir con el programa académico de los cursos.

Tabla 18. Síntesis Bloques de Problemas

Bloque de Problema N° 1					
Dominio temático: Geometría Plana	**Temas**: Segmentos congruentes; circunferencia				
Problema	PP1	PA1.1	PA1.2	TE1(1)	TE2(1)
Sesión de Clase	1, 2	3	3	2, 4	4

Bloque de Problema N° 2				
Dominio temático: Geometría Plana	**Temas**: Plano; Relación de Paralelismo			
Problema	PP2	PA2.1	TE3(3)	TE4(1)
Sesión de Clase	4	5	6,6,7	9

Bloque de Problema N° 3		
Dominio temático: Geometría Plana	**Temas**: Recta tangente a una circunferencia	
Problema	PP3	TE4 (2)
Sesión de Clase	6, 7	8, 9

Bloque de Problema N° 4									
Dominio temático: Geometría Plana; Geometría del Espacio				**Temas**: Paralelismo; Cuadriláteros; Cuadriláteros plegados; El espacio; Visualización de Planos en el espacio					
Problema	PP4	TE5 (3)	TE6 (3)	PA4.1	PA4.2, PA4.3	PP5	TE7 (1)	PP6	TE8 (3)
Sesión de Clase	8, 9 (Plana) 11 (Espacio)	10, 11 (Plana)	12, 13 (Plana)	11, 12, 13 (Espacio)	13, 14 (Espacio)	13, 14 (Espacio)	15 (Espacio)	16, 17 (Espacio)	17 (Espacio, Plano)

Bloque de Problema N° 5							
Dominio temático: Geometría del Espacio			**Temas**: Relación de perpendicularidad entre plano y recta				
Problema	PP7	PA7.1	PA8.1	TE9 (1)	PP8	PA8.2	TE10 (1)
Sesión de Clase	17, 18	18	18	18	19	19	19, 20

Bloque de Problema N° 6			
Dominio temático: Geometría del Espacio	**Temas**: Conjunto mediador; Plano mediador		
Problema	PP9	PA9.1	TE11(1)
Sesión de Clase	20, 21, 22, 24	22	24

Bloque de Problema N° 7	
Dominio temático: Geometría del Espacio	**Temas**: Cubo; Ángulos Diedros
Problema	PP10
Sesión de Clase	24, 25, 26

Una lectura preliminar de los *Recuentos por Bloques de Problemas* dio un contexto para hacer la primera reducción de la información. En primera instancia, se ratificó lo establecido por Herbst, Nachlieli, & Chazan (2011) según lo cual es en las primeras sesiones de clase donde son establecidas y explicitadas por el profesor varias de las normas (o reglas de juego) que regulan las prácticas a lo largo del curso. En tal sentido, el Bloque de Problemas N° 1, desarrollado durante las sesiones 1 a la 4, se concibió como la primera con información pertinente para realizar el estudio.

En segunda instancia, se pudo identificar que gran parte de la temática relativa a la relación de paralelismo (tanto en el Dominio de la Geometría Plana como en el de la Geometría del Espacio) fue abordada a partir de Problemas propuestos en Tareas Extraclase. La necesidad de abordar tales temáticas (*i.e.*, de cumplir con la norma de cumplir con el programa de los cursos, citada antes) llevó a que, para ellas, no se implementaran estrictamente las etapas de la innovación en el aula (descritas en la Introducción de este documentos); en ese contexto, los estudiantes debieron abordar los problemas de manera autónoma fuera de la sesión de clase y discutirlos, sin la conversación instruccional orientada por la profesora, para obtener la solución del problema. Por su puesto, lo anterior condujo a que no se tuviera registro de la actividad de los estudiantes; solo de los fragmentos de clase en lo que la profesora comentaba sobre sus producciones al respecto. Por lo anterior, fragmentos relativos a los Bloques de Problemas N° 2 (TE3, TE4) y N° 4 (TE5 y TE6) fueron descartados.

En tercera instancia, dado que el interés investigativo se concentró principalmente en el Dominio de la Geometría del Espacio, el Bloque de Problemas N° 3 que gira en torno a la recta tangente a una circunferencia también fue descartado. Por las razones ya expuestas (y las que se presentan en la sección 3.2), del Dominio de la Geometría Plana solo se dejó el Bloque de Problemas N° 1.

3.1.3 Depuración de la información

Como sugiere Morse (1998) la información reducida no necesariamente compone los datos del estudio; en algunos casos, esta debe ser depurada. Tal depuración se traduce en un ejercicio de refinamiento y optimización de la información con el propósito de hacerla más concreta y útil para el análisis. En este caso, tal ejercicio implicó tres acciones específicas:

1. Intervenir los *Recuentos por Bloques de Problemas* con los códigos expuestos en el apartado 2.5.1.1 relativos a las situaciones instruccionales (Tabla 12), los tipos de normas según el EOS y la TII (Tabla 13), y los tipos de argumentos (Tabla 14). La Tabla 19 presenta el sumario de los códigos asignados en las tablas referenciadas.

Tabla 19. Sumario códigos análisis preliminar

Códigos Situaciones Instruccionales	
Situación instruccional	**Código**
Instalar un Concepto	SI~IC
Instalar una Proposición	SI~IP
Elaborar una Prueba	SI~HP
Explorar una figura 2D o 3D	SI~E
Construir una figura 2D o 3D	SI~CF

Códigos Normas tipología EOS[37]			
Origen		**Facetas**	
Social	O~S	Epistémica	F~Fe
Administración	O~A	Cognitiva	F~Fc
Aula de clase	O~C	Interaccional	F~Fi
Matemáticas	O~M	Afectiva	F~Fa
		Mediacional	F~Fm
		Ecológica	F~Fec

Códigos Normas tipología TII	
Tipo de Norma	**Código**
De intercambio	Ni
De temporalidad	Nt
De división de labores	Nle, Nlp[36]

Códigos tipos de argumentos	
Tipo de argumento	**Código**
Argumento analógico	Arg~Aa
Argumento abductivo	Arg~Ab
Argumento deductivo construcción auxiliar	Arg~Ad~Ca
Argumento deductivo por contradicción	Arg~Ad~Cd
Argumento deductivo por contrapositiva	Arg~Ad~Cp
Argumento deductivo directo	Arg~Ad~Dir
Argumento inductivo	Arg~Ai
Argumento de convicción externa	Arg~Ace

Dado que los recuentos no contaban con fragmentos textuales de la interacción de los miembros de la clase (trascripciones) no tenía mayor sentido intervenirlos con los códigos asociados a las *funciones en la participación* y a las *funciones en el argumento*. Para llevar a cabo la intervención de los recuentos, se utilizó *Atlas.ti 7*, software especializado en análisis cualitativos en el que fueron ingresados los *Recuentos por Bloques* como *documentos primarios* de la *unidad*

[36] *Nle* indica *Norma de División de Labores* asociada a los estudiantes. *Nlp* lo respectivo para el caso de la Profesora.

[37] Vale decir que al momento de codificar los documentos primarios en el software Atlas.ti, con respecto a las tipologías referidas al Momento, Coerción y Nivel se consideró necesario sólo codificar aquellas normas que, respectivamente se presenta en el momento de *evaluación* (M~E), son *principios* (C~P) o son *metanormas* (N~M). Esto, por cuanto para cada una de tales tipologías se presentan dos opciones, y permite indicar que al no asignar a una norma la opción codificada (estipulada en la tabla), automáticamente queda designada con la otra opción. Ello implica alivianar sustancialmente los análisis (en términos de códigos) de los documentos primarios que alimentan el software.

hermenéutica[38] (En el Anexo 3. Recuento Bloque N° 6 y preanálisis con *Atlas.ti* 7, se presenta como ejemplo el análisis preliminar asociado al Bloque de Problemas N° 6. Los códigos de la margen derecha indica el tratamiento del documento con el software). La codificación resultante tenía el propósito de identificar con un mejor criterio los bloques o fragmentos de bloques que tenían una riqueza suficiente para hacer el *análisis didáctico* desde la perspectiva del EOS (ver el Apartado 2.5.1.4); esto es, que hubiese variedad en los códigos y, eventualmente, alta frecuencia en los mismos. La Tabla 20 expone un diagrama de colores que ilustra los resultados de tal codificación preliminar. De dicha tabla fue observado que, en términos generales, los problemas de cada uno de los Bloques tenían una riqueza interesante determinada visualmente por la variedad de colores (tonos verdes para *tipos de argumentos*, tonos azules para *tipos de normas* –según EOS–, y tonos de naranjas para tipos de *situaciones instruccionales*). Ese panorama hizo más difícil la escogencia de datos. Desde esa perspectiva, se consideró pertinente considerar casi todos los Bloques (con sus problemas) como fuentes de datos de investigación. Finalmente, fueron descartados (i) el Bloque N° 7 por su poca variedad de problemas (es el único bloque que contiene uno solamente), y (ii) los problemas TE7 y TE8 del Bloque N° 4 porque, en el total de frecuencias sumando todas las tipologías, tuvieron una cantidad menor en relación con los otros. Ello responde al hecho de que tales problemas no tuvieron mayor desarrollo en el trabajo colectivo cuando se abordaron en clase.

Con base en los resultados derivados de la Tabla 20, fue elaborada la Tabla 21 la cual presenta los Bloques de problemas (y problemas específicos) escogidos como fuentes para los datos de investigación. Es importante aclarar que al momento de hacer tal análisis preliminar se tenía conciencia de que probablemente los datos presentados en la Tabla 20 podrían cambiar sustancialmente cuando se elaboraran los análisis didácticos asociados a los problemas de cada uno de los Bloques. Esto porque se tendría más información (producto de las trascripciones y entrevistas) que permitiría tener una lectura más detallada que la realizada en dicho análisis preliminar. No obstante, como ejercicio para escoger los datos del estudio, este análisis fue pertinente.

---

[38] *Unidad hermenéutica* es el nombre que utiliza el software para identificar el archivo en el cual son puestos todos los documentos (denominados *documentos primarios*) cuyos apartados (llamados *citas*) serán codificados con los *códigos* ingresados al software por el usuario.

Tabla 20. Frecuencias de códigos por Bloques de Problemas

		BLOQUE 4									BLOQUE 5								BLOQUE 6				BLOQUE 7
		PP4	PA4.1	PA4.2	PA4.3	PP5	TE7	PP6	TE8	Total	PP7	PA7.1	PA8.1	TE9	PP8	PA8.2	TE10	Total	PP9	PA9.1	TE11	Total	PP10
Argumentos	Aa		1							1								0	2			2	
	Ab		6			15				21								0	1			1	
	Ad~Ca									0								0				0	
	Ad~Cd		1	2						3							1	1				0	
	Ad~Dir		5		1	1	1	2	1	11	1	1		1	1	1	1	6	3	1	1	5	1
	Ai		1							1						1		1				0	
	Ce				1					1								0	4			4	1
	Total	0	14	2	2	16	1	2	1	38	1	1	0	1	1	2	2	8	10	1	1	12	2
Normas	F~Fc	1	1	1		1		1		5	1		1		1			3	4			4	
	F~Fe	1	4	2	1	1		1		10	1		1		1	3	1	7	2		1	2	1
	F~Fi	1				1				2	1				1	1		3	2	1		3	
	F~Fm	1	2		1			1		5	1	1	1	1	1	5		10	4	1	1	5	1
	Total	4	7	3	2	3	0	3	0	22	4	1	3	1	4	9	1	23	12	2	2	14	2
Situaciones instruccionales	CF	1					1	1		3	1	1		1	1	1	1	6	8			8	1
	E	1			1					2	1	1	1			3		6	7			7	
	ET		1	1		1				3								0				0	
	HP		1					1	1	3				1		1	2	4	1		2	3	1
	IC				1					1		1	1					2		1		1	1
	IP		1	1				1		3						1		1	2	1	1	4	2
	Total	2	3	2	2	1	1	3	1	15	2	3	2	2	1	6	3	19	18	2	3	23	5

Tabla 21. Bloques de Problemas y Fragmentos: fuente de datos de investigación

Bloque de Problema N° 1					
Dominio temático: Geometría Plana	**Temas**: Segmentos congruentes; circunferencia				
Problema	PP1	PA1.1	PA1.2	TE1	TE2
Sesión de Clase	1, 2	3	3	2, 4	4

Bloque de Problema N° 4					
Dominio temático: Geometría del Espacio	**Temas**: Paralelismo; Cuadriláteros; Cuadriláteros plegados; El espacio; Visualización de Planos en el espacio				
Problema	PP4	PA4.1	PA4.2, PA4.3	PP5	PP6
Sesión de Clase	11	11, 12, 13	13, 14	13, 14	16, 17

Bloque de Problema N° 5							
Dominio temático: Geometría del Espacio	**Temas**: Relación de perpendicularidad entre plano y recta						
Problema	PP7	PA7.1	PA8.1	TE9(1)	PP8	PA8.2	TE10(1)
Sesión de Clase	17, 18	18	18	18	19	19	19, 20

Bloque de Problema N° 6			
Dominio temático: Geometría del Espacio	**Temas**: Conjunto mediador; Plano mediador		
Problema	PP9	PA9.1	TE11
Sesión de Clase	20, 21, 22, 24	22	24

2. Identificar el material registrado (videos y producción escrita escaneada) que le corresponde a cada fragmento escogido y hacer las ediciones respectivas. Esto es, recortar los segmentos de videos asociados y hacer las trascripciones relativas

tanto a tales segmentos de video como a las producciones escritas de los estudiantes. Estas trascripciones fueron los registros que primordialmente sirvieron de recurso para hacer el análisis didáctico y, en ese marco, emplear las herramientas analíticas descritas en las Fases I y IV del Capítulo anterior.

3. Recopilar en carpetas digitales toda la información (recuentos de clase, segmentos de videos, producciones escaneadas y trascripciones) que le corresponde a cada fragmento dato de investigación. Ello, para tener un acceso rápido a la información al momento de requerirla durante el análisis didáctico. Cada Carpeta fue denominada BLOQUE X (la X indica el número del bloque de problemas) y fue depositada en otra carpeta denominada ARCHIVOS DIGITALES DATOS. La Figura 30 ilustra el contenido de dicha carpeta, mientras que la Figura 31 ilustra el contenido de la ARCHIVO DIGITAL DATO BLOQUE N° 6 asociado a los problemas PP9, PA9.1 y TE11.

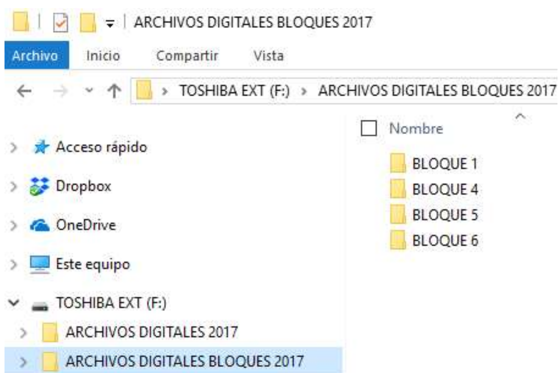


Figura 30. Contenido carpeta ARCHIVOS DIGITALES BLOQUES 2017

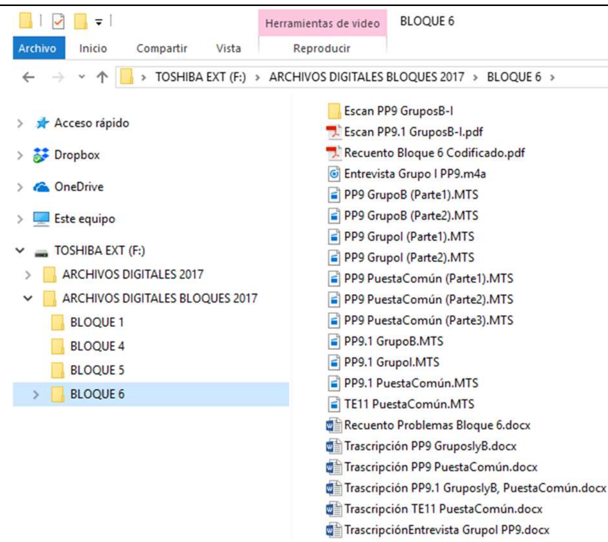


Figura 31. Contenido subcarpeta BLOQUE 6 asociado a PP9, PA9.1 y TE11

3.2 DEPURACIÓN DE CÓDIGOS A PRIORI

Como se dijo previamente, la primera versión de los códigos fue utilizada para hacer un análisis preliminar y escoger los datos del estudio. Además de ello, dichos códigos también fueron empleados para intervenir datos del estudio, específicamente, las trascripciones respectivas de las primeras cuatros sesiones de clase, correspondientes al primer bloque de problemas. Dado que en tales sesiones se inició la implementación de la innovación en el aula descrita en el Capítulo 1, era predecible que en ellas se pusieran de manifiesto varias situaciones instruccionales, y con ello, escenarios donde fuera posible reconocer tanto las funciones de los miembros de la clase en términos de su participación, el proceso de argumentación y las normas que regulan las prácticas asociadas, como los argumentos que toman lugar en tales situaciones. En otras palabras, dichas sesiones se concibieron como un contexto idóneo para poner a prueba los códigos y, en consecuencia, precisar la necesidad de hacerles un ajuste o de estipular códigos emergentes con los cuales intervenir los demás datos. Vale indicar que, en algunos casos, cada intervención hecha por algún agente (profesor o estudiantes) fue apta para ser intervenida por varios códigos; en otros, fue un conjunto de intervenciones lo que fue codificado; en tal sentido, la interpretación realiza a cada fragmento fue relativa al contenido de cada intervención o conjunto de intervenciones. A continuación, se describen las etapas llevadas a cabo en ese proceso:

3.2.1 Depuración de datos: primer momento

La elaboración de este primer análisis se hizo también a través del software especializado *Atlas.ti* 7. En él fueron cargados las trascripciones de las cuatro primeras sesiones de clase como *documentos primarios* de la unidad hermenéutica *Bloque de Problemas N° 1.* Además, fueron introducidos al programa los códigos presentados en la Tabla 19 y los correspondientes a las funciones en la participación y en el argumento (ver Tabla 22) pues ya había trascripciones en las que tenía sentido usarlos. Con estos códigos se intervinieron las trascripciones.

Tabla 22. Código Función en la participación y en el argumento

Función en la participación		**Función en el argumento**	
Autor	FPar~A	Aserción	FArg~A
Encubridor	FPar~En	Datos	FArg~D
Portavoz	FPar~P	Garantía	FArg~G
Repetidor	FPar~R		

Durante el trascurso del primer análisis llevado a cabo mediante el procedimiento descrito anteriormente, surgió la necesidad de hacer algunos ajustes a la codificación planteada a priori. Enseguida se precisan dichos ajustes explicando, grosso modo, por qué fue menester hacerlo.

En términos generales, los códigos referentes a los tipos de argumentos y las normas no tuvieron cambios sustanciales. No obstante, hubo la necesidad de precisar una tipología de normas que tiene su *origen* atendiendo a los conocimientos que la Didáctica de la Matemática ha producido; tal tipología se denominó *origen didáctico* y el código asignado en *Atlas.ti* 7 fue O~D). Un ejemplo de norma que se cataloga de origen didáctico se presenta en la Tabla 23. En ella, se presenta un fragmento de diálogo entre la profesora y Diego (un estudiante) que toma lugar cuando se aborda la prueba de la conjetura que surge como solución al PP1; en dicha tabla se presenta la trascripción de diálogo y adyacente a esta, la norma asociada:

Tabla 23. Ejemplo Norma de Origen Didáctico

Trascripción		Norma codificada
P	¿Cuál es un buen ejemplo de una ocasión en que yo uso ese elemento como herramienta y después me doy cuenta de que teóricamente lo puedo justificar?	**O~D**: Las herramientas de un EGD hacen ostensivos objetos de la geometría (Laborde, 2000). Por ejemplo, la herramienta *Compás* se corresponde con el *Teorema Localización de Puntos*.
Diego	Cuando usamos el compás, pero teóricamente usamos Teorema Localización de Puntos.	
P	Ese es un ejemplo. Entonces el sistema de la geometría dinámica nos traduce, hace realidad una cosa que nosotros tenemos teórica que se llama teorema localización de puntos.	

En lo que corresponde a la función de los miembros de la clase en cuanto a su participación y en la argumentación, hubo necesidad de hacer ciertas precisiones en los códigos. En primera instancia, las trascripciones hicieron evidente que, eventualmente, los miembros de la clase refutaban ideas planteadas por los estudiantes en términos de los componentes de un argumento (aserción, dato o conclusión); proponían pasos argumentales (que aludían a los tres componentes de un argumento) o proponían ideas para hacer un paso argumental (no era explícito a cuál componente del argumento se hacía referencia). En esa medida, se introdujeron tres funciones más en relación con el argumento: una que indicaba una *refutación* [FArg~R] -elemento que puede constituir un argumento según Toulmin (2003)-; otra que indicaba un *paso argumental* [FArg~PasoArg]; y otra que indicaba una *idea de argumento* [FArg~Id]. Además de lo anterior, al intervenir las trascripciones se cayó en la cuenta de puntualizar mediante un código específico cuál miembro de la clase era quien participaba en el trascurso de la interacción, *Estudiante* o *Profesor*. Esto, para proveer al software de una identificación precisa al respecto y poder filtrar con precisión la función del profesor durante la interacción, objetivo específico de este estudio. Además, los datos mostraron que la forma de participar de la profesora, en muchos de los casos, si bien se puede hacer corresponde con los códigos respectivos a la *función en la participación* y la *función en el argumento*, ella (y los estudiantes eventualmente) lo hace a manera de *indagación* y no necesariamente de manera *afirmativa*. En ese sentido, hubo la necesidad de crear códigos que tuvieran en cuenta estos matices. Para indicar si el emisor era un estudiante [E] o la profesora [P] y si la su función en la participación o en el argumento era *afirmativa* se ponían los códigos tal como aparecen en las Tabla 24 y Tabla 25. Cuando esta era *indagativa*, se colocaba una "I" al final del código.

Tabla 24. Códigos emergentes Función en la participación

Función en la participación	**Códigos**	
	Profesor	**Estudiante**
Autor	FPar~A~P	FPar~A~E
Encubridor	FPar~En~P	FPar~En~E
Portavoz	FPar~P~P	FPar~P~E
Repetidor	FPar~R~P	FPar~R~E

Tabla 25. Códigos emergentes Función en el argumento

Función en el argumento	**Códigos**	
	Profesor	**Estudiante**
Aserción	FArg~A~P	Farg~A~E
Datos	FArg~D~P	FArg~D~E
Conclusión	FArg~G~P	FArg~G~E
Refutación	FArg~R~P	FArg~R~E
Paso	FArg~PasoArg~P	FArg~PasoArg~E
Idea	FArg~Id~P	FArg~Id~E

Indagativa: Poner "I" al final del código

Para ilustrar estos cambios, se trae a colación las siguientes intervenciones trascurridas durante el proceso de elaboración conjunta de la demostración de la Existencia de una circunferencia como respuesta al PA1.2:

> P: Por eso, primero toca hablar de rayos. Bueno, entonces primero voy a hablar de rayos.
>
> [...]
>
> Carolina: Pues me parece que nos enredamos más...
>
> [...]
>
> Carolina: Es que necesitamos una, y con una generamos... [...] Y en esta recta determino un punto diferente a P, y determinar la distancia. Y a partir de eso determinar los rayos...

En el fragmento anterior, Carolina refuta la idea que parafrasea la profesora en la primera intervención por lo cual se codificó con FArg~R~E. Enseguida, ella misma propone una idea en la que sugiere cómo proceder (FPar~A~E); sin embargo, al no ser claro cuáles son las aserciones, los datos y las garantías que la componen esta se codificó

FArg~Id~E. En siguiente fragmento ilustra códigos relativos a un paso argumental y una participación indagativa:

Vanessa:	Llamamos una recta por el postulado de existencia, entonces existe una recta m.
P:	¿Podemos proceder así o no? Ella dice hay un postulado que dice existe una recta.

Vanessa, mediante su intervención está proponiendo (FPar~A~E) un paso argumental completo en el que se pueden identificar la aserción (existe una recta m) y su garantía (postulado de existencia), razón por la cual fue codificada con FArg~PasoArg~E. Enseguida, la profesora indaga por la propuesta de Vanessa; en tal sentido su intervención es codificada como FPar~R~P~I y FArg~R~G~I puesto que no sólo repite lo dicho por la estudiante sino que indaga sobre su validez, específicamente sobre su garantía.

3.2.2 Depuración de datos: segundo momento

Con las codificaciones ajustadas, se intervinieron de nuevo las trascripciones de las sesiones de clases citadas para ser recodificadas. El proceso del primer momento condujo a que la mirada analítica se afinara. En consecuencia, la nueva revisión no solo llevó a la realización de tal recodificación sino a considerar nuevos códigos emergentes, los cuales se describen a continuación:

Con la nueva revisión se vio la necesidad de tener en cuenta que las *situaciones instruccionales* sucedían en dos escenarios contextuales generales, cuando los estudiantes trabajaban autónomamente ante una tarea propuesta por la profesora [código asociado ActEst], o cuando la profesora lideraba la socialización de las producciones de los estudiantes bien sea en el marco de la revisión de una tarea extraclase [código asociado RevTar] o bien después del trabajo autónomo de los estudiantes durante la clase [código asociado ActClas]. Vale decir que estas distinciones se presumen como importantes porque cada uno de los escenarios descritos permitirían decantar (i) las configuraciones de objetos (y con ello el proceso de argumentación respectivo) desde un punto de vista cognitivo cuando la actividad es autónoma de los estudiantes [ActEst], o desde un punto de vista epistémico cuando la actividad es de toda la clase [ActClas o RevTar]; y (ii) las normas asociadas para identificar, por ejemplo, cuáles aparecen y cómo regulan la actividad de los estudiantes, y cuáles y cómo son instauradas por la profesora en los escenarios donde ella interviene. La Tabla 26 hace una síntesis de esta codificación:

Tabla 26. Códigos emergentes escenarios generales

Escenarios generales		**Código**
Actividad autónoma de los estudiantes		ActEst
Actividad de toda la clase	Revisión y comentarios de tarea extraclase liderada por profesora	RevTar
	Trabajo colectivo liderado por la profesora luego de actividad autónoma de estudiantes	ActClas

Si en el párrafo anterior fueron considerados escenarios generales, en este se hace referencia escenarios específicos. Dadas las condiciones de la innovación descritas en secciones previas, cada situación instruccional está motivada por un problema propuesto por la profesora. En este sentido, en el análisis de los datos que se hizo en este segundo momento fueron identificados los tipos de problemas según la propuesta hecha por Molina & Samper (2018). Dicha propuesta identifica tres tipos de problemas caracterizados según la estructura de su enunciado:

Búsqueda de consecuente. En este tipo de problemas están dadas condiciones suficientes y se deben hallar las consecuencias necesarias de estas. En estos, la representación gráfica de la situación descrita en el enunciado exige la construcción de objetos que cumplan las condiciones dadas; la búsqueda de invariantes (que conformará el consecuente) se hace mediante la exploración de los objetos construidos.

Búsqueda de antecedente. En este tipo de problema se deben hallar las condiciones suficientes para las cuales las propiedades mencionadas en el enunciado son la consecuencia necesaria. Resolverlo exige no sólo representar gráficamente los objetos mencionados en el enunciado, sino también realizar construcciones auxiliares que provean las condiciones geométricas suficientes para reconocer, mediante la exploración, las propiedades de un objeto existente o determinar las que aseguren la existencia de un objeto. Estas deben ser reportadas en el antecedente de la conjetura pues el consecuente está dado.

Determinación de dependencia. En este tipo de problemas, su enunciado provee un conjunto referencial de figuras geométricas y unas propiedades, y solicita establecer dependencias entre “tipos de figuras del conjunto referencial” y las “propiedades dadas". Existe la libertad de decidir qué se toma como antecedente (o consecuente) de la conjetura: el conjunto referencial o las propiedades.

Además de los anteriores, hubo otros dos tipos de problemas que se presentaban con cierta frecuencia, particularmente para los escenarios generales de actividad de toda la clase o revisión de tareas:

Elaboración de prueba. En este tipo de problemas, su enunciado solicita explícitamente la prueba o revisión de una prueba de alguna proposición.

Exploración teórica. En este tipo de problemas, su enunciado solicita implícitamente recurrir a la teoría para dar respuesta a algún requerimiento (*e.g.*, el problema PP5 al solicitar datos y garantías que permitan inferir la *existencia de un plano*, implica una evocación de objetos-proposición que lleven a tal aserción). Este tipo de problema llevó a una nueva situación instruccional que lleva el mismo nombre y que se codifica SI~ET, tal como se puede ver tanto en la Tabla 20 como en la Tabla 29.

En vista de lo anterior, los problemas fueron identificados con los códigos que se indican en la Tabla 27.

Tabla 27. Códigos emergentes Tipos de problemas

Tipo de Problemas	**Código**
Búsqueda de consecuente	Prob~Bc
Búsqueda de antecedente	Prob~Ba
Determinación de dependencia	Prob~Dd
Elaboración de prueba	Prob~Ep
Exploración teórica	Prob~Et

Esta tipología fue tenida en cuenta porque cada tipo de problema, específicamente los tres primeros favorecen un tipo de argumento principalmente –ver Tabla 28– (Molina & Samper, 2018); con respecto al tipo *elaboración de una prueba*, dada su naturaleza, los argumentos favorecidos son de tipo deductivo.

Tabla 28. Relación tipo de problema - tipo de argumento

Tipo de Problema	**Tipo de Argumento**
Búsqueda de consecuente	Inductivo
Búsqueda de antecedente	Abductivo
Determinación de dependencia	Inductivo (para búsqueda de conjetura que soluciona el problema) Abductivo (para construir antecedente escogido)

En resumen, finalizado este segundo momento de análisis previo, se tuvo como resultado la codificación de las trascripciones hechas para las primeras cuatro sesiones de clase con base en los códigos finalmente establecidos.

Para terminar esta sección se presenta la Tabla 29 que expone los códigos con los cuales fueron intervenidos los datos de investigación. Por supuesto, estuvo previsto que dicha tabla fuese dinámica; esto es, que ella fuese variando en la medida que emergieran códigos nuevos al usarla en los datos. Vale indicar también que al respecto de las tipologías de normas, cada una estuvo contenida de normas específicas que buscaban corresponderse con aquellas expresadas en el apartado 2.3.5.3 para cada situación instruccional. En consecuencia, en la sección siguiente focalizada en el análisis didáctico, los enunciados de cada norma serán explicitados.

Tabla 29. Sumario códigos luego de análisis preliminar

Códigos Situaciones Instruccionales	**Códigos emergentes escenarios generales**	**Códigos emergentes Tipos de Problemas**	**Códigos Normas Tipología EOS**		**Códigos Normas Tipología TII**
			Origen	**Facetas**	
SI~CF	ActEst	Prob~Bc	O~S	F~Fe	Ni
SI~E	RevTar	Prob~Ba	O~A	F~Fc	Nt
SI~HP	ActClas	Prob~Dd	O~C	F~Fi	Nle, Nlp
SI~IC		Prob~Ep	O~M	F~Fa	
SI~IP		Prob~Et	O~D	F~Fm	
SI~ET				F~Fec	

Códigos Tipos de argumentos
Arg~Aa
Arg~Ab
Arg~Ad~Ca
Arg~Ad~Cd
Arg~Ad~Cp
Arg~Ad~Dir
Arg~Ai
Arg~Ace

Códigos Función en el argumento[39]	
Profesor	**Estudiante**
FArg~A~P	Farg~A~E
FArg~D~P	FArg~D~E
FArg~G~P	FArg~G~E
FArg~R~P	FArg~R~E
FArg~Id~P	FArg~Id~E
FArg~PasoArg~P	FArg~PasoArg~E

Códigos Función en la participación	
Profesor	**Estudiante**
FPar~A~P	FPar~A~E
FPar~En~P	FPar~En~E
FPar~P~P	FPar~P~E
FPar~R~P	FPar~R~E

[39] Recuérdese que si al final del código de la función de participación o del argumento aparece ~I, se está indicando el sentido de indagación que tiene lo pronunciado por el emisor.

CAPÍTULO 4

Análisis didáctico bloques de problemas

Este capítulo se enfoca en el análisis pormenorizado de los datos escogidos; esto es, se intervienen los fragmentos de sesiones de clase siguiendo los elementos del *análisis didáctico* propuesto por el EOS. Para ello se usaron las herramientas analíticas expuestas en las secciones 2.5.1.1 y 2.5.1.4 y los códigos (a priori y emergentes del análisis preliminar) en su última versión (Tabla 29). Hay que recordar que dichos fragmentos de clase están asociados a bloques de problemas que giran en torno a cuatro núcleos temáticos: segmentos congruentes y la circunferencia (Bloque 1), cuadrilátero y cuadrilátero plegado (Bloque 4), perpendicularidad entre plano y recta (Bloque 5) y plano mediador (Bloque 6). Salvo el primero que alude al dominio de la Geometría Plana, todos los demás Bloques hacen referencia al Dominio de la Geometría del Espacio. La razón por la cual se ha escogido temáticas que aluden a ambos dominios, corresponde al hecho de tener un contexto con el cual poder hacer un contraste entre las prácticas que rigen en un dominio y otro, y por ende tener mayores insumos para precisar el sistema de normas que necesariamente aparece en el Dominio de la Geometría del Espacio.

La presentación del análisis para cada bloque de problemas consta de lo siguiente: En primera instancia, con el ánimo de contextualizar al lector, se expone con una tabla que contiene los problemas (principales, auxiliares y de tareas extraclase) con su respectivo objetivo y las sesiones de clase en las que cada problema se abordó. En seguida, se presenta lo que en sentido estricto se corresponde con el *análisis didáctico* propuesto por el EOS (ver apartado 2.5.1.4) asociado a cada bloque. Para ello, se precisan las *trayectorias didácticas* asociadas a cada problema (o conjunto de problemas); en ese marco, paralelamente se identifican y analizan *las prácticas* matemáticas (primer elemento del análisis didáctico) que emergen de la *interacción* (tercer elemento) determinadas por las *situaciones instruccionales* que se les pueden hacer corresponder. En ese contexto, cada que sea posible, se harán ostensivos: (i) las *configuraciones de objetos matemáticos primarios* (segundo elemento) bien sea cognitiva o epistémica, que emergen de las prácticas desarrolladas a lo largo de la trayectoria didáctica; y (ii) el *sistema de normas* que regulan las interacciones y el proceso de enseñanza y aprendizaje dentro del aula (cuarto elemento), particularmente, en lo que tiene que ver con el proceso de argumentación y el uso que se les confiere a los *medios y recursos* (Pino-Fan, Assis, & Godino, 2015). Las herramientas analíticas para hacer ostensivos tales aspectos fueron descritas en el capítulo anterior; no obstante, las mismas serán explicitadas enseguida a la luz de los códigos de la Tabla 29. Cada una de las trascripciones de los fragmentos de sesiones de clase seleccionados como datos fueron cargadas en el software *Atlas.ti* 7. El uso de este software facilitó la identificación de los siguientes aspectos:

a. El contexto general en el que cada situación estuvo presentes -cobran sentido los códigos asociados a los Escenarios Generales- para precisar lo sujetos que intervienen en cada trayectoria didáctica.
b. Los tipos de problemas -cobran sentido los códigos asociados a Tipos de Problemas- y la situación instruccional -cobran sentido los códigos respectivos- permiten decantar los sistemas de prácticas correspondientes (primer elemento del análisis didáctico propuesto por el EOS).
c. Las trayectorias didácticas emergentes de la interacción entre los miembros de la clase y sus prácticas (tercer elemento del análisis didáctico propuesto por el EOS). En este punto, los códigos asociados a las funciones de los estudiantes y profesora con respecto a su participación y al argumento cobran especial sentido, específicamente, en las trayectorias didácticas en las que el profesor participe.
d. Las configuraciones de objetos primarios, desde un punto de vista cognitivo o epistémico (punto de vista que se determina según el ítem a), emergentes de las prácticas de las trayectorias didácticas (segundo elemento del análisis didáctico propuesto por el EOS). En este marco, los códigos relativos a los tipos de argumentos cobran todo el sentido.
e. Las normas que regulan las prácticas asociadas a cada situación instruccional (cuarto elemento del análisis didáctico propuesto por el EOS). En este punto, cobran sentido los códigos relativos a las normas según EOS y según TII. Por su

puesto, al respecto de este asunto, vale indicar que no sólo es tipificada cada norma, sino que es en sí misma enunciada y descrita.

Tal como se dijo antes, la identificación de los aspectos citados en los ítems b y c, correspondientes a los elementos 1 y 3. En tal sentido, la identificación de los objetos primarios (de los argumentos en particular) y de las normas para las situaciones instruccionales de cada trayectoria didáctica son derivados también de manera simultánea (elementos 2 y 3, respectivamente).

Vale indicar que el uso de software *Atlas.ti* 7 facilitó el proceso de análisis en dos sentidos distintos: no sólo posibilitó el proceso de codificación de datos, sino que permitió correlacionar tipologías de códigos de interés primordial para dar cuenta de los objetivos del estudio. Entre tales correlaciones se destacas: Normas vs Situaciones Instruccionales, Tipos de Argumentos vs Situaciones instruccionales, Normas vs Tipos de Argumentos según Situación Instruccional, Tipos de Argumentos vs Tipos de Problemas, etc. Parte de estas relaciones serán sintetizadas en las tablas tituladas *Cronología de situaciones, objetos y normas* que se presentan al final del análisis de cada Trayectoria en el apartado *Síntesis y breves comentarios.*

Para iniciar el análisis de los datos, en la siguiente sección se presenta lo que corresponde a un fragmento de la primera sesión de clase, ocurrido justo antes de que la profesora presentara el PP1 asociado al Bloque de Problemas N° 1. En él toma lugar la presentación que la profesora hace del curso que, como se dijo antes, es un momento en el que la profesora explicita normas que regularán las prácticas de la clase. Tal análisis no se corresponde con los elementos del análisis didáctico en sentido estricto dado que no hubo problema que movilizara prácticas; más bien, es un monólogo de parte de la profesora en la que expone las reglas de juego.

4.1 PRESENTACIÓN DEL CURSO

Durante 80 minutos aproximadamente, la profesora hace la presentación del curso Geometría del Espacio. En ese marco, expone su programa (los aprendizajes esperados, los contenidos, la metodología, la forma de evaluar y la bibliografía). Así mismo, expone las condiciones que debe tener en documento Notas de Clase y las condiciones generales del curso; otras palabras, son pronunciados varios asuntos que pueden ser considerados como normas que regularán el curso durante su desarrollo. En lo que sigue, se presenta un análisis que pretende destacar las normas que la profesora declara y con ello, explicitar los principios que guían el curso y de los cuales se desprenden las responsabilidades tanto de la profesora como de los estudiantes.

En un primer momento, la profesora comenta que se había comunicado con los estudiantes por medio del correo electrónico previo a la primera sesión de clase. Esto con el objetivo de invitarlos a una carpeta virtual (cargada en Dropbox) que contiene, en principio, tres documentos: uno que expone el programa del curso, otro la estructura y condiciones para la elaboración del documento Notas de Clase, y un tercero que contiene los objetos primarios (definiciones, postulados y teoremas) del sistema teórico relativo al curso de Geometría Plana. Dice la profesora que este último documento fue construido por ella a partir de los sistemas recabados de los dos grupos del curso de Geometría Plana desarrollados en el segmento inmediatamente anterior; comenta que en él primo el sistema que menos elementos contenía pero que, en términos generales, ambos fueron muy parecidos.

Informa que al curso asistirán varios observadores que acompañarán el desarrollo de este y que registrarán lo sucedido por medio de tres cámaras. Esto porque será escenario de una tesis doctoral. En ese momento, la profesora hace un comentario sobre la primera gran responsabilidad que tienen los estudiantes para con el curso; textualmente dice lo siguiente (el fragmento es fraccionado para facilitar la asociación con las normas):

1. Bien, ustedes van a tener una responsabilidad más, que en realidad no es una responsabilidad más, porque el aprendizaje es una construcción social, nosotros no aprendemos solos, aprendemos con los demás, aprendemos de acuerdo con las situaciones que surgen que tengan que ver con lo que estamos tratando de aprender;
2. entonces siempre, siempre deben participar, comunicarnos, deben comunicar sus propias ideas, deben comunicar sus dudas, hacer preguntas, en este momento con muchísima más razón;
3. necesitamos oír sus voces, necesitamos saber qué es lo que han entendido y qué es lo que no han entendido, ¿de acuerdo?
4. Entonces tienen, digamos, que estar siempre pendientes de esa situación y decir "tengo que hablar porque es que ellos [señala a los observadores] necesitan saber lo que yo estoy pensando; si yo me quedo callado o callada, pues ellos nunca van a poder saber lo que yo estoy pensando, ni van a poder saber que yo realmente entiendo ni jota de lo que está diciendo la profesora".
5. […] Entonces necesitamos que ustedes también colaboren por el bien de todos. El profesor da, tanto como ustedes exijan; si ustedes no exigen, el profesor sigue

exponiendo, exponiendo, exponiendo y ustedes cada vez más lejanos de lo que está exponiendo el profesor. Entonces ustedes tienen que exigir.

6. [...] Ustedes ya saben cómo es la dinámica de estos cursos de geometría, ¿no?; saben que no tenemos libro, o sea todos lo comenzamos como un cuaderno en blanco que espero que al final del semestre sean tres cuadernos.
7. En esos cuadernos, generalmente uno toma alguna nota, pero ustedes saben muy bien que van a haber tres personas encargadas de hacer las notas de clase cada día. [...] Entonces, saben que estos grupos tienen tres tareas importantes: una, trabajar en clase como grupo; dos, hacer las notas de clase cuando les toque; y tres, hacer las tareas extra-clase como grupo.

En este fragmento, la profesora menciona varios asuntos importantes que pueden ser considerados como normas del curso. La Tabla 30 presenta tales normas con su respectiva codificación:

Tabla 30. Conjunto de normas generales

	Norma	Fragmento asociado	Codificación
1.	El aprendizaje es una construcción social	1	**P; F~Fc; O~D:** La profesora explicita su concepción de aprendizaje, enmarcándose en un enfoque claramente social-discursivo-participacionista.
2.	Los estudiantes siempre deben participar, comunicar sus ideas y hacer preguntas.	2, 4, 5	**P; F~Fa; F~Fi; Nle; Ni:** Como consecuencia de la norma anterior, los estudiantes tienen la responsabilidad de ser auténtico, comunicar sus ideas y hacer preguntas; en tal sentido, exigir al profesor.
3.	Los profesores deben escuchar a los estudiantes e interpretar sus ideas.	3	**P; F~Fa; F~Fi; Nlp:** Por su lado, los profesores deben escuchar a los estudiantes e interpretar lo que comunican.
4.	No hay texto guía para el curso. Este se sustituye con los documentos *notas de clase*.	6	**F~Fm; O~C:** No hay un medio tradicional (libro texto guía) que apoye el proceso de aprendizaje.
5.	Cada grupo de estudiantes (de tres personas) tienen tres tareas a lo largo del curso: a) Resolver los problemas propuesto en clase; b) hacer el documento *notas de clase* cuando les corresponde, y c) hacer las tareas extraclase.	7	**F~Fc; Nle; Ni:** En correspondencia con la Norma 1, la profesora explicita tres tareas específicas que favorece el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

De la Tabla 30 se infiere un asunto interesante que tiene que ver con una pequeña red de normas que se forma como consecuencia de la concepción que la profesora promulga respecto a lo que es el aprendizaje (faceta cognitiva), concepción que en sí misma es un principio (Norma 1) que tiene el Grupo de Investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$, al que pertenece la profesora y que se fundamenta (tiene su origen) en literatura especializada de la Didáctica de las Matemáticas (Sfard, 2008). Esta norma implica las restantes cuatro. En primera instancia, implica las Normas 2 y 3 que, si bien no regulan en sí la interacción, sí la caracteriza (faceta interaccional) en términos de otros dos principios que explicita responsabilidades, una para los estudiantes (Norma 2) y otras para la profesora (Norma 3); en particular, estas normas motivan al estudiante a participar de la clase pues se considera su voz como un factor importante para el desarrollo de la clase (faceta afectiva). En segunda, la Norma 1 también implica las Normas 4 y 5 pues con estas se aluden a un medio (Norma 4) y a ciertas responsabilidades de los estudiantes (Norma 5) que favorece su proceso de aprendizaje (faceta cognitiva). Vale indicar que la Norma 4 (que precisa la sustitución de un texto guía por los documentos *notas de clase*) tiene una faceta mediacional puesto que considera a dichos documentos como un medio para comunicar las ideas construidas durante el curso y un soporte para acudir a él cuando se necesite. Esta norma es una característica muy particular de la innovación en el aula en la que se enmarca el curso, por eso su origen se cataloga como del *aula de clase*.

En el párrafo anterior, las normas se describieron según la clasificación del EOS; por supuesto, estas pueden ser caracterizadas a la luz de la TII también. Específicamente, las Norma 2 y 5 indican una *división de labores* de los miembros de la clase y precisan un *intercambio*: no sólo mencionan responsabilidades de los estudiantes para con el curso -Nl- (comunicar, preguntar, hacer documentos *notas de clase*, hacer tareas extraclase, resolver problemas en clase), sino que estas pueden ser interpretadas como acciones o tareas que ellos deben realizar para acceder al aprendizaje -Ni- (*i.e.*, se intercambian la *acción de comunicar* y las *tres tareas grupales* por *aprendizaje*). Por su parte, la Norma 3 también indica una *división de labores* (Nl), esta vez relativa a la profesora, que alude a algunas de sus responsabilidades para favorecer el aprendizaje de los estudiantes (escucharlos e interpretar sus ideas).

Por su puesto, esta pequeña red de normas (Normas 2 a la 5 son una implicación de la Norma 1) son explicitadas por la profesora en un contexto general. Se espera que estas sean especificadas más adelante indicando, por ejemplo, qué es lo que deben comunicar los estudiantes, qué preguntas deben hacer, qué debe preguntar la profesora para interpretar lo dicho por los estudiantes, etc., dependiendo de la situación instruccional en la que se enmarque la interacción.

4.1.1 Análisis normativo: Presentación del programa del curso

Precisado este primer conjunto de normas generales, la profesora comparte, mediante la proyección en un televisor, el contenido de la carpeta cargada al Dropbox. Enseguida, abre el documento que contiene el programa del curso. Lo primero que verbaliza se trascribe a continuación:

8. Bien, de qué se trata este curso; pues este curso es fascinante, tal vez que el de Geometría Plana, porque ya en el de Geometría Plana ustedes incursionaron en el mundo totalmente teórico de la Geometría, o sea, ahí nos interesaba ir conformando un sistema teórico que nos sirviera para apoyar todas las ideas que tuviéramos, ya sea resolviendo problemas o contestando preguntas,
9. porque había en el curso de Geometría Plana, algunos problemas que ustedes trabajaban en grupo
10. eran como… retos… daban lugar a la introducción de algunos elementos teóricos en el sistema, ¿cierto?, o había algunas preguntas que de pronto nos hacían que nos dábamos cuenta "yo no sé cómo contesta eso" y que también requería introducción de elementos del sistema teórico.
11. Entonces todo el fin era ir formado el sistema teórico que resolviera esos problemitas para que nosotros pudiéramos, desde la teoría, justificar ciertas cosas
12. que el profesor nos iba poniendo por el camino.
13. En el curso de Geometría Plana éramos bastantes exigentes, ¿cierto? No dejábamos pasar ni una cosa sin preguntar por qué, "por qué me están diciendo eso" y entonces nos tocaba ir a buscar en el sistema teórico y decir "ah, por el teorema tal o el postulado tal, o la definición tal", ¿cierto? Y esa cultura la seguimos en este curso también,
14. sino que vamos a bajarle un poco de nivel al detalle: algunas veces haremos la cosas con mucho detalle, y otras veces ya no con tanto detalle.

En este fragmento la profesora explicita otro conjunto de normas generales del curso que atienden a características de la innovación en el aula que se implementa en él. Más específicamente, tal como ella lo dice, estas normas son una continuación de aquellas instauradas desde el curso previo, Geometría Plana. La Tabla 31 acopia las normas identificadas en el fragmento con su respectiva codificación:

Tabla 31. Conjunto de normas generales 2

	Norma	Fragmento asociado	Codificación
6.	Interesa conformar un sistema teórico para apoyar ideas surgidas de la resolución de problemas.	8, 11	**F~Fe; O~M:** Conforme un enfoque realista de las Matemáticas, se precisa una función del sistema teórico; soportar ideas surgidas de la resolución de problemas.
5.	Los estudiantes son responsables de resolver problemas.	9	**F~Fc; Nle; Ni:** Se reitera la Norma 5 citada previamente.
7.	Mediante la resolución de problemas se plantean retos y se introducen elementos (objetos primarios) al sistema teórico.	10	**F~Fe; O~M; F~Fc; O~D:** Conforme un enfoque realista de las Matemáticas y el Enfoque de aprendizaje por resolución de problemas, se precisa que uno de los objetivos de tal enfoque es inducir la introducción de elementos al sistema teórico.
8.	La profesora es responsable de proponer problemas a los estudiantes.	12	**F~Fc; Nlp:** Se precisa una responsabilidad de la profesora.
9.	Todo se debe argumentar empleando objetos primarios del sistema teórico.	13	**F~Fe; O~M:** Conforme a la práctica de las matemáticas formales, se establece que toda afirmación o acción debe tener un soporte en elementos del sistema teórico.
10.	La rigurosidad en la elaboración de la prueba es variable.	14	**F~Fe; O~M; O~D; C~P:** Conforme a la práctica de los Matemáticos y el reconocimiento que hace la literatura en Didáctica sobre ello, hay diferentes tipos de pruebas en cuanto su rigurosidad.

Las normas citadas en la Tabla 31, desde la clasificación propuesta por la EOS, se pueden ubicar en dos facetas esencialmente, algunas tienen una cognitiva y otras tienen una epistémica. Dentro de las epistémicas se identifican aquellas según la cual son precisadas relaciones entre el sistema teórico y la resolución de problemas: El sistema teórico soporta ideas surgidas de la resolución de problemas (Norma 6) y la resolución de problemas induce la introducción de objetos al sistema teórico (Norma 7). Por supuesto, estas relaciones que muestran una reciprocidad *resolución de problemas-sistema teórico*, tienen su origen en las Matemáticas pues atiende a una perspectiva particular sobre las matemáticas: la realista. Las últimas dos normas de la Tabla también tienen una faceta epistémica pues precisan asuntos relativos a la argumentación y el sistema teórico (todo se debe argumentar desde el sistema teórico

-Norma 9-, la rigurosidad de la argumentación es variable -Norma 10-). Aunque ambas normas tienen un origen basado en la concepción de las matemáticas formales, la Norma 10 en particular se fundamenta en la práctica de los matemáticos recapitulada por literatura de la Didáctica de las Matemáticas (Recio & Godino, 2001; Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads, & Samkoff, 2012). Vale decir que la Norma 10, tal como lo ha planteado la profesora en el subfragmento 12, es una flexibilización de una norma existente en curso Geometría Plana en el que toda prueba se realizaba con todos los pasos de manera detallada. Al decir la profesora que en ocasiones una prueba se presenta detalladamente y que en otras no, está planteado un nivel de coerción variable para la norma. Aún no es precisado cuándo se hará una cosa u otra. Se hará un seguimiento a lo largo del curso para saber si se establecen criterios (normas) para ello, o si la decisión de ello es una responsabilidad deliberada de la profesora.

Dentro de la faceta cognitiva, se indica aquellas normas que aluden a las responsabilidades de estudiantes (Norma 5) y la profesora (Norma 8) en correspondencia con el enfoque participacionista y de resolución de problemas que fundamenta la innovación en el aula que se implementa en el curso. En lo que respecta a la clasificación según la propuesta de TII, al precisar responsabilidades para los miembros de la clase, estas normas se pueden identificar también como normas de *división de labores*. Vale la pena comentar que la Norma 7 podría ser susceptible de identificarse como una *norma de temporalidad*; esto porque anuncia, de manera genérica, en qué momento son introducidos (o instalados) objetos al sistema teórico: durante la resolución de problemas. No obstante, todavía no se codifica de esta forma precisamente por su poca especificidad: ¿En qué etapa de la resolución del problema se introducen elementos (objetos primarios)? ¿Durante la exploración de la situación correspondiente? ¿Durante el estudio de respuesta? ¿Durante la validación de las respuestas? Se espera que, en situaciones instruccionales específicas, esta norma sea particularizada en términos de respuestas a las preguntas planteadas.

Sucedido lo anterior, la profesora se adentra a la exposición del programa del curso cuyo documento ha proyectado en el televisor (Anexo 4. Programa del curso). Empieza con los propósitos de los propósitos del curso y continúa con los aprendizajes esperados por parte de los estudiantes. Al respecto, dice lo siguiente:

15. Entonces lo primero que tenemos que hacer, bueno, no es lo primero necesariamente, pero estaremos tratando de completar lo de la Geometría Plana y luego nos iremos a la Geometría del Espacio.
16. Ello va a implicar que ustedes realicen algunos procesos matemáticos para culminar las tareas que les ponemos; entonces hay procesos como intuir, conjeturar, interpretar, etc., inventarse estrategias.
17. todo pues con el uso del computador; vamos a tener un computador por grupo.
18. Vamos a ampliar el sistema teórico porque completamos lo de Plana y seguimos a la del Espacio.
19. Vamos, ojalá, a ayudarles a entender cómo es esta dinámica tan importante en las matemáticas de la justificación y la importancia de comunicar correctamente nuestras ideas, vamos a seguirle trabajando al uso del lenguaje geométrico, y más que todo, lo más importante es seguirle trabajando a participar como comunidad en esta empresa que tenemos todos a partir de hoy que es aprender Geometría Euclidiana Plana y del Espacio, y aprender a demostrar, ¿bien? Y también lograr a entrever lo que sucede en clase, cosas que nos van a servir en el futuro cuando seamos maestros: metodología, etc., cómo es el papel del profesor, etc. A todas estas cosas debe contribuir este curso.
20. Estaremos trabajando fuertemente en el software de geometría dinámica Cabri 3D.
21. Aprendizajes esperados, eeeh, que trabajen para poder proponer conjeturas; que usen representaciones y sepan interpretar representaciones tanto en el plano como en el espacio para comprender, ver operaciones geométricas y dónde se ve en esas representaciones el uso de conceptos para representarlo; validar con argumentos formales; usar conceptos, propiedades y relaciones; comunicar correctamente sus argumentos; usar adecuadamente el software de geometría dinámica; esto es importantísimo: ustedes recuerdan que lo que hacemos es darle algunos problemas para que ustedes, en grupo, representen, exploren y comuniquen.

Al igual que ha sucedido con los fragmentos anteriores, en este fragmento se pueden identificar varios asuntos normativos que la profesora explicita para regular la clase. La Tabla 32 las pone de manifiesto.

Tabla 32. Conjunto de normas asociados a propósitos y aprendizajes esperados

	Norma	Fragmento asociado	Codificación
11.	Se deben estudiar los contenidos propuestos para cada curso según lo establecido en los programas respectivos.	15, 18	**F~Fec, O~A:** Es una exigencia impuesta desde la administración y del programa de Licenciatura en sí mismo, que los contenidos curriculares pensados para cada espacio académico se estudien.
12.	Los procesos matemáticos se llevarán a cabo con el apoyo de EGD (Geogebra y Cabri 2D y 3D).	17, 20	**F~Fm, F~Fc, O~D:** Con base en resultados investigativos de la Didáctica de las Matemáticas, se usan EGD como

			favorecedores del aprendizaje de la argumentación y prueba.
5.	Especificación: *El estudiante tiene la responsabilidad de realizar procesos matemáticos como intuir, explorar, conjeturar, visualizar e interpretar representaciones, inventarse estrategias, validar con argumentos formales, usar objetos primarios (proposiciones y definiciones), comunicar correctamente argumentos, usar correctamente EGD, etc. cuando aborda un problema en clase o de la tarea.*	16, 21	**F~Fc; Nle:** Se hace una especificación a la Norma 5, explicitando lo que debe hacer el estudiante cuando se enfrenta a la resolución de un problema.

En el fragmento, la profesora actúa en conformidad con la Norma 11 (de Faceta Ecológica pues es exigida desde su entorno administrativo-curricular) según la cual se debe garantizar que los estudiantes tengan la oportunidad de estudiar todos los contenidos estipulados en los programas de los cursos. En este sentido, tal como se precisó en la Sección 3.1, la profesora se ve obligada a abordar contenidos del curso de Geometría Plana (paralelismo y cuadriláteros especiales -paralelogramo, rectángulo, rombo, trapecio, cometa) en un curso de Geometría del Espacio.

De otro lado, la profesora también especifica un poco más la Norma 5 pues precisa responsabilidades de parte de los estudiantes (norma de división de labores) cuando abordan los problemas propuestos por la profesora y cuáles piezas de conocimiento (faceta epistémica) ellos pueden reclamar (norma de intercambio) si cumplen tales responsabilidades. Por su puesto, aun cuando estas normas son una especificación, siguen siendo muy generales pues no se concreta todavía las situaciones instruccionales en la que cada responsabilidad toma lugar y cuál es la pieza de conocimiento respectiva que puede reclamar el estudiante a cambio de ella.

Ahora bien, de conformidad con las características de la innovación en el aula que se implementa en el curso fundamentas en literatura de la Didáctica de la Matemática (*e.g.*, Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, & Stevenson, 2012; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Camargo, Samper, Perry, Molina, & Echeverry, 2009), la profesora alude a la Norma 12 (de faceta mediacional) según la cual se emplearán EGD como un medio que apoya la actividad de los estudiantes en el marco de la responsabilidades indicadas en la Norma 5.

Finalmente, antes de que presentara la forma con la cual se determinará la nota final del curso (ver sección *Evaluación* del Anexo 4. Programa del curso) y diera por terminada la exposición del programa del curso, la profesora alude a la metodología de este. Si bien no dice textualmente lo que está escrito en el documento, pues de alguna forma ella ya lo había comentado en intervenciones anteriores (*e.g.*, todo el primer fragmento y subfragmentos 10, 11 y 12), sí verbaliza lo siguiente:

22. Yo tengo un papel importantísimo y ustedes tiene que exigir que yo lo cumpla, y es, yo tengo obviamente que prepararme, traer para la clase cosas que podamos realmente discutir juntos, ayudarlos a que en la discusión se incluya a todo el mundo, oírlos a todos, indagar para tratar de averiguar qué es lo que me están tratando de decir, etc.
23. Y los estudiantes, de ustedes depende que realmente haya una producción rica en esta clase, con su participación, que todos logremos que evolucionen nuestras compresiones de los elementos que intervienen en este curso. Y prepararse bien para las clases y para los parciales. Por ejemplo, hacemos las notas de clase pero yo sé que ustedes nos las leen; ustedes las debería leer tan pronto yo les digo "ya están las notas de clase en el Dropbox" porque así uno repasa qué fue lo último que hicimos, en dónde quedamos y estamos preparados para lo que viene, porque de pronto no estamos de acuerdo con lo que dice ahí: "mire, yo me acuerdo que nosotros hablamos de tal teorema, y ahí no lo mencionan" o algo así por el estilo.

Con estas palabras, quiere reafirmar y precisar aún más tanto sus responsabilidades (Subfragmento 22, Normas 3 y 8) como las de los estudiantes (subfragmento 23, Normas 1, 2 y 5). Asimismo, pone en juego características de la innovación para el aula en lo que respecta, particularmente, a la interacción que puede tomar lugar ella: primero, la profesora tiene que preparar suficientemente bien aquellos asuntos que serán temas de discusión en clase para, con ello, poder dinamizar la intervención de los estudiantes; segundo, los estudiantes también deben prepararse muy bien para poder participar con suficiente riqueza en las sesiones estudiando o co-construyendo, por ejemplo, los documentos *notas de clase* que se cargan al Dropbox. Un asunto que se destaca con relación a las responsabilidades de los estudiantes tiene que ver con la alta valoración que la profesora le endilga a su participación en la clase; no solo es importante que ellos comuniquen sus ideas, sino que depende de estas que la producción en la clase sea realmente rica y que las comprensiones de los elementos involucrados evolucionen (Norma 1). En otras palabras, las normas asociadas dilucidan una faceta afectiva en tanto que los estudiantes, mediante sus producciones, se conciben como un pilar fundamental para el desarrollo del curso. La Tabla 33 compendia las normas correspondientes a los subfragmentos y las codifica.

Tabla 33. Conjunto de normas asociados a metodología del curso

<table>
<tr><th colspan="2">Norma</th><th>Fragmento asociado</th><th>Codificación</th></tr>
<tr><td>3.</td><td>Complemento: La profesora debe escuchar a los estudiantes e interpretar sus ideas. Para esto último, debe indagarles sobre lo que están diciendo.</td><td>22</td><td>F~Fi; Nlp: Se reafirma la Norma 3 y se precisa una manera (norma) para lograr interpretar ideas: debe indagar sobre lo que dicen los estudiantes.</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Especificación: La profesora debe proponer a la clase cosas (problemas) que realmente se puedan discutir con los estudiantes.</td><td>22</td><td>F~Fc; Nlp: Se reafirma y precisa la Norma 8. La profesora no solo debe proponer problemas, sino que estos deben estar al alcance de los estudiantes.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Los estudiantes deben participar en clase.</td><td rowspan="2">23</td><td rowspan="2">F~Fc: Se precisa la Norma 1 pues se afirma que la evolución de las comprensiones de los estudiantes depende de la participación de los estudiantes (complemento Norma 1). Dada la alta valoración que se le endilga a la participación de los estudiantes, esta tiene una faceta afectiva (F~Fa). Se reafirma la Norma 2: Al tenerse como premisa la Norma 1, se sigue la Norma 2 (F~Fi).</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Complemento: De su participación depende que las producciones en clase sean ricas y evolucionen sus comprensiones (en correspondencia con la construcción social del conocimiento).</td></tr>
</table>

4.1.2 Análisis normativo: Documentos Notas de Clase

Acabada la exposición del documento que exponía el programa del curso, la profesora continúa la presentación del curso explicitando las características del documento *Notas de Clase*. Al respecto, ella dice lo siguiente:

> 24. Por favor no se les olvide usar el editor de ecuaciones. El editor de ecuaciones ustedes ya lo conocen, ¿cierto? Entonces, resulta que el editor de ecuaciones si yo quiero escribir aquí, segmento AB [lo escribe usando editor de ecuaciones y la simbología geométrica: $\overline{AB}$] miren que el editor de ecuaciones pone la letra en cursiva, si no les está poniendo la letra en cursiva, algo está mal. Puede suceder a veces que en el editor yo haya hecho algo aquí [señala el ícono de la “*I*” que indica letra cursiva] y me las ponga así [muestra $\overline{\mathrm{AB}}$]. Tiene que quedar en cursiva. ¿Por qué? Porque es el lenguaje matemático y lo que estamos haciendo es hablando de

objetos matemáticos. Entonces no se les olvide usar del editor de ecuaciones y fijarse que los símbolos sí queden en cursiva.

25. […] Bien, para hacer las gráficas pueden usar Cabri o GeoGebra, lo que quieran.
26. […] Volviendo a lo que estábamos de las notas de clase, las notas de clase deben incluir las respuestas a las preguntas; no tiene que estar separado con esos títulos, pero sí que esté como quiera organizar: ¿Qué aprendimos de geometría? O sea, deben estar los teoremas, las definiciones, etc. ¿Qué aprendimos de geometría dinámica? Vamos a aprender varias cosas de geometría dinámica. Pero además de esto, debe hacerse un reporte de cosas que se discutieron en clase y los acuerdos a los que llegamos, las normas, información sobre el quehacer matemático o cómo debe actuar el profesor; o sea, que sea un recuento bastante fiel. […] Y tienen una segunda tarea, sacan de ahí las definiciones, los teoremas y los ponen en un documento parecido a este [muestra el documento que contiene el sistema teórico del curso pasado].
27. […] Daniel: Cómo se entregan, ¿Por correo?
    P: Por correo personal, a mi correo personal.
28. Yo las corrijo y pongo en el Dropbox el documento corregido. Y les devuelvo a quiénes me envió las notas los documento con todos los comentarios y la calificación.

Vale recordar que las características para los documentos *Notas de Clase* que la profesora cita, fueron presentadas en la sección 3.1; esto, dada la importancia que tuvieron tales documentos como fuentes de información para la realización de este estudio. Ahora, el interés se focaliza e indicar que tales características se pueden interpretar como asuntos normativos que regulan la estructura de dichos documentos; en consecuencia, hay una suerte de concreción de la Norma 5b pues se explicitan responsabilidades de los estudiantes a la hora de hacer dicha tarea. La Tabla 34 saca a luz las normas asociadas presentado su respectiva codificación.

Tabla 34. Conjunto de normas documentos *Notas de Clase*

	Norma	Fragmento asociado	Codificación
5b.1	Se debe emplear la simbología geométrica y el lenguaje matemático escrito correspondiente; en tal sentido los estudiantes deben usar la herramienta Editor de Ecuaciones del software Word para la elaboración del documento *notas de clase*. Se infiere, que debería hacerse uso del lenguaje geométrico en cualquier reporte escrito.	24	**F~Fm; F~Fi; Nle; O~M:** Con el ánimo de comunicar las ideas con forme al lenguaje matemático escrito, se debe usar la herramienta respectiva del software Word.
5b.2	Se debe usar EGD (Cabri, GeoGebra) para representar las figuras geométricas involucradas en las *notas de clase*. Se infiere, que debería	25	**F~Fm; F~Fi; Nle; O~M:** Con el ánimo de ser precisos en las representaciones y comunicar lo mejor posible

	hacerse uso del EGD para hacer representaciones gráficas de reportes escritos.		las propiedades inmersas en una figura, es útil usar las herramientas tecnológicas propicias para ello.
5b.3	El documento *Notas de Clase* debe contener lo siguiente: Respuestas a la preguntas o problemas planteados; qué se aprendió de geometría (*i.e.*, objetos primarios como teoremas, definiciones, postulados); qué se aprendió de Geometría Dinámica (*i.e.*, herramientas del EGD, procedimientos de construcción); reporte de lo discutido, acuerdos a los que se llegaron, las normas instauradas.	26	**F~Fm; F~Fi; Nle:** Los documentos *Notas de Clase* deber ser un medio para comunicar de manera bastante fiel todo lo sucedido en la clase.
5b.4	El medio para compartir los documentos *Notas de Clase* son el correo electrónico y una carpeta virtual (en Dropbox)	27	**F~Fm; F~Fi; Nle; Nlp; O~A; O~C:** El grupo de estudiantes que elabora el documento debe enviarlo por correo electrónico a la profesora. La profesora debe corregir los documentos, cargar el editado al Dropbox, y enviar, por email, su evaluación al grupo de estudiantes.
5b.5	La profesora debe corregir los documentos *Notas de Clase* y pone el documento editado en la carpeta virtual. Envía a los estudiantes, por correo electrónico los comentarios producto de su revisión y la calificación correspondiente.	28	

Como era de esperarse, todas las normas indicadas en la Tabla 34 tienen una faceta interaccional por cuanto aluden a asuntos que pretenden regular las formas para comunicar ideas. La Norma 5b.1 estipula el uso del Editor de Ecuaciones (herramienta del software Word) para comunicar de manera escrita con el lenguaje propio de la comunidad matemática (por eso también su codificación con O~M); la Norma 5b.2 estipula el uso de EGD para hacer las representaciones gráficas de las figuras de forma tal que comuniquen sus propiedades con los estándares exigidos por la comunidad matemática (por eso también su codificación con O~M); la Norma 5b.3 estipula aquello que se debe comunicar por medio de los documentos en cuestión; finalmente, las Normas 5b.4 y 5b.5 regula cómo se comunican los documentos *Notas de Clase*, bien sea por correo electrónico cuando interactúan sus autores con la profesora, o por una carpeta virtual cuando son compartidos a toda la clase. Vale indicar que los orígenes de este par de normas atienden al interés administrativo -O~A- (exigencias del entorno -F~Fec-) por incluir las tecnologías de la información en los cursos de formación de profesores.

De la descripción inmediatamente anterior se puede entender también por qué todas las normas tienen una faceta mediacional. Las normas 5b.1 y 5b.2 indican medios tecnológicos (Editor de Ecuaciones y EGD, respectivamente) que posibilitan la hechura de lenguajes escritos o figurales propios de las matemáticas. Las normas 5b.4 y 5b.5 aluden a los medios (virtuales) por los cuales se dan a conocer los documentos *Notas de Clase* y se interactúa en relación con ellos. La norma 5b.3 estipula a los documentos en cuestión como el medio para comunicar todo lo sucedido durante el trascurso de la clase.

Finalmente, todas las normas advierten responsabilidades (normas de división de labores) de estudiantes o profesora. Las Normas 5b.1 a la 5b.4, indican lo que los estudiantes deben hacer para comunicar (uso de tecnologías de la información) y qué deben comunicar (contenidos) en los documentos *Notas de Clase*. Por su parte, la Norma 5b.5 indica las labores de la profesora con respecto a tales documentos (revisar, comentar, corregir, calificar y cargar la versión definitiva a la carpeta virtual).

4.1.3 Síntesis y breves comentarios: normas presentación del curso

Mediante sendas Tablas se presenta un compendio de las normas presentes durante la presentación del curso hecha por la profesora, y la codificación de cada una de ellas según la clasificación propuesta por el EOS y la TII. La Tabla 35 resalta con tonalidades de grises conjuntos de normas que guardan entre sí relación; las normas que le siguen a la primera de cada conjunto son especificaciones o complementos[40] de esta. La Tabla 36 dispone la aparición de las normas durante el trascurso de la clase; ella permite observar de mejor manera la codificación para cada norma (columna) y la frecuencia de normas asociado a cada código (última columna).

Tabla 35. Compendio normas *Presentación del Curso*

Norma	Enunciado de la Norma
1	El aprendizaje es una construcción social.
1	Complemento: *De su participación depende que las producciones en clase sean ricas y evolucionen sus comprensiones* (en correspondencia con la construcción social del conocimiento).
2	Los estudiantes siempre deben participar, comunicar sus ideas y hacer preguntas.

[40] *Especificación* implica que una característica de la norma es aclarada o precisada; *Complemento* implica que una característica es adicionada a la norma.

Norma	Enunciado de la Norma
3	Los profesores deben escuchar a los estudiantes e interpretar sus ideas.
3	Complemento: La profesora debe escuchar a los estudiantes e interpretar sus ideas*. Para esto último, debe indagarles sobre lo que están diciendo.*
4	No hay texto guía para el curso. Este se sustituye con los documentos *notas de clase*.
5	Cada grupo de estudiantes (de tres personas) tienen tres tareas a lo largo del curso: a) Resolver los problemas propuesto en clase; b) hacer el documento *notas de clase* cuando les corresponde, y c) hacer las tareas extraclase.
5	Especificación: *El estudiante tiene la responsabilidad de realizar procesos matemáticos como intuir, explorar, conjeturar, visualizar e interpretar representaciones, inventarse estrategias, validar con argumentos formales, usar objetos primarios (proposiciones y definiciones), comunicar correctamente argumentos, usar correctamente EGD, etc. cuando aborda un problema de clase o de la tarea.*
5b.1	Especificación Normas Notas de Clase: Se debe emplear la simbología geométrica y el lenguaje matemático escrito correspondiente; en tal sentido los estudiantes deben usar la herramienta Editor de Ecuaciones del software Word para la elaboración del documento *notas de clase*.
5b.2	Especificación Normas Notas de Clase: Los estudiantes deben usar EGD (Cabri, GeoGebra) para representar las figuras geométricas involucradas en las *notas de clase*.
5b.3	Especificación Normas Notas de Clase: El documento *Notas de Clase* debe contener lo siguiente: Respuestas a la preguntas o problemas planteados; qué se aprendió de geometría (*i.e.*, objetos primarios como teoremas, definiciones, postulados); qué se aprendió de Geometría Dinámica (*i.e.*, herramientas del EGD, procedimientos de construcción); reporte de lo discutido, acuerdos a los que se llegaron, las normas instauradas.
5b.4	Especificación Normas Notas de Clase: El medio para compartir los documentos *Notas de Clase* son el correo electrónico y una carpeta virtual (en Dropbox).
5b.5	Especificación Normas Notas de Clase: La profesora debe corregir los documentos *Notas de Clase* y poner el documento editado en la carpeta virtual. Por medio del correo electrónico Debe enviar a los estudiantes autores de tal documento, los comentarios producto de su revisión y la calificación correspondiente.
6	Interesa conformar un sistema teórico para apoyar ideas surgidas de la resolución de problemas.
7	Mediante la resolución de problemas se introducen elementos (objetos primarios) al sistema teórico.
8	La profesora es responsable de proponer problemas a los estudiantes.
8	Especificación: La profesora debe proponer a la clase cosas (problemas) que realmente se puedan discutir con los estudiantes.
9	Todo se debe argumentar empleando objetos primarios del sistema teórico.
10	La rigurosidad en la elaboración de la prueba es variable.
11	Se deben estudiar los contenidos propuestos para cada curso según lo establecido en los programas respectivos.
12	Los procesos matemáticos se llevarán a cabo con el apoyo de EGD (GeoGebra y Cabri 2D y 3D).

Tabla 36. Cronología y clasificación de normas *Presentación del curso*

Coerción	**P**	x	x	x				x	x		x				x									
Origen	**S**																							
	A												x										x	x
	C				x																			
	M						x		x		x	x								x	x			
	D	x							x			x			x									
Faceta	**Fe**						x		x		x	x												
	Fc	x				x		x	x	x				x	x		x		x					
	Fa		x	x						x									x					
	Fi		x	x												x		x		x	x	x	x	x
	Fm				x										x					x	x	x	x	x
	Fec												x										x	x
Tipología TII	**Ni**		x			x		x																
	Nle		x			x		x						x			x	x		x	x	x	x	
	Nlp			x						x						x	x							x
	Nt																							
Normas		1	2	3	4	5	6	5	7	8	9	10	11	5	12	3	8	2	1	5b.1	5b.2	5b.3	5b.4	5b.5

A partir de los compendió expresados en las Tablas anteriores es posible hacer los siguientes comentarios: En primera instancia, vale indicar que las normas expuestas fueron identificadas a partir del discurso de la profesora y no en las prácticas mismas de estudiantes y profesora en las sesiones de clase. Así las cosas, tales normas se pueden entender como las reglas de juego o principios que la profesora manifiesta como un mecanismo para regular las futuras prácticas que ella pretende poner en juego a lo largo del curso. Desde un punto de vista investigativo, las normas citadas se pueden entender como unos lentes específicos a través de los cuales se pretende observar la realidad de la clase, con el fin de precisar si tales normas están presentes en dicha realidad y cómo estas son concretadas en ella. En otras palabras, tal listado de normas se tendrá como un referente con el cual intervenir las situaciones instruccionales que tomen lugar en el curso o comparar el sistema de normas que regulan tales situaciones.

Dado que no se tienen contextos específicos (durante las situaciones instruccionales) para precisar los momentos que permiten caracterizar o enunciar tal o cual norma (*e.g.*, cuándo se prueba, cuándo se prueba con todo detalle; en qué momento -etapa- de la resolución de problemas se introducen objetos primarios; etc.), las normas no fueron categorizadas según su *temporalidad* (categoría TII). Quizá, el único momento concreto que dio lugar a la explicitación de ciertas normas (5b.1-5b.5) fue aquel concerniente a la elaboran de los documentos *Notas de Clase*. El resto se refieren a normas que regulan la clase en general. En lo que respecta al *origen* nótese que no todas las normas fueron clasificadas con alguna de sus categorías. Esto porque se tomó la decisión de destacar el origen sólo cuando este es completamente claro para la norma, en este caso particular, si es didáctico, matemático o administrativo.

Para finalizar, cinco observaciones muy importantes de este conjunto de normas deben ser destacadas:

En primer lugar, es interesante ver cómo, en total coherencia con características de la innovación en el aula (interacción en el aula -conversación instruccional y matemática- y resolución de problemas con EGD), fueron identificados seis *principios* que guían el curso y que están fundamentados en las características de la innovación en el aula: Normas 1, 2, 3, 5, 7, 9 y 12. Tales normas son principios porque se infundan en presupuestos sobre el aprendizaje (por resolución de problema, en construcción social, mediante la participación en prácticas de la comunidad de la clase y con el apoyo de EGD) y a priori, su grado de cumplimiento es variable: qué tanto se participa, qué tanto se interpreta, qué implica resolver un problema, cómo y para qué se usa un EGD, sólo se instalan objetos si estos intervienen en la resolución de un problema, sólo se argumenta usando objetos del sistema teórico, etc.

En conexión con lo anterior, gran parte de las normas enunciadas dependen de tres de dichos principios en particular, a saber: la Norma 1 (el aprendizaje es una construcción social -de origen didáctico-), la Norma 7 (mediante la resolución de problemas se introducen objetos primarios al sistema teórico) y la Norma 9 (todo se debe argumentar empleando objetos primarios del sistema teórico -de origen matemático-). Por ejemplo, en correspondencia con la Norma 1 se indica que la participación de los estudiantes es una manera indispensable para que evolucionen sus comprensiones (complemento Norma 1); en tal sentido, que ellos deben comunicar sus ideas, hacer preguntas (Norma 2) y hacerse partícipes con la realización de tareas específicas (Norma 5), y que la profesora debe escuchar e interpretar sus ideas (Norma 3) indagando con frecuencia sobre lo que están diciendo o pensando (complemento Norma 3). En correspondencia con la Norma 7 se precisan el propósito general de tal norma (soportar las ideas surgidas en la resolución de problemas -Norma 6-), los procesos matemáticos que tal práctica moviliza (especificación Norma 5) y algunas responsabilidades de parte de la profesora (especificación Normas 8). En correspondencia con Norma 9 se indican la Norma 6, la Norma 5 en parte (los estudiantes deben validar con argumento formales) y la Norma 10 (la rigurosidad de con la cual se elabora una prueba es variable).

En segundo lugar, y como consecuencia de lo dicho en el párrafo anterior, vale destacar que las categorías de normas propuestas por la EOS con mayor frecuencia, y con cierta correlación, son aquellas relativas a lo interaccional, lo mediacional y lo cognitivo. Por su puesto, en correspondencia con la Norma 1 -que tiene faceta cognitiva esencialmente-, otras que dependen de ella aluden también a asuntos *cognitivos* por cuanto precisan, por ejemplo, maneras en que evolucionan la comprensión de los estudiantes (complemento Norma 1), responsabilidades mediante las cuales se favorece el aprendizaje (de estudiantes: Normas 5, 12; de profesora: Norma 8) y qué conocimientos se pueden adquirir a cambio de tales responsabilidades (Normas 7). También como consecuencia de la Norma 1, varias de las normas enunciadas por la profesora regulan la *interacción* en el aula en términos de precisar cuándo y cómo deben los estudiantes y profesora hacerse partícipes en las actividades de clase *(e.g.*, Normas 2, 3, 5b.1-5b.5). Ahora bien, dado que el factor comunicativo es tan importante para el desarrollo del curso, las formas en que ello se hace implican normas que lo regulen. En correspondencia con esto, la profesora dedica gran parte de su discurso a precisar los *medios* a través de los cuales se comunican las ideas. Por ejemplo, indica los documentos *notas de clase* como medio para comunicar lo sucedido en la clase (Norma 4) y específicamente, menciona las características especiales que estos deben tener (Normas 5b.1-5b.5). Así mismo, la profesora alude a un medio que favorecen la producción de ideas, indicando a los EGD como un artefacto que apoya los procesos matemáticos que pueden tomar lugar en la resolución de problemas (Norma 12). Como se puede observar, las normas de faceta cognitiva e interaccional se correlacionan en tanto tienen su origen en la Norma 1. Por su parte, parte de las normas de faceta interaccional y mediacional se correlacionan (*e.g.*, Normas 5b.1-5b.5) ya que se refieren a los medios que se utilizan para comunicar ideas.

En tercer lugar, llama la atención cómo normas que en principio se expresan de una manera general se van concretando en otras más específicas, a lo largo del discurso de la profesora; a su vez y en otro sentido, cómo algunas normas con cierto grado de especificidad cobran sentido con la explicitación posterior de una norma de carácter un poco más general. Ejemplos concretos del primer caso son cada uno de los conjuntos de Normas resaltados con un sombreado en la Tabla 35; en cada conjunto, la primera norma se especifica en las subsiguientes. Un ejemplo del segundo caso se tiene con el conjunto de Normas {5, 6, 7, 9}; en él cobra sentido el interés porque los estudiantes resuelvan problemas (Norma 5) pues se tiene el interés introducir objetos primarios mediante la resolución de problemas (Norma 6), y con ello, el propósito de conformar un sistema teórico con el cual soportar las ideas que surgen en dicha práctica (Normas 7); a su vez, esta última norma cobra sentido dado el interés general del curso consistente en que todo se debe argumentar empleado los objetos primarios del sistema teórico conformado (Norma 9).

Con el ánimo sintetizar las tres ideas planteadas hasta el momento, la Figura 32 esquematiza el subsistema normativo relativos a los asuntos tratados: dependencias de las tres normas pilares, facetas diferentes para conjuntos de normas y especificación/generalización de normas a lo largo del tiempo.

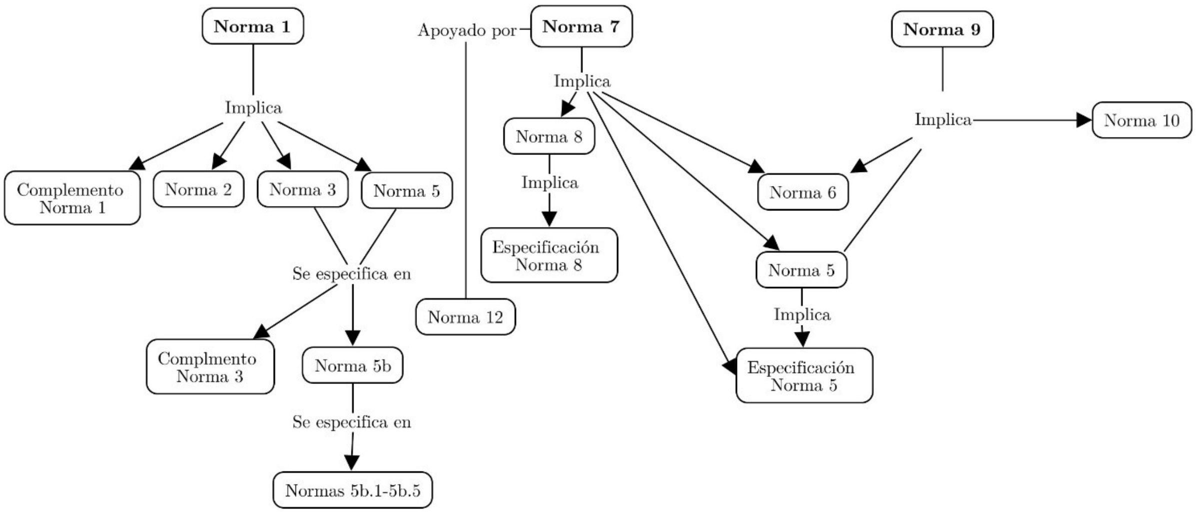


Figura 32. Esquema correlacional Normas Presentación del Curso

En cuarto lugar, siguiendo con la coherencia citada respecto a la innovación en el aula y teniendo en cuenta lo presentado hasta ahora, es interesante resaltar alguna especificidad en la división de labores -o determinación de responsabilidades- entre la profesora y estudiantes. Sin bien son más las responsabilidades de los estudiantes (indicadas en 10 normas) con respecto a las de la profesora (indicadas en 5 normas), es el contenido de estas últimas las que merecen un comentario especial. La profesora manifiesta que una de sus labores es indagar a los estudiantes (complemento Norma 3) lo cual se puede entender como una responsabilidad relativamente normal para un profesor que se enmarca en un enfoque sociocultural. Lo interesante es la explicitación que ella del propósito de tal indagación pues este trasciende de lo usual (*e.g.*, conocer soluciones a problemas); su propósito real es poder interpretar las producciones de los estudiantes, esto es, tener una idea de porqué actúan como actúan y, en consecuencia, tener insumos para reorientar (precisar o ajustar) sus significados de forma tal que se acerquen a los institucionales. De otro lado, ella no solo se atribuye la responsabilidad de proponer problemas (Norma 8); dice que estos deben estar al alcance de los estudiantes, en otras palabras, tener la condición de que puedan ser realmente discutidos con los estudiantes (especificación Norma 8). Ambos casos, tal como lo manifiesta la profesora en el subfragmento 22, implica una preparación y disposición "especial" de parte de la profesora (que, entre otras cosas, los estudiantes deben exigir): la habilidad de escuchar a todos los estudiantes, de generar un ambiente en el que todos se hagan partícipes, de diseñar problemas con la condición ya dicha, y estudiar las producciones de los estudiantes.

4.2 BLOQUE DE PROBLEMAS N° 1: INSTALACIÓN DE CIRCUNFERENCIA

Justo después de hacer la presentación del curso, la profesora comienza con la implementación del primer bloque de problemas. Este consta de un Problema Principal, dos Auxiliares y dos propuestos mediante las Tareas Extraclase 1 y 2. Se desarrolla durante las cuatro primeras sesiones de clase. La temática que se aborda gira en torno a la congruencia de segmentos y la circunferencia en el Dominio de la Geometría Plana. La Tabla 37 contiene los enunciados de los problemas, su objetivo y la sesión de clase en la que estos fueron abordados.

Tabla 37. Problemas Bloque N° 1

Dominio temático: Geometría Plana	**Temas:** Segmentos Congruentes; Circunferencia	
Problema Principal 1 [PP1]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Construir dos segmentos congruentes.	Generar de la necesidad de introducir objetos primarios en torno a la circunferencia: su definición y teorema de existencia.	1,2
Problema Auxiliar 1.1 [PA1.1]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Quiero que ahora definamos circunferencia. ¿Quién se acuerda, quién quiere promover una primera definición de circunferencia?	Precisar las condiciones que permiten definir circunferencia dadas por los estudiantes, contrastándolas con el procedimiento de construcción exigido por el software Cabri 3D cuando se emplea la herramienta circunferencia.	3
Problema Auxiliar 1.2 [PA1.2]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Ahora nos toca pensar en cómo muestro que realmente existe una circunferencia en nuestro sistema teórico, es decir, usando los elementos que tenemos hasta ahora, ¿es posible?	Demostrar e instaurar el Teorema de la existencia de una circunferencia	3
Tarea Extraclase 1 [PE1]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Los triángulos se clasifican según relaciones entre los lados o de acuerdo con propiedades de los ángulos. Demuestre, si es posible, que existen triángulos de cada tipo, dentro de cada clasificación. Si no es posible explique por qué.	Usar el objeto circunferencia, entre otros, como herramienta para construir y justificar la existencia de los triángulos, particularmente isósceles y equiláteros.	2, 4

Tarea Extraclase 2 [PE2]	Objetivo	Sesión N°
En clase demostramos que las circunferencias tienen infinitos puntos. Para ello, ¿es realmente necesario usar los rayos opuestos? Justifique su respuesta.	Aclarar la diferencia entre la infinitud de puntos que puede tener un objeto determinado y la totalidad de puntos que conforma a dicho objeto.	4

Es importante precisar que, de este bloque, la actividad de clase que gira a todos los problemas es analizada a excepción de lo correspondiente PE1. La razón de su exclusión se fundamenta en el hecho de que las propuestas de solución por parte de los estudiantes no emplean el objeto Circunferencia (central en el bloque) sino el Teorema Localización de Puntos[41], familiar para los estudiantes en tanto proposición que vienen usando con mucha frecuencia desde el curso previo. En lo que sigue, se presenta el análisis didáctico en sentido estricto.

4.2.1 Análisis relativo a PP1: construir dos segmentos congruentes

Justo después de hacer la presentación del curso, la profesora propone el PP1 (construir dos segmentos congruentes) cuya tipología es de *búsqueda de antecedente* (qué condiciones implican necesariamente que dos segmentos sean congruentes). Dos trayectorias didácticas fueron identificadas al respecto, una que se corresponde con la actividad autónoma de un grupo de estudiantes al abordar el PP1 y otra que se corresponde con la puesta en común de las producciones de los estudiantes orquestada por la profesora.

Antes de que los estudiantes abordasen tal problema por grupos, la profesora explicita los componentes del reporte por escrito que ellos deben entregar:

1. Ustedes van a formar un reporte de lo que hicieron; qué va a decir el reporte: Primero, el problema; segundo, la construcción de situación descrita en el problema. [Escribe en el tablero:
   1. Problema
   2. Construcción de situación descrita en el problema].

   Dos partes tiene, la construcción robusta. ¿Qué quiere decir robusta? ¿Alguien sabe qué quiere decir robusta? [Estudiantes no responden].
2. Es la que ustedes construyen con las herramientas. [...] Con el arrastre de los puntos la relación no debe modificarse.
3. No me tienen que escribir toda una carta, sino usamos el lenguaje geométrico.

[41] En el Anexo 5. Sistema Teórico se presentan los enunciados de todos los objetos primarios (definiciones, postulados y teoremas) que a los que se hace referencia en cada Bloque de Problemas analizado.

4. Pero también hacemos la parte blanda, y dicen "yo arrastré hasta que se cumpliera tal propiedad" [...]. Entonces hay dos tipos de construcción: la robusta que usa las herramientas del software y que entonces no van a cambiar estas propiedades bajo el arrastre. Y las blandas que son las que yo pongo porque me provocó hacer tal propiedad. [Va escribiendo en el tablero:

   1. Problema

   2. Construcción de situación descrita en el problema

   La parte robusta

   La parte blanda].

5. Tercero. Exploración. Cómo fue la exploración: arrastré, construí.

6. [...] Entonces, segundo, qué construí, y cómo. O sea, quiero decir, fue una construcción robusta o una construcción blanda; qué arrastré y para qué. Y tercero, para qué, por qué lo hice, qué estaba buscando con el arrastre. [Escribe en el tablero lo siguiente, complementando lo escrito antes:

   3. Exploración

   Arrastré qué

   Para qué].

7. Después conjetura. Recuerden que la conjetura se reporta con un formato muy específico, ¿cierto? En matemáticas las conjeturas se reportan como afirmaciones condicionales, si algo entonces algo. Aquí [señala el primer "algo"] generalmente ponemos lo que hicimos en el dos y en el tres [se refiere a los numerales 2 y 3] porque ahí fue donde pusimos condiciones de la situación; unas me las dieron en el problema, otras yo las puse. Y aquí [segundo "algo"] lo que descubrimos. Entonces aquí [señala primer algo] lo que construí, ya sea para representar la situación o para explorar, y acá [señala segundo algo], lo que descubrí. [Escribe en el tablero lo siguiente, complementando lo escrito antes:

   4. Conjetura

   Si ______________________________, entonces _________________________

   Construí: Lo representado, lo explorado Descubrí

8. Y finalmente, si es el caso, la justificación. La justificación depende, puede ser informal, un argumento informal, o puede ser una demostración [prueba]. Un intento de justificación, porque a veces nos hemos dado cuenta de que no siempre tenemos todo lo que necesitamos para poder justificar, pero nuestro primer intento. [Queda escrito en el tablero:

   1. Problema

   2. Construcción de situación descrita en el problema

   La parte robusta

   La parte blanda

   3. Exploración

   Arrastré qué, tomé medidas de,

   Para qué

   4. Conjetura

   Si ______________________________, entonces _________________________

   Construí: Lo representado, lo explorado Descubrí

   5. Justificación].

Varios asuntos de los verbalizados por la profesora en este fragmento pueden ser interpretados como normativos. No sólo se precisa la estructura del reporte escrito que deben realizar los estudiantes cuando resuelven un problema (que se puede entender como el procedimiento que lleva a la solución a un problema en esta clase), sino que se aluden a asuntos específicos que deben ser tenidos en cuenta para llenar de contenido tal estructura, a saber: tipos de construcción en un EGD, la estructura de una conjetura y clases de argumento. La Tabla 38 exponen las normas asociadas a cada subfragmento con el código correspondiente.

Tabla 38. Conjunto de normas *Reporte escrito solución a problemas*

	Norma	**Fragmento asociado**	**Codificación**
13a	Se debe hacer un reporte escrito de lo hecho para solucionar el problema. Tal reporte se compone de los siguientes elementos: a) construcción (parte robusta y parte blanda)	1, 4, 5, 7, 8	**F~Fm; F~Fi; F~Fc; Nle:** Norma que se formula siguiendo las Normas 5ac y 5ac1. Se establecen las características que debe tener el documento escrito por medio del cual los estudiantes comunican su producción a la profesora. Implícitamente, se mencionan las fases de solución de un problema.
13b	b) exploración		
13c	c) conjetura		
13d	d) justificación de la conjetura.		
12a	Especificación: El EGD se emplea para representar (construir robusta o blandamente) los objetos inmersos en el enunciado del problema. Si la construcción es robusta, implica poner en juego propiedades del objeto para desarrollar el procedimiento respectivo.	1, 2, 4, 6	**M; F~Fm; F~Fc; O~D:** Se especifican usos de los EGD (Norma 12) que apoyan procesos matemáticos y favorecen el aprendizaje.
12b	Especificación: El EGD se emplea para explorar (medir, arrastrar) la situación involucrada en el problema con el fin de "descubrir" propiedades.	5, 6	
14	El enunciado de una conjetura es una proposición condicional si… entonces… El antecedente de una conjetura se corresponde con lo construido en el EGD; su consecuente se corresponde con lo descubierto en el EGD.	7	**M; F~Fe; O~M; F~Fm; O~D:** Basándose en sus conocimientos sobre las matemáticas, la profesora se refiere a una característica de un tipo de objeto primario: proposición-conjetura. Tiene una faceta mediacional y didáctica puesto que se precisa cómo establecer el contenido de una conjetura a partir de acciones llevadas a cabo con el apoyo EGD

9a	La justificación puede ser un argumento informal o una prueba.	8	**P; F~Fe:** La profesora flexibiliza la Noma 9 pues destaca que un argumento puede ser informal (pues no siempre se tienen todos los objetos en el sistema teórico del curso. No se caracteriza lo que contiene un argumento informal).

Tal como se presenta en Tabla 38, a lo largo de su verbalización la profesora hace alusión a las fases que llevaría a la solución de un problema (faceta cognitiva), y en ese marco, los componentes que constituyen el medio escrito (faceta mediacional) por el cual los estudiantes comunican (faceta interaccional) su producción (Norma 13). Lo interesante es que, de manera paralela a tal explicitación, va haciendo claridades sobre el contenido de cada uno de tales componentes. En ese contexto, (i) algunas normas indicadas durante la presentación del curso son retomadas con el ánimo de ser especificadas; y (ii) son establecidas ciertas metanormas.

En lo que respecta al ítem i, las Normas 9 y 12 aparecen de nuevo. La primera se retoma por la profesora con el fin de ser flexibilizada; esto es, mediante el subfragmento 8 ella legitima el uso de argumentos informales indicando que no siempre se tiene todo (*i.e.*, objetos del sistema teórico) para justificar (soportar) la conjetura-solución del problema. La flexibilidad de la Norma 9 indicada mediante la Norma 9a y el hecho de que ambas traten sobre un objeto primario (argumento) hace que esta última se catalogue como un *principio* de *faceta epistémica*. Es importante indicar que la profesora no precisa las características de un argumento informal en ese momento. En consulta realizada a la profesora (13 de abril de 2018) se le consultó al respecto; su respuesta fue:

> En el contexto de la clase, quiere decir que no me tienen que dar todos los pasos, digamos que solo los núcleos, ni me tienen que dar las garantías correspondientes. Es decir, es más un recuento de ideas principales ordenadas que se pueden convertir en insumo para una demostración detallada y completa. La idea es que no usen elementos teóricos no vistos en clase, pero sí pueden decir que hace falta ese elemento y que, si lo tuvieran, sucederían ciertas cosas.

Por su lado, la Norma 12 se retoma para ser especificada en término de las Normas 12a y 12b; el objetivo de tal concreción consiste en indicar usos precisos de EGD como medio (faceta mediacional) para apoyar procesos matemáticos (construir, descubrir) y, tal como citan varios estudios (*e.g.*, Laborde, 2000; Jones, Gutiérrez, &

Mariotti, 2000; Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, & Stevenson, 2012; etc.) favorecer el aprendizaje con relación a la prueba.

En lo que respecta al ítem ii, con el ánimo de precisar características de la proposición-conjetura (componente del reporte en cuestión mencionado en la Norma 13), la profesora indica cómo debe ser la estructura de dicha proposición (Norma 14) y más aún, revela el contenido de cada una de sus partes (antecedente y consecuente) en correspondencia con las acciones llevadas a cabo con el EGD. Como la Norma 14 versa *sobre* otra norma (norma 13) en substancia, es catalogada como metanorma. Dado que esta misma relación existe entre las Normas 12a y 12b con respecto a la 12, las primeras de ellas también se indican como metanorma.

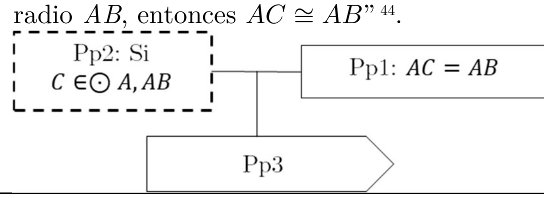
Luego de que la profesora se refiere al reporte escrito de la producción de los estudiantes, los estudiantes abordan el PP1 por 15 minutos aproximadamente. Se debe decir que, dado el enunciado del problema, se presume que la *situación instruccional* que toma lugar se corresponde con la de la *construcción de una figura*. En tal sentido, además de las normas citadas en tanto en la Tabla 35 como en la Tabla 38, se tendrán como referencia las indicadas en la Tabla 11 del Capítulo 2.

Para ilustrar la producción de los estudiantes al respecto del Problema, se toma como ejemplo la actividad matemática de uno de los grupos de estudiantes (Grupo B). Se escoge este grupo porque su solución y alguno de sus integrantes toman lugar cuando se realiza la puesta común (o conversación matemática, en términos de la innovación en el aula). Como era de esperarse, los estudiantes actúan en correspondencia con la Norma 13, esto es, intentan seguir cada uno de los pasos indicados para solucionar el problema. En este sentido, la actividad de los estudiantes se ha divido en cuatro momentos: construcción, exploración, formulación de la conjetura y justificación (soporte de la validez conjetura). Resaltamos que, en términos del EOS, dichos momentos se pueden concebir como las prácticas matemáticas (primer elemento de análisis didáctico) que llevaron a cabo los estudiantes durante su actividad; por su puesto, la relativa a la realización del reporte escrito de su producción es trasversal en toda su actividad. En lo que sigue, para facilitar la lectura y cuando se considere conveniente, adyacente a la trascripción de los fragmentos asociados a tales momentos se expone el análisis interaccional (tercer elemento) con el cual se pretende inferir las normas presentes (cuarto elemento) y los objetos primarios emergentes[42] (segundo elemento).

4.2.1.1 *Trayectoria didáctica 1: Actividad matemática sobre PP1 –Grupo B*

Momento 1. *Proceso de construcción*: Es Vanessa quien inicia el proceso de construcción; dice que se debe hacer la parte robusta de la construcción, paso a paso (Norma 13a). Toma el computador y abre el software Cabri 2D (Norma 12a). Brayan 1 toma una hoja para escribir el reporte escrito. En ese momento, tiene lugar la siguiente interacción[43]:

<table>
<tr><th colspan="3">Trascripción</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>2</td><td>Mariana:</td><td>Mmmm. Pues, una circunferencia y se toman radios.</td><td rowspan="3">Mariana propone un procedimiento (Pr1) de solución que involucra los objetos primarios Circunferencia (C1) y Radios (C2) que hasta el momento no hacen parte del sistema teórico del curso. Vanessa actúa en correspondencia con Norma 13a. Emerge una representación gráfica dinámica (L1).

De lo anterior, se puede inferir un argumento abductivo [Ab1] que lleva a establecer dicho Pr1 (Norma 9a): conocido que debe garantizar $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ (Pp1), los estudiantes producen un dato (Pr1 traducida en Pp2) pues al parecer conocen la propiedad Pp3: “Si C pertenecen a una circunferencia de centro A y radio AB, entonces $\overline{AC} \cong \overline{AB}$” [44].

</td></tr>
<tr><td></td><td>[...]</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>Vanessa:</td><td>[Representa una circunferencia y dos radios en Cabri sin poner nombre a los puntos representados (Figura 33)].

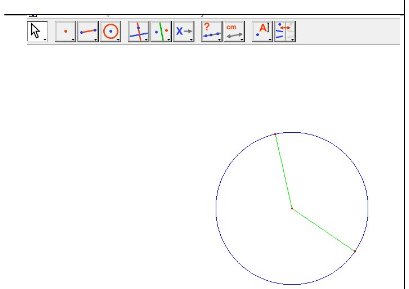
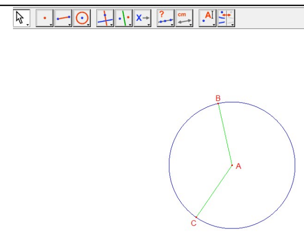



Figura 33. PP1: Representación 1 asociada a Pr1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>P:</td><td>[Al observar el computador del grupo, se dirige a toda la clase:] Oiga no se les olvide una norma</td><td>La profesora explicita la Norma 15: En las representaciones gráficas, los puntos deben ser</td></tr>
</table>

[42] Recuérdese que los se usan los códigos L, C, Pr y Pp, para indicar, respectivamente, objetos primarios Lenguaje, Concepto, Procedimiento y Proposición.

[43] Con el fin de alivianar la lectura, sólo se ponen partes de la trascripción que son claves para comprender la actividad de los estudiantes y su comportamiento en relación con las normas. Los puntos entre corchetes “[...]” indica aquellas partes de la trascripción que se suprimen.

[44] La simbología geométrica para indicar circunferencia de centro A y radio AB es $\odot A, AB$.

		importantísima en toda construcción: nombrar los puntos porque si no, cómo vamos a hablar de ellas en el reporte.	nombrados para facilitar la comunicación [F~Fm; F~Fi].
11	Vanessa:	[Verbaliza lo construido en el software. Figura 34]. Circunferencia con centro A radio AB, punto C que pertenece a la circunferencia y pues esos dos [señala los radios $\overline{AB}, \overline{AC}$] van a tener la misma medida.  Figura 34. PP1: Representación 2 asociada a Pr1	Vanessa precisa el Pr1 propuesto por Mariana: • Circunferencia con centro A radio AB • Punto C que pertenece a la circunferencia. Precisa que los radios $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ tendrán la misma medida -serán congruentes- (Pp1). Se complementa la representación gráfica dinámica (L1) según lo establecido en la **Norma 15**.
12	Mariana:	[Escribe lo dicho por Vanessa: Robusta: $\odot A$ de radio AC] ¿Por qué?	Mariana indaga ahora por la validez de la Pp3 (en correspondencia con **Norma 9**); de alguna forma pretende transformar el Ab1 en uno deductivo. Sin embargo, la respuesta de Vanessa no es satisfactoria pues lo que hace es repetir el dato sin precisar una garantía que conecte Pp2 con Pp1.
13	Vanessa:	Porque pertenece a la circunferencia, la circunferencia es esta. Pongamos acá [en el reporte escrito que está haciendo Mariana] el punto C, en la parte robusta [Queda escrito: Robusta: $\odot A$ de radio AC, $C \in \odot A$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$].	
	[...]		
14	Vanessa:	Y ahora qué ponemos en la parte blanda [del reporte de la construcción].	
15	Mariana:	Decir que C siempre pertenece a la circunferencia o algo así.	
16	Karen:	Pero es que ya está en la circunferencia, o sea…	
17	Vanessa:	Que arrastramos el punto C hasta que… Que arrastramos el punto C en la circunferencia y nos dimos cuenta de que siempre las distancias van a ser iguales.	
18	Karen:	Si, pero… eso ya… Es que eso ya… se sabe, o sea…	
19	Mariana:	Bueno sí, pero… Que tomamos la medida de ese segmento (AC) y comenzamos a arrastrar y nos dimos cuenta… que mide igual…	
20	Vanessa:	Y entonces qué se pondría en la exploración…. Pregúntele, ¿sí?	
21	Mariana:	Qué le pregunto…	
22	Vanessa:	¿Qué se hace para la construcción blanda?	
23	Mariana:	Profe una pregunta: nosotros iniciamos con, hicimos una circunferencia de centro A y radio AB, y pusimos un punto C en la circunferencia.	

24	P	Sí, eso me lo reportan ahí.
25	Vanessa:	Sí, pero en la parte blanda, ¿qué hay que hacer ahí?
26	P	No siempre hay, no siempre hay. Es sí ustedes deciden, ah, voy a arrastrar para que el radio quede de, no sé de 8 centímetros, eh… no sé, a veces uno hace construcciones blandas: arrastre para que parecieran perpendiculares…
27	Vanessa:	O sea que no siempre hay…
28	P	No, no siempre hay.
29	Vanessa:	Bueno, blanda no hay. Exploración [Se refiere a continuar con el reporte]…

Desde [16][45], las estudiantes se adentran en la parte blanda de la construcción. En consecuencia, siguen actuando en correspondencia con la **Norma 13a**. No obstante, dos razones los lleva a tener duda sobre qué colocar en el reporte, la primera más fuerte que la segunda: (i) Karen [20] parece estar incómoda con poner que el arrastre se hizo para descubrir que las medidas son iguales; vale indicar que no tomaron medidas y que en [11] Vanessa ya había dicho que los radios tienen igual medida. En resumen, estarían reportando algo que no es auténtico pues ya sabían que los radios tienen igual medida. (ii) Si reportan como construcción blanda que con el arrastre se dieron cuentan que las medidas de los radios son iguales, entonces qué ponen en la fase de exploración [19-22]. En resumen, se terminarían confundiendo las fases *construcción blanda* y *exploración*. Deciden, entonces, preguntar a la profesora sobre el asunto [22-25, 27]. La profesora, como respuesta [28-31], termina flexibilizando dicha Norma 13a indicando que hay ocasiones (esta puede ser una de ellas) en las que el proceso de solución de un problema no implica construcción blanda (especificación **Norma 13a**). Vale indicar que la profesora, más adelante [36] hace este mismo comentario dirigido a toda la clase pues son varios los grupos que tienen la misma inquietud que el Grupo B.

Momento 2. Exploración: Las estudiantes continúan con su actividad. Se adentran en la exploración, siguiendo la **Norma 13b**. Vanessa, al respecto, propone reportar que *el punto C fue arrastrado para verificar que AB y AC tienen la misma medida* [33] (complementando Pr1). Mariana complementa la idea advirtiendo que primero se debe decir *que las medidas de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ fueron tomadas* [34]. Finalmente, Mariana escribe en la hoja lo que Vanessa le va verbalizando [35]:

[45] Entre corchetes se pondrá el número de la intervención. Ello facilitará el seguimiento de la lectura.

> Exploración: Tomamos las medidas AC y AB con la herramienta distancia para saber la medida de los segmentos anteriormente construidos y AC=AB. Arrastramos el punto C para verificar que siempre funciona.

En este fragmento se evidencia que para el grupo de estudiantes el abordaje del problema no les parece estar informando algo nuevo. Esto, porque aluden a un arrastre para verificar Pp4 y no para descubrir tal proposición como sugieren en [19, 21]. Con esto, se indica un viraje en su proceder: antes, en la fase de construcción blanda [19, 21], los estudiantes querían reportar que su arrastre tenía la función de descubrir; ahora, atendiendo a la realidad, terminan reportando que su arrastre es para verificar (si hubiese sucedido lo primero, un argumento inductivo hubiera tenido lugar). Este viraje parece estar guiado por la **Norma 2** según la cual los estudiantes deben reportar sus ideas (su producción real) cuando abordan problemas. Esto insinúa a su vez que hicieron, en acto, un ajuste a la Norma 12b: *una exploración también puede servir para verificar, no necesariamente para descubrir* (complemento **Norma 12b**).

Momento 3. *Formulación de la conjetura*: La siguiente trascripción presenta la interacción que tienen los estudiantes para formular la conjetura (**Norma 13c**):

Trascripción			Análisis
37	Mariana:	La conjetura: A dónde queremos llegar, o sea queremos llegar a que los segmentos son congruentes… Dado el segmento AB…	Mariana intenta actuar en correspondencia con la **Norma 14**. No obstante, un análisis fino deja notar que él le hace un ajuste (complemento **Norma 14**): para determinar el consecuente de la conjetura se precisa "a dónde se quiere llegar (*i.e.*, Pp1)" y no lo que "descubrieron". Esto se corresponde con el objetivo verificador del arrastre realizado en la exploración (complemento **Norma 12b**).
38	Vanessa:	Si dada una circunferencia con radio AB, sí C pertenece a la circunferencia dada con radio AB entonces AC es igual a AB.	La estudiante actúa en correspondencia a la **Norma 14**. Formula la conjetura siguiendo el formato *si… entonces…* Como era de esperarse, la conjetura es Pp3.
39	Mariana:	Dado el segmento AB…	Ambas estudiantes actúan en correspondencia con la **Norma 14** pues en el antecedente de la conjetura ponen lo que construyen en el EGD, es decir, Pp2.
40	Vanessa:	No, dada la circunferencia con radio AB…	
41	Mariana:	[Escribe la conjetura dicha por Vanessa: sí C pertenece a $\odot A$ dada con radio AB entonces $\overline{AC} \cong \overline{AB}$].	

Momento 4. *Justificación* (soporte de la conjetura): En cumplimiento de la **Norma 13d**, los estudiantes intentan elaborar un argumento que valide su conjetura. No obstante, no se adentran en el proceso de elaboración de una prueba.

Trascripción			Análisis
42	Karen:	Justificar qué si eso ya lo sabemos [Lo dice algo desconcertada].	Se ratifica que para los estudiantes el problema no les ha permitido descubrir algo nuevo: para Karen la conjetura Pp2 es conocida [42]; de hecho, Mariana precisa [45] la definición de circunferencia (C1). Ella sugiere [43] que al no estar el concepto de circunferencia (C1) en el sistema teórico, no es posible hacer la justificación (actúa en correspondencia con la **Norma 9**).
43	Mariana:	Pero usamos circunferencia y no la tenemos [dentro del sistema teórico del curso].	
44	Vanessa:	Y cuál es su definición…	
45	Mariana:	Que todos los puntos equidistan de un punto…	
46	Vanessa:	Preguntémosle.	Producto de lo dicho antes, deben indagarle a la profesora sobre cómo proceder para no violar las Normas 9 y 13d (en lo que respecta a que se debe justificar la conjetura).
47	Karen:	¿Qué?	
48	Vanessa:	Que si se puede utilizar la circunferencia, que como debemos justificar o qué…	
49	Karen:	[Llama la profesora:] Profe	Se resalta un asunto muy interesante. Ante el cuestionamiento de Karen [51], la profesora legitima el uso del objeto circunferencia (C1) en el proceso de construcción. En términos de la TII, se sugiere una Metanorma de Temporalidad (**Norma 16**): Es legítimo usar un objeto en el proceso de construcción así este no haga parte del sistema teórico del curso. (Metanorma en tanto se refiere a la legitimidad del uso de un objeto).
50	P:	[Se acerca al grupo]	
51	Karen:	Lo que pasa es que nosotros construimos los segmentos por medio de una circunferencia, pero en plana no vimos nada de circunferencia.	
52	P:	Ah no, ustedes hagan lo que se les ocurra ahorita, después miramos a ver…	
53	Vanessa:	Para la justificación	La profesora actúa en concordancia con la **Norma 9a**. Esto es, se puede hacer una justificación informal dado que no se cuenta con C1 en el sistema teórico del curso. Con esto último, la profesora sugiere otra Metanorma de Temporalidad (**Norma 17**): En la prueba (validación teórica) de una conjetura, no se pueden usar objetos que no hagan parte del sistema teórico del curso. (Metanorma en tanto se refiere a la validez de un argumento).
54	P:	Aaaah, bueno entonces tienen que hacer la justificación pues hasta donde puedan. Pues ustedes dicen: aquí nos varamos porque… ¿sí? [Se retira del grupo]	
	[…]		
60	Vanessa:	No, pues no sé…. La profesora acabó de decir que no se puede realizar la justificación debido a que en el curso de geometría plana no dice nada de la circunferencia, ¿no?	
61	Mariana:	[Escribe: como usamos circunferencia, no se tiene elementos teóricos para justificar] Dejémoslo así.	

4.2.1.2 *Síntesis y breves comentarios: Trayectoria didáctica 1*

En concordancia con los presupuestos metodológicos, lo anterior ilustra perfectamente cómo el tercer elemento del análisis didáctico (*análisis de trayectoria e interacciones*) es el eje articulador de los demás elementos. Las *prácticas*, *normas* y *objetos primarios* se van identificando a la vez que se analizan las interacciones de los estudiantes entre sí y con el EGD. Cada uno de los *momentos* descritos permite identificar las *prácticas* generales llevadas a cabo por los estudiantes en el marco de la solución de PP1; esto es, hicieron una construcción robusta (circunferencia de centro A con dos radios $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$) y una exploración (arrastre ligado[46] de C y B) para verificar que tales radios son congruentes; en el marco de la exploración, formularon una conjetura y elaboraron un argumento para validarla que no pusieron en el reporte entregado a la profesora. Cada práctica es consecuencia o está regulada por normas específicas con lo cual se identificaron las *situaciones instruccionales* correspondientes (Tabla 39); vale indicar que la Norma 2 parece permear todo el trabajo de las estudiantes. Los complementos o especificaciones de las normas ya existentes se presentan en negrilla en dicha Tabla. No hubo ocasión de la *situación de elaboración de prueba* puesto que los estudiantes renunciaron a realizarla como consecuencia de la Norma 17. No obstante, se citan normas que potencialmente pueden aparecer en una situación tal durante las siguientes trayectorias (ver Tabla 41).

[46] Varios tipos de arrastre pueden ser identificados en la actividad de los estudiantes (Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002): *arrastre libre*, consistente en mover los puntos base de la construcción aleatoriamente; *arrastre ligado* (o limitado), consistente en mover puntos solo sobre el objeto al que pertenece; *arrastre guiado*, consistente en mover los puntos base de la representación para darle una forma determinada; *arrastre de lugar ficticio*, consistente en mover un punto base para que el dibujo conserve una propiedad descubierta o deseada (el punto que se mueve sigue un camino sin que los usuarios se den cuenta de ello); *arrastre mantenido* (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010), consistente en mover un punto base para que el dibujo conserve una propiedad descubierta o deseada (el punto que se mueve sigue un camino que los usuarios perciben y que al poner traza al punto evidencian).

Tabla 39. PP1-Grupo B: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

<table>
<tr><th>Prácticas</th><th colspan="2">Normas asociadas</th><th>Situación Instruccional asociada</th></tr>
<tr><td>Realización de una construcción robusta en EGD asociada a PP1.</td><td>13a, 12a, 15, 16, 9a</td><td rowspan="4">2, 5b.1</td><td>Construcción de una Figura</td></tr>
<tr><td>Realización de una exploración en EGD para verificar por medio de un arrastre ligado asociado a PP1</td><td>13b, 12b</td><td rowspan="2">Exploración de una figura</td></tr>
<tr><td>Formulación de una conjetura asociada a PP1</td><td>13c, 14</td></tr>
<tr><td>Discusión sobre posible justificación de conjetura asociada a PP1</td><td>13d, 9, 17, 16</td><td>Elaboración de Prueba (no hubo prueba)</td></tr>
</table>

Varios *objetos primarios* emergen de las prácticas descritas. A lo largo de su actividad, los estudiantes hicieron un reporte escrito [12, 13, 35, 41] en el cual emplearon simbología geométrica (L2) –Complemento **Norma 5b.1**–. Los conceptos protagonistas fueron *circunferencia* (C1) y *radio* (C2) puesto que intervinieron en el procedimiento de construcción (Pr1) en el EGD que les condujo a solucionar el problema; en ese marco hicieron una representación gráfica dinámica (L1). Para precisar Pr1, un argumento abductivo (Ab1) fue producido por Mariana [2]. Como aserción empleó la propiedad exigida en el enunciado del problema y que verificaron en la exploración (Pp1); como dato una proposición asociada al procedimiento de construcción (Pp2); como garantía una proposición que luego enunciaron como conjetura (Pp3) y que al parecer ya conocían, pero cuya validez teórica no se había estudiado en el curso. La producción de tal argumento ratifica la correspondencia entre el tipo de problema *búsqueda de antecedente* con la producción de un argumento abductivo (Molina & Samper, 2018). Aunque hubo intentos para que dicho argumento se transformara en un deductivo, en otras palabras, se proveyera una prueba de Pp3 [12, 13, 42-45], ello no se cristalizó producto de la Norma 17.

La Figura 35 muestra la configuración de objetos (cognitiva) emergente de la práctica del Grupo B asociada al PP1. En ella se expone cómo el Ab1 articula otros objetos primarios.

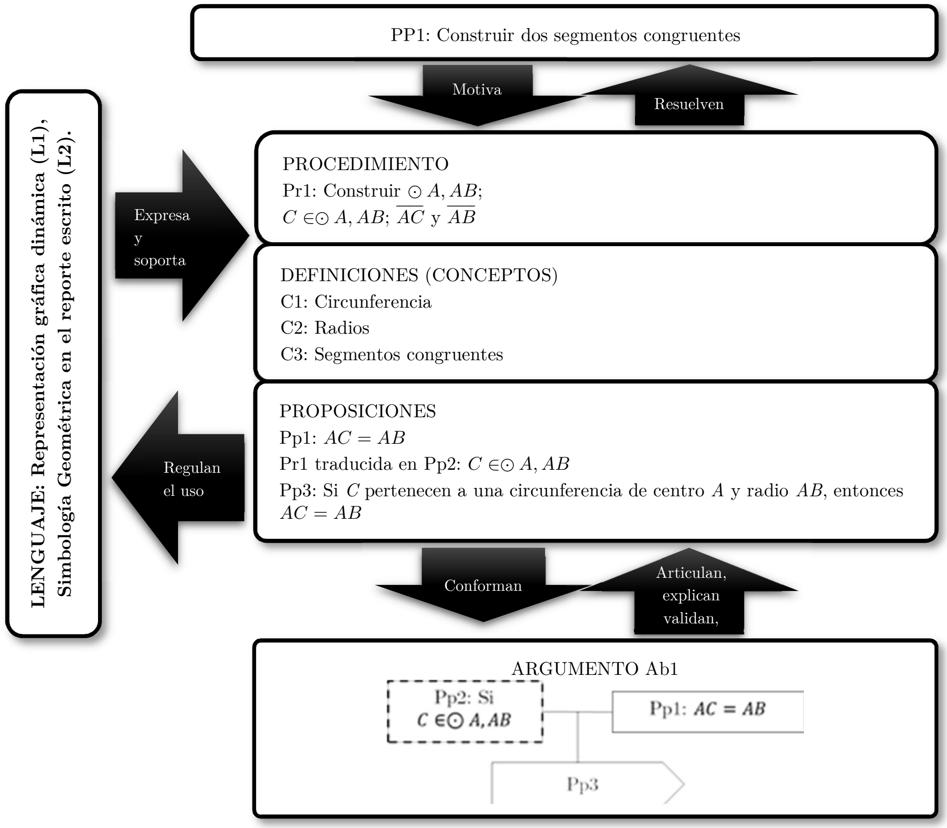


Figura 35. Configuración ontosemiótica cognitiva relativa a Trayectoria 1: PP1 – Grupo B

La emergencia de los objetos citados también son consecuencia de normas que regulan las prácticas de los cuales emergen. La Tabla 40 expone las normas que posibilita la aparición de objetos. Es importante indicar que las definiciones, las proposiciones (teoremas y postulados), los argumentos, etc., son en sí mismos catalogados como normas epistémicas por el EOS (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009); a menos que sea muy importante, esta manera de interpretar a los objetos no será tenida en cuenta en este estudio para los análisis.

Tabla 40. PP1-Grupo B: Objetos primarios ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Objetos	**Normas**	**Situación Instruccional**
L1	15	Construcción de una Figura; Exploración de una figura
L2, Pr1; Circunferencia (C1), radio (C2)	12a, 16	Construcción de una Figura
Ab1	9a	
Congruencia de segmentos (C3)	12b	Exploración de una figura
Pp3	14	
Pp2, Pp1	14, 12b	

Con el fin de sintetizar las normas que regularon la *trayectoria didáctica* 1 relativa a la actividad del Grupo B cuando abordaron el PP1, se presenta tanto la Tabla 41 como la Tabla 42. La primera presenta el enunciado de cada una de las normas emergentes (nuevas o complementos de las ya existentes) presentes en dicha trayectoria. La segunda dispone cronológicamente la aparición de las situaciones instruccionales, objetos primarios y normas a lo largo de la trayectoria explicitado la codificación para cada norma y la frecuencia de normas asociado a cada código.

Tabla 41. PP1-Grupo B: Compendio normas *trayectoria didáctica* 1

Norma	**Enunciado de la Norma**
5b.1	Complemento: Se debe emplear la simbología geométrica y el lenguaje matemático escrito correspondiente *siempre que se haga un reporte escrito* (*no solo en el documento "notas de clase"*).
12b	Complemento: El EGD se emplea para explorar la situación involucrada en el problema sirve *para verificar* o para descubrir (*no únicamente para descubrir*).
13a	Especificación: El escrito en el que se reporta la solución a un problema se compone de la construcción en EGD (parte robusta y parte blanda). *Vale indicar que, en la resolución de un problema, la construcción en EGD asociada no necesariamente tiene una parte blanda.*
14	Complemento: El enunciado de una conjetura es una proposición condicional si… entonces… Un indicador para determinar el consecuente de la conjetura *es precisar "a dónde se quiere llegar", no necesariamente lo que se "descubrió" en EGD.*
15	Nueva: En las representaciones gráficas, los puntos deben ser nombrados para facilitar la comunicación.
16	Nueva: Es legítimo usar un objeto-concepto en el proceso de construcción o exploración así este no haga parte del sistema teórico del curso.
17	Nueva: En la prueba (validación teórica) de una conjetura, no se pueden usar objetos que no hagan parte del sistema teórico del curso.

Tabla 42. PP1-Grupo B: Cronología de situaciones, normas y objetos asociados a *Trayectoria Didáctica* 1

Situaciones		Construcción de Figura					Exploración de situación/ *Formulación de Conjetura*				Elaboración de Prueba (no hubo prueba)			
Objetos	**Procedimientos**	Pr1					Pr1							
	Conceptos/Def	C1 C2					C1 C2		C1 C2		C1 C2			
	Proposiciones	Pp2 Pp3					Pp1		Pp2 Pp1 Pp3		Pp3			
	Argumentos	Ab1												
	Lenguaje	L1 L2					L1 L2		L2		L2			
Nivel	**Meta**									x			x	x
Origen	**S**													
	A													
	C				c								x	
	M											x		x
	D		x					x		x				
Faceta	**Fe**				x					x		x		x
	Fc	x	x			x	x	x	x		x			
	Fa													
	Fi	x		x		x	x		x		x			
	Fm	x	x	x		x	x	x	x	x	x			
	Fec													
Tipología TII	**Ni**							x						
	Nle	x				x	x		x		x	X		
	Nlp													
	Nt												x	x
Normas		13a	12a	15	9a	13a	13b	12b	*13c*	*14*	13d	9	16	17

Del análisis didáctico anterior, se pueden destacar dos asuntos de interés para el estudio: (i) las normas como un aspecto que favorecen procesos de argumentación y (ii) las normas como un aspecto que generan tensiones y afectan procesos de argumentación.

Con relación al primer asunto, es posible decir que cuando los estudiantes abordan la resolución de un problema (Norma 5) y llevan a cabo las fases indicadas para lograr tal solución (Norma 13) el proceso de argumentación se puede ver favorecido. Por su puesto, la generalidad de la Norma 13 no deja ver la forma en que este favorecimiento se hace realidad. En consecuencia, normas que regulan lo que se debe se debe hacer en cada fase generan una especificidad para describir el favorecimiento. Para este caso, la generación del argumento Ab1 que conduce a Mariana a resolver el problema es favorecida por las siguientes normas (de faceta mediacional y cognitiva principalmente):

- Hacer una construcción robusta (Normas 13a y 12a), que en este caso llevó a la solución del problema (Pr1: $C \in \odot A, AB$; $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$), condujo a la inferencia del argumento Ab1, esto es, al establecimiento del dato del argumento (Pp2).

- Hacer una exploración (Normas 13b) llevó a que los estudiantes verificaran (Norma 12b) que Pp1: $AC = AB$ es consecuencia de Pp2. Esto es, que ratificaran empíricamente de la veracidad de Pp3, garantía del argumento.
- Formular una conjetura (Pp3: $C \in \odot A, AB$ *entonces* $AC = AB$) que condensa la solución del problema (Normas 13c, 14, 12b) llevó a la explicitación de la garantía del argumento, proposición que al parecer ya conocían los estudiantes.

Con respecto al segundo aspecto, y no obstante lo dicho anteriormente, cabe una interpretación según la cual algunas *tensiones* (entre normas) se evidencian en la actividad de los estudiantes[47] produciendo en ellos ciertos *dilemas*[48] relacionados con las fases que implica el abordaje de un problema. Como se expone a continuación, las formas en cómo los estudiantes terminan manejando dichas tensiones (bien sea por decisión propia o influencia de la profesora) terminan dilucidando la manera en cómo el dilema es resuelto para un momento determinado, sin querer ello decir que queda resuelto para siempre (Lampert, 1985; Herbst, 2003). Para este caso, describir las tensiones y dilemas ayuda a interpretar otra relación entre el sistema de normas, un proceso de argumentación (deductivo) y nuevos conocimientos (circunferencia como herramienta o como objeto).

Varios momentos de la interacción de los estudiantes cuando abordan el problema dejan ver una *tensión* entre dos de sus responsabilidades, especificadas en varias normas:

- Los estudiantes deben comunicar su producción real (sus ideas) cuando abordan un problema (Norma 2).
- Al momento de solucionar un problema, los estudiantes tienen la responsabilidad de explorar, [...] inventarse estrategias, [...], usar objetos primarios (proposiciones y conceptos), etc. (parte de la Norma 5). En consecuencia, el escrito en el que se reporta la solución debe contener (Norma 13): el procedimiento de construcción (robusta y blanda -13a-), una exploración (para descubrir -12b-), una conjetura

[47] Herbst (2003) se refiere a las *tensiones* y *dilemas* del profesor cuando debe manejar dos responsabilidades específicas establecidas por el contrato didáctico. En este caso se usan los mismos términos, pero llevados a los estudiantes cuando deben manejar dos normas declaradas por el profesor.
[48] Se entiende por *tensión* a la oposición latente entre dos aspectos igualmente importantes pero que pueden conflictuar en un contexto determinado. Se entiende por *Dilema* un argumento que presenta alguien con dos (o más) alternativas, pero es igualmente conclusivo contra él, sea cual sea la alternativa que elija. Esta definición se enfoca en la deliberación sobre las propias alternativas más que en una elección entre ellas (Lampert, 1985, pág. 182).

(que reporte en el consecuente lo descubierto -14-) y una justificación a la conjetura (9).

En principio, estas responsabilidades no tendrían por qué generar una tensión puesto que una se encarga de precisar las características del reporte de lo que se ha realizado cuando se soluciona un problema (Normas 5 y 13) y la otra sobre la autenticidad de lo que realmente se hizo (Norma 2). No obstante, en la práctica sí produjeron una: el sentido de las primeras normas se fundamenta sobre el supuesto de que la resolución de un problema implica un cierto reto para los estudiantes, y de alguna manera el "descubrimiento" de conocimiento nuevo para ellos. En esta perspectiva, el reporte escrito no es nada más que un medio para comunicar lo llevado a cabo en el proceso de resolución. No obstante, para este caso, el problema propuesto no produjo en los estudiantes un reto; el procedimiento de solución fue propuesto de manera inmediata [2, 9]. Así las cosas, los estudiantes no concebían cómo su estrategia de solución (su idea) se podría corresponder con las características exigidas en el reporte (*e.g.*, hacer una construcción blanda [16-31], una exploración para descubrir [33-35] y una justificación -soporte- para la conjetura [42-61]).

La *tensión* así descrita generó un *dilema* en los estudiantes respecto a lo que ellos debían finalmente poner en el reporte escrito: siguen su *autenticidad* y por lo tanto realizan un registro fiel de lo hicieron y saben, o siguen el *formalismo* que implica lo exigido por el reporte y por lo tanto no registran todo lo que hicieron o saben. En el fondo, la tensión descrita suscitada por normas que, salvo lo interaccional y mediacional, tiene facetas diferentes (afectiva para la primera y cognitiva para la segunda) genera un dilema ético, o bien prima lo auténtico o bien prima lo formal.

Las decisiones tomadas respecto al dilema planteado fueron resueltas de manera particular para cada momento. En lo que respecta a la construcción blanda, luego de una discusión entre los estudiantes sobre qué colocar dado que ellos no precisaron de una construcción de ese tipo para lograr la solución, decidieron consultaron a la profesora sobre este asunto. Como respuesta, ella flexibilizó la norma 13a y la especificó (*i.e.*, en la resolución de un problema, la construcción asociada no necesariamente tiene una parte blanda). En consecuencia, los estudiantes no colocaron en su reporte escrito algo asociado a esto; en este caso, primó su autenticidad. En lo que respecta a la exploración para descubrir y la formulación de la conjetura, los estudiantes de manera autónoma e implícita ajustaron la Norma 12b y actuaron en correspondencia con el complemento de las Normas 12b (*i.e.*, el EGD se emplea para explorar la situación involucrada en el problema sirve para verificar, no necesariamente para descubrir) y 14 (*i.e.*, un indicador para determinar el consecuente de la conjetura es precisar "a dónde se quiere llegar", no necesariamente lo que se "descubrió"). En consecuencia, en el reporte escrito se precisó el objetivo verificador de la exploración; en este caso, de nuevo primó su autenticidad. Finalmente, con respecto a la justificación de la conjetura, luego de una discusión en la que es posible inferir que ellos tenían el conocimiento para hacer lo correspondiente (*i.e.*, usar la *definición de circunferencia* como garantía que conecta $C \in\odot A, AB$ con $AC = AB$) pero no estaban seguros de usarla pues violaban la Norma 9 (*i.e.*, todo se debe argumentar empleando objetos primarios del sistema teórico), decidieron consultar a la profesora para saber cómo proceder. La interpretación de los estudiantes a su respuesta (*i.e.*, bueno, entonces tienen que hacer la justificación pues hasta donde puedan. Pues ustedes dicen: aquí nos varamos porque… ¿sí?) junto con la Norma 9 los llevó a no presentar un argumento completo de índole deductivo que les permitiera validar teóricamente el Pp3. Para este caso, en el actuar de los estudiantes sobre su autenticidad, primó la formalidad que implica la Norma 9.

Una razón más que explica las decisiones tomadas (bien sea por decisiones autónomas o por las sugeridas por la profesora) pueden tener que ver con el cumplimiento tácito de las Normas de Temporalidad 16 (es legítimo usar un objeto en el proceso de construcción o exploración así este no haga parte del sistema teórico del curso) y 17 (en la justificación teórica -validación- de una conjetura, no se pueden usar objetos que no hagan parte del sistema teórico del curso). De alguna forma, producto de la Norma 16, los estudiantes se sienten con mayor autonomía y autenticidad cuando están en la fase de construcción o exploración. Como consecuencia de la Norma 17, no ocurre lo mismo en la fase de justificación.

4.2.1.3 *Trayectoria didáctica 2: Actividad matemática sobre PP1–Toda la clase*

Esta trayectoria se concentra en el trabajo de toda la clase, orquestado por la profesora, en el que se hace la puesta en común de las producciones de los estudiantes respecto a PP1. Fueron identificados tres momentos en esta puesta en común: (i) correcciones, por parte de la profesora, sobre procedimientos de construcción, (ii) estudio, por parte de la profesora, sobre las conjeturas propuestas y (iii) elaboración, por parte de toda la clase, de la prueba de la conjetura escogida. En términos del EOS, cada momento se puede identificar como tres grandes *prácticas* llevadas a cabo durante esta *Trayectoria*. En la medida que se vaya presentando la interacción de cada momento, se irán precisando las *prácticas específicas*, las *normas* y los *objetos* asociados. Al finalizar la descripción de tales momentos se presenta un compendio de tales asuntos.

Momento 1. *Comentarios sobre procedimientos de construcción.* Iniciando la segunda sesión de clase, la profesora proyecta en el televisor un documento que presenta algunas de las producciones hechas por los grupos de estudiantes, específicamente los procedimientos de construcción propuestos por ellos. Para ese instante, ella ya había hecho una revisión de las producciones de los estudiantes. Tales procedimientos se sintetizan en dos, ambos fundamentados en el objeto circunferencia, uno basado en la herramienta compás (Pr2) y otro basado en la herramienta circunferencia análogo al del Grupo B (Pr1). La Tabla 43 expone tales procedimientos.

Tabla 43. Procedimientos de construcción respecto a PP1

Procedimiento Pr1	**Procedimiento Pr2**
1. A, B.	1. Dado $\overline{AB}$.
2. $\odot A, AB$, construida con la herramienta *circunferencia*.	2. $\overleftrightarrow{CD}$.
	3. $\odot C, AB$, construida con la herramienta *compás*.
3. $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$	4. $M \in (\odot C, AB \cap \overleftrightarrow{CD})$.
	5. $\overline{CM}$

A partir de ese documento, la profesora hace correcciones tanto de forma como de fondo, respecto de tales procedimientos (Práctica 1). Con respecto a la forma, en correspondencia con un complemento de la **Norma 5b.1**, ella hace correcciones sobre al uso de la simbología matemática y geométrica empleada por los estudiantes en sus reportes. Luego de hacerlo, los procedimientos quedan escritos tal como se expone en la Tabla 43 (L3). En relación con el fondo, la profesora hace un comentario sobre las herramientas empleadas en los procedimientos; en ese marco, legitima el uso del objeto circunferencia como herramienta para determinar segmentos congruentes. No indaga sobre las razones que llevaron a los estudiantes a usar dicho objeto en los procedimientos, razón por la cual no emergen argumentos. Al respecto, trascurre la siguiente interacción; adyacente, se presenta su respectivo análisis:

		Trascripción	Análisis
1.	P	[Señala la tercera conjetura proyectada en la pantalla] Si C es un punto de una circunferencia de centro A y radio AB, entonces sucede eso [$\overline{AB} \cong \overline{AC}$]. Vamos a ver si lo podemos justificar, porque los que pusieron eso, seguramente hicieron una justificación empírica, lo vieron, pero no tenían cómo; algunos me lo indicaron, dijeron que no tenían cómo hacer una justificación desde la teoría porque resulta que el objeto geométrico circunferencia todavía no está en nuestro sistema teórico.	La profesora comenta que algunos estudiantes actuaron en correspondencia con la **Norma 9a**. De manera implícita indica lo que caracteriza un argumento informal para el curso[49]: es aquel que se compone de las aserciones (sin sus respectivas garantías) que pueden ser insumo para la prueba formal. Puede indicar que los objetos necesarios para llevar a cabo tal prueba no están en el sistema teórico.
		Sin embargo, nosotros sabemos que a veces usamos esos elementos para hacer una construcción o exploración y después miramos si nuestro uso fue o no aceptable, es decir válido dentro de nuestro sistema. ¿cuál es un buen ejemplo de una ocasión en que yo uso ese elemento como herramienta y después me doy cuenta de que teóricamente lo puedo justificar?	La profesora hace explícita la **Norma 16**; esto es, se considera legítimo el uso de objetos que no hacen parte del sistema teórico en un procedimiento de construcción o exploración.
2.	Diego	Cuando usamos el compás, pero teóricamente usamos Teorema Localización de Puntos.	
3.	P	Ese es un ejemplo. Entonces el sistema de la geometría dinámica nos traduce, hace realidad una cosa que nosotros tenemos teórica que se llama teorema localización de puntos. Entonces eso es lo que hacemos. A veces, nosotros usamos elementos del programa [se refiere al Cabri] y se convierte en una excusa para nosotros introducir ese objeto en nuestro sistema teórico. [...] Viene después, "¿será que yo puedo justificar esto desde mi sistema teórico o no?". Esa es la gran pregunta.	La profesora manifiesta una nueva Norma (**Norma 18**) según la cual el EGD hace ostensivos objetos geométricos que luego deben ser instaurados en el sistema teórico (**F-Fm; O~D**).

[49] Caracterización que se corresponde con la respuesta dada por la profesora cuando se le consultó al respecto y expuesta en la página 174.

El episodio anterior deja ver que, para este caso, la responsabilidad de la profesora consiste en hacer correcciones (de fondo y forma) a las propuestas de construcción de los estudiantes y finalmente escoger aquellas que son consideradas como correctas (**Norma 19**).

Momento 2. *Estudio de las conjeturas propuestas.* El estudio de las conjeturas (Práctica 2) se hizo durante dos momentos de clase: el primero finalizando la primera sesión de clase, luego de que los estudiantes entregaran su reporte de la solución del problema; el otro en la segunda sesión de clase, luego de que la profesora hiciera comentarios sobre los procedimientos de construcción. En el primero de tales momentos, la profesora pide a los estudiantes que expongan las conjeturas que produjeron; en respuesta, tres conjeturas son pronunciadas por parte de algunos miembros de la clase:

> Steven: Si segmento AB, entonces existe un segmento congruente a él.
> Diana: Si esas dos medidas son iguales, entonces los segmentos son congruentes.
> Karen: Dada una circunferencia de radio AB y C pertenece a la circunferencia, entonces segmento AB es congruente con segmento AC.
> La profesora ha escrito en el tablero, respectivamente:
> 1. Si $\overline{AB}$, entonces existe un segmento congruente a él (Pp4).
> 2. Si $AB = CD$ entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (Pp5).
> 3. Dado $\odot A_{AB}$. Si $C \in \odot A_{AB}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (Pp3).

Enseguida, pide examinar las conjeturas iniciando por las dos últimas. Steven, al respecto de la conjetura 2, dice que se refiere a la Definición de segmentos congruentes (estudiada en el curso anterior). La profesora valida esa respuesta. Aclara que al proponer un problema que pide construir dos segmentos congruentes, se está indicando que no necesariamente se sabe que un par de segmentos con esa condición existan, aun cuando se conozca su definición. En tal sentido, pronuncia que la primera conjetura sí da una respuesta al problema pues alude la existencia de los segmentos congruentes cuando uno de ellos está dado. Con respecto a la tercera, dice que este problema hace parte de situaciones que han pasado durante los cursos previos: simplemente se está buscando que se introduzcan elementos al sistema teórico (en correspondencia con la **Norma 7**); desde esa perspectiva, menciona que tal conjetura quizá se corresponde con la respuesta que ella estaba esperando.

De los comentarios hechos por la profesora, otra norma de faceta epistémica es sugerida por la profesora (**Norma 20**): *Una definición no garantiza la existencia del objeto definido.* Precisamente, tal como ella lo afirma, el problema entre otras cosas pretende que se provean ideas para garantizar la existencia de dos segmentos congruentes.

En la segunda sesión de clase, luego de tratar sobre los procedimientos de construcción, la profesora procede a precisar la manera en que se elabora una conjetura a la luz de la estructura del enunciado del problema y de los procedimientos llevados a cabo para resolverlo. A continuación, se presenta la trascripción de la interacción en relación con ello, y el análisis correspondiente:

<table>
<tr><th></th><th>Trascripción</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>P</td><td>[Refiriéndose al enunciado del problema] ¿Me está diciendo algo dado o me está diciendo lo que espera que sea el resultado de lo que yo haga?</td><td rowspan="5">Los estudiantes, con base en las indagaciones de la profesora, actúan en correspondencia al tipo de problema que es PP1, es decir, búsqueda de antecedente. En otras palabras, la estructura del enunciado es tal que provee el “resultado de algo”, o el consecuente de una proposición. Actúan según el complemento de la Norma 14 de manera análoga a como lo hizo el Grupo B, pues interpretar el consecuente como “resultado de algo” se asemeja a entenderlo como “a lo que se quiere llegar”. Parece ser que la estructura del problema es lo que causa la emergencia de la norma citada.
De otro lado, la profesora legitima el hecho de emplear una exploración para verificar, esto es, actúa en correspondencia con el complemento de la Norma 12b, tal como lo hizo el Grupo B de estudiantes.
Finalmente, es la profesora quien menciona cuáles son las conjeturas que se debe probar en tanto dan respuesta al problema planteado (Norma 21).</td></tr>
<tr><td>José</td><td>El resultado.</td></tr>
<tr><td>P</td><td>Y cuál es el resultado de lo que yo haga.</td></tr>
<tr><td>Varios</td><td>Los segmentos congruentes.</td></tr>
<tr><td>P</td><td>O sea que nosotros lo que estamos viendo es que me están dando el consecuente de la conjetura [escribe en el tablero: entonces $\overline{AB} \cong \overline{CE}$] me estás diciendo mire, ¿será posible que esto [señala $\overline{AB} \cong \overline{CE}$] suceda o no? Y yo tengo que averiguar cuándo puede suceder esto, yo tengo que averiguar si sí hay condiciones que me aseguran eso. Entonces, [en la conjetura 1] me están diciendo vamos a asumir que hay un segmento, entonces ya sabemos que ya hay un segmento: si no existe ningún segmento pues cómo vamos a buscar que existe otro congruente, pues no existe. Entonces de cierta manera, me dijeron, al proponer esto [el enunciado del problema], hay un segmento, y lo que queremos saber es si hay otro congruente a él o no, eso es lo que queremos saber. Algunos de ustedes, de alguna manera, ya sabían que la circunferencia servía, por eso la usaron. Entonces, lo que hicieron fue verificar algo. Un grupo, me reportó eso, que verificaron que todos lo radios son iguales [se refiere al Grupo B]. Bueno, eeeh, con esto, las conjeturas que deberíamos probar son la primera y la tercera.</td></tr>
</table>

Momento 3. *Elaboración de la prueba de la conjetura escogida.* La profesora toma la decisión de hacer la prueba de la primera conjetura (Pp4). Una razón para haberla escogido en lugar de la tercera (Pp3) es que para ese momento no se había provisto una definición de circunferencia ni se había estudiado la manera de garantizar su existencia (actúa en correspondencia con la **Norma 17**). La prueba de la conjetura 3 se ve postergada.

Con esto en mente, la clase se concentra en elaborar la prueba de la conjetura 1 usando un formato específico denominado *Aserción-Datos y garantía*. En lo que sigue, y dado que es la primera vez que en el curso se elabora una prueba de manera conjunta entre profesora y estudiantes, se presenta la trascripción empleando el formato expuesto mediante la Tabla 17. Esto para analizar con algo de detalle la *interacción* con lo cual precisar la función en la participación y en el argumento tanto de la profesora como de los estudiantes. Al finalizar se precisan las *normas* presentes y *objetos primarios* emergentes y articulados por el Argumento (*i.e.*, prueba formal) construido.

	Emisor: FPar	**Enunciado** / ***Referencia a un agente anterior***	**FArg**
7.	P: A~P	Entonces tenemos dado el segmento AB [mientras habla escribe en el tablero. En la Figura 36 una imagen con lo escrito por la profesora mientras interactúa con los estudiantes].	Paso~P
		Bien, y ahora, ¿qué hago? Sebastián…	Id~P~I
		Estudiantes cuya conjetura tenía como antecedente "Si $\overline{AB}$"	
8.	Sebastián: A~E	Se toma la medida.	A~E
9.	P: P~P	Puedo decir que la medida del segmento AB es un número mayor que cero.	A~P
		¿Por qué?	G~P~I
		Sebastián	
10.	Sebastián: A~E	Por el postulado de la distancia.	G~E
		Profesora	
11.	P: P~P	Postulado de la distancia. ¿Así lo llamaron? O Postulado dos puntos número;	G~P
		y ahí estamos usando ¿qué dato?	D~P~I
		Sebastián	
12.	Varios: A~E	El primero.	D~E
		Profesora, Sebastián	
13.	P: R~P	El primero. Tengo el segmento, entonces tiene una medida.	D~P
		Y ahora, ¿qué hacemos?	Id~P~I

		Varios, Sebastián	
14.	Mariana: A~E	Necesitamos un plano para construir otro punto. *Profesora*	Id~E
15.	P: R~P	Necesitamos un plano para generar otro punto, ¿cierto? *Mariana*	Id~P~I
16.	Vanessa: A~E	Llamamos una recta por el postulado de existencia, entonces existe una recta m. *Profesora*	Paso~E
17.	P: R~P	¿Podemos proceder así o no? Ella dice hay un postulado que dice existe una recta. *Vanessa*	Paso~P~I
18.	Steven: A~E	Pero a partir del segmento ya se puede generar. *Vanessa*	Id~E
19.	P: R~P	Ella quiere decir existe una recta, y sí podemos. Otros quieren generar la recta AB. Otros quieren, primero, dizque un plano, ¿es necesario? Podemos tomar el camino que propone Vanessa o no… O sea, el camino que propone Vanessa es “sea m recta” y ella dice que hay un postulado de la existencia que nos dice que hay una recta. *Vanessa, Mariana, Steven*	Paso~P~I
20.	José Luis: R~E~I	Qué pena profe, ¿pero por ese postulado puedo decir que esa recta es necesariamente la recta AB? *Vanessa, Steven*	R~E~I
21.	P: P~P~I	Entonces ahí viene la gran pregunta, y ¿es que existe una recta necesariamente distinta a la recta AB? O será que la recta que existe es AB porque ya tengo el segmento y si tengo el segmento tengo la recta, entonces esa recta m, ¿puedo asegurar que existe entonces? *José Luis*	Id~P~I
22.	Steven: A~E	Es que no necesariamente tiene que ser diferente a AB. *Profesora, José Luis*	Id~E
23.	P: En~P	Porque hay… no importa que sea la misma recta AB; no, no importa. Y qué dato tengo poner ahí. Nada. En el sistema teórico me permite decir existe una recta m. Puede que sea la misma recta AB; vamos a ver si nos importa; si llegamos a ver que sí nos importa, pues algo está mal en nuestro camino. O sea que hay muchas decisiones, ¿no? Cada paso es una decisión, por dónde cojo, etc. El camino que vamos a seguir es la propuesta de Vanessa, pero hubiésemos podido seguir otra propuesta.	Paso~P
		¿Y ahora qué hago? *Steven, Vanessa*	Id~P~I
24.	Karen: A~E	Tomar dos puntos de la recta m *Profesora*	A~E
25.	P: P~P	Sean X y Y puntos. Fíjense que es la primera vez que nombro a X y Y, luego digo qué son, son puntos. Puntos tal que X, Y pertenecen a m.	A~P
		Y cómo justifico esa existencia…	G~P~I

		Karen	
26.	Karen: A~E	Por el teorema recta – dos puntos	G~E
		Profesora	
27.	P: R~P~I	¿Por el teorema recta – dos puntos?	G~P~I
		Karen	
28.	Varios: A~E	Por recta – infinitos puntos.	G~E
		Profesora	
29.	Karen: A~E	Es que nosotros teníamos ese teorema [se refiere al Teorema recta – dos puntos].	G~E
		Profesora, Varios	
30.	P: En~P	Pero después lo reemplazaron por otro más potente, ¿no? [se refiere al Teorema recta – infinitos puntos]. Pues ese es el que domina [se refiere al teorema recta-infinitos puntos]. Entonces mejor usemos el teorema recta-infinitos puntos.	G~P
		¿Cuál es el dato?	D~P~I
		Karen	
31.	Karen: A~E	El tres.	D~E
		Profesora	
32.	P: R~P	El tres. El tres es el dato.	D~P
		¿Y para qué queremos estos dos puntos en la recta m? Mauricio.	Id~P~I
		Karen	
33.	Mauricio: A~E	¿Puede ser para generar un rayo? El rayo XY.	A~E
		Profesora	
34.	P: R~P	El rayo XY. Sea el rayo XY.	A~P
		Y, ¿acá cómo me justifican eso?	G~P~I
		Mauricio	
36.	Mauricio: A~E	Por el teorema recta-rayo-segmento.	G~E
		Profesora	
37.	P: A~P P: R~P	[Escribe en el tablero T. R.R.S indicando Teorema recta-rayo-segmento] Y ahí estamos usando el [dato] cuatro.	G~P D~P
		¿Y para qué queremos el rayo XY? Natalia.	Id~P~I
		Mauricio	
38.	Natalia: A~E	Para el teorema localización de puntos y poder ubicar la medida	Paso~E
		Profesora	
39.	P: R~P	Entonces cuál va a ser nuestro siguiente paso… Estoy hablando con Natalia, vamos a ver si ella encuentra lo que necesita	Paso~P~I
		Natalia	
40.	Natalia: P~E	Existe un punto M en el rayo XY tal que la medida de X a N es la misma de AB	A~E
		Natalia	
41.	P: R~P	Entonces es: Sea M en el rayo XY, M punto, tal que la medida XM es igual a la de AB. Y ahí estoy usando Teorema Localización de Puntos.	Paso~P
		Y cuáles son los datos…	D~P~I

		Natalia	
42.	Natalia: A~E	Dos y cinco	D~E
		Profesora, Natalia	
43.	P: R~P	Dos y cinco.	D~P
		Y Ronald, ¿cómo termino? Qué pongo en el último paso…	Paso~P~I
		Natalia	
44.	Ronald: A~E	El segmento XM es congruente con el segmento AB por Definición de segmentos congruentes.	Paso~E
		Profesora	
45.	P: R~P P: A~P	[Escribe lo dicho por Ronald] Definición de segmentos congruentes. Dato 6.	Paso~P
		Ronald	

En la Figura 36 se presenta el reporte escrito (L4) de la prueba formal (*argumento global* Ad1) que ha quedado luego del proceso anterior. Como se puede inferir, el procedimiento o método empleado para llevarla cabo es el directo.

a. Reporte escrito en el tablero

Aserción	**Garantía y datos**
$\overline{AB}$	Dado
$AB > 0$	P. Distancia (1)
Sea m recta	P. Existencia
Sean X y Y puntos tal que $X, Y \in m$	T. Recta infinitos puntos (3)
Sea $\overrightarrow{XY}$	T. R.R.S (4)
Sea $M \in \overrightarrow{XY}$, M punto tal que $XM = AB$	T. Localización de Puntos (2,5)
$\overline{XM} = \overline{AB}$	D. Segmentos congruentes (6)

b. Trascripción reporte escrito en tablero

Figura 36. Reporte escrito prueba de Pp4

Durante la elaboración de la prueba de Pp4 (Práctica 3), se puede evidenciar que efectivamente hubo una construcción conjunta orquestada por la profesora. Para ilustrar esta aseveración, en primer lugar, se presentan las frecuencias del tipo de participación y de la función relativa al argumento tanto de profesora como de estudiantes (Tabla 44 y Tabla 45), y con base en ellas se hace una interpretación de su papel en dicho proceso. Luego, se presenta la estructura del *argumento global* resultado de la interacción, explicitando los objetos primarios que este involucra y la secuencia correspondiente a su proceso de elaboración (Figura 37).

Tabla 44. PP1-Elaboración Prueba: Funciones de profesora en participación y en argumento

FArg	**Frecuencia**	**FPar**	**Frecuencia**
Idea-Indagación	7	Autora-Indagadora	3
		Repetidora	3
		Portavoz	1
Paso-Indagación	4	Repetidora	3
		Autora-Indagadora	1
Paso	4	Autora	1
		Repetidora	2
		Encubridora	1
Aserción	3	Portavoz	2
		Repetidora	1
Garantía-Indagación	4	Autora-Indagadora	3
		Repetidora	1
Garantía	3	Portavoz	1
		Encubridora	1
		Repetidora	1
Dato-Indagación	3	Indagadora	3
Dato	4	Autora	1
		Repetidora	3

Tabla 45. PP1-Elaboración Prueba: Funciones de estudiantes en participación y en argumento

FArg	**Frecuencia**	**FPar**	**Frecuencia**
Idea	3	Autor	3
Refutación-Indagación	1	Repetidor-Indagador	1
Paso	3	Autor	3
Aserción	4	Autor	3
		Portavoz	1
Garantía	5	Autor	6
Dato	3	Autor	3

Las frecuencias presentadas en las Tablas anteriores dejan ver que los roles de profesora y estudiantes en el proceso de elaboración de la prueba de Pp4. En lo que respecta a la profesora, se resalta su papel indagador, de alguna forma esperado como miembro de la comunidad que orquesta el proceso e intenta que los estudiantes se involucren en el mismo. Varias de sus indagaciones buscan que los estudiantes provean ideas para continuar el proceso (7) o pasos argumentales que cristalicen las ideas (4). Como se dijo previamente, la diferencia entre *idea* y *paso* argumental difieren en el grado de precisión o explicitación de la aserción, garantía o dato que intervienen en ellos. Así, por ejemplo, cuando la profesora dice *Bien, y ahora, ¿qué hago*? *Sebastián…* [7], *Y ahora, ¿qué hacemos*? [13] o *Necesitamos un plano para generar otro punto, ¿cierto*? [15], está indagando por una idea nueva (dos primeros casos) o una que ya fue sugerida (último caso) pero no tiene la intención de que se diga explícitamente los elementos que constituyen el paso argumental; aun cuando en la intervención [15] hay alusión a objetos geométricos no es claro si lo pronunciado es una o varias aserciones (se necesita un plano y un punto en él) o una garantía que soporte un dato (se necesita un plano para que exista un punto). En contraste, cuando dice *¿Podemos proceder así o no*? *Ella dice hay un postulado que dice existe una recta* [17] o *Y Ronald*, *¿cómo termino*? *Qué pongo en el último paso…* [42] explícitamente indaga por un paso argumental; en el último caso pregunta por el último paso del argumento global, mientras que el primero indaga por la validez de un paso pronunciado por Vanessa previamente.

Otro asunto que se resalta del proceder de la profesora es su manera de indicar la validez o invalidez del uso de algún elemento en cierto paso argumental. En lo que respecta a la validez, esta es indicada porque es portavoz (precisa la sintaxis y no la semántica) o repite lo dicho por los estudiantes (*e.g.*, [9, 25, 34] para aserciones, [13, 32, 36, 42] para datos, [11, 36] para garantías y [40. 44] para pasos argumentales). Cuando quiere manifestar alguna duda respecto a la validez del uso de algún elemento, la profesora indaga al respecto repitiendo un pronunciamiento dicho por un estudiante (*e.g.*, [27] para una garantía, [17, 19] para un paso argumental).

Finalmente, otro asunto destacable del rol de la profesora en este fragmento tiene que ver con su función de encubridora [23, 30]. En ambos casos donde ella funge con tal función, la profesora retoma pronunciamientos de los estudiantes y los reelabora desde un punto de vista semántico para tomar la decisión de qué aserción o garantía poner en sendos pasos argumentales (3, 4).

Con respecto a los estudiantes, se destaca su papel protagonista en la generación de ideas durante la producción de la prueba. Ante las indagaciones de la profesora, ellos proveen (son autores de) todos los pasos argumentales que la componen. En términos generales ellos producen los elementos de los pasos argumentales, algunas veces de manera completa [16, 37, 43] y otras veces por partes (*e.g.*, [8, 24, 33, 39] para aserciones, [12, 31, 41] para datos y [10, 26, 28, 35] para garantías). Al respecto de lo anterior llama la atención que, aunque los estudiantes son los responsables de las aserciones desde un punto de vista semántico y de enunciarlas verbalmente, es la profesora quien los consigna en el formato para presentar la prueba; es decir, es ella quien se responsabiliza de la sintaxis escrita [ver columna izquierda de la parte b de la Figura 36].

Resultado del proceso de argumentación (elaboración de la prueba) descrito antes, se produce el reporte escrito o *argumento global* (Ad1) que se presenta en la Figura 36. Siguiendo una idea análoga a la que sugieren Knipping y Reid (2015), la estructura de tal argumento se ilustra con el diagrama de la Figura 37. El propósito de dicho diagrama es mostrar no solo los *objetos primarios* (datos, aserciones y garantías) que componen a cada paso argumental (idea del Modelo Toulmin) sino también el estatus que las proposiciones van tomando durante el proceso de argumentación (*e.g.*, una proposición que fue aserción en un paso puede ser dato de otro siguiente, una proposición puede ser una refutación de otra dada con antelación, una proposición puede ser dato de varios pasos argumentales, etc.).

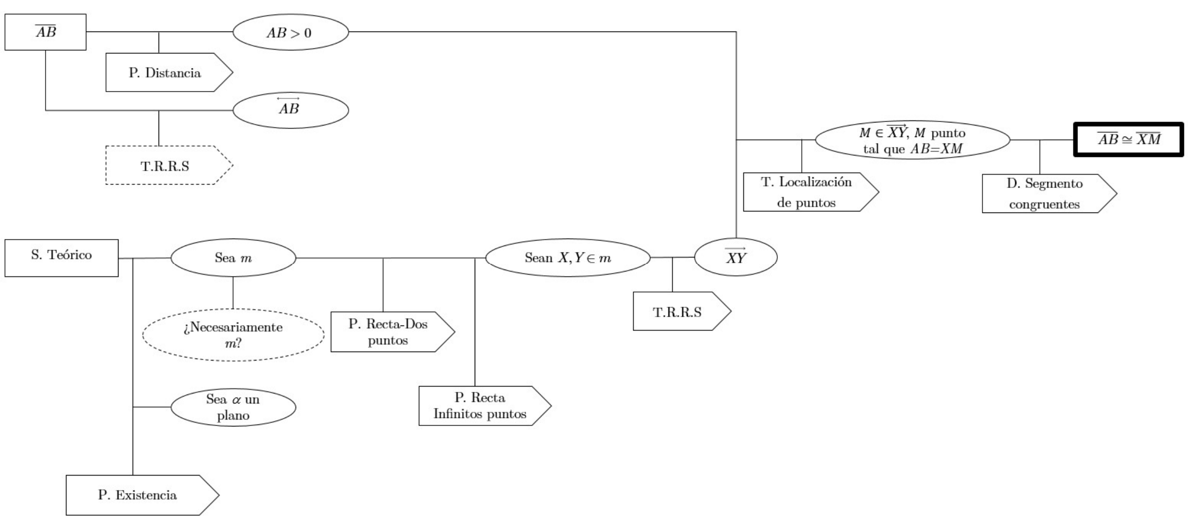


Figura 37. PP1: Estructura *argumentación global* de Pp4

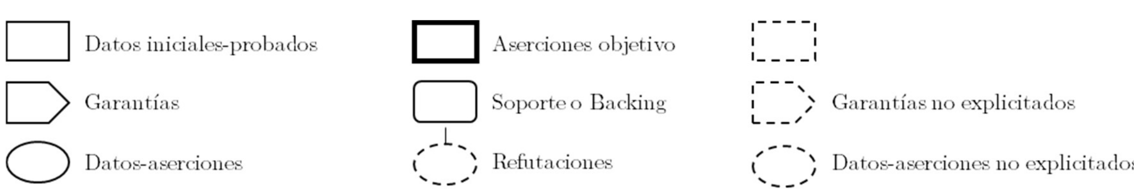


Figura 38. Convenciones estructura del *argumento global*

Para este caso en particular, el diagrama deja ver lo siguiente:

- Que el proceso para soportar la aserción objetivo (resaltada con el rectángulo con delineado más grueso) involucró 17 proposiciones, de las cuales 8 se emplearon con garantías (indicadas con el polígono en forma de flecha), una de ellas no explicitada en el proceso (indicada con el polígono de línea discontinua en forma de flecha); 5 se emplearon como datos de un paso o aserciones de otro previo (indicadas con el óvalo); 2 se emplearon como aserciones únicamente (indicadas también con un óvalo) y 2 se emplearon como datos únicamente, uno dado por el antecedente de Pp4 y otro dado por sentado -el sistema teórico instaurado en el curso- (indicadas por el rectángulo).
- La variedad de ideas (3 en total) que fueron pronunciadas por los estudiantes cuando se quería aludir a la existencia de una recta precisando, mediante óvalos cuyas proposiciones no se convirtieron en datos de otros pasos argumentales, aquellas que finalmente fueron descartadas.
- La refutación (indicada con el óvalo de línea discontinua) que toma lugar cuando se quiere cuestionar si el Postulado de Existencia permite garantizar que la recta m es distinta a $\overleftrightarrow{AB}$.
- El uso como datos de dos proposiciones previamente establecidas como aserciones, en el paso argumental que permite inferir la existencia de $M \in \overrightarrow{XY}$ tal que $XM = AB$.

De la mano de los análisis anteriores, las *normas* que regulan las interacciones durante el proceso de argumentación deductiva pueden ser identificadas. La Tabla 46 las presenta y codifica.

Tabla 46. PP1-Elaboración Prueba: Normas que regulan la práctica Aserción-Garantías y Datos

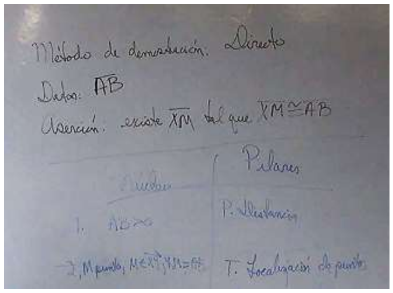
	Norma	Codificación
22	Los elementos que debe contener cada paso argumental son aserción, dato y garantía, donde la garantía es aquel objeto primario (definición, postulado, teorema) que soporta la aserción como consecuencia necesaria de los datos. El conjunto de pasos argumentales conforma un argumento global.	**F~Fe; O~M; O~D; M:** La norma precisa la estructura de un paso argumental (versa *sobre* el argumento) de índole deductivo, siguiendo las ideas de Krummheuer (1995; 2015).
23	Uno de los formatos legítimo para presentar una prueba (argumento global de índole deductivo), denominado *Aserción-Garantía y Datos*, consta de una tabla a tres columnas; la primera de ellas registra el número del paso argumental, la asegunda registra la aserción respectiva, y la tercera registra la garantía y	**F~Fe; F~Fi; F~Fm; F~Fc; O~D:** En correspondencia con la norma 20, se precisan las características que debe tener el reporte escrito por medio del cual se comunica la prueba de una proposición. Se supone que un formato tal puede facilitar la comprensión sobre el estatus que puede tener una

	los datos correspondientes (estos últimos indicados mediante el número del paso puesto en la primera columna).	proposición en toda la secuencia del argumento (Herbst, Chen, Weiss, & González, 2009; Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads, & Samkoff, 2012; Molina & Pino-Fan, 2018)
24	El profesor asume la responsabilidad de preguntar por los elementos que constituyen los pasos argumentales de una prueba.	**F~Fe; F~Fi; F~Fc; O~D; Nlp:** Como experta de la comunidad y orquestador de la práctica, la profesora motiva la participación de los estudiantes indagando por los elementos de los pasos argumentales. Se especifica la Norma 3 en tanto su papel de indagador.
25	El profesor asume la responsabilidad de determinar la validez del uso de las proposiciones dichas por los estudiantes en cada paso argumental.	**F~Fe; O~D; Nlp:** Como experta de la comunidad y orquestador de la práctica, la profesora valida las propuestas de los estudiantes respecto a los elementos de cada paso argumental.
26	El profesor asume la responsabilidad de tomar la decisión final cuando existen varias opciones correctas sugeridas por los estudiantes.	**F~Fe; O~D; Nlp:** Como experto de la comunidad y orquestador de la práctica, la profesora decide qué camino tomar cuando hay varias opciones válidas.
27	El profesor asume la responsabilidad de la sintaxis escrita (simbología geométrica) de los elementos que conforman el argumento global y ponerlos en el lugar indicado del formato *Aserción-Garantía y Datos*, cuando se hace la prueba en una actividad de toda la clase.	**F~Fe; F~Fi; F~Fm; Nlp:** En la actividad de toda la clase, la profesora escribe en lenguaje geométrico lo que los estudiantes verbalizan empleando el formato para presentar una prueba.
28	Un teorema previamente instaurado es obsoleto si existe un teorema en el sistema teórico más potente que lo contiene.	**F~Fe; O~M; M:** En relación con la Norma 25, la profesora precisa un criterio para escoger una garantía entre dos garantías válidas.
29	Los estudiantes son los responsables de proveer verbalmente (en leguaje geométrico) las ideas iniciales de los pasos argumentales (semántica).	**F~Fe; F~Fi; F~Fc; O~D; Nle:** Se indica una manera específica de participación de los estudiantes y, por ende, una manera para favorecer su comprensión respecto a la manera como se elabora y funciona un elemento de un paso argumental en una prueba. Es una concreción de la Norma 2.
30	Los estudiantes son los responsables de precisar verbalmente, con nombres particulares (sintaxis), los objetos involucrados en cada uno de los pasos cuando la profesora pide tal precisión.	

Momento 4. *Elaboración de la prueba de la conjetura escogida por Núcleos-Pilares*: Volviendo a la actividad de la clase, terminada la elaboración de la prueba de Pp4, la profesora pretende instaurar una nueva manera o formato para presentar una prueba, según la cual no es necesario reportar todos los pasos argumentales como se había acabado de hacer (Figura 36) y era costumbre desde el curso previo, sino sólo los pasos clave que dan la idea general de la misma y permite desarrollarla por completo

(Práctica 4). Antes de precisar las condiciones del formato, la profesora comenta lo siguiente como preámbulo que lo primero que hay que precisar es el método que se emplea para hacer la prueba; pregunta a los estudiantes cuáles métodos ellos conocen [47]. Al respecto, varios estudiantes responden *Por contradicción*, *directa o por casos* [48]. Seguido a esto, la profesora pregunta por el *método* de la prueba que acaban de hacer, y los *datos* y la *aserción* que conforman la proposición que probaron [49, 51, 53]. En coro, varios estudiantes responden *Directo*, $\overline{AB}$ y $\overline{AB} \cong \overline{XM}$, respectivamente [50, 52, 54]. Con esto explicitado, con el ánimo de ánimo de precisar la forma nueva pare realizar y presentar una prueba (con Núcleos y Pilares) sucede la siguiente interacción:

55	P:	Ahora, la prueba de este pequeño teorema estuvo guiada por la construcción; la mayoría de personas que propusieron esta prueba es porque ellos reportaron construir un segmento, después un rayo y después localizar el punto. O sea que esa construcción nos guio en la prueba, casi que la estamos reportando ahí, lo que hicimos físicamente lo estamos reportando ahí. A veces se puede hacer ese tipo de ejercicio para hacer una prueba y a veces no.
56	P:	Ahora, supóngase que lo que queremos es darles a unos estudiantes las pistas, los pasos claves, no toda la prueba. Tengo que poder imaginarme cuáles son los elementos teóricos esenciales, importantísimos en esta prueba que, con darles, digamos, esos elementos teóricos la persona que más o menos sabe algo de geometría, lo pueda desarrollar. Yo no quiero hacer toda la prueba, yo sólo quiero decirle, mire definitivamente esto no lo hubiésemos poder hecho si no hubiésemos tenido el Teorema Localización de puntos. Si ese teorema no hubiese existido, no sabríamos qué hacer. Entonces ese es uno de los pilares, o sea este tiene una importancia bastante grande en la prueba y ese es uno de nuestros pilares; a él le corresponde un núcleo, una sola frase, una sola cosa que yo sepa que ya la persona sabe que, si yo estoy diciendo esto, ya sabe qué tiene que hacer. Cuál sería el paso clave que diríamos a la persona... [Silencio]. M punto, M en rayo XY tal que XM igual a AB.
57	Diana:	Faltaría la distancia AB
58	P:	Acá simplemente podríamos AB mayor que cero. Hay dos núcleos. Con estas dos ideas se supone que la persona puede hacer la demostración. Aquí, uno dice bueno "y de dónde salió el rayo" [se refiere a lo dicho en el primer Núcleo]. Entonces uno empieza a buscar de dónde salió ese rayo, cómo hago para obtener ese rayo, que me dicen aquí, que debo obtener para encontrar ese punto M tal que tal cosa. Entonces esto me echa para atrás y tengo que rellenar todos los pasos que me permitan decir esto; o sea me toca buscar el rayo, la recta, bueno lo que sea. Y acá sería, Postulado, distancia [se refiere al Pilar correspondiente al segundo Núcleo].



a. Reporte escrito en el tablero

Método de demostración: Directo
Dato: $\overline{AB}$
Aserción: Existe $\overline{XM}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{XM}$

Núcleo	Pilar
1. $AB > 0$	P. Distancia (1)
2. Sean X y Y puntos tal que $X, Y \in m$	T. Recta infinitos puntos (3)

b. Trascripción reporte escrito en tablero

Figura 39. Reporte escrito prueba de Pp4 con Núcleos y Pilares

Y serían dos núcleos con estos dos pasos. ¿[Con esto] Podría la persona desarrollar la prueba?

Ante la última pregunta de [58], José cuestiona sobre la posibilidad de poner la existencia de $\overleftrightarrow{XY}$ [59]. La profesora replica diciendo que ello no es necesario, puesto que fueron varias las maneras propuesta por los estudiantes para garantizar la existencia de la recta que contiene dicho rayo; dice que lo importante es que el rayo aparezca, no cómo este aparece [60]. Termina esta situación instruccional de hacer prueba advirtiendo que:

61. Estas son de las cosas que vamos a tratar de hacer a veces. A veces haremos las pruebas solamente con los núcleos y los pilares. Ustedes ya tienen un bagaje, ustedes ya saben probar muchas cosas y a mí no me interesa tanto todos esos detalles sino si saben cuáles son las cosas básicas de ella.

Terminada esta actividad, Mauricio pregunta a la profesora *¿el enunciado que se acaba de probar (Pp4) se convertirá en Teorema del sistema teórico de la clase*? [63]. La profesora responde [64]: *Ah, no todo lo que mostramos en esta clase va a quedar como teorema de nuestro sistema porque si no tendríamos un sistema kilométricamente largo, entonces no, ese no entra como teorema.*

De los fragmentos anteriores, emergen otras *normas* que pretenden regular prácticas argumentativas, particularmente de carácter deductivo. La Tabla 47 las presenta y codifica.

Tabla 47. PP1-Elaboración Prueba: Normas que regulan la práctica Núcleos-Pilares

	Norma	Codificación
31	La prueba de la conjetura-solución de un problema que pide la construcción de un objeto (existencia de un objeto) es guiada por el proceso mismo de construcción; de manera más concreta, los pasos de construcción infunden las aserciones de los pasos argumentales de la prueba.	**F~Fe; F~Fc; O~M; O~D; M:** En [55] la profesora indica que basados en las prácticas llevadas a cabo con respecto al PP1, el proceso de elaboración de la prueba de la conjetura-solución Pp4 fue guiado por el proceso de construcción que dio lugar a tal conjetura. Se indica, entonces, una manera que favorece el proceso de elaboración de una prueba de existencia.
32	La prueba de una proposición implica la precisión de los siguientes aspectos: el método empleado para desarrollarlo, y el dato inicial y aserción-objetivo que se pretende demostrar.	**F~Fe; O~M; M:** En [47-54] la profesora precisa otros elementos (epistémicos) que se debe tener clarificados a la hora de elaborar una prueba.
33	Una prueba válida no necesariamente debe contener todos los pasos; esta puede estar compuesta de aserciones claves (Núcleos) con su respectiva garantía (Pilares); los núcleos con sus correspondientes pilares son los pasos que posibilitan con suficiencia la idea de la prueba y, en consecuencia, dan un indicio para precisar todos los pasos que conforman la prueba completa.	**F~Fe; O~M; O~D; M; P:** Se precisa que una prueba para que sea válida no debe estar compuesta por todos los pasos que la componen; basta con aquellos claves que dan una idea general de la misma (Recio & Godino, 2001; Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads, & Samkoff, 2012).
34	Uno de los formatos legítimos para presentar una prueba, denominado *Núcleo-Pilar*, consta de una tabla a tres columnas; la primera de ellas registra el número del paso argumental, la asegunda registra la aserción clave respectiva, y la tercera registra la garantía correspondiente.	**F~Fe; F~Fi; F~Fm; F~Fc; O~D:** En correspondencia con la norma 30, se precisa las características que debe tener el reporte escrito por medio del cual se comunica la prueba de una proposición explicitando sus núcleos y pilares. Se supone que un formato tal puede facilitar la comprensión sobre la idea general de una proposición sin entrar en los detalles (Molina & Pino-Fan, 2018).
35	No toda proposición que se prueba hace parte del sistema teórico del curso; no es suficiente probar una proposición para instaurarla como Teorema del curso. El profesor decide qué proposición se instaura como teorema.	**F~Fe; O~C; Nt; Nlp, M:** [64] Para esta clase no toda proposición que se prueba se instaura como Teorema. Es una norma de temporalidad porque indica parcialmente condiciones para instaurar un teorema.

4.2.1.4 ***Síntesis y breves comentarios: Trayectoria didáctica 2***

Como ya es reiterativo, el análisis de la *interacción* es el eje articulador a partir del cual se pueden identificar las *prácticas*, *normas* y *objetos primarios*; enseguida, cada uno de estos aspectos son explicitados. Al igual que en la trayectoria didáctica 1, cada uno de los *momentos* descritos permite identificar las *prácticas* generales, llevadas a cabo por la clase mediante el liderazgo de la profesora, cuando abordan la solución de PP1 (problema de búsqueda de antecedente). Esto es, (i) comentarios hechos por la profesora sobre los procedimientos de construcción (Pr1 y Pr2); tales comentarios se centraron en corregir asuntos del lenguaje y legitimar el uso de herramientas del EGD que alude a la circunferencia; (ii) estudio, liderado por la profesora y con participación ocasional de los estudiantes, de las conjeturas propuestas por los estudiantes como solución al problema; (iii) elaboración conjunta estudiantes-profesora (liderada por esta última) de la prueba completa de la conjetura Pp4; (iv) precisión de los pasos claves de la prueba de Pp4. La Tabla 48 precisa las normas que emergen o regulan tales prácticas y exponen las *situaciones instruccionales* que les corresponden. En negrilla se resaltan aquellas que son normas nuevas o ajustes (complementos o especificaciones de otras ya existentes). Vale indicar que Norma 35 hace parte de la situación instruccional instalación de una proposición que, como tal, no surgió en esta Trayectoria.

Tabla 48. PP1-Toda la Clase: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Prácticas	**Normas que las regula**	**Situación Instruccional asociada**	
Comentarios hechos por la profesora sobre los procedimientos de construcción (Pr1 y Pr2) asociados a PP1.	9a, 16, **18**, **19**		Construcción de una Figura
Estudio, liderado por la profesora y con participación ocasional de los estudiantes, de las conjeturas propuestas por los estudiantes como solución a PP1.	7, 14, **21**	5b.1	Formulación de una conjetura
Elaboración conjunta estudiantes-profesora (liderada por esta última) de la prueba completa de la conjetura Pp4.	17, **20**, **24**, **25**, **26**, **27**, **28**, **29**, **30**, **31**, **32**, **33**		Elaboración de una prueba
Precisión de los pasos claves de la prueba de Pp4.	**34**		

Los *objetos primarios* que emergen de las prácticas descritas se han ido explicitando a lo largo del análisis. Dos procedimientos de construcción son estudiados y considerados como correctos (Pr1 -igual al propuesto por el Grupo B-, Pr2); estos fueron reportados finalmente como lo muestra la Tabla 43 (L3). De nuevo, los conceptos protagonistas fueron *circunferencia* (C1), *radio* (C2) y segmentos congruentes (C3) y aparecen unos nuevos –*segmento* (C4) y *recta* (C5). Producto de tales procedimientos, fueron reconocidas tres conjeturas-solución al problema, Pp3, Pp4 y Pp5, la última de ellas descartada pues alude a una definición (la de *segmentos congruentes* -C3-) no a una proposición condicional que puede ser teorema. Un procedimiento más aparece en la prueba de Pp4, esto es, el *método* con el cual se desarrolla la prueba (Pr3), que para este caso es *directo* y se es sugerido por los pasos del Pr2. Ahora bien, la prueba de Pp4 en sí misma es un objeto primario, en este caso un *argumento global* Ad1 de estructura deductiva; sus reportes escritos con formato *Aserción-Garantía y Datos*, y *Núcleos-Pilares* son L4 y L5, respectivamente. Dicho argumento articula 17 proposiciones que son explicitadas en la Figura 37. La Figura 40 muestra la configuración (epistémica) de objetos matemáticos primarios emergentes de las prácticas descritas asociadas al PP1.

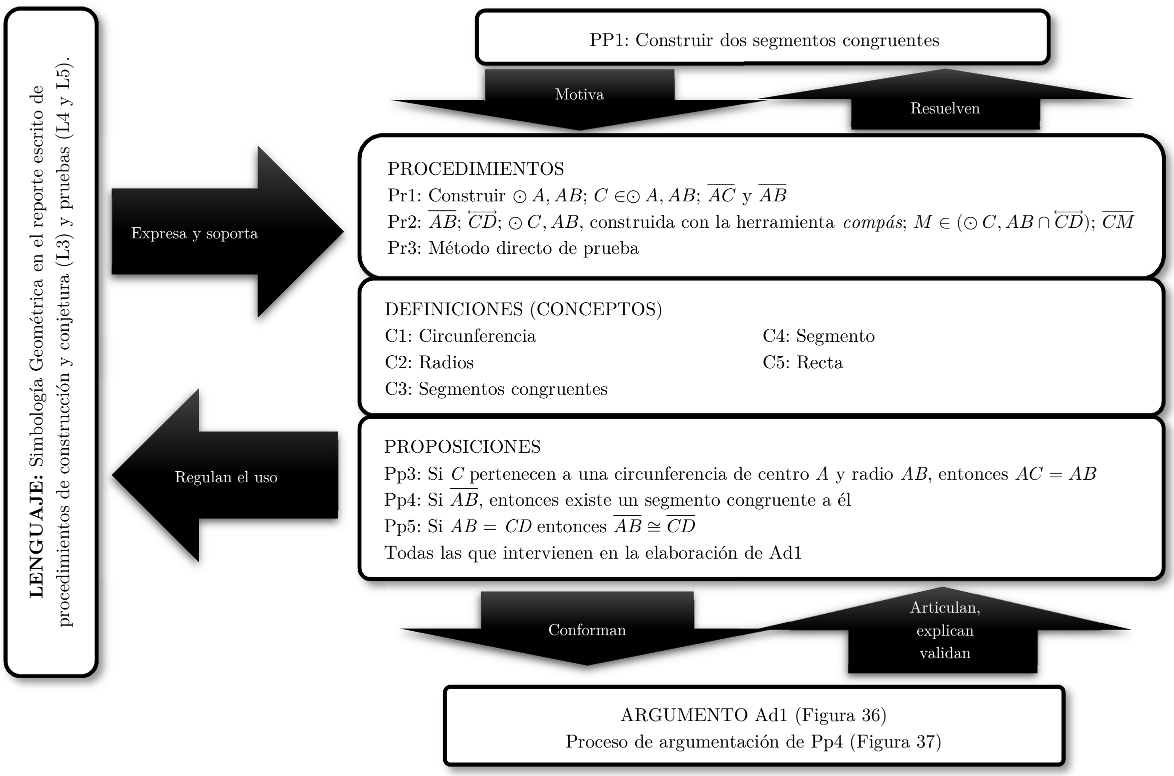


Figura 40. Configuración ontosemiótica epistémica relativa a PP1

Con el fin de sintetizar las normas que regularon la *trayectoria didáctica* 2 relativa a la actividad del toda la clase cuando abordó el PP1, se presentan dos Tablas. La Tabla 49 presenta el enunciado de cada una de las normas presentes en dicha trayectoria resaltando aquellas que surgieron como nuevas. La Tabla 50 dispone cronológicamente la aparición de las normas a lo largo de la trayectoria explicitado la codificación para cada norma y la frecuencia de normas asociado a cada código.

Tabla 49. PP1-Toda la Clase: Compendio normas *trayectoria didáctica* 2

Norma	Enunciado de la Norma
9a	Especificación: La justificación puede ser un argumento informal o una prueba. *Un argumento informal para el curso es aquel que se compone de las aserciones (sin sus respectivas garantías) que pueden ser insumo para la prueba formal. Puede indicar que los objetos necesarios para llevar a cabo tal prueba no están en el sistema teórico.*
18	Nueva: El EGD hace ostensivos objetos geométricos que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico.
19	Nueva: La profesora se encarga de hacer correcciones de fondo y forma respecto a los procedimientos de construcción que los estudiantes proveen como solución de un problema. Ella, finalmente, escoge aquellas que son consideradas como correctas.
20	Nueva: La existencia de los objetos que se definen debe ser probada; en otras palabras, una definición no garantiza la existencia del objeto definido.
21	Nueva: La profesora se encarga de precisar cuáles son las conjeturas que podrían ser probadas luego de llevarse a cabo un estudio conjunto entre ella y los estudiantes sobre aquellas conjeturas propuestas como solución a un problema.
22	Nueva: Los elementos que debe contener cada paso argumental son aserción, dato y garantía, donde la garantía es aquel objeto primario (definición, postulado, teorema) que soporta la aserción como consecuencia necesaria de los datos. El conjunto de todos los pasos argumentales conforma una prueba (argumento global).
23	Nueva: Uno de los formatos legítimo para presentar una prueba (argumento global de índole deductivo), denominado *Aserción-Garantía y Datos*, consta de una tabla a tres columnas; la primera de ellas registra el número del paso argumental, la asegunda registra la aserción respectiva, y la tercera registra la garantía y los datos correspondientes (estos últimos indicados mediante el número del paso puesto en la primera columna).
24	Nueva: El profesor asume la responsabilidad de preguntar por los elementos que constituyen los pasos argumentales de una prueba y tener en cuenta la respuesta de los estudiantes.
25	Nueva: El profesor asume la responsabilidad de determinar la validez del uso de las proposiciones dichas por los estudiantes en cada paso argumental.
26	Nueva: El profesor asume la responsabilidad de tomar la decisión final cuando existen varias opciones correctas sugeridas por los estudiantes.
27	Nueva: El profesor asume la responsabilidad de la sintaxis escrita (simbología geométrica) de los enunciados de los objetos. En el marco de la elaboración de una prueba, de los elementos que conforman el argumento global y ponerlos en el lugar indicado del formato *Aserción-Garantía y Datos*, cuando se hace la prueba en una actividad de toda la clase.
28	Nueva: Un teorema previamente instalado es obsoleto si existe un teorema en el sistema teórico más potente que lo contiene.
29	Nueva: Los estudiantes son los responsables de proveer verbalmente (en leguaje geométrico) las ideas iniciales de los pasos argumentales (semántica).

30	Nueva: Los estudiantes son los responsables de precisar verbalmente, con nombres particulares (sintaxis), los objetos involucrados en cada uno de los pasos cuando la profesora pide tal precisión.
31	Nueva: La prueba de la conjetura-solución de un problema que pide la construcción de un objeto (existencia de un objeto) es guiada por el proceso mismo de construcción; de manera más concreta, los pasos de construcción infunden las aserciones de los pasos argumentales de la prueba.
32	Nueva: La prueba de una proposición implica la precisión de los siguientes aspectos: el método empleado para desarrollarlo, y el dato inicial y aserción-objetivo que se pretende probar.
33	Nueva: Una prueba válida no necesariamente debe contener todos los pasos; esta puede estar compuesta de aserciones claves (Núcleos) con su respectiva garantía (Pilares); los núcleos con sus correspondientes pilares son los pasos que posibilitan con suficiencia la idea de la prueba y, en consecuencia, dan un indicio para precisar todos los pasos que conforman la prueba completa.
34	Nueva: Uno de los formatos legítimos para presentar una prueba, denominado *Núcleo-Pilar*, consta de una tabla a tres columnas; la primera de ellas registra el número del paso argumental, la asegunda registra la aserción clave respectiva, y la tercera registra la garantía correspondiente.
35	Nueva: No toda proposición que se prueba hace parte del sistema teórico del curso; no es suficiente probar una proposición para instalarla como Teorema del curso.

Tabla 50. PP1-Toda la Clase: Cronología de situaciones, objetos y normas asociados a *Trayectoria Didáctica* 2

Situaciones		Construcción de Figura				Formulación de Conjetura			Elaboración de una Prueba															
Objetos	**Procedimientos**	Pr1 Pr2							Pr3															
	Conceptos/Def	C1 C2				C1 C2 C3			C3 C4 C5 C5															
	Proposiciones					Pp3 Pp4 Pp5			Pp4 P. Existencia P. Distancia P. Recta-infinitos puntos P. RRS T. Localización															
	Argumentos								Ad1															
	Lenguajes	L3				L3			L4 L5															
Nivel	**Meta**		x					x	x	x	x						x			x	x	x	x	
Origen	**S**																							
	A																							
	C	x	x																					
	M				x	x	x		x	x	x						x				x	x	x	
	D			x		x		x			x	x	x	x	x			x	x	x	x		x	x
Faceta	**Fe**	x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Fc					x						x	x					x	x		x			x
	Fa																							
	Fi				x		x					x	x			x		x	x					x
	Fm			x				x				x				x								x
	Fec																							
Tipología TII	**Ni**										x	x											x	x
	Nle																	x	x					
	Nlp				x		x						x	x	x	x								
	Nt		x							x										x				
Normas		9a	16	18	19	7	21	14	20	17	22	23	24	25	26	27	28	29	30	17	31	32	33	34
		5b.1																						

Luego de presentar la síntesis anterior es posible hacer algunos comentarios que giran en torno a los siguientes asuntos: (i) La diferencia entre prácticas, situaciones instruccionales y objetos primarios al comparar las Trayectorias 1 y 2; y (ii) las normas que influyen directamente en el proceso de argumentación.

Con relación al asunto (i), cabe destacar que, aunque los momentos de cada una de tales trayectorias guardan una cierta relación entre sí (aluden al procedimiento de construcción, exploración y/o formulación de conjetura, y justificación (soporte) de una conjetura), las *prácticas* que se llevaron a cabo en dichos momentos difieren sustancialmente; por ende, difieren entre si los conjuntos de *situaciones instruccionales* que constituyen a cada trayectoria (ver Tabla 39 y Tabla 48). Por ejemplo, en lo que respecta al procedimiento de construcción, durante la actividad de toda la clase (Trayectoria 2) las prácticas se concentraron en la revisión de los procedimientos en forma y fondo. La profesora se encargó de hacer las respectivas correcciones con relación al lenguaje usado y legitimó el uso de herramientas que aluden a la circunferencia en los procedimientos. No se emplea el EGD para desarrollar los procedimientos (por ende, no se habla de construcciones robustas o blandas) ni se hace alguna representación gráfica que les corresponda, prácticas que tomaron lugar en la Trayectoria 1. Como se puede observar, aunque en ambas trayectorias hubo una *situación instruccional* relativa a la *construcción de una figura*, las prácticas respectivas difieren. En lo que respecta a la exploración y formulación de una conjetura, durante la Trayectoria 2 no hubo alguna discusión en torno a procedimientos de exploración, razón por la cual no se precisaron los objetivos del arrastre que eventualmente llevaron a cabo los estudiantes; cabe recordar que en la Trayectoria 1, los estudiantes hicieron un arrastre con el fin de verificar un hecho que ya conocían. Algo de similitud hubo en las prácticas correspondientes a la formulación de una conjetura, pues en ambas trayectorias se elaboró el consecuente de las conjeturas de manera similar. Dado que en la Trayectoria 2 no hubo como tal un momento de exploración, pero sí uno que se focalizó en la formulación de una conjetura, se vio la necesidad de aludir a una situación *instruccional* emergente, denominada *Formulación de la conjetura*. Finalmente, en lo que respecta a la justificación, a diferencia de la Trayectoria 1, gran parte de la Trayectoria 2 se centró en la elaboración de un argumento global deductivo para la conjetura Pp4, esto es, hubo espacio para una situación instruccional consistente en *hacer una prueba*. La descripción hecha con relación al asunto (i), particularmente en lo que corresponde al momento de justificación, explica en gran medida las diferencias sustanciales entre las configuraciones ontosemióticas (una cognitiva y la otra epistémica) expuestas en las Figura 35 y Figura 40.

Con respecto al aspecto (ii), la Tabla 49 deja ver que casi todas las normas presentes en la Trayectoria 2 son emergentes (nuevas), hecho que se explica por cuanto es la primera vez en el curso que se hace una prueba. Dichas normas influyen de manera diferente en el proceso de argumentación, diferencia que se puede explicar a partir de los códigos asignados a cada una de ellas (ver Tabla 50). Por ejemplo, las Normas 20, 30 y 31 influyen en tal proceso pues aluden de manera concreta a los aspectos que debe contener un paso argumental o un argumento global de carácter deductivo. Al hacer referencia a la estructura de un argumento (hablar *sobre* el argumento) estas normas son metanormas de faceta epistémica que tiene un origen esencialmente en las matemáticas, aun cuando la literatura en didáctica ha discutido sobre tal asunto (Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads, & Samkoff, 2012; Herbst, Chen, Weiss, & González, 2009; Molina & Pino-Fan, 2018).

Las Normas 23 y 34 influyen en el proceso pues aluden a las formas legítimas para comunicar de manera escrita un argumento global de estructura deductiva; en tal sentido, tienen esencialmente una faceta mediacional e interaccional. Dado que la literatura en didáctica de las matemáticas ha discutido sobre las ventajas o desventajas en el aprendizaje, del uso de tales formatos para presentar una prueba, estas normas tienen también una faceta cognitiva y un origen fundamentalmente en el campo de la didáctica.

Las Normas 24 a 27, 29 y 30 influyen en el proceso pues se refieren a las responsabilidades de estudiantes y profesora durante el desarrollo de elaboración de una prueba; en tal sentido, tienen esencialmente una faceta interaccional pues regulan las maneras de participación (cuándo participar y qué decir). Estas normas tienen también una faceta cognitiva pues son concreciones, cuando se elabora una prueba, del presupuesto de que el conocimiento se construye en participación e interacción con otros (Normas 1 y 3).

Un apartado especial merece la Norma 35. Es curioso que se explicite que no todo lo que se prueba en el curso se instale como Teorema del sistema teórico de la clase. Dada esta curiosidad, se indagó a la profesora al respecto.

Investigador:	Profesora, ¿cuándo se instaura un teorema en el curso? ¿Cuándo se usa? ¿Cuándo su enunciado se prueba?
Profesora	Si teorema instaurado significa incorporación al sistema teórico, creo que no queda instaurado cuando se usa para probar algo. Pero es un requisito para llegar a ser teorema instaurado. Incorporar un teorema al sistema teórico requiere probar su enunciado; reconocer su importancia, medible a través de si se requiere usarlo muchas veces, en procedimientos [de construcción de objetos] por ejemplo, si permite acortar varias pruebas, si se requiere para probar otro enunciado que sí será teorema. La idea es que el sistema teórico no sea muy extenso. Por eso, teoremas que han sido instaurados en un momento pueden ser eliminados en otro momento. Por ejemplo, el teorema Recta dos puntos se vuelve obsoleto cuando se tiene el T. Recta infinitos puntos. No acepto que un estudiante instaure un teorema, sí puede ser una decisión de todo el grupo [toda la clase] incluyendo al profesor. Es posible que en una tarea los estudiantes denominen como teorema un enunciado, pero ello no significa que queda instaurado en el sistema teórico. Pienso que es el profesor quién implícitamente o explícitamente toma la decisión.

En la respuesta de la profesora se aclaran características que dan cuenta de cuándo se un teorema es instalado para este curso (**Norma 35a**):

- El enunciado debe ser probado.
- El enunciado debe ser usado en la prueba de otro teorema.
- La profesora lo sanciona como tal.

Se esperaría que tales características se hagan ostensivas en algún momento en el que se traiga a colación la necesidad de instaurar un teorema. En razón a lo anterior, una *situación instruccional* de *instalación de una proposición* no tuvo lugar.

Para finalizar, vale indicar que a diferencia de la Trayectoria 1, no se hizo explícita alguna alusión a la tensión y dilemas citados en dicha trayectoria ni se presentaron unas nuevas. Ello, probablemente porque no se hizo la elaboración de la prueba de la conjetura 3 (Pp3) y, en consecuencia, no hubo espacio para que los estudiantes del Grupo B manifestaran sus experiencias por completo. Se estará pendiente de si estas toman lugar en trayectorias siguientes.

4.2.2 Análisis relativo a PA1.1, PA1.2 y PE2: sobre circunferencia

Durante la descripción y análisis de la trayectoria didáctica 3 se dijo que la profesora decidió elaborar la prueba de la conjetura Pp4 en lugar de Pp3 surgidas como solución al problema PP1. Esto, porque el uso que se hace del objeto *circunferencia* en Pr2 mediante la herramienta *compás* del EGD, se puede sustituir por el Teorema localización de Puntos (instalado en el sistema teórico del curso) como una de las garantías empleadas en la prueba de Pp4 (**Norma 18**).

Ahora bien, como el uso del objeto *circunferencia* en Pr1 y Pp3 no se puede remplazar por alguno de los objetos del sistema pues usa características propias de tal objeto, en la sesión de clase N° 3 la profesora propone dos problemas auxiliares que pretenden incluir formalmente este objeto en el sistema teórico del curso (acción que responde a la **Norma 18**):

> PA1.1: ¿Quién quiere promover una primera definición de circunferencia? [1]
> PA1.2: Ahora nos toca pensar en cómo muestro que realmente existe una circunferencia en nuestro sistema teórico; es decir, usando los elementos que tenemos hasta ahora, ¿es posible? [12]

Con el ánimo de estudiar la prueba que surgió de PA1.2, la profesora propuso el siguiente Problema Extraclase:

> PE2: En clase demostramos que las circunferencias tienen infinitos puntos. Para ello, ¿es realmente necesario usar los rayos opuestos? Justifique su respuesta.

En lo que sigue se hará el análisis asociado a cada uno de tales problemas.

4.2.2.1 *Trayectoria didáctica 3: Actividad matemática sobre PA1.1 – Toda la clase*

Andrés es el primero en dar respuesta a la pregunta PA1.1 Propone lo siguiente: *Son todos los puntos que pertenecen a un plano y que equidistan de un punto* [2]. Para estudiar la definición provista por Andrés (Práctica), la profesora propone a toda la clase emplear el software Cabri 3D y construir en él una circunferencia. Dado que es la primera vez que se usa tal EGD, la profesora da unas instrucciones básicas para su uso (ampliar la pantalla a escala 2, borrar los vectores que por defecto aparecen, nombrar objetos, etc.). Enseguida, dice que lo que se va a hacer es construir una circunferencia en el plano que por defecto muestra Cabri 3D. La profesora va haciendo preguntas respecto de lo que el software va ilustrando a la vez de que se siguen los pasos que dicho software requiere para hacer la construcción. Se presenta la trascripción de este fragmento de la clase. Enseguida, el análisis normativo respectivo.

3 P: Bien ¿qué es lo que vamos a hacer? Vamos a pedirle que nos construya una circunferencia en este plano, y nos vamos a fijar que nos comunica el programa respecto a esa opción. Entonces van a buscar dónde está la herramienta que nos permita construir circunferencia y se van a fijar que mensaje me está dando el programa y si esos mensajes concuerdan con la definición o no, si produce lo que esperamos. [Da un espacio de 1 minuto, 30 segundos para que los estudiantes trabajen en el computador]. ¿Encontraron la herramienta todos? [Selecciona la opción circunferencia en el software] ¿Qué es lo primero que me dice?

4 Varios: El plano.

5 P: Que si la quiero en ese plano, es lo primero que me dice. O sea que eso me da la idea que de pronto, si me pregunta eso, ¿qué está tratando de comunicarme?

6 Steven: Que la circunferencia está contenida en un plano

7 P: Si me está preguntando eso, es porque de pronto podría estar en otra parte; pero nosotros, en nuestra definición dijimos que la queríamos en el plano, ¿cierto? [Se acerca de nuevo al programa] entonces le decimos que sí. Y nos parece que sí, en el plano. [Aparece la siguiente imagen:

Figura 41. Representación del plano en Cabri 3D

Significa que esto [señala "plano" en el tablero] y que Cabri 3D está ceñido al sistema teórico de la geometría euclidiana, entonces él me está diciendo usted lo tiene en este plano, ese será su primer elemento para poder construir esa circunferencia: un punto en el plano, ¿de acuerdo? Entonces, después ¿qué tengo que hacer?

8 Varios Moverlo [se refieren al cursor]

9 P [La profesora, empieza a arrastrar el cursor y empieza aparecer una representación gráfica de una circunferencia:

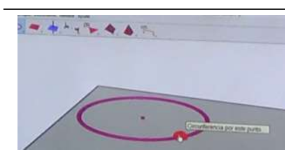


Figura 42. Representación de una circunferencia en Cabri 3D

Al moverlo qué hice…

10 Karen ¿Ponerle radio?

11	P	Le asigné un radio. Bien, qué es lo chévere de este plano y de Cabri 3D: Que también puedo manipular y cambiar el tamaño [mueve el punto que determina el radio de la circunferencia]. Pero también lo puedo mover con el clic derecho puedo mover le plano, la vista que tengo, le llaman la caja de cristal. Ahí puedo ver el plano desde diferentes puntos de vista [manipula el software cambiado la perspectiva de visualización]. Entonces vamos a modificar nuestra definición de acuerdo con lo que vimos aquí. Entonces esta definición, una circunferencia es todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo en el mimo plano [D2], ya la habíamos visto en el curso de Elementos, ¿cierto? Ahí ya la habíamos visto como una de las definiciones que habíamos trabajado en el curso. Entonces, pues claro, yo estoy introduciendo este objeto geométrico porque alguien sugirió que esa era una forma de lograr la primera tarea que yo les puse, mostrar que existe dos segmentos congruentes, pero introducirlo, no significa decir que ya aceptaba la sugerencia de esos grupos. Lo primero que hacemos cuando queremos introducir un objeto nuevo al sistema es preguntarnos si teóricamente existe.

Dado que la actividad que lleva a cabo toda la clase se enfoca en estudiar la propuesta de definición de circunferencia dada por Andrés para refinarla y formular su versión final, la situación instruccional asociada es la *instalación de un concepto*. De manera paralela toma lugar una situación instruccional de *construcción de una figura* puesto que, al realizar dicho estudio, se empleó en EGD Cabri 3D para hacer la construcción de una circunferencia. La Tabla 51 explicita las normas (todas nuevas) que regulan la práctica llevada a cabo. Vale indicar que la Norma 5b.1 es trasversal puesto que las verbalizaciones hechas emplean lenguaje geométrico.

Tabla 51. PA1.1: Normas *Trayectoria Didáctica* 3

	Norma	Codificación
36	Los estudiantes tienen la responsabilidad de proveer las primeras ideas respecto a la definición de un objeto.	**F~Fe; F~Fi; Nle:** Es una particularización más de la Norma 2. En este caso, el estudiante debe proveer sus ideas respecto a la definición de un objeto geométrico.
37	Las representaciones y procedimiento de construcción de EGD, realimenta las ideas de los estudiantes respecto a su concepción sobre los objetos-definición.	**F~Fm; F~Fc; O~D:** El episodio muestra cómo la profesora pretende usar el EGD como un medio para dirimir y realimentar las ideas sugeridas por los estudiantes (Laborde, 2000); en este caso, refinar o ajustar definiciones enunciadas por ellos a partir de los pasos de construcción del objeto exigidas por el software Cabri3D.
38	La profesora se responsabiliza de formular la definición final luego	**F~Fe; F~Fi; Nlp:** Como representante de la comunidad de expertos es la profesora quien

	escuchar a los estudiantes o usar el EGD para realimentar ideas.	institucionaliza la definición de los objetos en el curso.
39	Un procedimiento de construcción de un objeto es válido (teóricamente) una vez todos los objetos que intervienen están instalados, esto es, cada paso tiene se garantiza por un objeto del sistema teórico.	**F~Fe; O~M; Nt; M:** En [11] la profesora al decir que "pero introducirlo [aludir al objeto circunferencia], no significa decir que ya aceptaba la sugerencia de esos grupos [se refiere al Pr1]", advierte que un procedimiento es válido cuando todos los objetos que intervienen en él están instalados. Es metanorma en tanto alude a la validez de un procedimiento.
40	Instalar una figura geométrica geométrico (objeto-concepto) en el curso implica definirlo y probar su existencia. No es suficiente su uso en un procedimiento de construcción, por ejemplo. La profesora se encarga de oficializar la instalación.	**F~Fe; O~M; Nt; Nlp; M:** En [11] la profesora precisa que introducir un objeto geométrico (concepto) en el sistema teórico (instalarlo) implica definirlo y garantizar su existencia teóricamente. Actúa en correspondencia con los cánones de las matemáticas. Es metanorma en tanto alude a criterios para instalar un concepto.
20	Una definición no garantiza la existencia del objeto definido**.**	**F~Fe; O~M; M:** En las últimas líneas de [11], la profesora reitera que debe ser probada la existencia de los objetos actuando en consecuencia a la Norma 20. Es metanorma en tanto alude a una definición (*i.e.*, asuntos que esta no garantiza).

4.2.2.2 *Síntesis y breves comentarios: Trayectoria didáctica 3*

El análisis realizado, relativo a la solución de PA1.1 (problema de *formulación de definición*), permitió identificar como *práctica* general el estudio de la definición de circunferencia provista por Andrés (D1) y, por ende, instaurar la definición de circunferencia válida para el curso. El estudio se fundamentó en hacer un procedimiento de construcción del objeto circunferencia en Cabri 3D (Pr4). Estos hechos permiten afirmar que dos situaciones de instrucción tomaron lugar en la actividad de la clase: *instalación de un concepto* y *construcción de una figura*. La Tabla 52 muestra las normas asociadas a dichas prácticas indicando las situaciones instruccionales asociadas. La Tabla 53 muestra la cronología de las situaciones, objetos y normas asociadas a la práctica descrita.

Es importante destacar que, a la luz de la Norma 38, la práctica llevada a cabo en este episodio no permitió instalar el concepto de *circunferencia* puesto que, si bien se instauró una definición para tal objeto, no se hizo una prueba formal de su existencia. El objeto *circunferencia* se definió, pero la prueba de su existencia no se hizo; en consecuencia, la situación instruccional de instalación de un concepto se desarrolló parcialmente.

Tabla 52. PA1.1-Toda la Clase: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Prácticas	**Normas que las regula**	**Situación Instruccional asociada**
Estudiar una definición de un objeto geométrico (para este caso circunferencia) a partir del procedimiento de construcción seguido en Cabri 3D.	36, 38, 40, 20	Instalación de un concepto
	37, 39	Construcción de una Figura

Tabla 53. PA1.1-Toda la Clase: Cronología de situaciones, objetos y normas asociados a *Trayectoria Didáctica* 3

Situaciones		Instalación de un concepto/ *Construcción de una figura*					
Objetos	**Procedimientos**	Pr4					
	Conceptos/Def	C1	D1	C2			D2
	Proposiciones			Pp6	Pp7		
	Argumentos					Ace1	
	Lenguajes	L6					
Nivel	**Meta**				x	x	x
Origen	**S**						
	A						
	C						
	M				x	x	x
	D		x				
Faceta	**Fe**	x		x	x	x	x
	Fc		x				
	Fa						
	Fi	x		x			
	Fm		x				
	Fec						
Tipología TII	**Ni**						
	Nle	x					
	Nlp			x		x	
	Nt				x	x	
	Normas	36	*37*	38	*39*	40	20

Varios *objetos primarios* de diversa índole emergieron de la práctica correspondiente. El objeto *circunferencia* (C1) fue el objeto protagonista; se instauró su definición (D2) como resultado de un ajuste sutil hecho a la definición propuesta por Andrés (D1). Dicho ajuste fue producto de realizar un procedimiento de construcción (Pr4) de una circunferencia en Cabri 3D que produce la representación gráfica de esta [L6]. En medio del procedimiento se aludió al objeto *radio* (C2); no fue pronunciada su definición. Un argumento empírico de convicción externa (Ace1) fue empleado por la profesora para legitimar que la definición D2 es correcta [11]. El hecho de reconocer al EGD como una herramienta que corporeiza a la Geometría Plana Euclidiana, se usa como soporte -backing en términos de Toulmin- para afirmar que D2 es correcta, es decir, apoya que *las condiciones impuestas por Cabri 3D para construir una circunferencia* (*i.e.*, punto fijo, puntos de la circunferencia en el mismo plano, radio o distancia entre dicho punto fijo y los puntos de la circunferencia indicada por el movimiento del mouse -Pp6-), efectivamente llevan a determinar que *D2 es correcta* (Pp7). Para este caso, el EGD es un agente externo de autoridad que permite afirmar que la definición está bien formulada. La Figura 43 muestra la configuración ontosemiótica epistémica que emergió de la práctica asociada a PA1.1. Para indicar que el argumento Ace1 no es una deducción de carácter formal sino empírico, el rectángulo que contiene a Pp7 en el diagrama respectivo tiene una línea discontinua.

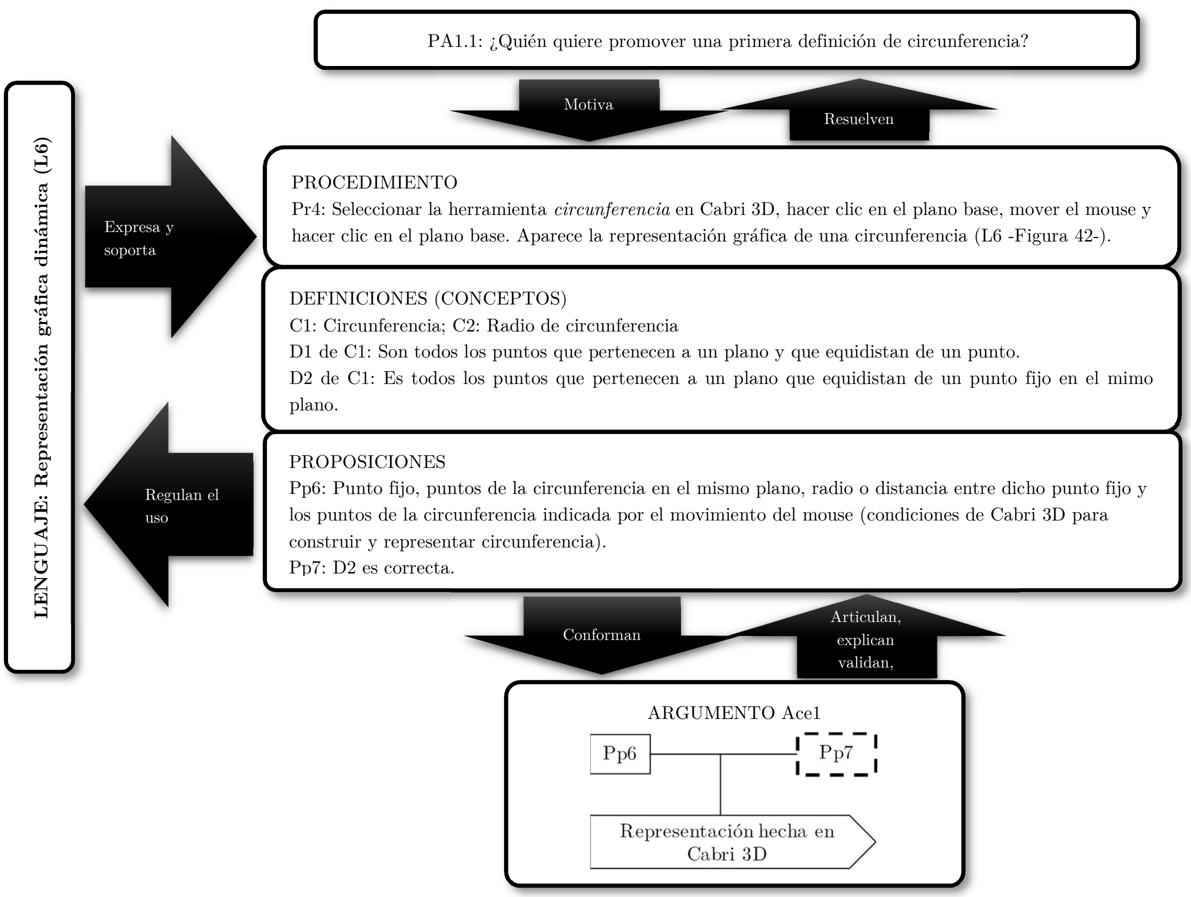


Figura 43. Configuración ontosemiótica epistémica asociada al PA1.1

4.2.2.3 *Trayectoria didáctica 4: Actividad matemática sobre PA1.2 y PE2 – Toda la clase*

Esta trayectoria se concentra en la elaboración conjunta, estudiantes y profesora, de la prueba de la existencia del objeto circunferencia (como respuesta PA1.2). El desarrollo de esta se hace durante sendos fragmentos de las sesiones de clase 3 y 4; en la primera de ellas se elabora la prueba y en la segunda, se discute sobre un problema de una Tarea Extraclase (PE2) que pone en discusión uno de los pasos de la prueba realizada.

En lo que sigue, se presenta la descripción y análisis de la trayectoria. Sólo se trascriben aquellos fragmentos de interacción que ilustren alguna una función en la participación o argumento que sean diferentes a los presentados para la Trayectoria Didáctica 3, o de los cuales emerjan normas no tenidas en cuenta hasta ahora. Esto alivianará la presentación de los análisis. La trayectoria didáctica se divide en tres momentos concretos: la determinación del enunciado del teorema a probar, la elaboración conjunta de la prueba y el estudio de relativo al PE2.

Momento 1. *La determinación del enunciado del teorema a probar*: Luego de que la profesora advierte sobre la necesidad de hacer la prueba de la existencia de una *circunferencia* como una necesidad para instalarla como objeto-concepto del sistema teórico, ella pregunta a los estudiantes por el enunciado que se pretende probar [11]. Esto en correspondencia con la **Norma 32**, se deben precisar los datos dados y la aserción-objetivo que se quiere probar. En respuesta, dos enunciados son propuestos por los estudiantes:

i. Varios [12]: Dado un plano, entonces existe una circunferencia (Pp8).
ii. Angélica [13]: Dado un plano y un punto P, y un x número positivo, entonces existe una circunferencia de centro P y radio x (Pp9).

Como es costumbre, la profesora se responsabiliza de la sintaxis escrita y escribe en el tablero los enunciados (**Norma 27**) correspondientes. El primero queda escrito de igual forma a como se escribió antes; el segundo queda escrito como sigue: Dado un plano α y un punto P, $P \in \alpha$, y $x \in \mathbb{R}^+$, entonces existe una circunferencia con centro P y radio x. La profesora pide a los estudiantes decidir sobre cuál de las dos opciones dejar [14]. Jefferson apunta a que Pp8 es mejor ya que del plano dado puede obtener los objetos incluidos en la segunda [15]. Tatiana 1 también advierte que Pp8 es mejor porque si se pretende usar Pp9, tocaría garantizar que todas las condiciones de su antecedente están involucradas en la situación. José descarta en principio Pp4 por cuanto involucra objetos que no se han definido, a saber, *centro* y *radio* [16].

Los pronunciamientos de estos tres estudiantes permiten inferir tres criterios (Normas) que ellos pusieron en práctica, quizá generados en curso previos, para decidir cuál enunciado de una proposición (teorema) es mejor (**Norma 41**):

a) Se escoge el enunciado que tiene como antecedente aquel que permite inferir todo lo que contiene el antecedente del otro enunciado. En otras palabras, se escoge el enunciado cuyo antecedente sintetiza el antecedente del otro (Jefferson).
b) Se escoge el enunciado cuyo antecedente no tiene tantas condiciones. Como consecuencia, su uso en la demostración no implica tanta exigencia en los datos necesitados (Tatiana 2).
c) Se escoge el enunciado que emplea elementos instalados en el sistema teórico; es decir, se escoge aquel que tiene sentido (matemático) en el sistema teórico (José).

Al respecto de lo dicho por José, la profesora decide complementar la definición de circunferencia D2 formulada en la Trayectoria 3. El nuevo enunciado de la definición (D3) queda como sigue [17]: *Es todos los puntos que pertenecen a un plano que equidistan de un punto fijo en el mimo plano. El punto centro se llama centro, y la distancia entre el centro y los puntos del plano que equidistan de este se llama radio*. Luego de escribirla, ella dice que la observación dada por José ya no tiene sentido pues los objetos han sido definidos. Tatiana 2 apunta a la segunda opción diciendo lo siguiente [18]:

> Es que según Geometría Dinámica, para poder construir la circunferencia, necesito un punto, o sea que no me sirve solo el plano porque si yo tengo el plano entonces en Cabri 3D no me aparecería la circunferencia, entonces esa sería una herramienta [se refiere al punto] para nosotros podernos guiar de lo que nosotros necesitamos para poder construirla y si Cabri 3D nos exige un punto, pues sí necesita tener en los datos un punto y una medida, porque al poner el punto en el plano y al arrastrar, al seguir el siguiente procedimiento, dice que debo tener una distancia, entonces no se necesita el plano para poder construirla.

En relación con ello, la profesora dice que Tatiana 2 está actuando de manera similar a como se ha hecho en ocasiones anteriores; esto es, basarse en lo que exige el software para construir, y en el procedimiento para hacer los pasos argumentales [19]. En otras palabras, está actuando en correspondencia con la **Norma 31**.

La profesora decide asumir el primer enunciado. Advierte que la segunda alude a todos los objetos que al parecer deben estar involucrados, y quiere ver si es necesario incluir los objetos *punto en el plano* y *número positivo* en el antecedente [20]. Con lo anterior, la profesora actúa en correspondencia con la **Norma 26** pues finalmente ella decide sobre las opciones dadas por los estudiantes.

Momento 2. *La elaboración conjunta de la prueba*: La profesora escribe *Aserción-Garantía y dato* indicando el formato en el que se va a presentar la prueba (**Norma 23**). Escribe como primer paso argumental α *un plano* (aserción) y *Dado* (garantía). Enseguida, la profesora pregunta sobre cuál sería el segundo paso [21]. Al respecto, toma lugar la siguiente interacción:

	Emisor: FPar	Enunciado / *Referencia a un agente anterior*	FArg
22	Varios: A~E	Un punto P en α por Postulado Conjunto de Puntos. *Profesora*	Paso~E
23	Andrés: A~E	Tres puntos en α, para poder definir la distancia entre dos [de ellos]… Y usamos el Postulado plano - tres puntos *Refuta idea de Varios estudiantes*	Paso~E
		[…]	
27	Karen: A~E	Es que sabemos que los reales son infinitos, entonces existen los reales positivos sin necesidad de sacar la distancia entre los puntos. *Refuta idea de Andrés*	Paso~E
28	P: P~E	O sea, tú me dices que el siguiente paso puede ser simplemente un punto y luego x un real positivo *Karen*	A~P
29	Karen: R~E	Sí. *Profesora*	A~P
30	P: A~E	Y ahí uso… *Karen*	G~P~I
31	Karen: A~E	Propiedad de los reales. *Profesora*	G~E
		[…]	
101	P: A~E	Los pasos 2 y 3 finalmente muestran lo que exigía en el antecedente la conjetura dicha por Angélica [13]… Bueno y también lo que pide… Cabri para hacer a construcción [de la circunferencia]. Por eso fue mejor poner lo que dijiste tú [se refiere a Karen] en esos pasos y no la idea de… Andrés, que también funciona pero que se aleja un poco de lo que realmente se necesita…, el punto [centro de la circunferencia] y el número [radio de la circunferencia]. *Varios, Andrés y Karen*	Paso~P

Dos opciones son propuestas como segundo paso argumental, aludir a un punto P en el plano [22] o a tres puntos en el plano [23]. Aunque la intervención de Karen [27] parece enfocarse en lo que sería el tercer paso argumental, permite dilucidar cuál de las dos opciones seguir para el segundo paso pues su idea refuta la propuesta de Andrés; esto porque indica que no son necesarios dos puntos para obtener un número positivo. Con este panorama, la profesora atiende la idea de Karen, la corrige en su sintaxis y pone como pasos 2 y 3 las ideas expuestas en [22] y [28, 31], respectivamente. En la Figura 46 se puede ver el reporte escrito de cada uno de los pasos de la prueba. Lo que más se destaca de este aparatado en lo que aparece en [101]. La profesora, luego de haberse terminado la elaboración de la prueba, indica sus razones de la escogencia de la opción indicada por Karen: atender directamente las condiciones mínimas suficientes exigidas por la definición de circunferencia para caracterizar tal objeto, y el procedimiento de construcción de este en Cabri (punto y número positivo) para lograr su representación gráfica. Al respecto de esto último, la profesora actúa en correspondencia con las **Norma 31**.

Luego de preciados los pasos argumentales 2 y 3, la profesora pregunta sobre qué hacer en el siguiente paso, es decir, indaga sobre ideas para continuar la prueba. Dos propuestas surgen:

33	Mariana:	Hagamos varias rectas que contengan al punto [P]. Eso lo puedo hacer por el teorema… este que se llama… Teorema punto-infinitas rectas.
36	Carolina:	Pues me parece que nos enredamos más [se refiere a la idea de Mariana]. Necesitamos rayos, y determinar la distancia. Mejor dicho, determinemos los rayos… Con el de números reales rayos [se refiere al P. Números reales - rayos].

La profesora decide comentar las ideas (sirve de portavoz) y acompañarlas con representaciones gráficas hechas en el tablero:

37 P: Ah, con construcción de ángulos ir construyendo ángulos. Aquí el plan es [se refiere al plan dicho por Mariana], tengo un plano α, mi punto P y los estoy llenando de muchísimas rectas. [Hace la representación gráfica de la Figura 44 -L8-]

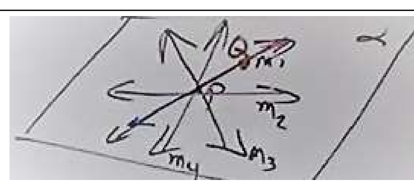


Figura 44. Prueba Existencia de circunferencia: Representación gráfica idea Mariana

> Tú propones [se refiere a Carolina], aquí está el plano α, una recta que contiene a al punto P, solo m la voy a llamar, y aquí [en tal recta] escoges cualquier punto diferente de P, llamémosle Q, y ahora empiezas a generar rayos… [Hace la representación gráfica de la Figura 45 -L9-].

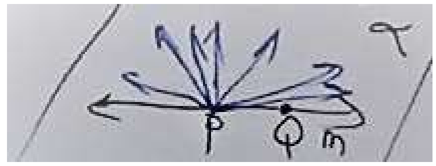


Figura 45. Prueba Existencia de circunferencia: Representación gráfica idea Carolina

> O sea que voy a tener que hablar de medida de ángulos, distintas medidas de ángulos, y ¿construir un rayo para cada posible medida de ángulo? Y eso te parece más económico [se dirige a Carolina] que lo que propone él [se refiere a la idea propuesta por Mariana]. Solo queda acá [se refiere a que, en la idea de Carolina, los rayos quedan en un solo semiplano].

En este fragmento, la profesora parafrasea las ideas de los estudiantes. Lo novedoso es que las acompaña con sendas representaciones gráficas con el ánimo de ilustrarlas y explicar de mejor manera qué es lo que cada una involucra. La profesora actúa en correspondencia con una norma que es usual en el contexto de la geometría, consistente en realizar representaciones gráficas (en este caso, estáticas) que ilustren las ideas verbales o escritas como apoyo del proceso argumentativo (**Norma 42**).

Antes las dos propuestas descritas en [37], varios estudiantes proveen ideas de pasos argumentales intentando seguir alguno de los caminos propuestos: Diana, por ejemplo, con base en la idea de Mariana, dice [40]: *podemos construir rayos en las rectas por Teorema Recta Rayo Segmento, luego sus rayos opuestos, y localizar en ellos la distancia x.* Por su lado, Tatiana 2, a partir de la idea de Carolina, indica [44]: *teniendo este* [señala la Figura 45] *pues construimos los rayos opuestos y localizamos los puntos.* Al respecto, la profesora replica [45]: *En este caso* [propuesta de Carolina], *necesitamos los rayos opuestos*, *y aquí* [idea de Mariana] *también necesito lo rayos opuestos*, ¿*cierto*? Con este escenario, Andrés interviene con un comentario que cuestiona las ideas planteadas y lleva a que la profesora haga una aclaración respecto a lo que se quiere demostrar y a lo que efectivamente se está demostrando a luz de los pasos que se han sugerido hasta el momento. A continuación, se trascribe el fragmento correspondiente:

	Emisor: FPar	Enunciado / *Referencia a un agente anterior*	FArg
46	Andrés: A~E	Profe, yo creo que nos estamos desviando mucho. Tenemos que demostrar la existencia de la circunferencia y pues con encontrar al menos dos puntos que equidistan de P, pues ya tenemos la existencia. Después sí sería mirar… *Refuta ideas de Mariana, Carolina, Diana, Tatiana 2*	Idea~E R~E
47	P: A~P	¿Basta encontrar dos? *Andrés*	Idea~E~I
48	Steven: A~E	Tres. *Refuta idea de Andrés*	Idea~E
49	P: En~P	¿Tres? ¿Infinitos? Con uno, basta con un punto, basta encontrar un punto para saber que existe, porque existir, se ha definido circunferencia como un conjunto de puntos, y un conjunto de puntos existe si hay alguien ahí. Basta uno. Basta uno para este teorema de existencia. Lo que estamos tratando de demostrar entonces es qué… *Refuta ideas de Andrés y Steven, pero usa la de Andrés para hacer claridad*	Idea~P
50	Tatiana 2: A~E	Que tiene infinitos *Profesora*	A~E: Precisa la Aserción-objetivo
51	P: En~E	Que tiene infinitos porque puede que eso lo necesitemos en algún momento. O sea, para demostrar la existencia no necesito todo esto [señala las representaciones gráficas de la intervención 37], necesito una sola recta que contenga a P y un punto en esa recta que tenga esa distancia [se refiere la distancia x] y ya ese conjunto es diferente de vacío. Pero, realmente me interesa es demostrar que tiene infinitos puntos porque seguramente voy a tener más de un punto. Entonces, aquí estamos demostrando otro teorema, Circunferencia infinitos puntos, y cuál es el enunciado del teorema [Escribe en el tablero Teorema Circunferencia- infinitos puntos: Dada $\odot P_x$, entonces existen infinitos puntos en ella]. Hasta ahora no hemos demostrado que existe, pero al hacer esto [señala lo escrito en el tablero] vamos a lograrlo. Vamos a demostrar que existe tan pronto tengamos un punto que realmente tiene esa distancia [x] y vamos a demostrar que son infinitos. Hay dos caminos y los dos caminos me parecen que son válidos, y no veo que ninguno sea más económico que el otro. Ya tenemos las rectas, entonces cómo hacer surgir los rayos. Aquí los rayos surgen inmediatamente [idea de Carolina], por cada número real entre 0 y 180 hay un rayo; aquí [idea de Brayan] cómo hago para que surjan los rayos. *Karen*	A~E: Precisa la Aserción-objetivo, y cómo se prueba un teorema de existencia de un objeto que alude a un conjunto de puntos.

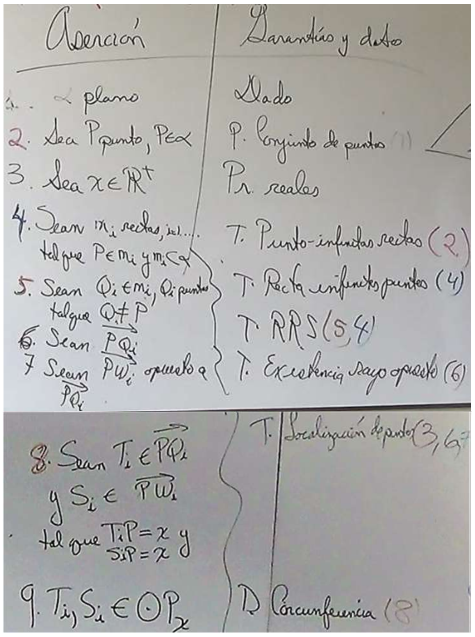
En [46], Andrés refuta las ideas planteadas previamente por sus compañeros indicando que con ellas se están desviando de la aserción-objetivo que deben probar, esto es, la existencia de la circunferencia. Comenta que para lograrlo es suficiente probar que dos puntos equidistan de P, lo cual no se condice con las ideas que habían propuesto Mariana o Carolina según las cuales se necesitan infinitos objetos (rectas o rayos) donde se ubicarían infinitos puntos que equidisten de P. Con su intervención, Andrés ejerce un control epistémico del proceso de demostración que se responde con el hecho de nunca perder de vista la aserción-objetivo durante la elaboración de una prueba (**Norma 43**).

Ante la idea de Andrés, la profesora pregunta cuántos puntos son suficientes para probar la existencia en cuestión. Steven dice que tres. Sin pedir a los estudiantes (Andrés y Steven) que expliquen sus sugerencias, en [49] ella aclara que para probar la existencia de un conjunto de puntos es suficiente mostrar que dicho conjunto no es vacío (**Norma 44**). Para este caso bastaría con determinar la existencia de un punto cuya distancia a P sea x, el número positivo que se ha determinado como distancia según el paso 3.

Hecha esta precisión, la profesora cuestiona sobre qué es entonces lo que se está demostrando según las ideas que se han propuesto hasta el momento [49] (actúa en correspondencia con la **Norma 32**). Tatiana 2 dice que *la circunferencia tiene infinitos puntos* [50]. Enseguida [51], la profesora valida la respuesta, y la complementa: escribe el enunciado del teorema que se estaría demostrando (T. Circunferencia-infinitos puntos: Dada $\odot P_x$, entonces existen infinitos puntos en ella -Pp10-), y dice que con la prueba que están desarrollando, no sólo se garantiza la existencia de la circunferencia, sino que esta tiene infinitos puntos.

Finalmente, la profesora decide desarrollar la prueba según la idea de Mariana (**Norma 26**). En una dinámica análoga a la ocurrida en el Momento 3 de la Trayectoria Didáctica 3, la profesora pregunta por los pasos argumentales que se corresponden con dicha idea (**Norma 24**). Los estudiantes precisan verbalmente las ideas o aserciones, garantías y datos (**Normas 29** y **30**); en este proceso participan Tatiana 2, Steven, Mauricio, Rocío y Sandra para proponer, respectivamente, los pasos 5, 6, 7, 8 y 9. Por su parte, la profesora se encarga de la sintaxis escrita de dichos elementos y ponerlos en las columnas correspondientes del formato *Aserción-Garantía y datos* (**Norma 27**) Con respecto a la sintaxis, un asunto interesante respecto a la simbología es aclarado por la profesora; los subíndices que acompañan a los nombres de objetos (rectas o puntos, *e.g.* m_i o T_i) indican que son infinitos las rectas o los puntos que se quiere involucran en la prueba. Vale indica que cumplir la **Norma 39** incentiva práctica descrita puesto que hay un interés por argumentar cada paso de los procedimientos de construcción con objetos del sistema teórico.

El argumento global (Ad2) resultante del proceso se presenta en la Figura 46.



c. Reporte escrito en el tablero

Aserción	Garantía y datos
α un plano	Dado
Sea P punto, $P \in \alpha$	P. Conjunto de puntos (1)
Sea $x \in \mathbb{R}^+$	Pr [Propiedad]. Reales
Sean m_i rectas tal que $P \in m_i$ y $m_i \subset \alpha$	T. Punto-infinitas rectas (2)
Sean $Q_i \in m_i$, Q_i punto tal que $Q_i \neq P$	T. Recta-infinitos puntos (4)
Sea $\overrightarrow{PQ_i}$	T. RRS (5, 4)
Sean $\overrightarrow{PW_i}$ opuestos a $\overrightarrow{PQ_i}$	T. Existencia rayo opuesto (6)
Sean $T_i \in \overrightarrow{PQ_i}$ y $S_i \in \overrightarrow{PW_i}$ tal que $T_iP = x$ y $S_iP = x$	T. Localización de puntos (3, 6, 7)
T_i, $S_i \in \odot P_x$	D. Circunferencia (8)

d. Trascripción reporte escrito en tablero

Figura 46. Reporte escrito prueba de Pp5

Momento 3. *El estudio de relativo al PE2.* En la sesión de clase N° 4 la profesora propone abordar lo que hicieron los estudiantes a propósito del PE2 [1]. Ante la pregunta *¿es realmente necesario usar rayos opuestos en la demostración de que la circunferencia tienen infinitos puntos*?, pretende que los estudiantes argumenten sobre la necesidad o no del paso 7 de la prueba de Pp10. Varios estudiantes (Andrés [2], Mauricio [4], Tatiana 2 [6], Yenni [8], Diego [12] y Karen [13]) afirman que no es necesario hacerlo; ninguno dice que sí. Los primeros cuatro estudiantes fundamentan su explicación en el hecho de que infinitos puntos que equidistan a P se pueden garantizar al determinar las infinitas rectas que contienen al punto P, indicar para cada recta un rayo con extremo en dicho punto y ubicar en tales rayos un punto cuya distancia a P sea x. En otras palabras, refutan dicho el paso argumental 7 y, por ende, la parte del paso 8 que alude a los rayos opuestos $\overrightarrow{PW_i}$. Por su parte, Diego comenta que si se usa la idea planteada por Carolina –construir infinitos rayos usando el Postulado Rayos-Número reales (ver Figura 45)–, en los dos semiplanos tampoco es necesario aludir a rayos opuestos. Karen, aunque también alude a la idea de Carolina, fundamenta su respuesta en un sentido distinto al planteado por Diego. Dice que el objetivo de la prueba era justificar que la circunferencia tiene infinitos puntos y no que los puntos están en ambos semiplanos; por lo tanto, la idea de Carolina es suficiente para contemplar infinitos puntos que equidistan de P.

Con este escenario, la profesora pregunta: *Entonces, qué logramos con todo lo que hicimos* [14]. Sandra responde [15]:

> Yo creo que nos desviamos un poco de la intención de demostrar que había infinitos en la circunferencia. Lo que quisimos... teníamos que demostrar es... todos... Mejor dicho, de qué forma decidir cómo se construye la circunferencia con todos, todos, todos los puntos; que la completen. Entonces pensamos en los rayos opuestos o incluir además de un semiplano, el otro.

La profesora retoma lo dicho por Sandra (sirve de portavoz) y comenta [16] que lo que finalmente guio la prueba fue la imagen que todos tenían de circunferencia, completa y sin huecos. Termina diciendo que no está mal lo realizado y que probablemente sobra el paso 7. Pero que, si se quiere seguir la idea de Carolina, sí es necesario aludir a ambos semiplanos para garantizar la inclusión de todos los puntos del plano que equidista de P y con ello, que el objeto circunferencia coincida con su representación gráfica.

De lo descrito al respecto del PE2, que en esencia busca reflexionar *sobre* la prueba de Pp10, vale la pena destacar tres asuntos en relación con la actividad de los estudiantes y profesora:

i. Los estudiantes refutaron dos pasos argumentales de dicha prueba (pasos 7 y 8) precisando que garantizar la infinitud de puntos no implica recurrir a los rayos opuestos, cualquiera sea la idea que se desarrolle (la de Mariana -infinitas rectas- o la de Carolina -infinitos rayos-).
ii. Se hicieron ostensivos los aspectos centrales que guiaron el proceso de elaboración de dicha prueba: no sólo garantizar las características dadas por la definición de circunferencia (puntos del plano que equidista de P), sino garantizar que lo que se explicita desde un punto de vista teórico se corresponda con la representación gráfica usual que los estudiantes conocen de circunferencia (expuesta, entre otras cosas, por el EGD cuando se llevó a cabo Pr1). Esto último, llevó a que los estudiantes sintieran la necesidad de aludir a la infinitud de puntos que equidistan de P y luego, la necesidad de considerar todos los puntos del plano que lo hacen.

iii. Con base en las intervenciones de Karen y Sandra, la profesora tuvo ocasión para aclarar que probar que un conjunto tiene infinitos no implica garantizar la existencia de todos los puntos que pertenecen a dicho conjunto; en otras palabras, infinitud no implica completitud.

El aspecto ii parece indicar una norma que condiciona la elaboración de una prueba que garantice la existencia de un objeto (**Norma 45**): *La elaboración de prueba de la existencia de un objeto debe satisfacer las características dadas por su definición y la representación gráfica que se tiene del mismo.*

Es importante destacar que, terminado el fragmento de clase respectivo al este momento, de manera explícita no fue corregida la prueba de Pp5 presentada en la Figura 46 ni tampoco fue hecho un reporte escrito de la misma siguiendo la idea de Carolina.

Para ilustrar todo el proceso de argumentación llevado a cabo desde el momento 2, incluyendo todas las opciones propuestas y refutaciones, el diagrama de la Figura 47 presenta la estructura respectiva indicando las proposiciones, con su correspondiente estatus, que intervinieron en dicho proceso.

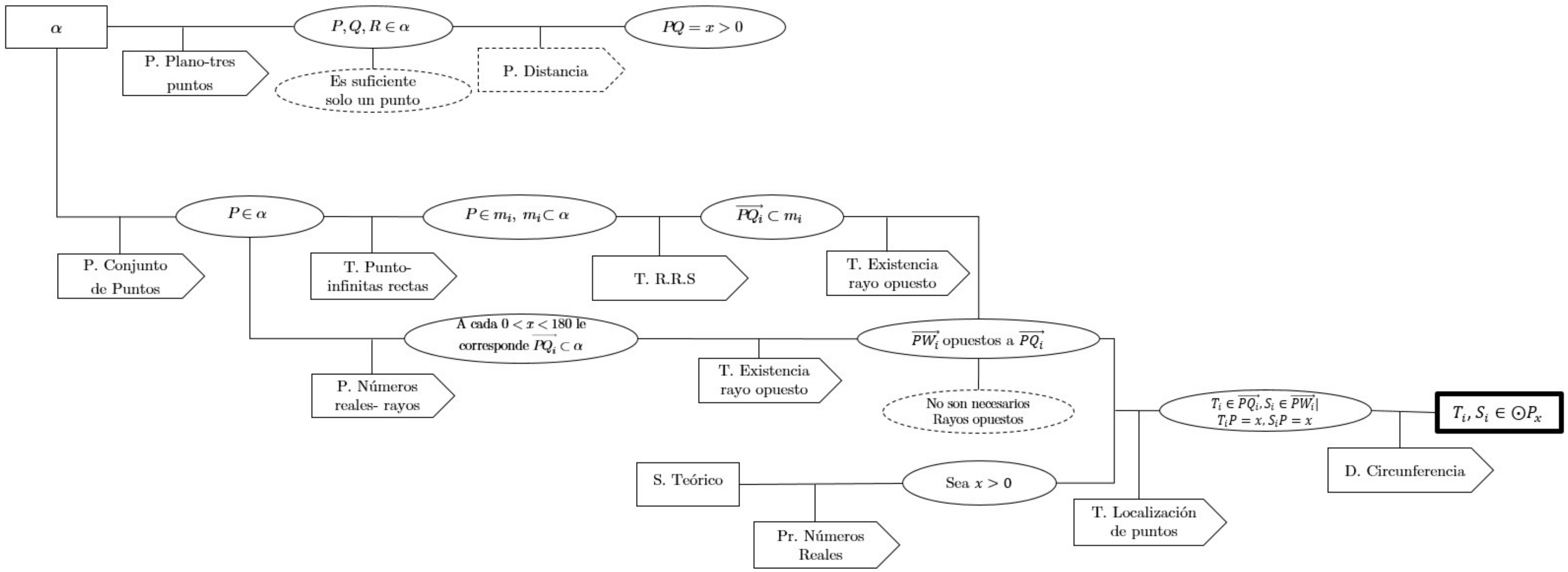


Figura 47. PA1.2, PE2: Estructura argumentación global de Pp10

4.2.2.4 *Síntesis y breves comentarios: Trayectoria didáctica 4*

El análisis relativo a la solución de PA1.2 (problema de *Elaborar una prueba*), permitió identificar tres *práctica*s generales, correspondientes a los tres momentos en que fue dividido todo el episodio: determinación del enunciado del problema a probar, elaboración de la prueba y estudio de un paso argumental provocado por PE.2. Desde esta perspectiva, tres *situaciones instruccionales* tomaron lugar durante el trascurso de la actividad de clase: *instalar un concepto*, *instalar una proposición* y *hacer una prueba por Aserción-Garantía y Datos*. La Tabla 55 muestra las normas asociadas a las prácticas mencionadas indicando las situaciones instruccionales que les corresponde y resaltando las normas nuevas surgidas en ellas. La Tabla 54 presenta un compendio de las normas nuevas que surgieron en la Trayectoria 4 exponiendo su enunciado y respectiva codificación. Por su parte, la Tabla 56 presenta la cronología de las situaciones, objetos y normas asociados a las prácticas.

Tabla 54. PA1.2, PE2-Toda la Clase: Compendio normas nuevas *trayectoria didáctica* 4

	Norma	Codificación
41	El "mejor" enunciado para una proposición es: a) Aquel que permite inferir todo lo que contiene el antecedente de otra opción de enunciado. En otras palabras, es "mejor" el enunciado cuyo antecedente sintetiza el antecedente de otro. O b) Aquel cuyo antecedente no tiene tantas condiciones; es decir, es "mejor" el enunciado cuyo uso en una demostración no implica tanta exigencia en los datos necesitados. O c) Aquel cuyo enunciado emplea elementos instalados en el sistema teórico; es decir, es mejor el enunciado que tiene sentido (matemático) en el sistema teórico. [Vale indicar que la Norma 29 se convierte en otro criterio tal como se indicó en el momento 1].	**M; F~Fe; O~M:** La norma precisa criterios para decidir sobre el "mejor" enunciado para un teorema (en tal sentido es metanorma de faceta epistémica). Los criterios atienden a asuntos de índole matemático como síntesis, operatividad en un prueba o involucramiento de objetos instalados.
42	Las representaciones gráficas se usan para ilustrar las ideas verbales o escritas como apoyo del proceso argumentativo.	**F~Fe; F~Fm; O~M; O~D, Nt:** Se establece una funcionalidad de las representaciones gráficas en tanto medio para ilustrar ideas de un paso argumental. Es una norma de temporalidad puesto que indica el momento en el que se usa (elaboración de una prueba). Es metanorma en tanto versa *sobre* una representación

		gráfica (que en sí misma es una norma) pues alude a una de sus funcionalidades.
43	Durante la elaboración de una prueba no se debe perder de vista la aserción-objetivo.	**F~Fe; O~M:** Se indica una de las reglas básicas de la elaboración de una prueba.
44	Probar la existencia de un objeto cuya definición alude a un conjunto de puntos con ciertas características, implica garantizar que dicho conjunto no es vacío; es decir, que existe un punto con dichas características.	**F~Fe; O~M; M:** Se indica un criterio básico para garantizar la validez de una prueba de un teorema existencia de un objeto cuya definición alude a un conjunto de puntos con ciertas características.
45	La elaboración de prueba de la existencia de un objeto debe satisfacer las características dadas por su definición y la representación gráfica que se tiene del mismo.	**F~Fe; O~M; F~Fm; O~D:** Se indica una condición básica, desde las matemáticas, para la elaboración de un teorema de existencia (satisfacer las características de la definición). No obstante, indica que la representación gráfica del objeto también guía dicho proceso.

Tabla 55. PA1.2, PE2-Toda la Clase: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

<table>
<tr><th>Prácticas</th><th>Normas que las regula</th><th>Situación Instruccional asociada</th></tr>
<tr><td>Determinación del enunciado de la proposición a probar.</td><td>32, 27, 41, 31, 26</td><td rowspan="2">Elaboración de una prueba</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Elaboración conjunta de la prueba de Pp8 y Pp10</td><td>23, 31, 43, 44, 32, 26, 24, 29, 30, 27, 39</td></tr>
<tr><td>42</td><td>Construcción de una figura durante la Elaboración de una prueba</td></tr>
<tr><td>40</td><td>Instalación de un concepto durante la Elaboración de una prueba</td></tr>
<tr><td>35a</td><td>Instalación de una proposición durante la Elaboración de una prueba</td></tr>
<tr><td>Estudio de un paso argumental de la prueba de Pp10 producto de PE2</td><td>24, 29, 45</td><td>Elaboración de una prueba</td></tr>
</table>

Tabla 56. PA1.2, PE2-Toda la Clase: Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de Trayectoria Didáctica 4

Situaciones																					
		Elaboración de una prueba																			
										Construcción de figura										Instalación	
																				Concepto	Proposición
Objetos	Procedimiento	Pr5																			
	Conceptos/Def	Plano																	D3	C1	
	Proposición	P. Conjunto puntos T. Punto-infinitas rectas T. RRS T. Existencia rayo opuesto																			Pp8, Pp10
		Pr. Reales T. Recta-infinitos puntos T. Localización de puntos																			
	Argumentos	Ad2																			
	Lenguaje	L7								L8 L9	L7										
Nivel	Meta	x	x		x	x						x	x							x	x
Origen	S																				
	A																				
	C																			x	x
	M	x	x		x	x			x	x	x	x	x					x			
	D					x	x	x	x	x				x	x	x	x	x			
Faceta	Fe	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Fc					x		x	x						x	x	x				
	Fa																				
	Fi			x				x							x	x	x		x		
	Fm			x				x		x								x	x		
	Fec																				
Tipología TII	Ni																				
	Nle															x	x				
	Nlp			x			x							x	x				x	x	x
	Nt	x								x										x	x
Normas a lo largo del tiempo		39	32	27	41	31	26	23	31	42	43	44	32	26	24	29	30	27	45	35a	40

Las prácticas explicitadas previamente permitieron instalar *objetos primarios*, a saber, las proposiciones Pp8 (Teorema existencia de circunferencia) y Pp10 (Teorema Circunferencia-infinitos puntos). Esto porque no sólo fueron probadas (práctica que sucedió en esta trayectoria), sino porque previamente fueron empleadas, implícitamente, en el Pr1 y Pr2 de la Trayectoria 2 (lo cual se corresponde con la **Norma 35a**). Dado que Pp8 fue probada, se puede advertir que el objeto-concepto *circunferencia* (C1) también fue instalado durante esta Trayectoria 4 (asunto que responde a la **Norma 40**). Además de C1, Pp8 y Pp10, otros *objetos primarios* emergieron de dichas prácticas:

- La proposición Pp9 como enunciado del T. Existencia circunferencia que, aunque es correcta, fue descartada al aplicar los criterios a y b de la Norma 39 (Ver Tabla 54).
- La definición de circunferencia D3, que ajusta la D2, en la que se involucran los objetos *centro* (C3) y *radio* (C2) y sus definiciones.
- Todas las proposiciones -bien sea en sus estatus de aserciones, datos, garantías o refutaciones- que intervienen en el proceso argumentativo (ver Figura 47) o en argumento Ad2 de Pp10.

Vale destacar que, como es costumbre, el lenguaje utilizado es el geométrico verbal o escrito (L7) –**Norma 5b.1**–; además, fueron empleadas sendas representaciones gráficas (L8, L9) para apoyar las dos ideas relativas al paso argumental 4.

La Figura 48 muestra la configuración de objetos (epistémica) emergente de las prácticas descritas asociadas al PA1.2 y PE2.

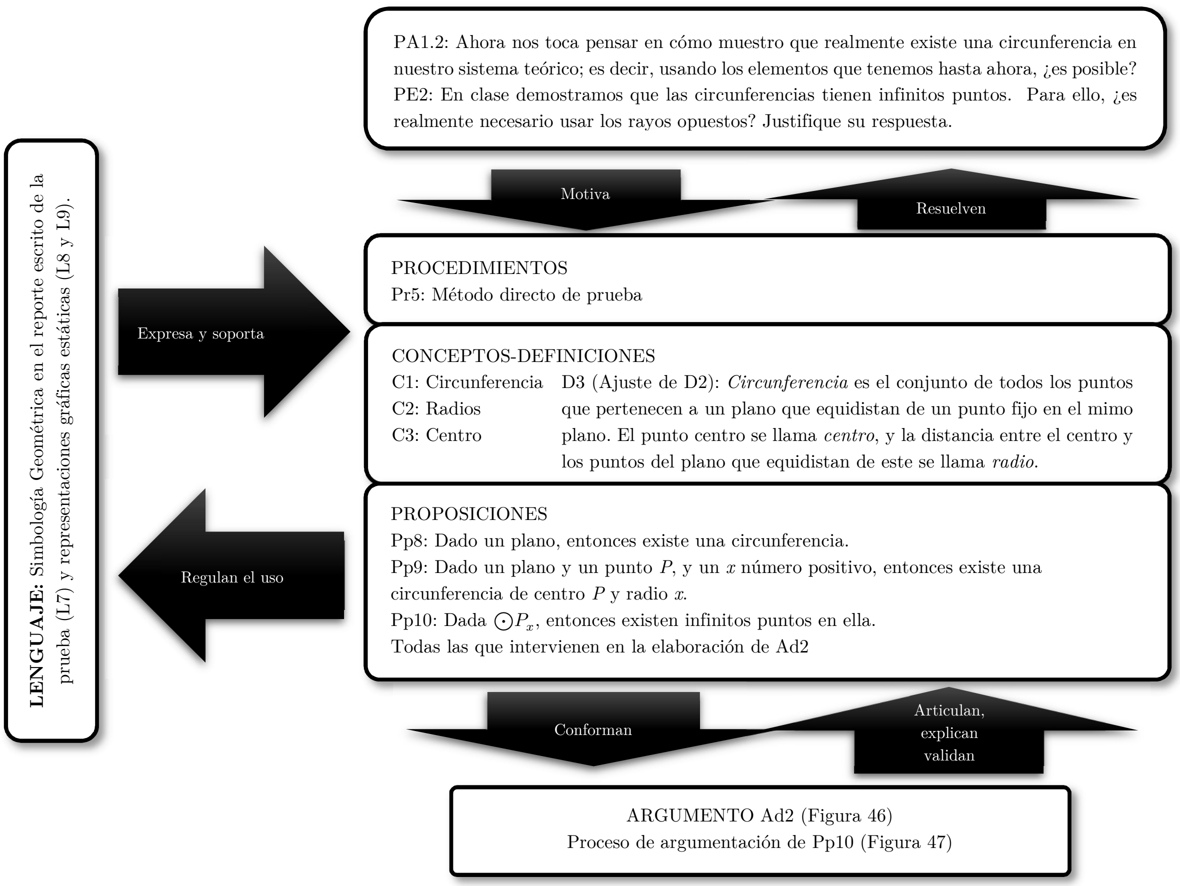


Figura 48. Configuración ontosemiótica epistémica relativa a PA1.2 y PE2

4.2.3 Síntesis y conclusiones Bloque de Problemas N° 1

Se presenta un compendio de todas las normas que regularon las prácticas que emergieron durante el tratamiento del Bloque de Problemas N° 1 y su dinámica. Se clasifican según las situaciones instruccionales en las que estuvieron presentes, generando una forma para caracterizar dichas situaciones. A su vez, se identifican aquellas que directamente influyen en los procesos argumentativos.

4.2.3.1 *Compendio de normas y su dinámica*

Antes de presentar el compendio, cabe recordar que, tal como se dijo luego del análisis normativo de la presentación del curso, tres normas fueron consideradas como principios básicos (fundamentadas en las características de la innovación en el aula) sobre las cuales descansan o dan sentido a otras normas del curso generando la red expuesta en la Figura 32. Tales principios son: El aprendizaje es una construcción social (Norma 1), mediante la resolución de problemas se introducen objetos primarios al sistema teórico (Norma 7) y todo se debe argumentar empleando objetos primarios del sistema teórico (Norma 9). Los análisis de las trayectorias identificadas para este bloque de problemas ratifican en gran medida la red descrita, y deja ver su dinámica mediante la especificación, complementación o flexibilización de normas que la constituyen.

La Tabla 57 trae a colación normas generales presentes en la red mencionada y que emergieron en las prácticas del Bloque de Problemas con una cara distinta, bien sea con su especificación, un complemento o una flexibilización. A la derecha de cada norma se precisa la situación instruccional que le corresponde, mientras que a su izquierda se el número con el cual se identificó de la norma a lo largo de los análisis.

Tabla 57. Bloque N° 1: Compendio de normas y su dinámica

Normas 2: Los estudiantes siempre deben participar, comunicar sus ideas y hacer preguntas.		
1	Complemento: De su participación depende que las producciones en clase sean ricas y evolucionen sus comprensiones (en correspondencia con la Norma 1).	Todas
13a 13b 13c 13d	Especificación: Los estudiantes deben hacer un reporte escrito de lo hecho para solucionar el problema. Tal reporte se compone de los siguientes elementos: a) construcción (parte robusta y parte blanda), b) exploración, c) conjetura y d) justificación de la conjetura.	CF E EP
29	Especificación: Los estudiantes son los responsables de proveer verbalmente (en leguaje geométrico) las ideas iniciales de los pasos argumentales (semántica).	EP
30	Especificación: Los estudiantes son los responsables de precisar verbalmente, con nombres particulares (sintaxis), los objetos involucrados en cada uno de los pasos cuando la profesora pide tal precisión.	EP
36	Especificación: Los estudiantes tienen la responsabilidad de proveer las primeras ideas respecto a la definición de un objeto.	IC
Norma 3: Los profesores deben escuchar a los estudiantes e interpretar sus ideas.		
3	Especificación: Los profesores deben escuchar a los estudiantes e interpretar sus ideas. Para esto último, debe indagarles sobre lo que están diciendo.	Todas
19	Especificación: La profesora se encarga de hacer correcciones de fondo y forma respecto a los procedimientos de construcción que los estudiantes proveen como solución de un problema. Ella, finalmente, escoge aquellas que son consideradas como correctas.	CF
21	Especificación: La profesora se encarga de precisar cuáles son las conjeturas que podrían ser probadas luego de llevarse a cabo un estudio conjunto entre ella y los estudiantes sobre aquellas conjeturas propuestas como solución a un problema.	E
24	Especificación: El profesor asume la responsabilidad de preguntar por los elementos que constituyen los pasos argumentales de una prueba y tener en cuenta la respuesta de los estudiantes.	EP
25	Especificación: El profesor asume la responsabilidad de determinar la validez del uso de las proposiciones dichas por los estudiantes en cada paso argumental.	EP

26	Especificación: El profesor asume la responsabilidad de tomar la decisión final cuando existen varias opciones correctas sugeridas por los estudiantes.	EP
27	Especificación: El profesor asume la responsabilidad de la sintaxis escrita (simbología geométrica) de los elementos que conforman el argumento global y ponerlos en el lugar indicado del formato *Aserción-Garantía y Datos*, cuando se hace la prueba en una actividad de toda la clase.	EP
38	Especificación: La profesora se responsabiliza de formular la definición final luego escuchar a los estudiantes o usar el EGD para realimentar ideas.	IC
Norma 5b.1: Se debe emplear la simbología geométrica y el lenguaje matemático correspondiente.		
15	Especificación: En las representaciones gráficas, los puntos deben ser nombrados para facilitar la comunicación.	CF
23	Complementación (en tanto se alude a un formato específico para presentar una prueba): Uno de los formatos legítimo para presentar una prueba (argumento global de índole deductivo), denominado *Aserción-Garantía y Datos*, consta de una tabla a tres columnas; la primera de ellas registra el número del paso argumental, la asegunda registra la aserción respectiva, y la tercera registra la garantía y los datos correspondientes (estos últimos indicados mediante el número del paso puesto en la primera columna).	EP
34	Complementación (en tanto se alude a un formato específico para presentar una prueba): Uno de los formatos legítimos para presentar una prueba, denominado *Núcleo-Pilar*, consta de una tabla a tres columnas; la primera de ellas registra el número del paso argumental, la asegunda registra la aserción clave respectiva, y la tercera registra la garantía correspondiente.	EP
Norma 9: Todo se debe argumentar empleando objetos primarios del sistema teórico.		
9a	Flexibilización: La justificación puede ser un argumento informal o una prueba. Un argumento informal para el curso es aquel que se compone de las aserciones (sin sus respectivas garantías) que pueden ser insumo para la prueba formal. Puede indicar que los objetos necesarios para llevar a cabo tal prueba no están en el sistema teórico.	
16	Flexibilización y especificación: Es legítimo usar un objeto-concepto en el proceso de construcción o exploración así este no haga parte del sistema teórico del curso.	IC CF E
17	Especificación: En la prueba (validación teórica) de una conjetura, no se pueden usar objetos que no hagan parte del sistema teórico del curso.	EP
35	Complemento: No toda proposición que se prueba hace parte del sistema teórico del curso; no es suficiente probar una proposición para instalarla como Teorema del curso.	IP
35a	Complemento a 35: Un teorema se instala en el curso si su enunciado es probado, su enunciado se usa en la prueba de otro teorema y la profesora lo sanciona como tal.	IP
Norma 10: La rigurosidad en la elaboración de la prueba es variable.		
22	Especificación: Los elementos que debe contener cada paso argumental son aserción, dato y garantía, donde la garantía es aquel objeto primario (definición, postulado, teorema) que soporta la aserción como consecuencia necesaria de los datos. El conjunto de todos los pasos argumentales conforma una prueba (argumento global).	EP

33	Flexibilización de 22: Una prueba válida no necesariamente debe contener todos los pasos; esta puede estar compuesta de aserciones claves (Núcleos) con su respectiva garantía (Pilares); los núcleos con sus correspondientes pilares son los pasos que posibilitan con suficiencia la idea de la prueba y, en consecuencia, dan un indicio para precisar todos los pasos que conforman la prueba completa.	EP
Norma 12: Los procesos matemáticos se llevarán a cabo con el apoyo de EGD (GeoGebra y Cabri 2D y 3D).		
12a	Especificación: El EGD se emplea para representar (construir robusta o blandamente) los objetos inmersos en el enunciado del problema. Si la construcción es robusta, implica poner en juego propiedades del objeto para desarrollar el procedimiento respectivo.	CF
12b	Especificación: El EGD se emplea para explorar (medir, arrastrar) la situación involucrada en el problema con el fin de para verificar o descubrir (no necesariamente para descubrir).	E
13a	Especificación Norma 13a: En la resolución de un problema, la construcción en EGD asociada tiene una parte robusta o una parte blanda (no necesariamente tiene una parte blanda).	CF
14	Especificación: El antecedente de una conjetura se corresponde con lo construido en el EGD; un indicador para determinar el consecuente de la conjetura es precisar "a dónde se quiere llegar", o lo que se "descubrió o verificó" en EGD.	E
18	El uso de EGD hace ostensivos objetos geométricos (conceptos-definición o teoremas) que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico.	IC IP CF
31	Especificación: La prueba de la conjetura-solución de un problema que pide la construcción de un objeto (existencia de un objeto) es guiada por el proceso mismo de construcción; de manera más concreta, los pasos de construcción infunden las aserciones de los pasos argumentales de la prueba.	EP
37	Especificación: Las representaciones y procedimiento de construcción de EGD, realimenta las ideas de los estudiantes respecto a su concepción sobre los objetos-definición.	CF IC
Normas que no representan dinamismo de las antes citadas		
8	La profesora debe proponer a la clase cosas (problemas) que realmente se puedan discutir con los estudiantes.	Todas
14	El enunciado de una conjetura es una proposición condicional si… entonces…	E
20	La existencia de los objetos que se definen debe ser probada; en otras palabras, una definición no garantiza la existencia del objeto definido.	IC
28	Un teorema previamente instalado es obsoleto si existe un teorema en el sistema teórico más potente que lo contiene.	EP
32	La prueba de una proposición implica la precisión de los siguientes aspectos: el método empleado para desarrollarlo, y el dato inicial y aserción-objetivo que se pretende probar.	EP
39	Un procedimiento de construcción de un objeto es válido (teóricamente) una vez todos los objetos que intervienen están instalados, esto es, cuando cada paso se puede argumentar con objetos del sistema teórico.	CF

40	Instalar un objeto geométrico (figura geométrica - concepto) en el curso implica definirlo y probar su existencia. La profesora se encarga de oficializar la instalación.	IC
41	El "mejor" enunciado para una proposición es: a) Aquel que permite inferir todo lo que contiene el antecedente de otra opción de enunciado. En otras palabras, es "mejor" el enunciado cuyo antecedente sintetiza el antecedente de otro. O b) Aquel cuyo antecedente no tiene tantas condiciones; es decir, es "mejor" el enunciado cuyo uso en una demostración no implica tanta exigencia en los datos necesitados. O c) Aquel cuyo enunciado emplea elementos instalados en el sistema teórico; es decir, es mejor el enunciado que tiene sentido (matemático) en el sistema teórico. [Vale indicar que la Norma 31 se convierte en otro criterio tal como se indicó en el momento 1].	EP
42	Complementación (en tanto se alude a una funcionalidad de las representaciones): Las representaciones gráficas se usan para ilustrar las ideas verbales o escritas como apoyo del proceso argumentativo.	CF
43	Durante la elaboración de una prueba no se debe perder de vista la aserción-objetivo.	EP
44	Probar la existencia de un objeto cuya definición alude a un conjunto de puntos con ciertas características, implica garantizar que dicho conjunto no es vacío; es decir, que existe un punto con dichas características.	EP
45	La elaboración de prueba de la existencia de un objeto debe satisfacer las características dadas por su definición y la representación gráfica que se tiene del mismo.	EP

Vale indicar que el compendio expuesto en la Tabla 57 no expone explícitamente las Normas 1 y 7. Pero se debe entender que tales normas permean todo lo demás. El hecho de que se tenga como principio que el conocimiento es una construcción social justifica la necesidad de participación de profesora y estudiantes, y, en consecuencia, la explicitación de sus responsabilidades (ver normas asociadas a las Normas 2 y 3). Así mismo, no debe olvidarse que las prácticas de las cuales emergieron todas las normas fueron consecuencia de la resolución de problemas. Así, por ejemplo, la Norma 7 se evidenció en el hecho de que los objetos instalados durante el tratamiento del Bloque de Problemas N° 1 (circunferencia, radio, centro, Teoremas Existencia de la circunferencia y Circunferencia-infinitos puntos, procedimientos para construir segmentos congruentes, etc.) fueron producto del estudio de los problemas que constituyeron dicho Bloque. Por su lado, la actuación de los estudiantes en correspondencia con la Norma 13, fue la que generó la producción a partir de la cual tomaron lugar las prácticas (de toda la clase) y, por ende, las situaciones instruccionales identificadas en las trayectorias analizadas. Así mismo, la Norma 5b.1

es trasversal a todas las prácticas de clase dado que los miembros de clase se comunican entre sí empleando el lenguaje escrito o verbal geométrico correspondiente.

Por otro lado, es menester comentar que no es caprichosa la dinámica (especificaciones, complementos, flexibilizaciones) de las normas que muestra dicha Tabla. Esta se debe a las prácticas concretas que se realizaron en torno a las tareas que propuso la profesora. Así, por ejemplo, todas las responsabilidades de los estudiantes y profesora que se identificaron en las prácticas fueron especificaciones de las Normas 2 y 3 que terminaron caracterizando las situaciones instruccionales correspondientes (las Tabla 58 a la Tabla 62 expone dichas responsabilidades en el marco de las *normas de división de labores*). Por otro lado, todas especificaciones de la Norma 5b.1, pretendieron adicionar elementos a esta con el ánimo de precisar aspectos de forma como el uso de formatos para presentar una prueba (Normas 23, 34) o de nombres para etiquetar objetos representados en el EGD (Norma 15). Finalmente, la flexibilización de ciertas Normas y su respectiva sustitución (*e.g.* 9 en 9a y 16; 12 en 12a y 12b; 13a en su versión final; 14 en su versión final) fueron un resultado a procesos de negociación implícitos entre profesora y estudiantes originado cuando estos últimos actuaron de una manera diferente a la sugerida por la norma original (curiosamente, ello sucedió cuando se empleó el EGD o se aludió a la necesidad de un argumento formal). En esos escenarios, la profesora decidió flexibilizar las normas no sólo como respuesta a las acciones llevadas a cabo por los estudiantes, sino como un mecanismo para evitar tensiones cuando una práctica precise de dichas normas para regularse (el apartado 4.2.3.4 ilustra lo relativo a las tensiones).

4.2.3.2 *Normas según situaciones instruccionales*

Tal como se presentó en el apartado 2.3.5.3, una manera de caracterizar las situaciones instruccionales que toman lugar en las trayectorias didácticas es precisando las prácticas que se llevan a cabo en la clase junto con las normas que las regulan. En este sentido, las Tabla 58 a la Tabla 62 expone las normas (con sus enunciados ya modificados) asociadas a cada una de las situaciones instruccionales que se identificaron en los análisis, y que se tendrán en cuentan para el análisis de Bloques posteriores (salvo nuevas modificaciones o normas emergentes). Las normas se ordenan según la clasificación sugerida por la TII, esto es, por normas de intercambio, normas de división de labores y normas de temporalidad.

Tabla 58. Bloque N° 1: Normas Situación Construcción de una Figura

Normas de intercambio: llevar a cabo la construcción de una figura implica:	
15	En las representaciones gráficas, los puntos deben ser nombrados para facilitar la comunicación.
12a	En un EGD implica construir robusta o blandamente los objetos inmersos en el enunciado del problema. Si la construcción es robusta, implica poner en juego propiedades del objeto para desarrollar el procedimiento respectivo.
16 18	Es legítimo usar un objeto-concepto en el proceso de construcción o exploración así este no haga parte del sistema teórico del curso. Esto, ya que: El uso de EGD hace ostensivos objetos geométricos (conceptos-definición o teoremas) que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico.
39	Un procedimiento de construcción de un objeto es válido (teóricamente) una vez todos los objetos que intervienen están instalados, esto es, cuando cada paso se puede argumentar con objetos del sistema teórico.
Normas de división de labores:	
13a	Los estudiantes deben reportar el proceso de construcción (robusta o blanda) cuando abordan la solución a un problema.
19	La profesora se encarga de hacer correcciones de fondo y forma respecto a los procedimientos de construcción que los estudiantes proveen como solución de un problema. Ella, finalmente, escoge aquellas que son consideradas como correctas.
Normas de temporalidad: Cuándo se hace la construcción de una figura:	
13a 12a	En la resolución de un problema, la construcción en EGD asociada tiene una parte robusta o una parte blanda (no necesariamente tiene una parte blanda). De manera más específica: El EGD se emplea para representar (construir robusta o blandamente) los objetos inmersos en el enunciado del problema. Si la construcción es robusta, implica poner en juego propiedades del objeto para desarrollar el procedimiento respectivo.
42	Durante un proceso argumentativo, las representaciones gráficas se usan para ilustrar las ideas verbales o escrita.
37	Las representaciones y procedimiento de construcción de EGD, realimenta las ideas de los estudiantes respecto a su concepción sobre los objetos-definición o propiedades.
31	La prueba de la conjetura-solución de un problema que pide la construcción de un objeto (existencia de un objeto) es guiada por el proceso mismo de construcción; de manera más concreta, los pasos de construcción infunden las aserciones de los pasos argumentales de la prueba.

Tabla 59. Bloque N° 1: Normas Situación Exploración de una Figura/Formulación de Conjetura

Normas de intercambio: El estudiante puede reclamar un conocimiento asociado a una exploración/formulación de una conjetura si:	
12b	Usa la exploración (medir, arrastrar) en EGD de la situación involucrada en el problema para verificar o descubrir.
14	El enunciado de una conjetura es una proposición condicional si... entonces... El antecedente de una conjetura se corresponde con lo construido en el EGD; un indicador para determinar

	el consecuente de la conjetura es precisar "a dónde se quiere llegar", no necesariamente lo que se "descubrió o verificó" en EGD.
16	Es legítimo usar un objeto-concepto en el proceso de construcción o exploración así este no haga parte del sistema teórico del curso.
Normas de división de labores	
13b 13c	Los estudiantes deben reportar su exploración y la formulación de una conjetura como solución a un problema.
21	La profesora se encarga de precisar cuáles son las conjeturas que podrían ser probadas luego de llevarse a cabo un estudio de forma y fondo (en relación con la Norma 14) conjunto entre ella y los estudiantes sobre aquellas conjeturas propuestas como solución a un problema.
Normas de temporalidad: Cuándo se hace una exploración y se formula una conjetura:	
13b 13c	La resolución de un problema implica la exploración de una situación y la formulación de una conjetura (siguiendo las condiciones dadas según las normas de intercambio).

Tabla 60. Bloque N° 1: Normas Situación Elaboración de una Prueba

Normas de intercambio: La producción satisfactoria de una prueba por parte de los estudiantes, según las siguiente normas -que indican la conformación de una prueba válida- les permite reclamar que ellos saben hacer pruebas (y pueden argumentar deductivamente):	
32	La prueba de una proposición implica la precisión de los siguientes aspectos: el método empleado para desarrollarlo, y el dato inicial y aserción-objetivo que se pretende probar.
22 23	Los elementos que debe contener cada paso argumental son *aserción*, *dato* y *garantía*, donde la garantía es aquel objeto primario (definición, postulado, teorema) que soporta la *aserción* como consecuencia necesaria de los *datos*. El conjunto de todos los pasos argumentales conforma una prueba (argumento global). Por lo tanto, Uno de los formatos legítimo para presentar una prueba (argumento global de índole deductivo), denominado *Aserción-Garantía y Datos*, consta de una tabla a tres columnas; la primera de ellas registra el número del paso argumental, la asegunda registra la aserción respectiva, y la tercera registra la garantía y los datos correspondientes (estos últimos indicados mediante el número del paso puesto en la primera columna).
33 34	Una prueba válida no necesariamente debe contener todos los pasos; esta puede estar compuesta de aserciones claves (Núcleos) con su respectiva garantía (Pilares); los núcleos con sus correspondientes pilares son los pasos que posibilitan con suficiencia la idea de la prueba y, en consecuencia, dan un indicio para precisar todos los pasos que conforman la prueba completa. Por lo tanto, Uno de los formatos legítimos para presentar una prueba, denominado *Núcleo-Pilar*, consta de una tabla a tres columnas; la primera de ellas registra el número del paso argumental, la asegunda registra la aserción clave respectiva, y la tercera registra la garantía correspondiente.
17	En la prueba (validación teórica) de una conjetura, no se pueden usar objetos que no hagan parte del sistema teórico del curso.
43	Durante la elaboración de una prueba no se debe perder de vista la aserción-objetivo.
41	El "mejor" enunciado para una proposición es:

	a) Aquel que permite inferir todo lo que contiene el antecedente de otra opción de enunciado. En otras palabras, es "mejor" el enunciado cuyo antecedente sintetiza el antecedente de otro. O b) Aquel cuyo antecedente no tiene tantas condiciones; es decir, es "mejor" el enunciado cuyo uso en una demostración no implica tanta exigencia en los datos necesitados. O c) Aquel cuyo enunciado emplea elementos instalados en el sistema teórico; es decir, es mejor el enunciado que tiene sentido (matemático) en el sistema teórico. [La Norma 29 se convierte en otro criterio tal como se indicó en el momento 1].
28	Un teorema previamente instalado es obsoleto si existe un teorema en el sistema teórico más potente que lo contiene.
44	Probar la existencia de un objeto cuya definición alude a un conjunto de puntos con ciertas características, implica garantizar que dicho conjunto no es vacío; es decir, que existe un punto con dichas características.
45	La elaboración de prueba de la existencia de un objeto debe satisfacer las características dadas por su definición y la representación gráfica que se tiene del mismo.
31	La prueba de la conjetura-solución de un problema que pide la existencia de un objeto está guiada por el proceso mismo de construcción del objeto; de manera más concreta, los pasos de construcción infunden las aserciones de los pasos argumentales de la prueba.
Normas de división de labores	
29	Los estudiantes son los responsables de proveer verbalmente (en leguaje geométrico) las ideas iniciales de los pasos argumentales (semántica) cuando la profesora les indaga al respecto.
30	Los estudiantes son los responsables de precisar verbalmente, con nombres particulares (sintaxis), los objetos involucrados en cada uno de los pasos cuando la profesora pide tal precisión.
24	El profesor asume la responsabilidad de preguntar por los elementos que constituyen los pasos argumentales de una prueba.
25	El profesor asume la responsabilidad de determinar la validez del uso de las proposiciones dichas por los estudiantes en cada paso argumental (o argumento).
26	El profesor asume la responsabilidad de tomar la decisión final cuando existen varias opciones correctas sugeridas por los estudiantes.
27	El profesor asume la responsabilidad de la sintaxis escrita (simbología geométrica) de los elementos que conforman el argumento global y ponerlos en el lugar indicado del formato *Aserción-Garantía y Datos*, cuando se hace la prueba en una actividad de toda la clase.
Normas de temporalidad: Cuándo se elabora una prueba	
13d	La resolución de un problema implica la justificación (prueba) de la conjetura-solución.
20	La existencia de los objetos que se definen debe ser probada; en otras palabras, una definición no garantiza la existencia del objeto definido.

Tabla 61. Bloque N° 1: Normas Situación Instalación de una proposición

Normas de intercambio: Se considera que el estudiante puede reclamar que se ha instalado un teorema, si:	
35a	Su enunciado es probado, su enunciado debe ser usado en la prueba de otro teorema y la profesora lo reconoce como tal.
Normas de división de labores	

35a	La profesora es quien sanciona a un teorema o postulado como tal.
Normas de temporalidad	
35	No toda proposición que se prueba hace parte del sistema teórico del curso; no es suficiente probar una proposición para instalarla como Teorema del curso.
35a	Un teorema (o postulado) se instala en el curso si su enunciado es probado (para el caso de teorema), su enunciado se usa en la prueba de otro teorema y la profesora lo sanciona como tal.
17	En la prueba (validación teórica) de una conjetura, no se pueden usar objetos que no hagan parte del sistema teórico del curso.
18	El uso de EGD hace ostensivos objetos geométricos (conceptos-definición o teoremas) que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico.

Tabla 62. Bloque N° 1: Normas Situación Instalación de un concepto

Normas de intercambio: Se considera que el estudiante puede reclamar que se ha instalado un concepto, si:	
40	Expresa la definición del objeto, prueba su existencia y lo usa en un procedimiento de construcción.
45	Reconoce su representación gráfica, la cual guía, junto con la definición, la prueba de la existencia del objeto (Asunto implícito en la Norma 45).
5b.1	Tiene clara la simbología geométrica para denotar el concepto (palabras, símbolos icónicos).
Se debe tener presente que:	
20	La existencia de los objetos que se definen debe ser probada; en otras palabras, una definición no garantiza la existencia del objeto definido.
31	La prueba de la conjetura-solución de un problema que pide la construcción de un objeto (existencia de un objeto) es guiada por el proceso mismo de construcción; de manera más concreta, los pasos de construcción infunden las aserciones de los pasos argumentales de la prueba.
44	Probar la existencia de un objeto cuya definición alude a un conjunto de puntos con ciertas características, implica garantizar que dicho conjunto no es vacío; es decir, que existe un punto con dichas características.
45	La elaboración de prueba de la existencia de un objeto debe satisfacer las características dadas por su definición y la representación gráfica que se tiene del mismo.
Normas de división de labores	
34	Los estudiantes tienen la responsabilidad de proveer las primeras ideas respecto a la definición de un objeto.
38	La profesora se responsabiliza de formular la definición final luego escuchar a los estudiantes o usar el EGD para realimentar ideas.
8	La profesora es responsable de proponer problemas a los estudiantes. En consonancia con la Norma 7 (mediante la resolución de problemas se introducen elementos (objetos primarios) al sistema teórico.)
Normas de temporalidad	
40	Instalar un objeto geométrico (figura geométrica - concepto) en el curso implica definirlo y probar su existencia.

16	Es legítimo usar un objeto-concepto en el proceso de construcción o exploración así este no haga parte del sistema teórico del curso. Esto, ya que:
18	El uso de EGD hace ostensivos objetos geométricos (conceptos-definición o teoremas) que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico.

El ejercicio a partir de cual fueron organizadas las normas del Bloque N° 1 de problemas (Tabla 57) según la clasificación propuesta por la TII permitió (i) identificar aquellos elementos que deben tener en cuenta los estudiantes para poder reclamar que saben algo, (ii) el papel de estudiantes y profesores en cada situación instruccional, y (iii) cuándo toma lugar cada situación instruccional.

El primer asunto tiene que ver con las normas de intercambio. Al respecto, vale destacar que no fue hasta el ejercicio de elaboración de las Tablas 58 a la 62 que las normas de intercambio fueron detectadas. Más precisamente, dicho ejercicio permitió identificar como normas de intercambio algunas de las normas que habían sido identificadas en los análisis, pero que en su momento no fueron consideradas como tal manera. Tal identificación llevó a la explicitación de aquellos elementos que los estudiantes deben tener en cuenta para poder reclamar que saben algo. Por ejemplo, en lo concerniente a construir un objeto, particularmente en un EGD, se precisaron tipos de construcciones (robusta o blandas) que se espera que ellos realicen cuando abordan un problema (en datos posteriores, se pueda ganar precisión al respecto, sobre todo en lo que respeta al EGD Cabri 3D). En lo que corresponde a la exploración, fue precisado con mucho detalle los aspectos que deben tener en cuenta cuando se pretende formular una conjetura en coherencia con lo que se construye y descubre (o verifica) en EGD. Al respecto de la instalación de un teorema o un concepto también fueron precisados aquellos elementos que legitiman una cosa u otra; llama la atención que aspectos como su uso en procedimientos de construcción o en la prueba de otros teoremas, su enunciación o la etiquetación como definición o teorema no fueron considerados aspectos suficientes para instalar un objeto-concepto o un objeto-proposición en el curso; en ambos casos, fue necesario hacer una prueba, de la existencia para el primero o del enunciado para el segundo. Finalmente, el caso más nutrido corresponde a los elementos asociados a la elaboración de una prueba. Al respecto, se precisaron no solo los elementos que conforman un paso argumental o una prueba válida, sino que se especificaron condiciones para hacer una prueba de existencia de un objeto geométrico (práctica protagonista en la situación instruccional) y se precisaron criterios para escoger el mejor enunciado de un teorema que se pretende probar.

El aspecto (ii) tiene que ver con las normas de división de labores. Como se dijo antes, estas precisan las responsabilidades de estudiantes y profesores, y en tal sentido, su papel en las situaciones instruccionales. Una lectura general de las responsabilidades de la profesora deja ver que su papel en durante el primer bloque de problemas se enmarcó en tres asuntos principalmente:

- La proposición de problemas que llevaran a los estudiantes a la necesidad de usar objetos que no estaban instalados, a saber, Concepto de circunferencia y T. Circunferencia-infinitos puntos.
- La orquestación de la puesta en común de las producciones de los estudiantes en relación con cada uno de los problemas propuestas por ella. En ese contexto, la profesora se encargó de hacer indagaciones y de precisar asuntos relativos a la sintaxis. Fue en las situaciones de elaboración de una prueba en que su faceta indagadora sobresalió; en ese marco, su papel se concentró en solicitar ideas para los pasos argumentales o precisión de los elementos (aserción, garantía y datos) que componen a cada uno de tales pasos (Normas 24). Por su parte, su faceta de controladora de los aspectos sintácticos (uso de la simbología geométrica o formatos específicos) estuvo presente a lo largo de todas las situaciones, tanto en el estudio de procedimientos de construcción de figuras o la formulación de una conjetura-solución como en la escritura de los argumentos globales cuando se elabora una prueba (Norma 14, 19, 27).
- El control semántico en lo que se refiere a asuntos de institucionalidad, validez o legitimidad siempre fundamentada en las producciones de los estudiantes. En lo que respecta a lo primero la profesora siempre tuvo la palabra final cuando se tenía que tomar la decisión entre varias opciones (Normas 19, 21, 25, 26) o se quería instalar un objeto (35a, 38); en lo que respecta a lo segundo, ella explicitó condiciones para determinar los componentes de una prueba (Normas 17, 22, 31, 32, 33, 44, 45) y por ende criterios para determinar la validez de una prueba. Finalmente, proveyó un criterio de legitimidad para usar objetos no instalados en procesos de construcción o exploración específicamente (Norma 16).

El aspecto (iii) se relaciona con las normas de temporalidad. En lo que respecta a la construcción de figuras, estas aparecen como principal bastión para la solución de un problema fundamentado ello en una de las características de la innovación en el aula (resolver problemas empleando EGD). No solo posibilitaron la solución de un problema concreto (*e.g.*, PP1) -Normas 13a, 12a- sino que infundieron los pasos de una prueba (*e.g.*, Pp3) -Norma 31-. Además, fueron usadas para estudiar la definición de un objeto, a partir de las condiciones exigidas por el software para construirlo (Norma 37). En cuanto a la exploración/formulación de conjeturas, lo más rescatable tiene que ver con el hecho de que estas toman lugar como procedimiento/respuesta a un problema propuesto (Normas 13b, 13c). La elaboración de una prueba toma lugar siempre que se quiera instalar un objeto-concepto o probar la conjetura-solución de un problema. Finalmente, la instalación de un objeto-teorema y un objeto-concepto toman lugar cuando, respectivamente, su enunciado y su existencia, son probados. En el primer caso, es necesario que el teorema se emplee en la prueba de otros teoremas.

4.2.3.3 *Normas que influyen en proceso argumentativos*

Las normas que se han identificado han regulado prácticas que han tomado lugar en las situaciones instruccionales descritas. El objetivo general de este trabajo es identificar el sistema de normas que influyen en los procesos de argumentación. En lo que sigue se destacan aquellas normas que directamente regulan las prácticas en donde toma lugar una argumentación. La Tabla 63 sintetizan las prácticas y normas asociadas para cada situación instruccional; con en ello, se tendrá un contexto para precisar las normas de interés.

Tabla 63. Bloque N° 1: Prácticas Situaciones Instruccionales y Normas asociadas

Prácticas Construcción de Figura	**Normas**
Realización de una construcción robusta en EGD por parte de estudiantes en el marco de la solución de PP1.	13a, 12a, 15, 16
Comentarios hechos por la profesora sobre los procedimientos de construcción (Pr1 y Pr2).	5b.1, 9a, 15, 16, 18, 19
Estudio conjunto de una definición de un objeto geométrico (para este caso circunferencia) a partir del procedimiento de construcción seguido en Cabri 3D.	37, 39
Elaboración conjunta de la prueba de Pp4	31, 42
Prácticas Situación Exploración/Formulación de conjetura	**Normas**
Realización de una exploración en EGD para verificar por parte de estudiantes en el marco de la solución de PP1.	13b, 12b, 16
Formulación de una conjetura por parte de los estudiantes en el marco de la solución de PP1.	13c, 14, 12b
Estudio, liderado por la profesora y con participación ocasional de los estudiantes, de las conjeturas propuestas por los estudiantes como solución al problema.	7, 14, 21, 16, 17

Prácticas Situación Elaboración de Pruebas	Normas
Determinación conjunta del enunciado de la proposición a probar.	32, 27, 41, 31, 26
Elaboración conjunta de la prueba de Pp4, Pp8 y Pp10.	13d, 14, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 43, 44. 45
Elaboración conjunta de la prueba de Pp4 por Núcleos y Pilares	33, 34
Estudio conjunto de un paso argumental de Pp10 producto de PE2	24, 29, 45
Prácticas Instalación de Proposición	**Normas**
Elaboración conjunta de la prueba de Pp4.	17, 35
Elaboración conjunta de la prueba de Pp8 y Pp10	35a
Comentarios hechos por la profesora sobre los procedimientos de construcción (Pr1 y Pr2).	18
Prácticas Instalación de Concepto	**Normas**
Estudio conjunto de una definición de un objeto geométrico (para este caso circunferencia) a partir del procedimiento de construcción seguido en Cabri 3D.	36, 38, 40, 20
Precisión conjunta de los pasos claves de la prueba de Pp4.	31, 34
Elaboración conjunta de la prueba de Pp4, Pp8 y Pp10	40, 44, 45
Comentarios hechos por la profesora sobre los procedimientos de construcción (Pr1 y Pr2).	16, 18

En primera instancia, es importante recalcar que se ratifica la idea de que la resolución de los problemas es un primer detonador para propiciar procesos argumentativos (Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, & Stevenson, 2012; Pedemonte, 2007; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Molina & Samper, 2018).

Para este caso en particular, la resolución del PP1 (Norma 5) -problema de búsqueda de antecedente y de construcción de objetos-, desarrollada mediante las fases indicadas por la Norma 13, favorecieron la producción de un argumento abductivo (Ab1) por parte de un grupo de estudiantes (Grupo B). Más específicamente, las normas (de faceta mediacional y cognitiva principalmente) que regularon lo que se debía hacer en cada fase llevaron a la explicitación de los elementos que conformaron el argumento (Ver Figura 35):

- Hacer una construcción robusta (Normas 13a y 12a), que en este caso llevó a la solución del problema (Pr1: $C \in \odot A, AB$; $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$), condujo a la inferencia del argumento Ab1, esto es, al establecimiento del dato del argumento (Pp2).
- Hacer una exploración (Normas 13b) llevó a que los estudiantes verificaran (Norma 12b) que Pp1: $AC = AB$ es consecuencia de Pp2. Esto es, que ratificaran empíricamente de la veracidad de Pp3, garantía del argumento.

- Formular una conjetura (Pp3: $C \in \odot A, AB$ *entonces* $AC = AB$) que consiste en la solución del problema (Normas 13c, 14, 12b) llevó a la explicitación de la garantía del argumento, proposición que al parecer ya conocían los estudiantes.

En relación con el mismo problema, pero esta vez en la actividad de toda la clase orquestada por toda la profesora, la fase correspondiente a la formulación de la conjetura fue regulada por las mismas normas que lo hicieron para el caso del grupo de estudiantes. No hubo explicitación de algún argumento previo a la precisión de las conjeturas que, luego de un estudio conjunto, fueron determinadas como correctas (Pp3 y Pp4). No obstante, sí hubo una explicación a partir de la cual se decidió hacer la prueba de Pp4 en lugar de Pp3; para ese momento no se había provisto una definición de circunferencia ni se había estudiado la manera de garantizar su existencia (Norma 17).

Durante el proceso de elaboración conjunta de la prueba de Pp4 hubo una manifestación de normas que regularon dicha práctica (las Figura 36 y Figura 37 exponen tal argumento):

- De manera particular, lo que incitó la elaboración de la prueba de Pp4 fue la solicitud explícita de hacerla (Norma 13d de faceta cognitiva, principalmente).
- Fueron precisados los elementos que deben contener cada paso argumental y un argumento global (Metanormas 22, 32 y 33 de faceta epistémica principalmente, de origen matemático) y los formatos para presentar una prueba (Normas 23 y 34 de faceta mediacional y cognitiva principalmente, de origen didáctico).
- Fueron precisados los roles de profesora (Normas 24, 25, 26 y 27 de faceta interaccional y cognitiva, principalmente) y estudiantes (Normas 29 y 30 de facetas interaccional y cognitiva, principalmente).
- Fueron precisados elementos que pueden guiar y contener una prueba de una conjetura que alude a una existencia (Metanormas 31, 43, 44, 45 de faceta epistémica), que pueden determinar la validez de una prueba (Metanorma 17 de faceta epistémica) o que implican la instalación de un teorema (Metanorma 35a de faceta epistémica).

Dichas normas regularon también la elaboración de la prueba de Pp8 y Pp10 (ver Figura 46 y Figura 47), salvo lo relativo a las Normas 33 y 34 que se refieren a las pruebas por *Núcleos-Pilares*. Otro asunto por destacar tiene que ver con lo que incitó la prueba de Pp8 que, para este caso, recae sobre dos asuntos en particular: (i) la necesidad teórica de probar la existencia de los objetos que se definen, pues una definición no garantiza la existencia del objeto definido (Metanorma 20 de faceta epistémica) y (ii) las características para que un objeto-concepto sea instalado -ser definido y probada su existencia- (Metanorma 40 de faceta epistémica).

Cabe destacar que cuando se estudió la definición del objeto Circunferencia, un argumento de convicción (Ace1 -ver Figura 43-) fue resultado de la práctica realizada. Recuérdese que la profesora dirigió dicho estudio empleando como apoyo de Cabri 3D; su idea fue identificar los elementos necesarios y suficientes solicitados por tal EGD para formular la definición. Esta acción está guiada por la Norma 37 (de faceta principalmente mediacional de origen didáctico) según la cual las representaciones y procedimiento de construcción de EGD, realimenta las ideas de los estudiantes respecto a su concepción sobre los objetos-definición.

4.2.3.4 *Otra forma en que las normas influyen en los procesos argumentativos*

En el apartado previo fue precisada la forma en que ciertas normas regularon procesos argumentativos explicando las acciones que se llevaron a cabo en las prácticas correspondientes. Ahora bien, tal como se presentó en el apartado 4.2.1.4, describir tensiones y dilemas originados por normas ayuda a interpretar otra relación entre el sistema de normas, los procesos de argumentación y nuevos conocimientos (para este caso, objeto-circunferencia y T. Circunferencia-infinitos puntos).

De manera concreta, los análisis llevaron a identificar tres tensiones entre normas que regulan las interacciones en clase: (i) en cuanto a la comunicación: *los estudiantes deben seguir un formato para reportar su producción* (Normas 5, 13) Vs. *los estudiantes deben comunicar su producción real (sus ideas) cuando abordan un problema* (Norma 2), (ii) en cuanto al objetivo de la tarea: *se propone un problema que se espera que pueda ser solucionado por los estudiantes* (Norma 8) Vs. *el problema debe permitir abordar objetos nuevos de conocimiento* (Norma 7); y (iii) en cuanto la legitimidad del uso de objetos: *los estudiantes pueden usar objetos nuevos en el procedimiento de construcción y exploración* (Norma 16) Vs. *un argumento formal implica usar objetos que hagan parte del sistema teórico del curso* (Norma 9). Tales tensiones generaron a su vez varios dilemas éticos: en los estudiantes, entre la *autenticidad* de su actividad y la *formalidad* que implica la realización de un argumento; en la profesora, entre *la necesidad de equidad* y *motivación* y la necesidad *curricular* de abordar objetos nuevos de conocimiento.

La primera de tales tensiones fue descrita en el apartado 4.2.1.4 a raíz del PP1 (Construir segmentos congruentes). Allí se dijo que las responsabilidades involucradas de los estudiantes no tendrían por qué generar una tensión. No obstante, en la práctica sí produjeron una: el sentido de las primeras normas (5, 13) se fundamenta sobre el supuesto de que la resolución de un problema implica un cierto reto para los estudiantes, y de alguna manera el "descubrimiento" de conocimiento nuevo para ellos. En esta perspectiva, el reporte escrito no es nada más que un medio para comunicar lo llevado a cabo durante su proceso de resolución. No obstante, para el caso del Grupo B, el problema propuesto no produjo en ellos un reto; el procedimiento de solución fue propuesto de manera inmediata (Pr1). Así las cosas, los estudiantes no concebían cómo su estrategia de solución -su idea- (siguiendo la responsabilidad indicada en la Norma 2) se podría corresponder con las características exigidas en el reporte (*e.g.*, hacer una construcción blanda, una exploración para descubrir y una justificación -soporte- para la conjetura).

La descripción anterior deja entrever una subtensión que se desprende de la primera tensión, y especifica el enfrentamiento entre dos normas más: aquella que permite el uso de objetos nuevos en las fases de construcción y exploración (Norma 16) Vs. Aquella que indica que en una prueba sólo se pueden hacer uso de objetos instalados en el sistema teórico del curso (Norma 17).

Las *tensiones* así descritas generaron un *dilema* en los estudiantes respecto a lo que ellos debían finalmente poner en el reporte escrito: seguir su *autenticidad* y por lo tanto realizar un registro fiel de lo hicieron y saben, o seguir el *formalismo* que implica lo exigido por el reporte y por lo tanto no registrar todo lo que hicieron o saben.

Por otro lado, analizadas las trayectorias didácticas relativas a los demás problemas del bloque (particularmente, PA1.1: Definir el objeto circunferencia, PA1.2: Demostrar la existencia de tal objeto) llevó identificar el real objetivo que tenía la profesora con el problema PP1: más que proveer procedimientos para construir los segmentos congruentes, su objetivo era instalar el objeto protagonista (circunferencia) que interviene en uno de los procedimientos sugeridos (Pr1), con todo lo que ello implica (definirlo y probar su existencia -Norma 40-). Por su puesto, este objetivo era claro para la profesora, pero no para los estudiantes quienes, probablemente, estaban focalizados en la producción de un procedimiento de construcción y no en la instalación de objetos. Con ello, se pone de manifiesto que un problema puede tener dos objetivos que, en caso de no ser coincidentes, pueden originar tensiones como las descritas antes.

Ahora bien, la no coincidencia entre objetivos puede poner en manifiesto una tensión más, esta vez para la profesora. Ella propone un problema (*e.g.*, PP1) con el fin de que esté al alcance de todos y pueda ser resuelto por ellos (Norma 8) pero a la vez pretende que mediante su solución se puedan instalar objetos nuevos al sistema (Norma 7). Las producciones de los estudiantes indicaron que, en términos generales, ellos efectivamente solucionaron el problema (Pr1 y Pr2) y emplearon el objeto nuevo deseado (la circunferencia). Sin embargo, grupos distintos al Grupo B, pudieron formular una conjetura (Pp4) y probarla sin necesidad de aludir a objetos nuevos pues emplearon el T. Localización de Puntos instalado en cursos previos (Ver la Figura 36 y la Figura 37). Por su puesto, esta tensión le generó un dilema entre la necesidad de equidad (involucrar a todos los estudiantes) y motivación (esté al alcance de todos y sea interesante) y la necesidad curricular de involucrar objetos nuevos de conocimiento. Pero ¿cómo fueron manejadas las tensiones y, por ende, los dilemas implicados? Con respecto al primer caso, el dilema asociado fue resuelto de manera particular para cada fase de solución del problema; de manera específica, la profesora flexibilizó las Normas 13a, 12b y 9, y estableció sus versiones finales para el caso de las Normas 13a y 12b, y la Norma 9a, respectivamente. En lo que respecta a la subtensión entre las Normas 16 y 17, faltan datos para poder precisar cómo esta se maneja. En principio, se ha identificado que la profesora ha precisado dichas normas, pero no se tiene información empírica para ver si los estudiantes las han interiorizado o las ven como antagonistas.

Con relación a la tercera tensión, la profesora maneja la situación de manera liderando la elaboración de la prueba conjunta de Pp4 y luego, proponiendo los problemas auxiliares PA1.1 y PA1.2 con el propósito de instalar el objeto circunferencia y, validar implícitamente Pr1 y Pp3.

4.3 BLOQUE DE PROBLEMAS N° 4: INSTALACIÓN DEL ESPACIO Y PLANOS EN EL ESPACIO

Luego de ser abordados dos bloques de problemas (el N° 2 y el N° 3) focalizados en temas relativos a la relación de paralelismo y de tangencia de una recta a una circunferencia, la clase se adentra en el Bloque de Problemas N° 4. Vale recordar que los Bloques N° 2 y N° 3 no fueron considerados para esta investigación dado que sus temáticas pertenecen al Dominio Geometría Plana.

El Bloque de problemas N° 4 consta de cuatro Problemas Principales, tres Problemas Auxiliares asociados al Problema Principal 4 y doce problemas disgregados en cuatro Tareas Extraclase (5, 6, 7 y 8), tres problemas por tarea. Este bloque se desarrolla entre las sesiones de clase 8 a 17. De manera específica, el Bloque aborda temáticas de ambos Dominios, Geometría Plana y Geometría del Espacio. El segundo se hace presente con todos los Problemas Principales y Auxiliares, y con cinco de las Tareas Extraclase. El primero, con el Problema Principal 4 y 7 problemas de las Tareas Extraclase. Con respecto a esto último, la profesora aprovechó las producciones relativas s dicho problema principal y tales problemas de tarea para instalar en el sistema teórico hechos relativos a Cuadriláteros y a la relación de Paralelismo en el plano. Con relación al Dominio Geometría del Espacio, los problemas correspondientes permitieron abordar temáticas relativas a cuadriláteros plegados, el espacio mismo, y hechos relativos a planos en el espacio (visualización e intersección). La Tabla 64 contiene los enunciados de los problemas relativos al Dominio de interés (Geometría del Espacio) de los cuales se obtuvieron datos para la investigación, su objetivo y la sesión de clase en la que estos fueron abordados.

Tabla 64. Problemas Bloque N° 4

Dominio temático: Geometría del Espacio	**Temas:** Cuadriláteros plegados; El espacio; Visualización de Planos en el espacio	
Problema Principal 4 [PP4]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Sean A, B, C y D cuatro puntos. ¿Qué figura sería la unión de segmentos determinados por estos puntos, si ningún par de segmentos se intersecan en puntos diferentes a los extremos?	Generar la necesidad de establecer el Postulado de existencia de puntos fuera del plano, si por su propia iniciativa, los estudiantes ponen un punto fuera del plano.	11

<table>
<tr><th>Problema Auxiliar 4.1 [PA4.1]</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>¿Es el espacio diferente a un punto, a una recta y a un plano?</td><td>Establecer teóricamente y no de manera figural las diferencias entre punto, recta, plano y espacio.
Generar la necesidad del P. del Espacio.</td><td>11, 12, 13</td></tr>
<tr><th>Problema Auxiliar 4.2 [PA4.2]</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>¿Cuántos puntos tiene el espacio?</td><td>Garantizar que el espacio tiene infinitos puntos.</td><td>13, 14</td></tr>
<tr><th>Problema Auxiliar 4.3 [PA4.3]</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>Al redefinir fuera del plano base dado un vértice de un $\boxdot ABCD$. ¿La figura que queda es un cuadrilátero?</td><td>Construir la definición de cuadrilátero plegado y pirámide</td><td>14</td></tr>
<tr><th>Problema Principal 5 [PP5]</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>En una línea de una demostración de geometría del espacio un estudiante ha escrito una aserción. Escriba todas las posibles garantías que conozca para dicha aserción, y datos correspondientes que posibilitaría usar dicha garantía (Si necesita poner más filas, puede hacerlo):
<table>
<tr><th>Aserción</th><th>Garantía</th><th>Datos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sea el plano α</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>Recodar todas las garantías y respectivos datos que permiten justificar teóricamente, la determinación de un plano.
[Este problema se concibe como útil para explicitar varias herramientas que permiten determinar planos en el espacio].</td><td>13, 14</td></tr>
<tr><th>Problema Principal 6 [PP6]</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>Dado el $\triangle ABC$, sean D y F puntos tal que $F \in \overleftrightarrow{AB}$, $D \in \overleftrightarrow{AC}$, e I un punto que no pertenece al plano determinado por A, B y C. Sea un punto H tal que $H \in \overleftrightarrow{DI}$, y un punto G tal que $G \in \overleftrightarrow{FH}$.
a) ¿Pueden determinarse por lo menos tres planos distintos al inicial? Justifique su respuesta.
b) Considere todos los planos determinados por triángulos que no comparten vértice con el ΔABC ¿Qué relación tienen esos planos con α_{ABC}?</td><td>Visualizar distintos planos en el espacio y generar la necesidad de establecer el P. Intersección de planos y el T. Intersección de planos.</td><td>16, 17</td></tr>
</table>

A continuación, se presenta el análisis didáctico relativo a varios de los problemas expuestos en la Tabla 64. Específicamente, PP4 y sus auxiliares fueron escogidos porque, además de involucrar la transición de la Geometría Plana a la Geometría del Espacio, el análisis preliminar dejó ver la riqueza en los argumentos producidos individual o colectivamente. PP5 y PP6 fueron escogidos por varias razones: (i) PP6 pretende fortalecer la visualización, proceso clave para la Geometría del Espacio; en este caso, mediante la identificación de diversos planos en el espacio. PP5 allana el camino para poder abordar PP6 en tanto ayuda a evocar proposiciones que permiten determinar un plano. (ii) Al igual que PP4 y su auxiliarles, el análisis preliminar asociados a tales problemas dejó ver una gran producción de argumentos abductivos y deductivos principalmente.

4.3.1 Análisis relativo a PP4 y sus auxiliares: cuadrilátero plegado y el Espacio

En la sesión de clase 8, la profesora propone el PP4. Provee 10 minutos para que los estudiantes, de manera individual, den una respuesta al problema, sin hacer uso de un EGD; la profesora recoge las producciones escritas. Pasado este tiempo, pide solucionar el mismo problema a los grupos de trabajo conformados permitiendo el uso de computadores. Luego de 17 minutos, aproximadamente, recoge las producciones escritas de cada grupo.

Durante las sesiones de clase 9, 10 y 11, la profesora coordina la puesta en común de las soluciones provistas por los estudiantes. En la primera de estas sesiones, proyecta en el televisor un documento, previamente elaborado por ella, que expone las respuestas y las va comentado una a una. Por momentos pide a los estudiantes participar para que tales producciones sean discutidas hasta obtener acuerdos. El documento que proyecta es el siguiente. Las letras entre paréntesis indican los grupos que proponen la propuesta correspondiente:

Resumen Problema Cuatro Puntos

1. Si los cuatro puntos son colineales, se determina un segmento. (G, B, A, H, G)
2. Si solo tres puntos son colineales, se determina uno, dos o tres triángulos u otras figuras como escalón o Z. (B, A, H, G, F, C, J)
3. Se determina un cuadrilátero si:
   a) cuatro puntos no colineales (B, H)
   b) cada terna de puntos no sean colineales (F)
   c) (i) cada punto es la intersección de exactamente dos segmentos y (ii) ningún par de segmentos se intersecan en puntos diferentes a los extremos (C)
   d) (i) puntos no colineales cada tres y (ii) cada extremo es intersección de dos segmentos. (A)
4. El cuadrilátero puede:
   a) ser convexo o no convexo (E, I)
   b) tener o no propiedades especiales (B) (lados opuestos paralelos, lados opuestos congruentes y un par de ángulos opuestos rectos, todos los lados congruentes y un

ángulo recto, todos los lados congruentes, dos pares de lados adyacentes congruentes y ningún par de lados opuestos congruentes, exactamente un par de lados opuestos paralelos)

5. Una figura tridimensional si:
   a) Si hay tres puntos no colineales en el plano y uno que no pertenezca al plano. (E)
   b) Si $A, B, C \in \alpha$ y $D \notin \alpha$, A, B, C no colineales la unión determina una figura tridimensional; es una pirámide. (H)

Hasta el numeral 4, los objetos involucrados pertenecen al Dominio Geometría Plana. Terminada la sesión de clase 11, los objetos instalados fueron cuadrilátero, cuadrilátero convexo, paralelogramo, y teoremas que indican propiedades de paralelogramos, cuadriláteros especiales (trapecio y cometa) y paralelogramos especiales (rombo, rectángulo). Al finalizar la sesión de clase 11, la profesora propone abordar las propuestas escritas en el numeral 5 del documento antes mencionado. Como resultado de la interacción respectiva la profesora fue proponiendo problemas auxiliares (PA4.1, PA4.2, PA4.3) que pretendían instalar objetos al sistema que le dieran sentido a tales propuestas.

Antes de presentar el análisis didáctico relativo al abordaje de las ideas propuestas en dicho numeral 5 (y de las producciones a los problemas auxiliares), presentamos un breve fragmento del trabajo de uno de los grupos de estudiantes que fueron grabados (Grupo I). Esto porque tiene un cierto interés investigativo que se comenta al final del análisis correspondiente.

4.3.1.1 *Trayectoria didáctica 5: Actividad matemática sobre PP4 – Grupo I*

Los estudiantes abordan el problema. En primera instancia, Jefferson lee su enunciado [1]. Seguido a esto, los estudiantes tienen un breve diálogo sobre cómo abordar el problema. A continuación, se trascribe ese momento. Enseguida, se presenta el análisis normativo respectivo:

2	Brayan 2:	Pues es un cuadrado… Un cuadrilátero, digo.
3	Jefferson:	Pero… Espere. Si dice [en el enunciado] que los segmentos solo se intersecan en los extremos… Ah sí, puede ser un cuadrilátero cualquiera.
4	Andrés:	¿Y los puntos son coplanares?
5	Jefferson:	Pues… ahí [en el enunciado] eso no está… Espere miramos [lee el enunciado]. Dice cuatro puntos no más.
6	Brayan 2:	Pues pensemos en cuadriláteros y ponemos casos.
7	Andrés:	¿En los que son convexos y no convexos?

8	Brayan 2:	Ah, pues… pero también cuadrados…
9	Jefferson:	[interrumpe] Y si no son coplanares qué, eso es como una pirámide, no sé…
10	Brayan 2:	Hagamos aquí [en la hoja de respuesta] primero lo del plano, que conocemos, pa' [para] poner la conjetura, ¿No?
11	Andrés:	No sé, pues…
12	Brayan 2:	Pues siempre hay que ponerla, y justificar, y la… lo que se hace en Cabri.
13	Jefferson:	Profe, ¿hay que poner lo de siempre [se refiere a los ítems exigidos para reportar la solución de un problema]?
14	P:	[Se acerca al grupo]
15	Jefferson:	Profe, hay que poner exploración…
16	P:	Sí, sí, sí, lo de siempre.
17	Brayan 2:	Entonces cuadrilátero… lo otro [idea de Andrés] no se puede hacer
18	Andrés:	Convexo… Para que sea convexo qué necesitamos…

Luego de la línea [18], los estudiantes dedicaron todos sus esfuerzos a precisar condiciones para caracterizar un cuadrilátero convexo (C1). En su reporte escrito no hicieron referencia alguna a puntos no coplanares. Justo al término de la sesión de clase, fueron indagados al respecto. Se trascribe la breve entrevista relacionada con el asunto:

1	Ent:	Les quiero preguntar unas cositas muy rápidamente sobre la solución que ustedes dieron al problema, lo que terminaron reportando. ¿Listo? Bien. Ustedes en su respuesta, ¿solo aludieron a cuadriláteros?
2	Jefferson:	Sí.
4	Andrés:	Convexos.
5	Ent:	Solo tuvieron en cuenta que los puntos [A, B, C, D] fueran coplanares…
6	Brayan 2:	Sí.
7	Ent:	Pero al principio, Andrés creo, dijo… cuestionó si los puntos eran coplanares…
8	Jefferson:	Es que en el problema no se exigía que fueran coplanares.
9	Ent:	Y, ¿tuvieron en cuenta esa posibilidad [que los puntos no fueran coplanares]?
10	Los tres:	No.
11	Ent:	Y, ¿por qué? Al principio algo dijeron sobre eso…
12	Brayan 2:	Pues… es que no sabemos… qué pondríamos en…
13	Jefferson:	Es que ya podríamos hablar de cuadriláteros con todo lo que tenemos [se refiere a los objetos instalados en el sistema teórico].
14	Ent:	Brayan, ¿ibas a decir algo?
15	Brayan 2:	Lo mismo, es que, si fuéramos a justificar algo, pues de esto… los cuadriláteros, los tipos, podríamos decir algo.
16	Ent:	Y qué pasaría si hubiesen tomado los puntos no coplanares…
17	Andrés:	Pues es que ahí nos faltan cosas…
18	Ent:	Cómo así…

19	Andrés:	Saber que eso se puede hacer… Tener puntos que no están en el mismo plano.
20	Ent:	Mmmm ya. Se fueron a lo que conocen, a la fija, para poder justificar, ¿sí?
21	Brayan 2:	Pues sí…
22	Ent:	Listos, gracias.

Las dos trascripciones anteriores no presentan con detalle la actividad de los estudiantes; esto, porque el interés investigativo de este estudio se focaliza en el Dominio de la Geometría del Espacio (como se comentó antes) y la producción del grupo se centró en el trabajo de cuadriláteros convexos, en el marco de la Dominio de la Geometría Plana. No obstante, el fragmento de la interacción de los estudiantes y la entrevista dejan notar un asunto interesante en relación con aspectos normativos.

En la trascripción de la interacción de los estudiantes salta a la vista que ellos, aun cuando comprenden que no se exige solamente considerar los puntos coplanares [4, 5, 9], deciden abordar el problema considerando características para que la figura que se conforma sea un cuadrilátero convexo, y con esto que los puntos dados sean coplanares. Brayan 2 pone de manifiesto la necesidad de cumplir con las características que debe tener el reporte escrito donde presentan su solución al problema [10, 12]. Con ello, se entrevé que este estudiante ejerce un control normativo al poner de manifiesto que deben cumplir con la **Norma 13**. Leyendo la última parte de interacción de los estudiantes, parece ser que producto del cumplimiento de dicha Norma (en particular **13d**), y las **Normas 9** y **39** se toma la decisión de considerar sólo puntos coplanares de lo contrario, estaría violando tales normas. Específicamente, de las líneas [10, 17] se pueden interpretar que Brayan 2 tiene la necesidad de considerar objetos que ellos puedan manipular, que “conocen”, para poder proponer una justificación, por ejemplo.

Tal interpretación, es ratificada con las respuestas dadas por los estudiantes ante la entrevista antes trascrita. Cuando se les cuestiona sobre por qué no estudiaron la posibilidad de que los puntos dados fueran no coplanares [11], entre Brayan 2 [12,15] y Jefferson [13] coinciden en que, al considerar los puntos coplanares, y con ello cuadriláteros, tendrían objetos instalados con los cuales poder justificar algo (**Norma 13d**). Esta idea es complementada por Andrés, cuando se les cuestiona sobre qué pasaba si hubiesen tomado puntos no coplanares [16]; él menciona que, en ese caso, hubiesen necesitado objetos no instalados en el sistema teórico como, por ejemplo, la existencia de puntos no coplanares [19]. Con este escenario, se entrevé que, aunque ellos pensaron en aludir a la posibilidad de que los puntos fueran no coplanares, lo descartaron porque tal hecho no estaba instalado en el sistema y no tendría cómo justificarlo. Tal interpretación se corrobora cuando, ante la afirmación hecha en [20], Brayan 2 responde afirmativamente.

4.3.1.2 *Síntesis y breves comentarios: Trayectoria didáctica 5*

Esta trayectoria didáctica se concentra en la producción de los estudiantes del Grupo I cuando abordaron PP4, un problema de *búsqueda de consecuente* que insinuaba la posibilidad de construcción de objetos geométricos. Para este caso en particular, dado el interés de este estudio, no se consideró como dato de investigación toda la actividad de los estudiantes para solucionar el problema; sólo un fragmento en el que ellos deciden qué condición inicial proveer a los cuatro puntos dados, si son coplanares o no (Práctica 1). En esa discusión surgen dos objetos, cuadrilátero convexo (C1) y la proposición *existen puntos no coplanares* (Pp1). En el fragmento no hubo procedimientos de construcción de objetos ni argumentos de índole matemático. El lenguaje empleado fue verbal. Con este escenario y por sustracción de materia (dado que no lo abordaron el contexto de la Geometría del Espacio), no se concibe necesario hacer el esquema de la configuración (cognitiva) de objetos.

Lo interesante del episodio tiene que ver con asuntos normativos. Como se expuso, aunque al principio de su actividad los estudiantes reconocieron la posibilidad de que los puntos dados fueran no coplanares, finalmente terminan descartado esa posibilidad para considerar solo el caso en que estos fueran coplanares y, en esa medida, considerar cuadriláteros. La razón por la cual ellos tomaron tal decisión se fundamenta en el cumplimiento de ciertas normas; ellos no sólo actuaron en correspondencia con la Norma 13d (es necesario proveer justificaciones a las conjeturas formuladas), también lo hicieron en relación con la **Normas 39** y **9** (todo se debe argumentar con objetos del sistema teórico de la clase). Dado que considerar puntos no coplanares los llevaría al abordaje de objetos no instalados (Pp1) de un Dominio no conocido (Geometría del Espacio), prefieren aludir a puntos que pertenecen a un mismo plano y con ello tener a su disposición objetos de la Geometría Plana (domino que con cierto detalle han venido estudiando) que potencialmente les permitiera hacer argumentos "formales".

En consecuencia, es plausible afirmar que este grupo de estudiantes desestima la Norma 9a, que flexibiliza la 9, en el sentido de que es posible esgrimir argumentos informales, mediante los cuales se pueden usar objetos todavía no instalados en el curso. Es probable que, para ese momento, ellos aún no tuvieran claras las características de un argumento informal y, por ende, no se atrevieran a actuar en correspondencia con 9a.

Todo lo anterior vuelve a poner de manifiesto tensiones de los estudiantes que se corresponden con las expuestas en el Bloque de Problemas N° 1. En cuanto la legitimidad del uso de objetos: o bien usaban objetos nuevos -Pp1- en la solución del problema (**Norma 16**), o bien planteaban argumentos que empleaban objetos de la geometría plana previamente instalados (**Norma 9**). En cuanto a la comunicación (y como producto de la anterior tensión): o bien reportaban todas sus ideas, inclusive considerando Pp1 (**Norma 2**), o bien reportaban argumentos con objetos instalados (**Norma 9**). Como resultado de tales tensiones, emergieron de nuevo dilemas entre la formalidad y la autenticidad; dilema que, para este caso, dio prevalencia al primer asunto en detrimento del segundo. La Norma 9a que podría haber regulado las tensiones y mermado los dilemas, no fue considerada por los estudiantes.

Finalmente, y a manera de síntesis, la Tabla 65 presenta las normas que regularon la práctica que llevaron a cabo los estudiantes cuando abordaron PP4. Dado que no se expuso toda su actividad (pues se concentraron en objetos de Geometría plana) no es posible asignarle en sentido estricto una situación instruccional. En tal sentido, no se asocian normas a situaciones; más bien, se precisa en qué sentido cada norma se hace presente (o regula alguna acción) en la trayectoria.

Tabla 65. PP4-Grupo I: Normas que regularon su práctica

Norma	Lo que reguló
13d	Asuntos para tener en cuenta al momento de resolver el problema y, en consecuencia, qué elementos considerar en el reporte. En particular, se debe tener presente que las conjeturas que se formulen deben ser justificadas.
9	Qué objetos primarios (y Dominio) tener presente para abordar el problema. Como la idea es poder argumentar con objetos primarios instalados, se decide considerar puntos coplanares.
2, 16	Se plantean ideas auténticas, pero en la medida en que éstas sean manejables con el sistema a disposición. El objeto nuevo *cuadrilátero convexo* (C1) es manejable; el objeto nuevo *existen puntos no coplanares* (Pp1) no lo es.

4.3.1.3 *Trayectoria didáctica 6: Actividad matemática sobre PP4 y sus auxiliares – Toda la clase*

En la misma sesión de clase 11, la profesora alude a las propuestas de los grupos E y H que indicaron algo distinto a las producciones previamente estudiadas para solucionar PP4; esto es, que consideran un punto (*e.g.*, D) que no pertenece al plano determinado por los otros tres (*e.g.*, A, B y C). La profesora advierte que en adelante ella "espera que no sólo dos grupos, sino toda la clase, aborden los problemas fuera del plano [...] y no considerando sólo cosas del plano [1]". La mención de la profesora se corresponde con la **Norma 7** (la resolución de problemas permite introducir objetos nuevos al sistema) y **Norma 16** (es legítimo el uso de objetos que no hacen parte del sistema teórico en un procedimiento de construcción o exploración), pero esta vez haciendo especial énfasis en considerar objetos en el Espacio (puntos no coplanares).

Volviendo a las características de la trayectoria, cuatro momentos generales toman ocasión cuando se abordan las propuestas de los grupos E y H: (i) uno focalizado en un procedimiento, llevado a cabo por la profesora, para construir un punto fuera de un plano en Cabri 3D y que condujo al estudio del concepto Espacio. (ii) Otro enfocado en argumentar por qué el punto, la recta y el plano son diferentes (PA4.1). (iii) Otro centrado en garantizar que el espacio tiene infinitos puntos (PA4.2). Y (iv) uno consistente en el estudio mismo de las propuestas con el fin de precisar si la figura resultante es un cuadrilátero (PA4.3).

Momento 1. Construcción de un punto fuera de un plano. Con el fin de abordar las propuestas del numeral 5, y en correspondencia con la **Norma 12a**, la profesora pretende ilustrarlas empleando el software Cabri 3D (Práctica 2). En una hoja nueva, pone cuatro puntos en el plano base del EGD (plano base), los nombra A, B, C y D (en correspondencia con la **Norma 15**) y construye $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{DA}$. Dice que lo que pretende es usar la herramienta *redefinir* para sacar el punto B del plano [1]. En primera instancia, pone un punto que aparente aparece fuera del plano que por defecto tiene el EGD. Usa la herramienta *redefinir* seleccionado el punto B y luego el nuevo punto construido; queda un diagrama como se muestra en la Figura 49.

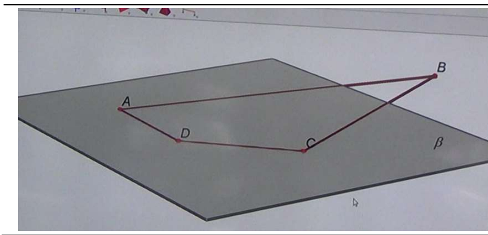


Figura 49. PP4: Representación A, B, C, D coplanares

Enseguida, la profesora dice que con clic derecho sostenido se puede mover el diagrama para observarlo desde diferentes perspectivas (conocido como arrastre de bola cristal) y verificar si B está en el plano o no [2]. Al hacerlo se evidencia que, al parecer, el punto B sigue perteneciendo en el plano (Ver Figura 52).

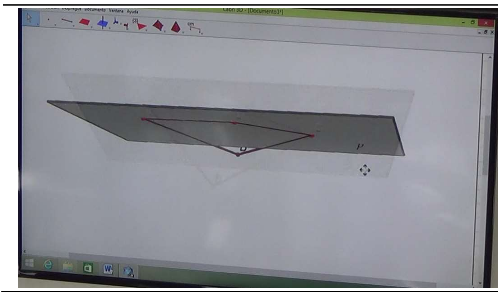


Figura 50. PP4: Representación A, B, C, D coplanares otra perspectiva

Ante el no funcionamiento del procedimiento anterior, la profesora usa la herramienta *punto*, dibuja un punto, lo selecciona y con la tecla shift oprimida mueve el mouse hacia arriba para poner el punto fuera del plano [3] (Figura 51).

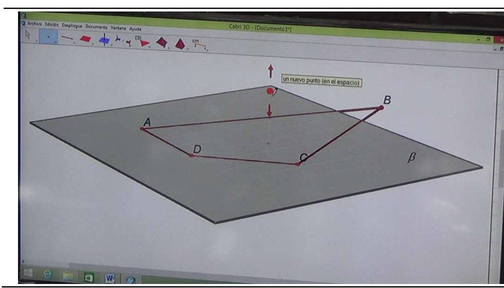


Figura 51. PP4: Representación N° 1 Pr1

Enseguida, usa la herramienta *redefinir* seleccionado el punto B y luego el nuevo punto construido (Pr1). En ese momento, el punto B queda redefinido y toma el lugar del nuevo punto quedado un diagrama como el presentado en la Figura 52 [5].

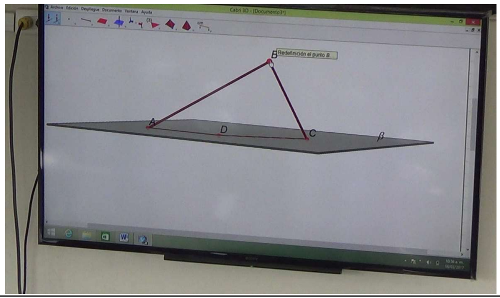


Figura 52. PP4: Representación N° 2 Pr1

Se trascribe lo que siguió luego de lo descrito anteriormente y que da lugar al interés por instalar el concepto Espacio, la Profesora dice lo siguiente [5]; adyacente se presenta el análisis respectivo:

<table>
<tr><th colspan="3">Trascripción</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>5.</td><td>P:</td><td>¿Ahí sí estará en el espacio? Vamos a ver, clic derecho [se refiere a realizar el arrastre de bola de cristal] ese punto si no tiene el problema de antes. Ese si se ve flotando por allá arriba. ¿Pero lo puedo hacer? Dos grupos lo hicieron [se refiere a los Grupos E y H]. ¿Por qué no lo puedo hacer? Cabri me está dejando hacerlo. ¿Qué necesitaría yo para aceptar algo así? Entonces si yo quiero aceptar lo que propusieron dos grupos, entonces tengo que sacar uno de estos puntos, lo voy a redefinir a mi punto B que era el que yo quería redefinir, como el punto nuevo [se refiere a Pr1]. ¡Ja se salió! Se salió y se llevó todo [se refiere a Figura 52]. ¿Qué necesito yo en mi sistema teórico para validar esta cosa?</td><td rowspan="3">En este apartado, la profesora lleva a cabo el Pr1 con el cual se construye un punto fuera del plano base de Cabri 3D y generando una representación gráfica dinámica ilustrada con la Figura 52 (L1). Con las preguntas que hace (e.g., ¿Pero lo puedo hacer?, ¿Por qué no lo puedo hacer?, etc.), la afirmación Cabri me está dejando hacerlo y la intervención [7] la profesora está actuando en correspondencia con la Normas 18 y 37. En otras palabras, la profesora está planteando la necesidad de saber teóricamente porqué existe un punto que no pertenece al plano base, teniendo como fundamento que el EGD permite llevar a cabo un procedimiento en el cual tal resultado es posible.

A su vez, dado que el concepto Espacio (C2) ha aparecido luego de haber ilustrado Pr1, la profesora provee su definición y pregunta sobre su existencia [7] (Norma 38), ambos, aspectos necesarios para instalar tal concepto en el sistema (en correspondencia con la Norma 40).</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>José:</td><td>El espacio.</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>P:</td><td>Ah bueno para poner un punto en el espacio. Miren que Cabri me dice, cuando yo le digo: quiero hacer un punto, él me pregunta: ¿Lo quiere sobre el plano?, ¿lo quiere sobre el segmento?, ¿cómo puedo yo estar segura? Entonces, usan el shift, aquí está sobre el plano, pero yo no le he dado clic y usan el Shift y la flecha para arriba. Y dice: el espacio. Se va para el espacio. […]Bueno lo voy a definir y ustedes me dirán. [Escribe la definición en el tablero: D. Espacio: El espacio es el conjunto de todos los puntos]. Bien, lo definí. ¿Existe? Siempre pregunto lo mismo.</td></tr>
</table>

Momento 2. Estudio sobre la diferencia entre el espacio y los objetos punto, recta y un plano. Justo después de que la profesora hiciera la intervención [7], Óscar menciona que la definición de Espacio provista por la profesora *no nos está diciendo nada* [8], *porque es que tenemos que el plano también es un conjunto de puntos* [10]. Como respuesta, la profesora dice que sí se está informando algo nuevo y es que el espacio existe para la clase desde hace mucho tiempo, desde que están estudiando geometría plana [11]. Advierte que, en el fondo, el estudiante lo que está cuestionado es si el *Espacio* es diferente a los objetos *punto*, *recta* y *plano* [15]. En ese momento, propone el PA4.1 (¿Es el espacio diferente a un punto, a una recta y a un plano?). Los estudiantes abordan, individualmente, el problema al término de la sesión de clase N° 11, razón por la cual no hay una trascripción de la discusión respectiva para un grupo de estudiantes.

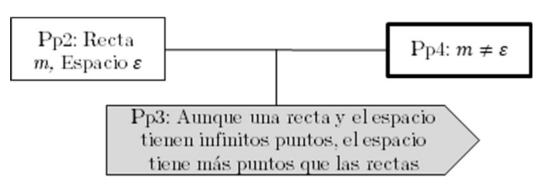
En la sesión de clase 12, la profesora lidera el análisis colectivo de las respuestas que los estudiantes dieron a la pregunta PA4.1 (práctica 3). Su primera intervención fue la siguiente; se presenta su análisis adyacente a él.

	Trascripción	**Análisis**
16.	Quiero recordarles que la metodología de estos cursos es precisamente construir sobre las ideas de ustedes y por eso es que es tan importante manifestarse. A veces se nos va la mano en eso de trabajo en grupos, porque en trabajo en grupos a veces hay una persona que dice esto es así y los demás se quedan calladitos sabiendo que no es así, bien.	En la intervención, la profesora pone de presente la **Norma 1** indicado como importante la participación de los estudiantes pues sobre sus ideas es que se construye conocimiento.
	Entonces este ejercicio fue bastante interesante, desafortunadamente pues… o mejor dicho fue muy bueno, pero yo me demoré mucho porque yo tenía que leer 32 hojas o 31 hojas y tratar de sacar las ideas, ese trabajo fue fuerte para mí, pero bastante interesante.	La profesora actúa en correspondencia con la **Norma 3**; esto es, tiene presente ideas de los estudiantes a través del estudio de sus propuestas y las interpreta con el fin de obtener las ideas principales.

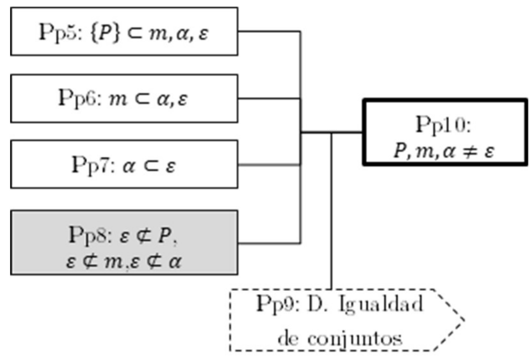
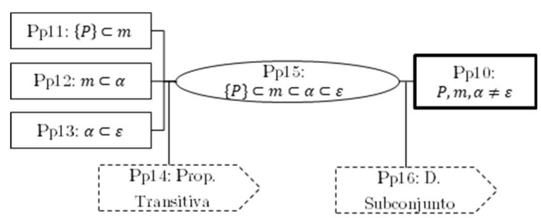
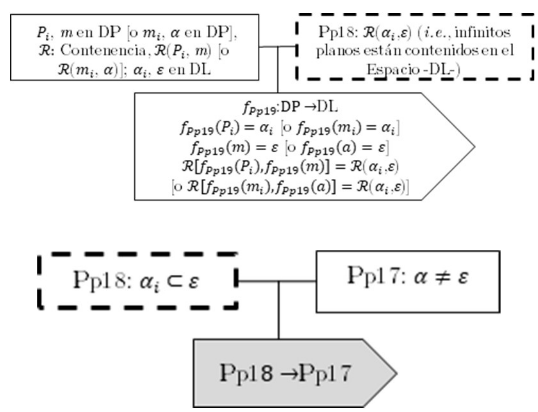
Enseguida, la profesora proyecta en el televisor un documento que expone las ideas que ella obtuvo luego de estudiar las propuestas de los estudiantes como respuesta al PA4.1. Se presentan tales ideas acompañadas, en la medida de los posible, el argumento global asociado (Tabla 66). Esto, para tener un contexto a partir del cual dar sentido a los comentarios de la profesora y precisar las razones por las cuales algunas de tales ideas son descartadas:

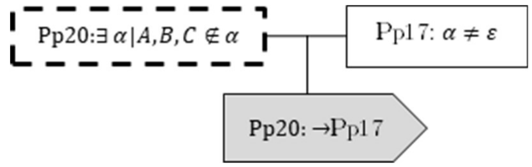
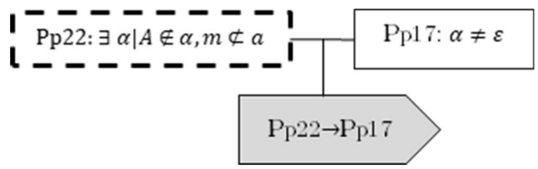
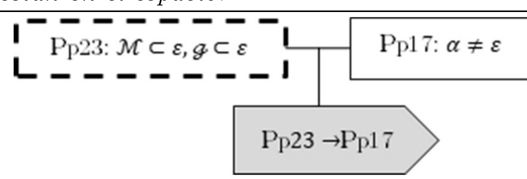
1. Aunque la recta tiene infinitos puntos, el espacio tiene “más infinitos puntos”.
2. El punto está contenido en rectas, planos, y el espacio. La recta está contenida en el plano y el espacio. El plano está contenido en el espacio. El espacio no puede estar contenido en el punto, ni la recta, ni el plano.
3. El punto es subconjunto de la recta; la recta es subconjunto del plano; el plano es subconjunto del espacio.
4. Dado que infinitos puntos pertenecen a una recta, infinitas rectas están en un plano, lo que se necesitaría asegurar, para que el espacio sea diferente, es que infinitos planos estén contenidos en el espacio. Por lo tanto, se puede concluir que el espacio es el conjunto de todos los planos.
5. El espacio diferente de un plano: teniendo tres puntos, encontrar un plano que no los contenga.
6. El espacio es la suma de todos los semiplanos determinados por las infinitas rectas que pasen por un punto.
7. Asegurándonos que hay puntos y rectas fuera del plano.
8. Necesitamos asegurar que el punto, la recta y el plano están contenidos en el espacio y por ello son diferentes. Si un plano está contenido en el espacio, la recta y el punto también lo están por ser subconjuntos del plano. Sin embargo, puede haber rectas o puntos fuera del plano; en el espacio.
9. Necesitamos mostrar que las rectas y los planos están en el espacio.
10. Considero que si dos puntos determinan una única recta y tres puntos determinan un único plano, quizás se requieren al menos cuatro puntos para hablar del espacio. Si se tienen al menos cuatro puntos no coplanares, se garantiza de alguna forma la existencia del espacio. La diferencia con el punto, la recta y el plano es que el espacio es la unión de todos esos infinitos conjuntos.
11. Debe ser más de un punto; así el espacio no sería un punto. Debe ser infinitos puntos no colineales, pues si no sería una recta. No puede ser tres puntos no colineales porque estos determinan un plano. Por lo tanto, el espacio debe determinarse por cuatro puntos no coplanares.
12. Dados cuatro puntos, cada tres de ellos no colineales y un punto que no pertenezca al plano determinado por los otros tres puntos.
13. Se necesita que, dado un plano, existe al menos un punto que no pertenece a él.

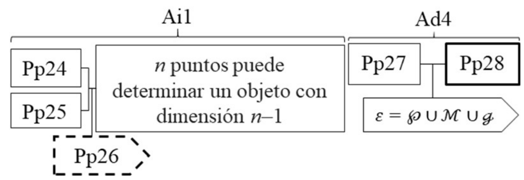
Tabla 66. PA4.1: Análisis respuestas de los estudiantes[50]

	Aunque la recta tiene infinitos puntos, el espacio tiene “más infinitos puntos”.	
1.	Ad1: El estudiante intenta argumentar deductivamente que una recta m es diferente al espacio ε (Pp4). Usa como garantía una proposición que debe ser probada: Aunque una recta y el espacio tienen infinitos puntos, el espacio tiene más puntos que las rectas (Pp3).	

[50] Los polígonos sombreados con color gris en los diagramas que ilustran la estructura de los argumentos indican proposiciones que debe ser probadas.

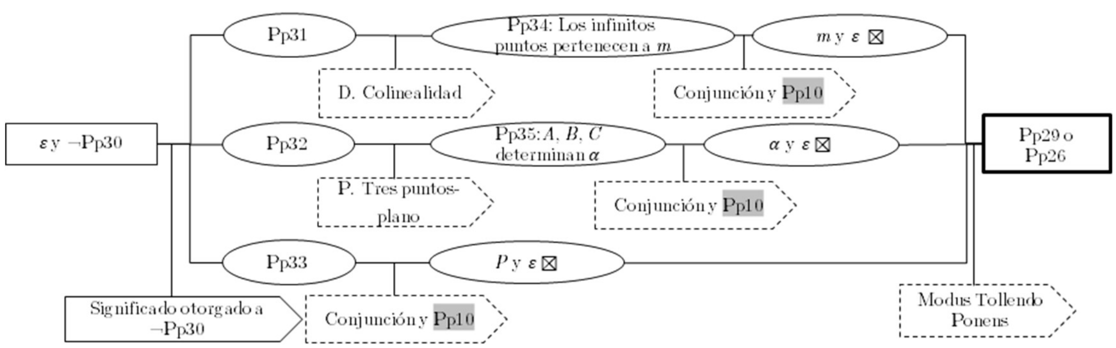
	El punto está contenido en rectas, planos, y el espacio. La recta está contenida en el plano y el espacio. El plano está contenido en el espacio. El espacio no puede estar contenido en el punto, ni la recta, ni el plano.	
2.	Ad2: El estudiante intenta argumentar deductivamente que un punto P, una recta m, un plano α es diferente al espacio ε (Pp10). Usa tres datos que son proposiciones instaladas en el curso: El punto está contenido en rectas, planos, y el espacio (Pp5). La recta está contenida en el plano y el espacio (Pp6). El plano está contenido en el espacio (Pp7). Usa como otro dato una proposición que debe ser probada: El espacio no puede estar contenido en el punto, ni la recta, ni el plano (Pp8). Usa como garantía, no explicitada, la D. Igualdad de Conjuntos (Pp9).	
	El punto es subconjunto de la recta; la recta es subconjunto del plano; el plano es subconjunto del espacio.	
3.	Ad3: Argumento similar a Ad2; su aserción parece ser Pp10. Los datos que emplea son: El punto es subconjunto de la recta (Pp11, parte de Pp5); la recta es subconjunto del plano (Pp12, parte de Pp6); el plano es subconjunto del espacio (Pp13). Implícitamente usa la D. Subconjunto (Pp15) y la transitividad de esta relación como garantía (Pp16).	
	Dado que infinitos puntos pertenecen a una recta, infinitas rectas están en un plano, lo que se necesitaría asegurar, para que el espacio sea diferente, es que infinitos planos estén contenidos en el espacio. Por lo tanto, se puede concluir que el espacio es el conjunto de todos los planos.	
4.	La aserción parece ser que el Espacio ε es diferente a un plano α (Pp17). El argumento global contiene dos argumentos, un Abductivo (Ab1) y uno a analógico (Aa1). Mediante Aa1 se pretende inferir que *infinitos planos están contenidos en el espacio* (Pp18), teniendo como analogía *infinitos planos pertenecen al Espacio como infinitos puntos pertenecen a una recta* (o infinitas rectas pertenecen a un plano) -Pp19-. Mediante el Ab1 se establece que es necesario tener a Pp18 como dato para poder concluir que Pp17. La garantía Pp18→Pp17 y Pp18 deben ser probada.	
5.	*El espacio diferente de un plano: teniendo tres puntos, encontrar un plano que no los contenga.*	

	Ab2: La aserción es Pp17: $\varepsilon \neq \alpha$. Se pretende establecer que para que Pp17 es necesario tener como dato que *existe un plano que no contenga a tres puntos dados* (Pp20). La garantía Pp20$\rightarrow$Pp17 y Pp20 deben ser probadas. 
6.	*El espacio es la suma de todos los semiplanos determinados por las infinitas rectas que pasen por un punto.*
	No se provee un argumento. Se provee una caracterización para el Espacio que debe ser probada Pp21.
7.	*Asegurándonos que hay puntos y rectas fuera del plano.*
	Ab3: La aserción parece ser Pp17:$\varepsilon \neq \alpha$. Se pretende establecer que para que Pp17 es necesario tener como dato que *existe un punto o una recta fuera de un plano* (Pp22). La garantía Pp22$\rightarrow$Pp17 y Pp22 deben ser probadas. 
8.	Se proponen dos argumentos para asegurar Pp10:
8.1.	*Necesitamos asegurar que el punto, la recta y el plano están contenidos en el espacio y por ello son diferentes. Si un plano está contenido en el espacio, la recta y el punto también lo están por ser subconjuntos del plano.*
	En esencia, el argumento es igual a Ad3.
8.2.	*Sin embargo, podría haber rectas o puntos fuera del plano; en el espacio.*
	En esencia, el argumento es igual a Ab3.
9.	*Necesitamos mostrar que las rectas y los planos están en el espacio.*
	Ab4. Se pretende que para que $\varepsilon \neq \alpha$ (Pp17) es necesario tener como dato que $\mathcal{M} \subset \varepsilon$ y $\mathscr{g} \subset \varepsilon$ donde $\mathcal{M}$ es el conjunto de todas las rectas y $\mathscr{g}$ de todos los planos (Pp23). La garantía Pp23$\rightarrow$Pp17 y Pp23 deben ser probadas. 
10.	*Considero que si dos puntos determinan una única recta y tres puntos determinan un único plano, quizás se requieren al menos cuatro puntos para hablar del espacio. Si se tienen al menos cuatro puntos no coplanares, se garantiza de alguna forma la existencia del espacio. La diferencia con el punto, la recta y el plano es que el espacio es la unión de todos esos infinitos conjuntos.*
	Análisis: La aserción es Pp10. Dos argumentos componen el argumento global: uno inductivo (Ai1) y otro deductivo (Ad4). Para Ai1 se toman como casos: *Dos puntos determinan una recta m* (Pp24) y *tres puntos [no coplanares] determinan un plano* α (Pp25). La garantía que se induce *es n puntos puede determinar un objeto con dimensión n–1* (Pp26). Al aplicar Pp26 para n=4 se tiene que cuatro puntos no coplanares determinan ε. Para Ad4 se toma como dato P un punto, m una recta, α un plano y ε (Pp27); como garantía que $\varepsilon = \wp \cup \mathcal{M} \cup \mathscr{g}$ donde $\wp$ es el conjunto de todos los puntos, $\mathcal{M}$ de todas las rectas y $\mathscr{g}$ de todos los planos (Pp28).



Debe ser más de un punto; así el espacio no sería un punto. Debe ser infinitos puntos no colineales, pues si no sería una recta. No puede ser tres puntos no colineales porque estos determinan un plano. Por lo tanto, el espacio debe determinarse por cuatro puntos no coplanares.

11. Ad5: Se entrevé que, mediante un argumento deductivo por contradicción, se pretende probar que *Dado ε, este contiene cuatro puntos no coplanares* (Pp29). Se asume como negación de cuatro puntos no coplanares (Pp30), lo siguiente: Infinitos puntos colineales (Pp31), Tres puntos no colineales (Pp32), Un punto (Pp33). En el primer caso se infiere que se determinaría una recta (Pp34), la contiene los puntos; en el segundo, un plano (Pp35); con el tercero se tendría un punto. En cualquier caso, habría una contradicción con lo que se tiene como dato, ε, asumiendo como garantía Pp10. Como resultado del argumento, en lugar de aludir a Pp29, se hace referencia a su recíproca, Pp26.



Dados cuatro puntos, cada tres de ellos no colineales y un punto que no pertenezca al plano determinado por los otros tres puntos.

12. No se provee un argumento, sino una forma (Pp35) para determinar a ε. Vale indicar que Pp35 es similar a Pp26. En la primera proposición, no basta con tener cuatro puntos no coplanares para poder determinar ε; se necesita que cada terna de puntos sea no colineales.

13. *Se necesita que, dado un plano, existe al menos un punto que no pertenece a él.*

Mismo argumento Ab3

Con base en lo presentado en la Tabla 66, vale indicar varios aspectos interesantes en relación con la producción de los estudiantes:

(i) Una lectura fina de las ideas propuestas por ellos deja ver que las mismas presentan argumentos para soportar la aserción *El Espacio es diferente a los puntos, las rectas y los planos* (Pp10); esto es un indicador que permite afirmar que los estudiantes tienen interiorizada la **Norma 13d** según la cual ellos deben justificar las respuestas que proveen a los problemas. Más específicamente, actúan en correspondencia con la

Norma 9a poniendo de manifiesto la interpretación que tienen de una justificación como argumento informal. Esto es explicado a continuación:

Con respecto a las propuestas 1, 2, 3, 8.1, 10, 11, aun cuando se les ha asociado un argumento de estructura deductiva, no se les puede considerar como formales. Ello porque, o bien no hacen explícitas alguna garantía, o bien emplean proposiciones que deben ser probadas. Con relación a los demás casos, se han identificado argumentos abductivos (propuestas 4, 5, 7, 8.2, 9, 13), inductivos (propuesta 10) o analógicos (propuesta 4), tipos de argumentos, que desde la teoría se clasifican como informales (o substanciales). Sin son abductivos, es porque los estudiantes aluden a la necesidad de tener alguna proposición (dato o garantía) para poder obtener alguna aserción. Si son inductivos o analógicos es porque infieren de casos o eventos ya conocidos proposiciones, por un acto de generalización o de comparación respectivamente, las propiedades que necesitan para apoyar su aserción.

Con el escenario presentado en los dos últimos párrafos, se puede decir, que las características de la Norma 9a se pueden hacer corresponder con tipos especiales de argumentos, tal como lo muestra la Tabla 67.

Tabla 67. Norma 9a y Tipos de argumentos asociados

Condiciones de la Norma 9a: Un argumento informal para el curso es aquel que		**Argumento asociado**
i)	Se compone de las aserciones (sin sus respectivas garantías) que pueden ser insumo para la prueba formal.	Argumentos deductivos
ii)	Puede indicar que los objetos necesarios para llevar a cabo tal prueba no están en el sistema teórico.	Argumentos esencialmente abductivos. Inductivos o analógicos cuando se pretende inferir los objetos necesarios.

(ii) No todas las propuestas dieron respuesta a la pregunta. Unas efectivamente intentaron argumentar por qué el Espacio es diferente de un punto, una recta y un plano (2, 3, 8.1, 10); otras solo que el Espacio es diferente a uno de tales objetos (al plano, 4, 5, 7, 8.2, 9, 13; a la recta, 1); otras que se necesitan cuatro puntos no coplanares para determinar el Espacio (4, 10, 11) y otras que lo que hicieron fue proveer características del Espacio (6) o cómo este se puede determinar (13). Pese a estas diferencias, en esencia dos elementos son empleados por los estudiantes para garantizar que el Espacio es diferente a los otros objetos, el segundo más frecuente que el primero:

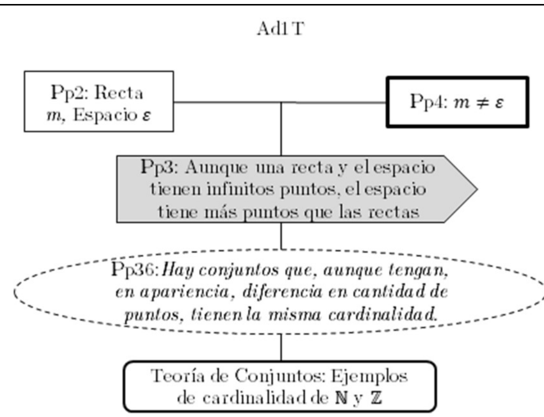
La definición de subconjunto (o de igualdad de conjuntos que guarda relación con tal definición) para explicitar relaciones de contenencia entre tales objetos (ideas 1, 2, 8.1); o precisar que existen puntos que no pertenecen a un plano (idea expresa en las propuestas 4, 5, 7, 8.2, 9, 10, 11, 12, 13 con las proposiciones Pp18, Pp20, Pp22, Pp23, Pp26, Pp29, Pp35).

En lo que sigue (Tabla 68), se trascribe y analiza la puesta en común orquestada por la profesora respecto a los argumentos o producciones realizados por los estudiantes al respecto al problema PA4.1.

Tabla 68. Comentarios sobre propuestas asociadas a PA4.1

Sobre Propuesta 1	
17.	P: Es una respuesta muy interesante. Primero está tratando de dar una diferencia. Está diciendo: es diferente a la recta porque el espacio tiene más puntos. Esto es un problema bastante complicado de abordar en este curso: es un problema que se aborda en teoría de conjuntos, en cuanto a la infinitud de elementos en un conjunto. ¿Hay conjuntos con infinitos elementos? Sí, nosotros tenemos ejemplos de conjuntos con infinitos elementos: Los números naturales [...]. Pero resulta que los números naturales y los números enteros tienen igual cantidad de infinitos puntos. Porque yo puedo hacer una asignación de los números de naturales, una asignación uno a uno, con los números de acá [los números naturales]. O sea que los puedo ir contando. En los naturales yo cuento cero, uno, dos y ahí estoy contando, ¿Sí? En los enteros yo puedo contar: cero, uno, menos uno, dos, menos dos [escribe en el tablero 0,1,-1,2,-2...]. Este es el primero [señala el 0], este el segundo [señala el 1], tercero [señala -1], etc. Y si los puedo contar tienen igual cantidad de elementos. Entonces estos dos conjuntos [los naturales y los enteros] tienen igual cantidad de elementos, a pesar de que se ven más en este [señala los enteros], en cuanto a cantidad de elementos, son iguales. O sea, la cardinalidad de estos dos conjuntos es la misma. Y la cardinalidad de la recta no es esta [la de los naturales o la de los enteros] sino la de los reales. La cardinalidad de los reales es mayor y la de la recta es la de los reales. Y la del espacio me imagino que también, entonces no es una real diferencia. Pero esto lo van a entender más en teoría de conjuntos donde se preocupan por la cardinalidad. Entonces esto es un buen intento.

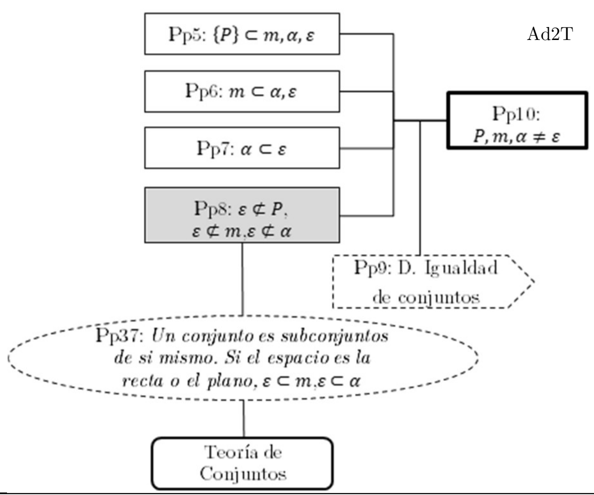
En el análisis hecho por la profesora, ella refuta la garantía empleada por el estudiante (Pp3) -Ad1 se transforma en Ad1T. Acude al concepto de Cardinalidad de Conjuntos indicando que, aunque hay algunos que parecen diferir en cantidad de puntos, estos pueden tener la misma cardinalidad; por ejemplo, la de los números naturales es igual a la de los números enteros; la de los números reales es igual a la de una recta o un plano (Pp36). La profesora usa como backing la Teoría de Conjuntos. El diagrama del argumento se transforma en Ad1T.



Sobre Propuesta 2

18: P: Bueno, el plano está contenido en el espacio [leyendo la propuesta 2], el espacio no puede estar contenido ni en el punto, ni en la recta, ni en el plano. No sabemos. Porque todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Y el espacio podría ser solamente el plano. [...] puede que el conjunto de todos los puntos sea el plano. Entonces esa no es una razón para decir que son diferentes. Que este [plano] sea subconjunto de este [espacio] no significa que este [espacio] no sea subconjunto del otro [plano]. Pueden ser conjuntos iguales y si el espacio llega a ser el plano, entonces este argumento ya no nos funciona. [...] Hasta ahora no he entrado en geometría. No es válido porque en conjuntos, un conjunto puede ser subconjunto de otro y ese también ser subconjunto del uno.

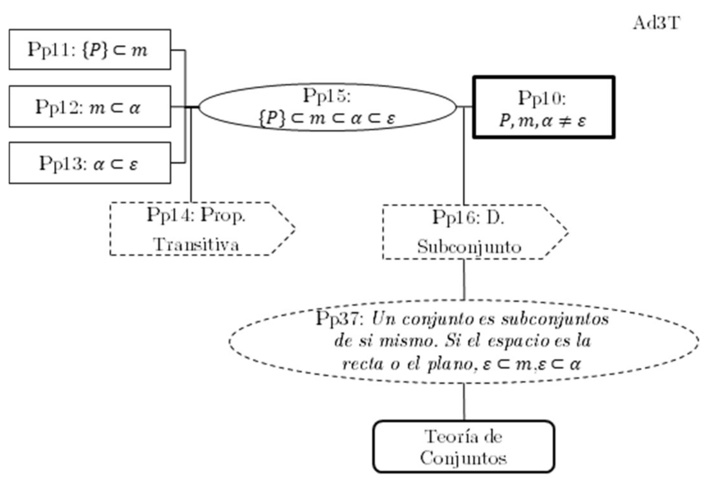
La profesora refuta la validez del dato Pp8. En particular, menciona que la recta y el plano pueden ser el espacio mismo y, en tal caso, el espacio (recta o plano) pueden estar contenidos en el espacio. Esto, porque un objeto es subconjunto de sí mismo (Pp37). La profesora advierte que el backing empleado es la Teoría de Conjuntos. El diagrama del argumento se transforma en Ad2T.



Sobre Propuesta 3

19. P: El punto es subconjunto de la recta, la recta es subconjunto del plano, el plano es subconjunto del espacio [leyendo la propuesta 3]. O sea, más o menos me está diciendo lo mismo [Se refiere a lo dicho respecto a Ad2]. Entonces, tampoco es una diferencia.

La profesora dice que esta respuesta es similar a la dada previamente. De manera implícita, refuta Pp16 afirmando que la relación de contenencia no es suficiente para indicar la diferencia entre los conjuntos. Parece usar Pp37 para apoyar su idea. El diagrama del argumento se transforma en Ad3T.

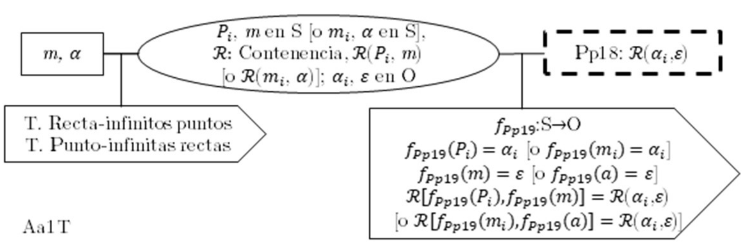


Sobre Propuesta 4

19. P: Dado que infinitos puntos pertenecen a una recta, infinitas rectas están en un plano [leyendo la propuesta 4], ¿Eso lo sabemos?

20.	Varios:	Síii. Por [Teorema] Recta infinitos puntos [garantizado que una recta tiene infinitos puntos].
21.	Steven:	Por [Teorema] Punto-infinitas rectas [garantizando que un plano contiene infinitas rectas].
22.	P:	Teorema punto-infinitas rectas coplanares, ¿Sí? En un plano dado unos puntos existen infinitas rectas que lo contienen. [Continúa leyendo] Lo que se necesitaría asegurar, para que el espacio sea diferente, es que infinitos planos estén contenidos en el espacio. Pero ¿Cuántos planos tenemos nosotros?, hasta ahora ¿Cuántos planos tenemos?
23.	Varios:	Uno.
24.	P:	¿Cómo sabemos que tenemos un plano?
25.	José:	Postulado de existencia
26.	P:	Por el postulado de existencia, por lo menos tenemos uno. Pero hasta ahora no podemos decir que existan más planos ¿Sí? [Continúa leyendo la propuesta 4] Por lo tanto, se puede concluir que el espacio es el conjunto de todos los planos. Lo cual lo haría distinto a los demás, se supone. Pero ya definí espacio como el conjunto de todos los puntos y si solo tenemos un plano… pues ahí tenemos el conjunto de todos los puntos. […] Sin embargo, surge una cosa: ¿Será que hay infinitos planos? Hemos ido agrandando nuestro universo, comenzamos con un punto […] después una recta, […] luego que la recta tiene infinito puntos. Luego un plano y que tiene infinitas rectas. […] ¿Habrá infinitos planos o no? Eso lo tendríamos que contestar en algún momento, y pues ahí, serían distintos [un plano y el espacio].

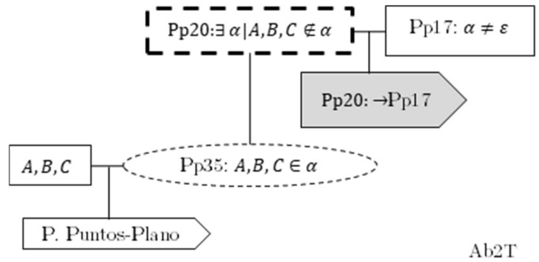
Implícitamente, en [26] la profesora legitima el Aa1 al comentar que efectivamente, poco a poco se ha ido agrandando el universo de estudio, empezando con infinitos puntos en una recta y luego, infinitas rectas en un plano. En consecuencia, tendría sentido preguntar ¿Habrá infinitos planos o no? [26]. De otro lado, al finalizar [26] se legitima el Ab1 cuando advierte que tendrían que precisar si existe infinitos planos. Otro asunto que se destaca es que la profesora pregunta por la garantía del dato empleado en Aa1 [19]. Los estudiantes responden [20, 21]. El diagrama de Aa1 se transforma en Aa1T, no porque haya refutaciones, como en el caso anterior, sino porque se complementa con una garantía.



Sobre Propuesta 5		
27.	P:	[Leyendo la propuesta 5] El espacio es diferente de un plano porque teniendo tres puntos, encontrar un plano que no los contenga. ¿Qué es lo que dicen? ¿Qué interpretan ustedes ahí?
28.	José:	Ahí no dice que los puntos no sean colineales.
29.	Steven:	Tres puntos no colineales determinan un único plano. Si son colineales los contienen infinitos planos.

30.	P:	Ah ¿Qué dice un postulado que nosotros tenemos? ¿El postulado puntos planos no dice dados tres puntos están en un plano? ¿Y si no son colineales están en un único plano? O sea que esto está mal, porque tres puntos siempre están en un plano, siempre. Según ese postulado. El postulado puntos-plano dice: Dados tres puntos hay un plano que los contiene y si esos tres puntos no son colineales el plano que los contiene es único. Entonces no nos funciona esa diferencia, porque no es correcta.

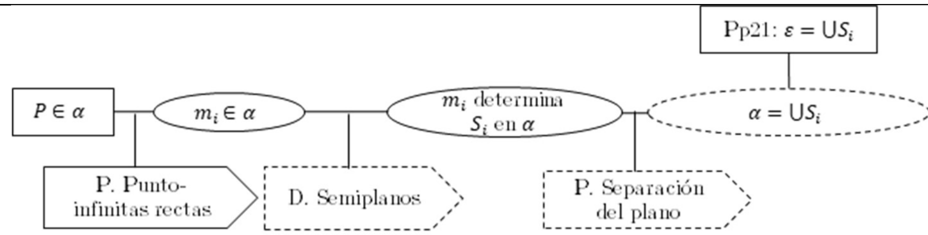
Ante la pregunta planteada por la profesora en [27], los estudiantes hacen una deducción teniendo como dato tres puntos y usando como garantía el P. Puntos-Plano. Infieren que siempre hay un plano que contiene a los puntos dados (Ad6). La profesora valida lo dicho por los estudiantes y, en consecuencia, dice que la propuesta 5 está mal, porque siempre hay un plano que contiene a tres puntos dados [Pp35]. Pareciera que no hay otra interpretación plausible de lo que se quiso plantear con 5. Esto es, que habría que encontrar un plano que no contenga a tres puntos dados distinto al plano que los contiene (producto del P. Puntos-Plano). El diagrama de Ab2 se transforma en Ab2T.



Ab2T

Sobre Propuesta 6		
30.	P:	[Leyendo la propuesta 6] El espacio es la suma de todos los semiplanos determinados por las infinitas rectas que pasen por un punto.
31.	José:	¿Cómo hace la suma de semiplanos?
32.	Steven:	Es unión…
33.	P:	Debería haber dicho unión ¿Sí? Primera crítica. Entonces el espacio es la unión de todos los semiplanos determinados por las infinitas rectas que pasen por un punto. Laura ¿Por qué no?
34.	Laura:	No sé.
35.	Varios:	Pueden estar en el mismo plano [se refiere a los semiplanos]
36.	P:	Estarían en un mismo plano ¿Por qué Sebastián?
37.	Sebastián:	Porqué todas esas rectas pueden pertenecer al mismo plano.
38.	P:	Hasta ahora nuestras rectas están todas en un plano. Tenemos infinitas rectas en un plano que contienen a un punto, entonces la unión de todos los semiplanos ¿Acaba siendo quién…?
39.	Varios:	El plano.
40.	P:	El plano.

En la interacción se vislumbra un argumento deductivo (Ad7) que tiene por objeto probar que la unión de semiplanos es un plano. Para con esto refutar la caracterización del espacio dada en la propuesta 6 (Pp21).



Sobre Propuesta 7

40. P: [Leyendo la propuesta 7] Asegurándonos que hay puntos y rectas fuera del plano. Ah estos ya están empezando a decir: tendría que salirme del plano. Cómo asegurarlo es el problema. ¿Cómo sé que hay puntos y rectas fuera del plano? Si logrará eso o si ya me hubiesen dado un postulado que me dice algo así parecido pues estamos bien. Porque ya quiere decir que me toca salirme del plano para buscar otras cosas y si esas otras cosas llegan a existir con esa condición, serían parte del espacio, porque el espacio es el conjunto de tooodos los puntos ¿Sí?, entonces ya no sería el plano porque estoy mirando hacia afuera. Pero el problema está ¿Y cómo lo aseguro? Entonces vamos a ver que sigue.

La profesora legitima Ab3; más específicamente, legitima el dato que se infiere del mismo al afirmar que se "tendría" que salir del plano. Cuestiona de nuevo sobre cómo se sabe que hay puntos y rectas fuera del plano. La profesora sugiere que si hubiese un postulado que garantice tal hecho, todo se resolvería. Lo interesante de tal intervención que sugiere el estatus teórico del hecho que se necesita.

Sobre Propuesta 8.1

40. P: [Leyendo la propuesta 8.1] Necesitamos asegurar que el punto la recta y el plano. Hay que ver esa forma como hablan porque dicen el punto; nosotros ya sabemos que existen infinitos puntos, entonces debería haber dicho los puntos. Igual, en lugar de la recta, las rectas. El plano, si, sólo tenemos hasta ahora un plano. Entonces, el artículo que usan es muy importante. El punto es como si sólo hubiese uno. Pero no, eso no es cierto. Bueno dice [retoma su lectura]: Necesitamos asegurar que el punto, la recta y el plano están contenidos en el espacio y por ello son diferentes. Pero nosotros ya sabemos que sí están, porque yo definí el espacio como el conjunto de todos los puntos. Entonces el punto, la recta y el plano, todos están en el espacio ¿Si? Si un punto [continúa leyendo] está contenido en el espacio, la recta y el punto también lo están por ser subconjunto del plano. Pues si hasta ahora los puntos y las rectas son subconjuntos del plano ¿Cierto?, porque nosotros sólo hemos trabajado en un plano. Mejor dicho, el espacio sería el mismo plano. Otra vez, el ser subconjunto no es suficiente para ser diferentes, porque un conjunto es subconjunto de él mismo.

En primera instancia, la profesora hace un comentario de forma aludiendo a tener cuidado con el uso de los artículos (en correspondencia con la **Norma 5b1**). Luego, refuta la propuesta de manera similar a lo expuesto en Ad3T.

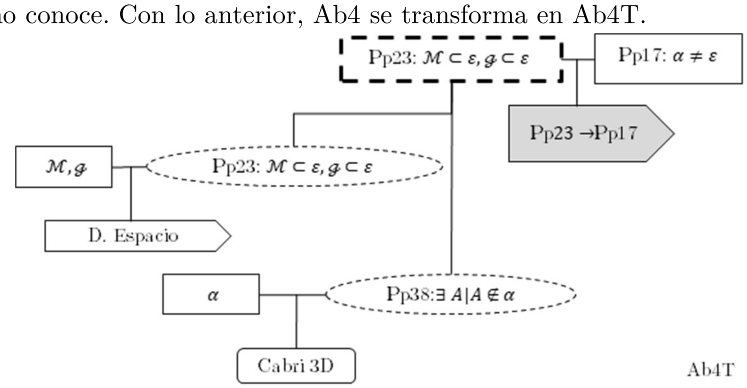
Sobre Propuesta 8.2

40. P: [Leyendo la propuesta 8.2] Sin embargo puede haber rectas o puntos fuera del plano en el espacio. Pero ¿Cómo hago para asegurar eso? Entonces están como los de arriba ¿No? Entonces los de abajo vuelven y dicen lo mismo.

La profesora comenta que esta propuesta contempla, en esencia lo mismo que se han planteada en otras (*e.g.*, propuesta 7), a saber, que es necesario tener puntos o rectas fuera del plano. Vuelve a recalcar sobre la necesidad de saber cómo se asegura tal hecho.

Sobre Propuesta 9		
40.	P:	[Leyendo la propuesta 9] Necesitamos mostrar que las rectas y los planos están en el espacio. ¿Está diciendo lo mismo?
41.	José:	No, por definición de espacio ya se tiene eso.
42.	P:	Ya lo sabemos por definición [de Espacio]. Me imagino que querían decir lo mismo que los anteriores. Que además del plano que yo tengo hay otro [punto] afuera. ¿Cómo sabemos que existe ese punto? Es que todo comenzó porque a mí se me ocurrió redefinir un punto en Cabri 3D, pero lo interesante de esa redefinición que yo hice es que Cabri 3D lo hizo. Luego Cabri 3D debe saber algo que nosotros todavía no sabemos. Pero nosotros ya sabemos que Cabri sabe más de lo que nosotros sabemos en ese momento. Cabri nos ayuda a descubrir cosas y lo que estamos tratando de hacer es: si Cabri lo permite, qué del sistema geométrico tiene Cabri, conoce Cabri, que nosotros todavía no conocemos. Entonces esa era nuestra preocupación. En nuestro mundo, no existe todavía. Bien.

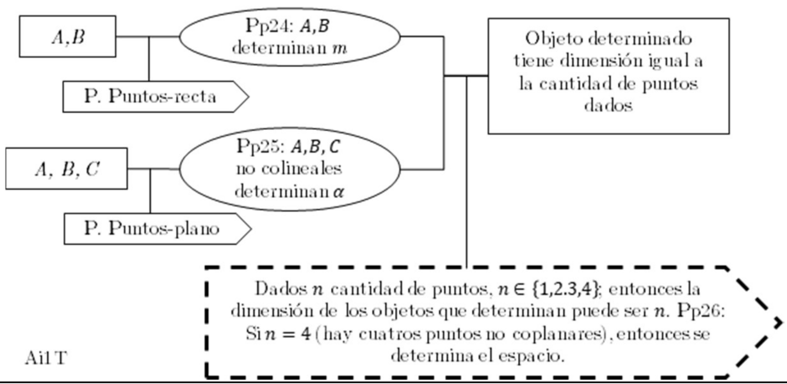
José, con su respuesta, refuta Ab4. Mediante un argumento deductivo (Ad8) infiere que las rectas y los planos están contenidas en el Espacio por definición de espacio, razón por la cual esto ya se sabe (no hay necesidad de mostrarlo). La profesora valida esa opinión. La profesora advierte [42] que, probablemente, esta propuesta es similar a 8.2 y cambia el dato de Ab4 por Pp38 (Existe un punto que no pertenece a un plano). Ella hace un comentario a partir de cual parece advertir por qué varias propuestas aluden a la necesidad de establecer la existencia de puntos fuera del plano. Previamente, ella usó Cabri 3D para ilustrar que este permite construir un punto fuera del plano base. Admite Cabri como backing del hecho (Ace1) y, en consecuencia, que debe haber un hecho geométrico en el sistema que la clase aún no conoce. Con lo anterior, Ab4 se transforma en Ab4T.



Sobre Propuesta 10		
42.	P:	[Leyendo la propuesta 10] Considero que si dos puntos determinan una única recta [lee el siguiente] y tres puntos determinan un único plano ¿Eso es cierto?
43.	José:	No. Si [los puntos] no son colineales.
44.	P:	No colineales, le faltó esa frasecita. Quizás [continúa leyendo] se requieren al menos cuatro puntos para hablar del espacio. Si se tienen al menos cuatro puntos no coplanares, se garantiza de alguna forma la existencia del espacio. La diferencia con el punto, la recta y el plano es que el espacio es la unión de todos esos infinitos conjuntos. Pero aquí comenzó y me gustó mucho, porque ese es el recorrido que hemos ido haciendo, hemos ido..., comenzamos con un punto, pero el teorema existencia me dice existen las rectas. Bueno si existen las rectas y le pusieron ese nombre diferente a punto.

		Y ¿Cuál es la diferencia entre punto y recta? Ahí fue donde nació la necesidad de que la recta tuviera por lo menos dos puntos para que fuera distinto al punto que yo ya sé que existe. [...] Pero se necesitaban dos puntos para yo poder hablar de recta, determinan una única recta. Y entró ese postulado ¿Sí? Y después dijimos: bueno, y el plano, también existe. Pero ¿qué lo hace distinto a la recta? Pues fue como dicen ahí, los tres puntos. Necesitamos un postulado que me dijera, que dice ¿Qué?
45.	Varios:	Postulado puntos plano.
46.	P:	Puntos-plano. Esos tres puntos no colineales generaron el plano. [...] Entonces ahí se ha mostrado como se ha ido ampliando nuestro universo y al irlo ampliando hemos metido postulados. Probablemente, entonces, se necesiten más puntos para el Espacio, ¿no? Como dicen ahí [se refiere a 9].

La profesora parece legitimar el Ai1. En [44] hace una descripción del proceso llevado a cabo para determinar la existencia de la recta y el plano intentado diferenciar tales objetos; para ello, el número de puntos necesarios para determinar cada objeto fue clave. En [46], ella indica, siguiendo ese proceso, la posibilidad de la necesidad de cuatro puntos para garantizar que el espacio es diferente del plano. De nuevo, la profesora indaga o provee garantías de los datos Pp24 y Pp25 utilizados en Ai1, produciendo sendos argumentos deductivos (Ad9 y Ad10, respectivamente). Tal argumento se transforma es Ai1T:



Sobre Propuesta 11

46. P: [Leyendo la propuesta 11] Debe ser más de un punto, así el espacio no sería un punto. Debe ser infinitos puntos no colineales, pues si no sería una recta. No puede ser tres puntos no colineales porque estos determinan un plano. Por lo tanto, el espacio debe determinarse por cuatro puntos no coplanares. Entonces ahí se ve la necesidad de tener un punto más y que cumpla una propiedad especial que los cuatro puntos no sean coplanares.

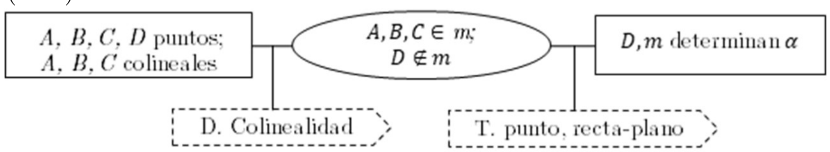
La profesora no hace algún comentario respecto a Ad5. Rescata de la propuesta asociada, la necesidad de tener que garantizar la existencia de un punto fuera del plano, o de cuatro puntos no coplanares.

Sobre Propuesta 12

46.	P:	[Leyendo la propuesta 12] Dados cuatro puntos cada tres de ellos no colineales y un punto que no pertenezca al plano determinado por los otros tres puntos. Eso, dicen ellos daría lugar al espacio. Cuatro puntos, ¿Por qué dicen cada tres de ellos no colineales?
47.	Steven:	Es que si son colineales sería una recta y con el otro punto no colineal entonces serían tres puntos no colineales estaría construyendo un plano.

48. P: Acabaríamos con un plano. Por eso ponen eso, si son colineales los cuatro puntos no me van a generar algo distinto a lo que ya tenemos, un plano. Entonces dicen cada tres de ellos no colineales y un punto que no pertenezca al plano. [...] Ahora si nos estamos saliendo, queremos garantizar, otra vez, ya varios lo han dicho, que hay un punto que no está en el plano que nosotros conocemos ¿Sí?

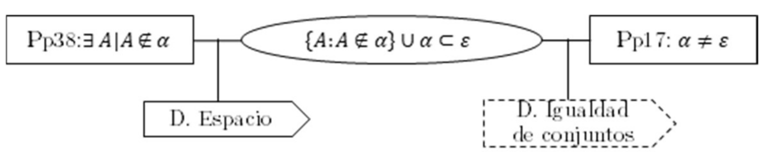
La profesora cuestiona la proposición Pp35, en particular, por qué en este caso se exige que cada tres puntos sean no colineales. Steven produce un argumento deductivo (Ad11) para inferir que necesariamente se forma un plano cuando de una cuaterna de puntos colineales, tres son colineales. La profesora valida ese argumento y termina advirtiendo que ya varias propuestas exigen tener un punto fuera del plano (Ab2).



Sobre Propuesta 13

49. P: La trece, que me dice: dado un plano se necesita por lo menos un punto que no pertenezca a él. Y la doce dice: dados cuatro puntos, cada tres de ellos no colineales y un punto que no pertenezca al plano que determinan los otros tres. ¿Están diciendo lo mismo o no? Eso es lo que vamos a tratar de determinar. Pero sí sale a la luz que de acuerdo con el desarrollo que hemos venido haciendo, dado el plano, necesitamos otro punto no coplanar para que… el Espacio sea diferente al plano. Entonces: Postulado del espacio. Vamos a coger la trece que sigue como la misma idea que hemos venido desarrollando para expandirnos [se refiere al desarrollo indicado por la propuesta 10 y el Ai1 asociado]. [Escribe en el tablero P. Espacio: Dado un plano existe un punto que no pertenece a él]. Con esto ya [el Espacio] es diferente a un plano; por nuestra definición [de Espacio], tiene un punto que no está en este [plano].

La profesora valida Ab3 de nuevo. En tal sentido, ve como necesario instalar un hecho que garantice que existe un punto que no pertenece a un plano dado (Pp38). Para hacerlo hace referencia al desarrollo indicado en la propuesta 10 y, con ello, usa el argumento Ai1 para inferir Pp38. Luego, sugiere un Ad12 con el cual infiere que un plano es diferente al Espacio:



Vale indicar que este episodio de clase termina con la propuesta de tarea a partir de la cual se pedía probar Pp35 a partir de Pp38.

De lo expuesto en la Tabla 68 se destaca el interés de la profesora por contemplar e interpretar cada una de las propuestas puestas en común (en consonancia con las **Norma 3**). De manera específica, las intervenciones de la profesora se focalizaron en cuatro aspectos específicos: (i) Precisar refutaciones de los argumentos dados por los estudiantes explicitando la proposición que no es válida (garantía, aserción o dato) e indicando el backing correspondiente a tal refutación cuando este no se corresponde con la Geometría. Por ejemplo, en los casos 1 al 3 la profesora acude a la Teoría de Conjuntos (backing) para refutar dos garantías (propuestas 1 y 3) y un dato (propuesta 2). (ii) Solicitar garantías de datos empleados en las propuestas; esto llevó a que los estudiantes que respondieran a tal solicitud proveyeran argumentos deductivos que complementaban los argumentos asociados a dichas propuestas (*e.g.*, propuestas 4, 5, 6, 9, 10, 12); eventualmente, los argumentos provistos por los estudiantes permitieron refutar algunas propuestas (*e.g.*, 6, 9). (iii) Legitimar los argumentos abductivos a partir de los cuales se establece la necesidad de garantizar la existencia de un punto fuera de un plano (Pp38), propósito central de PP4 y PP4.1 (presentes en las propuestas 4, 5, 7, 8.2, 9, 10, 11, 12). (iv) Aceptar los argumentos analógico e inductivo, explícitamente este último, para legitimar el Postulado el Espacio (Pp38). No sobra decir que Ace1 es otro argumento empleado por la profesora para dar mayor fuerza a la necesidad de tal postulado. Lo anterior ratifica la necesidad de cumplir con la **Norma 39**, esto es, tener un objeto con el cual garantizar que el procedimiento de "sacar un punto del plano" es válido.

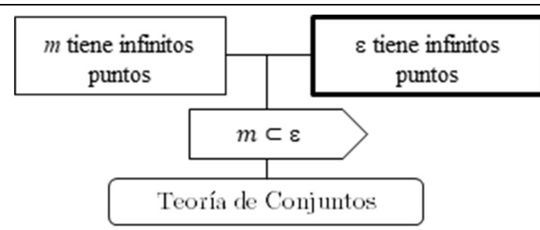
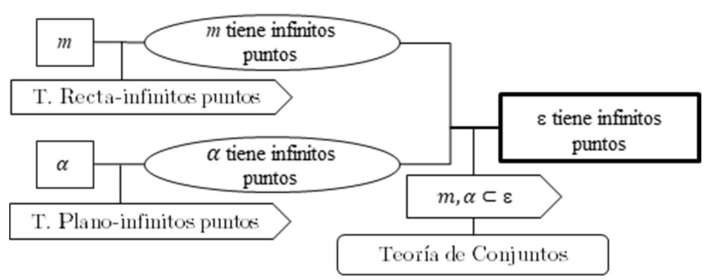
Ahora bien, cada uno de tales numerales se corresponde con una especificación de la **Norma 3**. Con relación a (i) la profesora se ha responsabilizado de determinar la validez del uso de las proposiciones dichas por los estudiantes en cada argumento (**Norma 25**); para este caso, proveyendo refutaciones explícitas de ideas argumentales. Con respecto a (ii) la profesora se ha responsabilizado de preguntar por los elementos (garantía en este caso) que constituyen los argumentos que constituyen cada propuesta (**Norma 24**). Al respecto de (iii) ella asume la responsabilidad de tomar la decisión final cuando existen varias opciones correctas sugeridas por los estudiantes (**Norma 26**) y de instalar un objeto, para este caso un postulado (**Norma 35a**). Finalmente, con relación a (iv) la profesora ha considerado que el procedimiento de construcción de EGD, realimenta las ideas de los estudiantes respecto a una propiedad, en este caso de Pp38 (**Norma 37**); lo más interesante es que, junto a esto, también fueron legitimados argumentos substanciales (inductivos o analógicos) como una manera para soportar la instalación de tal proposición. De alguna forma, esto sugiere una complementación de la Norma 35a, en particular, para lo referido a la instalación de un postulado, a saber:

> Norma 35a: Un teorema se instala en el curso si su enunciado es probado, su enunciado se usa en la prueba de otro teorema y la profesora lo sanciona como tal.
>
> Un postulado se instala en el curso si su enunciado es soportado por un argumento substancial (inductivo, analógico o de convicción externa -este último soportado en EGD), su enunciado se usa en la prueba de otro y la profesora lo sanciona como tal.

Momento 3. Estudio centrado en garantizar que el espacio tiene infinitos puntos. En la sesión de clase 13, la profesora pregunta a los estudiantes ¿Cuántos puntos tiene el espacio? (PA4.2). Cada grupo de estudiantes trabaja por 17 minutos, aproximadamente, en la solución del problema. Se les da la instrucción de que pueden usar el computador.

De manera particular, los grupos de estudiantes grabados (B e I) produjeron respuestas muy similares que, entre otras cosas, generaron poca discusión entre ellos. Se trascriben los reportes escritos que entregaron a la profesora; adyacente a ellos, se presenta el argumento asociado (Tabla 69):

Tabla 69. PA4.2-Grupos B e I: Argumentos

Grupo B	Ad13: Como la recta tienen infinitos puntos (por T. recta-infinitos puntos) y la recta está contenida en el espacio, el espacio tiene infinitos puntos.	
Grupo I	Ad14: Sea m recta y α plano. m, α tienen infinitos puntos (T. recta-infinitos puntos, T. Plano infinitos puntos). $m, \alpha \subset \varepsilon$, ε espacio. ε tiene infinitos puntos (por ser subconjuntos).	

Como se puede observar, ambos argumentos son bastante similares, puesto que tienen una estructura deductiva e, implícitamente, usan como principal garantía la Definición de Espacio (según la interpretación *el espacio contiene todo*); difieren en que la del grupo I además de una recta, considera un plano y en que esta hace explícitas las garantías que soportan que una recta y un plano tienen infinitos puntos.

Durante la puesta en común, la profesora no retoma alguna de estas propuestas (dado que son similares a algunos argumentos propuestos por los estudiantes para responder PA4.1). En su lugar, pone a discusión dos propuestas (**Norma 3**) que, en realidad, lo que pretendían argumentar es que, *dado un plano, existen infinitos puntos que no pertenecen a él* (Pp39). En la sesión de clase 14 la profesora propone el estudio de dichas propuestas (práctica 4). Estas son enunciadas de la siguiente manera:

> Grupo E: Dados tres puntos A, B, C no colineales y un punto D que no está en el plano determinado por la terna de puntos, construir una recta determinado, por ejemplo, $\overleftrightarrow{AD}$, entonces el espacio tiene infinitos puntos puesto que la recta los tiene (Pp40).
>
> Grupo J: Dados cuatro puntos A, B, C y D, tres de los cuales -A, B y C- están contenidos en el plano que por defecto trae en EGD y tomar otro punto H cualquiera del plano, y junto con el punto D y A, generar un plano. Hay infinitos puntos en el espacio que son los del nuevo plano generado por H, D y A (Pp41).

Para validar la propuesta del Grupo E, la profesora cuestiona cómo justificar que un punto distinto de A de la $\overleftrightarrow{AD}$, no está en el plano mencionado [1]. Hace una representación gráfica en EGD Cabri 3D (Figura 53). Tatiana 2 propone un argumento para ello. Para presentar tal argumento, la profesora usa el formato Núcleos-Pilares (en correspondencia con las **Normas 33** y **34**). Al ser esta la primea prueba, relativa al Domino de la Geometría del Espacio, en el que se emplea tal formato, se presenta la respectiva trascripción para ver el proceso de argumentación colectiva correspondiente:

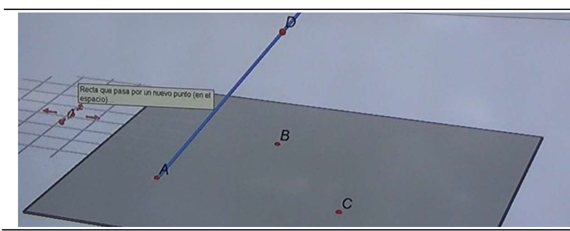
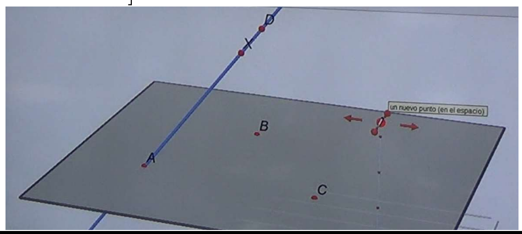
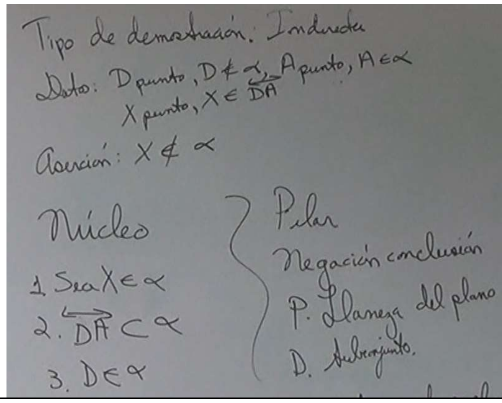


Figura 53. PA4.2: Representación asociada a Pp40

	Emisor:	**Enunciado**	**FArg**
	FPar	***Referencia a un agente anterior***	
2.	Tatiana 2:	Se puede hacer por contradicción. Se toma un punto en la recta.	Idea~E
	A~E	*Profesora*	

3.	P: P~P	Ah, o sea, tomamos un punto acá y llamémoslo X [en la representación, pone un punto X en $\overleftrightarrow{AD}$:]  *Tatiana 2*	A~P
4.	Tatiana 2: A~E	Entonces, si suponemos que X está en alfa, entonces la recta AD está en alfa. *Profesora*	Idea~E
5.	P: P~P	[Se dirige al tablero y escribe en el tablero elementos necesarios para elaborar una prueba **-Norma 32-** mientras verbaliza:] Tipo de demostración: indirecta. Los datos: D punto, $D \notin \alpha$; A punto, $A \in \alpha$; X punto, $X \in \overleftrightarrow{AD}, X \neq A$. Y la Aserción: $X \notin \alpha$. [Enseguida escribe:] Núcleos Pilares. [Como primer Núcleo escribe:] Sea $X \in \alpha$ [como pilar correspondiente escribe:] Negación de conclusión. Entonces, el siguiente argumento que me diste, es… *Tatiana 2*	Idea~P
6.	Tatiana 2: A~E	Es que, por el Postulado de la Llaneza, la recta AX está en el plano. *Profesora*	Paso~E:
7.	P: P~P	[La profesora escribe como segundo núcleo:] $\overleftrightarrow{AX} \subset \alpha$. Ah, pero como es núcleo, de una vez voy a poner DA [Borra $\overleftrightarrow{AX}$ y escribe] $\overleftrightarrow{AD} \subset \alpha$. Por [escribe como el pilar respectivo] P. Llaneza del plano. *Tatiana 2*	Paso~E:
8.	Tatiana 2: A~E	Ahora, D pertenece al plano por definición de subconjunto *Profesora*	Paso~E:
9.	P: P~P	[La profesora escribe como tercer núcleo:] $D \in \alpha$. Por [escribe como el pilar respectivo] D. Subconjunto. *Tatiana 2*	Paso~E:

Como es usual, la profesora se encargó de escribir cada uno de los pasos (la sintaxis escrita) según las ideas verbales que Tatiana 2 iba diciendo. Actuó en correspondencia con la **Norma 27**. A su vez, fue la estudiante quien produjo todas las ideas y pasos argumentales de la prueba (en correspondencia con la **Norma 29**). La profesora al repetir, escribir y no cuestionar los pasos dichos por la estudiante validó lo dicho por ella, y por ende la prueba realizada (**Norma 25**). El argumento global construido (Ad15) es de carácter deductivo, empleando el método indirecto por contradicción (Pr3). El argumento escrito (L3) se presenta en la Figura 54.



a. Reporte escrito en el tablero

Tipo de Prueba: Indirecta
Dato: D punto, $D \notin \alpha$; A punto, $A \in \alpha$; X punto, $X \in \overleftrightarrow{AD}$.
Aserción: $X \notin \alpha$

Núcleo	Pilar
α un plano	Dado
Sea $X \in \alpha$	Negación conclusión
$\overleftrightarrow{AD} \subset \alpha$	P. Llaneza del plano
$D \in \alpha$	D. Subconjunto

b. Trascripción reporte escrito en tablero

Figura 54. Reporte escrito prueba (Ad15) de Pp40

Terminado el proceso de argumentación, la profesora indica que hay un asunto muy interesante que está detrás de la prueba realizada (Ad15). Para sacarlo a luz, pregunta entonces a los estudiantes, qué de ella se podría convertir el teorema [10]. Daniel propone como una idea, que *la recta y el plano se intersecan en un solo punto* [11]. La profesora ajusta dicha propuesta indicando que hay que explicitar que dicha recta no debe estar contenida en el plano, pero sí intersecarlo. Enseguida, establece que su enunciado (*Dada una recta que interseca al plano y que no está contenido en él, su intersección es exactamente un punto* –Pp42–) y lo denomina T. intersección recta plano. En otras palabras, ha instalado un nuevo teorema en el sistema teórico (en correspondencia con la **Norma 35a**). Así mismo, luego de todo el proceso, la profesora instala también el Teorema Espacio-infinitos puntos no coplanares (*el espacio tiene infinitos puntos no coplanares*).

Momento 4. Estudio de las propuestas con el fin de precisar si la figura resultante es un cuadrilátero. En la sesión de clase 14, luego de haberse instalado el T. Espacio-infinitos puntos, la profesora retoma las propuestas del numeral 5 surgidas del problema PP4. Al respecto pregunta:

> PA4.3: Al redefinir fuera del plano base dado un vértice de un $\boxdot ABCD$. ¿La figura que queda es un cuadrilátero?

Se presenta la trascripción de la interacción trascurrida a propósito del PA4.3. Luego, se expone el análisis normativo correspondiente:

1. P: Bueno. Entonces yo tengo ahí cuatro puntos que podrían dar lugar a un cuadrilátero, entonces voy a construirlo, usando polígono [hace la respectiva construcción en el EGD Cari 3D (Figura 55)]. Y lo que yo les

había propuesto era redefinir [se refiere a usar la herramienta *Redefinir* del EGD] ¿Cierto? Lo pueden ir haciendo ustedes si quieren. Entonces dijimos que íbamos a redefinir un punto en el espacio, el punto B en el espacio. [Lleva a cabo el procedimiento –Pr2, y al redefinir el punto B en el espacio, el cuadrilátero desaparece (Figura 56)]

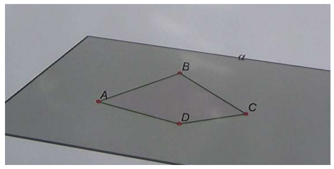


Figura 55. PA4.3: Cuadrilátero ABCD con *Polígono*

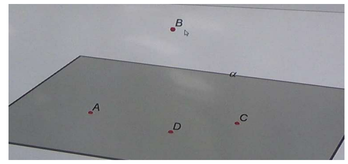


Figura 56. PA4.3: Redefinición del punto B cuadrilátero con *Polígono*

¿Qué pasó?

2.	José:	Que no hay cuadrilátero.
3.	P:	¿Y por qué?
4.	Steven:	Tienen que ser coplanares.
5.	Jefferson:	Por la definición de polígono los cuatro puntos deben estar en un plano.
6.	P:	Deben ser coplanares. Como yo lo estoy sacando del plano me dice: ya no existe polígono. Porque yo usé la herramienta *Polígono* para dibujar. O sea, Cabri se sabe el sistema teórico. Y me está diciendo aquí usted ya perdió algo que usted tenía, porque usted está poniendo una condición que la definición no acepta. Entonces no puedo hacer lo que yo quiero de esta manera. Aquí [se refiere a un cuadrilátero ABCD que ha construido usando solo segmentos] no usé [la herramienta] *Polígono*, sino que construí mi cuadrilátero con segmentos. Hay dos maneras de hacerlo, con la herramienta *Polígono* o con segmentos. Y yo lo que usé fue segmentos. Y voy a hacer lo mismo, voy a redefinir. Vamos a ver la diferencia, si existe. Punto B, shift y sale [ha quedado una representación como la de la Figura 57 –L2–]. ¿Es un cuadrilátero?

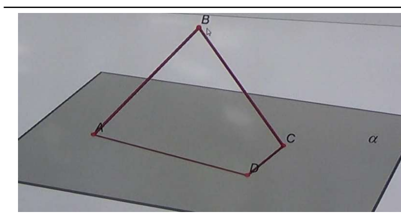


Figura 57. PA4.3: Redefinición del punto B de cuadrilátero con segmentos

7.	Varios:	Noo.
8.	José:	Síii.
9.	P:	¿Sí?
10.	Jefferson:	Pues según la condición no.
11.	Steven:	No porque los cuatro no son coplanares.
12.	P:	Vamos a voltearlo acá [usa el arrastre de bola de cristal (Figura 58)].

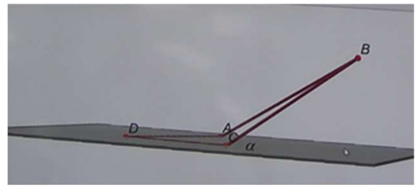


Figura 58. PA4.3: Cuadrilátero Plegado

13. P: ¿Es un cuadrilátero?
14. Jefferson: Pues en el espacio de pronto puede ser un cuadrilátero, pero en el plano no.
15. P: Pero, cuadrilátero, cuadrilátero tiene una definición y la tiene que cumplir. ¿Ahí la está cumpliendo?
16. Varios: No.
17. P: No es un cuadrilátero, ahí vemos que no. Pero me gusta esa figura y si me gusta esa figura le vamos a dar un nombre. Lo vamos a llamar cuadrilátero plegado. ¿Está plegado, cierto? Está doblado. ¿Cómo lo definimos? El cuadrilátero plegado o un cuadrilátero plegado es [escribe en el tablero]. Esto me lo estoy inventando yo.
18. José: ¿Eso no entra en el sistema teórico?
19. P: Si, si yo quiero sí. Yo aquí hago el sistema teórico que yo quiera. ¿Cómo vamos a definir esta figurita?
20. Jefferson: Dados cuatro puntos, tres de ellos no coplanares.
21. P: Entonces, vamos a hacer un listado de las propiedades y de ahí sale la definición ¿Cierto? Entonces, cuatro puntos no coplanares [escribe]. …no coplanares, ¿Sólo necesito cuatro puntos no coplanares?
22. José: Cada terna no colineal.
23. P: Cada terna de ellos [escribiendo] no colineales.
24. José: Cada punto que sea la intersección de dos segmentos.
25. P: Cada punto ¿Qué?, extremo…
26. José: De exactamente dos segmentos.
27. P: De exactamente dos segmentos. Entonces, ¿Ya estoy lista?, la unión de los segmentos determinados por esos cuatro puntos. O sea que voy a comenzar así: Dado todas estas cosas, entonces la unión de los segmentos determinados por esos cuatro puntos es un cuadrilátero plegado. [Queda escrito en el tablero: Dado (i) cuatro puntos no coplanares, (ii) cada terna de ellos no colineales, (iii) cada punto extremo de exactamente dos segmentos. Entonces la unión de los segmentos determinados por esos puntos es un cuadrilátero plegado]. ¿Bien definido? ¿Ya hicieron su representación en el computador del cuadrilátero plegado?, A ver, hagan rápidamente la representación del cuadrilátero plegado a ver si me falta o me sobra, o… de pronto no necesito algo.
28. José No, falta algo.
29. P: ¿Qué pasa? ¿Qué falta?
30. José: ¿Queremos que exactamente un punto que no sea coplanar?
31. P: Ah bueno, entonces… ¿Qué pasa si por ejemplo a D lo redefino? Bueno [trabajando en el computador] qué pasa si a D, si a D…Si a D, lo redefino.

¡Ah que bonito esto! [Ha quedado representada una figura en la que D no está en el plano base del EGD Cabri 3D].
¿Se ve igual a mi cuadrilátero plegado?

32. Steven: Pero hay otro plano que contiene a esos tres puntos
33. Jefferson: Hay otro plano que contenga a A, B, C.
34. P: ¿Tengo otra figura que de pronto queremos darle otro nombre?, ¿Doblemente plegado o algo así?
35. Jefferson: Pero es que esa es la misma [figura; un cuadrilátero plegado].
36. P: ¿Es la misma?, ¿Por qué?
37. Jefferson: Si hacemos un plano que contenga a los puntos B, A y C vamos a obtener lo mismo.
38. P: B, A y C. Un plano que contenga a los puntos B, A y C [hace la respectiva construcción en el EGD Cabri 3D]. Vamos a tener la misma figura dicen por ahí. ¿Sí? [Ha quedado representada la Figura 59].

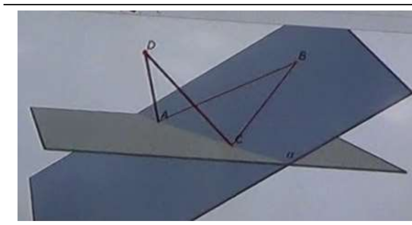


Figura 59. PA4.3: Cuadrilátero Plegado dos puntos fuera del plano

39. Varios: Sí…

Varios asuntos se pueden resaltar de la anterior interacción. La profesora dirigió una conversación matemática mediante la cual pretendía formular la definición de cuadrilátero plegado (práctica 5). En primera instancia usó el EGD para ilustrar que si se usa la herramienta *Polígono* para construir un cuadrilátero ($\boxdot ABCD$) y se redefine uno de sus puntos para que esté fuera del plano (*e.g.*, B) el cuadrilátero desaparece [1] (Pr2). En otras palabras, empleó el EGD para verificar que un cuadrilátero debe tener sus cuatro vértices en un plano (**Norma 12b**) y ratificar una condición de la definición correspondiente explicitada por Jefferson [5]. Luego de que varios estudiantes afirmaran que el objeto representado en la Figura 57 no era cuadrilátero [7, 10, 16], la profesora tomó en cuenta tal afirmación y finalmente la validó [17] (**Norma 3**); sugirió que el nuevo objeto debería ser instalado en el sistema y en tal sentido, debería ser definido [19] (**Norma 40**). De la dinámica descrita, un argumento deductivo (Ad16) puede ser inferido (Figura 60). Si bien su garantía es la Definición de cuadrilátero, la profesora usa el EGD para darle fuerza al mismo mediante su poder verificador. De lo anterior, emerge una nueva norma (**Norma 46**, de faceta principalmente epistémica) según la cual *se emplean argumentos deductivos* (*cuyas garantías son definiciones*) *o de convicción externa* (*cuya garantía es una representación en EGD*) *para inferir o verificar propiedades que lleven a formular definiciones de objetos.*

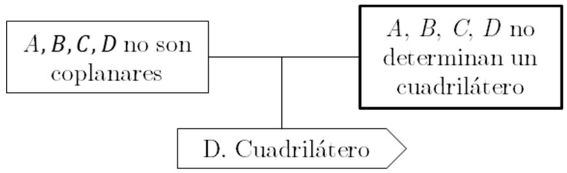


Figura 60. PA4.3: Ad16

Desde la línea [20] inició el proceso de elaboración de la definición de cuadrilátero plegado. Jefferson y José en correspondencia con la **Norma 34** proveyeron las primeras ideas [21-26]. La profesora retomó tales ideas y escribió la respectiva definición [27] (**Norma 38**). José cuestionó tal definición en [28, 30] preguntado si era necesario que sólo un punto estuviera fuera del plano. De nuevo, la profesora usó EGD para estudiar qué sucedía si se redefinía otro punto (e.g., D) para que estuviera fuera del plano (**Norma 12b** para explorar) [31]. Entre Jefferson y Steven precisaron que el objeto seguía siendo un cuadrilátero plegado puesto que las condiciones dadas se satisfacían, para ese caso, que D esta fuera del plano determinado por los puntos A, B y C [32-37]; esto es, proveyeron un argumento deductivo Ad17 (Figura 61). Ante dichas intervenciones, la profesora hizo la representación de la Figura 59 en EGD para darle fuerza al argumento, otra vez, mediante su poder verificador.

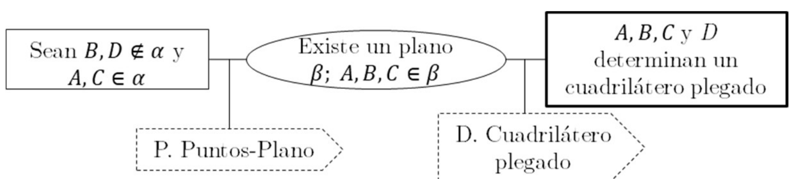


Figura 61. PA4.3: Ad17

4.3.1.4 *Síntesis y breves comentarios: Trayectoria didáctica 6*

Esta trayectoria se caracterizó por el abordaje de los primeros contenidos referidos al Dominio de la Geometría del Espacio. Esto producto de las producciones de dos grupos (E y H) con relación al PP4, que sugirieron la posibilidad de que los cuatro puntos dados en el enunciado del problema fueran no coplanares. Los tipos de problemas que conforman este conjunto es variado; PP4 es de *búsqueda de consecuente*, mientras que los demás son *preguntas de exploración teórica* que buscan generar argumentos específicos para instalar objetos en el sistema (PA4.1, el Postulado del

Espacio -Pp38-; PA4.2, el Teorema Espacio infinitos puntos -Pp39-; PA4.3, el Cuadrilátero Plegado). Los momentos determinados para esta trayectoria permite identificar las *prácticas* generales llevadas a cabo por la clase mediante el liderazgo de la profesora, cuando abordan la solución tanto de PP4 como de sus subsidiarios (PA4.1, PA4.2, PA4.3). Dichos momentos son: (i) Realización, por parte de la profesora, de la construcción de un vértice del cuadrilátero fuera del plano base en Cabri 3D (Pr1). (ii) Estudio (producción de argumentos por parte de los estudiantes y puesta en común orquestada por la profesora) sobre la diferencia entre el espacio y los objetos punto, recta y un plano. (iii) Estudio (prueba colectiva) focalizado en garantizar que el espacio tiene infinitos puntos (Pp39). Y (iv) estudio centrado en formular la definición de cuadrilátero plegado. La Tabla 70 precisa las normas que emergen o regulan tales prácticas y exponen las *situaciones instruccionales* que les corresponden. La Tabla 72 presenta la cronología de las situaciones, principales objetos y normas asociadas a las prácticas.

Tabla 70. PP4 y auxiliares: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Prácticas	**Normas que las regula**	**Situación Instruccional asociada**
Realización de la construcción de un vértice del cuadrilátero fuera del plano base en Cabri 3D -Pr1- (solución del PP4) -	7, 16, 15, 12a, 18, 37	Construcción de una Figura
	38, 40	Instalación de un concepto
Estudio sobre la diferencia entre el espacio y los objetos punto, recta y un plano (PA4.1).	1, 13d, 9a, 3, 24, 25, 26, *35a*	Exploración Teórica/*Instalación de una proposición (Postulado)*
Estudio (prueba colectiva) focalizado en garantizar que el espacio tiene infinitos puntos –Pp39– (solución PA4.2)	3, 32, 33, 34, 27, 29, 25	Elaboración de una prueba
	35a	Instalación de una proposición (teorema)
Estudio colectivo centrado en formular la definición de cuadrilátero plegado (solución PA4.3)	12b	Exploración de una figura
	3, 40, 34, 38, **46**	instalación de un concepto

Los *objetos primarios* que emergieron de las prácticas descritas se fueron explicitando a lo largo del análisis. Dos procedimientos de construcción en EGD Cabri 3D, uno para construir cuatro puntos no coplanares (Pr1) usando la herramienta *redefinir*; y otro similar al anterior pero que además expone dos formas para construir un cuadrilátero (Pr2), usando la herramienta *polígono* o la herramienta *segmentos*. De ambos, se producen respectivamente, representaciones gráficas dinámicas (L1 y L2).

Los objetos-conceptos protagonistas en tales procedimientos fueron Espacio (C1), cuadrilátero (C2) y cuadrilátero plegado (C3). Así mismo, fueron instalados el Postulado del Espacio (Pp38) y los Teoremas Espacio infinitos puntos (Pp39) e Intersección Recta-plano (Pp42). Durante el proceso de instalación de estos objetos, muchos otros fueron precisados, articulados por los argumentos asociados (Ver Tabla 66 y Tabla 69). En su mayoría, los argumentos fueron reportados de manera escrita o verbal, sin emplear un formato especial. Solo Ad15 fue elaborado con el formato *Núcleos-Pilares* (L3); su prueba empleó el método indirecto por contradicción (Pr3). La Tabla 71 lista los argumentos de la trayectoria indicado el problema que los provocó.

Tabla 71. Argumentos presentes en la *trayectoria didáctica* 6

Problema	**Objeto instalado**	**Argumentos**	
PP4.1	Postulado del Espacio (Pp38)	Estudiantes	5 deductivos: Ad1-Ad5 4 abductivos: Ab1-Ab4 1 inductivo: Ai1 1 analógico: Aa1
		Toda la clase	7 deductivos: Ad6-Ad12 3 deductivos transformados: Ad1T-Ad3T 1 analógico transformado: Aa1T 1 abductivo transformado: Ab2T 1 convicción externa: Ace1 1 inductivo transformado: Ai1T
PP4.2	Teorema Espacio infinitos puntos (Pp39)	Estudiantes	2 deductivos: Ad13, Ad14
		Toda la clase	1 deductivo: Ad15
PP4.3	Definición de Cuadrilátero plegado	Toda la clase	2 deductivos: Ad16, Ad17

Un asunto que destaca la Tabla 71 (por tanto, otra razón por la que esta trayectoria didáctica fue escogida como dato) es la gran cantidad de argumentos producidos. Entre estos se subrayan la prueba formal –Ad15– (generado a raíz de PP4.2) para instalar el Teorema Pp39, y los substanciales Ab3, Ai1 y Aa1, y sus transformaciones (generados a raíz de PP4.1), para instalar el Postulado. La Figura 62 muestra la configuración de objetos emergente (esencialmente epistémica) de las prácticas asociadas a la trayectoria didáctica 6. No hay una cognitiva pues, como se dijo previamente, no hubo un seguimiento específico a la actividad de los estudiantes.

Tabla 72. PP4 y Auxiliares - Toda la Clase: Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 6

	Situaciones	Construcción de una Figura / *Instalación de un concepto*	Exploración teórica de situación-estudiantes	Exploración teórica de situación-colectivo	Instalación de proposición	Elaboración de una prueba	Instalación de proposición	Exploración de una Figura / *Instalación de un concepto*
Objetos	**Problemas**	PP4	PA4.1			PA4.2		PP4, PA4.3
	Procedimientos	Pr1				Pr3		
	Conceptos/Def	C1 C4 / *C2*	C1 C2 C3 C4	C1 C2 C3 C4 C5 D. Semiplanos		C5		C2 / *C3*
	Proposiciones		Ver Tabla 72a	Ver Tabla 72b	Pp38	Pp39 Pp40	Pp39 Pp42	P. Puntos-Plano
	Argumentos				Aa1T, Ai1T	Ad15	Ad15	Ad16 Ad17
	Lenguajes	L1	L4	L4	L4	L3		L2
	Normas	7, 16, 12a, 15, 18, 37, 38, *40*	13d, 9a	1, 13d, 9a, 3, 5b.1, 24, 25, 26	35a	33, 34, 27, 29, 25	35a	12b, *3*, *40*, *46*, *34*, *38*

Tabla 72a

Proposiciones	Pp2 Pp3 Pp4	Pp5-Pp10	Pp11-Pp16 Pp10	Pp18 Pp19 / Pp18 Pp17	Pp20 Pp17	Pp22 Pp17	Pp11-Pp16 Pp10	Pp22 Pp17	Pp23 Pp17	Pp24-Pp26 / Pp27-Pp10	Pp10 Pp26 Pp29-Pp34	Pp35	Pp22 Pp17
Argumentos	Ad1	Ad2	Ad3	Aa1 / Ab1	Ab2	Ab3	Ad3	Ab3	Ab4	Ai1 / Ad4	Ad5		Ab3

Tabla 72b

Proposiciones	Pp2 Pp3 Pp4 Pp36	Pp5 - Pp10 Pp37	Pp11- Pp16 Pp10 Pp37	Pp18 Pp19 T. Recta-infinitos puntos T. Punto-infinitas rectas	Pp20 Pp17 Pp35	Pp21 T. Punto-infinitas rectas P. Separación del plano	Pp11- Pp16 Pp10 Pp37	Pp23 Pp17 Pp38	Pp23 Pp17 Pp38	Pp24- Pp26 P. Puntos-recta P. Puntos-plano	T. Punto, recta-plano	Pp38 Pp17
Argumentos	Ad1T	Ad2T	Ad3T	Aa1T	Ad6 Ab2T	Ad7	Ad3T	Ab3T Ace1	Ab4T Ad8 Ace1	Ai1T Ad9 Ad10	Ab2 Ad11	Ab3 Ai1 Ad12

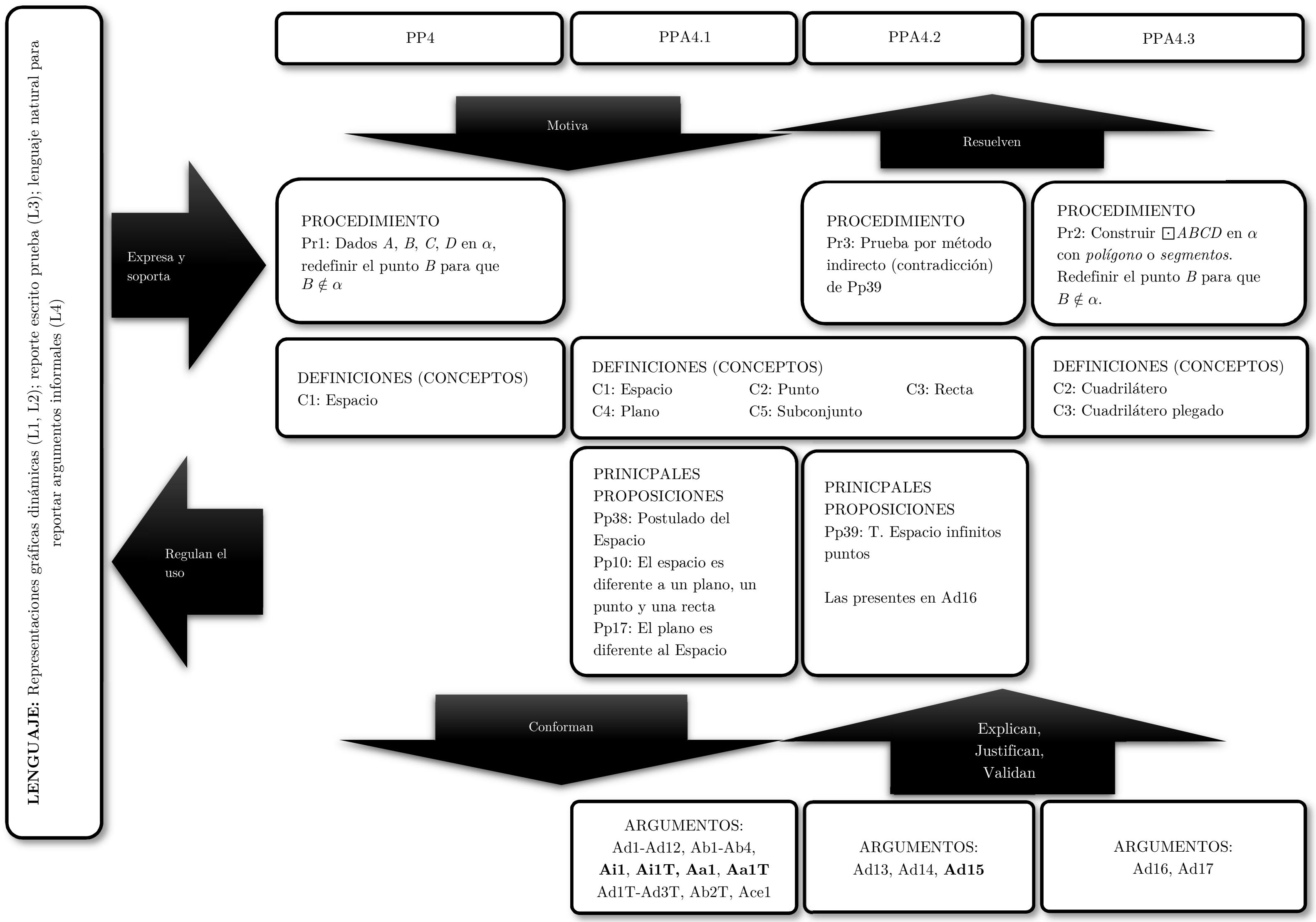


Figura 62. Configuración ontosemiótica epistémica relativa a PP4 y sus auxiliares

Vale la pena comentar asuntos generales respecto a las normas presentes en esta trayectoria, y su relación con prácticas argumentativas. Sin bien las normas citadas para cada situación instruccional son similares a las presentadas para el primer bloque de problemas, algunas merecen una atención especial: 16, 18, 9a, 35a, 24-26 y 46. La práctica liderada por la profesora en la que se hizo una construcción en EGD de las condiciones de un problema (PP4), puso de manifiesto el uso de una herramienta especial (*redefinir*) y, con ello, la necesidad de instalar un objeto al sistema (*i.e.*, el Postulado del Espacio –Pp38–). Por lo tanto, la Normas 16 y 18 regularon dicha práctica. En particular, la Norma 18 adquiere una connotación especial porque fue el uso del EGD Cabri 3D, en particular su herramienta *redefinir*, lo que permitió trascender a la geometría 3D. Puede ser que, en adelante, dicha norma regule construcciones en el dominio de la Geometría del Espacio, producto del uso de la herramienta mencionada.

De otro lado, la práctica según la cual se estudió la diferencia entre el espacio con otros objetos (recta, plano, punto) permitió precisar características para un argumento informal e identificarlo con tipos de argumentos substanciales (ver Tabla 67). Además, llevó a la legitimidad del uso de argumentos analógicos o inductivos como una manera para instalar un postulado (Pp38) al sistema. Esto conduce a que la Norma 9a haya adquirido una connotación especial: no solo fueron precisadas las características de un argumento informal, sino que se explicitó una razón especial por la cual aceptar argumentos informales en un curso geometría formal (instalar un postulado, por ejemplo). En correspondencia con lo anterior, la norma 35a fue precisada en términos de lo referido a la instalación de una proposición que tiene el estatus de postulado (recuérdese que antes tal norma se focalizaba en la instalación de un teorema).

Las normas 24, 25 y 26 que antes figuraron en la situación instruccional de *elaboración de una prueba*, ahora surgen en la instalación de una proposición-postulado, particularmente en lo que respecta a la regulación de prácticas argumentativas que llevan a la producción de argumentos informales y no a la de una prueba. Finalmente, la norma 46 fue la única emergente de las prácticas llevadas a cabo en esta trayectoria; su enunciado formal es el siguiente:

Norma 46: Se deben emplear argumentos deductivos (cuyas garantías son definiciones) o exploraciones en EGD (para verificar o establecer propiedades) que lleven a formular definiciones de objetos.

4.3.2 Análisis relativo a PP5: determinar un plano

Antes de presentar el análisis relativo de PP5, vale la pena hacer una introducción que permita entender la complementariedad de PP5 con PP6. Estos problemas fueron propuestos por la profesora en las sesiones de clase 13 y 16, respectivamente. Se recuerdan sus enunciados:

PP5: En una línea de una demostración de geometría del espacio un estudiante ha escrito una aserción. Escriba todas las posibles garantías que conozca para dicha aserción, y datos correspondientes que posibilitaría usar dicha garantía (Si necesita poner más filas, puede hacerlo):

Datos	**Garantía**	**Aserción**
		Sea el plano α

PP6: Dado el $\triangle ABC$, sean D y F puntos tal que $F \in \overleftrightarrow{AB}$, $D \in \overleftrightarrow{AC}$, e I un punto que no pertenece al plano determinado por A, B y C. Sea un punto H tal que $H \in \overleftrightarrow{DI}$, y un punto G tal que $G \in \overleftrightarrow{FH}$.

a) ¿Pueden determinarse por lo menos tres planos distintos al inicial? Justifique su respuesta.
b) Considere todos los planos determinados por triángulos que no comparten vértice con el ΔABC ¿Qué relación tienen esos planos con α_{ABC}?

Este par de problemas conforman un tándem que, en esencia, buscan fortalecer el proceso de visualización clave para la Geometría del Espacio. En particular, con PP6 se pretende que los estudiantes identifiquen diversos planos en el espacio involucrados en la situación, y el objeto que se genera cuando se intersecan. Con el ánimo de allanar el terreno para PP6, la profesora propuso con antelación el PP5. Esto con el ánimo de que los estudiantes precisaran condiciones para poder determinar planos, y de esa manera, poder identificarlos con mayor fluidez cuando se abordara PP6 en particular, o en cualquier situación en el espacio, en general. En lo que sigue, se presenta la trayectoria didáctica 7 centrada en la puesta en común de las producciones de los estudiantes respecto a PP5.

4.3.2.1 *Trayectoria didáctica 7: Actividad matemática sobre PP5 – Toda la clase*

En la sesión de clase 13, luego de abordar PA4.2 y justo antes de terminar la sesión, la profesora propone PP5. Otorga 8 minutos para que los estudiantes abordaran el problema de manera individual (no hubo discusiones por grupos susceptibles de ser analizadas). La falta de tiempo no permitió que en tal sesión se discutieran sus producciones. En la sesión de clase 14, luego del abordaje de PP4.3, la profesora inicia el proceso de socialización de las producciones de los estudiantes al respecto de PP5. Ella ha organizado en un documento tales producciones; lo proyecta en el televisor. Indica que, entre todos, van a abordar cada propuesta y van a decidir si estas son correctas o no. El documento, que se presenta enseguida, tiene un formato constituido por tres columnas: datos, garantía, aserción (Tabla 73).

Tabla 73. Producciones estudiantes PP5

	Datos	**Garantías**	**Aserción**
1	A, B, C puntos no colineales	P. Puntos-plano	Sea el plano α
2		P. Existencia	
3	$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$	T. Intersección de rectas	
4	$\angle ABC$	T. Ángulo coplanar	
5	$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	D. Paralelas	
6	$\mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Mediatriz	
7	$\boxdot\, ABCD$	D. Cuadrilátero	
8	$\angle ABC$ y $\angle ABD$ adyacentes	D. Ángulos adyacentes	
9	Sea α_{ABC}	P. Plano -puntos	
10	Sean n, m rectas tal que $m \cap n = \{A\}$	T. Intersección rectas	
11	$\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$	P. Llaneza	
12	ΔABC	D. Triángulo (figura coplanar)	
13	S_1, S_2 y m recta que los determina	D. Semiplano	
14	A, B, C, D donde $D \notin \beta$	P. Espacio	
15	$\overleftrightarrow{AB}$, $C \notin \overleftrightarrow{AB}$	T. Recta, punto-plano	

En relación con tal formato, la profesora verbaliza lo siguiente (adyacente se presenta el análisis):

	Trascripción	**Análisis**
1	[...] les preguntamos que si un estudiante aseguraba en una demostración: sea el plano alfa; si algún paso de la demostración decía: sea el plano alfa, qué pudo haber sucedido antes de eso.	Se destacan la explicitación de los elementos que componen un argumento (**Norma 22**), con miras a precisar que lo que solicitaba el problema era precisar

O sea, qué datos se necesitaban, y cuál era la garantía que le permitía concluir esa aserción. Aquí puse una lista de todas las propuestas [se refiere a lo expuestos en Tabla 73] y vamos a ir examinando cada una de ellas. Y vamos a decidir si estamos de acuerdo con ella o no. [...] Un argumento consta de datos, garantía y aserción. La aserción es la misma para todos: sea alfa un plano y la idea era ver qué se necesitaba antes, o sea los datos; y cómo se llegaba a esa aserción, la garantía.	datos y garantías que permitieran afirmar *sea el plano α*. Con ello, la profesora destaca, de manera implícita, que el problema exige la producción de argumentos abductivos, esta vez evocando objetos instalados en el sistema para proveer las garantías y, por ende, los datos. La Figura 63 presenta las producciones de los estudiantes usando el Modelo de Toulmin para esquematizar los argumentos.

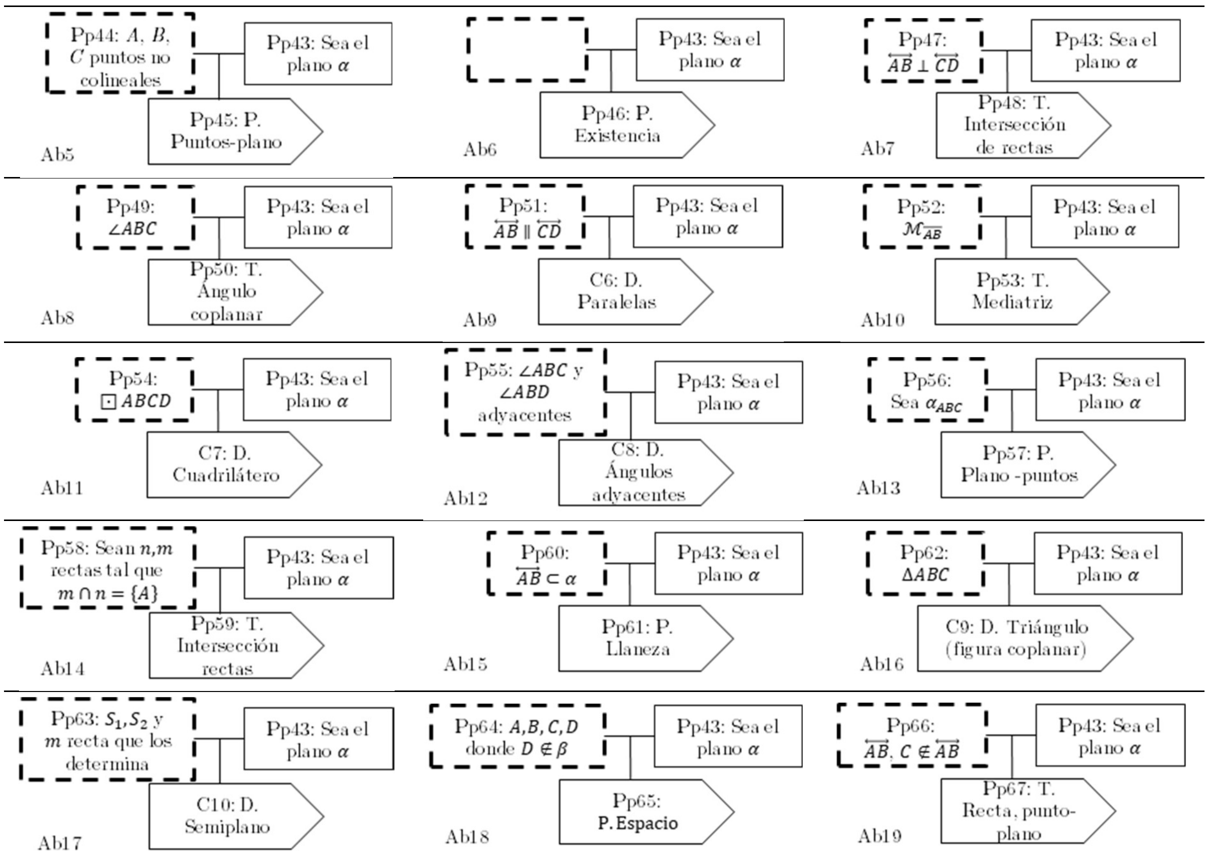
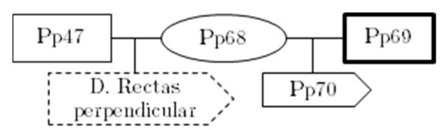


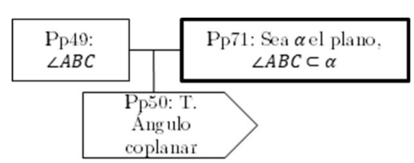
Figura 63. PP5: Argumentos abductivos asociados a las respuestas de los estudiantes

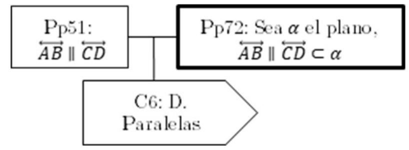
En correspondencia, con lo dicho en [1], la profesora empieza a leer cada una de las propuestas e invita a los estudiantes a comentarlas (**Norma 3**). En seguida se presenta la trascripción respectiva a los comentarios más sobresalientes respecto a las producciones de los estudiantes. A la vez se presenta el análisis en términos del proceso argumentativo respectivo, usando como base los diagramas de la Figura 63.

Comenta la profesora [1] que la respuesta con mayor frecuencia fue poner como datos *tres puntos no colineales* –Pp44– usando como garantía el *P. Puntos-planos* –Pp45– (Ab5). Valida esa propuesta diciendo que, sin duda, Pp45 es uno de los postulados más importantes para determinar un plano. Respecto a Ab6, la profesora comenta que en ese caso no hay datos como tal [2]; sencillamente es el sistema teórico el que soporta la existencia de los planos vía un postulado. Sobre a Ab7, comenta la profesora que no tiene idea a qué se refiere la persona que lo propuso [3]; al respecto se presenta la siguiente interacción:

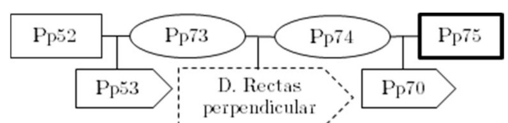
Trascripción			**Análisis**
3	P:	No tengo ni idea a qué se refiere esta persona.	Ante el cuestionamiento de la profesora [3], el estudiante que propuso la idea aclara lo que quiere decir usando una estructura deductiva [4]: Al tener $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (Pp47), entonces $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} \neq \emptyset$ (Pp68) y, en consecuencia, $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD} \subset \alpha$ (Pp69) proposición que se relaciona con Pp43. En [5] la profesora precisa la garantía (T. Rectas-plano: dos rectas que se intersecan determinan un plano –Pp70–) que conecta Pp68 con Pp69. En consecuencia, Ab7 se transforma en Ad18:  Figura 64. Ab7 transformado en Ad18
4	Brayan:	Al tener eso [$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$], las dos rectas se intersecan [$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$]… hay un único plano que las contiene.	
5	P:	Sí está haciendo referencia a un teorema que tenemos: que dos rectas que se intersecan determinan un plano. Entonces necesitaríamos otro dato ¿No? Que esas dos rectas [$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$] realmente se intersecan. Y bueno pues sería un proceso de dos pasos, entonces digamos que este es de cierta manera, no del todo correcto. Porque faltarían más datos para poder usar ese teorema.	

Respecto a Ab8 y Ab9 no hubo discusión. Ambas opciones fueron aceptadas por la profesora. Para su validez, recurrió a una estructura deductiva en la emplea los datos y la garantía provista por los estudiantes para inferir una conclusión relacionada con la existencia de un plano:

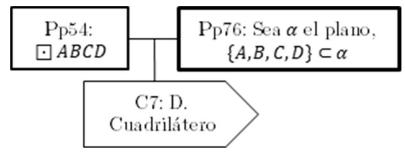
Trascripción		**Análisis**
8	[Sobre Ab8] El siguiente: se da un ángulo. Por teorema ángulo figura coplanar, se obtiene, ah, que un plano contiene un ángulo. […] Bien. El plano aparece porque contiene el ángulo.	Ab8 se legitima mediante un argumento deductivo Ad19:  Figura 65. Ab8 transformado en Ad19 Pp43 cambia por Pp71.

8	P:	[Sobre Ab9] El siguiente dice… da el paralelismo. Y dice que por definición [de paralelas]. Qué dicen…	De igual forma a como sucedió con Ab8, Ab9 se legitima mediante un argumento deductivo Ad20:  Figura 66. Ab9 transformado en Ad20 Pp43 cambia por Pp72.
9	Zayra:	La definición dice…	
10	P:	La definición dice que si son paralelas son coplanares. O sea que esa es otra forma, sea alfa el plano que los contiene.	

Para ambos casos, la profesora aclara que el plano α surge en tanto objeto que contiene los objetos dados [6, 8]. Esta es la razón por la que la aserción Pp43 cambia en ambos argumentos, por una que indica cómo aparece el plano. Con relación a Ab10, se presenta la siguiente interacción:

Trascripción			**Análisis**
10	P:	Bien, el siguiente dice: mediatriz del segmento AB por el teorema mediatriz.	Tal como lo advierte Diana [13], esta situación es similar a Ab7T. Brayan y Diana atinan en aludir someramente a la perpendicularidad entre $\overline{AB}$ y la recta mediatriz ($\mathcal{M}_{\overline{AB}}$) –Pp73–y la intersección entre dichos objetos –Pp74– [11,12,15]. No se precisan garantías probablemente por la similitud con Ab7T. Con lo anterior, Ab10 se transformaría en Ad21:  Figura 67. Ab10 transformado en Ad21 Pp43 cambia por Pp75: $\mathcal{M}_{\overline{AB}} \subset \alpha$.
11	Brayan:	Siempre se intersecan [la recta mediatriz con $\overline{AB}$], si es perpendicular a la recta AB.	
12	P:	Si, pero no dice nada de un plano, yo no puedo… ¿Ah?	
13	Diana:	Es lo mismo que el anterior… que el que vimos allá [Ab7] porque es la recta perpendicular, pero…	
14	P:	Mejor dicho, se necesitarían más pasos. Porque el teorema de la mediatriz no me dice que hay un plano que los contiene. El teorema de la mediatriz ¿qué es lo que dice?	
15	Diana:	Que es una recta perpendicular…	
16	P:	Que es una recta perpendicular y entonces me toca poner muchas cosas. O sea que ese no lo aceptamos, pues porque ya son muchos los pasos; y la idea no era esa.	

Sobre el Ab11 varios estudiantes avalan el argumento sin mayor objeción [17]. La profesora comenta que la definición de cuadrilátero precia la necesidad de que los puntos sean coplanares, así que el plano está involucrado al aludir a tal objeto [18]. Es un caso similar a Ab8 y Ab9. En este sentido, Ab11 se transforma en un Ad22:

Trascripción			Análisis
18	P:	[refiriéndose a Ab11] Bien, ¿no? La definición [de cuadrilátero] dice que los puntos deben ser coplanares. El plano aparece por eso.	Ab11 se legitima mediante un argumento deductivo Ad22:  Figura 68. Ab11 transformado en Ad22 Pp43 cambia por Pp76.

Al respecto de Ab12, Tatiana 2 comenta que [18] que la definición de ángulos adyacentes alude a que estos deben ser coplanares. La profesora valida esa respuesta [19] y menciona que este caso es bastante similar a Ab9 y Ab11, opciones en los cuales fue necesario usar como garantía las definiciones respectivas de los objetos. La Figura 69 ilustra el argumento deductivo (Ad23) en el que se transforma Ab12. Pp77 indica la precisión de Pp43 para este caso.

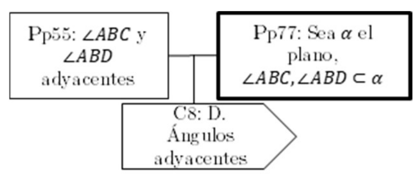
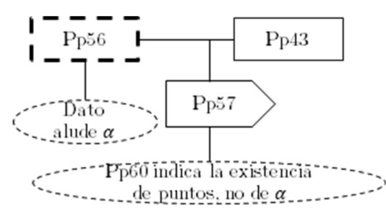


Figura 69. Ab12 transformado en Ad23

Con relación a Ab13, sucede la siguiente interacción:

Trascripción			Análisis
19	P:	¿Qué piensan del siguiente?	Zayra advierte que Ab13 es errado dado que en el dato se emplea lo que se quiere concluir [20]. La profesora valida tal comentario. Adiciona que el Postulado usado (Pp57) no guarda relación con lo que se quiere concluir. En consecuencia, Ab13 se transforma en Ab13T, este último indicando las refutaciones del dato y la garantía.  Figura 70. Ab13 transformado en Ab13T
20	Zayra:	No porque me está de una vez ahí nombrando el plano	
21	P:	No tiene sentido, además el postulado es el que me dice que en un plano hay puntos y eso no es lo que estamos concluyendo. Estamos concluyendo que hay un plano, o sea que éste si es totalmente equivocado.	

Sobre Ab14, la siguiente interacción toma lugar:

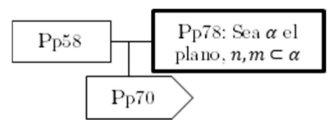
<table>
<tr><th colspan="3">Trascripción</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>21</td><td>P:</td><td>Bueno, el siguiente dice: sean m y n rectas tal que la intersección de m y n es un punto, teorema intersección rectas</td><td rowspan="7">Luego de la interacción es precisado que la garantía empleada no es la adecuada: En [26], se entrevé un argumento deductivo en el que José precisa que el T. intersección de rectas (Pp59) solo indica que la intersección de dos rectas es un único punto. En [27], la profesora acepta el comentario de José y advierte que lo que se necesita entonces es el T. Rectas-plano (Pp70), advertido en Ad18. En consecuencia, Ab14 se transforma en un argumento deductivo Ad24:


Figura 71. Ab14 transformado en Ad24
Pp78 indica el cambio de Pp43.</td></tr>
<tr><td>22</td><td>José:</td><td>Que hace falta el otro paso. Que si se intersecan ya están en un plano</td></tr>
<tr><td>23</td><td>P:</td><td>Nooo. ¿Qué dice el teorema?</td></tr>
<tr><td>24</td><td>Varios:</td><td>Que si las rectas se intersecan determinan un plano</td></tr>
<tr><td>25</td><td>P:</td><td>Entonces ya está. Ese es directo, ese es perfecto y ese es el que querían usar allá arriba, pero allá arriba lo llaman teorema rectas-plano y aquí lo llaman teorema intersección rectas, ¿Cuál es?</td></tr>
<tr><td>26</td><td>José:</td><td>Lo que pasa es que el de intersección de rectas dice que la intersección es única, no más</td></tr>
<tr><td>27</td><td>P:</td><td>Si, o sea que ese está mal, la garantía está mal. La garantía que quieren aquí es… es ésta [en señala Pp75] ¿No?, Teorema rectas-plano, que dice que dos rectas que se intersecan determinan un plano.</td></tr>
</table>

Con respecto a Ab15, José refuta el dato (de manera similar a como lo hizo Zayra sobre Ab13) en tanto alude al plano [28]. La profesora valida tal observación y descarta tal argumento [29]. Con relación a Ab16 José advierte que la situación es similar a Ab11 [30]. La profesora valida el comentario de José y legitima Ab16 con un argumento deductivo –Ad25– [31]. Los argumentos Ab17 y Ab18 son descartados por Zayra [32] y la profesora [33], respectivamente, por la misma razón que lo fueron Ab13 y Ab15; esto es, el dato es refutado ya involucra un plano, objeto cuya existencia se pretende concluir [33-35]. Finalmente, la profesora convalida Ab19 indicando que el T. Recta, punto-plano (Pp67) se tiene instalado en el sistema [35] y permite determinar un plano (Ad26). Los argumentos trasformados relativos a Ab15, Ab16, Ab17, Ab18 y Ab19 se presentan en la Figura 72.

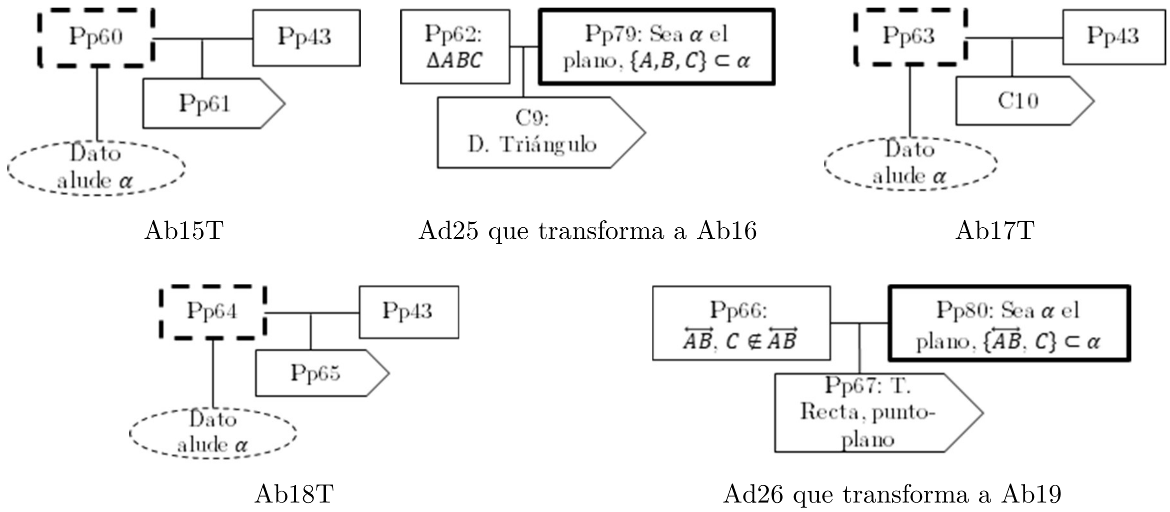


Figura 72. Argumentos que transforman a Ab15, Ab16, Ab17, Ab18 y Ab19

Luego de analizadas todas las propuestas, la profesora llama la atención sobre aquellas que emplean datos que no son tan exigentes para determinar un plano (Ab5, Ab6 y Ab19). En consecuencia, precisa que las proposiciones *P. Puntos-plano* (Pp45), *P. de existencia* (Pp46), *T. Rectas-plano* (Pp70) y *T. Punto, recta – plano* (Pp67) serán claves para poder determinar rápidamente planos en el espacio. Advierte que los otros casos que no fueron descartados serán válidos también, pero son más exigentes pues implican garantizar las condiciones dadas por los datos respectivos.

De las interacciones expuestas anteriormente en torno al estudio de las propuestas de solución a PP5 (práctica 6) vale la pena hacer los siguientes comentarios en torno a las normas que las regularon. En primera instancia, este episodio es bastante parecido al momento 2 del conjunto de los problemas PP4 y sus auxiliarles, expuesto anteriormente. Esto es, hubo una producción de los estudiantes que se corresponden con argumentos, para este caso abductivos; y luego hubo un análisis colectivo de tales producciones que llevó a legitimidad o descarte de ciertas propuestas. Desde esta perspectiva, las normas que regularon la presente trayectoria son análogas a la de aquel momento.

Así las cosa, como se dijo previamente, se destaca el interés de la profesora por contemplar, interpretar cada una de las propuestas puestas en común, e indagar cuando no son claras algunas ideas (en consonancia con la **Norma 3**). Involucra a los estudiantes para que fueran ellos quienes, en algunos casos sean ellos lo que produzcan refutaciones a los argumentos dados por sus compañeros. En tal sentido, salta a luz dos responsabilidades que se insinuaba en prácticas anteriores pero que en este episodio son reiterativas (ambas, especificaciones de la **Norma 2**): (i) *los estudiantes pueden* (*y deben*) *hacer refutaciones de ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase, rebatiendo alguno de los elementos de un argumento* (**Norma 47**). Y (ii) *los estudiantes pueden* (*y deben*) *legitimar ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase* (**Norma 48**). Vale indicar que las refutaciones o cuestionamientos, hechos por estudiantes o profesora, se fundamentan en discutir el papel de los elementos que conforman un argumento en él mismo. Por ejemplo, los *datos* en varios argumentos fueron refutados en tanto aludían prematuramente al objeto cuya existencia se quería inferir (ver Ab13T, Ab15T, Ab17T y Ab18T); así mismo, las *garantías* en otros argumentos fueron rebatidas en tanto sus enunciados no dejaban ver, de manera directa, la conexión entre los datos y la existencia de un plano (ver Ab7 y Ab10 y sus respectivas transformaciones). Este hecho pone de manifiesto que la comunidad de la clase actúa en correspondencia con la **Norma 22**, no tanto en el sentido de precisar los elementos que conforman un argumento, sino en el papel que tales elementos cumplen en el argumento.

Por su puesto, en los episodios se ilustra también que la responsabilidad final de convalidar ideas argumentales o refutaciones es de la profesora, alimentada de las sugerencias dada por los estudiantes (**Norma 25**). En esta trayectoria, y en relación con los asuntos de legitimidad o convalidación involucrados en las Normas 48 y 25, se evidencia (*e.g.* Ab8, Ab9, Ab11, Ab12, Ab14, Ab16, Ab19) que la comunidad de la clase entiende que *un argumento abductivo se legitima cuando el argumento deductivo asociado es válido* (**Norma 49**). Para los casos donde los argumentos abductivos se legitimaron, la validez del argumento deductivo asociado fue fácil de soportar pues todas las garantías involucradas eran proposiciones instaladas en el sistema.

4.3.2.2 *Síntesis y breves comentarios: Trayectoria didáctica 7*

Esta trayectoria se caracterizó por el estudio de un paso argumental hipotético (cuya aserción es la determinación de un plano) que pertenece al dominio de la Geometría Plana, pero que por las razones explicadas al inició del Apartado 4.3.2.1, será clave para aspectos de visualización de la Geometría del Espacio. Desde esta perspectiva, la *práctica* central de la trayectoria consistió en el estudio de las propuestas que los estudiantes dieron al PP5, esto es de los pasos argumentales que tenían como aserción *Sea el plano* α (Pp43). Vale indicar que dicho problema también es una *pregunta de exploración teórica* que, para este caso, busca precisar garantías (y por ende datos) instaladas en el sistema teórico que permitan inferir Pp43. La *situación instruccional* asociada a esta trayectoria no encaja en alguna de las establecidas a priori. Aunque se pregunta por un paso argumental no es una situación de *elaboración de una prueba*, pues no hay una proposición qué probar. Se podría decir que de nuevo aparece la situación instruccional emergente *de exploración teórica* (no de exploración –empírica– de una figura) consistente en identificar, dentro del sistema teórico de la clase, garantías y datos que den lugar a una aserción determinada. Las normas que regularon la práctica llevada a cabo en el marco de tal *situación instruccional* fueron: 3, 2, 47, 48, 22, 25 y 49. La Tabla 74 presenta el enunciado de aquellas normas emergentes (nuevas) de la práctica llevada a cabo a raíz de PP5, todas ellas relacionadas con el proceso de argumentación. El complemento de una norma se presenta en cursiva.

Tabla 74. Normas emergentes a raíz de PP5

Norma	**Enunciando de la Norma**	**Codificación**
22	Los elementos que debe contener cada paso argumental son aserción, dato y garantía, donde la garantía es aquel objeto primario (definición, postulado, teorema) que soporta la aserción como consecuencia necesaria de los datos. *Un dato no puede referirse a la propiedad que se quiere inferir y contenida en la aserción.* El conjunto de todos los pasos argumentales conforma una prueba (argumento global).	Si bien esta norma ya existe, para este caso se explicita que un dato no puede aludir a la aserción que se quiere inferir
47	Los estudiantes pueden (y deben) hacer refutaciones de ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase, rebatiendo alguno de los elementos de un argumento.	**F~Fe; F~Fi; Nle:** Es una particularización más de la Norma 2. Para este caso, se ratifica el hecho de que los estudiantes pueden comentar ideas argumentales de los demás, refutándolas.
48	Los estudiantes pueden (y deben) legitimar ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase.	**F~Fe; F~Fi; Nle:** Es una particularización más de la Norma 2. En este caso, los estudiantes pueden comentar ideas argumentales, legitimándolas.
49	Un argumento abductivo se legitima cuando el argumento deductivo asociado es válido.	**F~Fe; O~M:** Norma que precisa cuándo un argumento abductivo es legítimo.

Los *objetos primarios* que emergieron de la práctica se fueron explicitando a lo largo del análisis. Para este caso, de manera análoga a lo sucedido para el problema PA4.1, estos surgieron tanto en el marco de los argumentos abductivos que los estudiantes reportaron (de manera escrita –L5–) en respuesta a PP5 (ver Figura 63), como del análisis colectivo de dichos argumentos (Ver Figuras de la 64 a la 72) llevado a cabo mediante una interacción verbal (L6). Las proposiciones o definiciones más relevantes fueron aquellas que fungían como garantías en los argumentos. Como era de esperarse, estas en general daban cuenta de hechos que permitían determinar un plano de alguna manera. Al final de la dinámica, la profesora destacó las proposiciones *P. Puntos-plano* (Pp45), *P. de existencia* (Pp46), *T. Rectas-plano* (Pp70) y *T. Punto, recta – plano* (Pp67) como las claves para poder determinar rápidamente planos en el espacio. La Figura 73 muestra la configuración de objetos emergente (esencialmente epistémica) de las prácticas asociadas a la trayectoria didáctica 6. No hay una cognitiva pues, como se dijo previamente, no hubo un seguimiento específico a la actividad de los estudiantes. Por su parte la Tabla 75 presenta la cronología de normas, objetos y situación asociada a la Trayectoria.

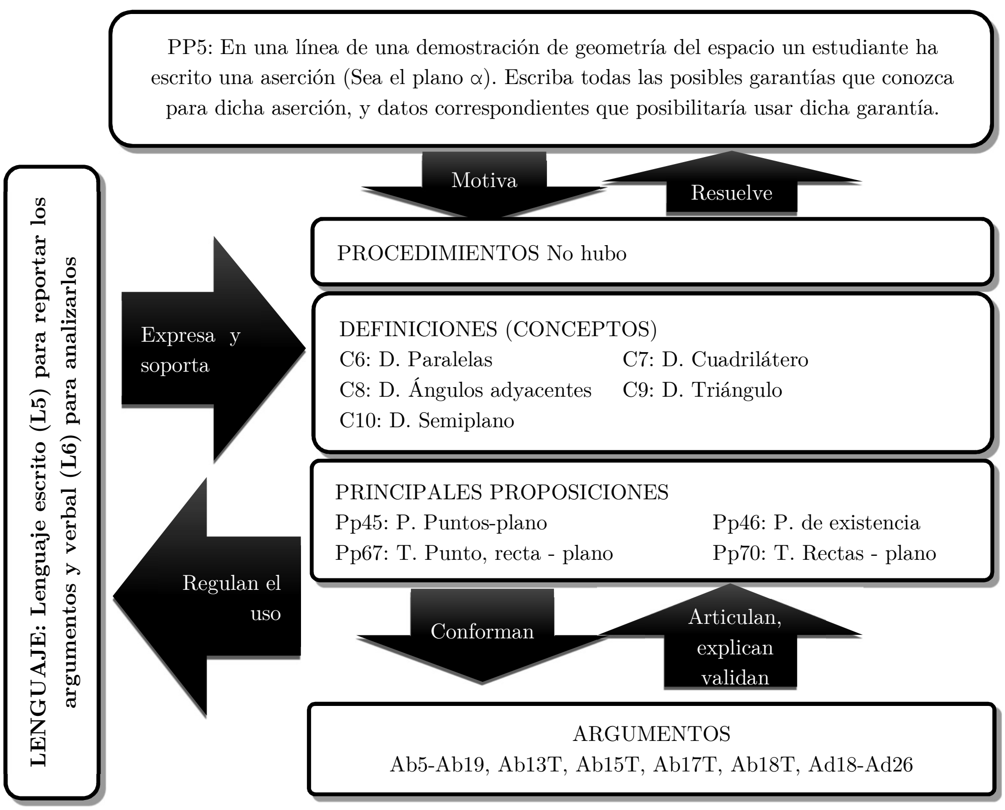


Figura 73. Configuración ontosemiótica epistémica relativa a PP5

Tabla 75. Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 7

Situaciones		Exploración teórica						
Objetos	Problemas	PP5						
	Procedimientos	No hubo						
	Conceptos/Def	Ver Tabla 75a						
	Proposiciones							
	Argumentos	Ab5 - Ab19 Ad18 - Ad23 Ab13T Ad24 Ab15 Ad25 Ab17T Ab18T Ad26						
	Lenguajes	L5 L6						
Normas		3	2	47	48	22	25	49

Tabla 75a

Conceptos				C6			C7	C8				C9	C10		
Proposiciones								Pp43							
	Pp44 Pp45	Pp46	Pp47 Pp48	Pp49 Pp50	Pp51	Pp52 Pp53	Pp54	Pp55	Pp56 Pp57	Pp58 Pp59	Pp60 Pp61	Pp62	Pp63	Pp64 Pp65	Pp66 Pp67
Argumentos	Ab5	Ab6	Ab7	Ab8	Ab9	Ab10	Ab11	Ab12	Ab13	Ab14	Ab15	Ab16	Ab17	Ab18	Ab19

Conceptos	D. Perp.		C6	D. Perp	C7	C8				C9	C10		
Proposiciones	Pp47 Pp68 Pp69 Pp70	Pp49 Pp50 Pp71	Pp51 Pp72	Pp52 Pp53 Pp73 Pp74 Pp70 Pp75	Pp54 Pp76	Pp55 Pp77	Pp56 Pp57 Pp43 Pp60	Pp58 Pp78 Pp70	Pp60 Pp61 Pp43	Pp62 Pp79	Pp63 Pp43	Pp64 Pp65 Pp43	Pp66 Pp67 Pp80
Argumentos	Ad18	Ad19	Ad20	Ad21	Ad22	Ad23	Ab13T	Ad24	Ab15T	Ad25	Ab17T	Ab18T	Ad26

4.3.3 Análisis relativo a PP6: intersección de planos

En la sesión de clase 16, la profesora propone PP6, cuyo enunciado es:

PP6: Dado el $\triangle ABC$, sean D y F puntos tal que $F \in \overleftrightarrow{AB}, D \in \overleftrightarrow{AC}$, e I un punto que no pertenece al plano determinado por A, B y C. Sea un punto H tal que $H \in \overleftrightarrow{DI}$, y un punto G tal que $G \in \overleftrightarrow{FH}$.

a) ¿Pueden determinarse por lo menos tres planos distintos al inicial? Justifique su respuesta.
b) Considere todos los planos determinados por triángulos que no comparten vértice con el $\triangle ABC$ ¿Qué relación tienen esos planos con α_{ABC}?

Dos trayectorias didácticas fueron determinadas con base en la actividad llevada a cabo cuando se abordó dicho problema: una que se concentra en la actividad de dos grupos de estudiantes (Grupo I y Grupo B) y otra que se focaliza en la puesta en común de las producciones de todos los grupos. A continuación, se presenta el análisis didáctico asociado a cada trayectoria.

4.3.3.1 *Trayectoria didáctica 8: Actividad matemática sobre PP6 – Grupos I y B*

Durante 25 minutos los grupos de estudiantes abordaron el problema. La profesora eventualmente pasaba por las ubicaciones de los grupos para observar lo que estaban haciendo. A continuación, se trascriben episodios de la interacción de los dos grupos que fueron videograbados. Estos episodios se corresponden con las principales discusiones que llevaron a las respuestas de cada una de las preguntas enunciadas en PP6.

Actividad Grupo I: En primera instancia, Jefferson lee el enunciado del problema en voz alta. A la vez, Andrés hace (Pr4) una representación de la situación en EGD Cabri 3D (L7) similar a la de la Figura 74 (en correspondencia con **Normas 12a** y **15**) [1]. Enseguida, se trascribe la interacción entre los estudiantes una vez realizada tal representación. Terminado cada episodio, se presenta el análisis respectivo:

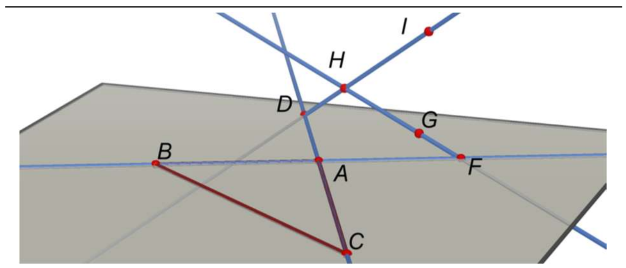


Figura 74. PP6: Representación 1 Grupo I

2	Jefferson:	Pueden determinarse por lo menos tres planos distintos al [plano] inicial, justifique su respuesta [Leyendo]. Si yo creo que si ¿Cierto que sí? Porque tenemos tres puntos no colineales y dos que no son coplanares.
3	Brayan 2:	Tres puntos no colineales y un punto que no está en el plano.
4	Jefferson:	¿Cómo es?
5	Brayan 2:	Los tres puntos no colineales… Los seguros son los de acá [señala los puntos *A*, *B*, y *C* que pertenecen al plano base].
6	Andrés:	Ah usted dice éstos [señala en la pantalla I y el triángulo ABC, quizá indicando los puntos *A*, *B*, y *C*]
7	Jefferson:	¿Tenemos tres puntos no colineales y uno no coplanar?
8	Andrés:	Póngale aquí, triángulo ABC [se refiere a qué poner en el reporte escrito que está haciendo Jefferson].
9.	Jefferson:	¿Y un punto no coplanar?
10	Andrés:	Si. Póngale I
11	Jefferson:	Ya con eso puedo definir más de tres planos ¿Cierto?
17	Andrés:	Puede definir tres planos.
18	Jefferson:	¿Ya con eso puede definir tres planos aquí?

19 Andrés: Sí [...].
20 Brayan 2: [Como respuesta al ítem a, escribe en el reporte: Como A, B y C son no colineales por $\triangle ABC$ y un punto no coplanar I, se pueden determinar tres planos].

Como respuesta al ítem a del problema, Jefferson [2] dice que sí es posible determinar más de tres planos asumiendo como dato tres puntos no colineales (A, B y C) que están en el plano base y dos (I, H) que, según la representación en su computador parecen no estar en el plano base (ver Figura 74). Brayan y Andrés en [3] y [6] corrigen el dato dado por Jefferson y comentan que en realidad solo un punto [I] está fuera del plano, probablemente guiados por lo dicho en el anunciado del problema, sin tomar en cuenta lo que se muestra en la representación. Finalmente, dicen que con los datos asumidos [A, B, C coplanares e I no coplanar con ellos] tres planos se podrían determinar. De lo anterior y su reporte escrito [20] se entrevén dos argumentos deductivos (en correspondencia con las **Normas 9** y **22**): uno en donde implícitamente es empleado como garantía el *P. Puntos-plano* (Pp45) para determinar planos (Ad28). Y otro donde implícitamente usan como garantía la definición de triángulo para soportar que A, B, C son no colineales (Ad27). Hasta el momento, no han explicitado las ternas de puntos que determinan cada plano, pero de la interacción se infiere que se refieren a $\{A, B, I\}$, $\{B, C, I\}$ y $\{A, C, I\}$. En la Figura 75 se ilustra el argumento asociado a la interacción.

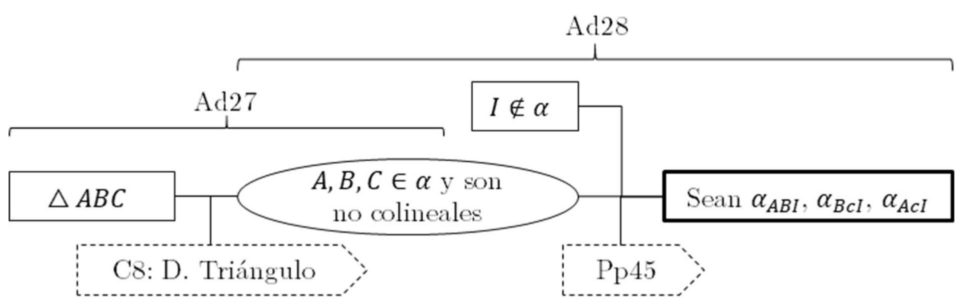


Figura 75. PP6: Ad27 y Ad28 producido por Grupo I

Jefferson propone abordar el ítem c del problema (Considere todos los planos determinados por triángulos que no comparten vértice con el △ABC ¿Qué relación tienen esos planos con α_{ABC}?) [20]. Al respecto, se trascribe la siguiente interacción:

24 Brayan 2: Todos los triángulos generados por dos rectas que se intersecan son coplanares [señala las rectas $\overleftrightarrow{HF}$ y $\overleftrightarrow{HD}$].

25	Andrés:	[Señala los puntos D, F, I] Vea, este. [hace un arrastre de bola de cristal en EGD con el objetivo de visualizar mejor los triángulos; ha construido un plano usando tres puntos H, F y D].
26	Brayan 2:	Por eso, son los triángulos determinados por las rectas que se intersecan, entonces sería coplanares.
27	Jefferson:	Vea, uno, dos, tres [señalando los conjuntos de puntos $\{D, H, G\}$, $\{I, H, G\}$, $\{I, H, F\}$ indicando formas triangulares con su índice]. ¿Qué escribo?
28	Brayan 2:	Esos mismos; o sean como son dos rectas que se intersecan, están contenidas en un plano. Y ahí tenemos los triángulos [que no tienen vértices en común con el $\triangle$ABC].
	[...]	
34	Andrés:	¿Qué relación hay de este con este plano? [Ha representado en el EGD Cabri 3D el plano β determinado por las $\overleftrightarrow{HF}$ y $\overleftrightarrow{HD}$ (Figura 76)] Pero se intersecan en una recta [señala la $\overleftrightarrow{DF}$ que se entrevé].

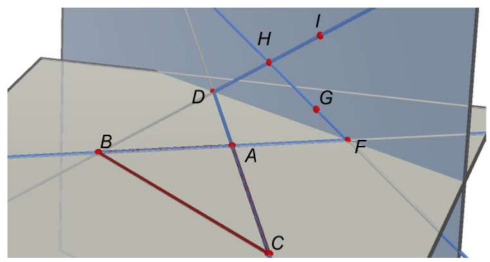


Figura 76. PP6: Representación 2 Grupo I

35	Jefferson:	Dos planos distintos...ese es un plano y el otro es el otro plano... se intersecan... ¿Dos planos se pueden intersecar?
36	Andrés:	Pues... en este caso se intersecan, mire [hace arrastre de bola de cristal para ver diferentes perspectivas]
37	Brayan 2:	Ole sí. ¿Qué relación tienen esos planos, ese plano, con el plano determinado por ABC? Que los dos se intersecan...
38	Andrés:	En la recta DF, en la recta DF.
39	Brayan 2:	[Escribe en la hoja: Sea β tal que $\overleftrightarrow{HF}, \overleftrightarrow{HD} \subset \beta$; $\beta \cap \alpha = \overleftrightarrow{DF}$]

Para dar respuesta al ítem b, Brayan indica la necesidad de determinar un plano diferente al plano base. Para ello, alude a $\overleftrightarrow{HF}$ y $\overleftrightarrow{HD}$ las cuales se intersecan en H [24]; lo representan usando tres puntos (H, F y D, y la herramienta *plano*) –en correspondencia con la **Norma 12a**–. Para visualizar mejor los posibles triángulos, hacen un arrastre de bola de cristal (**Norma 12b**) [25]. Con ello, Jefferson destaca ciertos triángulos los cuales son escritos en el reporte por Brayan [28]. Vale resaltar que no evalúan otros puntos para determinar otros posibles triángulos. De la interacción (no de su reporte -*i.e.*, no cumplen con la **Norma 13d**-), se identifica un argumento deductivo (Ad29) producido de nuevo por Brayan (en correspondencia con las **Normas 9** y **22**). Intentado dar respuesta a la pregunta, él necesita determinar un plano para poder hablar de diferentes triángulos contenidos en él. En tal sentido, usa como dato a que las rectas $\overleftrightarrow{HF}$ y $\overleftrightarrow{HD}$ se intersecan en H [24] para determinar el plano que las contiene. Usa implícitamente el T. Rectas-plano (Pp70) como garantía. El argumento se representa en la Figura 77.

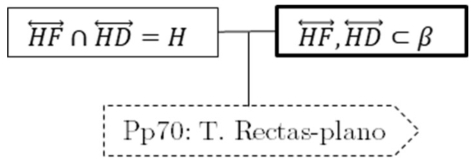


Figura 77. PP6: Ad29 producido por Grupo I

Luego de realizada la construcción del plano β en el EGD [34] y el respectivo arrastre de bola de cristal (**Norma 12b**), estudian su relación con α_{ABC}. Determinan que estos se intersecan en $\overleftrightarrow{DF}$ [39] (**Norma 14**). No consideran todos los planos (α_{ABI}, α_{BcI}, α_{AcI}) indicados en la respuesta al ítem a.

Actividad Grupo B: Leen el enunciado del problema y Karen realiza la construcción en asociada a la situación Cabri 3D, similar a la de la Figura 74 (en correspondencia con **Norma 12a**) [1]. Para dar respuesta al ítem a, ella hace un arrastre de bola de cristal para visualizar mejor la situación. En se momento, surge la siguiente interacción:

1	Karen:	Este es el inicial [señala la pantalla].
3	Mariana:	Por [recta] CB…
4	Vanessa:	H.
5	Mariana:	H.
6	Karen:	[Recta] CB y H [hace la respectiva representación del plano que contiene esos puntos]
7	Mariana:	Y otro, [recta] AD y H.
8	Karen:	[Recta] AD… El otro [plano] era ADH
9	Mariana	ADH
10	Vanessa:	¿Otro?
11	Karen:	¿FD y H?
17	Mariana:	Sí. [recta] FD y alguno por allá arriba. [recta] FD y H
18	Karen:	[Ha representado en el EGD la Figura 78. Los planos fueron construidos usando la herramienta *plano*, y seleccionando por una recta y un punto. Cambian el color y trama de la superficie para visualizar mejor cada plano].

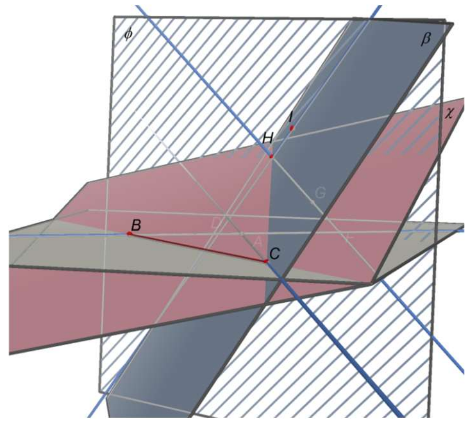


Figura 78. Grupo B: Representación gráfica (L8)

19	Mariana:	Pues ahí dice [se refiere a la hoja de trabajo]: justifique su respuesta. ¿Por qué son distintos a alfa? [Mira la pantalla]. Ah por el triángulo ¿No? Pues porque el triángulo está en alfa, por la llaneza las rectas están en alfa [nombre que le pusieron al plano base], y los puntos que… cuando trazamos las rectas, los puntos ubicados en esas rectas… por la llaneza las rectas están en alfa, los puntos ubicados en las rectas están en alfa, por subconjunto.
20	Karen:	Creamos un I que no pertenecía al plano o sea a alfa.
21	Vanessa:	Por el postulado del espacio.
22	Mariana:	Y con I los otros son no coplanares
23	Karen:	No, porque el que nos dan fue I. Y H pues pertenece a la recta [$\overleftrightarrow{ID}$].
24	Mariana:	Ah, entonces la recta DI no está en el plano alfa (…) por…
25	Karen:	Por la llaneza, porque si uno supone que está contenido [H perteneciendo a α] entonces I está contenido. Diría yo, entonces DI tampoco pertenece a alfa.
26	Vanessa:	Existe el plano beta y después lo mismo [para los otros].
	[…]	
29	Mariana:	Y los planos [existen] por [teorema] recta, punto-plano [Como respuesta al ítem a escribe: $H \notin \alpha$; β_{ADH}, χ_{BCH}, ϕ_{DFH}].

Este grupo se adentran en una exploración sobre la representación con miras a precisar planos diferentes al plano dado α (**Norma 12b**). Terminan haciendo (Pr5) una representación gráfica (L8) como la Figura 78. Determinan así los planos β_{ADH}, χ_{BCH}, ϕ_{DFH}. Enseguida, producen tres argumentos deductivos (en correspondencia con las **Normas 9** y **22**) que no son registrados en su reporte escrito: uno para precisar que los puntos de las rectas determinados por los vértices del triángulo dado están en α (Ad30) [19], otro por contradicción para inferir que el punto $H \notin \alpha$ (Ad31) [25], y otro para determinar los planos (Ad32) [29]. La Figura 79 presenta los diagramas de los respectivos argumentos. Vale indicar que la estructura de Ad31 es igual a la producida con el argumento Ad15 para probar Pp40[51]. A su vez, Ad32 tiene como garantía Pp67 (T. Punto, recta-plano), una de las proposiciones clave para determinar un plano.

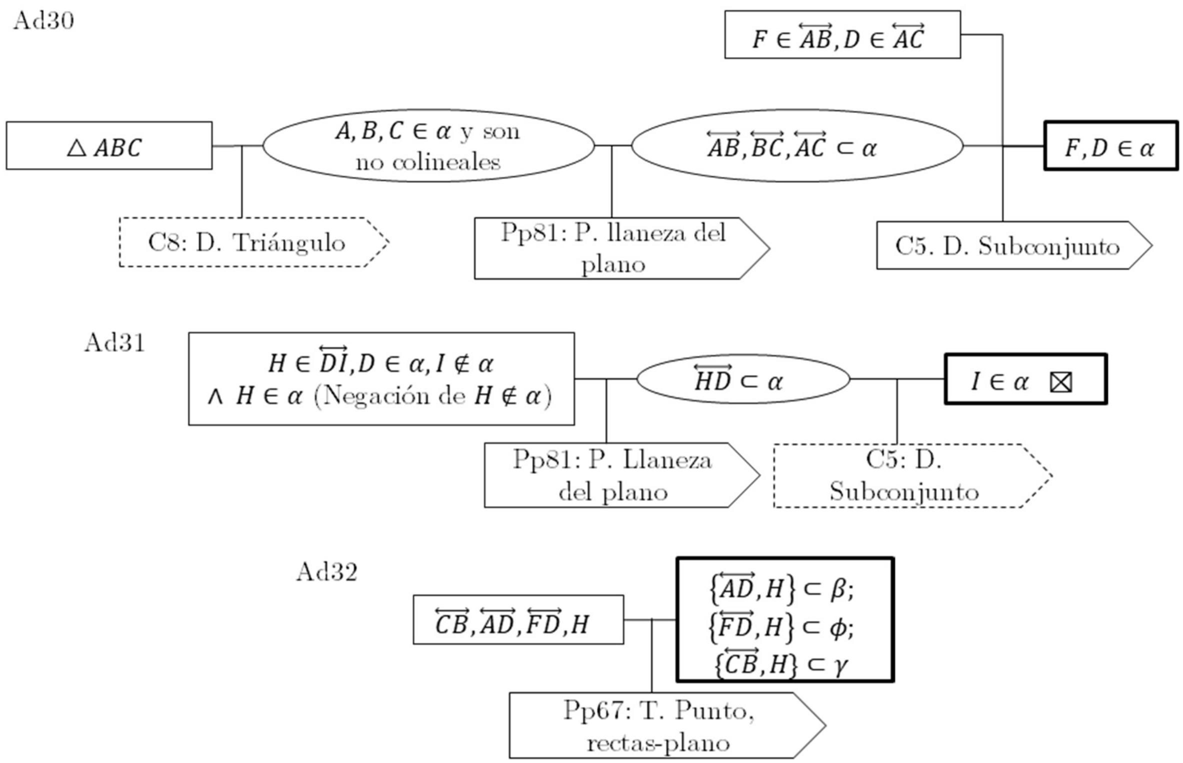


Figura 79. PP6: Ad30-Ad32 producidos por Grupo B

Para responde el ítem b, Karen decide borrar los planos construidos para limpiar un poco la representación [30]. En seguida, construye el plano determinado por los puntos *I*, *G*, *H*. Vanessa menciona [31] que el plano generado es el mismo plano ϕ_{DFH} (Figura 80) En ese momento trascurre la siguiente interacción:

[51] Pp40: Dados tres puntos A, B, C no colineales y un punto D que no está en el plano determinado por la terna de puntos, construir una recta determinado, por ejemplo, $\overleftrightarrow{AD}$, entonces ningún punto de dicha recta está en tal plano –por en, el espacio tiene infinitos puntos–.

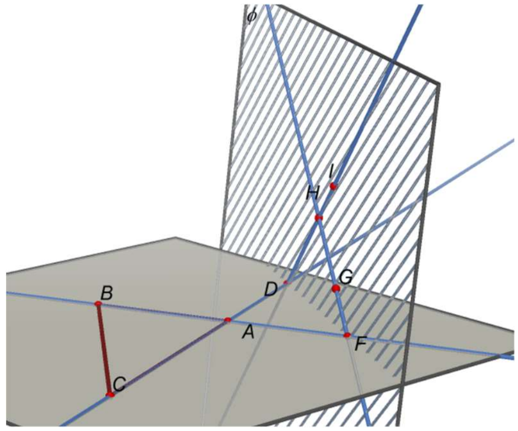


Figura 80: Grupo B: Representación gráfica ϕ_{DFH} y α_{ABC}

32	Mariana:	¿Pero qué relación tiene [se refiere ϕ_{DFH}] con alfa? Ay no, no, no espere [toma el mouse del computador para hacer un arrastre de bola de cristal] ¿Interseca a alfa en una recta?
33	Vanessa:	Ay sí, comparten la recta DF [señala sobre la pantalla]
34	Mariana:	Pongamos que comparten la recta DF porque no sé qué más poner
35	Vanessa:	Porque siempre el plano [ϕ_{DFH}], siempre los generamos con D y F. Entonces comparten a D y a F.
36	Mariana:	[Escribe en el reporte: El plano que se puede determinar es ϕ_{DFH}. $\phi \cap \alpha = \overleftrightarrow{DF}$]

Las estudiantes llevaron a cabo una exploración en el EGD (**Norma 12b)** mediante la cual descubrieron que los planos considerados se intersecan en una recta [36] (**Norma 14**). Para soportar tal descubriendo [35] tomaron como dato dos puntos (D y F) que pertenecen a los dos planos. No obstante, a diferencia de los casos anteriores, no precisan una garantía que conecte el dato con la aserción $\phi \cap \alpha = \overleftrightarrow{DF}$.

4.3.3.2 ***Síntesis y breves comentarios trayectoria didáctica 8***

Esta trayectoria se focalizó en la actividad de dos grupos de estudiantes (I y B) cuando abordaron el PP6. En tal sentido, la *práctica* de ambos grupos se centró en la resolución de las preguntas planteadas por PP6, un problema de *búsqueda de consecuente* que en esencia pretendía que los estudiantes establecieran que cuando dos planos se intersecan, el objeto de intersección es una recta. En el marco de tal práctica, los grupos observados llevaron a cabo procedimientos de construcción en el EGD Cabri 3D (Pr4, Pr5) que condujeron a representaciones dinámicas (L7, L8), exploraron tales representaciones haciendo principalmente un arrastre de bola de cristal y se adentraron en procesos de argumentación para respaldar sus respuestas. Con este escenario las *situaciones instruccionales* fueron dos principalmente: *construcción de figura* y *exploración de una figura*. La Tabla 76 ilustra las normas que regularon cada subpráctica llevada a cabo por los grupos I y B, y las situaciones instruccionales asociadas. Vale indicar que las Normas 13a, 13b, 13c y 13d se cumplieron parcialmente dado que, si bien los estudiantes se responsabilizaron de hacer construcciones en el EGD, explorar y argumentar sus respuestas (conjeturas) ellos, en general, no registraron en su reporte escrito lo respectivo. Esto es, no hubo reportes de lo construido, lo explorado y cómo lo hicieron, de sus conjeturas en formato *si… entonces…* ni de los argumentos. Esto pudo haber ocurrido porque la profesora no hizo hincapié de tal exigencia al inicio de la actividad. Es importante resaltar que tanto las verbalizaciones como los reportes escritos de los estudiantes fueron escritos con el lenguaje geométrico correspondiente (L9) –Norma 5b.1–.

Tabla 76. PP6–Grupos I y B: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Subprácticas	**Normas que las regula**	**Situación Instruccional asociada**
Realización de la construcción en Cabri 3D con el fin de representar las condiciones de la situación plateada en PP6	15, 12a, parcialmente 13a	Construcción de una Figura
Realización de exploración de las representaciones dinámicas (L7, L8) para visualizarlas de mejor manera, haciendo arrastres de bola de cristal.	12b, 14, parcialmente 13b y 13c	Exploración de una figura
Producción de argumentos de las respuestas dadas a las preguntas.	9, 22, parcialmente 13d	

Los *objetos primarios* involucrados en las Subprácticas fueron indicados a lo largo del análisis. Dentro de los objetos-conceptos se resaltan *triángulo* (C8), *plano* (C4) y *recta* (C2). Como era de esperarse, para dar respuesta al ítem a de PP6, tanto en los procedimientos de construcción (Pr4 y Pr5) como en los argumentos deductivos elaborados (Ad27 - Ad32), los estudiantes emplearon alguna de las proposiciones claves indicadas por la profesora para determinar planos (P. Puntos-plano –Pp45–, T. Rectas-plano –Pp70– o T. Punto, recta-plano –Pp67–). Se resalta que, como respuesta a ítem b, aunque los dos grupos percibieron que la intersección de dos planos debería ser una recta (Pp82), ninguno proveyó un argumento completo. El grupo B estuvo cercano pues explicitó el dato clave para ello (tener en común dos puntos). Sin embargo, no desarrollaron su idea teniendo todo para hacerlo. La Figura 81 muestra la configuración de objetos emergente (cognitiva) de las prácticas asociadas a la trayectoria didáctica 8. Por su parte, la Tabla 77 presenta la cronología de objetos, normas y situaciones asociados a la Trayectoria.

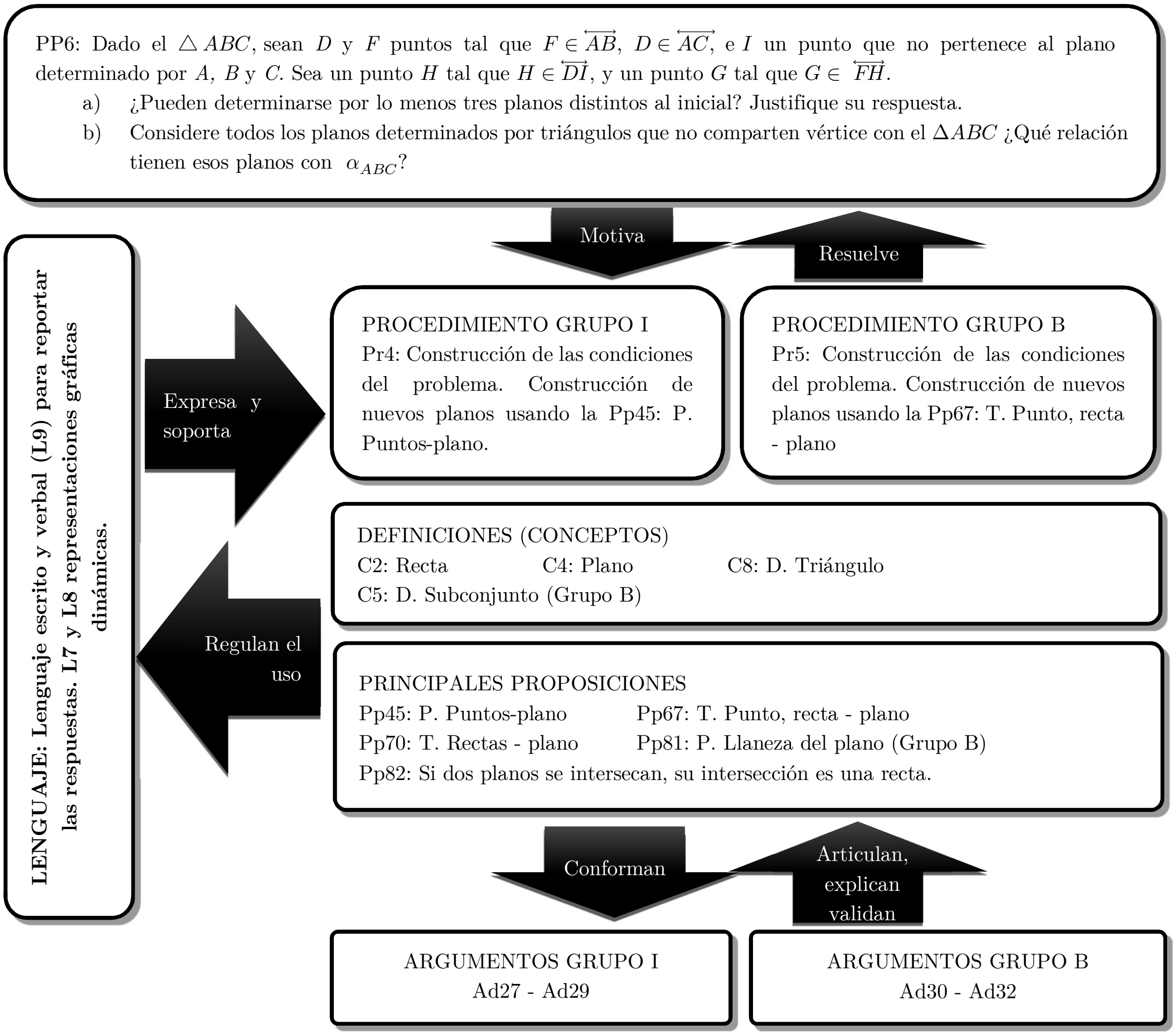


Figura 81. Configuraciones ontosemiótica cognitiva relativa a PP6 – Grupos I y B

Tabla 77. Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 8

		Grupo I									Grupo B							
Situaciones		Construcción de figura / *Exploración de una Figura*																
Objetos	**Problemas**	PP6																
	Procedimientos	Pr4									Pr5							
	Conceptos/Def	C8									C8 C5	C5						
	Proposiciones	Pp45									Pp81	Pp81			Pp67			
	Argumentos	Ad27 Ad28 Ad29									Ad30	Ad31			Ad32			
	Lenguajes	L7 L9									L8 L9							
Normas		12a	15	9	22	12a	*12b*	*14*	9	$\boxed{22}$	12a	*12b*	9	22	*12b*	*14*	9	22
		5b.1, Parcialmente 13a, *13b*, *13c*, *13d*																

4.3.3.3 *Trayectoria didáctica 9: Actividad matemática sobre PP6 –Toda la clase*

En la misma sesión de clase 16, luego de que los estudiantes trabajaran en la solución de PP6, este es abordado de manera colectiva por toda la clase. A diferencia de lo sucedido con los problemas PP4 (y auxiliares) y PP5, la profesora no presenta en un documento el compendio de las producciones de los estudiantes, pues no tuvo tiempo para ello. Más bien pregunta por cada uno de los ítems, y los estudiantes, con base en lo que realizaron, exponen sus ideas. Desde esta perspectiva, no son examinadas las producciones de manera explícita. A continuación, se trascribe fragmentos de la interacción relativa a cada ítem del PP6. Luego de cada una se presenta su respectivo análisis. Con respecto al ítem a, ocurre la siguiente interacción:

2 P: [Con respecto al ítem a] Bueno, entonces ¿Qué planos vieron ustedes?

3 Laura: ABI

4 P: El generado por ABI. Por el punto éste [selecciona I] y este segmento [selecciona $\overleftrightarrow{AB}$]. [Usa el EGD Cabri 3D para representar la situación (Figura 82)].

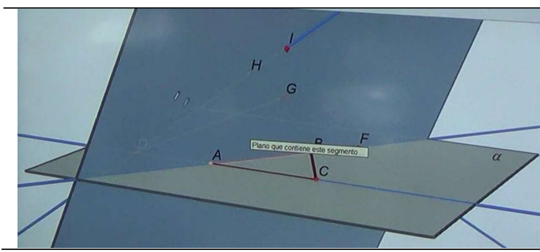


Figura 82. PP6. Representación 1 hecha por la profesora

Eh este plano, color de superficie: rojo... y rayado fino para que se vea mejor [Se refiere a cambiar el color y la trama del nuevo plano con el propósito de visualizarlo mejor (Figura 83)].

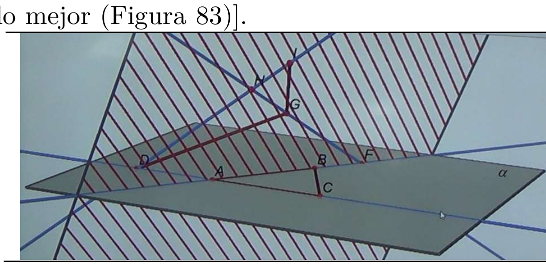


Figura 83. PP6. Representación 2 hecha por la profesora

Una cosa: es más rápido usar el teorema recta, punto-plano que el postulado puntos - plano ¿No?, Es mucho más rápido poderlo representar así. Bien ahí va un plano.

¿Cuál otro?,¿Hay más?

5 Óscar: GCF

6 P: ¿GCB?

7 Laura: IBC

8 P: IBC. O sea, plano … y este segmento [Complementa la representación según la Figura 84].

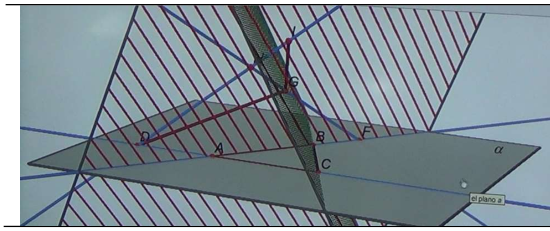


Figura 84. PP6. Representación 3 hecha por la profesora

¿Hay otro plano? Vamos a ponerle otro color a ese. Van dos, ¿Cuántos me pedían?, por lo menos tres. Le iba poner color verde y estilo…
Bueno. ¿Y falta? Y falta HDF ¿No?

9 Laura: ACI

10 P: Y ACI. Bueno, me falta. Entonces ¿Cuántos encontraron?,¿Tres?

11 Varios: Cuatro

12 P: ¿Cuatro? Cuatro. Bueno entonces miren, cuando el plano lo generan usando una recta y un punto. Lo nombramos gamma, recta AB, punto I [Escribe lo respectivo en el tablero: $\gamma_{\overleftrightarrow{AB},I}$]. O si usan los tres puntos lo nombramos gamma, HIG [Escribe lo respectivo en el tablero: γ_{HIG}]. Ahí sabe uno qué fue lo que usaron para determinar el plano.

En [3, 7, 8, 9] entre la profesora y Laura proponen planos diferentes al plano base (α_{ABC}), estos son los que contienen las ternas de puntos {A, B, I}, {A, C, I}, {H, I, G} y {I, B, C}. La profesora para construir dos de ellos (los que contienen {A, B, I} y {I, B, C}) usa la herramienta *plano*, y selecciona, según el caso, rectas del plano base ($\overleftrightarrow{AB}$ o $\overleftrightarrow{BC}$) y el punto I (Pr5). Desde un punto de vista normativo que regulan la actividad, cuatro asuntos se destacan: (i) La profesora actúa en correspondencia con la **Norma 12a** pues hace una construcción en el EGD empleando propiedades del objeto *plano*, para este caso el T. Recta, punto-plano (Pp67). Más aún, la profesora sugiere que usar esta propiedad es más económica que emplear el P. Puntos-plano (Pp45) [4]. (ii) Con esto, la profesora parece sugerir una norma nueva respecto a la economía, alusión que también fue hecha en la trayectoria didáctica 4 aquella vez cuando se elaboraba la prueba de una proposición. Esto es, *habiendo varias opciones correctas para proceder en un procedimiento de construcción o en una elaboración de una prueba, se debe escoger aquella que represente el camino más rápido. En otras palabras, se debe usar aquellas proposiciones cuyo antecedente es menos exigente* (**Norma 50** de faceta esencialmente epistémica). (iii) La profesora nombra los objetos en la representación (en correspondencia con la **Norma 15)**. Además, ella cambia el color y la trama de la superficie para visualizar mejor los objetos involucrados en una representación [4, 8] (acción también hecha por Karen [18] en el trabajo del grupo B). Esto sugiere una complementación a tal **Norma 15:** además de nombrar los puntos, *es prudente cambiar el color o la apariencia de los objetos involucrados para poder identificarlos de mejor manera.* (iv) Finalmente, ella aclara [12] la notación (L10) que se empleará en adelante para indicar un plano generado por una recta y un punto (*e.g.* $\overleftrightarrow{AB}, I$); esto es, $\gamma_{\overrightarrow{AB},I}$. Así las cosas, actúa en correspondencia con la **Norma 5b.1**.

Vale indicar que con el comentario hecho por la profesora en [4] y el respectivo análisis expuesto en el numeral (i), implícitamente existe un argumento deductivo análogo a Ad32 propuesto por el Grupo B.

Con respecto al ítem b, ocurre la siguiente interacción:

12	P:	Bien. Y la pregunta c) dice: Considere todos los planos determinados por triángulos que no comparten vértice con el triángulo ABC. Entonces ¿Cuáles hay ahí?, ¿Los dos que tengo representados me sirven? ¿El rojo no [$\gamma_{\overrightarrow{AB},I}$]?
13	Steven:	No. Ni el verde [$\gamma_{\overrightarrow{CB},I}$]
14	P:	¿Por qué no?
15	Mauricio:	Porque AB está ahí [se refiere al $\gamma_{\overrightarrow{AB},I}$].
16	P:	Porque A y B están en ese plano. Bueno… el triángulo HIG no comparte vértice con el triángulo ABC y ese sería un plano determinado por ese triángulo ¿Sí? Porque ¿Algún plano encontraron que no tuviera algún punto de alfa? ¿O todos los planos tienen algún punto con alfa?
17	José:	Todos tienen algún punto
18	P:	Todos tienen ¿Cierto? Porque determinamos el plano o usando una recta y un punto que no esté en el plano. O usando dos rectas que se intersecan, pero todas esas rectas tenían un punto en el plano alfa. Entonces ahí vemos una cosa interesante: los dos planos $\left[\gamma_{\overrightarrow{CB},I},\ \gamma_{\overrightarrow{AB},I}\right]$ que yo representé tienen en común con alfa, rectas. Lo intersecan en una recta, pero los creamos de tal manera…pues yo usé el punto y recta, pero en realidad lo que estaba dado eran los tres puntos. O sea, se dio el punto A, el punto B y generamos un plano que también contuviera el punto I. De aquí surge un teorema que es bastante importante para nosotros y un postulado. Creo que va a ser nuestro último postulado o casi el último. El postulado va a decir lo siguiente: Postulado intersección planos [escribe en el tablero] dice que, sí dos planos alfa y beta son tal que alfa intersección beta diferente de vacío, si tienen algo en común dos planos, entonces la intersección es por lo menos dos puntos [Escribe en el tablero: P. Intersección de planos: Sean dos planos γ y α tales que $\alpha \cap \gamma = \emptyset$, entonces la intersección es por lo menos dos puntos]. Entonces si sabemos que se intersecan tienen en común por lo menos dos puntos. Pero lo que

		vemos aquí es que tienen en común más de dos puntos, tienen en común una recta. Pero eso lo puedo demostrar, teorema intersección planos [escribe en el tablero: T. intersección de planos: Sean dos planos γ y α tales que $\alpha \cap \gamma = \emptyset$, entonces la intersección es una recta determinada por dichos puntos], lo puedo demostrar a partir de esto, ¿Cierto?
19	Steven:	Llaneza [se refiere al P. Llaneza del plano]
20	P:	Porque si tienen dos puntos, por el postulado de la llaneza [del plano], la recta está en cada plano. Ahora, lo bonito de esta situación no es solamente eso, que vemos que la intersección son dos rectas, sino que también deberíamos empezar a ver cosas.

Luego de descartar todos los planos que contienen los puntos A, B y C [13-15], la profesora precisa que el plano determinado por el $\triangle HIG$ responde la pregunta [16]. Enseguida precisa que todos los planos, inclusive el que contiene dicho $\triangle HIG$, interseca al plano base en por los menos dos puntos, ratificando lo dicho por José en [17]. Con este escenario, la profesora decide instalar el P. Intersección de planos (Pp83) y el T. Intersección de planos (Pp82) apoyada parcialmente por la información provista por el EGD (en correspondencia con la **Norma 18**). Finalmente, de manera muy somera entre la profesora y Steven produce un argumento deductivo (Ad33) para soportar tal teorema, empleando como garantía el P. Llaneza del plano (Pp83) –**Normas 24, 29**–. La Figura 85 deja ver el diagrama del argumento asociado, complementando las ideas planteadas en [18-20].

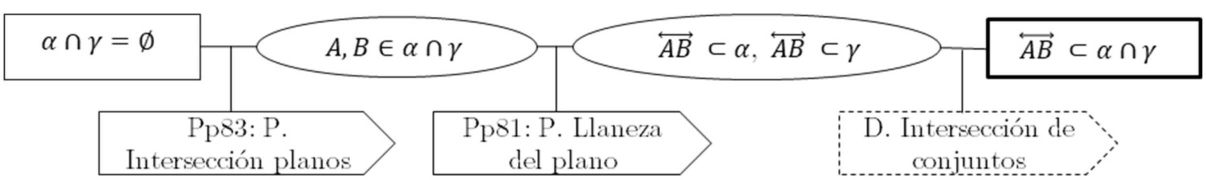


Figura 85. PP6: Ad33 producido colectivamente para Pp83

4.3.3.4 *Síntesis y breves comentarios trayectoria didáctica 9*

La trayectoria didáctica se concentró en hacer públicas las respuestas a las preguntas del PP6 encontradas por los grupos de estudiantes luego de abordar el trabajo. De manera específica, la *práctica* llevada a cabo consistió en la reproducción en el EGD y por parte de la profesora, de cada una de las respuestas que verbalizaban los estudiantes a los ítems a y b del PP6. En consecuencia, las *situaciones instruccionales* surgidas tienen que ver con la *construcción de una figura* mediante Pr5 (que lleva a una representación similar a L7) y la *elaboración de una prueba* del

T. Intersección de planos (Pp82) sin emplear algún formato escrito para su presentación, solo verbalizada (L11) de manera escueta. Nótese que, en comparación con la actividad de los grupos I y B, hubo tres diferencias fundamentales en cuanto a las situaciones de exploración: (i) En la puesta en común no hubo *situación de exploración* puesto que la profesora se dedicó a replicar lo dicho por los estudiantes para ratificar las propuestas de los estudiantes; (ii) En la puesta en común y como es esperado según la **Norma 35a**, hubo una *situación de instalación de proposición* (Pp82 y Pp83) y de *elaboración de una prueba* (de Pp82). La Tabla 78 ilustra las normas que regularon cada práctica llevada a cabo y las situaciones instruccionales asociadas, resaltando en negrilla las normas nuevas o complementos de otras. Vale indicar que, para este caso, la **Norma 13a** es complementada: *si bien los estudiantes deben reportar sus producciones de manera escrita (en cuanto la construcción), deben comunicarlas verbalmente en las puestas en común orquestadas por el profesor*. Para este caso, los estudiantes comunican sus respuestas y la profesora, con base en ellas, procede a hacer la respectiva construcción para verificar y convalidar (**Norma 19**).

Tabla 78. PP6–Toda la clase: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Subprácticas	Normas que las regula	Situación Instruccional asociada
Realización de la construcción en Cabri 3D con el fin de representar las respuestas de los estudiantes	**15**, 12a, **50**, 19, **13a**, 5b1	Construcción de una Figura
Producción de argumentos de las respuestas dadas a las preguntas.	9, 22, 24, 29	Elaboración de una prueba.
	18, 35a	Instalación de una proposición

Los *objetos primarios* involucrados en las Subprácticas fueron indicados a lo largo del análisis. Dentro de los objetos-conceptos se resaltan *triángulo* (C8), *plano* (C4) y *recta* (C2). Para dar respuesta al ítem a de PP6, la profesora empleó Pr5 (de igual forma que lo hizo el grupo B) para hacer las construcciones de los planos indicados por los estudiantes; en consecuencia, surgió un argumento deductivo análogo a Ad32. En este sentido, dio prelación al T. Punto, recta-plano (Pp67) sobre las demás proposiciones claves indicadas para determinar planos (P. Puntos-plano –Pp45–, T. Rectas-plano –Pp70–o el P. Existencia –Pp46–). Para dar respuesta a ítem b la profesora se apoyó en las respuestas de los estudiantes para producir el argumento

Ad33 que permitió probar la Pp83 usando como una de sus garantías los postulados Intersección de planos (Pp82) y Llaneza del plano (Pp81). Un argumento tal no fue producido por alguno de los grupos de estudiantes observados.

La Tabla 79 presenta la cronología de los objetos, normas y situaciones asociadas a la Trayectoria. Por su parte, la Figura 86 muestra la configuración de objetos emergente (epistémica) de las prácticas asociadas a la trayectoria didáctica 8. Al comparar tal configuración con la de los estudiantes, es posible decir que estas son similares. Sus diferencias radican esencialmente en el hecho de que en la actividad de toda la clase es instalado el P. Intersección de planos (Pp83) y el T. Intersección de Plano (Pp82); esto implica la producción de un argumento deductivo (Ad33) que no es producido por los estudiantes.

Tabla 79. Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 9

<table>
<tr><th colspan="2">Situaciones</th><th colspan="6">Construcción de figura</th><th colspan="4">Elaboración de una prueba</th><th colspan="2">Instalación de proposición</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Objetos</td><td>Problemas</td><td colspan="12">PP6</td></tr>
<tr><td>Procedimientos</td><td colspan="6">Pr5</td><td colspan="6">Pr5</td></tr>
<tr><td>Conceptos/Def</td><td colspan="6">C8</td><td colspan="4">C4 D. Intersección de conjuntos C2</td><td colspan="2">Pp83 Pp82</td></tr>
<tr><td>Proposiciones</td><td colspan="6">Pp67</td><td colspan="4">Pp83 Pp81</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Argumentos</td><td colspan="6"></td><td colspan="6">Ad33</td></tr>
<tr><td>Lenguajes</td><td colspan="6">L10</td><td colspan="6">L11</td></tr>
<tr><td colspan="2">Normas</td><td>12a</td><td>15</td><td>50</td><td>13a</td><td>19</td><td>5b.1</td><td>9</td><td>22</td><td>24</td><td>29</td><td>18</td><td>35a</td></tr>
</table>

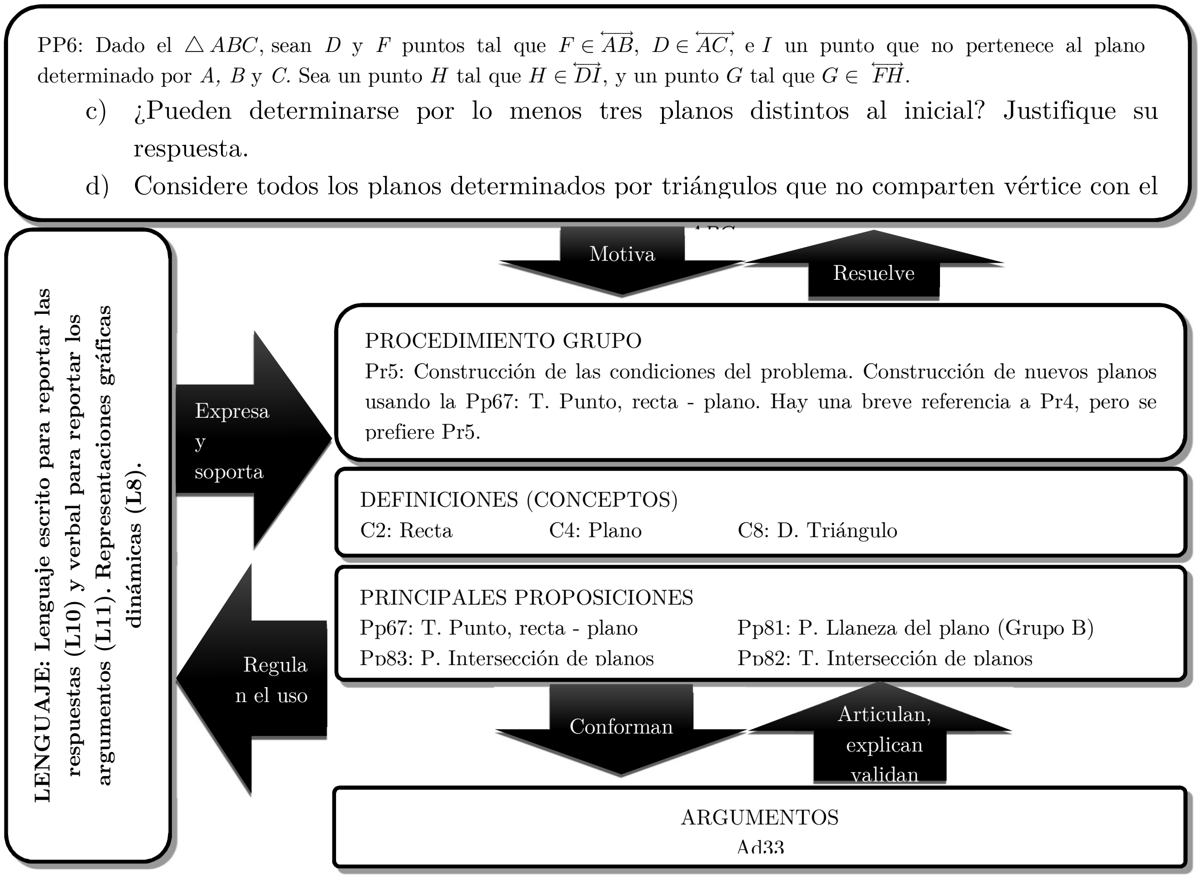


Figura 86. Configuración ontosemiótica epistémica relativa a PP6

4.3.4 Síntesis y conclusiones Bloque de Problemas N° 4

Se presenta un compendio de las normas que regularon las prácticas ocurridas durante el tratamiento del Bloque de Problemas N° 4 poniendo especial énfasis en aquellas que fueron emergente (nuevas) respecto a Bloque de Problemas N° 1. Tales normas emergentes se clasifican según las situaciones instruccionales en las que estuvieron presentes. No se presentan todas las normas tal como se hizo en el Bloque de Problemas N° 1; esto, para no saturar la presentación de la información. Se exaltan más bien las principales diferencias normativas entre un bloque y otro, teniendo presente que el primero se concentra en el Dominio Geometría Plana mientras que el segundo, en la Geometría del Espacio.

4.3.4.1 *Compendio de normas por situación instruccional*

Enseguida se exponen todas las normas que regularon las prácticas que tomaron lugar cuando los estudiantes (por grupos o individualmente) y toda la clase, abordaron los problemas PP4 y sus auxiliares (PA4.1, PA4.2, PA4,3), PP5 y PP6 pensados para ser resueltos en el Dominio Geometría del Espacio. La Tabla 80 presenta un compendio de las normas presentes en el bloque indicando sólo aquellas emergentes (resaltadas con negrilla), las prácticas que reguló y las situaciones instruccionales correspondiente. Hay que decir que tales normas emergentes son, en su mayoría, complemento de otras ya existentes (en su mayoría, relacionadas directamente con la argumentación). Por su parte, la Tabla 81 presenta los enunciados de tales normas emergentes indicado el complemento de las normas ya existentes con letra en cursiva. Así mismo, la Tabla 82 organiza las normas presentadas en la Tabla 81 clasificándolas según cada situación instruccional del Bloque en cuestión. Esto dará un mejor panorama para resaltar las principales diferencias con lo sucedido en el Bloque de Problemas N° 1, las cuales se presentan en el apartado 4.3.4.2.

Tabla 80. Bloque N° 4: Compendio de normas y su dinámica

TD[52]	**Prácticas**	**Normas**	**Situaciones instruccionales**
5	Estudio sobre qué condición proveer a los cuatro puntos dados en el enunciado de PP4	13d, 9, 2	Exploración de una situación
6	Realización de la construcción de un vértice del cuadrilátero fuera del plano base en Cabri 3D –Pr1– (solución del PP4)	7, 16, **15**, 12a, **18**, 37, 39	Construcción de una Figura
		38, 40	Instalación de un concepto
	Estudio sobre la diferencia entre el espacio y los objetos punto, recta y un plano (PA4.1).	13d, **9a**, 3, **24**, 39, **25**, **26**	Exploración teórica
		35a	Instalación de una proposición (Postulado)
	Estudio (prueba colectiva) focalizado en garantizar que el espacio tiene infinitos puntos –Pp39– (solución PA4.2)	3, 32, 33, 34, 27, 29, 25	Elaboración de una prueba
		35a	Instalación de una proposición (teorema)
		12b	Exploración de una figura

[52] TD indica Trayectoria Didáctica.

	Estudio colectivo centrado en formular la definición de cuadrilátero plegado (solución PA4.3)	3, 40, 34, 38, **46**	instalación de un concepto.
7	Estudio de un paso argumental hipotético (cuya aserción es la determinación de un plano) que pertenece al dominio de la Geometría Plana (relativo a PP5)	3, 2, **47**, **48**, 22, 25, **49**	Exploración Teórica
8	Realización de la construcción en Cabri 3D con el fin de representar las condiciones de la situación plateada en PP6 (Grupos I y B)	15, 12a, **parcialmente 13a**	Construcción de una Figura
	Realización de exploración de las representaciones dinámicas (L7, L8) para visualizarlas de mejor manera, haciendo arrastres de bola de cristal (Grupos I y B).	12b, 14, **parcialmente 13b** y **13c**	Exploración de una figura
	Producción de argumentos de las respuestas dadas a las preguntas de PP6 (Grupos I y B).	9, 22, **parcialmente 13d**	
9	Realización, por parte de la profesora, de la construcción en Cabri 3D con el fin de representar las respuestas de los estudiantes a PP6.	**15**, 12a, **50**, 19, **13a**	Construcción de una Figura
	Producción colectiva de argumentos de las respuestas dadas a las preguntas de PP6.	9, 22, 24, 29	Elaboración de una prueba.
		18, 35a	Instalación de una proposición

Tabla 81. Bloque N° 4: Enunciado normas emergentes (nuevas)

Norma	Enunciado
9a	Complemento: *Un argumento informal para el curso es aquel que:* (i) *Se compone de las aserciones (sin sus respectivas garantías) que pueden ser insumo para la prueba formal. Y* (ii) *Puede indicar que los objetos necesarios para llevar a cabo tal prueba no están en el sistema teórico. Para el ítem* i*, un argumento deductivo puede ser asociado. Para el ítem* ii*, los argumentos asociados pueden ser esencialmente abductivos; los argumentos inductivos o analógicos pueden surgir cuando se pretende inferir los objetos necesarios.*
13	Aclaración: Normas 13a, 13b, 13c y 13d se cumplieron parcialmente dado que los si bien los estudiantes se responsabilizaron de hacer construcciones en el EGD, explorar y argumentar sus respuestas (conjeturas) ellos, en general, no registraron en su reporte escrito lo respectivo. Esto es, no hubo reportes de los construido, de lo que exploraron y cómo lo hicieron, de sus conjeturas en formato *si… entonces…* ni de los argumentos producidos.
15	Complemento: En las representaciones gráficas, los puntos deben ser nombrados para facilitar la comunicación. Además, *es prudente cambiar el color o la apariencia de los objetos involucrados para poder identificarlos de mejor manera.*
7	Complemento: Mediante la resolución de problemas se introducen elementos (objetos primarios) al sistema teórico, *tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio.*
16	Complemento: Es legítimo el uso de objetos, *tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio*, que no hacen parte del sistema teórico en un procedimiento de construcción o exploración.

18	Complemento: El EGD hace ostensivos objetos geométricos que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico. *En el dominio de la Geometría del Espacio, Cabri 3D cobra un valor importante mediante el empleo de herramientas especiales (e.g., redefinir o bola de cristal) no presentes en Cabri 2D que pone de manifiesto dichos objetos.*
22	Complemento: Los elementos que debe contener cada paso argumental son aserción, dato y garantía, donde la garantía es aquel objeto primario (definición, postulado, teorema) que soporta la aserción como consecuencia necesaria de los datos. *Un dato no puede referirse a la propiedad que se quiere inferir y contenida en la aserción.* El conjunto de todos los pasos argumentales conforma una prueba (argumento global).
24	El profesor asume la responsabilidad de preguntar por los elementos que constituyen los pasos argumentales de una prueba, *o de cualquier tipo de argumento.*
25	El profesor asume la responsabilidad de determinar la validez del uso de las proposiciones dichas por los estudiantes en cada paso argumental, *sea este de carácter analítico o substancial (inductivo, abductivo, analógico).*
26	El profesor asume la responsabilidad de tomar la decisión final cuando existen varias opciones correctas sugeridas por los estudiantes *cualquiera sea la situación instruccional.*
35a	Complemento: Un teorema se instala en el curso si su enunciado es probado, su enunciado se usa en la prueba de otro teorema y la profesora lo sanciona como tal. *Un postulado se instala en el curso si su enunciado es soportado por un argumento substancial (inductivo, analógico o de convicción externa -este último soportado en EGD), su enunciado se usa en la prueba de otro y la profesora lo sanciona como tal.*
46	Nueva: *Se emplean argumentos deductivos (cuyas garantías son definiciones) o exploraciones en EGD (para verificar o establecer propiedades) que lleven a formular definiciones de objetos.*
47	Nueva (Especificación Norma 2): *Los estudiantes pueden (y deben) hacer refutaciones de ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase, rebatiendo alguno de los elementos de un argumento.*
48	Nueva (Especificación Norma 2): *Los estudiantes pueden (y deben) legitimar ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase*
49	Nueva: *Un argumento abductivo se legitima cuando el argumento deductivo asociado es válido*
50	Nueva: *Habiendo varias opciones correctas para proceder en un procedimiento de construcción o en una elaboración de una prueba, se debe escoger aquella que represente el camino más rápido. En otras palabras, se debe usar aquellas proposiciones cuyo antecedente es menos exigente.*

Tabla 82. Bloque N° 4: Normas ↔ situaciones instruccionales

Situaciones instruccionales	Normas
Construcción de una Figura	16, **15**, 12a, **18**, 37, **50**, 19, 39, **parcialmente 13a**
Exploración de una figura	12b, 14, 9, 22, **parcialmente 13b, 13c y 13d**
Instalación de un concepto	3, 40, 34, 38, **46**
Instalación de una proposición (Postulado)	**35a**
Instalación de una proposición (teorema)	**18, 35a**
Elaboración de una prueba	3, 32, 33, 34, 27, 29, 25, 9, 22, 24
Exploración Teórica	13d, **9a**, 3, **24**, **25**, **26**, 2, **47**, **48**, **22**, 25, **49**

4.3.4.2 *Principales diferencias normativas con respecto al Bloque N° 1*

La Tabla 82 resalta aquellas normas que surgen como emergentes (son nuevas) para cada situación instruccional en comparación con las situaciones del Bloque N° 1. Las principales diferencias son explicadas a continuación:

Como se precisó en los análisis, la producción de argumentos fue bastante rica a lo largo de cada trayectoria. Esto pudo haber sido consecuencia de la propuesta de problemas cuyas preguntas son *de índole teórico*, esto es, que buscan generar argumentos específicos para instalar objetos en el sistema (*e.g.*, el Postulado del Espacio -Pp38-; el Teorema Espacio infinitos puntos -Pp39-; el Cuadrilátero Plegado) o para determinar objetos ya existentes en el sistema (*e.g.* sea el plano α –Pp43–). Particularmente, la gran producción de argumentos substanciales llevó a que varias normas que en el primer bloque regulaban la situación de *elaboración de una prueba*, en este Bloque N° 4 regalaran otras situaciones, a saber, de *exploración teórica* (*e.g.*, 24, 25, 26). Así mismo, promovió la precisión de otras normas antes pensadas para la instalación de teoremas, ahora ajustadas a la instalación de postulados (*e.g.*, 9a y 35a).

De otro lado, este tipo de problemas (preguntas de *índole teórico*) también generó una nueva situación instruccional denominada *exploración teórica*. En ese marco, surgieron normas (*e.g.*, normas 47 a la 49) que acentuaron nuevas responsabilidades de los estudiantes y que pueden regular prácticas que no necesariamente conformen tal situación.

Otro aspecto que justifica la diferencia de otras normas tiene que ver con el uso del EGD Cabri 3D, clave para estudiar situaciones de Geometría del Espacio. Es así como las Normas 15, 16 y 18 fueron ajustadas para aquel contexto, precisando la importancia de herramientas como *redefinir*, arrastre de *bola de cristal* y el cambio de colores o apariencia para objetos construidos.

Un aspecto bastante diferenciador con respecto a lo ocurrido con el Bloque N° 1 tiene que ver con los reportes escritos de las producciones de los estudiantes. En aquel Bloque estuvo bastante presente la exigencia de hacer registros escritos de las soluciones constituidos por los reportes de construcción, exploración, formulación de conjetura y justificación. Para el Bloque N° 4 esta exigencia se flexibilizó en acto. Los estudiantes no produjeron reportes completos; no obstante, los análisis dejaron ver que los estudiantes sí efectúan dichas acciones. Es por ello por lo que se precisó que las Normas 13a, 13b, 13c y 13d se cumplieron parcialmente. En este mismo sentido, aunque hubo pruebas de dos proposiciones (T. Espacio infinitos puntos y T. Intersección de planos), ninguna de las dos fue reportada con el formato usual (Aserción-Garantía); para la primera se empleó el formato Núcleos-Pilares y para la segunda, hubo una verbalización de ideas argumentales. Es importante hacer un seguimiento a este fenómeno en las trayectorias siguientes, para ver si en lo que respecta al Dominio Geometría del Espacio, tal flexibilización será normativo.

Finalmente, vale indicar un aspecto que ocurrió en los dos bloques analizados. En la actividad de los estudiantes con relación a PP4, se volvió a poner de manifiesto tensiones de los estudiantes, sucedidas también en el Bloque de Problemas N° 1, que contrasta las Normas 2 y 9, esencialmente. Para este caso, las tensiones de *legitimidad* y *comunicación* sacaron a luz cuatro asuntos interesantes: (i) Un dilema en los estudiantes que contrasta asuntos de autenticidad de ideas y aspectos de formalidad de un argumento. (ii) Un efecto reflejo en la profesora, traducido en una tensión relativa a su responsabilidad de evaluar y que enfrenta criterios de valoración (tienen mayor valor ideas originales o la producción de argumentos formales). (iii) Un indicador de negociación de normas que se corresponde con la gestión que hizo la profesora de dicha tensión; negociación que fue inducida por las prácticas de los estudiantes y que llevó a la precisión de las características de una norma (Norma 9a). (iv) Las interpretaciones que dieron los estudiantes a *argumento informal* (concepto presente en 9a) y que los llevó a plantear, de manera inconsciente, diferentes tipos de argumentos empíricos (inductivo, abductivo y analógicos) para solucionar P2. Aun cuando la profesora no esperaba tal variedad de argumentos, los usó como una manera para instalar un hecho geométrico (Pp38) como postulado del sistema. Lo anterior ilustra cómo argumentos informales pueden ser legitimados en un curso formal de geometría.

4.4 BLOQUE DE PROBLEMAS N° 5: PERPENDICULARIDAD ENTRE PLANO Y RECTA

Este bloque de problemas consta de dos Problemas Principales; cuatro Problemas Auxiliares –uno asociado al Problema Principal 7 y dos asociados al Problema Principal 8–; y dos problemas en dos Tareas Extraclase, cada uno en la Tarea

Extraclase 9 y la Tarea Extraclase 10 (ver Tabla 83). Este bloque se desarrolla entre las sesiones de clase 17 a 21. Los temas que se abordan giran en torno a la relación de perpendicularidad entre planos y rectas en el espacio.

Tabla 83. Problemas Bloque N° 5

Dominio temático: Geometría del Espacio	**Temas:** Relación de perpendicularidad entre plano y recta	
Problema Principal 7 [PP7]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Dados m recta, α plano, $m \cap \alpha = \{X\}$, ¿existe recta l, $l \subset \alpha$, tal que $l \perp m$?	Precisar que una recta que interseca a un plano en un único punto y que es perpendicular a una recta de tal plano, no son condiciones suficientes para garantizar que tal recta es perpendicular al plano.	17, 18
Problema Auxiliar 7.1 [PA7.1]	**Objetivo**	**Sesión N°**
¿Cómo lograr que la recta m sea perpendicular al plano α?	Generar la necesidad de introducir la D. de recta perpendicular a plano y de la existencia de un plano perpendicular a una recta por un punto de ella.	18
Problema Auxiliar 8.1 [PA8.1]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Un estudiante asegura que dados un $\overline{PQ}$ y puntos B y C tales que equidistan de los extremos de tal segmento, con seguridad la $\overleftrightarrow{BC}$ es mediatriz del $\overline{PQ}$. Además, afirma que cualquier punto S entre B y C equidista de P y Q. ¿Está de acuerdo con las dos aseveraciones del estudiante? Justifique su respuesta.	Generar e instaurar el T. de equidistancia en el espacio, importante para la demostración del T. Fundamental de la perpendicularidad.	18
Tarea Extraclase 9 [TE9]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Demuestre el siguiente teorema que corresponde a la situación que estudiamos al finalizar la clase: **T. Interestancia – Equidistancia en el Espacio:** Sean A, B, X, T puntos no coplanares y ningún trio de ellos colineales, tal que T y X equidistan de A y B. Sea S un punto tal que $X - S - T$; entonces S equidista de A y B.	Demostrar e instaurar el T. Interestancia – Equidistancia en el Espacio	18
Problema Principal 8 [PP8]	**Objetivo**	**Sesión N°**
a) Construya un ΔABC en el plano α y un ΔABD congruente al ΔABC, tal que $D \notin \alpha$. i) Escriba el proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación.	Identificar el criterio por excelencia para determinar que un plano es perpendicular a una recta: una recta es perpendicular a	19

ii) Escriba el proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.). iii) Provea una conjetura que responda la pregunta del problema. iv) Provea una demostración de dicha conjetura [Núcleos y Pilares].	un plano por un punto si dos rectas de este son perpendiculares a la recta dada por dicho punto (T. Fundamental de la perpendicularidad)	
Problema Auxiliar 8.2 [PA8.2]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Para construir el ΔABD del problema anterior, un estudiante propuso la siguiente construcción: i) Construye $\overline{CE}$ altura relativa al $\overline{AB}$ ii) En un plano β que interseca a α en $\overleftrightarrow{AB}$, construye $m \perp \overleftrightarrow{AB}$, m recta, $E \in m$. iii) D punto, $D \in m$, $DE = CE$. a) Represente la situación. b) ¿Se cumple que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$? Justifique su respuesta. c) ¿Existe una relación especial entre una recta y alguno de los planos que se pueden determinar? Si es el caso indique la relación, y cuáles la recta y el plano.	Generar la necesidad del T. Fundamental de la perpendicularidad	19
Tarea Extraclase 10 [TE10]	**Objetivo**	**Sesión N°**
1. Escribir las pruebas de los siguientes teoremas enunciados al finalizar la clase [sesión 19]. **T. Recta-plano perpendicular punto interno** Sea m una recta y A un punto de ella. Entonces existe un plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A. **T. unicidad Plano-recta perpendicular punto interno:** Sea un plano α y un punto A, tal que $A \in \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$. [Lo análogo para los siguientes teoremas: **T. Plano-recta perpendicular punto interno** Sea un plano α y un punto A, tal que $A \in \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$. **T. Recta-plano perpendicular punto interno** Sea m una recta y $A \notin m$. Entonces existe un único plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A. **T. Plano-recta perpendicular punto interno** Sea un plano α y un punto A tal que $A \notin \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$.]	Demostrar los Teoremas respectivos.	19, 20

Se presenta enseguida el análisis didáctico correspondiente a los problemas del bloque expuestos en la Tabla 83. Concretamente, PP7 y su auxiliar (PA7.1) fueron escogidos por dos razones fundamentales, la temática abordada y la gran riqueza desde un punto de vista normativo. Con relación a lo primero, durante con este conjunto de problemas se pretendía introducir la Definición de Recta perpendicular a Plano, objeto clave para el estudio de la Geometría del Espacio. Respecto a lo segundo, hubo la manifestación de varios asuntos normativos relativos al uso del EGD y a la división de labores (responsabilidades) cuando toda la clase es avocada a abordar el problema.

En lo que respecta a PP8, sus auxiliares y tareas extraclase (TE9 y TE10), estos fueron escogidos porque (i) posibilitan una continuidad de contenidos en relación con lo estudiado a raíz de los problemas PP7 y PA7.1, (ii) de ellos emergen diferentes tipos de argumentos y (iii) ilustra muy bien los cambios normativos que se han venido presentado en comparación con los demás bloques analizados, principalmente en lo que respecta a la elaboración de una prueba.

4.4.1 Análisis relativo a PP7 y PA7.1: recta perpendicular a plano

Durante las sesiones de clase 17 la profesora propone los problemas PP7 y PA7.1. El primero de ellos se aborda de manera individual durante 5 minutos aproximadamente y luego por los grupos de estudiantes durante 28 minutos. El análisis colectivo (de toda la clase) correspondiente a tal problema se hace durante las sesiones 17 y 18. En contraste, el problema PA7.1 no se aborda de manera individual o por grupos. Este sólo se trata por toda la clase como parte del análisis colectivo del PP7 que se lleva a cabo en la sesión de clase 18. En relación con este par de problemas, se identifican dos trayectorias didácticas, una relativa a PP7 cuando los grupos de estudiantes abordan el problema de manera autónoma (al respecto, se analizan las producciones de los Grupos B e I), y otra relativa al trabajo de toda la clase en relación con ambos problemas.

4.4.1.1 *Trayectoria didáctica 10: Actividad matemática sobre PP7 – Grupo I y B*

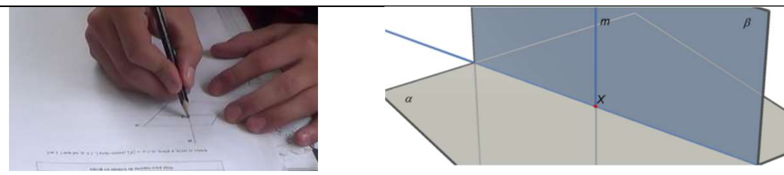
Esta trayectoria tiene dos momentos, un relativo a la actividad del Grupo I y otro relativo a la actividad del Grupo B. Para este caso, las producciones de ambos grupos tendrán resonancia en el trabajo de toda la clase.

Momento 1. Actividad Grupo I: En primera instancia, cada estudiante expone su respuesta que dio al problema (Dados m recta, α plano, $m \cap \alpha = \{X\}$, ¿existe recta l, $l \subset \alpha$, tal que $l \perp m$?) cuando lo abordaron individualmente:

2 Andrés: Yo dije que sí, que puede ser una o… infinitas.
3 Brayan 2: Ah ¿Tocaba responder si o no? Yo más o menos dije que no.
5 Jefferson: Yo dije que sí.

Luego de tales respuestas, particularmente Jefferson y Andrés explican cómo establecieron su respuesta. Brayan 2 se limita a indagarles cuando no comprende alguna de las ideas que platean sus compañeros. La explicación de Jefferson se presenta enseguida. Luego se presenta la interpretación de su explicación:

7 Jefferson: Esta es la recta m, yo pienso que la recta m intersecada con el plano es un único punto. […]. Entonces una recta l en alfa tal que… [hace una representación gráfica en papel de una recta m aparentemente perpendicular al plano dado α (Figura 87):].



a. Representación lápiz y papel b. Representación en Cabri 3D

Figura 87. Representación realizada por Jefferson

Esto sea recto ¿Si o no? [hace la marca de ángulo recto entre la recta m y α] O sea, que sea perpendicular. Yo creo un plano… Si dos rectas distintas se intersecan en un único punto son coplanares [se refiere al plano $\beta_{m.l}$]. O sea, existe un plano que contiene a esas dos rectas [m y l] y ahí las dos van a estar y se van a intersecar o sea la recta si es perpendicular y pues ésta está en ese plano [señala la recta l] pues yo diría que sí.

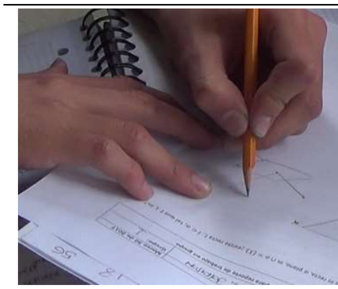
Jefferson propone un procedimiento de construcción (Pr1) para solucionar el problema:

1. Construir una recta m, $m \perp \alpha$ por el punto X.
2. Construir una recta l en α, tal que l contiene X.
3. Construir el plano $\beta_{m.l}$.
4. $l \perp m$ en $\beta_{m.l}$.

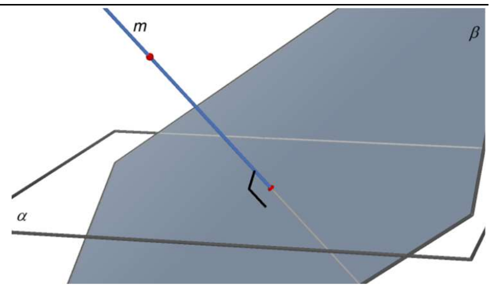
Vale indicar cuatro aspectos de la propuesta de Jefferson: (i) El estudiante está imponiendo una condición especial a la recta m para poder solucionar el problema, esto es, que $m \perp \alpha$. (ii) Asume como válido que cualquier recta en α que contiene al punto X sería perpendicular a la recta m en el plano que las contenga; por eso, su necesidad en determinar $\beta_{m.l}$. (iii) Emplea dos objetos que no estaban instalados en el sistema, a saber, el objeto-proposición *existe una recta perpendicular a un plano por un punto del plano* (Pp1) y el objeto-proposición *si $m \perp \alpha$ por X, entonces toda recta* *en α que contenga a X es perpendicular a m* (Pp2). Y (iv) no emplea el EGD para representar su propuesta; en su lugar, hace una representación gráfica en papel para explicar su procedimiento (L1).

Terminada la intervención de Jefferson, Andrés explica su respuesta. A continuación, se trascribe su intervención; luego se presenta el análisis respectivo:

8. Andrés: Yo lo había pensado así: [representa un plano α y una recta m de forma tal que esta no es perpendicular al plano]. Por esta recta, hay un segundo plano que tiene infinitas rectas perpendiculares [Dibuja el plano perpendicular a la recta m por el punto de intersección de ésta con α y le hace la marca de ángulo recto (Figura 88):]



Representación lápiz y papel



Representación análoga en Cabri 3D

Figura 88. Representación realizada por Andrés

9. Jefferson: A ver, existe la perpendicular en alfa a ésta [señala m] y existe un plano que contiene ambas rectas. Sí, dele clic ahí donde dice perpendicular [dirigiéndose a Brayan 2]
10. Brayan 2: [Realiza la respectiva construcción en el EGD siguiendo los pasos dichos por Andrés. Usa la herramienta *perpendicular* para construir β].
11. Jefferson: Ahora acá en intersección, trace la intersección entre este plano [α] y este plano [β] [señala la pantalla y le da instrucciones a Brayan 2] y luego oculta el plano [β].
12. Andrés: No, no, no. Déjelo ahí o cámbiele color a ese plano.
13. Brayan 2: [Hace la representación de la Figura 89:]

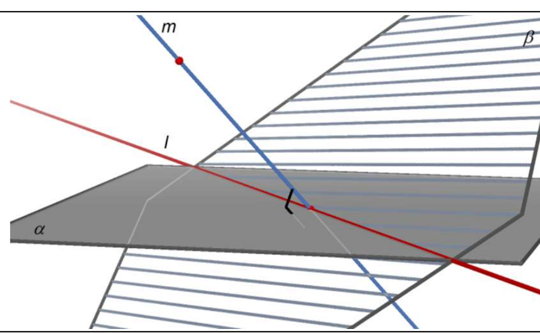


Figura 89. Representación final propuesta por Andrés

		Andrés, pero si uno no sabe que esto se interseca en un ángulo recto [se refiere a que las rectas m y l determinen un ángulo recto].
14.	Andrés:	Yo pensé que… todas las rectas que estén sobre este plano beta van a ser perpendiculares a esta recta.
15.	Brayan 2:	No, solo las que la intersecan [con la recta m]. Las demás no.
16.	Andrés:	Exacto, pero esos planos se intersecan en esta recta. Si pilla, esta [m] recta como está en este plano [β] es perpendicular a esta [l].

Andrés propone un procedimiento de construcción (Pr2) para solucionar el problema que es diferente al sugerido por Jefferson:

1. Construir una recta m que interseca al plano α en el punto X.
2. Construir un plano β tal que $\beta \perp m$ por el punto X.
3. Construir la recta l como intersección de β y α.
4. $l \perp m$.

Cuatro aspectos son destacables de la propuesta de Andrés: (i) A diferencia de la propuesta de Jefferson, Andrés no imponen alguna condición especial a la recta m para poder solucionar el problema. (ii) En lugar de ello, el estudiante propone construir un plano β tal que $\beta \perp m$ por el punto X, y asume como válido que cualquier recta en β que contiene al punto X sería perpendicular a la recta m. (iii) Emplea dos objetos que no estaban instalados en el sistema, a saber, el objeto-proposición *existe un plano perpendicular a una recta por un punto de la recta* (Pp3) y el objeto-proposición Pp2 usada también por Jefferson. Y (iv) a diferencia del caso de Jefferson, además de una representación en papel y lápiz, el grupo lleva a cabo el procedimiento de construcción en el EGD Cabri 3D produciendo una representación dinámica (L2).

Según lo presentado hasta el momento, se puede afirmar que las acciones de los estudiantes están reguladas por la **Norma 7** puesto que han empleado los objetos nuevos *recta perpendicular al plano por un punto del plano* (C1) y *plano perpendicular por un punto de la recta* (C2) en sus procedimientos, Pr1 y Pr2, respectivamente. En lo que concierne al caso de Andrés, dado que se ha empleado Cabri 3D para explicar su propuesta, la actividad de los estudiantes ha estado regulada por la **Norma 12a**. En ese marco, la **Norma 15** se hace presente pues los estudiantes nombran los objetos inmersos en la representación y cambian la aparecían del plano β para visualizar mejor la situación. De igual forma, lo hace la **Norma 16** puesto que usan la herramienta *perpendicular* del EGD para llevar a cabo el paso 2 del Pr2.

Retomando el abordaje del grupo I en cuanto a la solución de PP7, una vez presentadas las propuestas de Andrés y Jefferson, los estudiantes se avocaron a decir cuál camino tomar para hacer el respectivo abordaje. A continuación, se trascribe la interacción respectiva y posteriormente el análisis correspondiente.

34	Brayan 2:	No se miren: Intuimos que existe un plano perpendicular a la recta m, luego como los planos se intersecan en una recta…
35	Andrés:	Que contenga a X [se refiere al plano β].
36	Brayan 2:	Ah, perpendicular por el punto X [escribe en la hoja: $\beta \perp m$ por el punto X]
37	Andrés:	Si beta es ese plano, hay infinitos… hay infinitas rectas [en β perpendiculares a m por X]… Pero ¿cómo demostrar eso?
38	Brayan 2:	[La profesora] ya dijo que no tocaba probar.
39	Andrés:	Ah bueno. Podemos sacar una recta perpendicular [en α] a una recta dada [m].
40	Jefferson:	Esta recta está acá [señala la intersección entre α y β en la Figura 89]. Ustedes dicen que existe una recta, ¿algo así? El plano [β] debe ser perpendicular a esa recta [m]…
41	Andrés:	El plano perpendicular a esa recta [m] es este [señala el plano β].
42	Jefferson:	Exacto. La intersección entre dos planos es una recta.
43	Andrés:	Es una recta.
44	Jefferson:	Y pues esa recta contiene al punto X.
45	Andrés:	Ajá
46	Brayan 2:	Lo que decimos es que este plano existe [señala β] perpendicular por X, entonces que al menos existe esta recta perpendicular que es la intersección entre alfa y este plano que es perpendicular.
47	Jefferson:	Entonces estamos partiendo de que existe el plano perpendicular.
48	Brayan 2:	Intuimos.
49	Jefferson:	Sí
50	Brayan 2:	[Leyendo lo que ha escrito] Intuimos que existe el plano β perpendicular a la recta m que contiene a X… Si fuera, tendríamos infinitas rectas perpendiculares [hace un arrastre de bola de cristal y seña el plano β].
51	Jefferson:	¿Si fuera, tendríamos infinitas rectas perpendiculares?
52	Brayan 2:	Si mire [le indica en la representación Figura 89], todas las del plano perpendicular. Todas las que pasan por X.
53	Jefferson:	Mmmm ya… ya vi. Ya pásela así [se refiere a la hoja que contiene el reporte. Esta finalmente contiene lo siguiente como respuesta: Intuimos que existe un plano β perpendicular a la recta m por el punto X. Los planos se intersecan β y α se intersecan en una recta l. β tiene infinitas rectas perpendiculares a m por X. l sería una recta perpendicular a m y está en α (por la intersección)].

Como se evidencia, es Brayan 2 [34] quien se aventura a escoger una propuesta decantándose por la propuesta de Andrés. Entre estos dos estudiantes intentan explicarle de nuevo el procedimiento Pr2 a Jefferson [35-46, 51-53]. Apoyado en la representación que tiene en el EGD (Figura 89) y en un arrastre de bola de cristal (en correspondencia con las **Normas 18 y 12b**), Brayan 2 parece convencer de la veracidad de la propuesta, de manera más específica, de la proposición Pp2. Con el reporte escrito precisado en [53] los estudiantes producen un argumento global (A1) –ver Figura 90– conformado de un argumento abductivo (Ab1) que precisa la necesidad de algunas proposiciones que no están instaladas en el sistema teórico (*i.e.*, Pp3 y Pp1), y otro deductivo (Ad1) con el cual se infiere la intersección entre dos planos (*i.e.*, β y α se intersecan en una recta l). Con lo anterior, se evidencia la interpretación que dieron los estudiantes a la instrucción de la profesora de no reportar una prueba [38] (*i.e.*, no cumplir con la **Norma 9**): ellos efectivamente no reportaron un argumento formal (una prueba) pero sí produjeron un argumento informal según la **Norma 9a** y con ello, la **Norma 13d**.

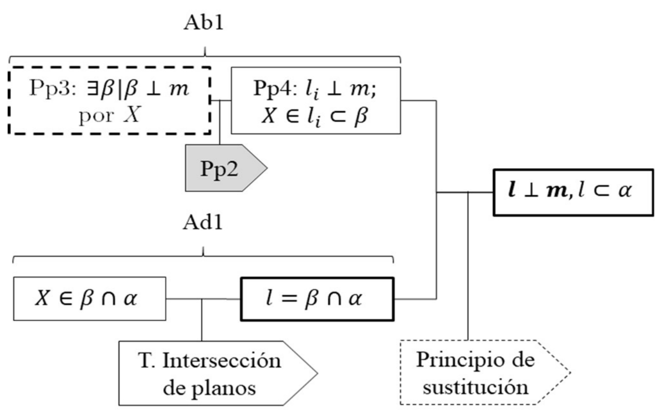


Figura 90. Argumento global A1 asociado a PP7 - Grupo I

Dado que en la interacción entre los estudiantes no es claro por qué Brayan 2 sugiere escoger la propuesta de Andrés, se hizo una breve entrevista a los estudiantes unos minutos antes de que la sesión de clase 18 iniciara. Para ello, se les mostro parte del video correspondiente a la interacción [34 - 53] con el fin de que evocaran lo sucedido (Mackey & Gass, 2005). Una vez ellos observaron el video, tuvo lugar la siguiente entrevista:

1	Inv:	Brayan, tú sugieres seguir la idea de Andrés y perece que descartas la propuesta de Jefferson. ¿Estoy interpretando bien?
2	Brayan 2:	Es que la de… Andrés es más general…
3	Inv:	O sea, sí descartas la de Jefferson…
4	Brayan 2:	Sí.

5	Inv:	Y por qué la descartas y prefieres la de Andrés…
6	Brayan 2:	Es que la de Jefferson parte de una recta que es perpendicular al plano…
7	Inv:	A cuál recta y plano te refieres…
8	Brayan 2:	A m y alfa, los dados. Y pues eso no está dado…
9	Inv:	¿Qué no está dado?
10	Brayan 2:	La perpendicularidad.
11	Inv:	Y qué pasa…
12	Brayan 2:	Es que ese sería un caso apenas, no cualquier recta m… Y Andrés no le pone condiciones…
13	Inv:	Ah, por eso dices que es más general…
14	Brayan 2:	Sí, porque esa [propuesta de Andrés] funciona en todos los casos… la de Jefferson solo cuando [m] es perpendicular.
15	Inv:	Ah ya, ya entiendo. Jefferson, y por qué te dejaste convencer de tus compañeros…
16	Jefferson:	Sí, mi propuesta no funciona siempre y pues…
17	Inv:	Y ¿entendiste lo que ellos te explicaron?
18	Jefferson:	Pues cuando me mostraron lo de Cabri, sí.
19	Inv:	Cómo así…
20	Jefferson:	Pues es que cuando ellos me mostraron la figura vi que la recta de intersección es perpendicular.
21	Inv:	¿Cuál recta?
22	Jefferson:	Ah yaaa… Es que como hicieron un plano [β] perpendicular a la recta [m]… ese plano… tiene en común… se intersecan en una recta [l].
23	Inv:	Se interseca con quien…
24	Jefferson:	Con alfa.
25	Inv:	Ajá. Y…
26	Jefferson:	Y esa recta [l] se veía perpendicular a m.
27	Inv:	Y ¿tomaron medidas? o cómo se dieron cuenta de que eran perpendiculares las rectas [m y l].
28	Andrés:	No, solo hicimos arrastre… el de… ¿cómo es que se dice?
29	Brayan 2:	Bola…
30	Jefferson:	Bola de cristal.
31	Inv:	Andrés, ¿y por qué se te ocurrió ese procedimiento [Pr2]?
32	Andrés:	Es que… que… ese plano, el perpendicular a una recta tiene todas las rectas perpendiculares a la recta.
33	Inv:	Y cómo sabes eso…
34	Andrés:	En Cabri…
35	Inv:	Cuándo… Si todavía no habías usado Cabri para solucionar el problema…
36	Andrés:	Antes… vi esa herramienta…
37	Inv:	Y qué, la usaste o qué…
38	Andrés:	Cacharreando [risas]… pero no la hemos… esto… usado.
39	Inv:	Bien. Gracias.

Es claro que Brayan 2 se decanta por la propuesta de Andrés dado que la considera más general al no precisar un caso particular para la recta m, asunto que sí sucedió con la propuesta de Jefferson [2, 6, 12, 14]. Con lo anterior, se sugiere una norma que provee un criterio para escoger un mejor procedimiento de construcción: *El mejor procedimiento de construcción es el que sea más general, esto es, aquel que no impone condiciones particulares a los objetos dados* (**Norma 51** –metanorma de faceta principalmente epistémica, pues versa sobre un procedimiento–). De otro lado, se ratifica que el procedimiento propuesto por Andrés fue verificado mediante el uso EGD [18, 20, 28], específicamente mediante el uso del arrastre *bola de cristal* sin tomar medidas, y que tal acción fue le mecanismo con el cual fue convencido Jefferson de la certidumbre de dicha propuesta (**Norma 12b**). Así mismo se clarificó la razón por la cual Andrés produjo su propuesta (Pr2) [32-39]; el estudiante previamente se había percatado de la existencia del plano perpendicular por un punto de la recta (Pp3) y de la propiedad que tienen todas las rectas contenidas en él que intersecan a la recta dada (Pp2) mediante una exploración de las herramientas del EGD que hizo con antelación (**Norma 18**).

Momento 2. Actividad Grupo B: En primera instancia, las estudiantes exponen las repuestas que dieron al problema de manera individual. Vanessa dijo que sí mientras que Karen y Mariana respondieron que no se sabe. A diferencia de lo sucedido con el Grupo I, las estudiantes no explican cómo obtuvieron sus respuestas. Se disponen a trabajar conjuntamente para resolver el problema. Vanessa toma el computador y construye los objetos dados en la situación, un plano α y una recta m que lo interseca [10]. Karen dice que se debe construir una recta perpendicular a m que esté contenida en α [11]. En ese momento, ocurre la siguiente interacción:

12	Mariana:	Tienes que crear el plano…
13	Karen:	Con la recta [m] y el punto [un punto P que no está en m].
14	Mariana:	Ajá…
15	Karen:	Crea el plano con esta recta y con este punto, ponle color, eso, eso. ¿Qué pasa ahora?
16	Mariana:	Ahora sí trazas una perpendicular.
17	Vanessa:	[Ha construido el plano que contiene a m y en él, una recta perpendicular a m por el punto X. No han puesto nombre a los objetos, pero sí han cambiado el color de las rectas. Ver Figura 91] Pero no pertenece a alfa.

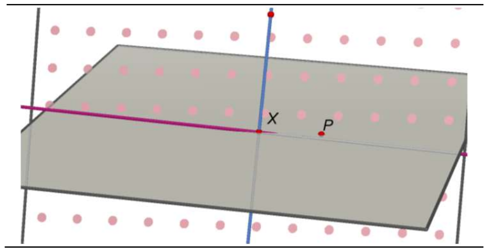


Figura 91. Primera representación PP7 - Grupo B

[...]

24	Karen:	Pero no está del todo contenida en...
25	Vanessa:	En el plano determinado por esta recta y este punto [señala a m y a l], en el de punticos rosados.
26	Mariana:	[Hace arrastres de bola de cristal y arrastre del punto P] Pero sí, hay veces que sí [se refiere a que la recta l, morada en la Figura 91, esté en el plano α].
27	Vanessa:	¿Pero entonces por qué sí? ¿Por qué cosa del sistema teórico?
28	Karen:	¿Y si tratamos de redefinirla a ver qué pasa?
29	Mariana:	¿Redefinir qué?
30	Karen:	La recta morada.
31	Mariana:	No puede redefinirla porque ya la hicimos perpendicular.
32	Vanessa:	O sea que no. No dejaría yo creo.
33	Mariana:	Ahhh...

Hasta ese momento, las estudiantes han promovido un procedimiento (Pr3) que desarrollan en el EGD y que les conduce a la representación dinámica de la Figura 91 (L3). Los pasos de tal procedimiento fueron:

1. Construir una recta m que interseca al plano α en el punto X.
2. Construir un punto P en α que no pertenezca a m.
3. Construir el plano $\beta_{P,m}$.
4. Construir $l \perp m$ por X en $\beta_{P,m}$.
5. Arrastrar el punto P o en bola de cristal para ver si l puede estar contenido en α.

Los primeros cuatro ítems indican una actuación en correspondencia con la **Norma 12a**. Por su parte, el ítem 5 indica una actuación en correspondencia con la **Norma 12b** usando los dos tipos de arrastre disponibles. Al cambiar las apariencias de los objetos se indica la correspondencia con la **Norma 15**. Dado que la acción indicada en el ítem 5 no condujo al resultado esperado, luego de la interacción anterior, las estudiantes se adentran en otro procedimiento (Pr4).

35	Mariana:	[Ha borrado la recta l del Pr3 y construido la recta de intersección entre los planos α y β. Ha nombrado A al punto con el cual se

		construyó la recta m y lo arrastró hasta que m es aparentemente perpendicular con l. Le pasa el computador a Karen]. Mide el ángulo PXA.
36	Karen:	Ya lo mido.
37	Mariana:	El ángulo PXA
38	Karen:	¿PXA?
39	Mariana:	Sí PXA.
40	Karen:	[Toma la medida y hace un arrastre del punto P hasta que la medida del ángulo aparece como 90 (Figura 92)].

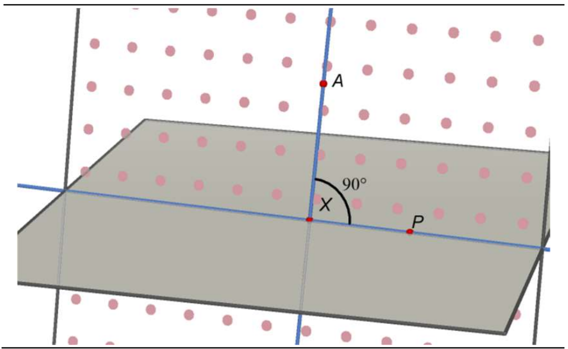


Figura 92. Segunda representación PP7 - Grupo B

41	Mariana:	No es robusta
42	Karen:	¿Le pongo ahí decimales?
43	Vanessa:	Seis [se refiere a la cantidad de decimales. Cuando lo hacen la medida cambia de 90].
44	Mariana:	Toca hacer la construcción robusta a ver si da…
45	Investigador:	¿Y cómo es robusta?
46	Mariana:	Pues ya creando el ángulo de 90
47	Vanessa:	La recta perpendicular a…
48	Mariana:	Al plano.
49	Karen:	Entonces crear una perpendicular por un punto y un plano que la contenga…
50	Vanessa:	Punto X. […] [Escribe en la hoja: Existe en el caso de que la recta que la recta m sea perpendicular al plano]

Mariana ha sugerido otro procedimiento de construcción (Pr4), con la respectiva representación dinámica de la Figura 92 (L4), cuyos pasos son los siguientes [35]:

1. Construir una recta m que interseca al plano α en el punto X.
2. Construir un punto P en α que no pertenezca a m.
3. Construir el plano $\beta_{P,m}$.
4. Construir l como la intersección de α y β.
5. Arrastrar el punto A (con el cual se construyó la recta m) hasta que aparentemente m y l son perpendiculares.
6. Tomar la medida del $\angle AXP$ con seis decimales.

Las estudiantes son conscientes de que su construcción no es robusta pues han realizado un arrastre del punto A (paso 5 del procedimiento) [44]. Echan mano de otra herramienta del EGD, los decimales, para saber la medida exacta del ángulo. Pese a que el resultado obtenido al medir el ángulo no es el esperado, la exploración soportada en el paso 5 las llevó a precisar un procedimiento análogo al Pr1 (propuesto por Jefferson). En síntesis, es su actuación en conformidad con la **Norma 12b** lo que las lleva finalmente a proveer su respuesta al problema PP7 [50].

Este grupo de estudiantes no reportó ningún argumento en su reporte escrito, haciendo caso de la instrucción dada por la profesora. En la hoja que entregan sólo reportan lo dicho en [50] haciendo caso omiso de la **Norma 13**.

4.4.1.2 *Síntesis y breves comentarios trayectoria didáctica 10*

Esta trayectoria se focalizó en la actividad de dos grupos de estudiantes (I y B) cuando abordaron el PP7, un problema de *búsqueda de antecedente*. Desde esta perspectiva, la *práctica* de ambos grupos se concentró en la búsqueda de procedimientos de construcción que los llevara a precisar condiciones para establecer la existencia de una recta l del plano α perpendicular a una recta m dada que intersecaba a dicho plano. En ese marco, el Grupo I produjo dos procedimientos, Pr1 y Pr2, el segundo de los cuales se desarrolló en el EGD Cabri 3D. Tales procedimientos condujeron a sendas representaciones (L1 y L2), la primera estática y la segunda dinámica. Por su parte, el Grupo B produjo tres procedimientos todos desarrollados en el EGD, dos de ellos basados en construcciones blandas (Pr3 y Pr4) con las cuales hicieron exploraciones que las llevó a plantear un procedimiento análogo a Pr1. En consecuencia, tres representaciones dinámicas fueron producidas por este grupo (L3, L4 y L5, esta última análoga a la de la Figura 87b).

El panorama descrito permite establecer que las *situaciones instruccionales* asociadas fueron dos principalmente: *construcción de figuras* y *exploración de una figura*. La segunda de estas fue mayormente enfatizada por el grupo B. Tal grupo exploró con el ánimo de descubrir una situación que las llevara a solucionar el problema; el Grupo I, por su parte, exploró con el ánimo de verificar sus ideas. La Tabla 90 presenta las normas que regularon cada una de las Subprácticas que llevaron a cabo los grupos de estudiantes citados, junto con las situaciones instruccionales correspondientes. De igual manera lo que sucedido en la trayectoria didáctica 8, las Normas 13a, 13b y 13d se cumplieron parcialmente pues los estudiantes, en general, no reportaron todo lo que hicieron (exploraciones, procedimientos de construcción, una conjetura, etc.). De hecho, el grupo B no reportó ninguno de sus procedimientos; se limitó a precisar una condición en la cual podría solucionar el problema (ver línea [50] de la trascripción respectiva).

Tabla 84. PP7–Grupos I y B: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Subprácticas	Normas que las regula	Situación Instruccional asociada
Realización de la construcción en Cabri 3D con el fin de representar las propuestas planteadas como solución a PP7 (Grupo I).	15, 16, 12a, 18, 7, 13a, 51	Construcción de una Figura
Realización de la construcción en Cabri 3D con el fin de representar las condiciones dadas en el problema PP7 (Grupo B).	15, 12a, 18	
Realización de exploración de las representaciones dinámicas (L1-L5), con arrastres de bola de cristal o de puntos (para verificar –Grupo I–; para descubrir –Grupo B–).	12b, 18, parcialmente 13b	Exploración de una figura
Producción de argumentos de las respuestas dadas a las preguntas (Grupo I).	9a, parcialmente 13d	

Los *objetos primarios* involucrados en las subprácticas fueron indicados a lo largo del análisis. En el marco de los cinco procedimientos producidos (Pr1-Pr4) se destacan los objetos-concepto *recta perpendicular al plano por un punto del plano* (C1) y *plano perpendicular por un punto de la recta* (C2); y los objetos-proposición *existe una recta perpendicular a un plano por un punto del plano* (Pp1), *si $m \perp \alpha$ por X, entonces toda recta en α que contenga a X es perpendicular a m* (Pp2) y *existe un plano perpendicular a una recta por un punto de la recta* (Pp3). Vale indicar que C1 fue indicado por ambos grupos, mientras que los demás objetos fueron advertidos sólo por el Grupo I. Así mismo, solo dicho Grupo produjo un argumento global (A1) compuesto de dos argumentos, uno Abductivo (Ab1) y uno deductivo (Ad1). Aunque el Grupo B hizo arrastres para descubrir no es posible asociarle un argumento inductivo puesto que las estudiantes no precisaron un invariante para varios casos; más bien precisaron un caso en que solucionaba el problema (recta m perpendicular al plano α). La Figura 93 muestra la configuración de objetos emergente (cognitiva) de las prácticas asociadas a la trayectoria didáctica 10. Por su parte, la Tabla 85 presenta la cronología de las normas, objetos y situaciones asociadas a la Trayectoria.

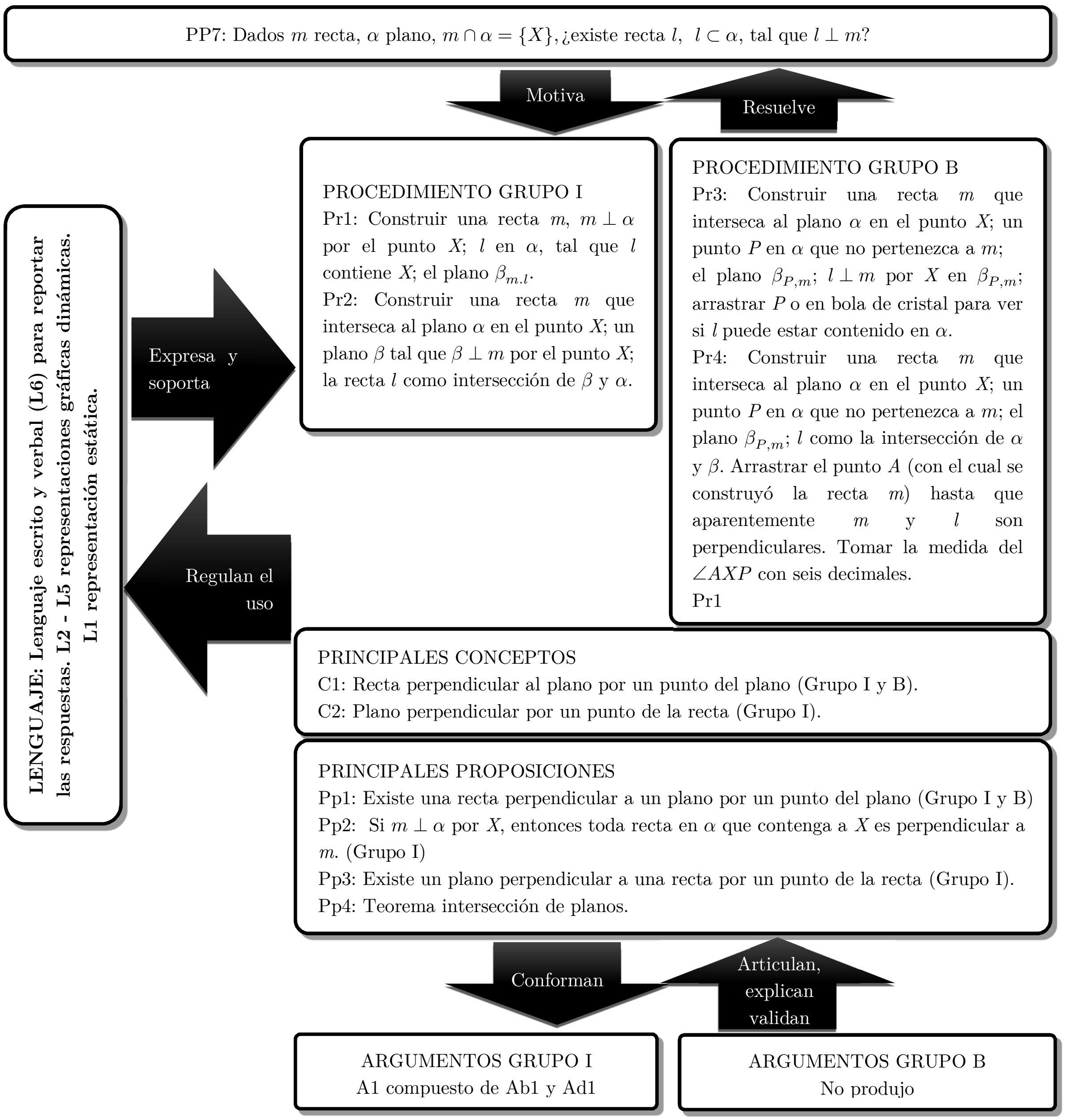


Figura 93. Configuraciones ontosemiótica cognitiva relativa a PP7 –Grupos I y B

Tabla 85. Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 10

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="12">Grupo I</th><th colspan="6">Grupo B</th></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones</td><td colspan="7">Construcción de figura</td><td colspan="5">Exploración de figura</td><td colspan="6">Construcción de figura / Exploración de figura</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Objetos</td><td>Problemas</td><td colspan="18">PP7</td></tr>
<tr><td>Procedimientos</td><td colspan="12">Pr1 Pr2</td><td colspan="6">Pr3 Pr4</td></tr>
<tr><td>Conceptos/Def</td><td colspan="12">C1 C2</td><td colspan="6">C1</td></tr>
<tr><td>Proposiciones</td><td colspan="7">Pp2 Pp3</td><td colspan="5">Pp2 - Pp4
T. Intersección de planos</td><td colspan="6">Pp1</td></tr>
<tr><td>Argumentos</td><td colspan="7"></td><td colspan="5">A1: Ab1 Ad1</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>Lenguajes</td><td colspan="7">L1 L2</td><td colspan="5">L2</td><td colspan="6">L3 L4 L5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Normas</td><td>15</td><td>16</td><td>12a</td><td>18</td><td>7</td><td>13a</td><td>51</td><td>12b</td><td>18</td><td>Parcialmente 13b</td><td>9a</td><td>Parcialmente 13d</td><td>15</td><td>12a</td><td>18</td><td>12b</td><td>Parcialmente 13b</td><td>18</td></tr>
</table>

4.4.1.3 *Trayectoria didáctica 11: Actividad matemática sobre PP7 y PA7.1 - Toda la clase*

En la misma sesión de clase 17, luego de que los estudiantes abordaron PP7, la profesora orquesta la puesta en común de las producciones de los estudiantes. En primera instancia, le pide a Mauricio que explique su propuesta. Ella advierte que él ha respondido que la recta *l* buscada sí existe. Se trascribe la interacción respectiva.

2 Mauricio: Pues tengo una representación con lo que es lo dado [En Cabri 3D tiene el plano base y una recta *m* que lo interseca]. Luego hago una recta en el plano, como una perpendicular [a *m*] y empiezo a buscar [arrastra uno de los puntos con los cuales construyó la nueva recta en el plano base hasta que sea aparentemente perpendicular a *m* (Figura 94)].

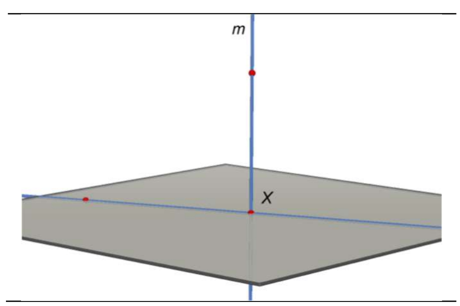


Figura 94. Representación sobre PP7 de Mauricio

3 Profesora: Entonces él lo fue girando [la nueva recta en el plano base] alrededor de esta recta, hasta que encontró el momento en que sí. Lo fue girando. Bueno, gracias. Eso que hace Mauricio es lo que yo hago…claro yo no les estoy pidiendo que me lo construyan ni que me lo justifiquen sino si existe o no. Bueno, siguiendo esa propuesta, yo comencé con una recta en el plano, medí el ángulo [complementa la representación hecha por Mauricio;

llama Z al punto de m, y Y al punto de la recta en el plano base que son diferentes de X (Figura 95)].

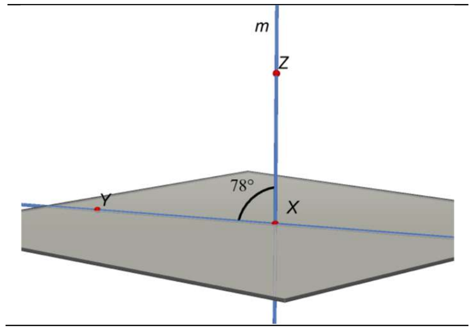


Figura 95. Representación 1 que complementa la de Mauricio

Ahí no me va a dar noventa. ¿Será que si voy moviendo este punto, esta recta…? [señala el punto Y]. Hay infinitas rectas en el plano que contienen a ese punto. Ya ¡La encontré! [Arrastra el punto Y hasta que la etiqueta asociada a la medida del ángulo muestra 90 (Figura 96)].

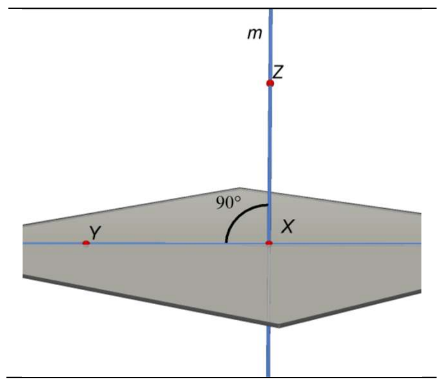


Figura 96. Representación 2 que complementa la de Mauricio

De las infinitas rectas que contiene ese punto hay una que si forma ese ángulo. Luego sí existe. Pero ¿cuál es el problema? Bueno, no sabemos cómo construirla. Ahí logré yo que me diera el ángulo de 90 [hace arrastre de bola de cristal].

La anterior ilustra un procedimiento diferente a cualquiera de los propuestos por los grupos de estudiantes citados en la Trayectoria Didáctica 10, basada en una construcción blanda. En este caso, tal procedimiento (Pr5) tiene los siguientes pasos:

1. Construir una recta m que interseca al plano α en el punto X.
2. Construir una recta l en α que contenga a X.
3. Tomar la medida del $\angle ZXY$ donde Z es el punto con el cual se construyó la recta m, y Y con el cual se construyó la recta l.
4. Arrastrar el punto Y hasta que la etiqueta de la medida del $\angle ZXY$ es 90. No se usan decimales para indicar la medida.

Tanto Mauricio como la profesora actúan en conformidad con las **Normas 12a** y **12b** pues hacen una construcción blanda y se explora haciendo un arrastre de puntos para lograr la propiedad buscada (l y m perpendiculares). Particularmente, la profesora complementa el procedimiento de Mauricio nombrando los objetos empleados (puntos Y y Z) –en correspondencia con la **Norma 15**– y tomando la medida del ángulo en cuestión ($\angle ZXY$) –en correspondencia con la **Norma 12b**–. De la exploración llevada a cabo, insinuada por Mauricio y enriquecida por la Profesora, es fundamentada empíricamente la existencia de la recta l a partir de una sola representación (L7) que, al parecer, se asume como un genérico (*i.e.*, el plano base y la recta m construidos en el EGD representan cualquier plano y recta que lo interseca).

En la sesión de clase 18 se retoma la puesta en común respecto a las producciones asociadas a PP7. La profesora indaga sobre qué otros estudiantes respondieron Sí a la pregunta de tal problema. Alzan la mano los estudiantes del Grupo I, Sebastián, Sandra y Leidy. Específicamente, Sandra y Leidy, quienes hacen parte de un mismo grupo, comentan que intuitivamente creían que sí, pero que no la lograron construir robustamente [6, 8]. Sebastián dice que en su grupo se percataron de la herramienta *perpendicular* y que construyeron un plano perpendicular a m por el punto X (análogo al procedimiento Pr2 propuesto por el Grupo I) [10]. No es desarrollada por completo su idea pues la profesora dice que se está adelantado un poco y que más adelante le permitirá comentarla [11].

Dado el anterior escenario y lo sucedido al término de la sesión de clase 17, se concibió necesario hacer una entrevista colectiva semiestructurada, dirigida a toda la clase. La profesora dejó la clase a cargo del investigador por aproximadamente 23 minutos para desarrollar tal entrevista. La pregunta orientadora dirigida a los estudiantes fue la siguiente [20]:

> Con base en el procedimiento (Pr5) llevado a cabo por Mauricio y la complementación hecha por la Profesora, ¿quedaron convencidos de la existencia de la recta l en el plano α, perpendicular a la recta m?

Específicamente se quería (i) indagar si la exploración citada en tal procedimiento (basada en una única representación) les era suficiente para quedar convencidos de la existencia de tal recta; (ii) precisar las razones por las cuales sí los convencía o no; y (iii) en el caso en que la respuesta a la pregunta fuera negativa, auscultar porqué en su momento no fue cuestionado el proceder de la profesora y se aceptó la existencia del objeto en cuestión.

Se trascribe la interacción producida con base en la entrevista, luego de plantearles la anterior pregunta. Adyacente, se presenta el análisis respectivo:

Trascripción			Análisis
21	Varios:	[Asienten con la cabeza]	Aunque varios estudiantes parecen estar convencidos [21], Sandra es quien habla para advertir que no estaba del todo convencida [25], puesto que la información que le remitió el software con base en sus representaciones (símbolo de marca de ángulo) no indica que el ángulo es recto. La estudiante está actuando en conformidad con la **Norma 12b** pues el software le remite información para descubrir; no obstante, aparece un ingrediente más que tiene que ver con las funcionalidades del software para ganar certeza sobre lo que se descubre o verifica: información provista por el EGD según la marca o símbolo del ángulo.
22	Inv:	¿Por qué quedaron convencidos?	
23	Sandra:	[Alza la mano]	
24	Inv:	Sandra…	
25	Sandra:	Cuando se hizo esa representación en Cabri [L7 asociada a la Figura 96], yo dije eso no es un ángulo recto porque no está marcando el símbolo [se refiere a que la marca de ángulo no se corresponde con el símbolo que indica que el ángulo es recto -un cuadrado-; para este caso, la marca del ángulo es curvo]. Entonces en un principio yo dije ahí [se cumple], pues… dice noventa, pero…	
26	Inv:	O sea, siguieron como con su duda…	El [27] Sandra indica la necesidad de una construcción robusta para garantizar la existencia de la recta en cuestión.
27	Sandra:	Sí, seguimos ahí con que como que no hizo la representación robusta, porque no estaba dando exactamente 90.	
28	Inv:	Pero no le expresaron esa inquietud a la profesora.	En [28] Sandra ratifica que aun cuando duda del proceder de la profesora para garantizar la existencia de la recta, no le comenta algo a la profesora.
29	Sandra:	No… no le dijimos.	

Dado que nadie más cuestionó el actuar de la profesora, se dirigió la entrevista al Grupo B. Esto debido a que las estudiantes habían hecho un procedimiento similar al planteado por la profesora, específicamente en lo que respecta a la exploración basada en la medida de un ángulo. Recuérdese que Vanessa y Mariana vieron necesario poner decimales a la medida del ángulo para verificar que esta fuera exactamente 90; sin embargo, no indicaron la misma instrucción a la profesora para hacer tal verificación. Antes de platear la pregunta al grupo B, se les mostró el video correspondiente a la actividad de las estudiantes (ver líneas 35-49 de la trascripción respectiva), para que ellas evocaran lo sucedido (Mackey & Gass, 2005).

Trascripción			Análisis
30	Inv:	Le voy a preguntar al grupo B, a Mariana y Vanessa. ¿Por qué ustedes le aplicaron ese criterio tan estricto a Karen [no poner decimales a la medida del ángulo] y no se lo aplicaron a la profesora?	Ante la pregunta del Investigador, en [31] Mariana alude a una nueva proposición: si hay una recta perpendicular, esa recta debe ser perpendicular al plano (Pp4). Advierte que probablemente la representación de la profesora la saca de la duda, pero que no sabe por qué no le refutó a la profesora de la misma manera que lo hizo con Karen.
31	Mariana:	Es que yo había tenido en la cabeza que, si hay una recta perpendicular, esa recta debe ser perpendicular al plano. Es posible que, no sé, de pronto al ver la representación de la profe me haya sacado de la duda. No sabría cómo justificarle por qué no dije algo [a la profesora].	

Dado que la respuesta dada por Mariana [31] no proveyó información suficiente, se preguntó a toda la clase *las razones por las cuales aceptaron la evidencia dada por la profesora* [32]. Sandra y Andrés proveyeron una respuesta:

Trascripción			Análisis
33	Sandra:	No, pues como que uno sabe que va a algo más… no se queda ahí, sino que va… no sé yo a veces me quedo expectante a qué va a decir luego. Como bueno ahí está así, pero vamos a ver si [la profesora] le cambia… la hace más robusta para que dé exactamente 90.	En la respuesta de Sandra se vislumbra una expectativa de la estudiante respecto a lo que la profesora haría; de manera específica, Sandra esperaba que la profesora hiciera una construcción robusta que ratificara la observación.
34	Andrés:	Yo me quedo con la duda, de por qué en la representación se ve curva si habíamos dicho que para el recto es el cuadrito, la representación; además no sacamos todas las décimas [se refiere a poner más décimas a la medida del ángulo]. Aunque en la práctica no se vea claro, si se puede evidenciar por lo que vemos… O sea, el programa se puede equivocar por unas décimas, pero da indicios y en la teoría puede existir el objeto que estamos buscando.	El estudiante comenta que dudaba de la representación pues la marca de ángulo no era un cuadrado (respuesta análoga a la dada por Sandra en [25]). Advierte Andrés que, aunque algunas veces el software falla por algunas décimas, da indicios de alguna propiedad, de la existencia de un objeto para este caso, que debe ser demostrada desde la teoría.

Con base en las respuestas dadas por ambos estudiantes, en donde, por un lado, se tiene la expectativa de que la profesora haga un algo más (una construcción robusta para este caso), y por otro, se confía que la teoría permite probar la existencia del objeto sugerida de manera empírica por el EGD, se vio pertinente hacer la siguiente pregunta (última de la entrevista) a los estudiantes [35]:

¿A quién le queda la responsabilidad de mostrar que en la teoría sí se puede? O sea, ustedes estaban esperando que la profe hiciera la prueba o se les ocurrió a ustedes hacerlo…

Dos estudiantes proveyeron una respuesta. Estas se trascriben a continuación:

		Trascripción	Análisis
36	Laura:	Nosotros como propuesta…o sea queríamos como la construcción robusta, como decir acá están las rectas que sí cumplen eso, y así, que sea demostrado. Es que hasta que no hagamos la [construcción] robusta, no tenemos cómo demostrar y no estamos seguros de que eso va a pasar.	Dos asuntos son advertidos en la respuesta de Laura: (i) Los estudiantes tienen la responsabilidad de proveer ideas para hacer la prueba; esto no necesariamente es responsabilidad de la profesora (en correspondencia con la **Norma 29**). Y (ii) los pasos de una construcción robusta proveen ideas para hacer la prueba (en correspondencia con la **Norma 31**).
38	José:	Pues yo, digamos, cuando me dieron la hoja de trabajo individual pues yo traté de escribir una demostración ¿sí?, Pues me quedó mal, después ya vi que me quedó mal.	Ratifica que los estudiantes tienen la responsabilidad de proveer ideas para hacer una prueba (en correspondencia con la **Norma 29**).

Varios aspectos normativos salen a luz con base en las respuestas provistas por los estudiantes luego de implementada la entrevista:

1. No todos los estudiantes quedaron convencidos de la existencia de la recta l en cuestión a partir del procedimiento empleado por la profesora. Fundamentaron su no convencimiento en el uso del EGD, ya sea porque la marca del ángulo utilizado no se representa como un cuadrado (convención que indica que es recto) [25, 34] o porque no es usada la función de ampliar los decimales de la medida del ángulo para verificar su exactitud [34]. Aunque los estudiantes son conscientes de que el EGD permite descubrir propiedades (**Norma 12b**) hay indicios provistos por el mismo Entorno que no les deja convencidos por completo.
2. Aun cuando algunos estudiantes no quedaron convencidos a partir del procedimiento de la profesora, una razón fuerte por la cual no fue objetada es que algunos estudiantes esperan que ella, posterior a una exploración empírica (sugerida por los estudiantes), aluda a algo más, a una construcción robusta, por ejemplo [33]. Los estudiantes actúan en correspondencia con una norma según *la cual la profesora debe hacerse cargo de proveer ideas nuevas cuando los estudiantes están estancados* (complementación de la **Norma 19**).
3. De las respuestas de los estudiantes, tres aspectos parecen ser suficientes para que los estudiantes queden convencidos de la existencia de un objeto (**Norma 52**, de fase esencialmente epistémica): (i) Realización de una construcción

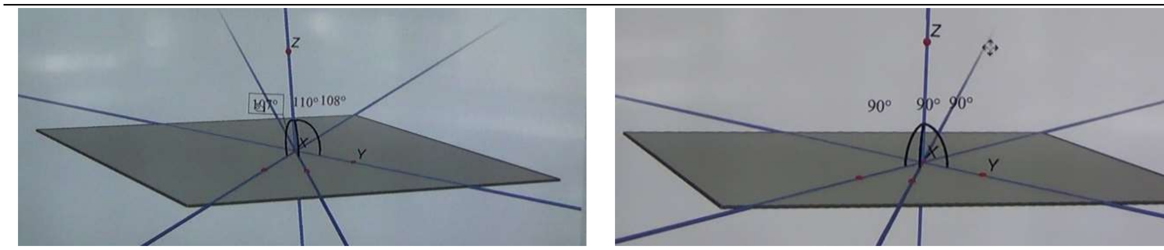
robusta del objeto en cuestión [27, 33, 36], (ii) realización de la prueba de existencia [34], y (iii) realización, por parte de la profesora, de una exploración basada en una construcción blanda que sugiera la existencia del objeto [21]. Los dos primeros asuntos están relacionados con normas previamente indicadas, pues aluden implícitamente a la **Normas 31** y **39** (una prueba de existencia se fundamenta en la los pasos de la construcción robusta y cada paso debe sustentarse con objetos del sistema). El ítem iii se puede ver como una complementación de la **Norma 21**; la profesora no solo se encarga de precisar cuál conjetura es digna de ser probada, *también de considerar cuál exploración es suficiente para determinar una propiedad plausible.*

4. Parece claro que no recae en la profesora la responsabilidad de proveer ideas para hacer una prueba; los estudiantes también tienen parte en ello (en correspondencia con la **Norma 29**).

Pasado el momento de la entrevista, la profesora retoma la clase aludiendo a las producciones de los estudiantes asociados a PP7 y a aspectos surgidos de la entrevista. Textualmente advierte lo siguiente [40]:

> Entonces qué pasa con esta tarea. Qué ustedes, algunos, querían una construcción robusta y no la encontraban. Algunos ni siquiera recurrieron a hacer una construcción blanda. Recuerden que las construcciones blandas son importantes porque las construcciones blandas le ayudan a uno a saber si algo puede o no suceder. Y después viene la etapa de preguntarse uno ¿cómo hago la construcción robusta?

La profesora advierte la importancia de las construcciones blandas parea explorar para descubrir propiedades (**Norma 12b**). Precisa que luego de ello viene el momento de preguntarse por la construcción robusta. Desde esta perspectiva, pide a Sebastián o algún miembro del Grupo I que exponga su procedimiento (Pr2). Andrés atiende la invitación, conecta su computador y replica cada paso del procedimiento en el EGD y verbaliza lo que van haciendo. Al término de su exposición, la profesora comenta que *todo depende de la existencia de un plano perpendicular a una recta por un punto dado* (Pp3) [45] y avala el procediendo (**Norma 19**). En ese momento, la profesora hace la pregunta asociada a PA7.1 (¿Cómo lograr que la recta m [dada en el PP7] sea perpendicular al plano α ?) No da espacio para que los estudiantes trabajen sobre el problema autónomamente. Ella retoma la representación de la Figura 96 y la manipula (**Norma 19**). Con respecto a tal representación comenta que la recta m está "chuequísima", es decir, oblicua respecto al plano. Dice que para que tal recta fuese perpendicular al plano “tendría que enderezarla un poco y, para lograrlo, hacer otras rectas en el plano [α] que pasen por X” [46]. Complementa la representación siguiendo los siguientes pasos (Pr6): (i) Hace tres rectas con dichas condiciones produciendo un diagrama dinámico similar al de la Figura 97a. (ii) Toma la medida de los ángulos determinados por la recta m (o $\overleftrightarrow{XZ}$) y las otras rectas del plano α. (iii) Empieza a mover el punto Z hasta lograr que la etiqueta de la medida de cada uno de los ángulos indicados sea 90. Al lograrlo (ver Figura 97b) hace un arrastre de bola de cristal para ilustrar que la recta se ve perpendicular al plano. En ese momento, la profesora menciona lo siguiente [46]:



a. Construcción rectas en α por X

b. Ángulos de medida 90 determinados por las rectas en α y m

Figura 97. Representación que apoya la búsqueda de $m \perp \alpha$

> Si hago que todos los ángulos sean de 90 me queda la relación [de perpendicularidad] que yo espero entre la recta y el plano. Entonces esa va a ser nuestra definición de perpendicular recta a plano. Una recta es perpendicular al plano si forma un ángulo de 90 con todas las rectas. Definición [escribe en el tablero]: D. Recta perpendicular a plano: una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas del plano que contienen al punto de intersección de la recta y el plano.

Con tal intervención se puede decir que la profesora empleó la pregunta PP7.1 y la representación dinámica (L8) surgida del Pr6 para introducir la *definición de recta perpendicular a un plano* objeto que se corresponde con Pp2, y que durante este bloque se identificará con C3 (actuó en correspondencia con las **Norma 18** pues usa el EGD para hacer ostensivo un objeto; y parcialmente con la **Norma 40** ya que explicitó la definición del objeto –**Norma 38**–, pero faltó probar su existencia).

Luego de introducir dicha definición (C3), pregunta a toda la clase por qué el procedimiento (Pr2) sugerido por Sebastián y el Grupo I funciona [46]. Sebastián le responde [47] proveyendo un argumento deductivo –Ad2– (Figura 98):

Pues… al buscar la intersección de ese plano [$\beta \perp m$ por X] con el plano alfa, pues ahí estaba creada la recta l por el teorema intersección planos. Entonces esa recta [l] está en ambos planos. Y esa recta [l] es perpendicular a m por lo que… por la definición [de recta perpendicular al plano].

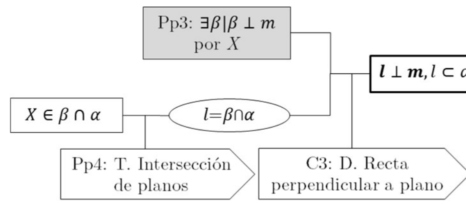


Figura 98. Ad2 provisto por Sebastián

La profesora valida el argumento provisto por el estudiante y advierte la necesidad de probar la existencia del plano β (Pp3), pero también de una recta perpendicular a un plano (Pp1). Dice que las pruebas de tales existencias (enunciadas en Pp3 y Pp1) es una tarea que deben emprender y que es el camino para recorrer en adelante [47] (en correspondencia con las **Normas 16** y **39**).

4.4.1.4 ***Síntesis y breves comentarios trayectoria didáctica 11***

Esta trayectoria se focalizó en la actividad de toda la clase respecto a los problemas PP7 y PP7.1 (ambos de *búsqueda de antecedente*), y una entrevista semiestructurada para indagar sobre algunas actuaciones de los estudiantes sobre el proceder de la profesora. Con relación a PP7, la *práctica* se concentró, en estudiar la propuesta de solución de Mauricio, complementada luego por la profesora; luego se abordó la propuesta del Grupo I y Sebastián. Con respecto a lo primero, surgió el Pr5 (diferente a los propuestos por los grupos B e I) y la respectiva representación dinámica (L7 –Figura 96–); tal procedimiento solo utilizó una posición para la recta m y no empleó la función de decimales para indicar la medida del ángulo determinado por las rectas l y m. Dado que Pr5 fue considerado suficiente por la profesora para establecer empíricamente tal existencia y no fue cuestionado por los estudiantes, se consideró pertinente hacer una entrevista colectiva semiestructura para indagar al respecto. La Tabla 86 ilustra las preguntas realizadas y las conclusiones obtenidas de las respuestas dadas por los estudiantes.

Tabla 86. Entrevista y conclusiones de las respuestas

Pregunta 1. *Con base en el procedimiento (Pr5) llevado a cabo por Mauricio y la complementación hecha por la Profesora, ¿quedaron convencidos de la existencia de la recta l en el plano α, perpendicular a la recta m?*
Conclusión. No todos los estudiantes quedaron convencidos de la existencia de la recta l en cuestión a partir del procedimiento empleado por la profesora. Fundamentaron su no convencimiento en el uso del EGD, ya sea porque la marca del ángulo utilizado no se

representa como un cuadrado (convención que indica que es recto) o porque no es usada la función de ampliar los decimales de la medida del ángulo para verificar su exactitud. Aunque los estudiantes son conscientes de que el EGD permite descubrir propiedades (Norma 12b) hay indicios provistos por el mismo Entorno que no les deja convencidos por completo. Tres aspectos parecen ser suficientes para que los estudiantes queden convencidos de la existencia de un objeto (Norma 52 nueva, de fase esencialmente epistémica): (i) Realización de una construcción robusta del objeto en cuestión, (ii) realización de la prueba de existencia, y (iii) realización, por parte de la profesora, de una exploración basada en una construcción blanda que sugiera la existencia del objeto. Los dos primeros asuntos están relacionados con normas previamente indicadas, pues aluden implícitamente a la Norma 31 (una prueba de existencia se fundamenta en la los pasos de la construcción robusta). El ítem iii se puede ver como una complementación de la Norma 21; la profesora no solo se encarga de precisar cuál conjetura es digna de ser probada, también de considerar cuál exploración es suficiente para determinar una propiedad plausible.

Pregunta 2. ¿Cuáles fueron las razones por las cuales aceptaron la evidencia dada por la profesora?

Conclusión. Una razón por la cual no fue objetado el proceder de la profesora es que algunos estudiantes esperan que ella, luego de una exploración empírica sugerida por los estudiantes, aluda a algo más, a una construcción robusta, por ejemplo. Los estudiantes actúan en correspondencia con una norma según la cual la profesora debe hacerse cargo de proveer ideas nuevas cuando los estudiantes están estancados (complementación de la Norma 19).

Pregunta 3. ¿A quién le queda la responsabilidad de mostrar que en la teoría si se puede [probar la existencia de un objeto]?

Conclusión. Parece claro que no recae en la profesora la responsabilidad de proveer ideas para hacer una prueba; los estudiantes también tienen parte en ello (en correspondencia con la Norma 29).

Con relación a lo segundo, Sebastián, empleando el EGD, expuso un procedimiento análogo a Pr2 (sugerido por el Grupo I). Precisamente, tal procedimiento es avalado por la profesora como una construcción robusta que soluciona el PP7. A su vez, fue avalado el argumento de estructura deductiva Ad2 (Figura 98) producido por Sebastián para soportar la existencia de la recta l en cuestión. Por su puesto, la profesora advierte la necesidad de probar Pp3 (existe un plano perpendicular a una recta por un punto de la recta) para que tal argumento sea totalmente deductivo.

La *práctica* relativa a PP7.1 se centró en una exploración empírica en EGD hecha por la profesora, en busca de condiciones para que una recta (m) sea perpendicular a un plano (α). En ese escenario produce el procedimiento Pr6 y la respectiva representación dinámica (L8). Como consecuencia de esta práctica emergió C3 (definición de recta perpendicular a plano), usada en el Ad2.

El panorama descrito permite establecer que las *situaciones instruccionales* asociadas a las prácticas fueron tres principalmente: *construcción de figuras*, *exploración de una figura* e *instalación* (parcial) *de un concepto*. Los procedimientos citados (Pr2, Pr5 y Pr6) ponen de manifiesto tales situaciones, la segunda de estas mayormente enfatizada por la profesora mediante Pr5 y Pr6; por su parte, Pr2 es una construcción robusta del objeto en cuestión (recta $l \subset \alpha$, $l \perp m$ por X). A través del Pr6 la profesora ve la ocasión de instalar C3 parcialmente: define recta perpendicular a plano, pero falta probar su existencia. Aunque hubo la producción de un argumento de estructura deductiva (Ad2), no hubo ocasión de una *situación de elaboración de una prueba* puesto que Pp3 no había sido instalada en el sistema y aunque la profesora lo advirtió no explícito una intención de instalar como teorema la existencia de la recta l en cuestión (**Norma 9a**).

La Tabla 87 presenta las normas que regularon cada una de las prácticas llevadas a cabo durante la trayectoria y las situaciones instruccionales asociadas. Se resaltan en negrilla las normas nuevas y las normas que tuvieron una complementación en su enunciado. La Tabla 88 presenta los enunciados de tales normas indicado en cursiva lo que complementa las normas ya existentes.

Tabla 87. PP7, PP7.1–Toda la clase: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Prácticas	Normas que las regula	Situación Instruccional asociada
Realización de la construcción en Cabri 3D con el fin de representar las propuestas planteadas como solución a PP7 (Pr2 y Pr5).	Pr5, Pr6: 15, 12a, 13a Pr2: 13a, 15, 16, **19**, 39, 9a	Construcción de una Figura
Realización de exploración de las representaciones dinámicas (L7-L8), con arrastres de bola de cristal o de puntos para PA7.1.	Pr5, Pr6: 15, **12b**, 18, **19**	Exploración de una figura
Implementación entrevista semiestructurada.	Pr6: 18, **19**, 38 parcialmente 40, 29 **52**, 31, **21**, 39	Instalación de un concepto

Tabla 88. Normas nuevas o complementadas

12b	Complemento: Usa la exploración (medir, arrastrar) en EGD de la situación involucrada en el problema para verificar o descubrir. *Ciertas funciones del EGD ayudan a establecer con mayor precisión lo que se descubre o verifica* (*e.g., decimales para las medidas de ángulo, marcas de ángulo específicas que indican cierta información, arrastre de bola de cristal*).
19	Complemento: La profesora se encarga de hacer correcciones de fondo y forma respecto a los procedimientos de construcción que los estudiantes proveen como solución de un problema. Ella, finalmente, escoge aquellas que son consideradas como correctas. Además, *debe hacerse cargo de proveer ideas nuevas cuando los estudiantes están estancados*.
21	Complemento: La profesora se encarga de precisar cuáles son las conjeturas que podrían ser probadas luego de llevarse a cabo un estudio conjunto entre ella y los estudiantes sobre aquellas conjeturas propuestas como solución a un problema. *Además, se encarga también de considerar cuál exploración es suficiente para determinar una propiedad plausible.*
52	Nueva: Tres aspectos son suficientes para que los estudiantes queden convencidos de la existencia de un objeto: (i) Realización de una construcción robusta del objeto en cuestión [27, 33, 36], (ii) realización de la prueba de existencia [34], y (iii) realización, por parte de la profesora, de una exploración basada en una construcción blanda que sugiera la existencia del objeto [21]

Los *objetos primarios* involucrados en las prácticas han sido presentados a lo largo de esta síntesis. Vale indicar que, respecto al lenguaje, los pasos de todos procedimientos (Pr2, Pr5 y Pr6) fueron expresados sólo de manera verbal y representados en el EGD (L7, L8). Así mismo, aunque fue avalado un argumento deductivo por parte de la profesora (Ad2), no fue usado algún formato escrito para presentarlo. Todas las expresiones verbales emplearon el leguaje geométrico apropiado siguiendo la **Norma 5b.1** (L9) trasversal a todas las prácticas. La Figura 99 muestra la configuración de objetos emergente (epistémica) de las prácticas asociadas a la trayectoria didáctica 11. La Tabla 89 presenta la cronología de normas, objetos y situaciones asociadas a la Trayectoria.

Tabla 89. Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 11

<table>
<tr><th colspan="2">Situaciones</th><th colspan="7">Construcción de figura / Exploración de figura</th><th colspan="9">Instalación de concepto</th><th colspan="6">Construcción de figura</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Objetos</td><td>Problemas</td><td colspan="7">PP7</td><td colspan="9">PP7.1</td><td colspan="6">PP7</td></tr>
<tr><td>Procedimientos</td><td colspan="7">Pr5 Pr6</td><td colspan="9">Pr6</td><td colspan="6">Pr2</td></tr>
<tr><td>Conceptos/Def</td><td colspan="22">C3</td></tr>
<tr><td>Proposiciones</td><td colspan="7">Pp4</td><td colspan="9"></td><td colspan="6">Pp3 Pp4</td></tr>
<tr><td>Argumentos</td><td colspan="7"></td><td colspan="9"></td><td colspan="6">Ad2</td></tr>
<tr><td>Lenguajes</td><td colspan="7">L7 L8</td><td colspan="9">L8</td><td colspan="6">L2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Normas</td><td>12a</td><td>12b</td><td>15</td><td>19</td><td>7</td><td>13a</td><td>51</td><td>18</td><td>19</td><td>Parcialmente 40</td><td>38</td><td>29</td><td>52</td><td>31</td><td>21</td><td>39</td><td>13a</td><td>15</td><td>16</td><td>19</td><td>39</td><td>9a</td></tr>
</table>

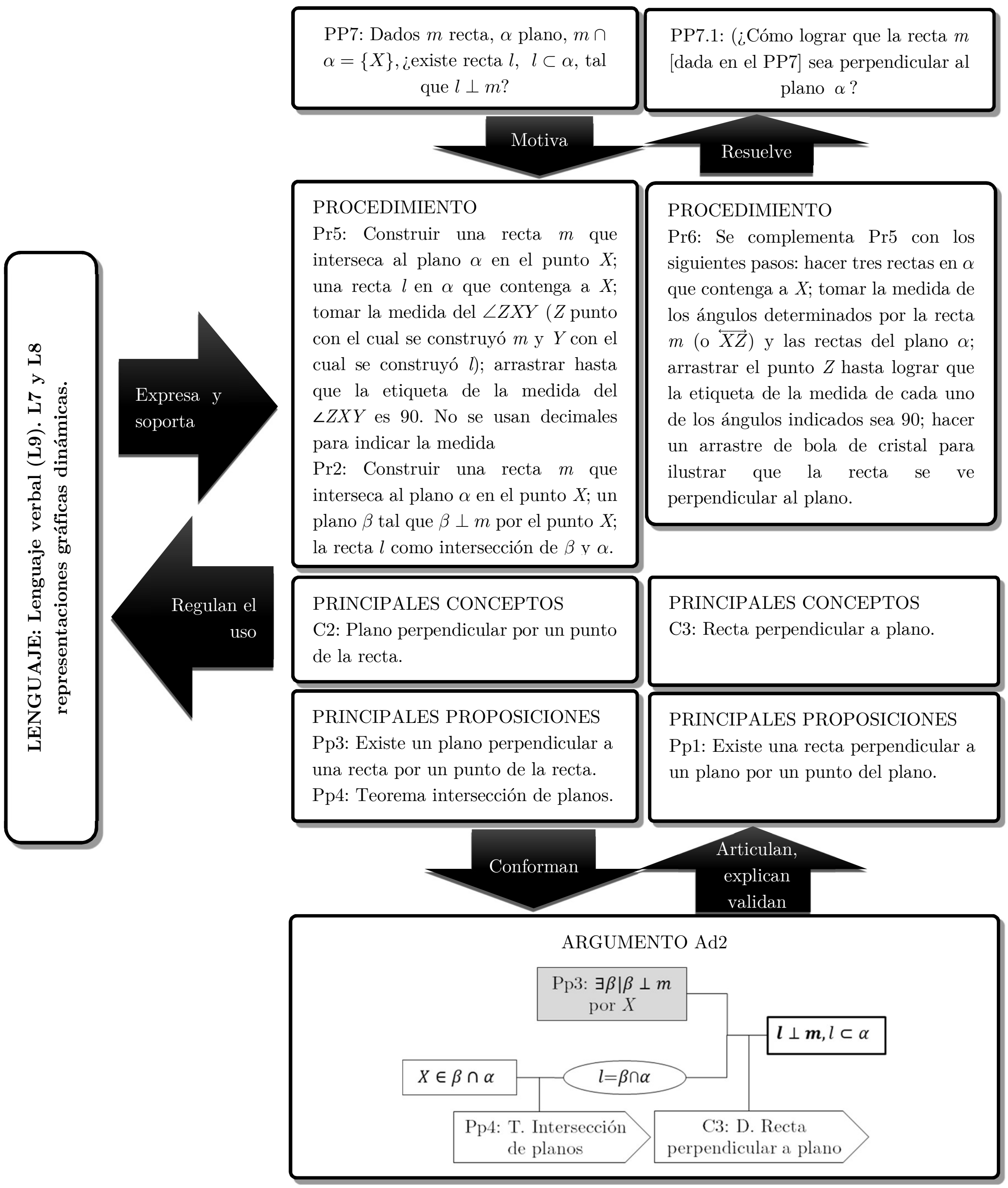


Figura 99. Configuraciones ontosemióticas epistémicas relativas a la Trayectoria 11: PP7 y PP7.1 –Toda la clase–

Al hacer la comparación entre las configuraciones cognitiva y epistémica asociadas al PP7 y PP7.1 ilustradas con las Figuras 93 y 99, se puede decir que no todos los procedimientos realizados por los Grupos I y B fueron tenidos cuenta; en sentido estricto solo Pr2 (del grupo B). En comparación con el procedimiento Pr5 realizado ante toda la clase por Mauricio y la Profesora, los demás procedimientos de dichos grupos sólo tuvieron en común el hecho de ser construcciones blandas en donde se llevaron a cabo arrastres (bien sea de bola de cristal o de las rectas involucradas –*m* o *l*–) y toma de medidas de un ángulo específico (el determinado por tales rectas). En ese sentido, aunque las principales proposiciones aparecen en ambas configuraciones, algunas emergen en momentos diferentes: en ambos casos, Pp3 y Pp4 surgen a partir de Pr2. Pero Pp1 y Pp2 (o C3) surgen a partir de procedimientos disímiles: con base en Pr1 o Pr4 en la práctica de los grupos, y con base en Pr6 en la actividad de toda la clase. De otro lado, si se comparan los argumentos de cada configuración se evidencia que, esencia, estos articulan los mismos objetos. Su diferencia radica en el hecho de que Pp3 aparece como resultado de un argumento abductivo en el argumento producido por el Grupo I (configuración cognitiva) mientras que en el argumento expuesto ante toda la clase –Ad2– (configuración epistémica), y avalado por la profesora, dicha proposición se asume como verdadera explicitándose que esta debe ser probada a corto plazo.

Dado el anterior escenario, se concibió necesario hacer una breve entrevista a la profesora para indagar dos aspectos principalmente (entrevista llevada a cabo antes de iniciar la sesión de clase 19). Las preguntas y respuestas correspondientes se trascriben a continuación:

> *Pregunta* 1: A diferencia de las anteriores ocasiones ¿por qué en esta ocasión no fueron abordadas las propuestas de solución a PP7 de todos los grupos de estudiantes?
>
> *Respuesta*: El tiempo no permitía abordar todas las respuestas. Según mi observación de todos los grupos cuando abordaban el problema, creo que la de Mauricio se acercaba a lo que habían hecho los otros grupos; bueno, Andrés [del Grupo I] y Sebastián hicieron algo distinto, la construcción robusta que funciona. Mauricio hizo una construcción blanda como casi todos: puso una recta *l* y la empezó a mover hasta que la vio perpendicular a *m*… y en alfa, en el plano alfa… bueno… yo le puse la medida del ángulo [determinado por las rectas *l* y *m*] pues él no lo hizo. Y pues… eso era suficiente para que todos se dieran cuenta que la recta que necesitábamos [la recta *l*] sí existía. Y ganaba tiempo… porque se nos está acabando y no hemos abordado mucho del espacio.

> *Pregunta* 2: ¿Por qué para esta ocasión no les exigió a los grupos de estudiantes que proveyeran una conjetura-solución y su respectiva justificación? ¿Por qué en la actividad de toda la clase no se escribió la prueba provista por Sebastián?
>
> *Respuesta*: También por tiempo. Con este problema [PP7] yo quería que ellos se dieran cuenta que no es suficiente una única recta [l] de alfa perpendicular a m para decir que… m, la recta m es perpendicular al plano [alfa]. Yo no quería que probaran la existencia de esa recta [l] porque eso no será teorema del sistema, mejor dicho… En cambio, como hicimos, sí era importante introducir… la definición… de recta perpendicular a plano. Por esa misma razón no escribimos la prueba formal… la de Sebastián. No todo se prueba, y a veces es mejor avanzar en tema que detenernos a probar todo. En este caso, yo quería que pasáramos a estudiar… cómo probar que el plano existe… el perpendicular a una recta [Pp3] y que la recta perpendicular al plano existe también [Pp1].

De las respuestas de la profesora se explicita que el tiempo empieza a ser un recurso importante: para este caso no se hizo la puesta en común de las producciones de todos los grupos ni se hace un reporte escrito de una prueba formal porque se prefiere ganar tiempo para abordar contenidos que se conciben importantes curricularmente, para este caso, instalar Pp3 y Pp1 (en correspondencia con la **Norma 11**). En lo que respecta al primer asunto, a criterio de la profesora, la solución de Mauricio era representativa de lo hecho por otros grupos diferentes al Grupo I y el de Sebastián, y le permitía mostrar lo que necesita introducir; esto es, la definición de recta perpendicular a plano (C3).

Ahora bien, el hecho de que la profesora no hubiese abordado todas las propuestas de los estudiantes ni exigido una prueba, no impidió que los objetos involucrados en una configuración u otra fueran los mismos en esencia. Para este caso, la realidad le dio la razón a la profesora y, de alguna forma, justifica que su decisión fue acertada.

4.4.2 Análisis relativo a PP8 y sus auxiliares: teorema interestancia - equidistancia en el espacio

En la búsqueda de ir allanando el camino para instalar Pp1 y Pp3, específicamente de tener los objetos en el sistema teórico para poder elaborar las respectivas pruebas, la profesora propuso un conjunto de problemas cuyas soluciones deseadas proveyeran los objetos faltantes. Así las cosas, fue propuesto el PP8 (y luego PP8.2) cuyo propósito era generar la necesidad de introducir el *T. Fundamenta de la* *perpendicularidad*[53], proposición clave para probar Pp1 y Pp3. Con el propósito de generar la necesidad de introducir el *T. Interestancia–Equidistancia en el Espacio*[54], objeto clave para probar *T. Fundamenta de la perpendicularidad*, la profesora propuso el problema PP8.1 (y luego TE9). Finalmente, la solicitud de las pruebas de las proposiciones en cuestión (Pp1 y Pp3) fue hecha mediante la tarea extraclase TE10.

En lo que sigue se presenta el análisis didáctico de asociado a los problemas, siguiendo el orden cronológico en el que la profesora los fue proponiendo: PP8.1, TE9, PP8, PP8.2 y TE10.

4.4.2.1 *Trayectoria didáctica 12: Actividad matemática sobre PA8.1– Grupos I y B*

En la sesión de clase 18 la profesora propone el problema PP8.1, cuyo enunciado se recuerda:

> PA8.1: Un estudiante asegura que dado un $\overline{PQ}$ y puntos B y C tales que equidistan de los extremos de tal segmento, con seguridad la $\overleftrightarrow{BC}$ es mediatriz de $\overline{PQ}$. Ademas, afirma que cualquier punto S entre B y C equidista de P y Q. ¿Está de acuerdo con las dos aseveraciones del estudiante?

Durante aproximadamente 10 minutos los grupos de estudiantes abordan el problema de manera autónoma. La profesora ocasionalmente pasa por cada grupo para saber lo que cada grupo está realizado. Da la instrucción de abrir un archivo en Cabri 3D (llamado "Equidistancia dos puntos") que ellos pueden usar para hacer la exploración. Este archivo muestra una construcción blanda en la que los puntos B y C equidistan de los puntos P y Q (Figura 100).

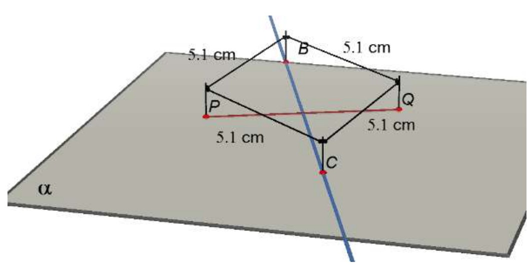


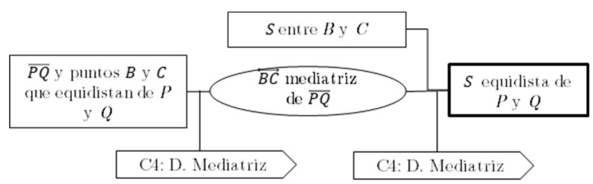
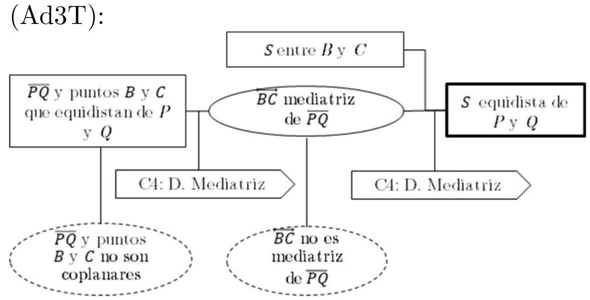
Figura 100. Archivo provisto por la profesora para PP8.1

[53] Dado que $m \perp n$ por X y $m \perp l$ por X; m, l y n rectas, $n, l \subset \alpha$, entonces $m \perp \alpha$ por X.

[54] Sean A, B, X, T puntos no coplanares y ningún trio de ellos colineales, tal que T y X equidistan de A y B. Sea S un punto tal que $X - S - T$; entonces S equidista de A y B.

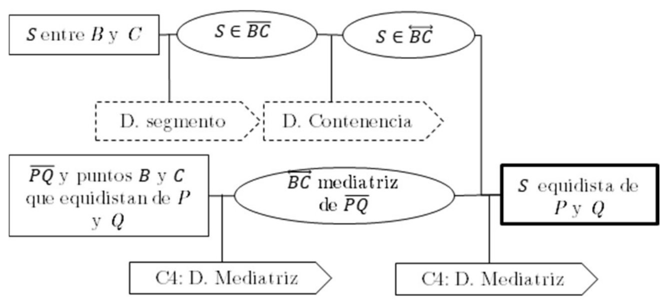
A continuación, se trascriben episodios de la interacción de los dos grupos que fueron videograbados. Estos episodios se corresponden con las principales discusiones que llevaron a la respuesta de la pregunta enunciadas en PP8.1.

Actividad Grupo I. Luego de leer el enunciado del problema, Jefferson es el primero en proveer una respuesta; Andrés le responde. Se trascribe a continuación la interacción con su respectivo análisis:

<table>
<tr><th colspan="3">Trascripción</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Jefferson:</td><td>O sea, ahí sigue cumpliendo. Con seguridad la recta BC es mediatriz. Sí, breve, eso lo sabemos por la definición [de mediatriz]. [...] Cualquier punto entre B y C equidista de P y Q. Esto [cualquier punto entre B y C] equidista porque... pertenece a la mediatriz, por definición. [Lee el enunciado:] ¿Está de acuerdo con las dos aseveraciones del estudiante? Justifique su respuesta. ¡Sí!, breve ¿No?</td><td>Claramente el estudiante está abordando el problema en el problema en el Dominio de la Geometría Plana. Advierte estar de acuerdo con la idea planteada en el enunciado del problema y lo justifica mediante un argumento deductivo –Ad3– (en correspondencia con las Norma 9 y 13d):

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Andrés</td><td>¿Y no puede que estén en el espacio?</td><td rowspan="3">Andrés actúa en correspondencia con la Norma 16 en el sentido de contemplar el Dominio del Espacio para explorar una situación problema. De alguna forma refuta Ad3 puesto que, al considerar B, C, P y Q no coplanares, $\overleftrightarrow{BC}$ no sería la mediatriz de $\overline{PQ}$. Ad3 se transforma como sigue (Ad3T):

</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Jefferson</td><td>¡Ay el espacio!</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Andrés:</td><td>Y $\overleftrightarrow{BC}$ no sería la mediatriz [...] Porque no están dentro del plano.</td></tr>
</table>

Finalmente, los estudiantes conciben como respuesta que al considerar los puntos B y C en un plano distinto al que contiene $\overline{PQ}$, $\overleftrightarrow{BC}$ no sería la mediatriz de $\overline{PQ}$. Vale indicar que este grupo de estudiantes no utilizó el archivo provisto por la profesora ni escribieron un reporte escrito de su solución, pues el tiempo se les agotó. La profesora tampoco recogió los reportes de los grupos de estudiantes.

Actividad Grupo B. Después de leer el enunciado, Karen produce una respuesta. Con ella, inicia una interacción entre las tres estudiantes que se trascribe a continuación. Adyacente a ella, se presenta el respectivo análisis.

Trascripción			**Análisis**
1	Karen	Eso es verdad.	Las estudiantes piensan el problema en el dominio de la geometría plana. Advierten estar de acuerdo con lo dicho por el estudiante ficticio del enunciado. Entre las tres provee un argumento deductivo –Ad4– para concluir que S equidista de P y Q (en correspondencia con las **Normas 9** y **13d**): 
2	Mariana	[Asiente con la cabeza].	
3	Karen	Yo digo que hagamos así, que B y C equidistan de P y Q, entonces si uno traza la recta entonces es la mediatriz, por la definición de mediatriz. Y si tomo cualquier punto en la mediatriz… va a equidistar.	
4	Vanessa	Que si S pertenece al segmento BC, entonces S pertenece a la recta por contenencia. Y como la recta es la mediatriz…	
5	Mariana:	por definición de mediatriz equidista	
6	Vanessa:	¿Será que eso es tan obvio? O que también tiene trampita	
		[…]	
9	Vanesa:	[Mirando el archivo que la profesora les dijo que abrieran:] ¿Será que hay que redefinir un punto o algo así?	La estudiante cae en la cuenta de usar la herramienta *redefinir* del EGD que la profesora últimamente ha sugerido utilizar. No obstante, no lo hace púes el tiempo se le agota. Con ello, tiene la intención de actuar en correspondencia con la **Norma 18**, pero finalmente no la ejecuta.

Finalmente, las estudiantes conciben que el estudiante ficticio del enunciado tiene razón. Aunque abrieron el archivo provisto por la profesora, no lo manipularon ni escribieron un reporte escrito de su solución, pues el tiempo se les agotó. Como se dijo antes, la profesora tampoco recogió los reportes de los grupos de estudiantes.

4.4.2.2 *Síntesis y breves comentarios trayectoria didáctica 12*

La trayectoria se centró en la actividad de los grupos que fueron grabados a lo largo del estudio cuando abordaron el problema PP8. En sentido estricto, los estudiantes más que descubrir la propiedad que es consecuencia de ciertas condiciones dadas, tuvieron que llevar a cabo una *práctica* consistente en hacer una exploración empírica o teórica para verificar una propiedad establecida por el estudiante ficticio del enunciado. Esto es, verificar que la $\overleftrightarrow{BC}$ es mediatriz del $\overline{PQ}$ y que un punto cualquiera entre B y C equidista de P y Q, siempre que B y C equidisten de esta pareja de puntos. Desde esta perspectiva, el problema puede ser tipificado como de *búsqueda de consecuente* (si se explora empíricamente) o de exploración teórica (empleando objetos del sistema para verificar lo dicho por el estudiante).

Como se pudo observar, ambos grupos no concibieron necesario actuar sobre el archivo en el EGD provisto por la profesora; en su lugar, acudieron a sendos argumentos de estructura deductiva (Ad3 y Ad4) para soportar que el estudiante ficticio tenía razón. Desde esta perspectiva la situación de instrucción que se asocia a la práctica de los grupos es de *exploración de una situación* desde un punto de vista teórico, no empírico.

Un asunto bastante interesante que se resalta del actuar de los estudiantes, y por el cual este episodio fue escogido como dato de investigación, tiene que ver un aspecto normativo: ambos grupos, cada uno con una manifestación específica, hacen notar su interés por estudiar la situación en un contexto de la geometría de la Geometría del Espacio, en correspondencia con las **Normas 7, 16** y **18**. Específicamente, el Grupo I manifiesta tal interés indicando la posibilidad de que los puntos B y C no estén en el plano en el que está el $\overline{PQ}$ (en correspondencia con la **Norma 16**), caso en el cual no se aludiría al objeto mediatriz. Por su parte, el Grupo B advierte que la solución al problema PP8 no puede ser tan obvia (en correspondencia con las **Norma 7**) y que probablemente el uso de herramientas como redefinir puede poner de manifiesto algo escondido (en correspondencia con la **Norma 18**). Después del problema PP4 en el que los estudiantes debían hacerse conscientes de que un problema podía abordarse en ambos dominios (geometría plana y geometría del espacio), es la primera vez que se plantea una situación con una intensión similar y que ponen en acto las versiones nuevas de las **Normas 16** y **18** enunciadas al término del análisis del Bloque N° 4 de problemas (ver Tabla 81). La Tabla 90 presenta las normas y situación asociada a la práctica. La Tabla 91 expone la cronología de las normas, objetos y situaciones asociadas a la trayectoria.

Tabla 90. PP8.1–Grupos I y B: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Exploración teórica para verificar si la propuesta del estudiante ficticio es verdadera o falsa	7, 13d, 16, 18, 9	Exploración (teórica) de una situación

Tabla 91. Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 12

		Grupo I				Grupo B			
Situaciones		Exploración teórica de una situación							
Objetos	**Problemas**	PP8							
	Procedimientos	Exploración teórica							
	Conceptos/Def	C4				C4			
	Proposiciones								
	Argumentos	Ad3 Ad3T				Ad4			
	Lenguajes	L10							
Normas		13d	9	7	16	13d	9	7	18

Los análisis de las interacciones entre los estudiantes de cada grupo dejan ver que los objetos primarios emergentes de su práctica se articularon, respectivamente, en los argumentos provistos por ellos cuando hicieron su exploración teórica. La configuración cognitiva asociada a tales prácticas se presenta en la Figura 101.

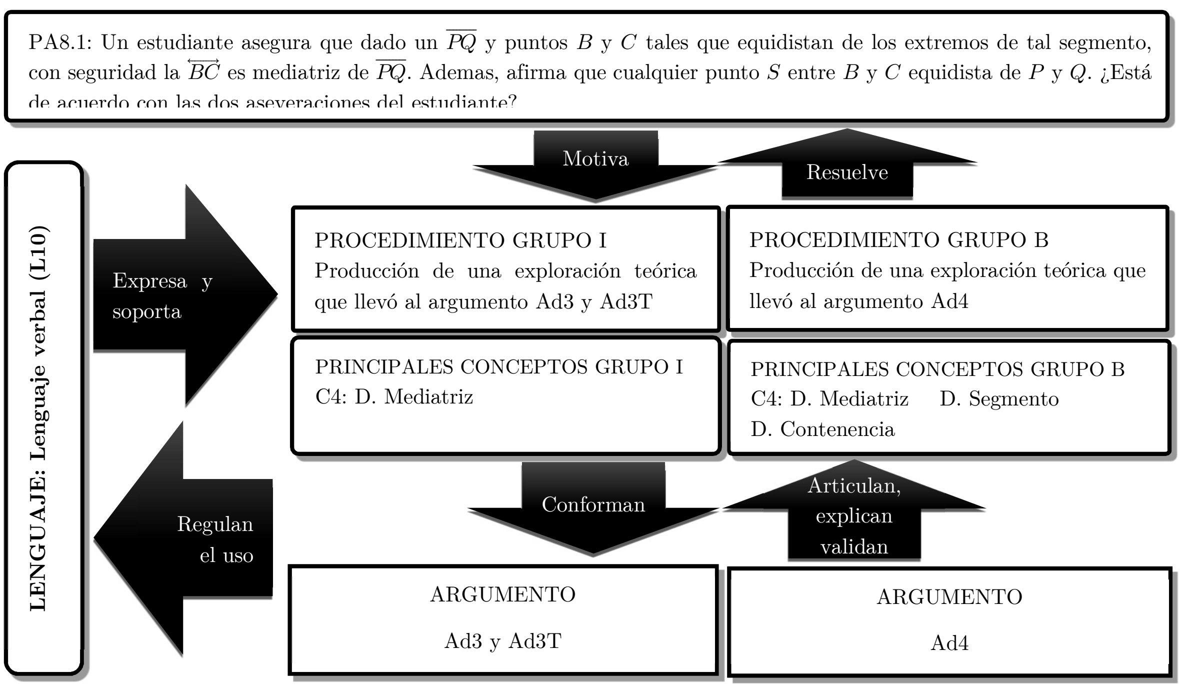


Figura 101. Configuraciones cognitivas relativas a PA8.1 –Grupos I y B

4.4.2.3 *Trayectoria didáctica 13: Actividad matemática sobre PA8.1 y TE9 – Toda la clase*

Pasados 10 minutos en los cuales los grupos de estudiantes abordaron autónomamente el PP8.1, y la profesora observó y preguntó sus conclusiones a cada grupo por separado, ella orienta una interacción de toda la clase en la que pretende poner en discusión su producción. En primera instancia, la profesora comenta que varios grupos ratificaron lo que el estudiante ficticio (el referido en el enunciado del problema) dijo sobre la $\overleftrightarrow{BC}$ puesto que pensaron que todos los puntos de la situación estaban en el plano [1]. Enseguida, la profesora empieza a manipular la representación provista en el archivo de Cabri 3D. Les da a los estudiantes la instrucción de que sigan los que ella realizará en tal representación. Utiliza la herramienta *redefinir* para sacar al punto C del plano, pero manteniendo la equidistancia (Ver Figura 102).

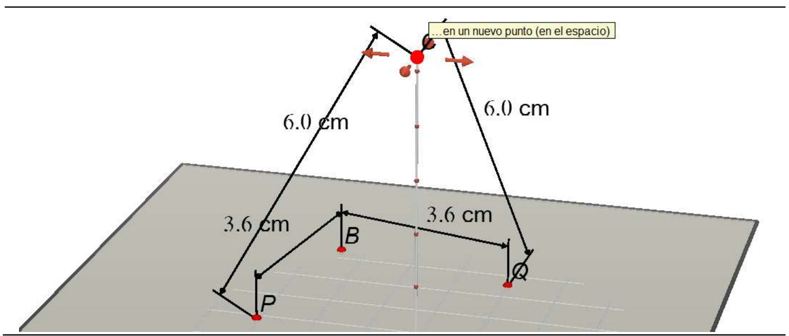


Figura 102. Archivo provisto por la profesora para PP8.1 - Redefinición Punto C

Realizado lo anterior, pregunta a los estudiantes si en ese caso la $\overleftrightarrow{BC}$ sigue siendo mediatriz del $\overline{PQ}$. Varios dicen que no [2] incluyendo los estudiantes de los Grupos I y B. Particularmente, Andrés dice que "no son coplanares la recta [$\overleftrightarrow{BC}$] y el segmento [$\overline{PQ}$] [3]. La profesora valida la respuesta y les recuerda a los estudiantes que "ahora deben pensar que el contexto en el que están [las situaciones problema] no son solo del plano… se deben pensar también en el espacio… con elementos en el espacio" (en correspondencia con la **Normas 7** y **16**) [4]. La profesora sugiere abordar la otra afirmación del estudiante ficticio. Pregunta [4]: "¿Será que, en esa situación, al tener un punto S está entre B y C, S también equidista de P y Q?". A la vez que los estudiantes exploran sus construcciones en sus computadores, la profesora hace lo mismo en la que proyecta por medio del televisor a toda la clase (en correspondencia con la **Norma 12b**). En esencia, el procedimiento de exploración (Pr7) realizado por la clase consiste en poner un punto S entre B y C, tomar las medidas SP y SQ e identificar que la equidistancia se mantiene al hacer el respectivo arrastre de S. En espacial, la profesora oculta todas las medidas tomadas previamente dejando solo SP y SQ (Figura 103). Su proceder pone de manifiesto un Argumento Inductivo informal (Ai1) –**Norma 9a**–: Los casos particulares son las diferentes posiciones del punto S en $\overleftrightarrow{BC}$ tal que S está entre B y C; el invariante es que SP y SQ son iguales. La regla inducida es que *Si S está entre B y C entonces S equidista de P y Q* (Figura 104).

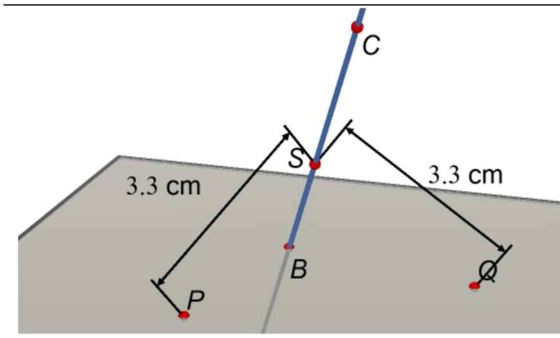


Figura 103. Archivo provisto por la profesora para PP8.1 - Exploración para estudiar la equidistancia de S con P y Q

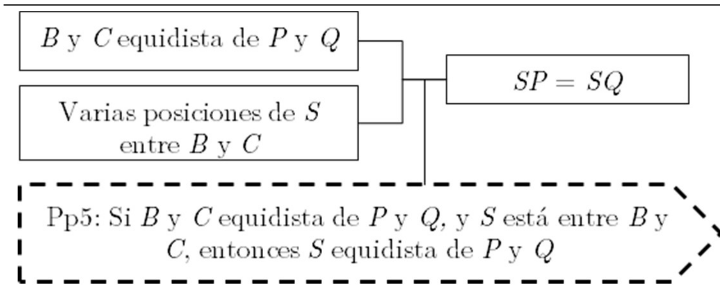


Figura 104. PP8.1: Diagrama asociado a Ai1

La sesión de clase 18 termina. La profesora dice que [5] "uno de los problemas de la tarea extraclase que propondrá tienen ver con hacer la prueba de este hecho geométrico [proposición inducida Pp5]" correspondiente al *T. Interestancia - equidistancia en el Espacio* (en correspondencia con las **Normas 9** y **35a**). Finalmente, el enunciado del problema que ella propone es el siguiente:

> TE9: Demuestre el siguiente teorema que corresponde a la situación que estudiamos al finalizar la clase de hoy [sesión de clase 18]:
>
> **T. Interestancia – Equidistancia en el Espacio:** Sean A, B, X, T puntos no coplanares y ningún trio de ellos colineales, tal que T y X equidistan de A y B. Sea S un punto tal que $X - S - T$; entonces S equidista de A y B.

Aserción	Garantía y Datos
1. A, B, X, T no coplanares	
2. $TA = TB$, $XA = XB$	
3. A, B, X no colineales A, X, T no colineales B, X, T no colineales	
4. α_{ABX}, β_{AXT}, γ_{BXT}	
5. $\overline{TA} \cong \overline{TB}$, $\overline{XA} \cong \overline{XB}$	
6. $\overline{TX} \cong \overline{TX}$	
7. ΔATX en β, ΔBTX en γ	
8. $\Delta ATX \cong \Delta BTX$	
9. $T - S - X$	
10. $A \notin \overleftrightarrow{TX}$ y $B \notin \overleftrightarrow{TX}$	
11. T, S, X colineales	
12. $S \in \overleftrightarrow{TX}$	
13. A, S, X y B, S, X no colineales	
14. ΔASX, ΔBSX	
15. $\angle AXT \cong \angle BXT$	
16. $\overline{SX} \cong \overline{SX}$	
17. $\Delta ASX \cong \Delta BSX$	
18. $\overline{AS} \cong \overline{BS}$	

En la sesión de clase 19 la profesora aborda la prueba del teorema en cuestión (Pp5). Se usa una representación dinámica en el EGD Cabri 3D (Figura 105) como apoyo para seguir la demostración (en correspondencia con la **Norma 42**). Al respecto, la profesora comenta que "de ahora en adelante [los estudiantes] deben reportar, cuando usan el computador, qué tipo de arrastre usan, si mueven la bola de cristal o qué mueven, con qué propósito lo hacen… para qué lo hacen". Con ello, la profesora recalca las **Normas 12b** (en una exploración, el EGD se usa para verificar o descubrir) o **42**, esta vez haciendo énfasis en el uso del arrastre de bola de cristal.

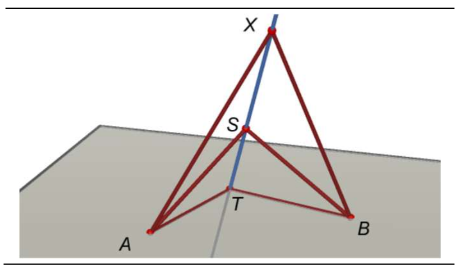


Figura 105. Representación que apoya la prueba de Pp5

Con relación a la prueba misma, la profesora sólo pregunta lo siguiente "¿Qué usaron para demostrarlo? [11]". Ante la respuesta de varios estudiantes: "triángulos"

[12], la profesora replica "congruencia de triángulos" [13]. No se explicitan las garantías de todos los pasos ni se escribe algo en el tablero. Para finalizar, la profesora pregunta si hay alguna duda sobre la demostración [13]. Varios estudiantes responden que ninguna [14]. La actividad termina.

4.4.2.4 *Síntesis y breves comentarios trayectoria didáctica 13*

Como se pudo observar, la trayectoria no presenta mayor riqueza como se hubiese podido esperar. La profesora fue quien hizo la mayor parte de las prácticas, y en comparación con otras trayectorias, la participación de los estudiantes fue mínima: Es ella quien sugiere y expone la exploración de la situación en el EGD Cabri 3D que llevó a establecer una respuesta al PP8.1 (*Práctica* 1) y, con ello, el Argumento inductivo (Ai1) que condujo a la formulación del *T. Interestancia - equidistancia en el Espacio* (Pp5). Así mismo, la profesora indujo un estudio bastante superficial de la prueba de tal teorema (*Práctica* 2); en tal sentido, no hubo una elaboración colectiva de la prueba de tal Teorema o un estudio minucioso de ella con base en las producciones de los estudiantes al elaborar la tarea extraclase. Desde esta perspectiva, la *situación instruccional* asociada a la práctica fue *exploración de una figura*; la situación *elaboración de una prueba* finalmente nunca se llevó a cabo en sentido estricto; no obstante, sí se instaló el teorema en cuestión (en correspondencia con la situación *instalación de una proposición*). La Tabla 92 presenta las Normas asociadas a cada práctica y situación instruccional. La Figura 106 expone la configuración de objetos primarios (epistémica) que emerge de las prácticas descritas. Tres diferencias esenciales tienen esta configuración con respecto a la de los grupos de estudiantes registrados: (i) el procedimiento de exploración Pr7, (ii) el Ai1 que condujo a la formulación de Pp5, y (iii) la sugerencia del Ad5 que prueba Pp5 (que finalmente no se pone en común).

Tabla 92. PP8.1–Toda la clase: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Exploración empírica para verificar si la propuesta del estudiante ficticio en PP8.1 es verdadera o falsa	12b, 7, 16, 9a	Exploración de una figura
Estudio superficial prueba de T. Interestancia - equidistancia en el Espacio (Pp5)	35a, *9*, *42*, 11	Instalación de una proposición/*Elaboración de prueba parcial*

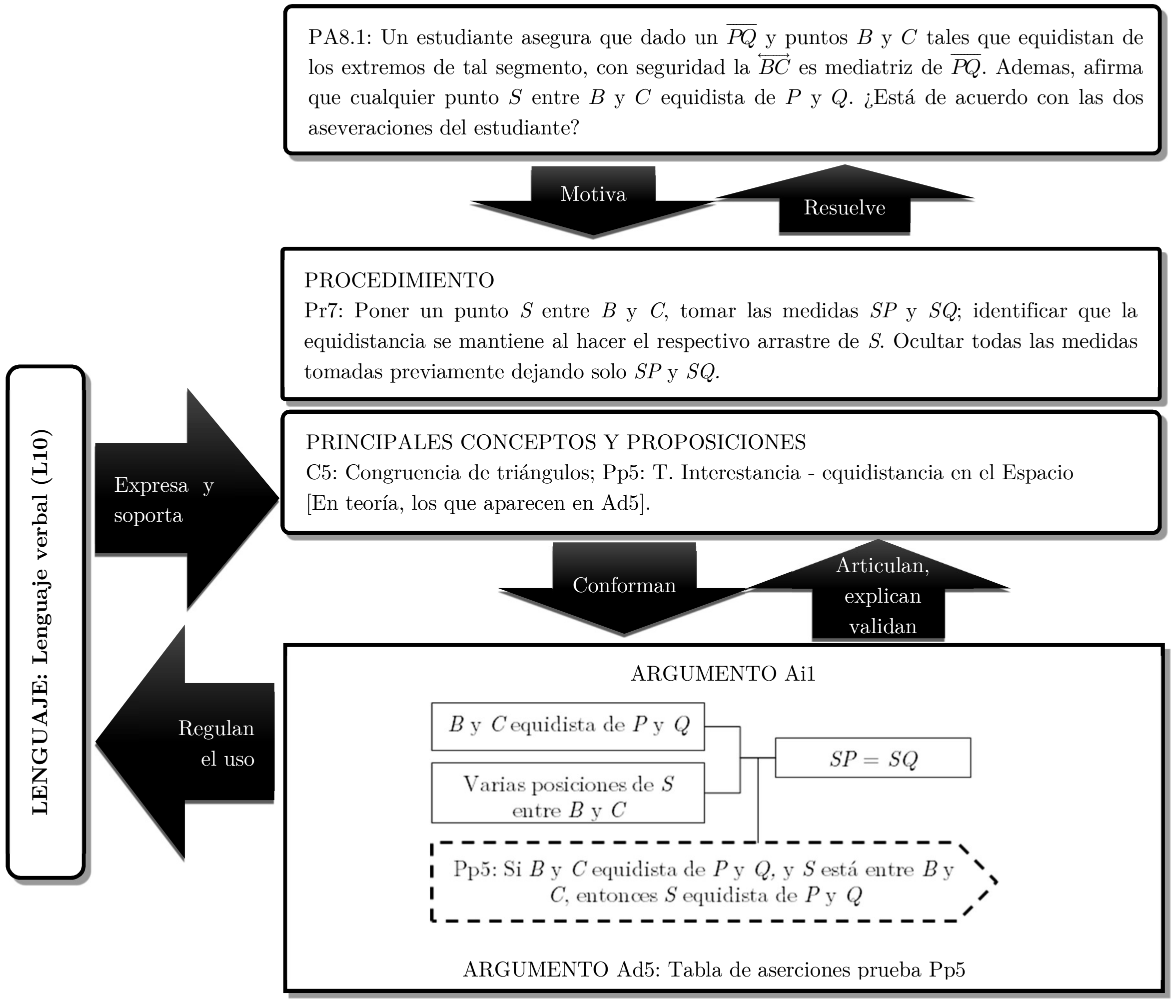


Figura 106. Configuraciones ontosemióticas epistémicas relativas a PP8.1 y TE9 –toda la clase–

El cambio respecto a la manera que usualmente la profesora orienta la puesta en común de la elaboración la prueba de una proposición (por lo general, ella dirige la construcción colectiva de la misma en la cual los estudiantes proveen pasos argumentales o precisan garantías, y la profesora hace el respectivo reporte escrito), fue lo que generó un interés por esta trayectoria. Con el objetivo de precisar las razones por las cuales no se llevaron a cabo las acciones usuales cuando se aborda una prueba (*i.e.*, uso de formatos para reportarla a toda la clase –Norma 23–, indagación de los elementos que constituyen los pasos argumentales por parte de la profesora –Norma 24– y enunciación de pasos argumentales por parte de los estudiantes –Norma 29–), se consideró prudente hacer una breve entrevista a la profesora. Se trascribe la entrevista a continuación, realizada luego de terminar la sesión de clase:

> *Pregunta* 1: En las tareas, para algunos teoremas usted proveyó todas las aserciones de la respectiva demostración, y solicitaba a los estudiantes que la complementaran con los datos y garantías. ¿Cuáles fueron las razones para que usted hiciera eso?
>
> *Respuesta*: Hay varias razones para darles como tarea completar las demostraciones de teoremas para las cuales les di solo las aserciones. En este caso, fue como repaso ya que esas demostraciones generalmente hacen uso de muchos elementos del sistema teórico que ya se ha consolidado. No quería que invirtieran mucho tiempo en eso.
>
> *Contrapregunta*: ¿Y siempre es así? ¿Por las mismas razones?
>
> *Respuesta*: No. En otros casos para ganar tiempo si el momento en que se debe hacer la demostración es en clase; o como ayuda si la demostración no es directa, sino que requiere usarse algo novedoso: hacer una construcción auxiliar, considerar casos; o para sacar a la luz asuntos problemáticos como cuándo se usa "sin perder generalidad" o modus tollendo ponens o en qué plano se está usando tal o cual objeto. Y solo lo hago para los teoremas que realmente son importantes en la teoría.
>
> *Pregunta* 2: En la clase, a diferencia de lo que se venía haciendo, no se llevó a cabo todo el proceso de elaboración de la prueba, en este caso, usted no preguntó por las garantías de cada uno de los pasos que conformaban la prueba. ¿Cuáles fueron las razones de ello?
>
> *Respuesta*: También por tiempo. No le quería gastar tiempo a precisar todo [lo que complementa la prueba]. La prueba era fácil, les había dado todo, ellos solo tenían que completar. Como pregunté al final, ellos no tuvieron dudas al hacer la prueba.

De las respuestas de la profesora, dos asuntos soportan las razones por las cuales la profesora cambió un poco la actividad usual: en primer lugar, en relación con TE9, la profesora concibió la prueba como un ejercicio mediante la cual los estudiantes podían traer a colación elementos previamente instalados y hacer un repaso al respecto. Desde esta perspectiva, se pone de manifiesto que mediante la resolución de problemas no sólo se pretende introducir objetos primarios al sistema teórico, sino poner en juego otros previamente instalados (**Norma 7**). En segundo lugar, de igual forma a lo comentado en la síntesis de la Trayectoria 11, de nuevo el factor tiempo empieza a ser un recurso protagonista para el desarrollo de las trayectorias asociadas al trabajo de toda la clase: para este caso, la profesora decidió que la elaboración de la prueba la hicieran los estudiantes como tarea extraclase; en clase, no se hizo el estudio minucioso de la prueba del *T. Interestancia - equidistancia en el Espacio* (Pp5) con el propósito de ganar tiempo para abordar otros asuntos de interés que permitan abordar Pp1 y Pp3 (en correspondencia con la **Norma 11**).

Para finalizar, en la Tabla 93 se presenta la cronología de los objetos, normas y situaciones asociados a la Trayectoria.

Tabla 93. Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 13

<table>
<tr><th colspan="2">Situaciones</th><th colspan="4">Exploración de una figura</th><th colspan="4">Instalación de una proposición/elaboración parcial de prueba</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Objetos</td><td>Problemas</td><td colspan="4">PP8.1</td><td colspan="4">TE9</td></tr>
<tr><td>Procedimientos</td><td colspan="4">Pr7</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Conceptos/Def</td><td colspan="4">C5</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Proposiciones</td><td colspan="4">Pp5</td><td colspan="4">Pp5</td></tr>
<tr><td>Argumentos</td><td colspan="4">Ai1</td><td colspan="4">Ad5</td></tr>
<tr><td>Lenguajes</td><td colspan="8">L10</td></tr>
<tr><td colspan="2">Normas</td><td>12b</td><td>7</td><td>16</td><td>9a</td><td>35a</td><td>9</td><td>42</td><td>11</td></tr>
</table>

4.4.3 Análisis relativo a PP8, PA8.2 y TE10: teorema fundamental de la perpendicularidad y existencias de perpendicularidad

En la sesión de clase 19, la profesora propone PP8 para generar un contexto del cual surja el *T. Fundamental de la perpendicularidad* (Pp6); su enunciado es:

> PP8: Construya un ΔABC en el plano α y un ΔABD congruente al ΔABC, tal que $D \notin \alpha$.
>
> i) Escriba el proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación.
> ii) Escriba el proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.).
> iii) Provea una conjetura que responda la pregunta del problema.
> iv) Provea una demostración de dicha conjetura [Núcleos y Pilares]

El enunciado del problema auxiliar PP8.2 expone el procedimiento que la profesora espera que los estudiantes produzcan como solución a PP8. Se presenta el enunciado de PP8.2 para contextualizar al lector:

> Para construir el ΔABD del problema anterior, un estudiante propuso la siguiente construcción:
>
> i) Construye $\overline{CE}$ altura relativa al $\overline{AB}$
> ii) En un plano β que interseca a α en $\overleftrightarrow{AB}$, construye $m \perp \overleftrightarrow{AB}$, m recta, $E \in m$.
> iii) D punto, $D \in m$, $DE = CE$.
>
> a) Represente la situación.
> b) ¿Se cumple que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$? Justifique su respuesta.
>
> c) ¿Existe una relación especial entre una recta y alguno de los planos que se pueden determinar? Si es el caso indique la relación, y cuáles la recta y el plano.

De manera más concreta, la pregunta del ítem c es la que pretende poner en evidencia el Teorema en cuestión. Esto, porque $\overleftrightarrow{CE}$ y m son perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ por un mismo punto; en consecuencia, el plano determinado por $\overleftrightarrow{CE}$ y m es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Dado que no todos los grupos produjeron dicho procedimiento, la profesora vio la necesidad de proponer el problema auxiliar referenciado.

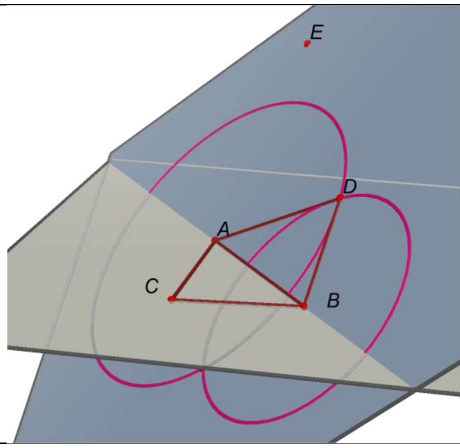
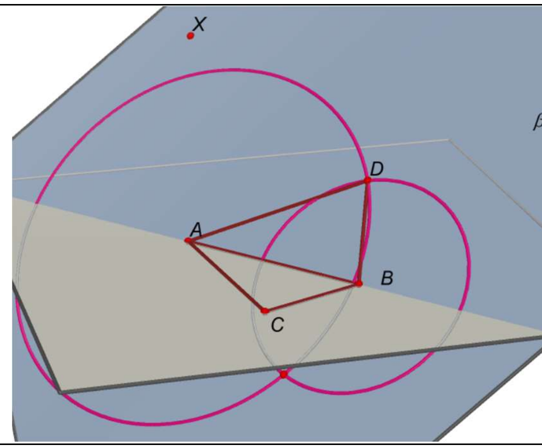
El análisis correspondiente a estos dos problemas contempla, para cada uno el trabajo autónomo de los grupos I y B, y la puesta en común orientada por la profesora de las respectivas producciones de los estudiantes. Vale indicar que la puesta en común relativa a PP8 fue bastante reducida, razón por la cual no se concibe necesario un análisis didáctico asociado a tal momento; en el marco de tal puesta en común la profesora propone PP8.2, actividad que presenta mayor riqueza para considerarla como unidad de análisis.

4.4.3.1 *Trayectoria didáctica 14: Actividad matemática sobre PP8 – Grupos I y B*

Ninguno de los grupos tiene mayor dificultad en proponer un procedimiento de construcción para resolver el problema PP8; tampoco hay mayor discusión al interior de cada uno de dichos grupos. En el caso del Grupo I es Jefferson quien lo propone, mientras que en el Grupo B es Karen quien hace lo respectivo, en ambos casos, inmediatamente luego de leer el enunciado. Los dos Grupos, en esencia, proponen el mismo procedimiento usado el EGD Cabri 3D para desarrollarlo. A continuación (Tabla 94), se presenta la trascripción de los reportes escritos de las producciones de los grupos, las cuales contienen el procedimiento de construcción, la exploración, la conjetura y una prueba (en correspondencia con las **Normas 13a**, **13b**, **13c** y **13d**, respectivamente):

Tabla 94. PP8: Producciones de los grupos I y B

	Grupo I	Grupo B
Procedimiento Pr8	1. ΔABC en el plano α (base). 2. Construir un plano E. 3. Circunferencia con centro en B y radio CB en el plano E. 4. Circunferencia con centro en A y radio AC en el plano E. 5. D intersección de las circunferencias. 6. ΔABD.	1. ΔABC en el plano α. 2. X que no pertenece a α. 3. Plano β por $\overleftrightarrow{AB}$ y X. 4. $\odot B, CB \subset \beta$. 5. $\odot A, AC \subset \beta$. 5. $\odot B, CB \cap \odot A, AC = D$. 6. ΔABD.

<table>
<tr><td>Representación Dinámica L11</td><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Exploración</td><td colspan="2">Tomamos medidas de los lados de los triángulos y verificamos con el arrastre de C que eran iguales las de un triángulo con las del otro.</td><td colspan="2">Se toman las medidas de cada segmento corroborando que sean iguales a las del triángulo inicial. Movimos a C y vimos que eran congruentes.</td></tr>
<tr><td>Conjetura</td><td colspan="2">Dado un triángulo en un plano alfa, entonces existe un triángulo que no pertenece a alfa congruente a él.</td><td colspan="2">Dado el ΔABC en α, entonces existe el triángulo ΔABD congruente a él contenido en otro plano.</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Prueba Ad6</td><td>Núcleo</td><td>Pilares</td><td>Núcleo</td><td>Pilares</td></tr>
<tr><td>ΔABC en el plano α</td><td>Dado</td><td>$\Delta ABC \subset \alpha$</td><td>Dado</td></tr>
<tr><td>$E \notin \alpha$</td><td>P. Espacio</td><td>$X \notin \alpha$</td><td>P. Espacio</td></tr>
<tr><td>β_{ABE}</td><td>P. Tres puntos-plano</td><td>$\beta_{\overline{AB},X}$</td><td>P. Punto, recta-plano</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\odot B, BC \subset \beta$
$\odot A, AC \subset \beta$,
D intersección de las circunferencias</td><td rowspan="2">T. Existencia circunferencia</td><td>$\odot A, CA \subset \beta$
$\odot B, BC \subset \beta$</td><td>T. Existencia circunferencia</td></tr>
<tr><td>$\odot B, BC \cap \odot A, AC = D$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\overline{AC} \cong \overline{AD}, \overline{BC} \cong \overline{BD}$</td><td>D. Circunferencia</td><td>$AC = AD$, $BC = DB$</td><td>D. Circunferencia</td></tr>
<tr><td>$\Delta ABC \cong \Delta ABD$</td><td>T. L.L.L</td><td>$\Delta ABC \cong \Delta ABD$</td><td>T. L.L.L</td></tr>
</table>

Como se dijo previamente, las diferencias entre las producciones de los dos grupos son mínimas. Desde un punto de vista semántico son prácticamente iguales pues involucran el mismo procedimiento –Pr8– de construcción robusta en Cabri 3D (en correspondencia con las **Normas 12a** y **15**) y de exploración para verificar (en correspondencia con **Norma 12b**), formulan la misma conjetura (en correspondencia con la **Norma 14**) y realizan la misma prueba –Ad6– por Núcleos-Pilares (en correspondencia con las **Normas 9, 33, 34**). De otro lado, desde un punto de vista sintáctico (uso del lenguaje) aunque ambos grupos emplean la simbología geométrica (**Norma 5b.1**), existe una leve diferencia pues el Grupo B hace mayor uso de tal simbología, particularmente para reportar el procedimiento de construcción y la conjetura. Con respecto a la elaboración de la prueba, vale indicar que ambos grupos se apoyaron en Pr8 para elaborar la prueba (en correspondencia con la **Norma 31)** y de paso validaron el procedimiento **(Norma 39)**; ello se ratifica no solo por el argumento Ad6, sino por manifestaciones como las siguientes:

> Jefferson (Grupo I): [para elaborar la prueba] sería como seguir la construcción, pero como de una forma más rigurosa, poniendo los Núcleos y Pilares [118].
>
> Vanessa (Grupo B): [para elaborar la prueba] tendríamos… es como poner los pasos de la construcción, pero poniendo las garantías [190].

De otro lado, ambos grupos caen en la cuenta de que no existen objetos del sistema que les permita garantizar que $\odot B, AB \cap \odot A, AB = D$, razón por la cual, luego de una breve interacción deciden no poner un pilar que se le asocie.

4.4.3.2 *Síntesis y breves comentarios trayectoria didáctica 14*

Se han descrito las producciones de los Grupos I y B respecto al problema PP8 (de *búsqueda de antecedente*). Las *prácticas* asociadas se corresponden con los ítems exigidos en el enunciado de dicho problema, los cuales son seguidos por los estudiantes en sentido estricto y en correspondencia con la Normas 13a, 13b, 13c y 13d. La Tabla 95 presenta las Normas y situaciones instruccionales asociadas a dichas prácticas.

Tabla 95. PP8–Toda la clase: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Construcción robusta de la situación y objeto buscado en el PP8.	13a, 12a, 15	Construcción de una figura
Exploración de la representación para verificar, mediante el arrastre de los puntos A o B.	13b, 12b	Exploración de una figura
Formulación de una conjetura.	13c, 14	
Elaboración de la prueba de la conjetura formulada.	13d, 9, 31, 39, 33, 34	Elaboración de una prueba

Es importante resaltar que, aunque los estudiantes hicieron un arrastre del punto C que podría indicar la aparición de un argumento inductivo, no se considera que este haya ocurrido puesto que no hubo un invariante descubierto. Más bien, hubo una verificación de un hecho que los estudiantes ya sabían que pasaba. Desde esta perspectiva, los *objetos primarios* emergentes de las prácticas de los estudiantes fueron explicitados en la Tabla 94, razón por la cual se concibe redundante hacer un diagrama de la configuración ontosemiótica cognitiva asociada. La Tabla 96 presenta los principales objetos, normas y situaciones instruccionales asociadas a la Trayectoria.

Tabla 96. Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 14

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4">Grupo I</td><td colspan="4">Grupo B</td><td colspan="3">Grupo I</td><td colspan="4">Grupo B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones</td><td colspan="8">Construcción de figura/Exploración de figura</td><td colspan="7">Elaboración de Prueba</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Objetos</td><td>Problemas</td><td colspan="15">PP8</td></tr>
<tr><td>Procedimientos</td><td colspan="8">Pr8</td><td colspan="7">Pr8</td></tr>
<tr><td>Conceptos/Def</td><td colspan="8">Circunferencia</td><td colspan="7">Circunferencia</td></tr>
<tr><td>Proposiciones</td><td colspan="8"></td><td colspan="7">T. Existencia Circunferencia, T. LLL</td></tr>
<tr><td>Argumentos</td><td colspan="8"></td><td colspan="7">Ad6</td></tr>
<tr><td>Lenguajes</td><td colspan="8">L11 Escrito</td><td colspan="7">Escrito</td></tr>
<tr><td colspan="2">Normas</td><td>12a</td><td>13a</td><td>15</td><td>12b</td><td>13b</td><td>14</td><td>13c</td><td>5b.1</td><td>13d</td><td>9</td><td>31</td><td>39</td><td>33</td><td>34</td><td>5b.1</td></tr>
</table>

Durante la puesta en común, conocedora de la producción de los grupos de estudiantes puesto que estuvo caminado entre ellos cuando abordaban el problema, la profesora comentó que hubo, en general, dos propuestas de solución, una muy frecuente con respecto a la otra. Describió brevemente la primera de ellas, la cual se corresponde con el procedimiento Pr8 propuesto por los Grupos I y B. Proyectó la representación gráfica asociada a dicho procedimiento que realizó en el EGD Cabri 3D cuando los estudiantes trabajaban autónomamente. Tal representación es análoga a L11. Mientras hacía tal proyección, preguntó a los estudiantes por qué sería válida tal propuesta; varios dijeron que por el T. LLL. Replicó la profesora preguntado sobre aquello que haría falta para que tal procedimiento fuera completamente válido; varios respondieron que faltaría probar que las circunferencias efectivamente se intersecan. Al respecto, la profesora textualmente dijo:

> ¿Qué nos tocaría? Mostrar que realmente se intersecan. Pero entonces el núcleo importante en esta demostración es que por definición de circunferencia tenemos la congruencia de los segmentos que queríamos y luego los dos triángulos son congruentes por [Teorema] lado, lado, lado.

Lo anterior evidencia, tal como ha sido usual en las últimas puestas en común, la no realización de un reporte escrito de la prueba. Tampoco se explicitaron todos sus núcleos y pilares, ni se hizo una instalación formal de algún teorema asociado al procedimiento de construcción. La profesora exaltó sólo dos núcleos con sus respectivos pilares que se corresponden con los dos últimos pasos de las pruebas provistas por los Grupos I y B.

Con relación a la segunda propuesta, la profesora comentó que propondrá enseguida un problema (PP8.2) que la expone. Entrega a los estudiantes una hoja con el enunciado del problema, el cual se presenta a continuación de nuevo:

> PP8.2: Para construir el ΔABD del problema anterior, un estudiante propuso la siguiente construcción:
>
> i) Construye $\overline{CE}$ altura relativa al $\overline{AB}$
>
> ii) En un plano β que interseca a α en $\overleftrightarrow{AB}$, construye $m \perp \overleftrightarrow{AB}$, m recta, $E \in m$.
>
> iii) D punto, $D \in m$, $DE = CE$.
>
> a) Represente la situación.
>
> b) ¿Se cumple que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$? Justifique su respuesta.
>
> c) ¿Existe una relación especial entre una recta y alguno de los planos que se pueden determinar? Si es el caso indique la relación, y cuáles la recta y el plano.

Al respecto de tal problema, no se concibió necesario hacer un análisis de las producciones de los Grupos registrados por dos razones específicas:

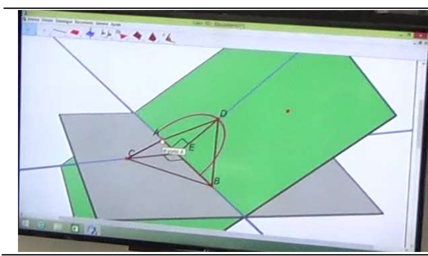
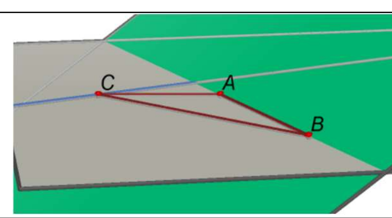
i. Su comportamiento fue similar al ocurrido para PP8; esto es, hicieron una construcción robusta en el EGD (sugerida por el enunciado del problema) y proveyeron sin dificultad la justificación solicitada en el ítem b empleando el formato Núcleos y Pilares. Con relación al ítem c, el Grupo I se percató rápidamente de la relación de perpendicularidad entre el plano $\beta_{m,\overleftrightarrow{CE}}$ y la recta $\overleftrightarrow{AB}$ luego de construir tal plano y hacer un arrastre de bola de cristal. El Grupo B no produjo una respuesta pues el tiempo se les agotó.
ii. Sus producciones no fueron tenidas en cuenta por la profesora durante la puesta en común.

A continuación, se presenta una trayectoria asociada a la puesta en común de tales producciones. Como se observará, esta tiene gran participación de parte de varios estudiantes y varios aspectos normativos por destacar.

4.4.3.3 *Trayectoria didáctica 15: Actividad matemática sobre PA8.2 – Toda la clase*

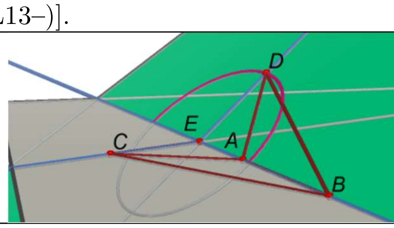
En la última mitad de la sesión de clase 19, la profesora orienta la puesta en común de las producciones de los estudiantes con respecto a PP8.2. El episodio de clase asociado a tal puesta en común se ha dividido en tres momentos específicos: (i) estudio colectivo de procedimientos de construcción llevados a cabo por dos grupos de estudiantes en relación con el ítem a del problema; (ii) estudio colectivo de las respuestas dadas al ítem c del problema; y (iii) elaboración colectiva de la prueba del T. Fundamental de la perpendicularidad, surgido del estudio del ítem c.

Momento 1. Estudio colectivo de procedimientos de construcción llevados a cabo por dos grupos de estudiantes: De manera específica, la profesora pide a dos grupos de estudiantes que comenten su procedimiento de construcción. En primera instancia solicita al grupo de Esteban que comparta con toda la clase el procedimiento de construcción que llevaron a cabo (**Norma 3**). Se trascribe parte de la interacción llevada a cabo por el estudiante y la profesora al respecto:

		Trascripción	Análisis
6	Esteban:	[Conecta su computador al televisor para proyectar su representación (L12; ver Figura 107)] Hicimos la circunferencia [$\odot E, CE$]... Como teníamos el punto [segmento] AB, pasamos a construir la altura de ese segmento [$\overline{CE}$] y en ese [señala la recta m] tenemos que la intersección [de $\odot E, CE$ con m] sería el punto D. Pero al realizar el arrastre del punto A, encontramos que se desaparecen [los objetos $\overline{CE}$; $\odot E, CE$; m y D].  Figura 107. PP8.2: Representación grupo Esteban	Esteban hizo los siguientes pasos de construcción (Pr9) para cumplir con los ítems i-iii del enunciado del problema (**Normas 12a, 13a, 13b** y **15**): En relación con i, construyó una recta perpendicular a $\overline{AB}$ por C en el plano base, llamando E a la intersección de tal recta con $\overline{AB}$. En relación con ii, siguió con exactitud lo enunciado en tal ítem. En relación con iii, construyó $\odot E, CE$ en el plano β y nombró D a la intersección de $\odot E, CE$ con m. Al arrastrar el punto A para verificar la corrección de su procedimiento (**Norma 12b**), cuando $\triangle ABC$ fue obtusángulo en el vértice A, los objetos $\overline{CE}$; $\odot E, CE$; m y D desaparecieron (Figura 108 –L12–). Ello sucedió porque el procedimiento seguido para cumplir con la altura $\overline{CE}$ (*i.e.*, cumplir con el ítem i) no se construyó siguiendo la definición de altura (C5). Más adelante, con la intervención de Steven [8], se explica esto de mejor manera.  Figura 108. PP8.2: Representación grupo Esteban al arrastrar A. Vale indicar que los estudiantes actuaron parcialmente en correspondencia con la

			Norma 12a: aunque hacen una construcción robusta en general, no emplean la definición de altura para construir lo respectivo.
7	Profesora:	¡Se desapareció! Y no saben porque, pero vamos a ver qué pasó. Ellos no hicieron la construcción correcta. [...] Bueno gracias [se dirige a Esteban]. Entonces ellos no saben por qué les pasaba esto.]	La profesora advierte que el procedimiento de construcción no es correcto. Con su frase "pero vamos a ver qué pasó" advierte que ello se va a estudiar (**Norma 19**).

Dada la falencia en el procedimiento de construcción advertido en la interacción y análisis anterior, la profesora, conociendo que Steven hizo un procedimiento correcto, se dirige a este estudiante para preguntar: ¿qué hiciste tú distinto a lo que hicieron ellos [7]? Se trascribe y analiza la interacción surgida luego de haberse hecho tal indagación.

Trascripción			**Análisis**
8	Steven:	[Conecta su computador al televisor para proyectar su representación (L13; ver Figura 109)] Para construir la altura tocó generar la recta...	El estudiante lleva a cabo básicamente el Pr9; por su puesto, solo lo modifica en lo que respecta al ítem i: construyó una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ (no por $\overline{AB}$) por C en el plano base, llamando E a la intersección de tal recta con $\overleftrightarrow{AB}$. Produce entonces un Pr10 que trasforma a Pr9 en dicho paso. Con lo hecho por Steven, junto con las intervenciones [9-11], se ratifica el cumplimiento de la **Norma 12a** por completo, usando la definición de altura para hacer la construcción robusta. La profesora pide un arrastre para verificar que la construcción es robusta [**Normas 3.1 y 12b**]
9	Profesora:	Porque, ¿cuál es la definición de altura?	
10	Varios	Perpendicular a la recta	
11	Profesora:	Perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto. ¿Cuántos de ustedes construyeron esa recta? [levantan la mano 7 estudiantes]. La mayoría no lo hicieron. [...] [Dirigiéndose a Steven] ¿Qué pasa si el triángulo no es acutángulo?, ¿qué le pasa a él cuando arrastra?	
12	Steven:	Ahí arrastramos [al punto A], pero igual se sigue manteniendo [se refiere a que no se desaparece alguno de los objetos construidos (Figura 109 –L13–)].  Figura 109. PP8.2: Representación grupo Steven al arrastrar A.	Al arrastrar el punto A para verificar la corrección de su procedimiento (**Norma 12b**), cuando $\triangle ABC$ fue obtusángulo en el vértice A, la representación se mantiene intacta en cuanto sus relaciones; esto es, se verifica que la construcción es robusta.

13	Profesora:	Se sigue manteniendo. Entonces había que usar la definición de altura para que no pasen ese tipo de cosas.	La profesora valida la construcción (**Norma 19**) y recalca la importancia de la **Norma 12a** en el sentido de usar las definiciones de objetos para construirlos en el EGD.

Al término de la intervención [13] la profesora pregunta si bajo las condiciones i-iii expresadas en el enunciado de PP8.2, si resultan ser congruentes los triángulos involucrados o no. Varios dicen que sí. Ella resalta como interesante el procedimiento y enseguida enuncia la conjetura (Pp7) relativa dicho problema (en correspondencia con las **Normas 21** y **14.4.1**): Dados ΔABC , ΔABD y $\overline{CE}, \overline{DE}$ sus alturas respectivamente, $D \notin \alpha$. Si $\overline{CE} \cong \overline{DE}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta ABD$. No hay algún atisbo de la elaboración colectiva de su prueba ni de ideas argumentales que la sustenten (violación de la **Norma 9**).

Momento 2. Estudio colectivo de las respuestas dadas al ítem c del problema en cuestión. Luego de enunciar la conjetura Pp7, la profesora orienta un trabajo colectivo focalizado en dar respuesta al ítem c de PPA8.2:

> ¿Existe una relación especial entre una recta y alguno de los planos que se pueden determinar? Si es el caso indique cuál es la relación, cuál recta y cuál plano.

En principio la profesora preguntó al Grupo de Zayra y al Grupo B si tenían alguna respuesta; ambos dijeron que no aduciendo que su exploración no les condujo a una respuesta. Se dirige de nuevo al Grupo de Esteban, Sebastián y Natalia pues ellos advierten tener alguna respuesta al ítem c en cuestión. Conectan su computador al televisor para proyectar su representación en el EGD Cabri 3D (L14). Exponen a toda la clase lo que hicieron (Figura 110).

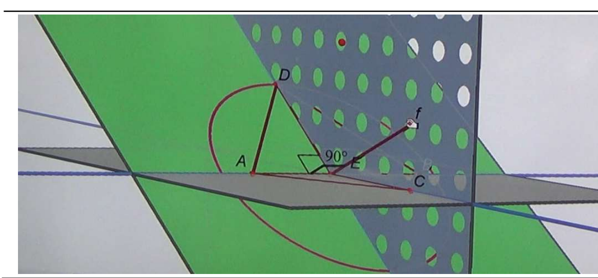
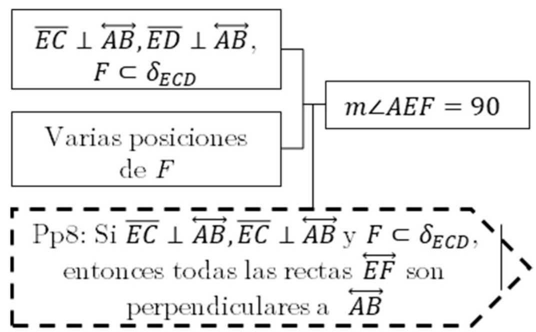
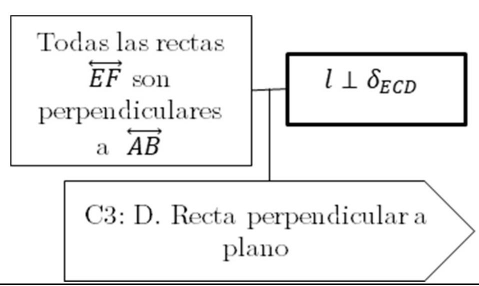


Figura 110. PP8.2: Representación Grupo Esteban ítem c

<table>
<tr><th colspan="3">Trascripción</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>22</td><td>Sebastián:</td><td>Creamos un plano.</td><td rowspan="9">Sebastián precisa su procedimiento de construcción robusta (Pr11) para responder el ítem c (Norma 12a) [22-26]: Construyó el plano δ_{ECD} y $\overline{EF}$ con F en δ_{ECD} y tomó la medida de $\angle AEF$. En su exploración, arrastró F y se percató que tal medida siempre era 90, por ende, que todas las rectas $\overleftrightarrow{EF}$ eran perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ (Norma 12b) [27-30]. De tal exploración se desprende un argumento inductivo Ai2:

</td></tr>
<tr><td>23</td><td>Profesora:</td><td>Crearon un plano ECD. [...] ¿Qué fue lo que descubrieron?</td></tr>
<tr><td>24</td><td>Sebastián:</td><td>Entonces nosotros construimos un punto [F] que perteneciera ese plano [al determinado por los puntos E, C y D] Y ahora trazamos un segmento [$\overline{EF}$].</td></tr>
<tr><td>25</td><td>Profesora:</td><td>[...] Y cogieron un punto de ese plano. ¿Y para que ese punto?</td></tr>
<tr><td>26</td><td>Sebastián:</td><td>Para tomarle la medida a ese ángulo [$\angle AEF$].</td></tr>
<tr><td>27</td><td>Profesora:</td><td>Ah ya, ya, ya. Pero bueno, ustedes lo que quieren es la medida de un ángulo F, E y A ¿Y entonces qué descubrieron?</td></tr>
<tr><td>28</td><td>Sebastián:</td><td>Entonces nos pusimos a desplazar F [hace arrastres del punto F].</td></tr>
<tr><td>29</td><td>Profesora:</td><td>O sea, ¿qué descubrieron?</td></tr>
<tr><td>30</td><td>Sebastián:</td><td>Que todas las rectas [$\overleftrightarrow{EF}$] contenidas en ese plano [el determinado por los puntos E, C y D] van a ser perpendiculares a la recta AB.</td></tr>
<tr><td>31</td><td>Profesora:</td><td>Lo que ya nosotros definimos como recta perpendicular a un plano. ¿Sí? La recta AB resultó ser perpendicular a un plano que no estaba ahí. [...] El plano se determinó con las dos alturas, ¿sí? Y la recta AB es la que él dice que se dio cuenta que es perpendicular al plano.</td><td>La profesora complementa lo dicho por Sebastián y genera un argumento deductivo (Ad6) con el cual se infiere que el plano δ_{ECD} es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$:

</td></tr>
<tr><td>32</td><td>Yesid:</td><td>[Levanta la mano]</td><td rowspan="3">Yesid describe gruesamente su proceder (Pr12). Es análogo al propuesto por Sebastián en términos de determinar el δ_{ECD}. No toma la medida de un ángulo ni arrastra para inductiva determinar Pp8. Él oculta los planos ciertos planos (el determinado por A, D y B, y el determinado por A, C y B) y hace</td></tr>
<tr><td>33</td><td>Profesora:</td><td>Yesid, pasas y explicas lo que les pasó.</td></tr>
<tr><td>34</td><td>Yesid:</td><td>Pues ahí tenemos todos los planos determinados entonces lo que yo hice fue ocultar los dos planos que contenían los dos triángulos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>35</td><td>Profesora:</td><td>O sea, ellos también construyeron el plano determinado por las dos alturas.</td><td rowspan="3">un arrastre de Bola de Cristal y solo por “lo que observa” se percata de la perpendicularidad entre δ_{ECD} y $\overleftrightarrow{AB}$ (Figura 111 –L15–).

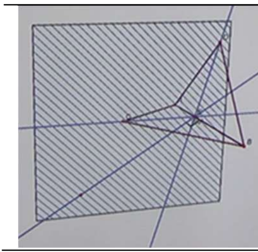


Figura 111. PP8.2: Representación Grupo Yesid ítem c

Yesid actúa en relación con la Normas 12b, 15 y 18. Específicamente, la Norma 15 surge puesto que el estudiante cambia la apariencia de los objetos, en este caso los oculta, para poder visualizar mejor los objetos de interés en una representación. La Norma 18, surge puesto que el arrastre de bola de cristal le fue suficiente al estudiante para decantar la propiedad Pp8. No hay un argumento inductivo puesto que no hay diferentes posiciones de un objeto en el espacio que permita evidenciar una propiedad invariante. Más bien hay un objeto en el espacio que poder ser observado desde diferentes perspectivas usando el arrastre de bola de cristal.</td></tr>
<tr><td>36</td><td>Yesid:</td><td>Lo que yo hice fue girar el plano [hace un arrastre de bola de cristal] y ahí me daba noventa.</td></tr>
<tr><td>37</td><td>Profesora:</td><td>O sea, hizo lo mismo que ellos hicieron, pero lo importante es que para ver cuál era la recta perpendicular a quién, ocultó planos y movió… puso la bola de cristal en la situación que le dejaba ver lo que estaba pasando. Bien. No. Bueno ya estamos en un punto en el que nos estamos dando cuenta que sí existen rectas perpendiculares a plano. Pero no sólo eso, este problema nos muestra… ¿Cuál es la conjetura? De esta parte c [se refiere a lo que han realizado respecto al ítem c]. ¿Cuál es?, ¿qué fue lo dado?</td></tr>
<tr><td>38</td><td>José Luís:</td><td>Las alturas, las alturas de los triángulos</td><td rowspan="4">La profesora termina formulando la conjetura con base en la actividad de los estudiantes (en correspondencia con las Normas 21 y 14): Su enunciado final es el siguiente escrito por la profesora en el tablero (Pp6):

T. Fundamental Perpendicularidad Dadas las recta l_1 y l_2 perpendiculares a m por un punto de m, entonces m es perpendicular al plano determinado por l_1 y l_2.</td></tr>
<tr><td>39</td><td>Profesora:</td><td>Y esas alturas ¿Qué propiedad tienen con la recta?</td></tr>
<tr><td>40</td><td>Varios:</td><td>Son perpendiculares</td></tr>
<tr><td>41</td><td>Profesora:</td><td>Son perpendiculares a esa recta ¿No? Y entonces, ¿qué fue lo que hicimos? Buscar dos perpendiculares a una recta por un mismo punto y generamos el plano que esas dos perpendiculares determinan. ¿Y qué resultó? Qué esa recta es perpendicular al plano. Que, si es perpendicular a dos rectas de ese plano, es perpendicular al plano.</td></tr>
</table>

Momento 3. Elaboración colectiva de la prueba del T. Fundamental de la perpendicularidad (Pp6): Terminado el anterior momento que dio lugar al descubrimiento y formulación de Pp6, la profesora advierte [46] que todavía no se ha probado algo, ni la existencia de una recta perpendicular a un plano (Pp1), ni la existencia de un plano perpendicular a la recta (Pp3), ni el T. Fundamental de la perpendicular (Pp6). Advierte que primero van a probar esta última. A diferencia de lo que sucedía en ocasiones anteriores al momento de elaborar una prueba colectiva, se explicita que los estudiantes tienen la responsabilidad de la sintaxis escrita de los pasos de la prueba y ponerlos en el formato *Aserción - Datos y Garantía* (variación de la **Norma 27**) como tarea extraclase. Al inicio de esta actividad colectiva, la profesora proyecta una representación en el EGD Cabri 3D que contiene los datos (hipótesis) del Teorema (Figura 112 –L16–). A continuación, se trascribe la interacción asociada a la elaboración conjunta de la prueba de dicho teorema (Pp6):

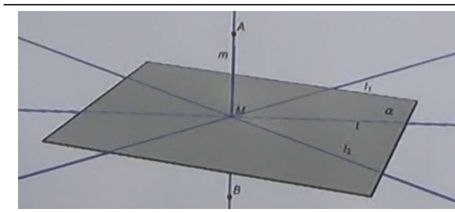
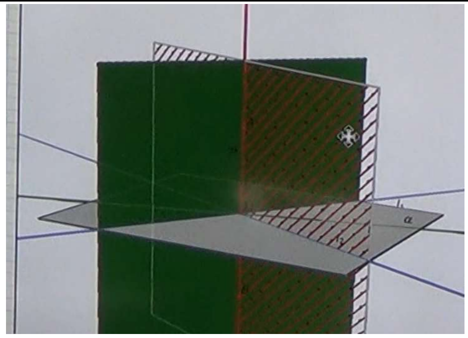
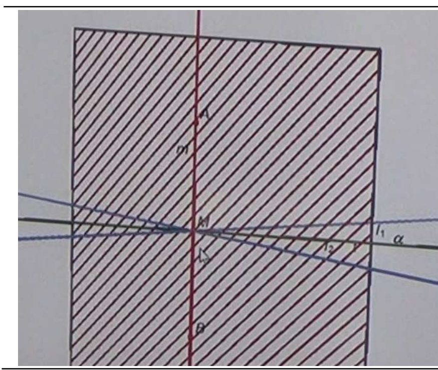
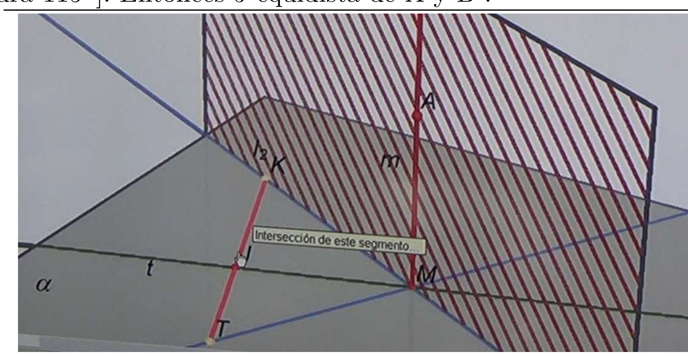


Figura 112. PP8.2: Representación 1 como apoyo en la prueba T. Fundamenta de la Perpendicularidad

	Emisor: FPar	Enunciado ***Referencia a un agente anterior***	FArg
46	P: A~P	Bien. Quiero demostrar que [m] es perpendicular al plano alfa [α_{l_1,l_2}] lo cual quiere decir que si yo tomo cualquier otra recta del plano que pase por ese punto de intersección [M] esa recta también será perpendicular [al plano]. Eso es lo que tenemos que demostrar [que $l \perp m$]. Entonces esa es la primera pregunta: ¿Cómo pruebo que dos rectas son perpendiculares? Si yo no puedo responder esa pregunta, difícilmente puedo hacer la prueba. Yo debo trazarme un plan para que m y l sean perpendiculares.	Idea~P Provee propósito general de la prueba D~P~I Indaga por posibles datos
47	Natalia: A~P	Que determinen un ángulo recto *Profesora*	D~E
48	P: R~P	[Escribe en el tablero]: 1) Que determinen un ángulo recto. Tengo que mirar cómo se forma un ángulo de 90. Pero cómo hago eso… *Karen*	D~P~I

49	José: A~E	Que sea mediatriz de un segmento.	*Profesora*	D~E
50	P: R~P	[Escribe en el tablero]: 2) Que sea mediatriz de un segmento.	*José*	D~P
51	Mauricio: A~E	Que dos ángulos sean adyacentes… par lineal y congruentes	*Profesora*	D~E
52	P: R~P	[Escribe en el tablero]: 3) Que se determinen ángulos par línea y congruentes	*Mauricio*	D~P
53	Sandra: A~E	De pronto con lo de la semicircunferencia, que el ángulo esté inscrito…	*Profesora*	D~E
54	P: P~P	Ah, o sea… [Escribe en el tablero]: 4) Que existan puntos A, B uno en cada recta, tal que C equidiste del punto medio del $\overline{AB}$. (Angulo inscrito en circunferencia). Entonces, ya tenemos muchas maneras de determinar si un ángulo es recto o no. Cuál nos va a servir de todas esas en nuestra situación… Pues la que vamos a usar es la dos. Pero cómo vamos a encontrar ahí [en la situación] una mediatriz.	*Sandra*	D~E
55	Jefferson: A~E	Pues, así como hicimos con el anterior [se refiere al ítem 4 escrito por la profesora]. Encontrar los puntos que cumplan las condiciones que necesitamos…	*Profesora*	Idea~E
56	P: P~P	Y quien quiero que sea mediatriz… m de alguien en l o l de alguien en m…	*Jefferson*	Idea~P~I Indaga para precisar la idea
57	Varios	[Murmullos]	*Profesora*	
58	P: P~P	Me estás diciendo que tengo que hacer construcciones, ¿cierto? Tengo que construir un segmento que convierta a alguien en mediatriz de ese segmento. A quien estoy tratando de convertir, a m o a l…	*Jefferson*	Idea~P Complementa la idea de Jefferson
59	Varios	[Murmullos]	*Profesora*	
60	P: A~P	Piense en lo siguiente. La recta l_1 es perpendicular a m. Entonces, l_1 se podría convertir en mediatriz de quién… de alguien en la recta m. […] ¿Puedo volver a l_1 mediatriz de un segmento en m y puedo volver a l_2 mediatriz de un segmento en m?… Sí, porque tenemos que esas rectas son perpendiculares [a m]. Bien, vamos a volver a l_1 y a l_2 mediatrices. Y acá viene una cosa muy importante. Entonces m y l_1 generan un plano, y m y l_2 generan otro plano [va complementando L16; al primero le cambia el color a verde mientras que al segundo le pone color rojo y cambia su apariencia a rayado –Figura 113–].		Idea~P Complementa la idea de Jefferson

		 Figura 113. PP8.2: Representación 2 como apoyo en la prueba T. Fundamenta de la Perpendicularidad En este [el rojo] l_2 sería la mediatriz de un segmento en m, y en el plano verde, ahí l_1 podría convertirse en la mediatriz de un segmento en m. Entonces, viene una cosa nueva para nosotros: la mediatriz ya no es “la” mediatriz, es “una” mediatriz; la mediatriz de un segmento AB va a depender del plano y voy a tener la mediatriz de un segmento AB en un plano alfa, en un plano beta… [escribe en el tablero:] $\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}, \mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$. […] Entonces, de ahora en adelante, la mediatriz de un segmento debe tener un apellido: en qué plano está. Entonces, cómo convertir a l_2 en mediatriz en este plano [el rojo]. Tienen que olvidarse momentáneamente de este plano [el plano base. Oculta los planos verde y base –Figura 114–]. […] Entonces, ¿qué hago? Tomo cualquier punto de la recta m que no sea M obviamente, y después, localiza a quien…  Figura 114. PP8.2: Representación 3 como apoyo en la prueba T. Fundamenta de la Perpendicularidad *Jefferson*	
61	Varios: A~E	Al punto B… *Profesora*	Idea~E
62	P: R~P	Al punto B… de tal manera… *Estudiantes*	Idea~P~I
63	Varios: A~E	M es punto medio del segmento AB. *Profesora*	Idea~E
64	P: R~P	Es punto medio del segmento AB. Entonces tenemos que en el plano gamma generado por l_2 y m, l_2 es mediatriz del segmento AB; y lo	A~P

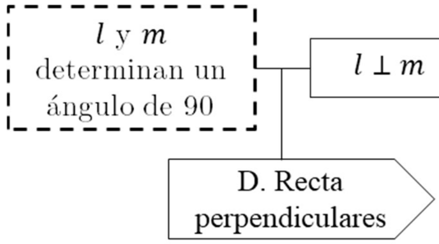
		mismo pasa con l_1: en el plano beta generado por l_1 y m, l_1 es mediatriz del segmento AB [escribe en el tablero: $l_2 = \mathcal{M}_{\overline{AB},\gamma}, l_1 = \mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$].	
		Por ser mediatrices, qué sabemos de esas rectas…	A~P~I
		Estudiantes	
65	Varios: A~E	Cualquier punto equidista de A *y* B.	A~E
		Profesora	
66	P: P~P	Si tomamos cualquier punto de… l_2 equidista de A y B. Entonces si yo tomo T en l_1 y otro punto en l_2 que lo llamamos… K [mientras verbaliza, complementa L16 con los puntos K y T referidos].	A~P
		Y qué sabemos sobre un punto sobre entre T y K…	A~P~I
		Estudiantes	
67	Steven: A~E	Que equidista también…	A~E
		Profesora	
68	P: P~P	Que equidista… por el teorema que probamos [se refiere al T. Interestancia - equidistancia en el Espacio (Pp5). Complementa L16 trazando $\overline{TK}$ y poniendo un punto J como la intersección entre l y $\overline{TK}$ –Figura 115–]. Entonces J equidista de A y B-.  Figura 115. PP8.2: Representación 4 como apoyo en la prueba T. Fundamenta de la Perpendicularidad	Paso~P
		Steven	
69	Varios: A~E	l mediatriz por definición [de mediatriz]…	Paso~E
		Profesora	
70	P: R~E	Ya lo tenemos ¿cierto? Entonces si equidista de A y B, [l] es mediatriz [del $\overline{AB}$ en el plano $\delta_{\overline{AB},l}$] por la definición [de mediatriz]. Listo, ya terminamos…	Paso~E
		Steven, varios	

A la luz de las funciones de estudiantes y profesores en términos de su participación y argumentación, varios aspectos normativos y argumentales pueden ser destacados de la interacción trascrita antes con respecto a la elaboración de la prueba del T. Fundamental de la perpendicularidad (Pp6).

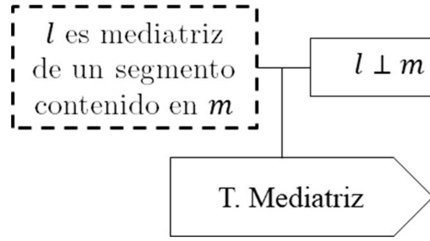
Como se observa en la última columna de la trascripción anterior, en cuanto la argumentación, la profesora tuvo la intención de indagar a los estudiantes sobre datos [46, 48], aserciones [64, 66] o ideas [56, 62] de los pasos claves de la prueba, o complementarlos cuando ella consideró necesario [58, 60]. En cuanto a su participación, la profesora fue esencialmente de repetidora [48, 50, 52, 62, 64, 70] para validar las verbalizaciones de los estudiantes o de portavoz [54, 56, 58, 66, 68] para complementar sus ideas dando nombre a los objetos que intervienen y proveyendo la representación gráfica dinámica. Aunque sólo fue autora en dos de sus intervenciones [46, 60], estas fueron claves para el desarrollo de la prueba. En lo que respecta a los estudiantes, ellos fueron esencialmente autores cuando proveyeron datos, aserciones o ideas de un paso argumental como respuesta a las indagaciones de la profesora.

La anterior descripción se ilustra de manera más específica en lo que se presenta a continuación: Al principio de la interacción, con el propósito tanto de involucrar a los estudiantes en la práctica como de precisar posibles caminos que permitan inferir dicha relación de perpendicularidad, la profesora indagó sobre condiciones suficientes –datos– para poder determinar que dos rectas son perpendiculares –aserción– (**Norma 24**) [46, 48]. Como respuesta, los estudiantes plantearon cuatros ideas (**Norma 29**), las cuales se puede interpretar como los *Datos* de cuatro argumentos abductivos, respectivamente, que se diagraman en la Figura 116:

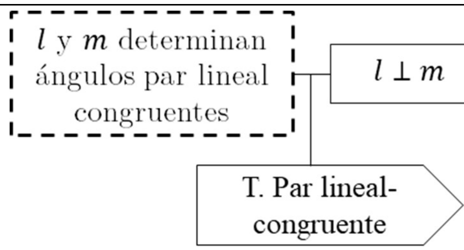
1) Que determinen un ángulo recto [47].
2) Que sea mediatriz de un segmento [49].
3) Que se determinen ángulos par línea y congruentes [51].
4) Que existan puntos A, B uno en cada recta, tal que C equidiste del punto medio del $\overline{AB}$ [53].



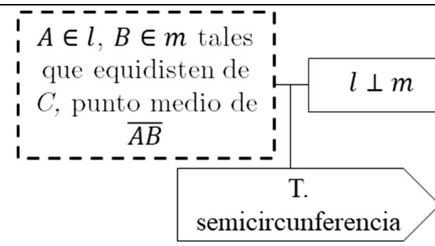
Ab1. Asociado a la idea 1



Ab2. Asociado a la idea 2



Ab3. Asociado a la idea 3



Ab4. Asociado a la idea 4

Figura 116. PP8.2: Argumentos abductivos cuya aserción es $l \perp m$

La profesora, en correspondencia con la **Norma 26**, escogió la idea 2 como orientación para la elaboración de la prueba. Lo que prosiguió fue la explicitación de todos los pasos de construcción que permiten determinar la recta l como mediatriz de un segmento de m [58]. Esto es una evidencia clara de que la elaboración de la prueba estuvo guiada por los pasos de la construcción de un objeto determinado (l como mediatriz de un segmento de m) empleando el EGD Cabri 3D –Pr13– (**Norma 31**). Efectivamente, entre las líneas [60] y [63], esto se llevó a cabo. A la vez que se fueron explicitando los pasos, en general por parte de la profesora [60], ella fue complementando la representación dinámica L16 –Figura 112– hasta tener la representación ilustrada en Figura 115 (**Norma 42**). Cada que fue necesario, la profesora cambio de apariencia los objetos inmersos en la situación para visualizar de mejor manera lo que se va construyendo (**Norma 15**). Finalmente, entre los pasos [64] y [68] la profesora indagó (**Norma 24**) y los estudiantes respondieron (**Norma 29**) sobre las aserciones y garantías que permiten justificar que l es mediatriz de $\overline{AB}$. En ese lapso, la profesora validó lo enunciado por los estudiantes repitiendo lo que ellos dicen (**Norma 25**) [*e.g.*, 62, 64, 70] o siendo portavoz de sus ideas complementándolas con una mejor sintaxis [*e.g.*, 66, 68].

La Tabla 97 precisa los pasos argumentales que conforman el argumento global (Ad7) que prueba Pp6, los cuales fueron identificados de la interacción entre profesora y estudiantes. Es posible decir que tales pasos argumentales se conforman de *Núcleos* y *Pilares* puesto que no fueron explicitadas todas las aserciones (con sus respectivas garantías) que darían cuenta de una prueba exhaustiva (**Norma 33**); de hecho, tampoco fueron explicitados todos los pilares (los no explicitados se presentan en cursiva). Dado que no se realizó el reporte escrito la prueba, la Norma 34 no reguló la práctica.

Tabla 97. PP8.2–Toda la clase: Prueba del T. Fundamental de la Perpendicularidad

Núcleos	**Pilares**
1. α plano, $m, l_{1,}, l_2$ rectas, $m \not\subset \alpha$ y $l_{1,}, l_2 \subset \alpha$, $M \in m$, $l_{1,} \cap l_2 = \{M\}$	Dado
2. $m \perp l_1$, $m \perp l_2$	Dado
3. Sea l recta, $l \subset \alpha, M \in t$	*T. Punto infinitas rectas*
4. Sea $A \in m$, $A \neq M$	*T. Recta infinitos puntos*
5. Sea B tal que $BM = MA$ y $A - M - B$	*T. Localización de puntos*
6. M punto medio de $\overline{AB}$	*D. punto medio*
7. $\overline{KT} \cap t = \{J\}$	*T. Intersección de rectas*
8. $J \in \overline{KT}$	*D. intersección*
9. $T - J - K$	*D. segmento*
10. $TA = TB, KA = KB$	D. Mediatriz
11. $JA = JB$	T. Interestancia- equidistancia
12. Sea $\delta_{\overline{AB},l}$	*T. Intersección de rectas-plano*
13. $t = \mathcal{M}_{\overline{AB},\delta}$	D. Mediatriz
14. $m \perp t$	T. Mediatriz
15. $m \perp \alpha$	D. recta perpendicular a plano

De la práctica descrita, un comentario final vale la pena realizar: ante se dijo que, en correspondencia con la **Norma 31**, la elaboración de la prueba estuvo guiada por el proceso de construcción (Pr10) de *l* como mediatriz de un segmento de *m*. No obstante, la identificación de que ello era lo que había que construir (*i.e.*, la identificación de la idea general que orientó la elaboración de la prueba) fue producto de un ejercicio propuesto por la profesora que llevó a la determinación de potenciales condiciones (datos) que lleven a la tesis del teorema que se quiere probar. En otras palabras, producción de argumentos abductivos que posibiliten un plan es otro asunto estratégico que puede orientar la elaboración deductiva de la prueba del teorema en juego (asunto que complementa la **Norma 31**).

4.4.3.4 *Síntesis y breves comentarios trayectoria didáctica 15*

La trayectoria se focalizó en el abordaje del problema PP8.2 clasificado como de *búsqueda de consecuente*. Cada uno de los momentos descritos se interpretaron como las *prácticas* generales llevadas a cabo por toda la clase cuando colectivamente fueron estudiadas producciones de los estudiantes en relación con tal problema. Específicamente, dichas prácticas fueron: i) estudio colectivo de procedimientos de construcción llevados a cabo por dos grupos de estudiantes; (ii) estudio colectivo de las respuestas dadas al ítem c del problema en cuestión; y (iii) elaboración colectiva de la prueba del T. Fundamental de la perpendicularidad.

En relación con el rol de estudiantes y profesores, varios aspectos normativos sobresalen de las prácticas referenciadas, que de alguna manera plantean diferencias o ratifican aspectos habituales con respecto a lo que venía sucediendo en otras trayectorias de puesta en común. Por ejemplo, con respecto a las dos primeras prácticas, una diferencia normativa es que para esta ocasión recayó sobre los estudiantes la responsabilidad de exponer procedimientos de construcción y exploración cuando la profesora se los solicitó. Esto puede interpretarse como una complementación de las **Normas 13a** y **13b** puesto que, *los estudiantes no solo deben reportar sus procedimientos de construcción o exploración de manera escrita, sino exponerlos a la clase cuando se les solicita*. Sin embargo, sigue siendo la profesora quien advierte falencias, valida procedimientos propuestos (**Norma 19**), sugiere la conjetura correcta (**Norma 21**) y decide cuál enunciado es el que probar de manera colectiva en la sesión de clase. Así mismo, es ella quien finalmente no consideró elaborar colectivamente la prueba de la conjetura Pp7, pero sí consideró hacerlo en relación con el T. Fundamental de la perpendicularidad (Pp6). Este último hecho se interpreta como un actuar reiterado por parte de la profesora que ratifica su manera de proceder en las últimas trayectorias de trabajo colectivo que se han presentado (ver por ejemplo las Trayectorias 11 y 13); esto es, como una nueva norma (de faceta esencialmente epistémica de origen didáctico y de responsabilidad de la profesora –Nlp–) cuyo enunciado es:

> Norma 53: La profesora es quien decide finalmente qué se prueba en el curso de manera colectiva; esto es, no toda conjetura aceptada se prueba de manera colectiva.

Tal Norma es consecuencia de dos asuntos interesantes y de alguna manera antes comentados: por un lado, la profesora prefiere utilizar el tiempo en contenidos que se consideran más importante (**Norma 11**). O, por otro lado, la profesora considera que los estudiantes no tendrían dificultad en hacer la prueba de manera autónoma, basada en las producciones escritas que previamente ella ha recogido.

En la tercera práctica antes referida se evidencia otra de tales acciones reiteradas por parte de la profesora en trayectorias referidas a trabajo de toda la clase. Esto es, no hay un reporte escrito de la prueba realiza de Pp6, aunque sí una explicitación de los pasos argumentales por parte de los estudiantes y profesora en términos de Núcleos y Pilares, en cumplimiento de la **Norma 33** pero no de la **Norma 34**. Así mismo, tal práctica deja una complementación de la **Norma 31** en términos de precisar otra estrategia que puede guiar la prueba de la existencia de un objeto:

> Norma 31: La prueba de la conjetura-solución de un problema que pide la construcción de un objeto (existencia de un objeto) es guiada por el proceso de construcción; de manera más concreta, los pasos de construcción infunden las aserciones de los pasos argumentales de la prueba. *Así mismo, otro asunto estratégico que puede orientar la elaboración de dicha prueba es la producción de argumentos abductivos que posibiliten un plan, cuya aserción es la relación clave inmersa en el objeto cuya existencia se pretende probar.*

Un asunto interesante surgido a propósito del proceso constructivo de los objetos es la necesidad de precisar el plano en el que deben estar contenidos los objetos necesitados para elaborar la prueba. Por su puesto, este es un asunto que no era necesario precisarlo en el Domino de la Geometría Plana dado que los objetos de una situación siempre estaban contenidos en el mismo plano.

En relación con la escritura de la prueba la profesora explicita una variación de la **Norma 27** según la cual, *los estudiantes asumen la responsabilidad de la sintaxis escrita (simbología geométrica) de los elementos que conforman el argumento global y ponerlos en el lugar indicado del formato Aserción-Garantía y Datos luego de terminada la elaboración colectiva de una prueba,* siendo ella quien decide cuál enunciado se prueba en un primero momento de manera colectivamente por parte de toda la clase, o de manera individual por parte de cada grupo de estudiantes (en correspondencia con la **Norma 53**). La Tabla 98 presenta las normas y situaciones asociadas a cada práctica. Se resaltan en negrilla aquellas normas nuevas o que fueron complementadas.

Tabla 98. PP8.2–Toda la clase: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

<table>
<tr><th>Prácticas</th><th>Normas</th><th>Situaciones instruccionales</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Estudio colectivo de procedimientos de construcción llevados a cabo por dos grupos de estudiantes en el EGD Cabri 3D respecto al ítem a de PA8.2</td><td>3, 12a, 13a, 19, 5b.1</td><td>Construcción de una figura</td></tr>
<tr><td>13b, 12b, 21, 14, 5b.1</td><td>Exploración de una figura</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estudio colectivo de las respuestas dadas al ítem c de PA8.2</td><td>13a, 12a, 5b.1</td><td>Construcción de una figura</td></tr>
<tr><td>13b, 12b, 15, 18, 21, 14, 5b.1</td><td>Exploración de una figura</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Elaboración colectiva de la prueba del T. Fundamental de la perpendicularidad (Pp6)</td><td>9, 24, 25, 29, 26, 31, 27, 33, 53, 11</td><td>Elaboración de una prueba</td></tr>
<tr><td>42, 15</td><td>Construcción de una figura</td></tr>
</table>

Los principales *objetos primarios* emergentes de las prácticas fueron los conceptos-definición *Altura de un Triángulo* (C6) y *Triángulos Congruentes* (C5), *Rectas perpendiculares* (C7), *Definición perpendicularidad entre plano y recta* (C3), *Mediatriz de un segmento* (C8) y las proposiciones Pp7 (Dados ΔABC , ΔABD y $\overline{CE}, \overline{DE}$ sus alturas respectivamente, $D \notin \alpha$. Si $\overline{CE} \cong \overline{DE}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta ABD$), *T. Mediatriz* (Pp9), *T Interestancia - equidistancia en el espacio* (Pp5) y *T. Fundamental de la perpendicularidad* (Pp8 que luego se transforma en Pp6). Vale indicar que C5 - C7 y Pp6 - Pp8 surgieron en las dos primeras prácticas, específicamente en el marco de los procedimientos Pr9 - Pr11, mientras que C7, C8 y Pp5 - Pp8 (salvo Pp7) surgieron en la elaboración de Ad7 (prueba de Pp6). Varios lenguajes surgieron en la práctica entre representaciones gráficas dinámicas hechas en el EGD Cabri 3D (L12-L16) y leguaje geométrico esencialmente verbal para comunicar procedimientos de construcción y la prueba Ad7 (**Norma 5b.1**). La Tabla 99 presenta la cronología de todas las normas, principales objetos y situaciones asociadas a la Trayectoria. Por su parte, la Figura 117 expone la configuración (de carácter epistémico) de los principales objetos primarios que emergieron en la trayectoria. Con el propósito de sintetizar y tener un panorama de lo sucedido en ella, la Tabla 99 presenta las normas, objetos y situaciones instruccionales asociadas a dicha trayectoria.

Tabla 99. Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 15

<table>
<tr><th colspan="2">Situaciones</th><th colspan="8">Construcción de una Figura / Exploración de una Figura</th><th colspan="7">Construcción de una Figura /Exploración de una Figura-Formulación de conjetura</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Objetos</td><td>Problemas</td><td colspan="15">PP8.2 ítem a</td></tr>
<tr><td>Procedimientos</td><td colspan="8">Pr9</td><td colspan="7">Pr10</td></tr>
<tr><td>Conceptos/Def</td><td colspan="8">C5 C7</td><td colspan="7">C6 C7</td></tr>
<tr><td>Proposiciones</td><td colspan="8"></td><td colspan="7">Pp7</td></tr>
<tr><td>Argumentos</td><td colspan="8"></td><td colspan="7"></td></tr>
<tr><td>Lenguajes</td><td colspan="8">L12</td><td colspan="7">L13</td></tr>
<tr><td colspan="2">Normas</td><td>3</td><td>12a</td><td>13a</td><td>15</td><td>13b</td><td>12b</td><td>19</td><td>21</td><td>13a</td><td>12a</td><td>13b</td><td>12b</td><td>19</td><td>14</td><td>21</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="6">Construcción de una Figura /Exploración de una Figura-Formulación de conjetura</th><th colspan="10">Elaboración de una prueba / Construcción de una Figura</th></tr>
<tr><td colspan="16">PP8.2 ítem c</td></tr>
<tr><td colspan="6">Pr11 Pr12</td><td colspan="10">Pr13</td></tr>
<tr><td colspan="6">C7 C8</td><td colspan="6">C3 C8</td><td colspan="4" rowspan="2">Ver pilares Tabla 97</td></tr>
<tr><td colspan="6">Pp8 Pp6</td><td colspan="6">Pp9
T. Par línea-congruente
T. Semicircunferencia</td></tr>
<tr><td colspan="6">Ai2 Ad6</td><td colspan="6">Ab1-Ab4</td><td colspan="4">Ad7</td></tr>
<tr><td colspan="6">L14 L15</td><td colspan="10">L16</td></tr>
<tr><td>12a</td><td>12b</td><td>15</td><td>18</td><td>14</td><td>21</td><td>24</td><td>27</td><td>53</td><td>29</td><td>26</td><td>25</td><td>31</td><td>42</td><td>15</td><td>33</td></tr>
</table>

LENGUAJE: Representaciones gráficas dinámicas (L12-L16); Leguaje geométrico verbal y escrito para comunicar procedimientos y prueba (L17)

PA8.2: Para construir el ΔABD del problema anterior, un estudiante propuso la siguiente construcción:

i) Construye $\overline{CE}$ altura relativa al $\overline{AB}$

ii) En un plano β que interseca a α en $\overleftrightarrow{AB}$, construye $m \perp \overleftrightarrow{AB}$, m recta, $E \in m$.

iii) D punto, $D \in m$, $DE = CE$.

a) Represente la situación.

b) ¿Se cumple que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$? Justifique su respuesta.

c) ¿Existe una relación especial entre una recta y alguno de los planos que se pueden determinar? Si es el caso indique la relación, y cuáles la recta y el plano.

Motiva

Resuelve

Expresa y soporta

Regulan el uso

PROCEDIMIENTOS

Pr9: En relación con i, construir una recta perpendicular a $\overline{AB}$ por C en el plano base, llamando E a la intersección de tal recta con $\overline{AB}$. En relación con ii, seguir con exactitud lo enunciado en tal ítem. En relación con iii, construir $\odot E, CE$ en el plano β y nombró D a la intersección de $\odot E, CE$ con m. Al arrastrar el punto A para verificar la corrección de su procedimiento.

Pr10: Básicamente Pr9 modificando lo que respecta al ítem i: construir una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ (no por $\overline{AB}$) por C en el plano base, llamando E a la intersección de tal recta con $\overline{AB}$.

Pr11: Construir el plano δ_{ECD} y $\overline{EF}$ con F en δ_{ECD} y tomar la medida de $\angle AEF$. Arrastrar F para percatarse que tal medida siempre era 90.

Pr12: Básicamente igual Pr11. En lugar de arrastrarse F, ocultar planos (el determinado por A, D y B, y el determinado por A, C y B) y hacer un arrastre de Bola de Cristal para percatarse de la perpendicularidad entre δ_{ECD} y $\overleftrightarrow{AB}$.

Pr13: Pasos 1 a del Ad7. Método directo de prueba deductiva.

PRINCIPALES CONCEPTOS

C3: Definición perpendicularidad entre plano y recta

C5: Triángulos Congruentes

C6: Altura de un Triángulo

C7: Rectas perpendiculares

C8: Mediatriz de un segmento

PRINCIPALES PROPOSICIONES

Pp7: Dados ΔABC, ΔABD y $\overline{CE}, \overline{DE}$ sus alturas respectivamente, $D \notin \alpha$. Si $\overline{CE} \cong \overline{DE}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta ABD$)

Pp9: T. Mediatriz

Pp5: T Interestancia - equidistancia en el espacio

Pp8 transformada en Pp6: T. Fundamental de la perpendicularidad

Conforman

Articulan, Explican validan

ARGUMENTOS

Ai2, Ad6, Ab1-Ab4, Ad7

Figura 117. Configuraciones ontosemióticas epistémicas relativas a la Trayectoria 15: PP8.2 – Toda la clase

4.4.3.5 *Trayectoria didáctica 16: Actividad matemática sobre TE10 – Toda la clase*

Al término de sesión de clase 19, luego de que colectivamente se haya elaborado la prueba de Pp6 (T. Fundamental de la perpendicularidad), la profesora comenta que se podrían adentrar en la elaboración de las pruebas de existencia que habían quedado pendientes (**Norma 9**). Escribe en el tablero los enunciados de los respectivos teoremas:

a) **T. Recta-plano perpendicular punto interno** Sea m una recta y A un punto de ella. Entonces existe un plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A (Pp3).
b) **T. Plano-recta perpendicular punto interno** Sea un plano α y un punto A, tal que $A \in \alpha$. Entonces existe una recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$ (Pp1).
c) **T. Recta-plano perpendicular punto externo** Sea m una recta y $A \notin m$. Entonces existe un plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A (Pp10)
d) **T. Plano-recta perpendicular punto externo** Sea un plano α y un punto A tal que $A \notin \alpha$. Entonces existe una recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$ (Pp11)

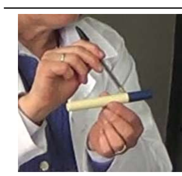
La puesta en común de ideas para la elaboración de las pruebas se llevó a cabo en dos partes: antes de que finalizara la sesión de clase 19, la profesora pidió abordar los dos primeros teoremas (Pp3 y Pp1) en ese orden. Lo respectivo a la unicidad de la recta perpendicular a un plano por un punto del plano (unicidad asociada a Pp1) y a la unicidad del plano perpendicular a una recta por un punto de la recta (unicidad asociada a Pp3), junto con los dos teoremas restantes (Pp10 y Pp11) se trató en la primera parte de la sesión de clase 20.

Para ilustrar la interacción llevada a cabo en estos fragmentos de la clase, se presenta lo sucedido en relación con la elaboración de la prueba de los siguientes dos teoremas:

i) **T. Recta-plano perpendicular punto interno** Sea m una recta y A un punto de ella. Entonces existe un plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A (Pp3).
ii) **T. unicidad Plano-recta perpendicular punto interno:** Sea un plano α y un punto A, tal que $A \in \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$ (Pp12: Teorema de unicidad asociado al Pp1).

Desde esta perspectiva, el análisis de esta trayectoria se particiona en dos momentos específicos, cada uno focalizado en la prueba de uno de estos dos teoremas.

Momento 1. Elaboración colectiva prueba del T. Recta-plano perpendicular punto interno (Pp3): Luego de que la profesora precisara que iban a empezar por la prueba de Pp3 [1], varios estudiantes proponen ideas para elaborarla. A continuación, se trascribe y analiza la interacción correspondiente:

	Emisor: FPar	Enunciado ***Referencia a un agente anterior***	FArg
1	P: A~P	La más sencilla es esta [señala en el tablero el enunciado de Pp3]. ¿Qué se les ocurre?	Idea~P~I
2	Zayra: A~E	Pues… sería… por la perpendicular por punto interno… *Profesora*	G~E
3	P: R~P	Pero para hacer la perpendicular por punto interno, qué necesito… *Zayra*	D~P~I
4	Varios: A~E	Un plano. *Profesora*	D~E
5	P: P~P	O sea, la primera cosa que vamos a hacer es un plano [Ha tomado un marcador que representa la recta dada y hace un gesto con la mano derecha tratando de indicar con ello un plano que contiene la recta representada por el marcador (Figura 118)]. Y ahí construyo…  Figura 118. Representación 1 gestual prueba Pp3 *Varios estudiantes*	A~P~I
6	Varios: A~E	Una perpendicular. *Profesora*	D~E
7	P: P~P	Una perpendicular. Ahí va una recta perpendicular… En este plano, puedo encontrar una recta perpendicular. Entonces ya tengo una perpendicular [Toma un esfero y lo pone de forma tal que parece perpendicular al marcador (Figura 119)]. Y ahora qué hago…  Figura 119. Representación 2 gestual prueba Pp3 *Varios estudiantes y Zayra*	A~P
8	Jefferson: A~E	Otro plano y una perpendicular… *Profesora*	A~E
9	P: R~P	Otro plano y otra recta perpendicular,	A~P

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>P: A~P</td><td>y esas dos rectas generan el plano perpendicular, porque el teorema fundamental me dice que es suficiente dos [rectas perpendiculares a la recta dada]. [Hace un gesto con las manos representado el plano perpendicular Toma un esfero y lo pone de forma tal que parece perpendicular al marcador (Figura 120)]. Y ahora qué hago…

Figura 120. Representación 3 gestual prueba Pp3</td><td rowspan="2">Paso~P</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sandra</td></tr>
</table>

En esta interacción, como es usual en las últimas con respecto a la elaboración de una prueba, no se hace un reporte escrito de la prueba misma. De la interacción se obtiene que los pasos argumentales se conformaron por *Núcleos* y *Pilares* puesto que no fueron explicitadas todas las aserciones (con sus respectivas garantías) que darían cuenta de una prueba exhaustiva (**Norma 33**). La Tabla 101 presenta el Argumento deductivo Global (Ad8) asociado. Los pilares escritos en cursiva no fueron explicitados. Al ser esta una prueba de la existencia de un objeto se podría pensar que la **Norma 45** debería estar presente en la práctica. Al respecto, vale indicar que de alguna manera dicha Norma sí está presente en la práctica puesto que, aunque no se usa directamente la definición de perpendicularidad entre recta y plano (C3), se usa el T. Fundamental de la perpendicularidad que la sustituye.

Tabla 100. TE10–Toda la clase: Prueba del T. Recta-plano perpendicular punto interno

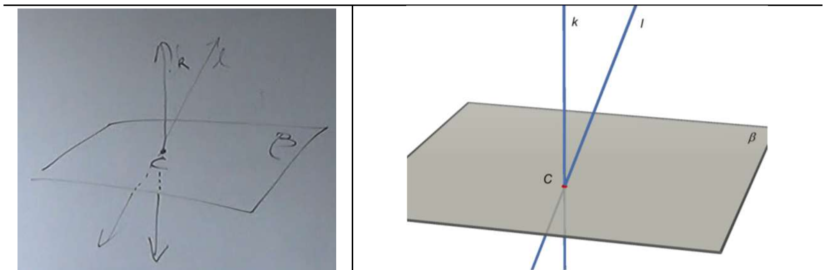
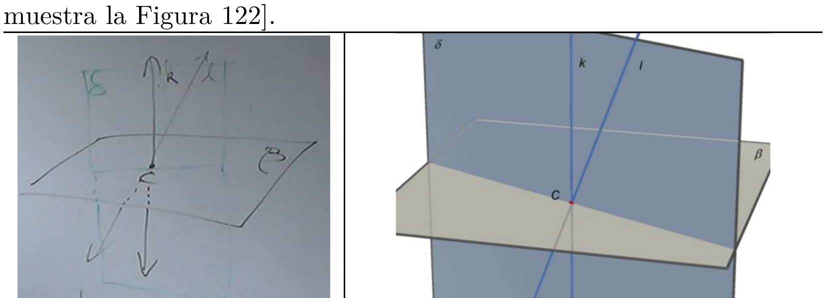
Núcleos	**Pilares**
1. Sea m una recta y A un punto de ella	Dado
2. Sea δ un plano que contiene a m	*T. Recta - infinitos planos*
3. $l \perp m$ por A en δ	T. Recta - recta perpendicular punto interno en el plano
4. Sea β un plano que contiene a m diferente a δ	*T. Recta - infinitos planos*
5. $n \perp m$ por A en β	T. Recta - recta perpendicular punto interno en el plano
6. $\alpha_{l,m} \perp m$ por A	T. Fundamental de la perpendicularidad

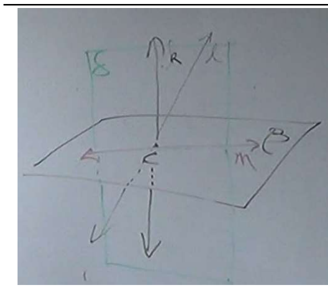
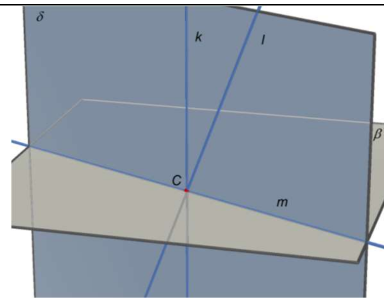
Para este caso, las funciones de la profesora en cuanto a la participación se centraron en dos asuntos: ser repetidora o ser portavoz de las ideas dadas por los estudiantes. En relación con la argumentación, como es usual, ella tuvo un papel de indagación [1, 3, 5] (en correspondencia con la **Norma 24**) y de validar o complementar las ideas de los estudiantes en relación, principalmente, con las aserciones de la prueba [7, 9] (en correspondencia de la **Norma 25)**. En relación con la última función, para esta ocasión la profesora no actuó de manera prototípica puesto que, aunque complementó las ideas de los estudiantes, lo hizo proveyendo una representación gestual en la que usó sus manos y marcadores para ilustrar y describir las ideas (Figuras 118 - 120 –L18–) –en correspondencia con las **Normas 42**– sin dar nombres específicos a los objetos. De igual forma, no asumió la responsabilidad de la sintaxis escrita de las aserciones (Núcleos) o garantías (Pilares) de la prueba.

Por su parte, los estudiantes, en correspondencia con la **Norma 29** fueron autores de las ideas o aserciones, y eventualmente una garantía, de los pasos argumentales. Fueron enunciados de manera verbal cuando la profesora les indagó al respecto [*e.g.*, 2, 4, 6, 8].

Terminada la interacción anterior, la profesora puso a consideración de la clase la elaboración de la prueba de Pp1. Llevada a cabo una actividad similar a la descrita para Pp3, la profesora finaliza la sesión de clase 19 advirtiendo que, como Tarea Extraclase (TE10), los estudiantes deben escribir las pruebas de las proposiciones tratadas en la sesión de clase (Pp1, Pp3, Pp6, Pp7, Pp10 y Pp11) y las unicidades asociadas a Pp3 y Pp1. Dicha tarea se corresponde con la variación de la **Norma 27,** según la cual los estudiantes se hacen responsables de la sintaxis escrita de las pruebas usando un formato específico, para este caso, Núcleos y Pilares (**Norma 34**).

Momento 2. Elaboración colectiva prueba T. Unicidad Plano-recta perpendicular punto interno (Pp12): En la primera parte de la sesión de clase 20, la profesora solicita a los estudiantes hacer la puesta en común de sus pruebas de las unicidades relativas a Pp3 y Pp1. La profesora pide a alguien del Grupo C que comente lo que hicieron al respecto de la unicidad asociada a Pp1 (Pp12). Brayan 1 atiende tal solicitud. Se trascribe y analiza la interacción correspondiente:

1	Brayan 1: A~E	Pues nosotros dijimos que había dos rectas perpendiculares a una recta del plano... *Profesora*	A~E
2	P: P~P	[Hace una representación gráfica estática en el tablero en la que le pone nombre a los objetos (ver Figura 121)]. A todas las rectas del plano beta.  a. Representación estática hecha en el tablero — b. Reproducción en Cabri 3D de la representación estática Figura 121. Representación 1 hecha por la profesora prueba de Pp1 asociada a TE10 *Brayan 1*	R~P La profesora se encarga de la sintaxis: hace una representación gráfica y pone nombres a los objetos. De otro lado, refuta lo dicho por Brayan 1 puesto que afirma que las rectas son perpendiculares a toda la recta de β y no solo una
3	Brayan 1: R~E	No. Sólo a una. *Brayan 1*	A~E
4	P: A~P	¿Cuál recta? *Brayan 1*	A~P~I
5	Brayan 1: A~E	Generamos un plano determinado por las rectas l y k, y…[silencio] *Profesora*	A~E
6	P: P~P	A ver. Ellos generaron un plano que contiene a estas dos rectas [l y k]. Y qué tiene de especial ese plano… este plano delta qué tiene de especial… [Mientras habla, complementa la representación como lo muestra la Figura 122].  a. Representación estática hecha en el tablero — b. Reproducción en Cabri 3D de la representación estática Figura 122. Representación 2 hecha por la profesora prueba de Pp1 asociada a TE10 *Brayan 1*	A~P~I
7	Natalia: A~E	La intersección de los dos planos es una recta. *Profesora*	A~E

8	P: R~P	La intersección de los dos planos es una recta. Esa es la recta que ustedes necesitan [se dirige al Grupo C]. [...] Entonces la recta que se necesita es precisamente la de intersección. Entonces llamémosla m. [Completa la representación según como se ve en la Figura 123].  a. Representación estática hecha en el tablero  b. Reproducción en Cabri 3D de la representación estática Figura 123. Representación 3 hecha por la profesora prueba de Pp1 asociada a TE10	A~P
		Oigan, importantísimo saber en qué plano estamos trabajando. Entones, en qué plano está trabajando [dirigiéndose a Brayan 1]…	Idea~P~I Con el ánimo de que Brayan explique mejor su idea, le pide explicitación de su idea
		Natalia	
9	Brayan 1: A~E	En el Beta *Profesora*	I~E
10	P: A~P	¿En el Beta? Nooo. En el delta; ahí está todas las rectas. Esta la recta k, la recta l y la recta m.	R~P
		Pero ¿qué saben de la recta k con respecto a la recta m? *Brayan 1*	A~P~I
11	Varios: A~E	Que son perpendiculares. *Profesora*	A~E
12	P: R~P	Que son perpendiculares.	A~P
		Y ¿de l con m? *Varios*	A~P~I
13	Varios: A~E	Que son perpendiculares. *Profesora*	A~E
14	P: R~P	Que son perpendiculares.	A~P
	P: A~P	Entonces, contradice un teorema que tenemos para el plano. ¿cuál teorema? *Varios*	G~P~I
15	Varios: A~E	La unicidad de la perpendicular por un punto de la recta. *Profesora*	G~E
16	P: P~P	Que solo puede haber una perpendicular a una recta [en el plano]. Entonces fíjense que toda nuestra teoría está en el plano y nosotros	G~P

tenemos que ver cómo de las situaciones en el espacio podemos llegar al plano para poder usar tranquilamente nuestros teoremas [del Domino de la Geometría Plana]. Esta forma de contradecir es la usual que vamos a usar de aquí en adelante [para probar unicidades]. Es decir, vamos a tratar de llegar a una situación en un plano que no puede ser porque ya nuestra teoría de Geometría Plana dice imposible.

Profesora

En esta interacción, como es usual en las últimas con respecto a la elaboración de una prueba, no se hace un reporte escrito de la prueba misma. Las principales aserciones (Núcleos) son verbalizadas entre profesora y estudiantes; no sucede lo mismo con relación a las garantías (Pilares) correspondientes. De la interacción se puede inferir que el argumento elaborado es de índole deductivo que emplea el método indirecto por contradicción (Ad9); esto puesto que (i) Brayan 1 niega la tesis del teorema y supone la existencia de dos rectas perpendiculares al plano dado por un punto de este [1], y (ii) la última aserción mencionada consiste en la contradicción de un teorema instalado para la clase perteneciente al dominio de la Geometría Plana [15, 16]. De la interacción se obtiene que los pasos argumentales se conformaron por *Núcleos* y *Pilares* puesto que no fueron explicitadas todas las aserciones (con sus respectivas garantías) que darían cuenta de una prueba exhaustiva (**Norma 33**). La Tabla 101 presenta el Argumento Global (Ad9) asociado. Los pilares escritos en cursiva no fueron explicitados.

Tabla 101. TE10–Toda la clase: Prueba del T. Unicidad Plano-recta perpendicular punto interno

Núcleos	**Pilares**
1. Sean l, k rectas tales que $l \perp \alpha$ y $k \perp \alpha$, α un plano	Negación de la tesis
2. Sea $\delta_{l.k}$ un plano	*T. Rectas - plano*
3. $\delta_{l.k} \cap \beta = m$	*T. Intersección de planos*
4. $l \perp m$ y $k \perp m$ en $\delta_{l.k}$	*D. recta perpendicular a plano*
5. $\neg(l \perp m$ y $k \perp m$ en $\delta_{l.k})$	T. Unicidad recta perpendicular a una recta punto interno en el plano.

Para este caso, la profesora tuvo dos funciones principales en su participación: indagar sobre los núcleos de la prueba (en correspondencia con la **Norma 24**) y ser portavoz de las ideas o aserciones provistas por el los estudiantes. En relación con la última función, la profesora no sólo les puso nombres a los objetos citados por los estudiantes en sus verbalizaciones, sino que produjo complementaciones a las mismas proveyendo una representación gráfica estática en el tablero para apoyar la elaboración de la prueba (Figura 123 –L19–) –en correspondencia con las **Normas 42** y **15**–. No obstante, no asumió la responsabilidad de la sintaxis escrita de las aserciones (Núcleos) o garantías (Pilares) de la prueba. Por su puesto, la profesora actuó en correspondencia de la **Norma 25** pues ella validó las ideas o aserciones hechas por los estudiantes repitiendo lo que ellos dicen [*e.g.*, 8, 12, 14], o no las validó proveyendo refutaciones a las mismas [2, 10]. En ese marco, cuando fue necesario, proveyó claridades o complementaciones a las ideas planteadas por los estudiantes [*e.g.* 2, 6, 10, 14, 16].

Por su parte, los estudiantes, en correspondencia con la **Norma 29** proveyeron las ideas o aserciones, y eventualmente una garantía, de los pasos argumentales de manera verbal cuando la profesora les indagó al respecto [*e.g.*, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15]. Vale recordar que, para ese día, ellos debieron llevar escritas sus pruebas como parte de la Tarea Extraclase 10, usando el formato Núcleos y Pilares (**Norma 34**)

4.4.3.6 *Síntesis y breves comentarios trayectoria didáctica 16*

La trayectoria se focalizó en la elaboración colectiva de la prueba de dos teoremas: T. Recta-plano perpendicular punto interno (Pp3) y la unicidad de la recta perpendicular a un plano por un punto del plano (Pp12 –unicidad asociada a Pp1–). En consecuencia, la principal situación instruccional correspondiente a la trayectoria fue *elaboración de prueba*. En ese marco, hubo dos situaciones instruccionales más: de *construcción de figuras*, evidenciada con los lenguajes L18 y L19, y de *instalación de proposiciones/conceptos*, evidenciada mediante la prueba de todos los teoremas que fueron estudiados y proclamados como tal por parte de la profesora. En relación con esta última situación, es pertinente aclarar que a la vez que se instalaron las proposiciones Pp1, Pp3, Pp10 y Pp11, los objetos-conceptos *Recta perpendicular a plano* (C1) y *Plano perpendicular a recta* (C2) fueron instalados también en consonancia con la **Norma 40**. Cada uno de los momentos descritos se interpretaron como las *prácticas* generales llevadas a cabo por toda la clase cuando colectivamente abordaron las pruebas presentadas; estas fueron: i) elaboración colectiva de la prueba del T. Recta-plano perpendicular punto interno (Pp3); y (ii) elaboración colectiva de la prueba T. Unicidad Plano-recta perpendicular punto interno (Pp12).

De la trayectoria analizada dos aspectos importantes son destacados por la profesora, los cuales se puede interpretar como asuntos normativos nuevos que podrían regular la elaboración de una prueba en el Dominio de la Geometría del Espacio:

i. En ambas prácticas la profesora recalcó la identificación del plano clave en la situación (y los objetos contenidos en él) como un asunto muy importante a la hora de hacer pruebas en el Dominio de la Geometría del Espacio. Para el caso de la prueba del Pp3, por ejemplo, insistió en la necesidad de tener dos plano para poder construir en ellos, respectivamente, una recta perpendicular a la recta dada por un punto de ella [3, 5]; para el caso de Pp12, resaltó como clave la creación del plano $\delta_{l.k}$ ya que contenía los objetos suficientes (rectas l, m y k tales que $l \perp m$ y $k \perp m$) para inferir una contradicción [8, 10].
Este asunto (identificación del plano clave) es retomado en la primera parte de la intervención [16] puesto que menciona que en el desarrollo de una prueba es pertinente estudiar cómo las situaciones del Espacio se pueden llevar al dominio de la Geometría con el propósito de poder usar teoremas de dicho dominio ya instalados en el sistema.

ii. De manera específica, en la intervención [16] de la trascripción relativa a la prueba de Pp12, la profesora recalcó como una estrategia válida de pruebas de unicidad usar el método (procedimiento) indirecto de contradicción llevando la situación a un plano y estableciendo una contradicción en el dominio de la Geometría Plana.

Así las cosas, dos normas nuevas pueden ser enunciadas:

Norma 54: En el desarrollo de una prueba del Dominio de la Geometría es pertinente precisar los planos en los que están contenidos los objetos inmersos en la situación. Esto con el fin de no cometer errores y precisar su utilidad en la elaboración de una prueba. Específicamente, es pertinente pensar cómo las situaciones del Espacio incluyen hechos del dominio de la Geometría Plana con el propósito de poder usar teoremas de dicho dominio ya instalados en el sistema.

Norma 55: Una estrategia usual para probar una unicidad en el espacio es usar el método indirecto por contradicción llevando la situación a un plano y estableciendo una contradicción en el dominio de la Geometría Plana.

Otros dos asuntos normativos se pueden comentar a la luz de lo sucedido en la trayectoria: (i) Se ratifica la variación de la **Norma 27** según la cual, *los estudiantes asumen la responsabilidad de la sintaxis escrita (simbología geométrica) de los elementos que conforman el argumento global.* Y (ii) la Norma 45 se complementa puesto que la elaboración de prueba de la existencia de un objeto no necesariamente satisfacer las características dadas por su definición; también puede satisfacer las condiciones impuestas por un teorema que garantiza el cumplimiento de tales características. Con el propósito de sintetizar y tener un panorama de lo sucedido en la Trayectoria, la Tabla 102 presenta las normas y situaciones asociadas a dichas prácticas.

Tabla 102. TE10–Toda la clase: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Prácticas	**Normas**	**Situaciones instruccionales**
Elaboración colectiva prueba del T. Recta-plano perpendicular punto interno	9, 24, 25, 33, 29, 34, 45, variación 27, **54**	Elaboración de una prueba
	42	Construcción de una figura
	35a/40	Instalación de una proposición/concepto
Elaboración colectiva prueba T. Unicidad Plano-recta perpendicular punto interno	9, 24, 25, 33, 29, 34, variación 27, **54**, **55**	Elaboración de una prueba
	42, 15	Construcción de una figura
	35a/40	Instalación de una proposición/concepto

Por otro lado, los principales *objetos primarios* emergentes de las prácticas descritas fueron los siguientes, todos ellos intervinientes en las pruebas expuestas (Ad8 y Ad9): conceptos-definición *Plano perpendicular a recta* (C2), *Recta perpendicular a plano* (C3) y *Rectas perpendiculares* (C7), las proposiciones *T. Fundamental de la perpendicularidad* (Pp6), *T. Recta - recta perpendicular punto interno en el plano* (Pp13), *T. Unicidad recta perpendicular a una recta punto interno en el plano* (Pp14), y el procedimiento de prueba por método directo empleado para la prueba de Pp3 (Pr14), y método de indirecto utilizado en la prueba de Pp12 (Pr15). Por su puesto, las proposiciones Pp1, Pp3, Pp6, Pp7, Pp10 y Pp11 también estuvieron presentes, si bien no todas en dichas pruebas, si en la sesión de clase 20 puesto que fueron enunciados como teoremas, esto es, instalados en el sistema teórico. Varios lenguajes surgieron en la práctica entre representaciones gestuales y estáticas (L18 y L19) hechas con las manos y marcadores, y con en el tablero, respectivamente. Así mismo, el leguaje geométrico esencialmente verbal (L20) emergió para comunicar los pasos argumentales de Ad8 y Ad9 (**Norma 5b.1**). La Figura 117 expone la configuración (de carácter epistémico) de los principales objetos primarios que emergieron en la trayectoria. Por su parte, la Tabla 103 presenta la cronología de las normas, principales objetos y situaciones asociados a tal trayectoria.

Tabla 103. Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 16

Situaciones		Elaboración de prueba/*Construcción de una Figura*	Elaboración de prueba/*Construcción de una Figura*	Instalación de proposición/ concepto
Objetos	**Problemas**	TE10		
	Procedimientos			
	Conceptos/Def	C7 C2	C2 C1	C2 C1
	Proposiciones	Pp13 Pp6	Pp3 Pp12	Pp3 Pp12
	Argumentos	Ad8	Ad9	
	Lenguajes	*L18* L20	L20	L20
Normas		9 24 29 25 *42* 27 54 45 55 33 34	9 24 29 *42* *15* 25 54 55 33 34	35a 40
		5b.1		

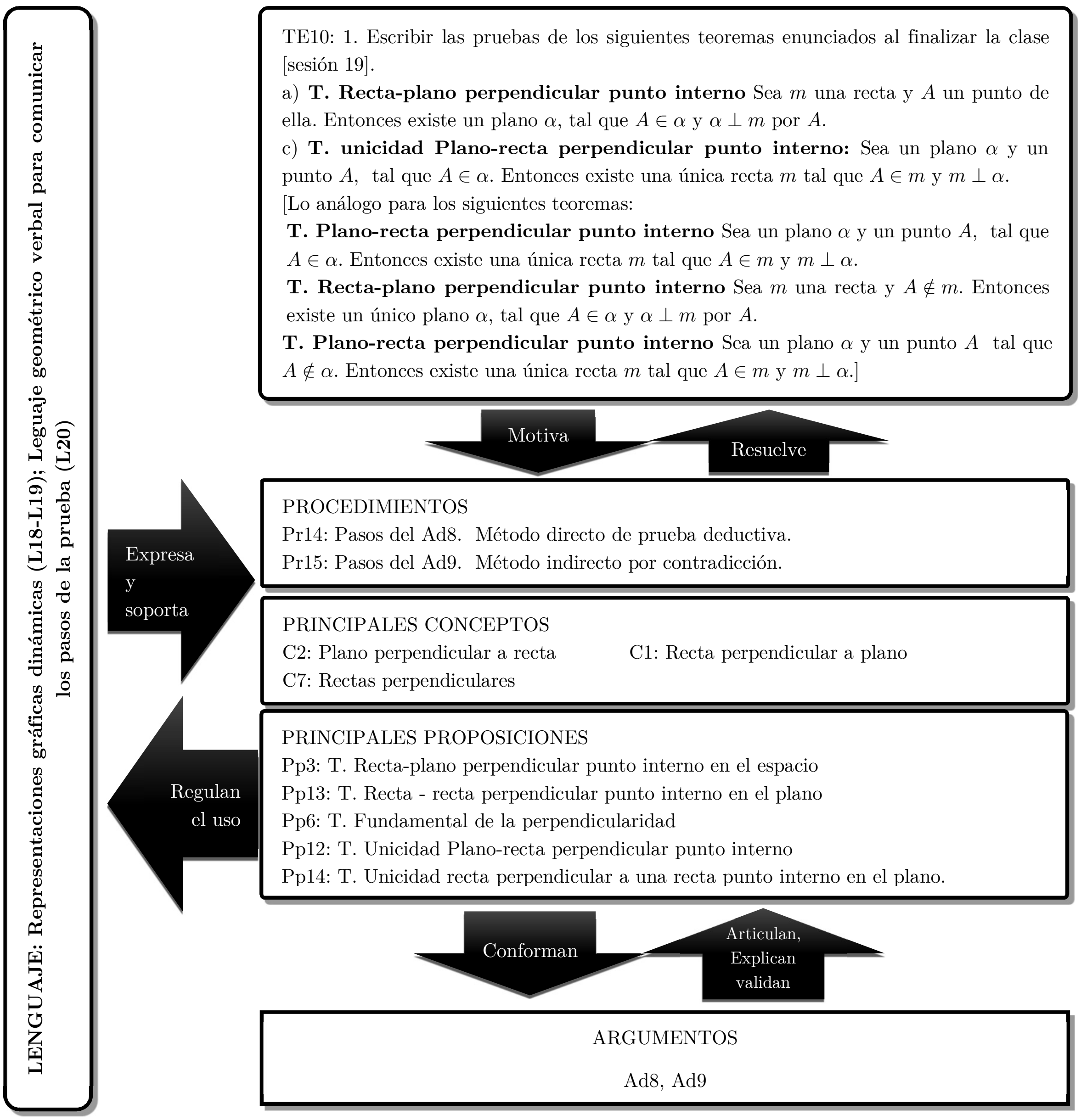


Figura 124. Configuraciones ontosemióticas epistémicas relativas a la trayectoria didáctica 16: TE10 –toda la clase–

4.4.4 Síntesis y conclusiones Bloque de Problemas N° 5

Se presenta un compendio de las normas que regularon las prácticas ocurridas durante el tratamiento del Bloque de Problemas N° 5 poniendo especial énfasis en aquellas que fueron emergente (nuevas) respecto a los otros Bloque de Problemas analizados. Tales normas se clasifican según las situaciones instruccionales en las que estuvieron presentes. De igual forma a lo presentado en la Síntesis del Bloque N° 4, se exaltan las principales diferencias normativas entre los bloques anteriores y el Bloque en cuestión (Bloque N° 5).

4.4.4.1 *Compendio de normas por situación instruccional*

Enseguida se exponen todas las normas que regularon las prácticas que tomaron lugar cuando los estudiantes (por grupos o individualmente) y toda la clase, abordaron los problemas PP7 y sus auxiliares (PA7.1 y TE9), y PP8 y sus auxiliares (PP8.1, PP8.2 y TE10) tendientes a instalar en el sistema teórico objetos claves de la perpendicularidad en el espacio (T. Fundamental de la perpendicularidad –Pp6–, recta perpendicular a plano, punto interno o externo –C3– y plano perpendicular a recta, punto interno o plano –C2–). La Tabla 104 presenta un compendio de las normas presentes en el bloque (indicando con negrilla aquellas emergentes), las prácticas asociadas y las situaciones instruccionales correspondiente. Vale indica que las normas emergentes son nuevas o complemento de otras ya existentes (en su mayoría, relacionadas directamente con la argumentación). Por su parte, la Tabla 105 presenta los enunciados de tales normas emergentes indicado el complemento de las normas ya existentes con letra en cursiva. Así mismo, la Tabla 106 organiza las normas presentadas en la Tabla 105 clasificándolas según cada situación instruccional del Bloque en cuestión.

Tabla 104. Bloque N° 5: Compendio de normas y su dinámica

TD[55]	**Prácticas**	**Normas**	**Situaciones instruccionales**
10 G	Realización de la construcción en Cabri 3D con el fin de representar las propuestas planteadas como solución a PP7 (Grupo I).	15, 16, 12a, 18, 7, 13a, **51**	Construcción de una Figura
	Realización de la construcción en Cabri 3D con el fin de representar las condiciones dadas en el problema (Grupo B).	15, 12a, 18	
	Realización de exploración de las representaciones dinámicas (L1-L5), con arrastres de bola de cristal o de puntos	12b, 18, parcialmente 13b	Exploración de una figura

[55] TD indica Trayectoria Didáctica. La G que acompaña el número de la Trayectoria Didáctica indica trabajo individual por grupos; La TC que acompaña el número de la Trayectoria Didáctica indica trabajo colectivo o de toda la clase.

	(para verificar –Grupo I–; para descubrir –Grupo B–).		
	Producción de argumentos de las respuestas dadas a las preguntas (Grupo I).	9a, parcialmente 13d	
11 TC	Realización de la construcción en Cabri 3D con el fin de representar las propuestas planteadas como solución a PP7 (Pr5 y Pr2).	Pr5, Pr6: 15, 12a, 13a Pr2: 13a, 15, 16, **19**, 39	Construcción de una Figura
	Realización de exploración de las representaciones dinámicas (L7-L8), con arrastres de bola de cristal o de puntos.	Pr5, Pr6: 15, **12b**, 18, **19**, 9a	Exploración de una figura
	Implementación entrevista semiestructurada. Producción de argumentos de las respuestas dadas a las preguntas.	Pr6: 18, **19**, 38 parcialmente 40, 29, **52**, 31, **21,** 39	Instalación de un concepto
12 G	Exploración teórica para verificar si la propuesta del estudiante ficticio es verdadera o falsa	7, 13d, 16, 18, 9	Exploración (teórica) de una situación
13 TC	Exploración empírica para verificar si la propuesta del estudiante ficticio en PP8.1 es verdadera o falsa	12b, 7, 16, 9a	Exploración de una figura
	Estudio superficial prueba de T. Interestancia - equidistancia en el Espacio (Pp5)	35a, 9, 42, 11	Instalación de una proposición
14 G	Construcción robusta de la situación y objeto buscado en el PP8.	13a, 12a, 15	Construcción de una figura
	Exploración de la representación para verificar, mediante el arrastre de los puntos *A* o *B*.	13b, 12b	Exploración de una figura
	Formulación de una conjetura.	13c, 14	
	Elaboración de la prueba de la conjetura formulada.	13d, 9, 39, 31, 33, 34	Elaboración de una prueba
15 TC	Estudio colectivo de procedimientos de construcción llevados a cabo por dos grupos de estudiantes en el EGD Cabri 3D	3, 12a, 13a, 19	Construcción de una figura
		13b, 12b, 14, 21	Exploración de una figura/Formulación de conjetura
	Estudio colectivo de las respuestas dadas al ítem c del problema PPA8.2	**13a**, 12a	Construcción de una figura
		13b, 12b, 15, 18, 14, 21	Exploración de una figura/Formulación de conjetura
		9, 24, 25, 29, 26, **31**, **27**, 33, **53**, 11	Elaboración de una prueba

	Elaboración colectiva de la prueba del T. Fundamental de la perpendicularidad (Pp6)	42, 15	Construcción de una figura
16 TC	Elaboración colectiva prueba del T. Recta-plano perpendicular punto interno	9, 24, 25, 33, 29, 34, **27**, **45**, **53**, **54**	Elaboración de una prueba
		42	Construcción de una figura
		35a, 40	Instalación de una proposición/concepto
	Elaboración colectiva prueba T. Unicidad Plano-recta perpendicular punto interno	9, 24, 25, 33, 29, 34, **27**, **53**, **54**, **55**	Elaboración de una prueba
		42, 15	Construcción de una figura
		35a, 40	Instalación de una proposición/concepto

Tabla 105. Bloque N° 5: Enunciado normas emergentes (nuevas)

Norma	Enunciado
12b	Complemento: Usa la exploración (medir, arrastrar) en EGD de la situación involucrada en el problema para verificar o descubrir. *Ciertas funciones del EGD ayudan a establecer con mayor precisión lo que se descubre o verifica* (*e.g., decimales para las medidas de ángulo, marcas de ángulo específicas que indican cierta información, arrastre de bola de cristal*).
13a, 13b	Complemento: Los estudiantes se deben responsabilizar de hacer construcciones en el EGD y explorar al momento de abordar un problema independientemente de si proveen un reporte escrito de ello. Así mismo, *ellos deben estar prestos para exponerlos a la clase cuando se les solicite*.
19	Complemento: La profesora se encarga de hacer correcciones de fondo y forma respecto a los procedimientos de construcción que los estudiantes proveen como solución de un problema. Ella, finalmente, escoge aquellas que son consideradas como correctas. Además, *debe hacerse cargo de proveer ideas nuevas cuando los estudiantes están estancados*.
21	Complemento: La profesora se encarga de precisar cuáles son las conjeturas que podrían ser probadas luego de llevarse a cabo un estudio conjunto entre ella y los estudiantes sobre aquellas conjeturas propuestas como solución a un problema. *Además, se encarga también de determinar cuál exploración es suficiente para determinar una propiedad plausible*.
31	Complemento: La prueba de la conjetura-solución de un problema que pide la construcción de un objeto (existencia de un objeto) es guiada por el proceso de construcción; de manera más concreta, los pasos de construcción infunden las aserciones de los pasos argumentales de la prueba. Así mismo, *otro asunto estratégico que puede orientar la elaboración de dicha prueba es la producción de argumentos abductivos que posibiliten un plan, cuya aserción es la relación clave inmersa en la proposición que se pretende probar*.
45	La elaboración de prueba de la existencia de un objeto debe satisfacer o bien las características dadas por su definición, o *bien las condiciones de un teorema que garantiza*

	el cumplimiento de tales características. Cuando sea necesario o útil, la representación gráfica que se tiene del mismo.
51	Nueva: El mejor procedimiento de construcción es el que sea más general, esto es, aquel que no impone condiciones particulares a los objetos dados.
52	Nueva: Tres aspectos son suficientes para que los estudiantes queden convencidos de la existencia de un objeto: (i) Realización de una construcción robusta del objeto en cuestión, (ii) realización de la prueba de existencia, y (iii) realización, por parte de la profesora, de una exploración basada en una construcción blanda que sugiera la existencia del objeto.
53	Nueva: La profesora es quien decide finalmente qué se prueba en el curso de manera colectiva; esto es, no toda conjetura aceptada se prueba de manera colectiva en un primer momento.
27	Variación: Cuando la profesora así lo decida según la Norma 53, los estudiantes asumen la responsabilidad de la sintaxis escrita (simbología geométrica) de los elementos que conforman un argumento global y ponerlos en el lugar indicado en alguno de los formatos establecidos para ello (Aserción-Garantía y Datos, o Núcleos-Pilares), bien sea luego de terminada la elaboración colectiva de una prueba o cuando ellos deben proveerla sin que hubiese mediado una elaboración colectiva previa.
54	Nueva: En el desarrollo de una prueba del Dominio de la Geometría es pertinente precisar los planos en los que están contenidos los objetos inmersos en la situación. Esto con el fin de no cometer errores y precisar su utilidad en la elaboración de una prueba. Específicamente, es pertinente pensar cómo las situaciones del Espacio incluyen hechos del dominio de la Geometría Plana con el propósito de poder usar teoremas de dicho dominio ya instalados en el sistema.
55	Nueva: Una estrategia usual para probar una unicidad en el espacio es usar el método indirecto por contradicción llevando la situación a un plano y estableciendo una contradicción en el dominio de la Geometría Plana.

Tabla 106. Bloque N° 5: Normas ↔ situaciones instruccionales

Situaciones instruccionales	**Normas**
Construcción de una Figura	7, 12a, **13a**, 15, 16, 18, **19**, 39, 42, **51**, 9a
Exploración de una figura/Formulación de conjetura	**12b**, 9a, **13b**, 13c, 14, 15, 16, 18, **19**, 21, 13d
Instalación de un concepto	18, **19**, 38, 29, **52**, 31, **21**, 39, 38, parcialmente 40
Instalación de una proposición (teorema)	35a
Elaboración de una prueba	13d, 9, 39, 33, 34, 24, 25, 29, 26, **31**, **27**, **45**, **53**, **54**, **55,** 11,
Exploración Teórica	7, 13d, 16, 18, 9, 12b, 9a

4.4.4.2 *Principales diferencias normativas con respecto a los Bloques anteriores*

La Tabla 106 resalta aquellas normas que surgen como emergentes (son nuevas) para cada situación instruccional y que permite destacar las principales diferencias con relación a los anteriores bloques. Estas diferencias se pueden encapsular en dos grandes aspectos, uno focalizado en el cambio del sujeto responsable en la realización de ciertas prácticas, y otro focalizado en estrategias para la elaboración de una prueba.

Con relación al primer aspecto, en este Bloque se hicieron explícitas nuevas responsabilidades para los estudiantes como, por ejemplo, exponer procedimientos de construcción o exploración en el EGD Cabri 3D cuando se les solicite (Normas 13a, 13b), deben los estudiantes asumen la responsabilidad de la sintaxis escrita (simbología geométrica) de los elementos que conforman un argumento global (Norma 27). Así mismo, emergieron nuevas responsabilidades para la profesora, como hacerse cargo de proveer ideas nuevas cuando los estudiantes están estancados (Norma 19), determinar cuál exploración es suficiente para determinar una propiedad plausible (Norma 21) y de determinar que proposición se prueba de manera colectiva (Norma 53). Esta precisión de responsabilidades a la luz de las normas citadas (específicamente, Normas 27 y 53), puso de manifiesto una intención consistente en que los estudiantes ganaran autonomía, principalmente en lo que concierne a la elaboración de una prueba (argumentos deductivos globales). En relación con esto último, como se expuso en varias trayectorias de este bloque (*e.g.*, 15, 16), las pruebas de las proposiciones que fueron instaladas (Pp1, Pp3, Pp6, Pp7, Pp10 y Pp11) se expresaron de manera verbal y explicitando los Núcleos y Pilares (Norma 33), revelando una diferencia notoria con respecto a lo correspondiente en el Bloque N° 1.

Con relación al segundo asunto, la profesora pone de manifiesto elementos estratégicos para elaborar una prueba (argumento deductivo) de la en el dominio de la Geometría del Espacio, a saber: producir argumentos abductivos que posibiliten un plan, cuya aserción es la relación clave inmersa en la proposición que se pretende probar (Norma 31), precisar los planos en los que están contenidos los objetos inmersos en la situación con el fin de, por ejemplo, pensar cómo las situaciones del Espacio incluyen hechos del dominio de la Geometría Plana ya instalados en el sistema (Norma 54), y usar el método indirecto por contradicción para probar unicidades llevando la situación a un plano y estableciendo una contradicción en el dominio de la Geometría Plana (Norma 55).

Además de los dos aspectos antes citados vale indicar que, en las prácticas llevadas a cabo tanto por profesora como por estudiantes, se puso de manifiesto la importancia de ciertas funciones del EGD que ayudan a establecer con mayor precisión lo que se descubre o verifica en situaciones de exploración (e.g., uso de decimales para las medidas de ángulo, marcas de ángulo específicas que indican cierta información, arrastre de bola de cristal) –Norma 12b–.

4.5 BLOQUE DE PROBLEMAS N° 6: INSTALACIÓN DE PLANO MEDIADOR

Este bloque de problemas consta de un Problema Principal, un Problema Auxiliar y un problema de la Tareas Extraclase 11 y se desarrolla entre las sesiones de clase 20 y 24. Las temáticas de los problemas giran en torno al conjunto mediador y plano mediador, esto es, una especificidad de la relación perpendicularidad entre el plano y la recta que ya se venía estudiando desde el Bloque anterior.

Tabla 107. Problemas Bloque N° 6

Dominio temático: Geometría del Espacio	**Temas:** Conjunto mediador y Plano mediador	
Problema Principal 9 [PP9]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Para responder las siguientes preguntas, deben usar la geometría dinámica Cabri 3D. La tarea no es solo responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en el que incluyan para cada numeral la siguiente información: i) El proceso de construcción de los procesos involucrados en la situación. ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o bola de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o bola de cristal-, si se redefinió algún objeto, etc.). iii) Una conjetura que responda a la pregunta del problema. iv) La demostración de la conjetura (núcleos y pilares). Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes?	Usar la definición de mediatriz como herramienta para solucionar el problema, si la situación se aborda en un plano. Generar la necesidad de introducir el Plano Mediador de un segmento para solucionar el problema, si los segmentos dados son alabeados.	20, 21, 22, 24
Problema Auxiliar 9.1 [PA9.1]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Para responder las siguientes preguntas, deben usar geometría dinámica Cabri 3D. La tarea no es sólo	Precisar las características del plano mediador y, con base en	22

responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en la que incluyan para cada numeral la siguiente información: i) El proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación. ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.). iii) Una conjetura que responda la pregunta del problema. 1. a) Dados dos puntos A y B en un plano α, ¿existen puntos P y Q talque $P, Q \notin \alpha$ y equidistan de A y B? Si es el caso, represéntelos. b) Sea $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$. ¿Qué relación existe entre Q y $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$? c) ¿Qué relación existe entre los puntos del $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$ y los puntos A y B? 2. a) ¿Cuántas mediatrices tiene un segmento? b) ¿Se agrupan las mediatrices para formar una figura geométrica espacial?	ello, introducir la Definición de Plano Mediador y el T. Plano Mediador	
Tarea extraclase 11 [TE11]	**Objetivo**	**Sesión N°**
Un estudiante propone la siguiente demostración para el teorema: *El conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$) es igual al plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$.* ¿Está usted de acuerdo con ella? Explique su respuesta [En la Trayectoria 18, se expone el enunciado completo del problema]	Corregir la demostración provista del teorema *El conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$) es igual al plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$* el cual es otra forma de caracterizar al Plano Mediador.	24

A continuación, se presenta el análisis didáctico correspondiente a los problemas del bloque expuestos en la Tabla 107. Concretamente, los problemas del Bloque se escogieron por dos razones fundamentales: (i) Presentó una gran riqueza argumentativa por parte del Grupo I, cuya participación en las puestas en común fue reconocida como importante por parte de la profesora; además sus prácticas (y asuntos explicitados mediante la implementación de una entrevista) dejaron ver cierta autonomía a la luz de las normas que regularon sus prácticas. Y (ii) fue el bloque donde se empezó a reconocer cierta estabilidad en el sistema de normas (*i.e.*, en este bloque, no fueron reconocidos mayores cambios respecto a lo sucedido en el Bloque 5). Debido a ello, este es el último Bloque que se analiza en el marco de este estudio investigativo.

Para alivianar el texto y teniendo presente que no hubo mayor abordaje colectivo y riqueza argumentativa normativa/argumentativa en relación con PA9.1 y la TE11, respectivamente, no se presenta un análisis didáctico riguroso asociado a estos. No obstante, se describe gruesamente lo acontecido en relación con ellos.

4.5.1 Análisis relativo a PP9, PA9.1 y TE11: Plano mediador

Durante la última parte de la sesión de clase 20 la profesora propone el problema PP9. Con este, ella pretende que los estudiantes consideren la situación planteada en el Dominio de la Geometría del Espacio, no solo en el Dominio de Geometría Plana (en correspondencia con la **Norma 7**), indicando que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ pueden ser alabeados o coplanares. Desea que los procedimientos de solución lleven a establecer, respectivamente, un punto de la recta m de intersección entre $\beta_{\overline{AC}}$ y $\beta_{\overline{BD}}$[56] o el punto E de intersección entre $\mathcal{M}_{\overline{AC}}$ y $\mathcal{M}_{\overline{BD}}$ y, a la luz de tales procedimientos, proveer la validación deductiva de la solución al problema (en correspondencia con la **Norma 31**). En lo que respecta al PA9.1, este se propone en la sesión de clase 21 con el propósito de instalar el objeto-concepto *plano mediador* necesario para poder validar teóricamente la solución de PP9 en el Dominio de la Geometría del Espacio.

En relación con este par de problemas, se identifican dos trayectorias didácticas, una referida al trabajo del Grupo I de estudiantes cuando aborda PP9, y otra referida al trabajo de toda la clase en relación con los tres problemas (PP9, PA9.1 y TE11).

4.5.1.1 *Trayectoria didáctica 17: Actividad matemática sobre PP9–Grupo I*

El problema PP9 es abordado por los grupos durante 20 minutos aproximadamente en la sesión de clase 20. Para contextualizar al lector, se presenta de nuevo su enunciado:

[56] $\beta_{\overline{XY}}$ es la notación simbólica que indica el *plano mediador* del $\overline{XY}$.

PP9: Para responder las siguientes preguntas, deben usar Cabri 3D. La tarea no es solo responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en la que incluyan para cada numeral la siguiente información:

i) El proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación.

ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.).

iii) Una conjetura que responda la pregunta del problema.

iv) La demostración de la conjetura (Núcleos y pilares).

Problema: Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes?

En relación con la actividad del Grupo I, vale decir que ellos dieron respuesta a los ítems i y iii de la tarea propuesta: no reportaron una exploración porque a su criterio no la hicieron, sólo hicieron el proceso de construcción; y no hicieron una prueba de su solución porque el tiempo no les fue suficiente. La actividad de los estudiantes se puede dividir en seis momentos concretamente: i) Lectura de la tarea e interpretación de la misma [1,6]; ii) propuesta de solución: una esfera [7,14; 45; 54]; iii) proceso de construcción de los segmentos dados ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ congruentes) de forma tal que no sean coplanares [15, 27]; iv) reporte verbal a la profesora de tal proceso [28,44]; v) propuesta de solución: poner un punto E aleatorio [45, 52]; vi) propuesta de solución: planos perpendiculares [53, 55, 80]. Fueron escogidos los momentos *ii* y *vi* para hacer el análisis por cuanto las propuestas de solución tuvieron algún desarrollo y, en consecuencia, produjeron argumentos en mayor medida. Se concentra la atención en la última propuesta de solución (basada en una analogía) que, entre otras cosas, fue el momento que tuvo mayor extensión en la actividad de los estudiantes. A continuación, se presenta el análisis de los dos momentos escogidos para ello.

Cabe destacar que con el fin de complementar la información de las prácticas seguidas por los estudiantes y de las normas que las regularon, fue realizada una entrevista a los estudiantes posterior a la culminación de la clase. Como fue precisado en la metodología del estudio, para que ellos evocaran lo sucedido, previo a la formulación de cada pregunta, yo, en función de entrevistador-investigador [Inv] reproducía un video que registraba el actuar del grupo en relación con la pregunta que se iba a realizar (Mackey & Gass, 2005). Los fragmentos de la entrevista se irán presentado en el momento que corresponda según la actividad de los estudiantes para que sea más atinada y clara la complementación de la información que se puede obtener de las respuestas de los estudiantes.

Momento ii. Esfera como propuesta de solución: Luego de leído el problema, Brayan 2 expone una primera propuesta de solución. Se trascribe la respectiva interacción:

7	Brayan 2:	Pues, hallando una esfera ¿no?
8	Jefferson:	Vamos haciendo y pues vamos mirando.
9	Brayan 2:	Pero recopilemos ideas.
10	Jefferson:	Pues abra un archivo.
11	Brayan 2:	Pongámoslo [se refieren al computador] en la mitad [Le pasa el computador a Jefferson]
12	Jefferson:	Bueno, bueno.
13	Andrés:	Hay que ponerlos en un plano [se refiere a los dos segmentos]. Son dos esferas.
14	Brayan 2:	Es un punto que equidista en los extremos de los segmentos.
⋮		
45	Brayan 2:	Entonces, hay que encontrar un punto que equidiste de los extremos de los cuatro puntos.
⋮		
54	Brayan 2:	¿No es equidistante con estos cuatro puntos, y tenemos el criterio lado, lado, lado?

Brayan 2 concibe que la solución al problema consiste en encontrar un punto (el E solicitado) de manera que equidiste de los extremos de los segmentos dados ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$) [14, 45]. Teniendo eso en mente, propone como solución al problema una esfera (Pr1). No obstante, él no precisa las condiciones de tal esfera ni cómo la usaría para solucionar el problema. Tampoco, por qué concibe que el punto solución es uno que equidiste de los puntos A, B, C y D.

Con el propósito de precisar la que impulsó al estudiante a proponer su idea, en la entrevista ya referenciada se le indagó al respecto. Se trascribe y analiza la interacción suscitada por dicha entrevista.

Trascripción			Análisis
1	Inv:	[Muestra el video desde la línea 14 hasta la 45] ¿Por qué se te ocurrió esa idea [la dicha en la línea 45]?	Brayan 2 plantea un posible plan de solución produciendo una argumento abductivo (Ab1) en [2], indicado especialmente por el uso los términos "se pedían triángulos congruentes" aludiendo a la *aserción* del argumento (lo que se desea establecer), y "podríamos hacer una esfera"
2	Brayan 2:	Es que como se pedían triángulos congruentes, entonces podríamos hacer una	

esfera que contuviera los cuatro puntos… 3 Inv: ¿Cuáles puntos? 4 Brayan 2: Los extremos de los segmentos dados, los congruentes… Los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. 5 Inv: Y la solución al problema, ¿cuál sería? 6 Brayan 2: El centro de la esfera.	aludiendo a la posibilidad de un *dato* que implique dicha aserción (Figura 125).

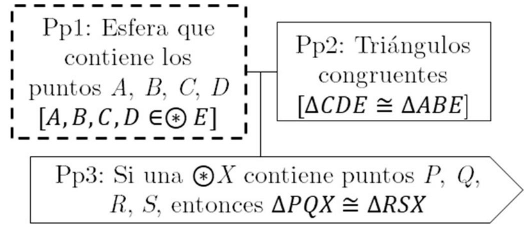


Figura 125. PP9: Ab1 producido por Brayan

7 Inv: [Continua la reproducción del video hasta la línea 54[57]] ¿Por qué haces esa pregunta? ¿cuál era tu intención con ella? [dirigiéndose a Brayan 2] 8 Brayan 2: Es que yo pensaba que, al tener un punto, el centro de la esfera, pues equidista de los cuatro, *A*, *B*, *C* y *D*. Y así por lado lado lado [criterio de congruencia], los triángulos serían congruentes y ya.	Con su actuar, Brayan 2 pone de manifiesto un aspecto que complementa la **Norma 12a** a partir del cual sugiere la producción de un argumento abductivo como estrategia para proveer un plan de solución al problema (Molina & Samper, 2018).Para argumentar que el centro de una esfera que contenga los puntos *A*, *B*, *C*, *D* sería la solución al problema, en [8] Brayan 2 propone un argumento deductivo (en correspondencia con la **Normas 9** y **39**) compuesto de dos pasos argumentales (Ad1) -Figura 126-. Legitima su argumento Ab1 al transformarlo en un argumento deductivo (Ad1) válido, en correspondencia con la **Norma 49**.

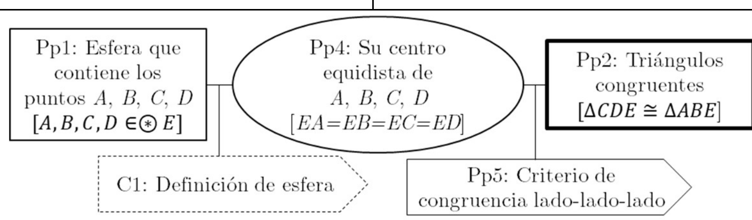


Figura 126. Ad1 propuesto por Brayan

9 Inv: Pero no hicieron la esfera que tú pensabas… [dirigiéndose a Brayan] 10 Andrés: No. Otra. La que se usó para construir los segmentos *CD* y *AB* congruentes [líneas 23 a 43]. 11 Brayan 2: Es que Jefferson hizo un punto *E* y quería ensayar varios casos a ver si se podía solucionar el problema.	Brayan 2 explicita en [11] por qué no construyeron la esfera propuesta por él como solución al problema. Básicamente esto ocurre dado que Jefferson propuso otra idea de solución. En [15], Andrés explicita una refutación a la solución propuesta por Brayan 2 (en correspondencia con **Norma 47**): No es necesario tener todos los lados de los dos triángulos congruentes entre sí, para que los triángulos sean congruentes (Pp6:). Es suficiente que los lados

[57] En el video, Brayan 2 pregunta: ¿No es equidistante con estos cuatro puntos, y tenemos el criterio lado, lado, lado?

⋮		[Brayan se ausenta de la entrevista]
14	Inv:	¿Y tú [dirigiéndose a Andrés] por qué decías que la esfera no servía?
15	Andrés:	Ah, luego discutimos [se refiere a una discusión que tuvo con Brayan después de que la clase acabó]. Es que él [Brayan] quería que los cuatro [puntos] equidistaran del punto [E], y nosotros [Andrés y Jefferson] decíamos que sólo se necesitaban dos… Dos segmentos, lados correspondientes y los otros dos correspondientes.
16	Inv:	Ah, no todos los segmentos congruentes.
17	Andrés:	Sí, sino de dos en dos.

correspondientes de los dos triángulos sean congruentes entre sí, para inferir su congruencia (Pp2).

Interpretamos que Andrés y Jefferson proveen una refutación al argumento Ab1 provisto por Brayan (Ab2T). Si bien, Brayan propone una solución plausible al problema, sus compañeros conciben que esta es una solución particular, que impone condiciones no necesarias.

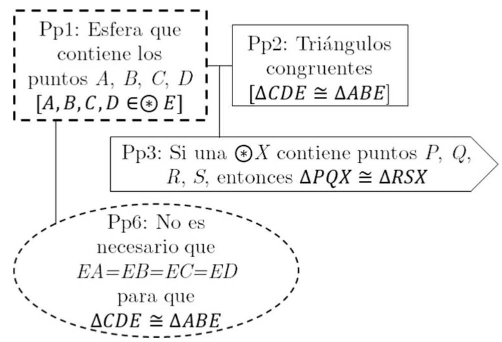


Figura 127. Ab1T con refutación

La entrevista realizada pone de manifiesto las pretensiones de Brayan 2 al proponer como solución construir una esfera que contenga los puntos A, B, C y D (Pr1), y cómo sus argumentos (y el proceso de argumentación respectivo) articulan los objetos de su configuración: Ante la pregunta del entrevistador *¿Por qué se te ocurrió esa idea*?, el estudiante alude a un argumento abductivo (Figura 125) para inferir un dato (Pp1) que provee un objeto (concepto/definición *esfera* -C1-) útil para solucionar el problema. Luego, con el objetivo de argumentar que el objeto concepto *centro de esfera* (C3) presente en Pp1 solucionaría el problema (esto es, demostrar Pp3: Pp1→Pp4 empleado como garantía en Ab1), Brayan 2 transforma Ab1 en dos argumentos deductivos (Figura 126). En ellos, el estudiante usa como garantías C1 implícitamente (*definición de esfera*) y Pp5, respectivamente. Finalmente, Andrés explicita una refutación al Ab1, mediante la conjunción de dos objetos *proposición*, Pp6 y Pp5. Dada la riqueza expuesta, se concibe pertinente presentar la configuración cognitiva (principalmente asociada a la actividad de Brayan 2) articulada por los argumentos citados (Ver Figura 128).

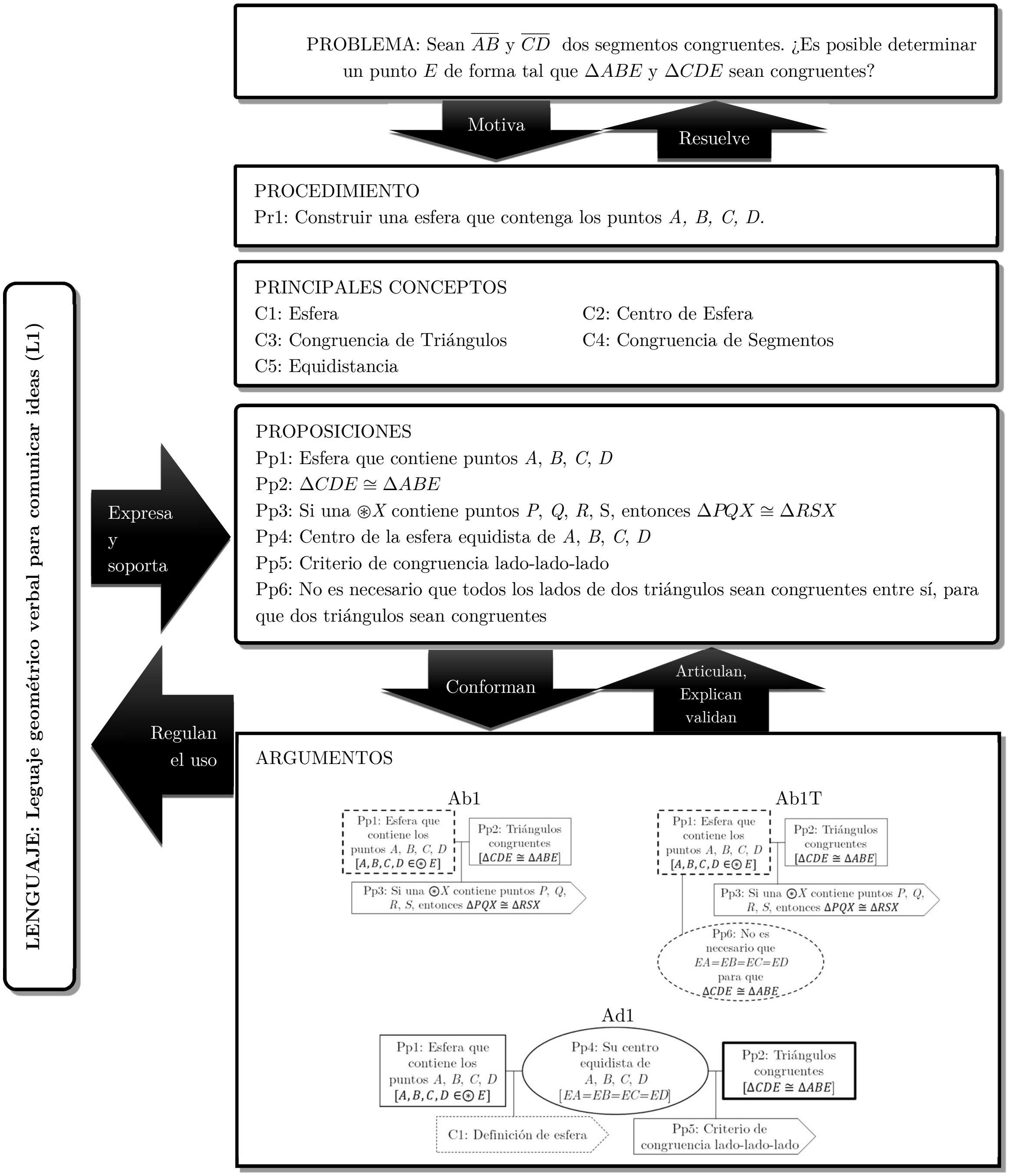


Figura 128. Configuración cognitiva respecto a la propuesta de solución de Brayan 2

Momento vi: Planos mediadores como propuesta de solución: Retomando lo realizado en clase por el Grupo I, en el momento Andrés propone su procedimiento de solución. Le indica a Jefferson (quien estaba manejando el EGD Cabri 3D) qué objetos construir. Los estudiantes tienen construidos los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ alabeados y congruentes. Andrés ha estado mirando el enunciado del problema en la hoja que les fue entregada, mientras sus compañeros proponían sus ideas. Se presenta la trascripción de la interacción correspondiente a ese momento:

53 Andrés: Hágase el plano… o sea… directo…

⋮

55 Andrés: Sí. Ahora haga el segmento AC y el punto medio de AC [se dirige a Jefferson].

56 Jefferson: ¿AC?

57 Andrés: Sí.

58 Jefferson: ¿Para qué?

59 Andrés: Luego haga el plano perpendicular AC, para no… En el plano.

60 Jefferson: Espere, espere, yo estoy haciendo eso [el punto medio de $\overline{AC}$], pero ¿para qué?

61 Andrés: Para que equidiste.

62 Jefferson: [Construye el $\overline{AC}$ y su punto medio]

63 Brayan: Ahora, el plano perpendicular.

64 Andrés: El plano perpendicular.

65 Jefferson: Por este punto [señala el punto medio del $\overline{AC}$ y hace la respectiva construcción empleando la herramienta *Plano Perpendicular* (Figura 129)].

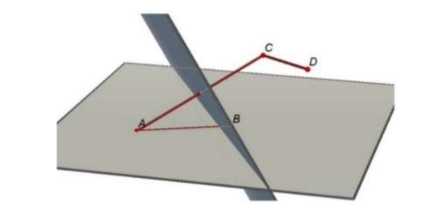


Figura 129. Representación gráfica Plano Mediador de $\overline{AC}$

66 Andrés: Sí, por ese punto

67 [Andrés reporta por escrito lo que llevan hecho].

68 Andrés: Ahora haga lo mismo con D y B

69 Jefferson: ¿Con D y B?

70 Andrés: Sí, claro, haga lo mismo.

71 Jefferson: ¿Y ahí qué, igual? ¿Punto medio y un plano?

72 Andrés: Si, igual punto medio y un plano, y la intersección entre los dos [se refiere a los dos planos construidos] es una recta.

73 Jefferson: Punto medio y un plano perpendicular a este segmento, por este punto [Verbaliza mientras hace la respectiva construcción del plano perpendicular al $\overline{BD}$ por su punto medio (Figura 130)].

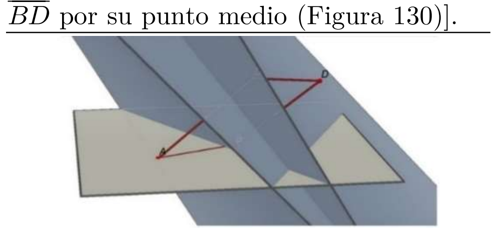


Figura 130. Representación gráfica de Planos Mediadores de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

74	Brayan 2, Andrés:	Sí.
75	Andrés:	No, mueva aquí a ver [le sugiere a Jefferson que arrastre caja de cristal para ver la construcción realizada] ¿Cómo es que se escribe esfera [se refiere a la notación]?
76	Jefferson:	La bolita pero con una estrella adentro.
⋮		
79	Andrés:	Creo que equidista a los puntos [se refiere a la recta de intersección]. Creo, no se… Ah, sí…
80	Brayan 2:	Sí, porque la intersección…una de las propiedades de esta y de esta… la mediatriz. [Termina la clase. El proceso de construcción que reportan en la hoja que entregan a la profesora se presenta en la Figura 131].

Trascripción del reporte

$\overline{AB} \subset \propto$
$C \notin \propto$
$\circledast\, C, AB$
$D \in \circledast\, C, AB$
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$
E' punto medio $\overline{AB}$
F punto medio $\overline{DC}$
δ plano, $\delta \perp \overline{AB}, E' \in \delta$
β plano, $\beta \perp \overline{CD}, F' \in \beta$
l recta, $l = \delta \cap \beta$
E punto, $E \in l$
$\Delta ABE \cong \Delta CDE$

Figura 131. Reporte escrito de la solución al problema

Andrés propone a sus compañeros un procedimiento (Pr2) para solucionar el problema. Este se resume en [80], línea en la cual se presenta el reporte escrito respectivo (expresado en simbolización geométrica y de teoría de conjuntos –Figura 131, L2-). Como resultado de dicho procedimiento, surge una representación dinámica (Figura 129 y Figura 130) en EGD (L3). De la actividad de los estudiantes vale comentar los siguientes asuntos: (i) El reporte escrito no se corresponde en sentido estricto con lo sugerido por Andrés y ejecutado por Jefferson: en él se alude a que los planos δ y β son perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente; en realidad, dichos planos se construyeron perpendiculares a $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. (ii) Los estudiantes no ejecutan los últimos dos pasos del procedimiento de construcción pues el tiempo se les agotó y debieron entregar su reporte a la profesora. (iii) Los estudiantes actuaron en correspondencia con la **Normas 13a** y **12a** pues producen un procedimiento de construcción robusta para solucionar el problema. En ese procedimiento aluden a un objeto nuevo (plano mediador) sugerido por una herramienta del EGD; en este sentido, sus prácticas estás reguladas por las **Normas 7**, **16** y **18.**

Con el propósito de precisar la que impulsó al estudiante a proponer su idea, en la entrevista ya referenciada se le indagó al respecto. Se trascribe y analiza la interacción suscitada por dicha entrevista:

<table>
<tr><th colspan="3">Trascripción</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>18</td><td>Inv:</td><td>[Reproduce un video hasta [53]] tú acabas de decir que lo harías directo ¿A qué te refieres con hacerlo directo?</td><td rowspan="8">Ante la pregunta del entrevistador, el estudiante explicita un procedimiento (Pr3) para solucionar el problema, considerando los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en un plano. Dicho Pr3 no fue explicitado por Andrés en la clase. El procedimiento es el siguiente:
1. Dibujar $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
2. Dibujar $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$
3. Dibujar, para $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ su respectiva mediatriz
4. Dibuja el punto de intersección entre tales mediatrices y lo llama E.

Como resultado de tal procedimiento produce una representación gráfica estática (Figura 132 –L4–) que se presenta en [25]. En correspondencia con la Norma 15, le pone nombre a su representación.

Los principales objetos conceptos involucrados son Mediatriz de un Segmento (C6) y Punto de intersección de Mediatrices (C7). Otro concepto clave es el de relación de equidistancia (C5) como se observará en el argumento que sigue.</td></tr>
<tr><td>19</td><td>Andrés:</td><td>Aaaah. Es que yo, cuando estaba ahí dibujando, yo había dibujado un segmento con la mediatriz. Es que yo primero lo hice en el plano con las mediatrices.</td></tr>
<tr><td>20</td><td>Inv:</td><td>O sea, tú hiciste dos segmentos congruentes en el plano…</td></tr>
<tr><td>21</td><td>Andrés:</td><td>Y con las mediatrices, como se intersecaban en un punto, pues yo ahí…</td></tr>
<tr><td>22</td><td>Inv:</td><td>Las mediatrices de cuáles segmentos…</td></tr>
<tr><td>23</td><td>Andrés:</td><td>[Andrés hace un dibujo en una hoja de dos segmentos aparentemente congruentes]</td></tr>
<tr><td>24</td><td>Inv:</td><td>¿Cómo se llaman esos segmentos?</td></tr>
<tr><td>25</td><td>Andrés:</td><td>AB y CD [les pone nombre en el dibujo a los segmentos antes representados. Luego dibuja las mediatrices de tales segmentos y nombra E al punto de intersección (Figura 132)].</td></tr>
</table>

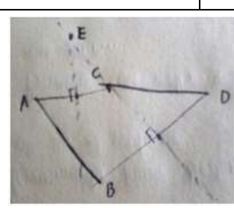


Figura 132. Diagrama estático de mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

<table>
<tr><td>26</td><td>Inv:</td><td>O sea, haces las mediatrices de los segmentos…</td><td rowspan="2">En correspondencia con la Norma 9, el estudiante produce un argumento deductivo (Ad2) para validar que el punto E equidista de A y C, y de B y D (Figura 133).</td></tr>
<tr><td>27</td><td>Andrés:</td><td>De los segmentos AC y BD y no de los dados, AB y CD, ¿sí? La idea es que</td></tr>
</table>

equidistara este y este [señala AE y EC] y este con este [BE y DE].

28 Inv: Y equidistan, ¿por qué?

29 Andrés: Por la definición de mediatriz.

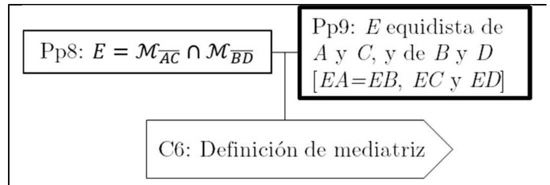
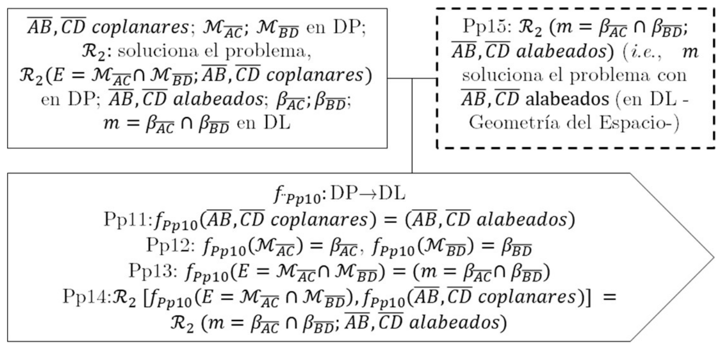


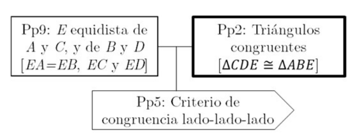
Figura 133. Ad2 propuesto por Andrés

Para continuar con la entrevista, el video es reproducido hasta la intervención [69]. En este punto, hago la siguiente pregunta: *Acá tú sugeriste construir el punto medio del segmento AC y el plano perpendicular al segmento por su punto medio. ¿Por qué se te ocurre eso*? Al respecto, surge el siguiente diálogo:

Trascripción	**Análisis**
30 Andrés: Porque estaba viendo *varias* [se refiere a que en ese semestre estaba cursando el curso *Cálculo en Varias Variables*] y ahí nos decían que el plano es al espacio como la recta es al plano, y de ahí me surgió la generalización. 31 Inv: Ah ya. O sea, tú evocas cosas del curso de Cálculo en Varias Variables en donde te dicen que… este, el plano es al espacio como la recta es al plano, y coges esa representación que tienes en el plano con la mediatriz y tratas… 32 Andrés: Pues después, ahí está la herramienta Plano Perpendicular [se refiere a la herramienta que muestra el software]	Andrés explicita por qué se le ocurre emplear planos perpendiculares por el punto medio de los $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ para solucionar el problema (Pr4). Recurre a una analogía para ello [30]: *El plano es al espacio como la recta es al plano* (Pp10). Este hecho indica que Andrés está inmerso en un proceso de argumentación informal por analogía (**Norma 9a**): *Fase de acceso.* Con el ánimo de buscar una solución para segmentos no coplanares (i.e., en el Dominio de la Geometría del Espacio -DL), recurrió al Dominio de la Geometría Plana (DP) en el cual ya tenía una solución. *Fase de correspondencia.* Andrés, usa su analogía (Pp10) para implícitamente formar f_{Pp10}: DP→DL a través de la cual determina tres correspondencias básicas y dos relaciones $\mathcal{R}$, a saber [36]: Pp11:$f_{Pp10}(recta) = plano$ Pp12:$f_{Pp10}(segmentos\ coplanares) = segmentos\ alabeados$, Pp13: $f_{Pp10}(punto) = recta$ $\mathcal{R}_1$: *perpendicularidad* de un segmento con una recta o con un plano. $\mathcal{R}_2$: punto o recta *soluciona* el problema En términos del problema, los datos con los que cuenta Andrés quedan instanciados así: $\overline{AB}, \overline{CD}$ *coplanares*; $\mathcal{M}_{\overline{AC}}$; $\mathcal{M}_{\overline{BD}}$; $E = \mathcal{M}_{\overline{AC}} \cap \mathcal{M}_{\overline{BD}}$ en DP, donde $\mathcal{R}_1$ ya está involucrada en el objeto mediatriz. $\overline{AB}, \overline{CD}$ *alabeados*; $\beta_{\overline{AC}}$; $\beta_{\overline{BD}}$; $m = \beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}}$ en DL, donde $\mathcal{R}_1$ ya está involucrada en el objeto plano mediador.

33	Inv:	O sea, ¿terminaron usando esa herramienta?	En consecuencia, las correspondencias utilizadas por el estudiante quedan instanciadas como sigue: Pp11:$f_{Pp10}(\overline{AB},\overline{CD}\ coplanares) = (\overline{AB},\overline{CD}\ alabeados)$ Pp12: $f_{Pp10}(\mathcal{M}_{\overline{AC}}) = \beta_{\overline{AC}}$, $f_{Pp10}(\mathcal{M}_{\overline{BD}}) = \beta_{\overline{BD}}$ Pp13:$f_{Pp10}(E = \mathcal{M}_{\overline{AC}} \cap \mathcal{M}_{\overline{BD}}) = (m = \beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}})$ *Fase de trasferencia*: Es posible decir que el estudiante ha realizado un argumento analógico (Aa1) –Figura 134– a partir del cual ha inferido que *la recta de intersección entre los planos mediadores soluciona el problema* –Pp15– (objeto de la Geometría del Espacio –DL– resultado de trasferir el objeto *punto de intersección entre mediatrices soluciona el problema* de la Geometría Plana –DP–) [42].  Figura 134. Aa1 producido por Andrés
34	Andrés:	Sí.	
35	Inv:	¿Y cómo la usaron?	
36	Andrés:	Pues en vez de usar mediatrices, hicimos los planos.	
37	Inv:	Planos perpendiculares por el punto medio…	
38	Andrés:	Que se intersecan.	
39	Inv:	Se intersecaban en qué…	
40	Andrés:	En una recta	
41	Inv:	Y la solución al problema cuál sería…	
42	Andrés:	Un punto de esa recta. Cualquier punto sobre esa recta solucionaría el problema.	

Continuando con la entrevista, se le pregunta a Andrés por lo expresado en [79]: “Creo que equidista a los puntos [se refiere a la recta de intersección entre los planos mediadores]. Creo, no se… Ah, sí…”:

Trascripción			**Análisis**
43	Inv:	Ahí tú dices: creo, no sé. En ese momento estás diciendo: creo, no sé. ¿Por qué lo creías, no estabas tan seguro?	El estudiante concibe como posiblemente válida su inferencia analógica. Alude a la falta de verificación empírica para tener una mayor certeza de esta [44], y así, asegurar que solución es correcta.
44	Andrés:	Pues, porque ahí, en el plano funcionaba, pero en el espacio, no habíamos tomado medidas ni nada.	Para validar su proceder Pr3 en el DP (geometría plana), el estudiante usa la aserción de Ad2 y produce un segundo argumento deductivo Ad3 (Figura 135) –en correspondencia con las **Normas 9** y **39**–:  Figura 135. Ad3 producido por Andrés
45	Inv:	Y por qué en el plano funcionaba…	
46	Andrés:	Por la definición de mediatriz que da equidistancia, y luego, como decía Brayan, por lado lado lado para la congruencia.	

La entrevista a Andrés pone de manifiesto lo que motivó su propuesta de solución: En un primer momento él resuelve el problema considerando $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ coplanares; provee el procedimiento Pr3. Enseguida, produce un argumento deductivo (Ad2) -Figura 133- para inferir que el resultado de ese procedimiento (punto de intersección entre $\mathcal{M}_{\overline{AC}}$ y $\mathcal{M}_{\overline{BD}}$ -Pp8-) equidista de los puntos A y C , y B y D (Pp9), proposición clave para solucionar el problema en el dominio Geometría Plana -DP-. Al final de la entrevista [46], el estudiante propone otro argumento deductivo (Ad3) -Figura 135- para validar que $\Delta CDE \cong \Delta ABE$ (Pp2) usando como dato Pp9. Respectivamente, como garantías de tales argumentos fueron usados el objeto-definición *Mediatriz de un Segmento* (C6) y el objeto-proposición *T. Criterio de congruencia lado-lado-lado* (Pp5).

En un segundo momento, pronuncia una analogía (Pp10: *El plano es al espacio como la recta es al plano*) que indica su inmersión en un proceso de argumentación por analogía. Implícitamente involucra una función f_{Pp10}: DP→DL con la cual genera un procedimiento (Pr2) que potencialmente soluciona el problema cuando $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son alabeados (*i.e.*, en el domino Geometría del Espacio -DL-). En ese marco, produce un argumento por analogía (Aa1) -Figura 134-. En síntesis, tal argumento se fundamenta en la siguiente correspondencia (Pp14): Si *E soluciona el problema en DP* (*i.e.*, *si el punto de intersección de las mediatrices de* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *equidista de sus extremos cuando* $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ *son coplanares*), entonces probablemente *m soluciona el problema en DL* (*i.e.*, *un punto de la recta de intersección entre los planos mediadores de* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *equidista de sus extremos, cuando* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *son alabeados*). Con ella, Andrés tendría una solución al problema en DL pues garantizaría la congruencia de los triángulos mediante Ad3. Es interesante notar cómo de la analogía original (Pp10), que en esencia compara *planos* con *rectas*, producen varias correspondencias (expuestas en la flecha de la Figura 134) que dan sentido al Aa1. Su inferencia (Pp15) es totalmente plausible, siendo contrapartida de Pp8. No obstante, esto de ninguna manera certifica que Pp15 es válida en DL. Para que ello ocurra es necesario hacer su prueba formal. Ni en actividad de los estudiantes ni en la entrevista realizada, hubo evidencia de tal prueba. Los estudiantes no propusieron una contraparte en DL del argumento Ad2 propuesto en DP. Esto se explica por dos razones: (i) Durante la actividad en clase, el tiempo dado para abordar la tarea no les fue suficiente para realizar la prueba formal de la propuesta de solución que finalmente reportaron. (ii) En la entrevista, no había caso aludir a la prueba puesto que ya se había abordado mediante la Tarea Extraclase 11 que solicitaba complementar los pasos de esta (en correspondencia con la **Norma 27**). En consecuencia, no se tiene evidencia para decir que la prueba que ellos hicieron de Pp15 (en dicha tarea extraclase), fue resultado de una comparación (sugerida por f_{Pp10}) con Ad2.

Dada la riqueza en objetos en lo previamente descrito, mediante la Figura 136 se presenta la configuración cognitiva asociada a la propuesta de Andrés para solucionar PP9. Como se puede observar, dicha configuración está compuesta, en realidad por dos configuraciones, una asociada a la solución del problema en el Dominio de la Geometría Plana, y otra asociada a la solución de problema en el Dominio de la Geometría del Espacio. La configuración ontosemiótica presentada permite ver en detalle cómo los objetos primarios que conforman el Dominio de Partida se trasfieren en el Dominio de Llegada; para este caso en particular, deja ver cómo dicha trasferencia da sentido al argumento por analogía que infunde una solución del problema en el Dominio de la Geometría del Espacio análoga a la propuesta por Andrés para el Dominio de la Geometría del Espacio.

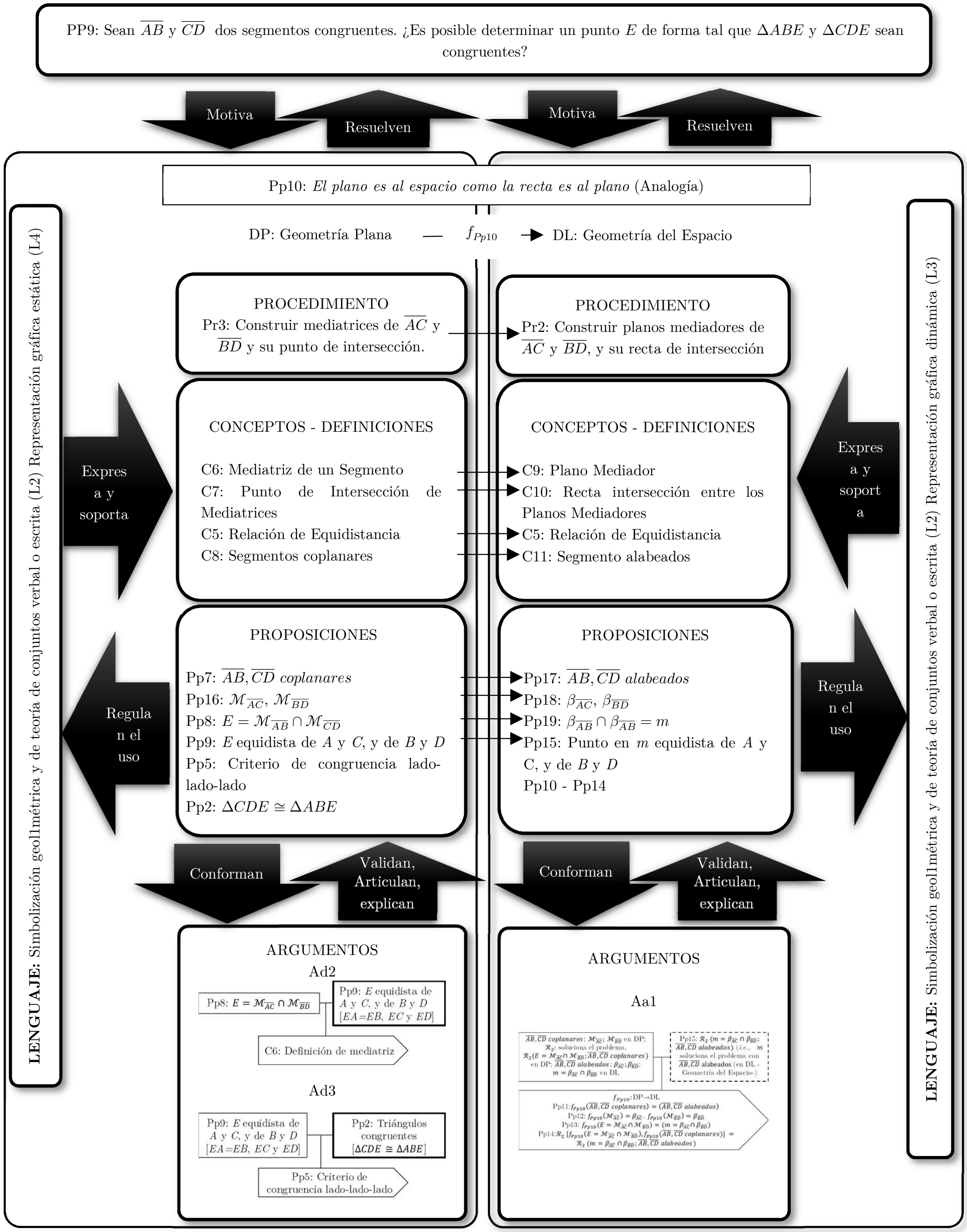


Figura 136. Configuración cognitiva articulada con argumentos, respecto a la segunda propuesta de solución

4.5.1.2 *Síntesis y breves comentarios trayectoria didáctica 17*

La trayectoria se focalizó en el abordaje del problema PP9 (*de búsqueda de antecedente*) por parte del Grupo B, específicamente en lo que respecta a las soluciones propuestas por Brayan 2 y Andrés. Como se pudo observar a la luz de los análisis, las prácticas de la trayectoria se centraron en dos específicamente: proveer procedimientos de solución al problema y dar explicaciones a las producciones incentivadas por la entrevista que se les realizó. En consecuencia, las principales situaciones instruccional correspondiente a la trayectoria fueron *construcción de figura* (evidenciada con los procedimientos Pr1-Pr3 y los leguajes L3 y L4), y de *exploración teórica de situación* (evidenciada con las respuestas y argumentos (Ab1, Aa1, Ad1-Ad3) dados por los estudiantes cuando, por medio de la entrevista, se les indagó por su actuar). Dado que hubo dos momentos en las que fueron tratados cada una de las propuestas de solución hechas por Brayan 2 y Andrés (en la clase misma y durante la entrevista), no es fácil seguir la cronología exacta de las normas que regularon las prácticas asociadas. En consecuencia, no se presenta la tabla respectiva a dicha cronología; no obstante, sí se expone, como es usual, aquella que presenta las normas y situaciones instruccionales asociadas a tales prácticas (Tabla 108).

Con el fin de no ser repetitivo en la información, no se presentan de nuevo los objetos que emergieron en las prácticas, puesto que estos fueron descritos con detalle en el análisis de cada uno de los momentos, y expuestos mediante sendas configuraciones cognitivas, la primera (Figura 128) asociada a la solución propuesta por Brayan 2 y la segunda (Figura 136) asociada a solución de Andrés.

Tabla 108. PP9–Toda la clase: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Prácticas	**Normas**	**Situaciones instruccionales**
Sobre propuesta de Brayan 2: Producción de procedimientos de construcción que proveen solución al problema PP9.	13a	Construcción de una figura
Explicaciones a las producciones de solución a PP9 incentivadas por la entrevista realizada a los estudiantes.	31, 9, 39, 49, 47, 13d	
Sobre propuesta de Andrés: Producción de procedimientos de construcción que proveen solución al problema PP9.	13a, 12a, 7, 16, 18	Construcción de una figura
Explicaciones a las producciones de solución a PP9 incentivadas por la entrevista realizada a los estudiantes.	13d, 15, 9, 9a, 39	

4.5.1.3 *Trayectoria didáctica 18: Actividad matemática sobre PP9, PA9.1 y TE11 – Toda la clase*

El análisis colectivo (de toda la clase) correspondiente a los problemas en cuestión se hace durante fragmentos de las sesiones de clase 21, 22 y 24. Se considera prudente hacer el análisis de los tres problemas en una sola trayectoria dada la relación temática entre ellos y su cronología.

En la primera de tale sesiones, luego de que la profesora hiciera un breve comentario sobre la Tarea Extraclase 10, retoma el Problema PP9. Pide a los estudiantes que se organicen por grupos pues se van a estudiar, usando el EGD Cabri 3D, las propuestas producidas por ellos. Proyecta mediante el televisor un documento donde pone cada una de dichas propuestas. Comenta que los resultados fueron muy chéveres, dado que como el problema no advertía sobre la localización de puntos, algunos grupos abordaron el problema en el Dominio de la Geometría del Espacio [1] (en correspondencia con la **Norma 7**). El documento contiene lo siguiente:

I. Caso I: $\overline{AB}$, $\overline{CD}, E$ coplanares
   1. R punto medio de $\overline{AB}, T$ punto medio de $\overline{CD}$, E punto medio de $\overline{RT}$ (Pr4)
   2. $E \in \mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha} \cap \mathcal{M}_{\overline{CD},\alpha}$ (Pr5)
II. Caso II: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ coplanares, E no coplanar a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$,
   1. $\boxdot\, ABCD$ paralelogramo, $X \in \overline{AC} \cap \overline{BD}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB}\ ,\overline{CD}}$, por X, $E \in l$ (Pr6)
   2. R punto medio de $\overline{AB}, T$ punto medio de $\overline{CD}$, M punto medio de $\overline{RT}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB}\ ,\overline{CD}}$ por M, $E \in l$ (Pr7)
   3. Punto medio de $\overline{AD}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB}\ ,\overline{CD}}$ por M, $E \in l$ (Pr8)
III. Caso III: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ no coplanares
   1. R punto medio de $\overline{AB}, T$ punto medio de $\overline{CD}$,$\beta \perp \overline{AB}$ por R, $\delta \perp \overline{CD}$ por T, $l = \beta \cap \delta$, $E \in l$ (Pr2)

Para cada propuesta, la profesora pide que algún grupo/estudiante pase al frente, con su computador, para ilustrar la situación. Pone a consideración el Caso I. Al respecto del primer ítem de dicho caso (Pr4) un grupo (el de Ronald) dice que no siempre funciona [2]; Ronald pasa con su equipo y mediante una representación hecha en el EGD Geogebra (Figura 137 –L5–) muestran un ejemplo en el que los triángulos en cuestión son congruentes y otro en el que no (**Normas 12a** y **12b**) haciendo arrastres convenientes; advierte que el procedimiento funciona siempre que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sean paralelos [3] (en correspondencia con la **Normas 39** y **47**, la cual es ampliada considerando ahora pasos de construcción, no solo pasos argumentales). Con lo anterior (un argumento de convicción externa Ace1 con backing una representación de en Cabri 3D –Figura 138–), la propuesta es descartada por la profesora [4] (en correspondencia con las **Normas 9a** y **19**).

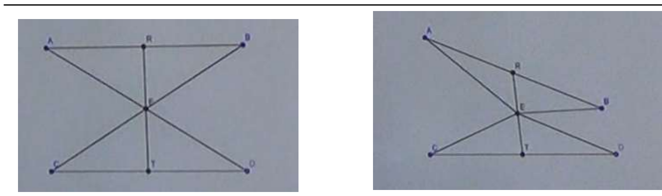


Figura 137. PP9: Representación que refuta Caso I, ítem 1

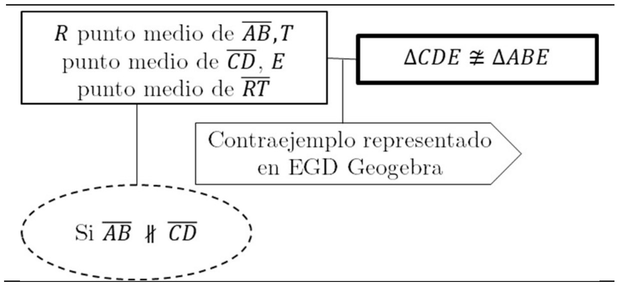


Figura 138. PP9: Ace1 que refuta Caso I, ítem 1

Con respecto al Caso I, ítem 2 (Pr5) Tatiana 2 [5] usa su equipo para ilustrar la situación. Usando Cabri 3D (**Normas 12a** y **12b**), muestra un caso en el cual ello no sucede (Figura 139 –L6–. Específicamente, refuta tal propuesta (en correspondencia con la **Norma 47**) comentando e ilustrando que si los dos segmentos son paralelos las mediatrices no se intersecan. Luego de que Tatiana 2 mueve cualquiera de los segmentos dados mediante un arrastre de sus extremos de forma tal que tales mediatrices se intersecan (**Norma 12b**), se percatan que en este caso la congruencia de los triángulos en cuestión no se logra fácilmente. Con lo anterior (un argumento de convicción externa Ace2 –Figura 140Figura 138–), la propuesta es descartada por la profesora [6] (en correspondencia con las **Normas 9a** y **19**).

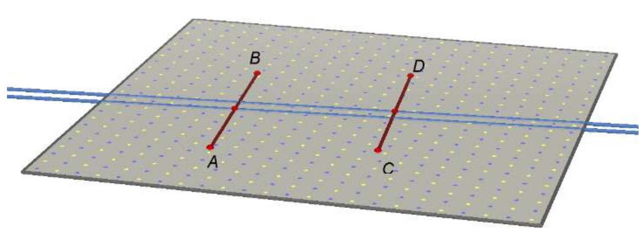


Figura 139. PP9: Representación que refuta Caso I, ítem 2

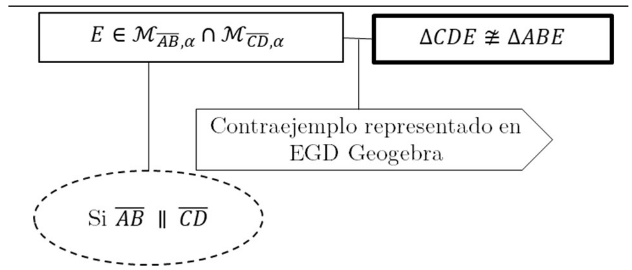


Figura 140. PP9: Ace2 que refuta Caso I, ítem 2

Continuando con las opciones de exploración, la profesora comenta que hubo otros grupos que pensaron los segmentos dados coplanares, pero el punto E en un plano diferente al plano en referencia. Dice que estas propuestas son "chéveres porque estamos en un curso de Geometría del Espacio, y pues que se podría pensar que me están pidiendo cosas en el espacio". [6] (en correspondencia con la **Norma 7**). En tal sentido, pone en discusión el Caso II, ítem 1 (Pr6). Al respecto, José conecta su computador al televisor e ilustra la situación (**Norma 12a)** [7] (Figura 141 –L7–). La profesora pide arrastra el punto E (**Norma 12b**) y comenta que, visualmente, pareciera que los ΔABE y ΔCDE son congruentes [8].

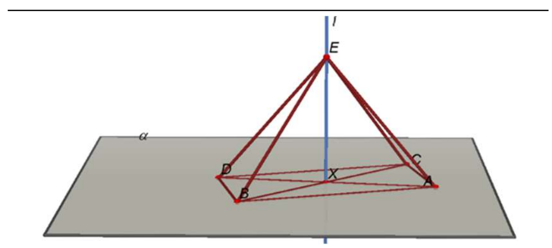


Figura 141. PP9: Representación que refuta Caso II, ítem 1

Como respuesta a lo dicho por la profesora, los estudiantes inician un proceso de argumentación deductivo; su verbalización se trascribe enseguida:

Trascripción			Análisis
9	Esteban:	Es que esa recta [l] es la mediatriz de los segmentos.	Los estudiantes producen el siguiente argumento deductivo global (Figura 142 –Ad4–) para validar tal propuesta de procedimiento (en correspondencia con las **Normas 9** y **39**). Su *aserción* es ΔABE y ΔCDE son congruentes y los *datos* las condiciones del Caso II (Pr6 transformado es Pp20), ítem i:
10	P:	¿Esa recta es la mediatriz de ambos segmentos? ¿Esa recta es la mediatriz, de quién, de ambos segmentos?	
11	Tatiana 2	Cada una de un plano…	
12	P:	Cada una en un plano, es una mediatriz de, ¿quién?	
13	Esteban:	De las diagonales [$\overline{AD}$, $\overline{CB}$] […]	

22	P:	¿Es la mediatriz de quién?
23	Varios:	de AD y BC
24	P:	De AD en un plano y, por lo tanto, ¿cuáles segmentos son congruentes?
25	Varios:	AE y DE son congruentes
26	P:	AE y DE son congruentes, y BE y CE también son congruentes. ¿Por qué?
27	Varios:	Por ser mediatriz…
28	P:	Porque l es la mediatriz del segmento AD, ¿en dónde?
29	Steven:	En el plano de ADE.
30	P:	En el plano que contiene a esos puntos, a E, a A y a D; y l es mediatriz del segmento BC en [el plano] BCE. Entonces tenemos que BA es congruente a CD; dado. Que AE a DE; por mediatriz. y que BE a CE; por mediatriz. Y los dos triángulos son congruentes; por…. Entonces, esa propuesta funciona.
31	Varios:	lado, lado, lado.
32	P:	Entonces funciona…

1. $\boxdot$ $ABCD$ paralelogramo (usado en [30])
2. $X \in \overline{AC} \cap \overline{BD}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$ por X (usado en [9-23])
3. $E \in l$ (usando en [25, 30])

La profesora, valida el argumento [30], en correspondencia con la **Norma 25**.

En las intervenciones [28-30] se manifiesta la **Norma 54** pues son precisados los planos en los que l es mediatriz de segmentos. Así mismo, las **Normas 24, 29** y **30** regulan la interacción puesto que los estudiantes proveen ideas argumentales y precisan los objetos intervinientes cuando son cuestionados por la profesora.

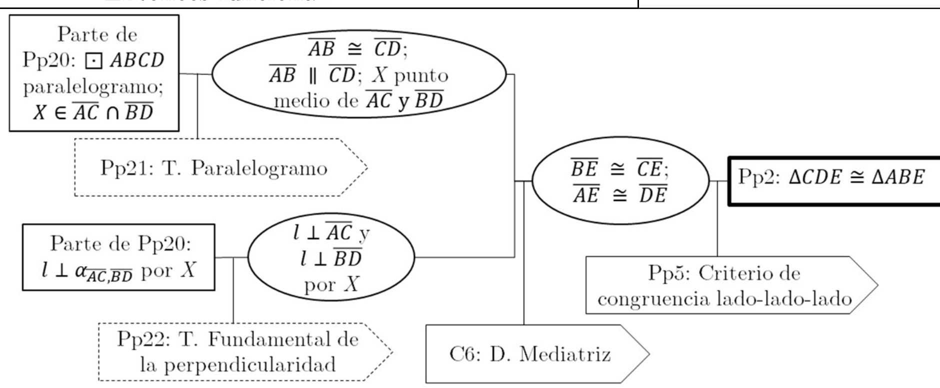


Figura 142. PP9: Ad4 asociado a Caso II, ítem 2

En lo que respecta a los ítems 2 (Pr7) y 3 (Pr8), Karen [17] y Zayra [19], respectivamente, conectan su computador y muestran en el EGD Cabri 3D (**Norma 12a**) representaciones que refutan dichas propuestas (en correspondencia con la **Norma 47**). En ambos casos, las estudiantes han tomado medidas de los segmentos para exponer que las medidas de los lados correspondientes de los triángulos en cuestión no necesariamente son congruentes. Con lo anterior (*i.e.*, sendos argumentos de convicción externa Ace3 y Ace4 –Figura 145 y Figura 146, respectivamente–), la profesora legitima tales refutaciones (**Normas 9a** y **19**) [20]. La Figura 143 (L8) expone lo relativo al ítem 2 y la Figura 144 (L9) al ítem 3.

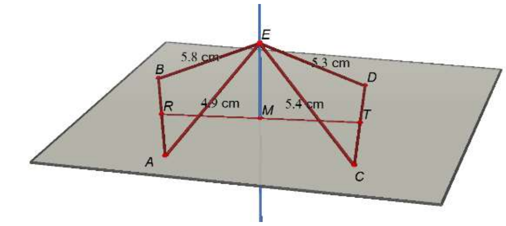


Figura 143. PP9: Representación que refuta Caso II, ítem 2

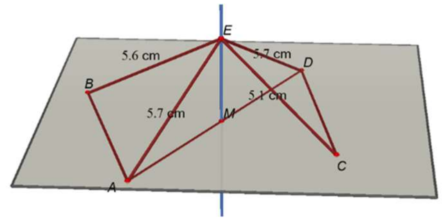


Figura 144. PP9: Representación que refuta Caso II, ítem 3

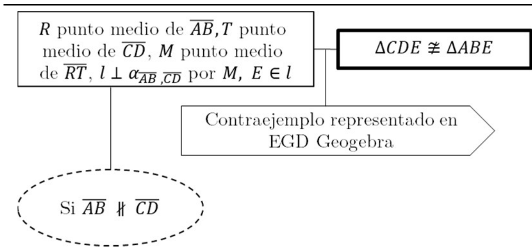


Figura 145. PP9: Ace2 que refuta Caso II, ítem 2

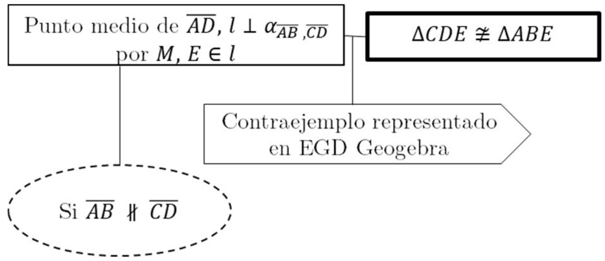


Figura 146. PP9: Ace3 que refuta Caso II, ítem 3

En lo que respecta al Caso III (Pr2), la profesora comenta que esta es muy interesante porque [los estudiantes del Grupo I] asumieron que todo lo dado estaba en diferentes planos. Solicita a uno de los miembros del grupo que pase a exponer su propuesta [32]. En respuesta, Andrés pasa con su computador y lo conecta al televisor [33]. Expone el procedimiento Pr2 (en correspondencia con la **Norma 13a**) complementándolo en lo que respecta a la construcción de una esfera:

33 Andrés: Hago un segmento [construye el $\overline{AB}$], y ahora una esfera de centro C y radio ese segmento. O sea que logro construir dos segmentos que no son coplanares, ¿sí? [la representación resultante se presenta en la Figura 147].

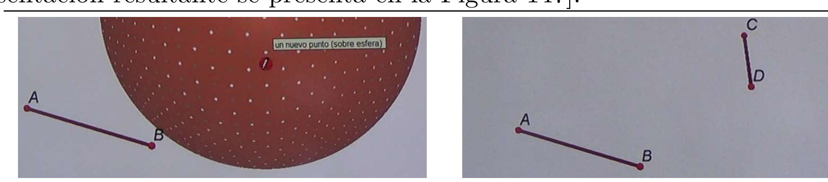


Figura 147. PP9: Representación 1 de Pr2, Caso III

Bien, después de esto, hago el punto medio del segmento AB y el punto medio del segmento CD y después hago el plano perpendicular al segmento AB por el punto medio y el plano perpendicular al segmento CD por su punto medio; y entonces busco la intersección de esos dos planos que es una recta y toman un punto en esa recta [la representación resultante se presenta en la Figura 148].

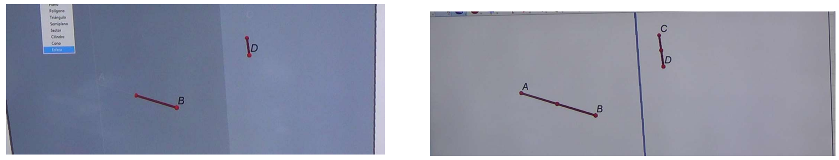


Figura 148. PP9: Representación 2 de Pr2, Caso III

34 P: Vamos a construir los triángulos.

35 Andrés: [Sigue las indicaciones de la profesora. Construye un punto en la recta de intersección entre los planos y los segmentos que tiene por extremo ese punto y A, B, C y D. Hace el arrastre del punto sobre la recta (Figura 149)]

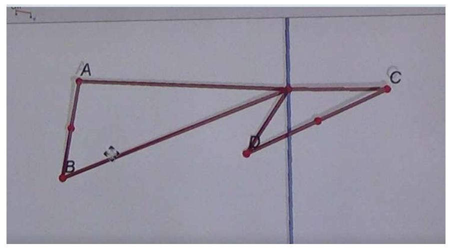


Figura 149. PP9: Representación 3 de Pr2, Caso III

36 P: Y difícilmente, sí sean congruentes, ¿no?

37 Andrés: Profe, me equivoque de segmentos.

38 P: ¿Se equivocó de segmentos?

39 Andrés: Sí, era el segmento AC y BD.

40 P: Ah… se equivocó de segmentos… ¿Ustedes dijeron los otros segmentos? No sé si lo reportaron aquí [revisa la hoja que el grupo entregó a la profesora con su reporte (ver Figura 131)]. No aquí no pusieron eso.

41 Andrés ¿Lo hacemos aquí? [Andrés hace los puntos medio de los $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ y los planos perpendiculares a los segmentos por tales puntos medio (Figura 150)].

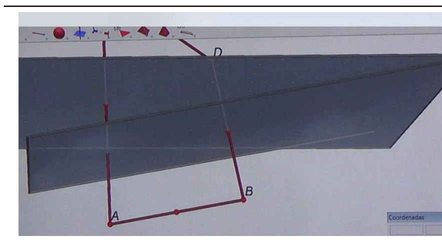


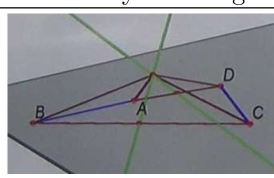
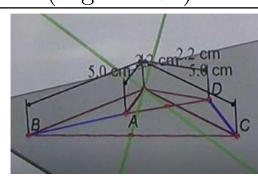
Figura 150. PP9: Representación 4 de Pr2, Caso III

42 P Bueno, entonces ahora Andrés decidió cambiar su construcción, y no son los puntos medios del segmento AB y CD los que él quería, sino los puntos medios de los segmentos AC y BD. ¿Tampoco funcionó? Bueno, una buena propuesta. Vamos a ver luego si debió haber funcionado o no funcionó.

Mediante su intervención, Andrés no sólo complementa su procedimiento Pr2 (presentado en la Trayectoria 17), sino que se percata del error cometido en el reporte que su grupo produjo [37]. Como resultado de su exposición, reproduce la representación asociada a Pr2 expuesta en la Trayectoria 17 (Ver Figuras 147-150

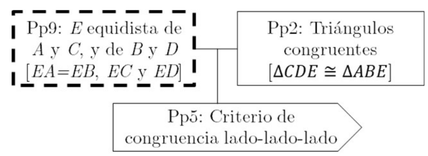
–L2–). A diferencia de lo sucedido antes, quizá porque el tiempo de la clase estaba culminado, la profesora no pidió validar el procedimiento [42].

En la sesión de clase 22, la profesora teniendo en mente la solución propuesta por Andrés al finalizar la sesión de clase anterior, sugiere explorar una solución, empleando el EGD Cabri 3D, contemplando que los segmentos dados ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$) sean coplanares y sin alguna condición especial. Pasados no más de 5 minutos, el Grupo B manifiesta tener una propuesta de solución (**Norma 13a**):

		Trascripción	**Análisis**
1	P:	Vamos a escuchar al grupo de Karen. ¿Recuerdan que usamos la opción de mostrar lo que se hizo en la construcción? [Se refiere a la opción del software que permite ver el paso a paso de una construcción realizada]. A ver.	Karen expone un procedimiento de solución que es análogo al Pr3 que puso de manifiesto Andrés en la entrevista expuesta en la Trayectoria 17. Por su puesto, en este caso hubo una construcción robusta (**Norma 12a**) que llevó a una representación gráfica dinámica hecha en Cabri 3D (Figura 151 –L10–). En su representación usan nombre para los objetos (**Norma 15**), y toman medidas para verificar que los segmentos correspondientes de los triángulos en cuestión son congruentes (**Norma 12b**).
2	Karen:	Pusimos en el plano los segmentos congruentes, *BA* y *CD*. Que esos son los que nos dan… Entonces, luego unimos *B* con *C* y *A* con D	
3	P:	*B* con *C* y *A* con *D*, sí.	
4	Karen:	Luego, en estos segmentos nuevos que salieron, hicimos la mediatriz. Luego marcamos su punto de intersección; luego formamos los triángulos, y medimos los segmentos, y son congruentes… arrastramos y son congruentes (Figura 151).	
		 	
		Figura 151. PP9: Representación dinámica asociada a Pr3	

La profesora termina legitimando tal procedimiento [**Norma 19**]. Se trascribe la intervención correspondiente con su respectivo análisis:

		Trascripción	**Análisis**
5	P:	Muchas gracias. Lo que me sorprendió de ustedes [se refiere a toda la clase] es que no vi en sus hojas [se refiere a las hojas en donde los estudiantes reportaron su solución], es eh…que, que se está pidiendo la congruencia de dos triángulos y lo primero que a uno se	Al inicio de la intervención la profesora actúa según el complemento de la **Norma 12a** (es estratégico usar argumentos abductivos para poder abordar la solución de un problema). En este caso, ella advierte que si lo que se estaba pidiendo era triángulos congruentes (aserción), se debía haber pensado los criterios de congruencias (garantía) y, con ello, haber inferido abductivamente los posibles datos que ellos

le ocurre es, bueno, pero qué es lo que me hace que dos triángulos sean congruentes. Entonces, uno dice, pues tengo unos criterios: o construyo los ángulos, por ejemplo, construyo un ángulo congruente al otro; o trato de buscar segmentos congruentes. O sea, el punto E tiene que generarme segmentos congruentes y si busco segmentos congruentes, si quiero que BE y DE sean congruentes, E, pues, debería estar en la mediatriz del segmento BD; si quiero que AE y CE sean segmentos congruentes, entonces E tiene que estar en la mediatriz del segmento AC. Entonces esa es la, una solución en el plano.	debían construir; por ejemplo, un ángulo (de un triángulo) congruente a otro ángulo (de otro ángulo), o hacer una construcción que garantice lados (de los triángulos en cuestión) congruentes. Ella comenta que, si se opta por la segunda opción, el punto buscado E debería estar en la mediatriz de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ si se pretendía que $\overline{AE} \cong \overline{CE}$ y $\overline{BE} \cong \overline{DE}$. En síntesis, la profesora legitima (**Normas 9a**, **19** y **39**) Pr3 mediante la producción implícita de dos argumentos: uno abductivo –Ab2 (Figura 152)– en el que intervienen las mismas proposiciones del argumento Ad3 propuesto por Andrés en la Trayectoria 17 (Figura 135) y uno deductivo igual al Ad2 propuesto por este estudiante (Figura 133) en dicha trayectoria.  Figura 152. PP9: Ab2 para legitimar Pr3

Al término de la intervención anterior la profesora pide a Andrés que repita la solución que su grupo produjo y que él expuso en la sesión de clase anterior. Se trascribe a continuación la interacción respectiva a este fragmento:

Trascripción			Análisis
6	Andrés:	Ah, la solución era: teníamos los dos segmentos congruentes en el espacio, no necesariamente en el mismo plano. Trazábamos el segmento de… de un extremo de uno de esos segmentos a… a un extremo del otro; hallábamos el punto medio de ese [segmento construido] y por ese [punto medio] hacíamos un plano perpendicular a ese segmento [el construido].	El estudiante recuenta verbalmente el procedimiento Pr2 (**Norma 13a**) según lo sucedido en la Trayectoria 17 y lo expuesto en la sesión de clase 21. En esta ocasión no hace una representación gráfica ni estática en el tablero, ni dinámica en el EGD Cabri 3D.
7	P:	Exactamente. Perpendicular a ese segmento. Es exactamente lo que ellos están haciendo [señala al Grupo B] pero en el espacio: lo que son rectas se convierte, en la solución que él [Andrés] propone, en planos. ¿Sí?, pero otra vez con el segmento que une un extremo de este segmento [señala uno de los	La profesora implícitamente hace alusión a la proposición analógica Pp10 (el plano es al espacio como la recta es al plano).

	marcadores] a un extremo de este [señala el otro marcador].	
	Y Andrés propuso que se le encontrará el punto medio a ese segmento [el construido] y, en vez de construir una recta perpendicular a ese segmento por el punto medio, él dice que construyamos un plano perpendicular al segmento por su punto medio; y lo mismo hizo con el otro segmento con los extremos; ¿sí?, hizo lo mismo.	En el fragmento, la profesora usa tal proposición analógica (Pp10) para indicar que, en lugar de usar la mediatriz de un segmento, se usa el plano perpendicular al segmento por su punto medio (*i.e.*, el *plano mediador* sin usar este nombre). En otras palabras, ella implícitamente hace alusión a la Pp12 del Aa1 producido por Andrés en la Trayectoria 17: Pp12:$f_{Pp10}(\mathcal{M}_{\overline{AC}}) = \beta_{\overline{AC}}$, $f_{Pp10}(\mathcal{M}_{\overline{BD}}) = \beta_{\overline{BD}}$]
	O sea, que noten que el plan de ellos [grupo de Karen] en el plano se puede pasar a un plan en el espacio dónde en vez de mediatrices se busca es un plano.	La profesora legitima el proceder de Andrés (**Normas 9a**, **19** y **39**) a la luz un argumento analógico Aa1 similar al producido por Andrés.

Con el objetivo de instalar el objeto-concepto *Conjunto/Plano Mediador* (C9), es decir, de proveerle una definición específica y de estudiar su equivalencia con la proposición el *plano mediador es perpendicular al segmento por el punto medio* (Pp23), la profesora propone el problema PA9.1. Justo después de que los estudiantes entregan sus producciones en relación con dicho problema, la profesora establece la siguiente definición sin mediar interacción entre ella y la clase [escribe en el tablero], pero basada en lo que ha observado de la producción de los estudiantes (en correspondencia con la **Normas 18** y **38**):

D. El **conjunto mediador** de un segmento es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento.

Notación: $\mu_{\overline{AB}}$

$\mu_{\overline{AB}}=\{X \in \mathcal{E} | XA = XB\}$

La profesora pregunta que, con base en lo realizado en dicho taller, le indiquen qué condición tienen esos puntos del conjunto mediador diferente a la explicitada en la definición [10]. Varios responden que están en un plano [11]; Andrés especifica que ese plano es perpendicular al segmento por el punto medio [12] (hecho que se corresponde con el Pr2 y lo realizado por su grupo como respuesta a PA9.1). Con base en la respuesta de Andrés, la profesora pregunta si todos los puntos de ese plano están en el conjunto mediador [13]; varios responden que sí [14]. Dice entonces la profesora que otra formar de decir lo anterior es que [escribe en el tablero]: $\mu_{\overline{AB}} = \delta$, donde δ es el plano perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio [15]. En ese momento, ella evoca una situación ocurrida en el curso de Geometría Plana y dice [15]:

> Recuerden que eso fue lo que hicimos con la mediatriz. La mediatriz la definimos como el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento, los buscamos y se establecen elementos de geometría y nos dimos cuenta [de] que eran como colineales. Entonces dijimos, oiga parece que todos se agrupan en una recta, pero entonces analizamos un poco más la situación y nos dimos cuenta [de] que esa recta tenía otra propiedad especial, ¿qué era cuál?... perpendicular al segmento conteniendo el punto medio. Aquí estamos haciendo algo parecido y lo debemos probar… probar esa igualdad. [La sesión de clase termina].

De la anterior intervención se pueden identificar tres relaciones más producto de la proposición analógica Pp10 y que son especificaciones de la proposición Pp12 ($f_{Pp10}(\mathcal{M}_{\overline{AC}}) = \beta_{\overline{AC}}$) que hace parte del Aa1, a saber:

Pp24: $f_{Pp10}(D.\,Mediatriz) = (D.\,Conjunto/Plano\ mediador)$.

Pp25: f_{Pp10}(Pp27) = Pp23, donde Pp27 indica la proposición *la mediatriz es la recta perpendicular al segmento por el punto medio* (T. Mediatriz).

Pp26: $f_{Pp10}(D.\,Mediatriz \sim \text{Pp27}) = (D.\,Conjunto\ mediador \sim \text{Pp23})$, donde ~ indica equivalente.

Con el propósito de abordar la prueba de la equivalencia entre la D. Conjunto mediador y Pp23, es decir la igualdad entre el *conjunto mediador de un segmento* y *el plano perpendicular al segmento por su punto medio*, en la Tarea Extraclase 11 la profesora propuso el problema TE11 el cual pedía a los estudiantes realizar la prueba en cuestión (en correspondencia con la **Norma 27**). Se presenta su enunciado:

> Un estudiante propone la siguiente demostración para el teorema:
>
> *El conjunto de puntos que equidistan de A y B* ($\mu_{\overline{AB}}$) *es igual al plano que contiene todas las mediatrices del* $\overline{AB}$.
>
> ¿Está usted de acuerdo con ella? Explique su respuesta
>
> **Prueba:**
> *Datos:* $\mu_{\overline{AB}}$ el conjunto de todos los puntos que equidistan de A y B; α el plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$
> *Aserción*: $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$.
> La demostración del teorema implica demostrar la igualdad entre dos conjuntos: $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$.
> Es decir, se debe demostrar que $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.
> Se probará primero que $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.
> *Tipo de prueba*: Directa

Aserción	Datos y garantía
1. Sea X tal que $X \in \mu_{\overline{AB}}$	Dado
2. $XA = XB$	D. Conjunto Mediador (1)
3. Sea β_{ABX}	P. Plano-Puntos (2)
4. Sea la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Existencia de la mediatriz (2)
5. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Mediatriz (2, 4)
6. $\mathcal{M}_{\overline{AB}} \subset \alpha$	Caracterización de α (5)
7. $X \subset \alpha$	T. Contenencia (5, 6)

Se demostrará ahora que $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$

Tipo de demostración: Directa

Aserción	Datos y garantía
1. Sea X tal que $X \in \alpha$	Dado
2. Sea β_{ABX}	P. Puntos - plano (2)
3. $X = \beta \cap \alpha$	D. Intersección de conjuntos (1, 2)
4. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	T. Existencia mediatriz (2)
5. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta} = \beta \cap \alpha$	T. intersección de planos; Principio de sustitución (3)
6. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	Transitividad (3, 4)
7. $XA = XB$	D. Mediatriz (6)
8. $X \in \mu_{\overline{AB}}$	D. Conjunto mediador (7)

Como $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$ entonces $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$ por D. Igualdad de conjuntos.

En la sesión de clase 24 la profesora propone abordar dicho problema (de carácter metacognitivo pues consistía en estudiar una prueba hecha por un estudiante ficticio). Al iniciar la actividad ella aclara que, tal como lo plantea el enunciado del problema, siempre que se requiere probar una igualdad entre dos conjuntos se deben probar dos inclusiones, la contenencia de uno en el otro, y la recíproca (**Norma 56** –metanorma nueva de carácter epistémico pues a alude a la forma para poder hacer una prueba que implica una igualdad entre conjuntos–). Para este caso, precisa que era menester probar $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$ donde α indica el plano perpendicular al segmento y $\mu_{\overline{AB}}$ el conjunto mediador.

Dado que los estudiantes debían comentar los pasos argumentales del estudiante ficticio para legitimarlos o complementarlos, estuvieron regulados por la **Normas 47** y **48**. La profesora, al asumir la responsabilidad de preguntar por los elementos que constituyen los pasos argumentales de una prueba, actuó en correspondencia con la **Norma 24**. Así mismo, las **Normas 22** y **23** reaparecieron pues la prueba de la equivalencia en cuestión (Ad5) fue presentada en el formato *Aserción - Datos y garantía*. A continuación, se presentan sendas Tablas que exponen los cambios de algunos de los pasos de la prueba de cada contenencia. Se destaca el autor respectivo a cada complementación (ver Tabla 109 y Tabla 110). Vale indicar que la profesora iba corrigiendo un documento de Word que proyectó en el televisor en donde tenía las pruebas en cuestión (L12).

Tabla 109. Comentarios sobre $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$

Aserción	Datos y garantía	Complemento Aserción	Complemento Datos y garantía	Autor Complemento
1. Sea X tal que $X \in \mu_{\overline{AB}}$	Dado	Sea X, $X \in \mu_{\overline{AB}}$, M punto medio de $\overline{AB}$	T. Existencia Conjunto mediador	Profesora
2. $XA = XB$	D. Conjunto Mediador (1)			
3. Sea β_{ABX}	P. Plano-Puntos (2)		P. Puntos-Planos (2)	Varios
4. Sea la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Existencia de la mediatriz (2)	Sea la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$ en β_{ABX}	T. Existencia de la mediatriz (2, 3)	Steven
5. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Mediatriz (2, 4)		D. Mediatriz (2, 4)	Varios
6. $\mathcal{M}_{\overline{AB}} \subset \alpha$	Caracterización de α (5)			
7. $X \subset \alpha$	T. Contenencia (5, 6)	$X \in \alpha$	Noción primitiva. Pertenecer a y D. Subconjunto (5, 6)	Profesora

Tabla 110. Comentarios sobre $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$

Aserción	Datos y garantía	Complemento Aserción	Complemento Datos y garantía	Autor Complemento
1. Sea X tal que $X \in \alpha$	Dado	α plano que contiene las mediatrices	Dado	Profesora
		Sea X tal que $X \in \alpha$	T. Plano Infinitos Puntos	
2. Sea β_{ABX}	P. Puntos - plano (2)			
3. $X = \beta \cap \alpha$	D. Intersección de conjuntos (1, 2)			
4. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	T. Existencia mediatriz (2)			
5. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta} = \beta \cap \alpha$	T. intersección de planos; Principio de sustitución (3)			
6. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	Transitividad (3, 4)		Transitividad o Principio de sustitución (3, 4)	Varios
7. $XA = XB$	D. Mediatriz (6)			
8. $X \in \mu_{\overline{AB}}$	D. Conjunto mediador (7)			

Corregida la prueba sugerida en el enunciado del problema de la tarea, la profesora advierte que se pueden instalar al sistema teórico el siguiente teorema (Pp23) –en correspondencia con la **Norma 35-1**–:

> **T. Conjunto Mediador** El conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$), es igual al plano unión de todas las mediatrices.
>
> **T. Plano mediador** El plano mediador de un segmento es el plano perpendicular al segmento por el punto medio.

Con lo anterior, y próximo a finalizarse la sesión de clase 24, la profesora retoma las soluciones dadas a PP9. En tal sentido, recuerda los procedimientos de construcción Pr3 (si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son coplanares) y Pr2 (si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son alabeados). De manera rápida comenta que el Pr3 es el procedimiento ideal en el plano pues no impone alguna condición a los segmentos dados (en correspondencia con la **Norma 51**); valida tal procedimiento produciendo los argumentos Ad2 y Ad3 (con ello transforma Ab2 en Ad3 –en correspondencia con la **Norma 49**–). Pregunta a los estudiantes si Pr2 podría ser validado. Andrés dice que la prueba sería igual, sólo que se debe usar la D. Plano mediador en lugar de la D. Mediatriz. De manera implícita produce un argumento deductivo Ad6 (Figura 153) que junto con Ad3 valida el procedimiento Pr2 (**Normas 9** y **39**). La profesora acepta tal intervención en correspondencia con la **Norma 19** y afirma esta es la solución ideal en el espacio pues considera cualquiera par de segmentos congruentes (**Norma 51**).

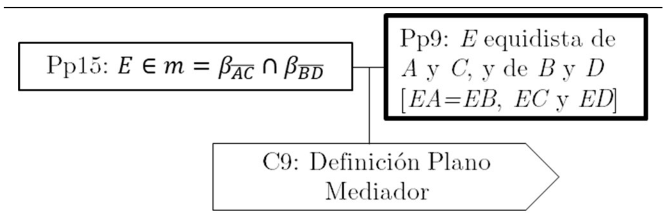


Figura 153. PP9: Ad6 asociado a Caso III

No decide instalar tales procedimientos como teoremas del sistema (en correspondencia con la **Norma 35**) pues dice que estos fueron resultado de un problema con condiciones muy específicas y un pretexto para instalar la D. Plano mediador (C9) y el T. Plano mediador (Pp23). Con la prueba del T. Plano mediador y su equivalencia con la D. Conjunto/Plano mediador, la profesora precisa que tal objeto queda instalado (**Norma 40**).

4.5.1.4 *Síntesis y breves comentarios trayectoria didáctica 18*

La trayectoria se focalizó del tratamiento por toda la clase del problema principal PP9 (*de búsqueda de antecedente*) y de los subproblemas PA9.1 (*de búsqueda de consecuente*) y TE11 (*de elaboración de una prueba*) que pretendían proveer objetos para poder validar, de manera deductiva, la solución esperada por la profesora para PP9 en el Dominio de la Geometría del Espacio. A partir de los análisis, se pueden identificar tres prácticas generales que se llevaron a cabo durante la trayectoria: (i) Estudiar los procedimientos de solución al problema PP9 que la profesora ha logrado recoger al revisar las producciones de los estudiantes al respecto; y (ii) estudiar una prueba de la equivalencia entre la D. Conjunto mediador (C9) y T. Plano Mediador (Pp23), –i.e., la igualdad entre el conjunto mediador de un segmento y su plano mediador–. Vale indicar que los estudiantes se percataron empíricamente de tal equivalencia al solucionar el PA9.1 y que su estudio teórico se fue sugerido con TE11. explicaciones a las producciones incentivadas por la entrevista que se les realizó. En consecuencia, las principales situaciones instruccional correspondiente a la trayectoria fueron *construcción de figura* y *exploración de una figura* (evidenciada con los procedimientos Pr5-Pr8 y Pr2-Pr3, y los leguajes L5 - L10 y L2), y de *elaboración de una prueba*, *instalación de un concepto* (C9) e *instalación de una proposición* (Pp23) (evidenciados luego del abordaje de los PA9.1 y TE11, y mediante la prueba Ad5). La Tabla 111 presenta las situaciones instruccionales y sus principales normas asociadas a tales prácticas.

Tabla 111. PP9, PP9.1, TE11–Toda la clase: Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales

Prácticas	**Normas**	**Situaciones instruccionales**
Estudio de los procedimientos de solución al problema PP9 que la profesora ha logrado recoger al revisar las producciones de los estudiantes al respecto.	13a, **12a**, 19, 15, 7, **47**, **9a**, 51	Construcción de una figura
	12b	Exploración de una exploración
	9, **39**, 54, 25, 24, 29, 30	Elaboración de una prueba
Estudio, sugerido por TE11, de una prueba de la equivalencia entre la D. Conjunto mediador (C9) y T. Plano Mediador (Pp23), surgida empíricamente del PA9.1.	18, 38, 40	Instalación de un concepto
	27, **56**, **47**, 48, 24, 22, 23, 49, 9, **39**, 19, 35	Elaboración de una prueba
	35a	Instalación de una proposición

Vale indicar que, en esta trayectoria, hubo la necesidad de ajustar ciertas normas (las que se presentan en negrilla en la Tabla 111) dada la riqueza que hubo en el estudio o revisión que hicieron los estudiantes de los procedimientos de construcción asociados a PP9 principalmente. Específicamente, se estableció en acto que una estrategia para producir los procedimientos de construcción consiste en la producción de argumentos abductivos, de manera análoga a lo que se recomienda cuando se pretende elaborar una prueba (complemento **Norma 12a**). Así mismo, se hizo evidente una responsabilidad de parte de los estudiantes según la cual ellos pueden refutar procedimientos de construcción (complemento **Norma 47**) mediante la producción de argumentos informales de convicción externa basados en contraejemplos provistos en EGD (complemento **Norma 9a**) y desde esa perspectiva tener fundamentos para que los procedimientos refutados sean descartados (complemento **Norma 39**) –*e.g.* Pr4, Pr5, Pr7 y Pr8 –. Otro asunto interesante, que complementa la **Norma 39**, es la posibilidad de que los procedimientos de construcción sean legítimos (no descartables) cuando se emplea un argumento abductivo o analógico para soportarlos –*e.g.*, Pr3 y Pr2–. De otro lado, la **Norma 7** tienen una relevancia especial puesto que varios grupos de estudiantes tomaron en cuenta el Dominio de la Geometría del Espacio para abordar el problema PP9 (*e.g.*, Caso II y Caso III).

En lo que respecta a los objetos, los grandes protagonistas fueron los conceptos-definición *Conjunto/Plano Mediador* (C9), *Relación de equidistancia* (C5), *Mediatriz* (C6) y *segmentos coplanares* (C8), *segmentos alabeados* (C11) y *paralelismo* (C12) inmersos tantos en los procedimientos de construcción (referenciados en el párrafo anterior) como en los argumentos. Con relación a estos últimos objetos (los argumentos), hubo una gran producción de estos, bien sea para refutar procedimientos (*e.g.*, Ace1-Ace4) como para legitimarlos (Ab2 o Aa1) o validarlos (Ad2-Ad4 y Ad6). Así mismo, hubo un argumento (Ad5) que permitió instalar los objetos *Conjunto/Plano Mediador* (C9) y *T. Plano/conjunto mediador* (Pp23). Los principales objetos-proposición involucrados en los argumentos fueron dicho teorema (Pp23), E equidista de A y C, y de B y D (Pp9), *T. Criterio de Congruencia lado-lado-lado* (Pp5), $\Delta CDE \cong \Delta ABE$ (Pp2), la analogía *El plano es al espacio como la recta es al plano* (Pp10) y el *T. Mediatriz* (Pp27). En lo que respecta a los lenguajes, se destacan las representaciones dinámicas surgidas de los procedimientos citados (L5-L10), los formatos (registro escrito) en los que fue reportada la prueba Ad5 y, por supuesto, el lenguaje geométrico verbal empleado para exponer los procedimientos y argumentos asociados (L11). Para sintetizar, la Tabla 112 expone la cronología de las normas, problemas, principales objetos y situaciones asociados a la trayectoria; la Figura 154 expone la configuración epistémica asociada a toda la trayectoria.

Con relación a los objetos primarios de la trayectoria es importante recalcar la reaparición del argumento analógico Aa1 producido por el Andrés a propósito de PP9 y explicitado en la entrevista referenciada en la Trayectoria 17. En esta ocasión, producto de la exposición de Pr2 por el estudiante, es la profesora quien alude a la proposición analógica Pp10 sin tener conocimiento de que él la había producido durante su trabajo autónomo y sin preguntarle en la puesta en común qué lo había motivado a producir tal procedimiento. Tanto el actuar del estudiante en su trabajo autónomo, como la alusión por la profesora de Pp10 y sus consecuencias (ver Pp24-Pp26) legitiman la producción de argumentos analógicos como una estrategia para abordar situaciones de la geometría del espacio haciendo comparaciones plausibles con situaciones de la Geometría Plana con las que guardan cierta relación.

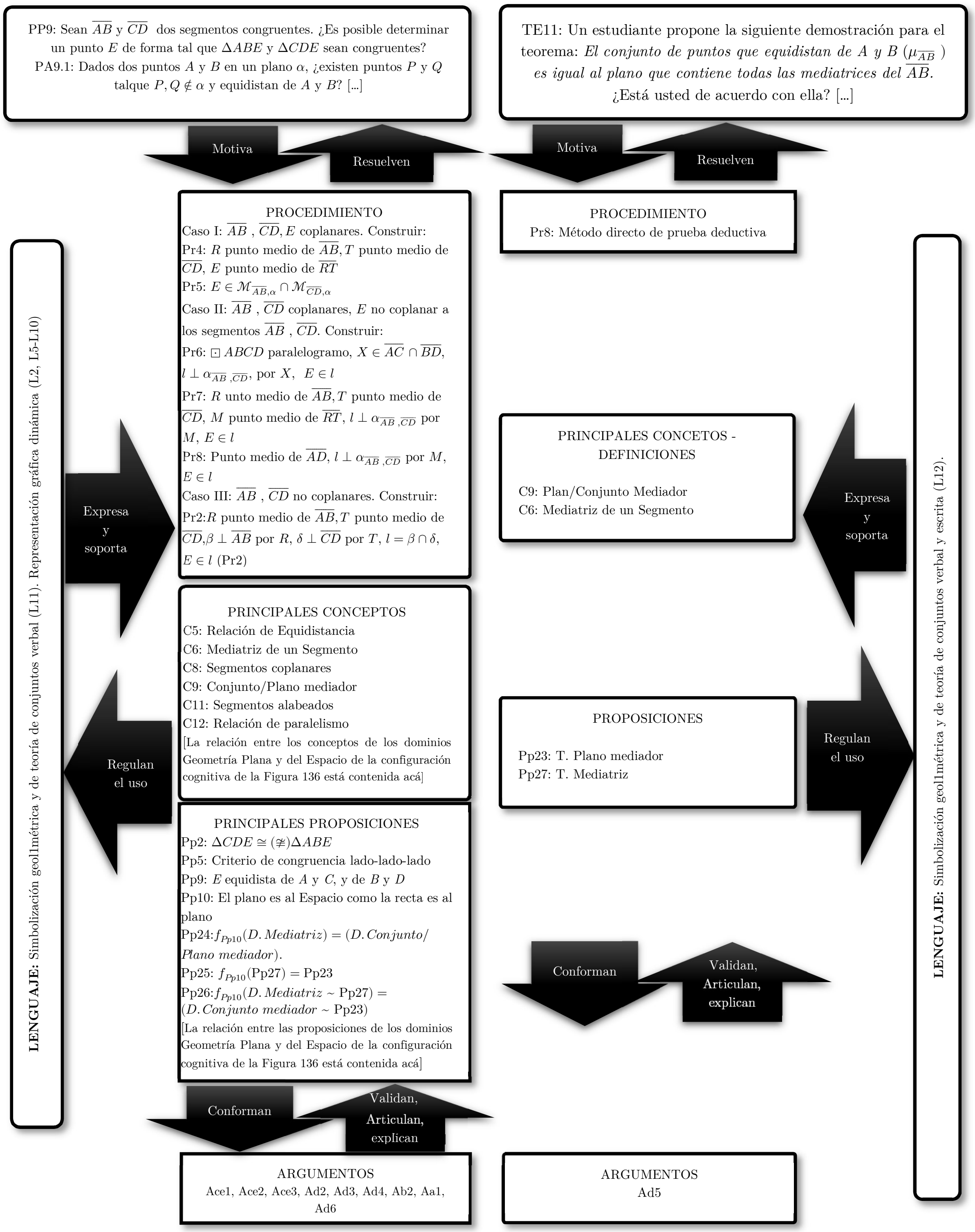


Figura 154. Configuraciones ontosemióticas epistémicas relativas a la Trayectoria 18: PP9, PP9.1, TE11 – Toda la clase

Tabla 112. Cronología de situaciones, objetos y normas asociados de *Trayectoria Didáctica* 18

	Situaciones	Construcción de una Figura/*exploración de una figura*	Elaboración de prueba	Construcción de una Figura/*exploración de una figura*
Objetos	**Problemas**	PP9	PP9	PP9
	Procedimientos	Pr4 Pr5 Pr6	Pr6	Pr7 Pr8
	Conceptos/Def	C8 C3	C8 C6 C3	C8 C3
	Proposiciones	Pp2	Pp21 Pp25 Pp2	Pp2
	Argumentos	*Ace1 Ace2*	Ad4	*Ace3 Ace4*
	Lenguajes	L5 L6 L7	L11	L8 L9
	Normas	12a, *12b*, 39, 47, 9a, 19, 7, 15	9, 39, 24, 25, 29, 30, 54, 19	12a, *12b*, 39, 47, 9a, 19, 7, 15

	Situaciones	Construcción de una Figura	Construcción de una Figura/*Exploración de situación*	Construcción de una Figura	Elaboración de prueba/*instalación de concepto y proposición*	Elaboración de prueba
Objetos	**Problemas**	PP9	PP9	PP9	PP9.1 TE11	PP9
	Procedimientos	Pr2	Pr3	Pr2	Pr2	Pr3 Pr2
	Conceptos/Def	C11 C3	C8 C6 C3	C9	C9	C8 C6 C5 C3 C9
	Proposiciones	Pp2	Pp8 Pp9 Pp16 Pp2	Pp10 Pp12 Pp4-Pp26	Pp27 Pp23	Pp8 Pp9 Pp16 Pp2 Pp15
	Argumentos		Ab2 Ad2	Aa1	Ad5	Ad2 Ad3 Ad6
	Lenguajes	L2	L10	L11	L12	L11
	Normas	13a, 12a, 15	13a, 12a, 15, *12b*, 31, 9a, 19, 39, 51	9a, 19, 39, 51	*18*, *38*, 27, 56, 47, 48, 24, 22, 22, 23, *35a*	49, 9, 39, 19, 35

4.5.2 Síntesis y conclusiones Bloque de Problemas N° 6

Se presenta un compendio de las normas que regularon las prácticas ocurridas durante el tratamiento del Bloque de Problemas N° 6. Como se advirtió al principio del Bloque, en este hubo cierta estabilidad en el dinamismo del sistema normativo; esto es hubo emergencia de pocas normas nuevas (o complemento de otra existentes) en comparación con los demás Bloques de Problemas analizados. Como es usual, las normas se clasifican según las situaciones instruccionales en las que estuvieron presentes y se exaltan las principales diferencias normativas entre los bloques anteriores y el Bloque en cuestión (Bloque N° 6). Así mismo, se comentan dos resultados interesantes en relación con los procesos argumentativos focalizados en la importancia de los argumentos informales de convicción externa y por analogía, ambos con un protagonismo relevante a lo largo del bloque.

4.5.2.1 *Compendio de normas por situación instruccional*

Enseguida se exponen todas las normas que regularon las prácticas que tomaron lugar cuando los estudiantes (por grupos) y toda la clase, abordaron los problemas PP9 y sus auxiliares (PA9.1 y TE11), tendientes a instalar en el sistema teórico otros objetos claves de la perpendicularidad en el espacio (T. Plano mediador –Pp23– y Conjunto/Plano Mediador –C9–). La Tabla 113 presenta un compendio de las normas presentes en el bloque (indicando con negrilla aquellas emergentes), las prácticas asociadas y las situaciones instruccionales correspondiente. Por su parte, la Tabla 114 presenta los enunciados de tales normas emergentes indicado el complemento de las normas ya existentes con letra en cursiva. Así mismo, la Tabla 115 organiza las normas presentadas en la Tabla 113 clasificándolas según cada situación instruccional del Bloque en cuestión.

Tabla 113. Bloque N° 6: Compendio de normas y su dinámica

TD[58]	Prácticas	Normas	Situaciones instruccionales
17 G	Sobre propuesta de Brayan 2: Producción de procedimientos de construcción que proveen solución al problema PP9.	13a	Construcción de una figura
	Explicaciones a las producciones de solución a PP9 incentivadas por la entrevista realizada a los estudiantes.	9, 39, 49, 47, 13d	
	Sobre propuesta de Andrés: Producción de procedimientos de construcción que proveen solución al problema PP9.	13a, 12a, 7, 16, 18	Construcción de una figura
	Explicaciones a las producciones de solución a PP9 incentivadas por la entrevista realizada a los estudiantes.	13d, 15, 9, 9a, 39	
18 TC	Estudio de los procedimientos de solución al problema PP9 que la profesora ha logrado recoger al revisar las producciones de los estudiantes al respecto.	13a, **12a**, 19, 15, 7, **47**, **9a**, 51	Construcción de una figura
		12b	Exploración de una exploración
		9, **39**, 54, 25, 24, 29, 30	Elaboración de una prueba
	Estudio, sugerido por TE11, de una prueba de la equivalencia entre la D. Conjunto mediador (C9) y T. Plano Mediador (Pp23), surgida empíricamente de del PA9.1.	18, 38	Instalación de un concepto
		27, **56**, **47**, 48, 24, 22, 23, 49, 9, 39, 19, 35	Elaboración de una prueba
		35a	Instalación de una proposición

Tabla 114. Bloque N° 6: Enunciado normas emergentes (nuevas)

Norma	Enunciado
9a	Complemento: Un argumento informal para el curso es aquel que: (i) Se compone de las aserciones (sin sus respectivas garantías) que pueden ser insumo para la prueba formal. Y (ii) Puede indicar que los objetos necesarios para llevar a cabo tal prueba no están en el sistema teórico. Para el ítem i, un argumento deductivo puede ser asociado. Para el ítem ii, los argumentos asociados pueden ser esencialmente abductivos; los argumentos inductivos o analógicos pueden surgir cuando se pretende inferir los objetos necesarios. *Así mismo, un argumento informal puede ser uno de convicción externa constituido principalmente por contraejemplo ilustrado por una representación gráfica dinámica o estática (estos surgen específicamente en situaciones de construcción de una figura*).

[58] TD indica Trayectoria Didáctica. La G que acompaña el número de la Trayectoria Didáctica indica trabajo individual por grupos; La TC que acompaña el número de la Trayectoria Didáctica indica trabajo colectivo o de toda la clase.

12a	Complemento: El EGD se emplea para representar (construir robusta o blandamente) los objetos inmersos en el enunciado del problema. Si la construcción es robusta, implica poner en juego propiedades del objeto para desarrollar el procedimiento respectivo. Un asunto estratégico que puede orientar *un procedimiento de construcción es la producción de argumentos abductivos que posibiliten un plan, cuya aserción es la relación clave inmersa en el objeto que se pretende construir.*
39	Complemento: Un procedimiento de construcción de un objeto es válido (teóricamente) una vez todos los objetos que intervienen están instalados y cada paso es un argumento deductivo. *Así mismo, los procedimientos pueden ser legítimos (no descartables), antes de validarlos teóricamente, mediante argumentos abductivos o analógicos. De otro lado, un procedimiento se descarta si existe un contraejemplo que ilustre que, aun siguiendo los pasos del procedimiento, el objeto deseado no es construido (i.e., si existe un argumento de convicción externa cuya garantía es una representación hecha en un EGD, por ejemplo).*
47	Complemento: Los estudiantes pueden (y deben) hacer refutaciones de ideas dadas por otros miembros de la clase (bien sean pasos argumentales o *procedimientos de construcción*) rebatiendo alguno de los elementos de un argumento o *presentando contraejemplos a los procedimientos de construcción.*
56	Nueva: La prueba de la igualdad entre dos conjuntos implica probar la contenencia de un conjunto en el otro y viceversa.

Tabla 115. Bloque N° 6: Normas ↔ situaciones instruccionales

Situaciones instruccionales	Normas
Construcción de una Figura	7, 9, **9a**, **12a**, 13a, 13d, 15, 16, 18, 19, **39**, **47**, 51
Exploración de una figura	12b
Instalación de un concepto	18, 38
Instalación de una proposición (teorema)	35a
Elaboración de una prueba	9, 19, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 35, **39**, **47**, 48, 49, 54, **56**

4.5.2.2 *Principales diferencias normativas con respecto a los Bloques anteriores*

La Tabla 115 resalta aquellas normas que surgen como emergentes (son nuevas) para ciertas situaciones instruccional y que permite destacar las principales diferencias normativas con relación a los anteriores bloques. Tales diferencias se focalizan asuntos relativos a situaciones de construcción de figuras que, como se observó a lo largo de la Trayectoria, fue la protagonista debido a la gran cantidad de procedimientos de construcción surgidos en respuesta al PP9.

Algunas de tales diferencias normativas aluden a asuntos de tipo meta pues se concretan en la explicitación de la funcionalidad de ciertos tipos de argumentos durante la producción de procedimientos de construcción. Así, por ejemplo, se precisa que los argumentos de convicción externa fundamentados en un contraejemplo son legítimos para descartar procedimientos de construcción (complemento Norma 9a); o que argumentos abductivos o analógicos pueden legitimar dichos procedimientos (Norma 39) pues aluden a planes plausibles para realizar la construcción (complemento Norma 12a).

De otro lado, es enfatizada una nueva responsabilidad de los estudiantes según la cual los estudiantes pueden refutar procedimientos de construcción presentado contraejemplos (complemento Norma 47) basados en representaciones hechas en EGD (según la Norma 9a).

Finalmente, y a diferencia de los aspectos anteriores, emergió una norma asociada a la elaboración de una prueba, según la cual se precisa cómo se debe hacer la prueba de la igualdad entre dos conjuntos (Norma 56).

Para terminar esta sección, es pertinente explicar por qué ciertas Normas (9, 19 y 39) aparecen en las dos situaciones protagonistas en la trayectoria (de construcción y elaboración de una prueba). Una de las principales normas del curso es la 9, según la cual, todo se deba argumentar empleando objetos primarios del sistema teórico. Desde esta perspectiva, independientemente de la situación en la que esté (de construcción o elaboración de una prueba, por ejemplo), la clase se ve avocada a cumplir con dicha norma. Con lo anterior, cobra sentido que la Norma 39 regule la situación de construcción de un objeto puesto que los miembros de la clase pueden sentir la necesidad de que cada paso del procedimiento correspondiente tenga sustento en el sistema teórico del curso para que pueda ser validado. Así mismo, dado que la prueba de la existencia de un objeto puede ser infundida por los pasos del procedimiento de construcción, tal Norma 39 regula la situación de la elaboración de una prueba pues, en últimas, la validación de un procedimiento es la prueba teórica que lo sustenta. En lo que respecta a la Norma 19, el principal indicador para que la profesora considere que un procedimiento sea correcto es que tenga un argumento (inductivo abductivo, analógico o deductivo) que lo soporte; si sucede el caso que se provea uno deductivo (como sucedió en la Trayectoria 18), una situación de elaboración de una prueba toma lugar.

CAPÍTULO 5

Discusión de los análisis

Este Capítulo está focalizado en presentar y comentar con cierto detalle los resultados obtenidos a partir de los análisis didácticos expuestos en el Capítulo 4. Para su elaboración, principalmente fueron tenidos en cuenta los apartados *Síntesis y breves comentarios*, y *Síntesis y conclusiones* presentados, respectivamente, al final de cada trayectoria y de cada Bloque de Problemas.

Vale recordar que fueron empleados cuatro Bloques de Problemas en los cuales se identificaron 18 Trayectorias Didácticas, 11 relativas a prácticas llevadas a cabo por toda la clase y 7 a prácticas llevadas a cabo autónomamente por los grupos de estudiantes (Grupo B e I) registrados en video. La

Tabla 116 presenta una caracterización básica de cada uno de los bloques de problemas (su Dominio, los Problemas asociados y sus tipos[59], las trayectorias asociadas a cada problema, y participantes en cada Trayectoria –Grupo de estudiantes o Toda la clase–). Tener en cuenta Trayectorias en donde participaron "individuos" (en términos de grupos de estudiantes) o "toda la clase", permitió tener dos escenarios para estudiar el comportamiento con las normas (*i.e.*, cuándo emergen –durante el trabajo autónomo o colectivo–, quién las cumplen o las incumple, cuándo se ajustan –se especifican o complementan, cambian en esencia–). Así mismo, considerar los dos dominios, Geometría Plana y del Espacio, dejó ver el dinamismo de las Normas emergentes en el primer Domino como consecuencia "del paso" al segundo, e identificar normas propias del curso de Geometría del Espacio.

[59] En la Tabla, los tipos de problemas resaltados con negrilla indican que fueron emergentes (nuevos) durante el análisis. Recuérdese que Ba significa *Búsqueda de antecedente* y Bc *Búsqueda de consecuente*.

Tabla 116. Problemas, trayectorias y participantes por Bloques de problemas

Bloques de problemas/Dominio	Problema/Tipo de problema		Trayectorias didácticas	Participantes en la Trayectoria
Presentación del Curso			Identificación primer conjunto de Normas	Monólogo profesora
N° 1 Geometría Plana	PP1	Ba	N° 1	Grupo B
	PP1	Ba	N° 2	Toda la clase
	PA1.1	**Fd**	N° 3	Toda la clase
	PA1.2 / PE2	**Ep**	N° 4	Toda la clase
N° 4 Geometría del Espacio	PP4	Bc	N° 5	Grupo I
	PP4	Bc	N° 6	Toda la clase
	PA4.1	**Et**		Estudiantes/ Toda la clase
	PA4.2	**Et**		Estudiantes/ Toda la clase
	PA4.3	**Et**		Toda la clase
	PP5	**Et**	N° 7	Estudiantes/Toda la clase
	PP6	Bc	N° 8	Grupos B e I
	PP6	Bc	N° 9	Toda la clase
N° 5 Geometría del Espacio	PP7	Ba	N° 10	Grupos B e I
	PP7, PA7.1	Ba	N° 11	Toda la clase
	PA8.1	Bc o **Et**	N° 12	Grupos B e I
	PA8.1	Bc o **Et**	N° 13	Toda la clase
	TE9	**Ep**		
	PP8	Ba	N° 14	Grupos B e I
	PA8.2	Bc	N° 15	Toda la clase
	TE10	**Ep**	N° 16	Toda la clase
N° 6 Geometría del Espacio	PP9	Ba	N° 17	Grupo I
	PP9	Ba	N° 18	Toda la clase
	PA9.1	Bc		
	TE11	**Ep**		

Fd: Formulación de definición **Ep**: Elaboración de prueba **Et**: Exploración teórica

Con el fin de detallar los planteamientos descritos en los dos párrafos anteriores, se ha organizado el Capítulo en tres secciones específicas, asociadas, respectivamente, a cada uno de los asuntos involucrados a las tres preguntas específicas orientadoras del estudio (esto, para ir allanando el terreno para consolidar el cumplimiento de los objetivos específicos). En consecuencia, tales secciones abordan los siguientes asuntos:

i. Descripción de los tipos de argumentos (o procesos argumentativos) presentes en cada situación instruccional y la forma como estos articulan objetos primarios de las configuraciones ontosemióticas identificadas (relativo a PE1).
ii. Descripción del sistema de normas correspondiente a cada situación instruccional, destacando su influencia en los procesos de argumentación, y priorizando lo relativo al Dominio de la Geometría del Espacio (relativo a PE2).
iii. Descripción del papel de los miembros de la clase a la luz del sistema de normas identificado (normas de división de labores) y precisión de la gestión de tal sistema de Normas por parte de la profesora, en particular en lo que respecta a los procesos argumentativos (relativo al PE3).

Para la construcción de tales secciones hubo la necesidad de reorganizar los contenidos de las tablas *Cronología de normas, objetos y situaciones*, y *Prácticas ↔ normas ↔ situaciones instruccionales* para poder reconocer, por vía inductiva, relaciones que permiten informar sobre los tres aspectos antes mencionados (*e.g.*, Argumentos Vs. Situaciones Instruccionales, Normas Vs. Situaciones Instruccionales, Normas Vs. Argumentos). Con base en dicha reorganización (empleando el software *Atlas.ti* 7), se filtró la información para construir las tablas usadas en tales secciones.

5.1 SOBRE PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN

Para empezar, la Tabla 117 presenta un compendio de los argumentos presentes para cada situación instruccional y su tipo (inductivo, abductivo, deductivo, por analogía, de convicción externa), distinguiendo el tipo de problema asociado, el Dominio correspondiente, la trayectoria, y en qué marco de actividad se produjo (trabajo autónomo por grupos o estudiantes, o trabajo de toda la clase durante puesta en común de producciones). Con base en la información consignada en dicha Tabla, enseguida presenta una caracterización de cada situación instruccional a la luz de los tipos de argumentos presentes en ellas; posteriormente, se explicita maneras en las que tipos de argumento articula o involucra diversos tipos de objetos, para cada una de las situaciones instruccionales.

Tabla 117. Argumentos presentes en situaciones instruccionales

	Participantes	Argumentos[60]	Lenguaje	Trayectoria	Problema	Tipo	Bloque	Dominio
Construcción de Figura	Grupo B	Ab1	Verbal	1	PP1	Ba	1	G. Plana
	Toda la clase	Ad2	Verbal	11	PP7	Ba	4	G. Espacio
	Grupo I	Ab1, Ab1T, Ad1, Aa1	Verbal	17	PP9	Ba	6	G. Espacio
	Toda la clase	Ab2, Ad2, Ad3, Aa1	Verbal	18	PP9	Ba		
Exploración de Figura	Toda la clase	Ad16, Ad17	Verbal	6	PA4.3	Et	4	G. Espacio
	Grupo I y B	Ad27 - Ad32	Verbal	8	PP6	Bc	4	G. Espacio
	Grupo I	Ab1, Ad1	Verbal	10	PP7	Ba	5	G. Espacio
	Toda la clase	Ai1	Verbal	13	PA8.1	Bc Et		
	Toda la clase	Ai2	Verbal	15	PA8.2	Bc		
	Toda la clase	Ace1, Ace2, Ace3, Ace4	Verbales/ Representación dinámica	18	PP9	Ba	6	G. Espacio
Exploración teórica de situación	Estudiantes	Ad1-Ad5 Ab1-Ab4 Ai1, Aa1	Escrito	6	PA4.1	Et	4	G. Espacio
	Toda la clase	Ad6-Ad12 Ad1T-Ad3T Aa1T, Ab2T Ace1, Ai1T	Verbal					
	Estudiantes	Ab5-Ab19	Escrito	7	PP5	Ba Et	4	G. Espacio
	Toda la clase	Ab13T, Ab15T, Ab17T, Ab18T, Ad18-Ad26	Verbal					
	Grupos I y B	Ad3, Ad3T, Ad4	Verbal	12	PA8.1	Bc Et	5	G. Espacio

[60] Se aclara que, para cada Bloque de problemas, los argumentos fueron numerados de manera independiente y sin seguir una continuidad desde los bloques anteriores. Así, por ejemplo, el argumento Ab1 de la Trayectoria 1 no es igual al Ab1 de Trayectoria 17, o Ad2 de la Trayectoria 11 no es igual al Ad2 de la Trayectoria 18.

	Participantes	Argumentos[60]	Lenguaje	Trayectoria	Problema	Tipo	Bloque	Dominio
Elaboración de prueba	Toda la clase	Ad1	Lenguaje escrito	2	PP1	Ba	1	G. Plana
	Toda la clase	Ad2	Lenguaje escrito	4	PA1.2	Ep	1	G. Geometría
	Estudiantes/ Toda la clase	Estudiantes Ad13, Ad14 Toda la clase Ad15	Verbal Escrito	6	PA4.2	Et	4	G. Espacio
	Toda la clase	Ad33	Verbal	9	PP6	Bc	4	G. Espacio
	Grupos B e I	Ad6	Escrito	14	PP8	Ba	5	G. Espacio
	Toda la clase	Ab1-Ab4, Ad7	Verbal	15	PA8.2	Bc	5	G. Espacio
	Toda la clase	Ad8, Ad9	Verbal	16	TE10	Ep	5	G. Espacio
	Toda la clase	Ad2-Ad4, Ad6	Verbal	18	PP9	Ba	6	G. Espacio
		Ad5	Escrito		PP9.1 PP11	Ba Ep		
Instalación Concepto/ proposición	Toda la clase	Ace1	Verbal	3	PA1.1	Fd	1	G. Plana
	Estudiantes/ Toda la clase	Ai1, Aa1/ Ai1T, Aa1T	Escrito/ Verbal	6	PA4.1	Et	4	G. Espacio
	Remitirse a situación elaboración de una prueba							

5.1.1 Tipos de argumentos por situación instruccional

A continuación, se presenta una síntesis que expone los tipos de argumentos presentes en cada situación instruccional indicando las formas en que diversos tipos de objetos primarios están involucrados en (o son articulados por) cada tipo de argumento. Para dar cuenta de esto último, las Figuras que muestran las configuraciones cognitivas o epistémicas y expuestas al final de cada Trayectoria fueron base para decantar la información correspondiente.

Construcción de una figura: En su mayoría, los argumentos presentes en esta situación fueron substanciales (6 en total, 4 abductivos, 2 analógicos, dispersos en las Trayectorias 1 y 6). Surgieron 4 de estructura deductiva (analítica) dispersos en las Trayectorias 4 y 6. Los argumentos substanciales tuvieron el propósito principal de proveer datos plausibles (*objetos –conceptos, relaciones/proposiciones–* instalados o no en el sistema) a ser construidos para determinar la existencia de *objetos* (conceptos o relaciones) exigidos en los problemas. Vale notar que los argumentos analógicos identificados en las Trayectorias 17 y 18 surgieron como resultado de una comparación entre *objetos primarios* análogos pertenecientes a los Dominios Geometría Plana y Geometría del Espacio, respectivamente (al respecto de esto último, el apartado 5.1.2.1 presenta descripción más detallada de los procesos de argumentación por analogía). De oro lado, la aparición de argumentos de estructura deductiva respondieron al intento (de toda la clase principalmente) por validar teóricamente los pasos de *procedimientos* de construcción en el EGD Cabri 3D propuestos para resolver problemas. Es importante resaltar que ello no implica hacer una prueba en sentido estricto: supóngase que se tiene procedimiento compuesto por los pasos (condiciones) c1, c2, … que llevó a la construcción del objeto o una relación Pp1. Los argumentos deductivos en la *situación de construcción* surgen con el propósito de soportar teóricamente cada paso (c1, c2, …). En la situación de *elaboración de una prueba* el argumento deductivo (o prueba) tiene el objetivo de probar la proposición condicional *si* c1, c2, … *entonces* Pp1.

Exploración (empírica) de una figura: Los argumentos presentes en esta situación fueron 7 substanciales (1 abductivo, 2 inductivos y 4 de convicción externa) y 8 de estructura deductiva. Estos últimos fueron producidos para argumentar por qué un objeto construido y explorado en el EGD Cabri 3D no era un *objeto-concepto* determinado (*e.g.*, un cuadrilátero en Ad16 y Ad17), o para validar que el resultado de cierta exploración condujo a la determinación ciertos *objetos concepto/proposición* (*e.g.*, planos en Ad27-Ad32 de Trayectoria 8, o intersección de planos en Ad1 de Trayectoria 10). Por su parte, los argumentos substanciales fueron propuestos para dos propósitos principalmente: (i) Los inductivos para concluir, luego de haberse hecho una exploración empírica en el EGD Cabri 3D y determinar un invariante, una regla general (*objeto-proposición*) que sería nueva en el Sistema Teórico; (ii) Los de convicción externa para producir contraejemplos (*objetos-proposición* que refutan) de ciertos *procedimientos* de construcción, empleando como *backing* representaciones gráficas hechas en el EGD Cabri 3D.

Exploración (teórica) de una figura: Como se comentó durante los análisis didácticos, esta situación es emergente (nueva). En términos generales, este tipo de situación consiste en poner en juego objetos del sistema teórico instalados en el curso para estudiar un escenario planteado, usualmente mediante un problema. Los argumentos presentes en este tipo de situación fueron 27 de estructura deductiva y 28 substanciales

(24 abductivos, 2 inductivos, 1 analógico y 1 de convicción externa). Varias aclaraciones deben ser hechas al respecto de lo sucedido en este tipo de situaciones durante el trascurso del curso analizado. Un ejemplo de este tipo de situación tomó lugar cuando se propuso el problema PP5; con este problema se inducía la producción de argumentos abductivos puesto que solicitaba la explicitación de *objetos-proposición* (datos y garantías) instalados en el sistema teórico del curso, para inferir una aserción específica (sea un plano α). Esto explica la gran producción de ese tipo argumentos durante la Trayectoria 7 por parte de los estudiantes y comentados por la profesora. Por su lado, con el problema PA4.1 (¿Es el espacio diferente a un punto, a una recta y a un plano?) se tenía la intención de que los estudiantes utilizaran *objetos* del sistema teórico (o aludieran a la necesidad de unos nuevos) para justificar la diferencia entre los objetos citados en el enunciado del problema. Ese escenario indujo (en correspondencia con Eco, 1989) a que hubiese habido una producción bastante variada de tipos de argumentos substanciales (abductivos, inductivos y analógicos) producidos por los estudiantes, principalmente abductivos; para este caso en particular, tales argumentos tuvieron el firme propósito de introducir al sistema el *objeto-proposición* "existencia de cuatro puntos no coplanares". En lo que respecta al problema PA8.1, cuyo objetivo era estudiar una aserción hecha por un estudiante ficticio al respecto de la relación de equidistancia y el objeto mediatriz, los estudiantes produjeron argumentos de estructura deductiva para convalidar o no dicha aserción.

La gran producción de argumentos transformados (indicados por la letra "T" de la etiqueta que identifica a cada argumento en la Tabla 117 y, principalmente producidos por la profesora, responde a la mención de *objetos-proposición*, durante las puestas en común, que complementaron o refutaron los argumentos originales producidos por los estudiantes durante su trabajo autónomo.

Elaboración de una prueba: Como era de esperarse, el deductivo fue el tipo de argumento predominante en esta situación. Dentro de los 15 argumentos deductivos producidos (principalmente elaborados de manera colectiva), la mayoría emplearon el método (*procedimiento*) directo de prueba y una construcción auxiliar para desarrollarla. Esto último se explica por dos razones específicas: (i) La necesidad de involucrar en la prueba objetos que posibilitaran la emergencia de un objeto con las condiciones deseadas, teniendo presente que la mayoría de los enunciados que se pretendía probar aludían a la existencia de objetos. Y (ii) el hecho de que la prueba de un enunciado con tales características está infundada por el procedimiento de construcción del objeto deseado; en otras palabras, cada paso en un *procedimiento* de construcción se convierte en una *proposición-aserción* de un paso de la prueba respectiva. Con el propósito de ilustrar lo anterior, la Tabla 118 presenta ejemplos de argumentos deductivos que hicieron uso de una construcción auxiliar.

Tabla 118. Argumentos deductivos con construcción auxiliar

Argumento	Trayectoria	Proposición	Construcción auxiliar
Ad1	1	Existencia de segmentos congruentes	Circunferencia o rayo
Ad6	14	Existencia de un triángulo congruente a otro dado en un plano diferente al que contiene al triángulo dado	Alturas de triángulos o circunferencias
Ad7	15	T. Fundamental de perpendicularidad	Mediatriz de un segmento en diversos planos
Ad8, Ad9	16	T. Recta-plano perpendicular punto interno.	Sendas rectas en dos planos diferentes perpendiculares a la recta dada
Ad2-Ad4, Ad6	18	Existencia de dos triángulos congruentes dados dos segmentos congruentes	Planos mediadores
Ad5	18	T. Plano mediador	Plano perpendicular a un segmento por su punto medio

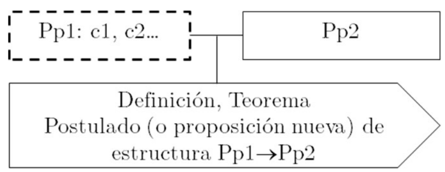
Otros argumentos deductivos emplearon el método (*procedimiento*) indirecto de prueba por contradicción (*e.g.*, Ad15 para probar el T. Espacio infinitos puntos en la Trayectoria 6, o Ad9 para probar el T. Unicidad recta perpendicular a un plano punto interno en el plano en la Trayectoria 16). Un asunto interesante de esta situación instruccional tiene que ver con la emergencia de cuatro argumentos substanciales (específicamente, abductivos). Estos surgieron como parte de una estrategia, sugerida por la profesora durante la elaboración conjunta de una prueba (del T. Fundamental de la perpendicularidad), para generar un plan que posibilitara la elaboración de la prueba correspondiente. Más específicamente, con esta estrategia se quiso explicitar posibles aserciones y garantías que llevaran a concluir una propiedad determinada (para este caso, la perpendicularidad entre dos rectas).

Instalación de conceptos/proposiciones: Este tipo de situaciones se focaliza en el reconocimiento de ciertos objetos en el sistema teórico del curso mediante la explicitación de su estatus en dicho sistema (*objeto-concepto* u *objeto-proposición* sea teorema o postulado). Como se identificó durante los análisis didácticos, las condiciones para que una *proposición* fuera considerada como teorema son su prueba, su uso en la prueba de otro teorema y su sanción como tal por parte de la profesora. Así mismo, las condiciones para instalar un objeto como *concepto* fueron proveer su definición, su sanción como tal por parte de la profesora y contar con la prueba de su existencia –este último, un asunto novedoso en relación con las características provistas por Herbst y colaboradores (2010) para esta situación–. Desde esta perspectiva, los tipos de argumentos que primaron en tales situaciones son los deductivos, correspondientes en su mayoría a los incluidos en la situación de elaboración de pruebas. Sólo dos excepciones se presentaron al respecto: tres tipos de argumentos substanciales fueron empleados para legitimar la instalación de dos *objetos*, un concepto (circunferencia) y un postulado (P. Espacio). En el primer caso, se usó un argumento de convicción externa cuyo *backing* fue una representación hecha en el EGD Cabri 3D para producir la definición del objeto circunferencia. En el segundo, se usó un argumento inductivo y uno por analogía para instalar el postulado en cuestión. Este fenómeno pone de manifiesto una manera que legitima el uso de argumentos substanciales para instalar objetos en un curso formal de geometría.

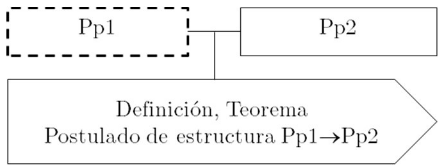
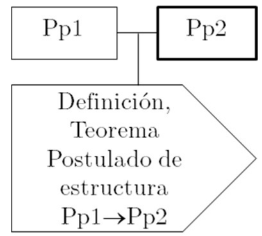
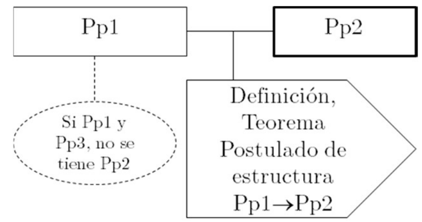
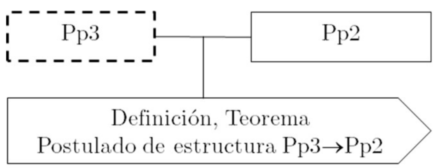
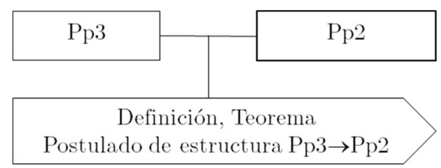
5.1.2 Articulación de objetos primarios por tipos de argumentos

Los siguientes parágrafos y diagramas pretenden ilustrar maneras en que los diversos tipos de argumentos pueden articular objetos primarios presentes en la configuración en las que tales argumentos están presentes. En primera instancia, vale indicar que la tipificación de objetos propuesta por el EOS permitió precisar el estatus de los objetos (concepto-definición, proposición–teorema, postulado) presentes en cada uno de los elementos que conforma un argumento. La información presente en la Tabla 119, ilustra formas en que los objetos primarios son articulados por (o están involucrados en) tipos de argumentos, según las diferentes situaciones instruccionales. Dada la connotación que tuvo el proceso de argumentación por analogía (no muy comentado en la literatura de igual mamera que otros tipos de argumentos), se dedica un apartado exclusivamente a este.

Tabla 119. Forma en que los tipos de argumentos articular objetos primarios

	Ante un problema...	**Práctica 1**	**Práctica 2**	**Práctica 3 (opcional)**	**Práctica 4 (opcional)**
Construcción/exploración de una figura	de búsqueda de antecedente que solicita *condiciones para construir un objeto o determinar una relación entre objetos* (Pp2)	Se produce un *argumento abductivo* (o analógico –ver apartado 5.1.2.1–) donde se infiere una *proposición* (Pp1) que contiene condiciones (c1, c2, ...) que lleva a Pp2 usando como garantía una proposición Pp1→Pp2 que puede estar instalada o no en el sistema: 	Se produce un *procedimiento* Pr1 de construcción en el cual cada condición (c1, c2, ...) de la *proposición* Pp1 se convierte en un paso de Pr1 (cambian su estatus a paso de construcción). Se desarrolla Pr1 en el EGD para testearlo, esto es, para verificar que conduce a la representación de Pp2.	Si el resultado de Pr1 no conduce a Pp2, se repiten sucesivamente las Prácticas 1 y 2, hasta precisar las condiciones que producen el resultado deseado.	Se producen argumentos deductivos que pretenden validar con objetos del sistema teórico que cada paso (c1, c2, ...) del *procedimiento* Pr1 de construcción se puede hacer. Con ello, cada c1, c2, ... se convierte (cambia su estatus) en aserción de un argumento deductivo.

	Práctica 4	**Práctica 5**
Elaboración de una prueba/instalación de proposición o concepto	Se produce un *argumento deductivo* global (una prueba) donde cada paso del procedimiento (c1, c2...) de construcción establecido se convierte (cambia su estatus) en una *proposición-aserción* que conforma tal argumento global, cuya conclusión es Pp2. Las garantías de cada una de dichas aserciones deben ser provistas.	Se instala como teorema del sistema teórico la proposición Pp1→Pp2 si la profesora así lo considera.

<table>
<tr><th></th><th>Ante un problema...</th><th>Práctica 1 (búsqueda de antecedente)</th><th>Práctica 2 (estudio teórico de una aserción dada)</th></tr>
<tr><td>Exploración teórica de una situación</td><td>de búsqueda teórica de antecedente que solicita datos y garantías para concluir una aserción determinada (Pp2), o de exploración teórica que solicita el estudio sobre la validez de una proposición Pp1→Pp2</td><td>Se produce un argumento abductivo donde se infiere una proposición (Pp1) que lleva a Pp2 usando como garantía una proposición Pp1→Pp2 que está instalada en el sistema:
</td><td>El argumento abductivo se transforma en un argumento deductivo a través del cual se provee una proposición-garantía instalada en el sistema que soporta la relación condicional entre Pp1 y Pp2 (con lo cual Pp1 deja de ser condición probable para ser condición suficiente). En contraste, se puede proveer una proposición-dato (Pp3) a través del cual se refuta Pp1→Pp2:

o
</td></tr>
<tr><th></th><th>Ante un problema...</th><th>Práctica 1 (opcional)</th><th>Práctica 2</th></tr>
<tr><td>Elaboración de una prueba/instalación de proposición o concepto</td><td>que solicita la elaboración de una prueba de un enunciado Pp1→Pp2</td><td>Se producen argumentos abductivos donde se infieren proposiciones Pp3 que llevan a Pp2 usando como garantía una proposición Pp3→Pp2 que está instalada en el sistema.
</td><td>Si se lleva a cabo la Práctica 1, se escoge la mejor opción Pp3 y el argumento abductivo de tal Práctica se transforma en uno deductivo:

Luego, mediante argumentos deductivos se relaciona Pp3 con Pp1. De esta forma se produce un argumento global (prueba) del enunciado Pp1→Pp2. Si no se lleva a cabo la Práctica 1, se producen argumentos deductivos que relacionan Pp1 con Pp2, produciéndose un argumento global (prueba) del enunciado Pp1→Pp2.</td></tr>
</table>

5.1.2.1 *Articulación de objetos primarios en procesos de argumentación por analogía*

Uno de los resultados más importantes del estudio en cuanto a la argumentación tiene que ver con la identificación de argumentos por analogía, no muy tratados en la literatura en comparación con otros tipos de argumentos –inductivos, abductivos y deductivos– (English, 2004; Reid & Knipping, 2010; Lee & Sriraman, 2011). Por lo tanto, se considera pertinente dedicar un apartado para este tipo de argumentos mostrando la utilidad de la configuración ontosemiótica para detallar dicho proceso.

Para dar solución a dos problemas PA4.1 (Trayectoria 6) y PP9 (Trayectorias 17 y 18) fueron utilizados sendos argumentos por analogía como soporte para darles solución en el Dominio de la Geometría del Espacio, haciendo comparaciones con objetos conocidos del Dominio de la Geometría Plana. En ambos casos, el uso del Modelo de Toulmin y de la configuración ontosemiótica fueron herramientas que al usarse sinérgicamente permitieron describir de mejor manera el proceso de argumentación correspondiente. Si bien el Modelo de Toulmin permitió el estructurar los argumentos mismos (ver Tabla 120), el EOS permitió concretar cómo los objetos activados en las prácticas respectivas fueron articulados por dicho argumento.

Tabla 120. Argumentos analógicos identificados en las Trayectorias 6, 17 y 18

Sobre PA4.1 (Trayectoria 6): ¿Es el espacio diferente a un punto, a una recta y a un plano?.	Sobre PP9 (Trayectorias 17, 18): Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes?
P_i, m en DP [o m_i, α en DP], $\mathcal{R}$: Contenencia, $\mathcal{R}(P_i, m)$ [o $\mathcal{R}(m_i, \alpha)$]; α_i, ε en DL Pp18: $\mathcal{R}(\alpha_i, \varepsilon)$ (*i.e.*, infinitos planos están contenidos en el Espacio -DL-) f_{Pp19}:DP →DL $f_{Pp19}(P_i) = \alpha_i$ [o $f_{Pp19}(m_i) = \alpha_i$] $f_{Pp19}(m) = \varepsilon$ [o $f_{Pp19}(a) = \varepsilon$] $\mathcal{R}[f_{Pp19}(P_i), f_{Pp19}(m)] = \mathcal{R}(\alpha_i, \varepsilon)$ [o $\mathcal{R}[f_{Pp19}(m_i), f_{Pp19}(a)] = \mathcal{R}(\alpha_i, \varepsilon)$]	$\overline{AB}, \overline{CD}$ *coplanares*; $\mathcal{M}_{\overline{AC}}$; $\mathcal{M}_{\overline{BD}}$ en DP; $\mathcal{R}_2$: soluciona el problema, $\mathcal{R}_2(E = \mathcal{M}_{\overline{AC}} \cap \mathcal{M}_{\overline{BD}}; \overline{AB}, \overline{CD}$ *coplanares*$)$ en DP; $\overline{AB}, \overline{CD}$ *alabeados*; $\beta_{\overline{AC}}$; $\beta_{\overline{BD}}$; $m = \beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}}$ en DL Pp15: $\mathcal{R}_2$ $(m = \beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}}; \overline{AB}, \overline{CD}$ *alabeados*$)$ (*i.e.*, m soluciona el problema con $\overline{AB}, \overline{CD}$ alabeados en DL -Geometría del Espacio-) f_{Pp10}: DP→DL Pp11: $f_{Pp10}(\overline{AB}, \overline{CD}$ *coplanares*$) = (\overline{AB}, \overline{CD}$ *alabeados*$)$ Pp12: $f_{Pp10}(\mathcal{M}_{\overline{AC}}) = \beta_{\overline{AC}}$, $f_{Pp10}(\mathcal{M}_{\overline{BD}}) = \beta_{\overline{BD}}$ Pp13: $f_{Pp10}(E = \mathcal{M}_{\overline{AC}} \cap \mathcal{M}_{\overline{BD}}) = (m = \beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}})$ Pp14: $\mathcal{R}_2$ $[f_{Pp10}(E = \mathcal{M}_{\overline{AC}} \cap \mathcal{M}_{\overline{BD}}), f_{Pp10}(\overline{AB}, \overline{CD}$ *coplanares*$)] =$ $\mathcal{R}_2$ $(m = \beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}}; \overline{AB}, \overline{CD}$ *alabeados*$)$
Mediante el argumento analógico se pretende inferir que *infinitos planos* (α_i) *están contenidos en el espacio* ε (Pp18), teniendo como analogía *infinitos planos* (α_i) *pertenecen al Espacio* ε *como infinitos puntos* (P_i) *pertenecen a una recta* m –o infinitas rectas (m_i) pertenecen a un plano α– (Pp19).	Mediante el argumento analógico se pretende inferir que *la recta de intersección entre los planos mediadores de* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *soluciona el problema* (Pp15), teniendo como analogía que *el plano es al espacio como la recta es al plano* (Pp10).

De manera más concreta, el análisis ontosemiótico dejó detallar, mediante la concreción de las configuraciones cómo fueron articulados los objetos involucrados en las fases de un proceso de argumentación por analogía (ilustrado con especificidad en la Trayectoria 17 mediante la Figura 136). En los casos citados, se pudo identificar el poder de dicho proceso para adquirir información plausible de objetos de la geometría del espacio, a partir de la similitud que sugieren las analogías en las que se basa, con objetos de la geometría plana. Es interesante notar que la comparación indicada por tales analogías (Pp19 y Pp10) fueron más allá de aquella a la que alude explícitamente (*rectas* con *planos*). Esto es, implicó una dinámica de asociaciones (*e.g.*, Pp11-Pp14, Pp24-Pp26 en la Trayectoria 17) que incitaron la emergencia de objetos en la geometría del espacio (*e.g.*, infinitos planos en el Espacio –Trayectoria 6–, o Plano mediador –Trayectoria 17–) producto de las respectivas correspondencias de relaciones sugeridas por sus contrapartes en la geometría plana (*e.g.*, infinitas rectas en un plano –Trayectoria 6–, o Mediatriz de un segmento –Trayectoria 17–). Dicha dinámica condujo a inferencias analógicas (*e.g.*, Pp18 en Trayectoria 6, o Pp15 en Trayectoria 17) que llevó a la solución de cada problema en el dominio de la Geometría del Espacio vía los argumentos analógicos referenciados.

Con lo anterior, es posible describir con mejor detalle las fases del proceso de argumentación por analogía propuestas por Steinhart (2001) en el marco de la solución de un problema, empleando la terminología sugerida por el EOS: Dado el problema, primero (Fase de Acceso) se reconoce el DL donde la solución no es conocida; se identifican potenciales DP en los cuales existen configuraciones surgidas de solucionar el problema. Se estudia la posibilidad de correspondencias entre objetos de PL y de potenciales DP. Escogido DP, luego (Fase de Correspondencia) se precisa la analogía (Ppa) que da lugar a f_{Ppa} y, por ende, a las correspondencias entre objetos primarios (L_{DP}, L_{DL}), (C_{DP}, C_{DL}), (Pp_{DP}, Pp_{DL}), (Pr_{DP}, Pr_{DL}) y (A_{DP}, A_{DL}) que permiten ir conformando la configuración (análoga) en DL. Finalmente (Fase de trasferencia), se interpretan los objetos en DL y, con base en las correspondencias, se hacen inferencias analógicas que provocan objetos primarios en DL, los cuales son *proposiciones nuevas* de DL. En este sentido, la similitud entre los dominios DP y DL, principal característica de una analogía (English, 2004; Juthe, 2005; Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1989; Polya, 1954; Conner, Sigletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014) es explicitada mediante el uso de la configuración de objetos propuesta por el EOS, pues indica en detalle cómo se proyecta la estructura o configuración de DP en DL, y con ello, la correspondencia entre los respectivos objetos primarios. Por su puesto, las inferencias posibles de los argumentos por analogías deben luego ganar validez en el marco de un argumento deductivo; esto es dichas inferencias deben transformarse en aserciones de argumentos deductivos o teoremas probados en el marco de una teoría.

Se tienen, entonces, fundamentos empíricos que permiten sugerir que el proceso de argumentación por analogía es una herramienta didáctico-matemática que puede favorecer el estudio de objetos de la geometría del espacio con base en sus contrapartes de la geometría plana. La Figura 155 ilustra en abstracto el modelo de relación entre las configuraciones de DP y DL a partir de una f_{Ppa}.

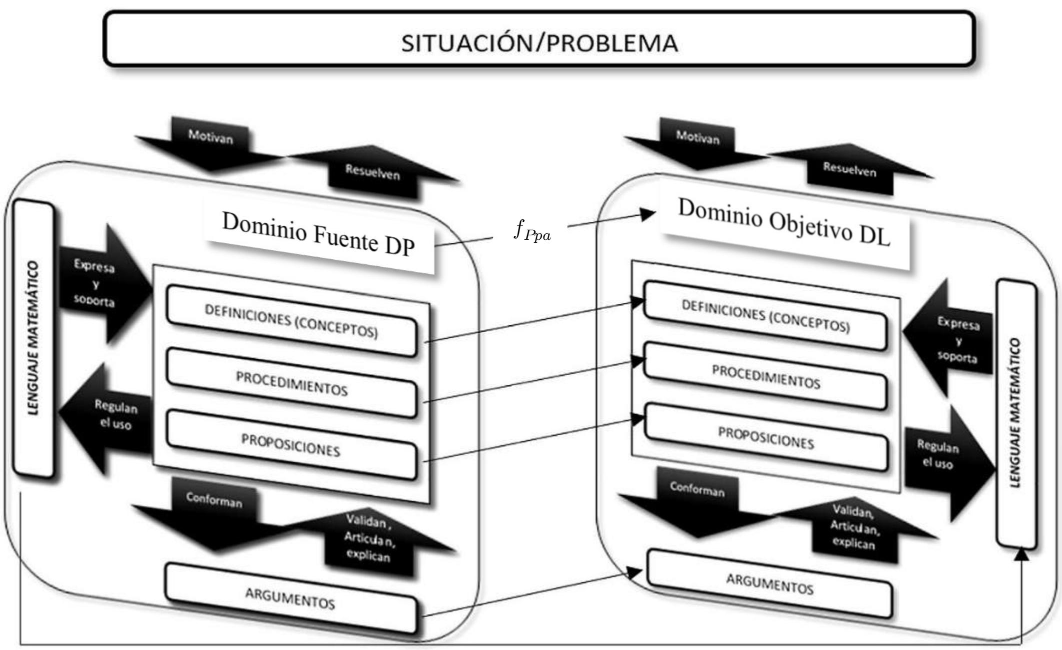


Figura 155. Correspondencias producto del proceso de argumentación por analogía

5.2 SOBRE SISTEMA DE NORMAS

Las Tablas 121 a la 126 presentan el compendio (sistema) de normas identificadas para cada una de las situaciones instruccionales, incluyendo la situación emergente *Exploración teórica de una situación* (que complementa la propuesta de la TII). Dichas Tablas tienen las siguientes características:

i. Con el propósito de proveer características de las normas, estas fueron clasificadas según las tipologías propuestas por la TII[61] y el EOS[62].

ii. Dado que el sistema de normas se construye colectivamente (Cobb & Bauersfeld, 1995; Cobb & Yackel, 1996; Yackel & Cobb, 1996), se estipula el miembro de la clase que sugirió la Norma. En tal sentido, la etiqueta *Est* indica que algún estudiante aludió a la norma en acto (*i.e.*, hizo alguna acción que fue interpretada como producto de una norma en específico). La etiqueta *Int* indica que la norma fue identificada en una interacción entre profesora y estudiantes en el marco de alguna práctica en específico. Y la etiqueta *Prof* de las Tablas indica que la profesora hizo referencia explícita a la Norma (vale indicar que todas las normas etiquetadas de esa forma hasta la trayectoria 1 del Bloque 1 fueron explicitadas por la profesora por su propia motivación; luego de tal trayectoria, las normas etiquetadas con *Prof*, aunque fueron explicitadas por la profesora, estuvieron provocadas por alguna práctica de los estudiantes conocida por ella (a excepción de las Normas 22, 23, 32, 33, 34, 12b, 27 y 54).

iii. Como un sistema de normas es dinámico (*i.e.*, varias normas tuvieron diferentes versiones a lo largo de un curso pues se especifican, complementan, flexibilizan producto de negociaciones en acto –Brousseau, 2002; Herbst, 2003; Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009–), las Tablas presentan la versión final del enunciado de las normas. Para cada norma se estipula si tuvo una versión única o si tuvo diferentes versiones durante el trascurso del curso. Se indica además el momento (trayectoria/bloque) en el que cada norma emergió por primera vez y, si la norma tuvo modificaciones, los momentos en el que se modificó hasta llegar a su versión final. Los cambios generados en la primera versión del enunciado de las normas modificadas son indicados por letras cursivas.

iv. Con el propósito de no repetir información y concretar el sistema de normas que influyó en los procesos de argumentación (y tipos de argumentos) en el curso que sirvió de escenario de investigación, en las Tablas fueron sombreadas las filas que contienen las normas correspondientes. En la Tabla 123 relativa a las Normas de la situación *elaboración de una prueba*, no se sombrea algo puesto que se entiende que todas las Normas influyen en procesos argumentativos (principalmente deductivos).

[61] Recuérdese que Ni, Nle, Nlp y Nt indican, respectivamente, Norma de intercambio, Norma de labores de los estudiantes, Norma de labores del profesor y Norma temporal.

[62] Recuérdese que Fe, Fm, Fi, Fc y Fec indican, respectivamente, Faceta epistémica, Faceta mediacional, Faceta inetaccional, Faceta cognitiva y Faceta ecología

Tabla 121. Normas Situación Construcción de una Figura

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII Ni	TII Nle	TII Nlp	TII Nt
7	Complemento: Mediante la resolución de problemas se introducen elementos (objetos primarios) al sistema teórico, *tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio.*	1	Prof	Presentación curso	Fe, Fc, M, D				X
		Final	Prof	6/04					
9	Todo se debe argumentar usando objetos instalados en el sistema teórico del curso	Final	Prof	Presentación curso	Fe, M	X	X		
9a	Flexibilización y complemento a 9: La justificación puede ser un argumento informal o una prueba. Un argumento informal para el curso es aquel que se compone de las aserciones (sin sus respectivas garantías) que pueden ser insumo para la prueba formal. Puede indicar que los objetos necesarios para llevar a cabo tal prueba no están en el sistema teórico. Así mismo, un argumento informal puede ser uno de convicción externa constituido principalmente por contraejemplo ilustrado por una representación gráfica dinámica o estática (estos surgen específicamente en situaciones de construcción de una figura).	1	Prof	1/1	Fe, C	X			
		2	Int	2/1	Fe, C	X			
		Final	Int	18/6	Fe, C	X			
12	Los procesos matemáticos se llevarán a cabo con el apoyo de EGD (GeoGebra y Cabri 2D y 3D).	Única	Prof	Presentación Curso	Fm, Fc, D	X			X
12a	Especificación Norma 12: Construir en un EGD implica construir robusta o blandamente los objetos inmersos en el enunciado del problema. Si la construcción es robusta, implica poner en juego propiedades del objeto para desarrollar el procedimiento respectivo. Un asunto estratégico que puede orientar *un procedimiento de construcción es la producción de argumentos abductivos o analógicos que posibiliten un plan, cuya aserción es la relación clave inmersa en el objeto que se pretende construir.*	1	Prof	1/1	Fm, Fc, D	X			X
		Final	Int	18/6	Fm, Fc, D	X			X
13a	Flexibilización: La solución a un problema se compone de la construcción en EGD (parte robusta o parte blanda). Vale indicar que, en la resolución de un problema, la construcción en EGD asociada no necesariamente tiene una parte blanda. *No se penaliza el hecho de que no presenten el reporte, pero deben comunicar el procedimiento respectivo si se les solicita.*	1	Prof	Presentación curso	Fm, Fi, Fc		X		X
		2	Est	1/1	Fm, Fi, Fc		X		X
		Final	Int	8/4	Fm, Fi, Fc		X		X
15	Complemento: En las representaciones gráficas, los puntos deben ser nombrados para facilitar la comunicación. *Además, se puede cambiar el color y la trama de la superficie para visualizar mejor los objetos involucrados en una representación.*	1	Prof	Presentación Curso	Fm, Fi	X	X	X	
		Final	Int	9/4	Fm, Fi	X	X	X	

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII Ni	TII Nle	TII Nlp	TII Nt
16	Complemento: Es legítimo el uso de objetos, *tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio*, que no hacen parte del sistema teórico en un procedimiento de construcción o exploración.	1	Prof	1/1	Fe, M	X			X
		Final	Prof	6/4	Fe, M	X			X
18	Complemento: El EGD hace ostensivos objetos geométricos que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico. *En el dominio de la Geometría del Espacio, Cabri 3D cobra un valor importante mediante el empleo de herramientas especiales* (*e.g., redefinir o bola de cristal no presentes en Cabri 2D*) *que pone de manifiesto dichos objetos.*	1	Prof	2/1	Fm, D	X			X
		Final	Prof	6/4	Fm, D	X			X
19	Complemento: La profesora se encarga de hacer correcciones de fondo y forma respecto a los procedimientos de construcción que los estudiantes proveen como solución de un problema. Ella, finalmente, escoge aquellas que son consideradas como correctas. Además, *debe hacerse cargo de proveer ideas nuevas cuando los estudiantes están estancados.*	1	Int	2/2	Fi, Fe, M			X	
		Final	Int	11/5	Fi, Fe, M			X	
31	La prueba de la conjetura-solución de un problema que pide la construcción de un objeto (existencia de un objeto) es guiada por el proceso mismo de construcción; de manera más concreta, los pasos de construcción infunden las aserciones de los pasos argumentales de la prueba.	Única	Prof	2/1	Fe, Fc, M, D				X
37	Las representaciones y procedimiento de construcción de EGD, realimenta las ideas de los estudiantes respecto a su concepción sobre los objetos-definición o propiedades.	Única	Int	3/1	Fm, Fc, D				X
39	Complemento: Un procedimiento de construcción de un objeto es válido (teóricamente) una vez todos los objetos que intervienen están instalados, esto es, cada paso se garantiza por un objeto del sistema teórico. *Así mismo, los procedimientos pueden ser legítimos* (*no descartables*), *antes de validarlos teóricamente, mediante argumentos abductivos o analógicos. De otro lado, un procedimiento se descarta si existe un contraejemplo que ilustre que, aun siguiendo los pasos del procedimiento, el objeto deseado no es construido (i.e., si existe un argumento de convicción externa cuya garantía es una representación hecha en un EGD, por ejemplo).*	1	Int	3/1	Fe, M				X
		Final	Int	18/6	Fe, M				X
42	Durante un proceso argumentativo, las representaciones gráficas se usan para ilustrar las ideas verbales o escrita.	Única	Int	4/1	Fe, Fm, M, D				X
47	Complemento: Los estudiantes pueden (y deben) hacer refutaciones de ideas dadas por otros miembros de la clase (bien sean pasos argumentales o *procedimientos de construcción*) rebatiendo alguno de los elementos de un argumento o *presentando contraejemplos a los procedimientos de construcción.*	1	Int	7/4	Fe, Fi		X		
		Final	Int	18/6	Fe, Fi		X		

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII Ni	TII Nle	TII Nlp	TII Nt
50	Habiendo varias opciones correctas para proceder en un procedimiento de construcción o en una elaboración de una prueba, se debe escoger aquella que represente el camino más rápido. En otras palabras, se debe usar aquellas proposiciones cuyo antecedente es menos exigente	Única	Prof	9/4	Fe	X			
51	El mejor procedimiento de construcción es el que sea más general, esto es, aquel que no impone condiciones particulares a los objetos dados.	Única	Prof	10/5	Fe	X			
5b.1	Complemento: Se debe emplear la simbología geométrica y el lenguaje matemático escrito correspondiente *siempre que se haga un reporte escrito* (*no solo en el documento "notas de clase"*).	1	Prof	Presentación curso	Fm, Fi, M		X	X	
		Final	Prof	1/1	Fm, Fi, M		X	X	

Tabla 122. Normas Situación Exploración de una Figura/Formulación de Conjetura

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII Ni	TII Nle	TII Nlp	TII Nt
7	Complemento: Mediante la resolución de problemas se introducen elementos (objetos primarios) al sistema teórico, *tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio*.	Final	Prof	6/4	Fe, Fc, M, D				X
12b	Especificación Norma 12: La exploración (medir, arrastrar) en EGD de la situación involucrada en el problema se hace para verificar o descubrir propiedades. *Ciertas funciones del EGD ayudan a establecer con mayor precisión lo que se descubre o verifica* (*e.g., decimales para las medidas de ángulo, marcas de ángulo específicas que indican cierta información, arrastre de bola de cristal*).	1	Prof	Presentación curso	Fm, Fc, D	X			
		2	Est	1/1	Fm, Fc, D	X			
		Final	Prof	11/5	Fm, Fc, D	X			
13b	Flexibilización: Los estudiantes deben hacer una exploración cuando solucionan un problema. *No se penaliza el hecho de que no presenten el respectivo reporte; no obstante, debe exponerlo cuando se le solicita.*	1	Prof	Presentación curso	Fm, Fi, Fc		X		X
		2	Int	8/4	Fm, Fi, Fc		X		X
		Final	Int	15/5	Fm, Fi, Fc		X		X
13c	Flexibilización: Los estudiantes deben formular una conjetura como solución a un problema. *No se penaliza el hecho de que no presenten el respectivo reporte; no obstante, debe exponerlo cuando se le solicita.*	1	Prof	Presentación curso	Fm, Fi, Fc		X		X
		Final	Int	8/4	Fm, Fi, Fc		X		X
14	Complemento: El enunciado de una conjetura es una proposición condicional si... entonces... El antecedente de una conjetura se corresponde con lo construido en el EGD; un indicador	1	Prof	Presentación curso	Fe, Fm, M, D	X			

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII Ni	TII Nle	TII Nlp	TII Nt
	para determinar el consecuente de la conjetura es precisar "a dónde se quiere llegar", no necesariamente lo que se "descubrió o verificó" en EGD.	Final	Est	1/1	Fe, Fm, M, D	X			
16	Complemento: Es legítimo el uso de objetos, *tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio*, que no hacen parte del sistema teórico en un procedimiento de construcción o exploración.	Final	Prof	6/4	Fe, M	X			X
18	Complemento: El EGD hace ostensivos objetos geométricos que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico. *En el dominio de la Geometría del Espacio, Cabri 3D cobra un valor importante mediante el empleo de herramientas especiales* (*e.g., redefinir o bola de cristal*) *no presentes en Cabri 2D que pone de manifiesto dichos objetos*.	Final	Prof	6/4	Fm, D	X			X
21	Complemento: La profesora se encarga de precisar cuáles son las conjeturas que podrían ser probadas luego de llevarse a cabo un estudio conjunto de forma y fondo (en relación con la Norma 14) entre ella y los estudiantes sobre aquellas conjeturas propuestas como solución a un problema. *También de considerar cuál exploración es suficiente para determinar una propiedad plausible.*	1	Int	2/1	Fi, Fe, M			X	
		Final	Int	11/5	Fi, Fe, M			X	
5b.1	Complemento: Se debe emplear la simbología geométrica y el lenguaje matemático escrito correspondiente *siempre que se haga un reporte escrito* (*no solo en el documento "notas de clase"*).	Final	Prof	1/1	Fm, Fi, M		X	X	

Tabla 123. Normas Situación Elaboración de una Prueba

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII Ni	TII Nle	TII Nlp	TII Nt
9	Todo se debe argumentar usando objetos instalados en el sistema teórico del curso	Única	Prof	Presentación curso	Fe, M		X		
10	La rigurosidad en la elaboración de la prueba es variable.	Única	Int	1/1	Fe, M, D	X			
13d	Flexibilización. La resolución de un problema implica la justificación (prueba) de la conjetura-solución. *No se penaliza el hecho de que no se haga el respectivo reporte*; *no obstante, debe exponerlo cuando se le solicita*.	1	Prof	Presentación curso	Fm, Fi, Fc		X		X
		Final	Prof	8/4	Fm, Fi, Fc		X		X
17	En la prueba (validación teórica) de una conjetura, no se pueden usar objetos que no hagan parte del sistema teórico del curso.	Única	Int	1/1		X			
20	La existencia de los objetos que se definen debe ser probada; en otras palabras, una definición no garantiza la existencia del objeto definido.	Única	Prof	2/1					X

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII			
						Ni	Nle	Nlp	Nt
22	Los elementos que debe contener cada paso argumental son aserción, dato y garantía, donde la garantía es aquel objeto primario (definición, postulado, teorema) que soporta la aserción como consecuencia necesaria de los datos. *Un dato no puede referirse a la propiedad que se quiere inferir y contenida en la aserción*. El conjunto de todos los pasos argumentales conforma una prueba (argumento global).	1	Prof	2/1	Fe, M, D	X			
		Final	Prof	7/4	Fe, M, D	X			
23	Uno de los formatos legítimo para presentar una prueba (argumento global de índole deductivo), denominado Aserción-Garantía y Datos, consta de una tabla a tres columnas; la primera de ellas registra el número del paso argumental, la asegunda registra la aserción respectiva, y la tercera registra la garantía y los datos correspondientes (estos últimos indicados mediante el número del paso puesto en la primera columna).	Única	Prof	2/1	Fe, Fi, Fm, Fc, D	X			
24	El profesor asume la responsabilidad de preguntar por los elementos que constituyen los pasos argumentales de una prueba.	Única	Int	2/1	Fe, Fi, Fc, D			X	
25	El profesor asume la responsabilidad de determinar la validez del uso de las proposiciones dichas por los estudiantes en cada paso argumental (o argumento).	Única	Int	2/1	Fe, D			X	
26	El profesor asume la responsabilidad de tomar la decisión final cuando existen varias opciones correctas (de aserción, garantías o ideas argumentales) sugeridas por los estudiantes.	Única	Int	2/1	Fe, D			X	
27	Variación: El profesor asume la responsabilidad de la sintaxis escrita (simbología geométrica) de los elementos que conforman el argumento global y ponerlos en el lugar indicado del formato Aserción-Garantía y Datos, cuando se hace la prueba en una actividad de toda la clase. Cuando la profesora lo decida, *los estudiantes asumen tal responsabilidad*.	Final	Prof	15/5	Fe, Fi, Fm		X	X	
29	Los estudiantes son los responsables de proveer verbalmente (en leguaje geométrico) las ideas iniciales de los pasos argumentales (semántica) cuando la profesora les indaga al respecto.	Única	Int	2/1	Fe, Fi, Fc, D		X		
30	Los estudiantes son los responsables de precisar verbalmente, con nombres particulares (sintaxis), los objetos involucrados en cada uno de los pasos cuando la profesora pide tal precisión.	Única	Int	2/1	Fe, Fi, Fc, D		X		
31	Complemento: La prueba de la conjetura-solución de un problema que pide la construcción de un objeto (existencia de un objeto) es guiada por el proceso de construcción; de manera más concreta, los pasos de construcción infunden las aserciones de los pasos argumentales de la prueba. *Así mismo, otro asunto estratégico que puede orientar la elaboración de dicha prueba es la producción de argumentos abductivos que posibiliten un plan, cuya aserción es la relación clave inmersa en el objeto cuya existencia se pretende probar.*	1	Prof	2/1	Fe, Fc, M, D	X			
		Final	Int	15/5	Fe, Fc, M, D	X			
32	La prueba de una proposición implica la precisión de los siguientes aspectos: el método empleado para desarrollarlo, y el dato inicial y aserción-objetivo que se pretende probar.	Única	Prof	2/1	Fe, M	X			

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII Ni	TII Nle	TII Nlp	TII Nt
33	Una prueba válida no necesariamente debe contener todos los pasos; esta puede estar compuesta de aserciones claves (Núcleos) con su respectiva garantía (Pilares); los núcleos con sus correspondientes pilares son los pasos que posibilitan con suficiencia la idea de la prueba y, en consecuencia, dan un indicio para precisar todos los pasos que conforman la prueba completa.	Única	Prof	2/1	Fe, M, D	X			
34	Uno de los formatos legítimos para presentar una prueba, denominado Núcleo-Pilar, consta de una tabla a tres columnas; la primera de ellas registra el número del paso argumental, la asegunda registra la aserción clave respectiva, y la tercera registra la garantía correspondiente.	Única	Prof	2/1	Fe, Fi, Fm, Fc, D	X			
43	Durante la elaboración de una prueba no se debe perder de vista la aserción-objetivo.	Única	Est	4/1	Fe, M	X			
44	Probar la existencia de un objeto cuya definición alude a un conjunto de puntos con ciertas características, implica garantizar que dicho conjunto no es vacío; es decir, que existe un punto con dichas características.	Única	Prof	4/1	Fe, M	X			
45	La elaboración de prueba de la existencia de un objeto debe satisfacer las características dadas por su definición y la representación gráfica que se tiene del mismo.	Única	Int	4/1	Fe, Fm, M, D	X			
47	Los estudiantes pueden (y deben) hacer refutaciones de ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase, rebatiendo alguno de los elementos de un argumento. *De igual forma pueden hacerlo en lo que respecta a procedimiento de construcción.*	Final	Int	18/6	Fe, Fi		X		
48	Los estudiantes pueden (y deben) legitimar ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase.	Única	Int	7/4	Fe, Fi		X		
53	La profesora es quien decide finalmente qué se prueba en el curso de manera colectiva; esto es, no toda conjetura aceptada se prueba de manera colectiva.	Única	Int	15/5	Fe, D			X	
54	En el desarrollo de una prueba del Dominio de la Geometría es pertinente precisar los planos en los que están contenidos los objetos inmersos en la situación. Esto con el fin de no cometer errores y precisar su utilidad en la elaboración de una prueba. Específicamente, es pertinente pensar cómo las situaciones del Espacio incluyen hechos del dominio de la Geometría Plana con el propósito de poder usar teoremas de dicho dominio ya instalados en el sistema.	Única	Prof	16/5	Fe, M	X			
55	Una estrategia usual para probar una unicidad en el espacio es usar el método indirecto por contradicción llevando la situación a un plano y estableciendo una contradicción en el dominio de la Geometría Plana.	Única	Est	16/5	Fe, M	X			
56	La prueba de la igualdad entre dos conjuntos implica probar la contenencia de un conjunto en el otro y viceversa.	Única	Prof	18/6	Fe, M	X			
5b.1	Complemento: Se debe emplear la simbología geométrica y el lenguaje matemático escrito correspondiente *siempre que se haga un reporte escrito* (*no solo en el documento "notas de clase"*).	Final	Prof	1/1	Fm, Fi, M		X	X	

Tabla 124. Normas Situación Instalación de un concepto

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII			
						Ni	Nle	Nlp	Nt
7	Complemento: Mediante la resolución de problemas se introducen elementos (objetos primarios) al sistema teórico, *tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio.*	Final	Prof	6/4	Fe, Fc, M, D				X
8	Especificación: La profesora debe proponer a la clase cosas (problemas) que realmente se puedan discutir con los estudiantes, y por esa vía motivar la instalación de objetos primarios al sistema	1	Int	Presentación curso	Fe, Fc, M, D			X	
		Final	Prof	Presentación curso	Fe, Fc, M, D			X	
16	Complemento: Es legítimo el uso de objetos, *tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio*, que no hacen parte del sistema teórico en un procedimiento de construcción o exploración.	Final	Prof	6/4	Fe, M	X			X
18	Complemento: El EGD hace ostensivos objetos geométricos que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico. *En el dominio de la Geometría del Espacio, Cabri 3D cobra un valor importante mediante el empleo de herramientas especiales* (*e.g., redefinir o bola de cristal*) *no presentes en Cabri 2D que pone de manifiesto dichos objetos.*	Final	Prof	6/4	Fm, D	X			X
20	La existencia de los objetos que se definen debe ser probada; en otras palabras, una definición no garantiza la existencia del objeto definido**.**	Única	Prof	2/1					X
36	Los estudiantes tienen la responsabilidad de proveer las primeras ideas respecto a la definición de un objeto.	Única	Int	3/1	Fe, Fi		X		
37	Las representaciones y procedimiento de construcción de EGD, realimenta las ideas de los estudiantes respecto a su concepción sobre los objetos-definición.	Única	Int	3/1	Fm, Fc, D				
38	La profesora se responsabiliza de formular la definición final luego escuchar a los estudiantes o usar el EGD para realimentar ideas.	Única	Int	3/1	Fe, Fi			X	
40	Un objeto-concepto se instala en el sistema teórico si se expresa la definición del objeto, se prueba su existencia, se usa en un procedimiento de construcción y la profesora lo sanciona como tal.	Única	Prof	3/1	Fe, M	X		X	X
46	Se emplean argumentos deductivos (cuyas garantías son definiciones) o de convicción externa (cuyo *backing* es una representación en EGD) para inferir o verificar propiedades y, con ello, poder formular definiciones de objetos.	Única	Int	6/4	Fe, D, M				
52	Tres aspectos son suficientes para que los estudiantes queden convencidos de la existencia de un objeto: (i) Realización de una construcción robusta del objeto en cuestión, (ii) realización	Única	Est	11/5	Fe, Fm			X	

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII			
						Ni	Nle	Nlp	Nt
	de la prueba de existencia, o (iii) realización, por parte de la profesora, de una exploración basada en una construcción blanda que sugiera la existencia del objeto.								
5b.1	Complemento: Se debe emplear la simbología geométrica y el lenguaje matemático escrito correspondiente *siempre que se haga un reporte escrito* (*no solo en el documento "notas de clase"*).	Final	Prof	1/1	Fm, Fi, M		X	X	

Tabla 125. Normas Situación Instalación de una proposición

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII			
						Ni	Nle	Nlp	Nt
7	Complemento: Mediante la resolución de problemas se introducen elementos (objetos primarios) al sistema teórico, *tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio*.	Final	Prof	6/4	Fe, Fc, M, D				X
8	Especificación: La profesora debe proponer a la clase cosas (problemas) *que realmente se puedan discutir con los estudiantes*, y por esa vía motivar la instalación de objetos primarios al sistema.	1	Int	Presentación curso	Fc, Fa			X	
		Final	Prof	Presentación curso	Fc, Fa			X	
35	No todo lo que se prueba en el curso se instala como Teorema del sistema teórico de la clase	Única	Prof	2/1	Fe, C			X	
35a	Complemento: Un teorema se instala en el curso si su enunciado es probado, su enunciado se usa en la prueba de otro teorema y la profesora lo sanciona como tal. *Un postulado se instala en el curso si su enunciado es soportado por un argumento substancial* (*inductivo, analógico o de convicción externa -este último soportado en EGD*), *su enunciado se usa en la prueba de otro y la profesora lo sanciona como tal*.	1	Prof	2/1	Fe, C	X		X	X
		Final	Int	6/4	Fe, C	X		X	X
11	La profesora debe garantizar que los estudiantes tengan la oportunidad de estudiar todos los contenidos estipulados en los programas de los cursos. Esto implica poder instalar como teoremas ciertas proposiciones aun cuando se estudia muy superficialmente su prueba.	Única	Int	Presentación curso, 13/5	Fec, A			X	
18	Complemento: El EGD hace ostensivos objetos geométricos que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico. *En el dominio de la Geometría del Espacio, Cabri 3D cobra un valor importante mediante el empleo de herramientas especiales* (*e.g., redefinir o bola de cristal*) *no presentes en Cabri 2D que pone de manifiesto dichos objetos*.	Final	Prof	6/4	Fm, D	X			X
28	Un teorema previamente instalado es obsoleto si existe un teorema en el sistema teórico más potente que lo contiene.	Única	Prof	2/1	Fe, M	X			
41	El "mejor" enunciado para una proposición es:	Única	Est	4/1	Fe, M	X			

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII Ni	TII Nle	TII Nlp	TII Nt
	a) Aquel que permite inferir todo lo que contiene el antecedente de otra opción de enunciado. En otras palabras, es "mejor" el enunciado cuyo antecedente sintetiza el antecedente de otro. O b) Aquel cuyo antecedente no tiene tantas condiciones; es decir, es "mejor" el enunciado cuyo uso en una demostración no implica tanta exigencia en los datos necesitados. O c) Aquel cuyo enunciado emplea elementos instalados en el sistema teórico; es decir, es mejor el enunciado que tiene sentido (matemático) en el sistema teórico.								
5b.1	Complemento: Se debe emplear la simbología geométrica y el lenguaje matemático escrito correspondiente *siempre que se haga un reporte escrito* (*no solo en el documento "notas de clase"*).	Final	Prof	1/1	Fm, Fi, M		X	X	

Tabla 126. Normas Situación Exploración teórica de una situación

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII Ni	TII Nle	TII Nlp	TII Nt
9	Todo se debe argumentar usando objetos instalados en el sistema teórico del curso.	Única	Prof	Presentación curso	Fe, M		X		
9a	Flexibilización y complemento a 9: La justificación puede ser un argumento informal o una prueba. Un argumento informal para el curso es aquel que se compone de las aserciones (sin sus respectivas garantías) que pueden ser insumo para la prueba formal. Puede indicar que los objetos necesarios para llevar a cabo tal prueba no están en el sistema teórico. *Así mismo, un argumento informal puede ser uno de convicción externa constituido principalmente por contraejemplo ilustrado por una representación gráfica dinámica o estática (estos surgen específicamente en situaciones de construcción de una figura).*	Final	Int	18/6	Fe, C	X			
16	Es legítimo el uso de objetos, tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio, que no hacen parte del sistema teórico en un procedimiento de construcción o exploración.	Final	Prof	6/4	Fe, M	X			X
18	El EGD hace ostensivos objetos geométricos que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico. En el dominio de la Geometría del Espacio, Cabri 3D cobra un valor importante mediante el empleo de herramientas especiales (e.g., redefinir o bola de cristal) no presentes en Cabri 2D que pone de manifiesto dichos objetos.	Final	Prof	6/4	Fm, D	X			X
13d	Flexibilización. La resolución de un problema implica la justificación (prueba) de la conjetura-solución. *No se penaliza el hecho de que no se haga el respectivo reporte*; *no obstante, debe exponerlo cuando se le solicita*.	Final	Prof	8/4	Fm, Fi, Fc		X		X

	Normas	Versión	Sugerida por	Trayectoria/ Bloque	EOS	TII			
						Ni	Nle	Nlp	Nt
24	El profesor asume la responsabilidad de preguntar por los elementos que constituyen los pasos argumentales de una prueba.	Única	Int	2/1	Fe, Fi, Fc, D			X	
25	El profesor asume la responsabilidad de determinar la validez del uso de las proposiciones dichas por los estudiantes en cada paso argumental (o argumento).	Única	Int	2/1	Fe, D			X	
26	El profesor asume la responsabilidad de tomar la decisión final cuando existen varias opciones correctas sugeridas por los estudiantes.	Única	Int	2/1	Fe, D			X	
47	Los estudiantes pueden (y deben) hacer refutaciones de ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase, rebatiendo alguno de los elementos de un argumento. *De igual forma pueden hacerlo en lo que respecta a procedimiento de construcción.*	Final	Int	18/6	Fe, Fi		X		
48	Los estudiantes pueden (y deben) legitimar ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase.	Única	Int	7/4	Fe, Fi		X		
49	Un argumento abductivo se legitima cuando el argumento deductivo asociado es válido.	Única	Int	7/4	Fe, M				
5b.1	Complemento: Se debe emplear la simbología geométrica y el lenguaje matemático escrito correspondiente *siempre que se haga un reporte escrito* (*no solo en el documento "notas de clase"*).	Final	Prof	1/1	Fm, Fi, M		X	X	

Con base en la información presentada en las Tablas previas, dos síntesis pueden ser hechas con el fin de proveer una descripción del sistema normativo: una relativa al dinamismo que este tuvo durante el trascurso del curso, representado por la relación entre las normas y sus variaciones; y otra que alude a las Normas que influyen en los tipos de argumentos para cada situación instruccional (y las formas de su influencia).

5.2.1 Dinamismo del sistema normativo del curso

El dinamismo del sistema se puede identificar, por lo menos, de dos maneras: (i) reconociendo las normas base y cómo de estas se desprenden todas las demás y (ii) reconociendo las versiones que tuvieron varias normas durante el curso. Para abordar el primer asunto, la Figura 156 presenta un diagrama que ilustra todas las relaciones entre las Normas conformado una red entre ellas[63].

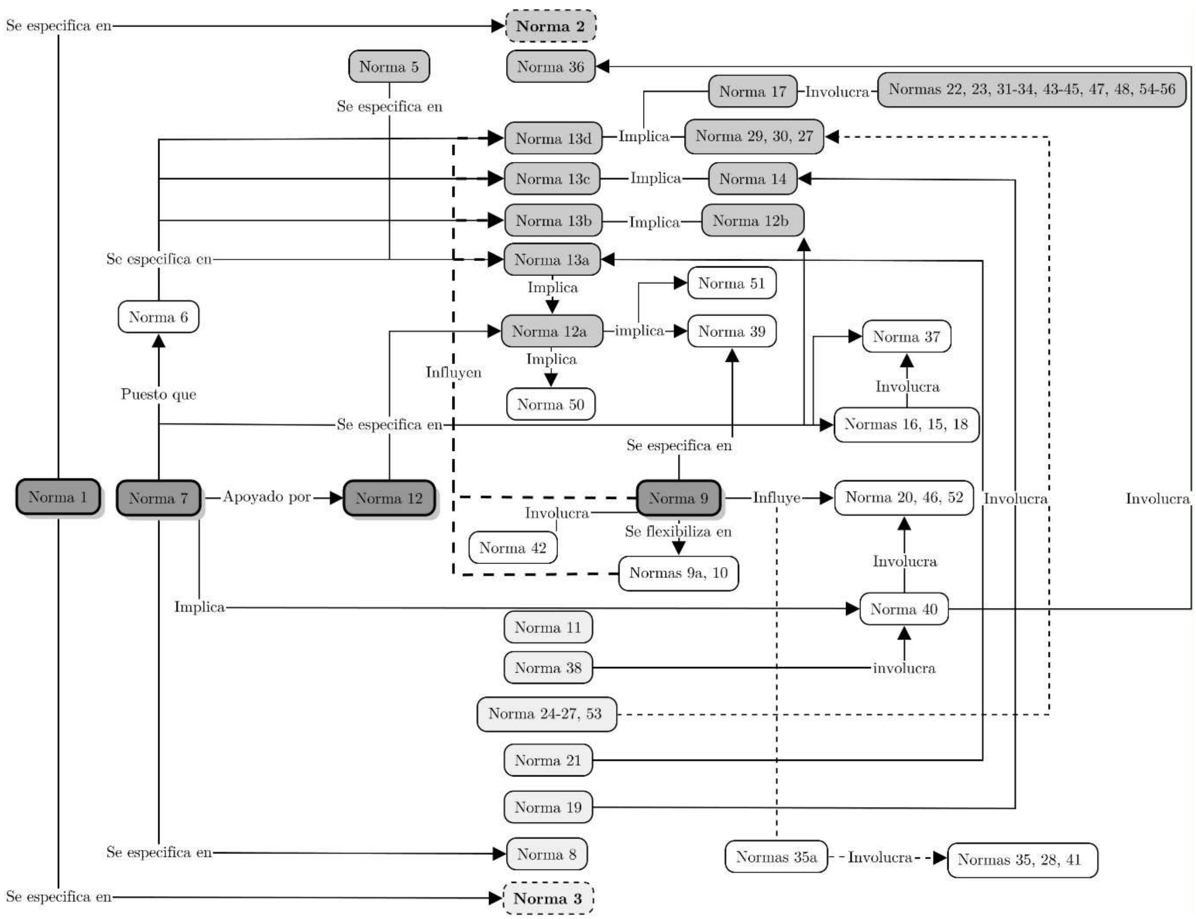


Figura 156. Red de Normas del curso

[63] Vale decir que la Norma 5b.1 (relativa al uso del lenguaje geométrico para comunicar) es trasversal a toda la Red; esta no se reporta en el diagrama puesto que no es fácil ilustrar tal transversalidad.

En la red se destacan cuatro normas base, o principios, a partir de las cuales se soporta todo el sistema normativo: las Normas 1, 7 y 9 (tal como se indicó en el Apartado 4.1.3), junto con la Norma 12. Cuatro asuntos describen las razones por las cuales este fenómeno ocurre:

- Tales Normas se condicen con los tres elementos que fundamentan el esfuerzo didáctico de la innovación implementada en el curso escenario de la investigación. La Tabla 127 presenta la correspondencia respectiva.

Tabla 127. Norma base y elementos de la innovación en el curso

	Normas base	**Elementos de la innovación**
1	El aprendizaje es una construcción social	Interacción social en la clase
7	Mediante la resolución de problemas se introducen objetos primarios al sistema teórico	Problemas abiertos de conjeturación
12	Los procesos matemáticos se llevarán a cabo con el apoyo de EGD (GeoGebra y Cabri 2D y 3D)	Uso de un Entorno de Geometría Dinámica
9	Todo se debe argumentar (probar) empleando objetos primarios del sistema teórico	Propósito de la innovación

- El hecho de que se conciba que el aprendizaje es una construcción social (Norma 1) implica, entre otras cosas, que la participación de los estudiantes debe ser activa y que la profesora debe proveer espacio para ello. Desde esta perspectiva, la generalidad planteada por la Norma 1 se diversifica en otras dos Normas, la 2 y la 3, las cuales, respectivamente, precisan la responsabilidad general que tienen estudiantes y profesora durante el curso: Los estudiantes siempre deben participar, comunicar sus ideas y hacer preguntas, mientras que la profesora debe escuchar a los estudiantes e interpretar sus ideas. Durante el análisis normativo realizado (poniendo especial énfasis en las normas de división de labores propuesto por TII y la faceta interaccional del EOS), se fueron identificando especificaciones de tales Normas decantado otras que estipulan responsabilidades muy concretas para cada una de las situaciones instruccionales. La Figura 156 destaca con un gris medianamente intenso –parte superior de la Red– las Normas relativas a las responsabilidades de los estudiantes; así mismo, destaca con el gris más tenue –parte inferior de la Red– las normas relativas a las responsabilidades de la profesora. Luego de la Tabla 128 y en la sección 5.3 se presentarán detalles sobre tales responsabilidades.
- El análisis normativo (enfatizando en las normas de Faceta Mediacional y de Origen Didáctico –tipología emergente que complementa la propuesta de la dimensión normativa propuesta por el EOS–) pone de manifiesto que el tándem formado por las Normas 7 y 12 tomó gran relevancia en el curso. Las

especificaciones de la Norma 7 (*e.g.*, Normas 6, 13a-13d, 16) condujeron a que, mediante la resolución de problemas, se hicieran explícitos los objetos primarios que debían ser instalados en el sistema teórico. Así mismo, las especificaciones de la Norma 12 (*e.g.*, Normas 12a, 12b, 14, 15 y 18) llevaron a que el EGD fuera un artefacto clave para el desarrollo del curso puesto que su uso en la resolución de problemas hizo ostensivo, por medio de procedimientos de construcción y exploraciones, objetos primarios que debían ser instalados en el sistema teórico. Dicho lo anterior, el subsistema de normas relativo al mencionado tándem pone de manifiesto sus Facetas Afectiva y Cognitiva puesto que provocaron motivación en los estudiantes (resolver problemas empleando EGD para construir y explorar) y generaron un ambiente para aprender (instalar diversos objetos al sistema teórico con todo lo que ello implica –*e.g.*, Normas 35a y 40–).

- El hecho de que todo se deba argumentar (deductivamente) empleando objetos primarios del sistema teórico (Norma 9) y todas sus especificaciones –*e.g.*, Normas 9a, 10 y 16– permearon gran parte de las prácticas del curso. Basta ver en la Figura 156 cómo dichas normas influyeron en otras que, por ejemplo, regularon las prácticas que debían llevar a cabo estudiantes cuando abordaban un problema (*i.e.*, Normas 13a - 13d y sus implicancias). En el Apartado 5.2.2 se comenta con mayor detalle al respecto, indicado cómo todas las Normas relacionadas con la Norma 9 influyeron en diversos tipos de argumentos.

Con relación al segundo asunto, el dinamismo del sistema normativo del curso escenario de investigación se puede sintetizar en tres grandes aspectos: (i) las modificaciones que dieron lugar a la legitimidad de usar objetos nuevos en varias situaciones instruccionales y argumentos substanciales, (ii) las modificaciones que dieron lugar a la legitimidad de diversos medios para comunicar una prueba, y (iii) la variación de ciertas responsabilidades por parte de los estudiantes. La Tabla 128 sintetiza cómo la variación de ciertas normas da cuenta de estos tres asuntos.

Tabla 128. Dinamismo sistema normativo

Legitimidad de usar objetos nuevos y argumentos substanciales en varias situaciones		
	Norma	**Dinamismo**
9	Todo se debe argumentar empleando objetos primarios del sistema teórico (probar).	En la presentación del curso, se advierte sobre tal Norma.
9a	*Flexibilización Norma 9*: La justificación puede ser un argumento informal (substancial) o una prueba. *Complemento*: Un argumento informal para el curso es aquel que se compone de las aserciones (sin sus respectivas garantías) que pueden ser insumo para la prueba formal. Puede indicar que	Producto de prácticas de los estudiantes, la profesora se ve en la necesidad de flexibilizar la Norma 9 (negociación en acto)

	los objetos necesarios para llevar a cabo tal prueba no están en el sistema teórico. *Complemento*: Así mismo, un argumento informal puede ser uno de convicción externa constituido principalmente por contraejemplo ilustrado por una representación gráfica dinámica o estática (estos surgen específicamente en situaciones de construcción de una figura).	advirtiendo sobre la posibilidad de producir argumentos informales (Norma 9a). Se indica además situaciones en las cuales es legítimo producir tales tipos de argumentos.
7	Mediante la resolución de problemas se introducen elementos (objetos primarios) al sistema teórico, *Complemento*: tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio.	Dado que, al inicio del Bloque de problemas N° 4, no todos los estudiantes plantearon la introducción de objetos 3D para abordar los problemas, la profesora se vio en la necesidad de generar complementos a las normas 7, 16 y 18 (negociación en acto), advirtiendo sobre la legitimidad de poder usar objetos 3D en diferentes situaciones instruccionales.
16	Es legítimo el uso de objetos, que no hacen parte del sistema teórico en un procedimiento de construcción o exploración, *Complemento*: tanto en el dominio de la Geometría Plana como del Espacio.	
18	El EGD hace ostensivos objetos geométricos que están instalados o deben ser instalados en el sistema teórico. *Complemento*: En el dominio de la Geometría del Espacio, Cabri 3D cobra un valor importante mediante el empleo de herramientas especiales (*e.g.*, redefinir o bola de cristal) no presentes en Cabri 2D que pone de manifiesto dichos objetos.	
	Legitimidad de diversos medios para comunicar una prueba	
10	La rigurosidad en la elaboración de una prueba es variable	Con el propósito de ir allanado el terrero para introducir nuevos formatos para presenta una prueba, la profesora alude a tal Norma.
22	Los elementos que debe contener cada paso argumental son aserción, dato y garantía, donde la garantía es aquel objeto primario (definición, postulado, teorema) [...].	Con el interés de darle contenido a la Norma 10, y dado que la profesora tenía el interés de enfatizar lo semántico sobre lo sintáctico (Molina & Pino-Fan, 2018), ella legitimó otra forma de presentar una prueba a partir de la cual son suficientes reportas los pasos claves (Núcleos y Pruebas) de esta.
23	Uno de los formatos legítimo para presentar una prueba (argumento global de índole deductivo), denominado Aserción-Garantía y Datos [...].	
33	*Flexibiliza Norma 22*: Una prueba válida no necesariamente debe contener todos los pasos; puede estar compuesta de aserciones claves (Núcleos) con su respectiva garantía (Pilares) [...]	
34	*Flexibiliza Norma 23*: Uno de los formatos legítimos para presentar una prueba, denominado Núcleo-Pilar, consta de una tabla a tres columnas; la primera de ellas registra el número del paso argumental, la asegunda registra la aserción clave respectiva, y la tercera registra la garantía correspondiente [...].	

<table>
<tr><th colspan="3">Variación de ciertas responsabilidades por parte de los estudiantes</th></tr>
<tr><td>13a</td><td>Los estudiantes deben reportar el proceso de construcción (robusta o blanda) cuando abordan la solución a un problema.
Flexibilización: La solución a un problema se compone de la construcción en EGD (parte robusta o parte blanda). Vale indicar que, en la resolución de un problema, la construcción en EGD asociada no necesariamente tiene una parte blanda. No se penaliza el hecho de que no presenten el reporte, pero deben comunicar el procedimiento respectivo si se les solicita.</td><td rowspan="4">Justo antes de proponer el primer problema del curso, la profesora advierte la responsabilidad que tienen los estudiantes de hacer reportes escritos de sus producciones cuando abordan un problema. No obstante, al final del Bloque de problemas N° 4, dicha exigencia se flexibilizó notablemente. En ocasiones, o bien no se solicitaban tales registros o se aceptaba solo aquel relativo a un procedimiento de construcción. En cualquiera de estos dos escenarios, los estudiantes debían estar prestos a hacer reportes verbales si la profesora se los solicitaba durante las puestas en común.</td></tr>
<tr><td>13b</td><td>Los estudiantes deben reportar su exploración cuando solucionan un problema.
Flexibilización: Los estudiantes deben hacer una exploración cuando solucionan un problema. No se penaliza el hecho de que no presenten el respectivo reporte, no obstante, debe exponerlo cuando se le solicita.</td></tr>
<tr><td>13c</td><td>Los estudiantes deben reportar la formulación de una conjetura como solución a un problema.
Flexibilización: Los estudiantes deben formular una conjetura como solución a un problema. No se penaliza el hecho de que no presenten el respectivo reporte.</td></tr>
<tr><td>13d</td><td>La resolución de un problema implica la justificación (prueba) de la conjetura-solución. No se penaliza el hecho de que no se haga el respectivo reporte.
Flexibilización: La resolución de un problema implica la justificación (prueba) de la conjetura-solución. No se penaliza el hecho de que no se haga el respectivo reporte.</td></tr>
<tr><td>27</td><td>El profesor asume la responsabilidad de la sintaxis escrita (simbología geométrica) de los elementos que conforman el argumento global y ponerlos en el lugar indicado del formato Aserción-Garantía y Datos, cuando se hace la prueba en una actividad de toda la clase.
Variación: Cuando la profesora lo decida, los estudiantes asumen tal responsabilidad.</td><td>En el Bloque de problemas N° 5, la profesora deja que los estudiantes que asuman la responsabilidad de hacer el reporte escrito de la prueba que se elabora colectivamente.</td></tr>
</table>

Con base en la Tabla 128 se identificaron las principales diferencias normativas entre los cursos Geometría Plana y Geometría del Espacio (y con ello, del tratamiento de objetos 2D con respecto al de los objetos 3D) tienen que ver con el uso de los formatos para presentar una prueba, el uso del EGD, y las responsabilidades de los estudiantes:

- En lo que respecta al uso de formatos para presentar una prueba, la profesora dio prelación al uso del formato Núcleos-Pilares para presentar las pruebas relativas a contenidos de Geometría del Espacio. Esto con el propósito de ganar tiempo (en correspondencia con la Norma 11) y enfatizar en lo semántico de la prueba sobre los sintáctico de la misma (dado que los estudiantes ya tenían experiencia sobre el desarrollo de pruebas con todos los detalles mediante el uso del formato Aserción-Garantía y Datos).

- Dada la conocida complejidad en la visualización de objetos 3D, mediante sendos complementos de las Normas 15[64] y 18 (ver Tabla 128), la profesora advirtió el potencial del EGD Cabri 3D para contrarrestar tal complejidad.
- Las responsabilidades de los estudiantes fueron flexibilizadas al punto de que ellos no necesariamente tenían la tarea de reportar por escrito sus producciones, pero sí estar prestos a comunicarlas verbalmente si se les solicitaba. Así mismo, se les confió la labor de reconstruir por escrito (poner en el formato Núcleos-Pilares) las pruebas que colectivamente se verbalizaban en las puestas en común. Estos hechos (junto con el cumplimiento de Normas tipificadas como Nle en las Tablas 122-127) se puede interpretar como una manera mediante la cual los estudiantes podían ir ganando autonomía en cuanto a los aprendizajes esperados (aprendizajes indicados por Normas tipificadas como Ni en las Tablas 121-126).
- Dos diferencias más pueden ser mencionadas: Mediante la Norma 12a se especificó un asunto estratégico que puede orientar un procedimiento de construcción (o una solución de un problema) en el Dominio de la Geometría del Espacio; esto es, la producción de argumentos analógicos que posibiliten un plan haciendo una comparación con objetos conocidos de la Geometría Plana. Así mismo, con base en la Norma 54, se especificaron estrategias para elaborar una prueba en el Dominio de la Geometría del Espacio: (i) precisar los planos en los que están contenidos los objetos inmersos en la situación con el fin de no cometer errores y precisar su utilidad en la elaboración de una prueba, y (ii) pensar cómo las situaciones del Espacio incluyen hechos del dominio de la Geometría Plana con el propósito de poder usar teoremas instalados en el sistema.

5.2.2 Normas que influyen en procesos de argumentación

Con base en los análisis normativos (enfocándose en las normas de Faceta Epistémica de Origen Didáctico o Matemático), se identificaron tres maneras en las que una norma (de Faceta Epistémica principalmente) influye en los procesos de argumentación: (i) provocando la producción de argumentos en una práctica

[64] Norma 15: En las representaciones gráficas, los puntos deben ser nombrados para facilitar la comunicación. Complemento: *Además, se puede cambiar el color y la trama de la superficie para visualizar mejor los objetos involucrados en una representación.*

determinada, (ii) indicando la función del argumento en una práctica específica y (iii) regulando el proceso de argumentación –o el tipo de argumento– en sí mismo (*e.g.*, indica sus elementos, su formato de presentación, las responsabilidades de los miembros de la clase, qué estrategia seguir para probar tal o cual enunciado, etc.). La Tabla 129 indica, para cada situación instruccional, las normas que se le asocian, el tipo de argumento correspondiente a cada norma y su forma de influir en tal tipo de argumento. En tal sentido, sintetiza el sistema de normas que influye en los procesos de argumentación en el curso escenario de investigación y que puede ser tenido en cuenta para considerar cursos que tienen características análogas a este.

Tabla 129. Relación Normas - Tipo de argumento

Situación Instruccional	Norma	Tipo de Argumento	Manera de influir		
			Lo provoca	Indica Función	Lo regula
Construcción de figura	9	Deductivo	X		
	9a, 39	Convicción externa	X	X	
	12a, 39	Abductivo, Analógico, Deductivo		X	
	31	Deductivo	X	X	X
	47	Deductivo, Convicción externa	X	X	
Exploración (empírica) de una figura	12b, 13b, 13c	Inductivo, Abductivo, Analógico, Deductivo	X		
	21	Deductivo	X		
Exploración teórica de una situación	9	Deductivo	X		
	9a	Abductivo, Analógico	X		
	13d	Inductivo, Abductivo, Analógico, Deductivo	X		X
	24, 25	Deductivo	X		X
	47, 48	Deductivo, Abductivo	X	X	
	49	Abductivo			X
Instalación de concepto	20	Deductivo	X		
	40	Deductivo		X	
	46	Deductivo, convicción externa		X	
Instalación de proposición	35[65]	Deductivo		X	X
	35a	Deductivo	X		

[65] En este caso, la Norma 35 precisa una disfuncionalidad del tipo de argumento deductivo (*i.e.*, no todo lo que se prueba se instala como prueba); de otro lado, la Norma, más que regular dicho tipo de argumento, regula la situación instruccional, pues indica cuándo no se instala una proposición.

Situación Instruccional	Norma	Tipo de Argumento	Manera de influir		
			Lo provoca	Indica Función	Lo regula
Elaboración de prueba	9, 13d	Deductivo	X		
	17, 22-25, 27-34, 43-45, 47, 53-56	Deductivo			X
	20	Deductivo	X		X
	31	Abductivo		X	

Varios comentarios pueden hacerse sobre la información de la Tabla 129:

- Previamente se dijo que el tándem formado por las Normas 7 y 12 tomó gran relevancia en el curso, puesto que influyó en la producción de objetos primarios. Para este caso, especificaciones de la Norma 7 (*e.g.*, 13a-13d) y de la Norma 12 (*e.g.*, Normas 12a, 12b) condujeron a que, mediante la resolución de problemas empleando el EGD y su comunicación (verbal o escrita), se pudieran identificar tipos de argumentos que llevaron a la precisión de objetos primarios que debían ser instalados en el sistema teórico. Ello ratifica la idea de que la resolución de problemas es un primer detonador para propiciar procesos argumentativos (Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, & Stevenson, 2012; Pedemonte, 2007; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Molina & Samper, 2018).
- Aunado a lo anterior, la flexibilización de la Norma 9 posibilitó el uso de argumentos informales –Norma 9a– en ciertas situaciones instruccionales (de *construcción de figuras*, y *de exploración teórica* o *empírica de situaciones*). Así, por ejemplo, argumentos de convicción externa fundamentados en un contraejemplo fueron legítimos para descartar procedimientos de construcción (complemento Norma 9a); o argumentos abductivos o analógicos fueron usados para legitimar dichos procedimientos (Norma 39) puesto que posibilitaron planes plausibles para realizar la construcción (complemento Norma 12a).
- La norma 9 llevó a que argumentos de tipo deductivo estuvieran presentes en todas las situaciones instruccionales. Ello no significa que hubiese habido pruebas en todas las situaciones; lo que implica es que los estudiantes, inducidos por la necesidad de cumplir con dicha Norma, produjeron argumentos deductivos para soportar ciertas aserciones (*e.g.*, pasos de un procedimiento de construcción –Norma 39–); o proveer, refutar o legitimar ideas (surgidas de una exploración teórica –Normas 47, 48– o de una exploración empírica –Norma 21–).
- Llama la atención la aparición de argumentos de tipo abductivo en situaciones de *elaboración de una prueba*. Ello responde a una estrategia sugerida por la profesora para iniciar una elaboración de una prueba (producir argumentos

abductivos que posibiliten un plan, cuya aserción sea la relación clave inmersa en la proposición que se pretende probar –Norma 31–).

- La mayor cantidad de Normas influyentes en situaciones de *elaboración de una prueba* colectiva en comparación con otras situaciones tiene que ver con el papel específico de estudiantes y profesora en términos de sus responsabilidades (Normas 24-27, 53, 29-30, 47), la especificación de formatos específicos para reportar una prueba (Normas 23, 34) y elementos que esta debe contener (Normas 22, 33, 43-45, 54-56).
- Aunque las Normas 16 y 18 no aparecen en la Tabla 129, es posible decir que estas indirectamente guardan relación con diversos tipos de argumentos en las situaciones de *construcción de figura*, *exploración teórica o empírica,* y de *instalación de proposición/concepto*. De un lado, la Norma 16, al admitir la posibilidad de utilizar objetos nuevos legitima de alguna forma las inferencias de los argumentos abductivos o analógicos; de otro, la Norma 18, al hacer ostensivos objetos mediante el uso del EGD, ayuda a especificar el objeto nuevo inferido de los argumentos y que debe ser instalado en el sistema.

5.3 SOBRE EL PAPEL DE PROFESORA

Para precisar el papel de la profesora en el curso, se tendrán en cuenta dos asuntos específicos: (i) Las responsabilidades de la profesora identificada mediante las normas de *división de labores* (tipología propuesta por la TII) –ver Aparatado 5.3.1– y (ii) la gestión que hizo la profesora de las normas, por ejemplo, cuándo las enunció y por qué, y que llevó a que algunas se modificaran –ver Apartado 5.3.2–.

5.3.1 Normas división de labores: profesora

La Tabla 130 presenta el compendio de las normas que indican las labores específicas que reiteradamente la profesora hizo en cada una de las situaciones instruccionales. Se presentan además responsabilidades (normas) de los estudiantes, asociadas a cada responsabilidad (o conjunto de responsabilidades) de la profesora con el propósito de que estas últimas adquieran cierto significado. Vale decir que, para la identificación de tales normas, especialmente para la elaboración de una prueba, fueron usadas las funciones de participación propuestas por Krummheuer (2015).

Tabla 130. Responsabilidades de profesora asociadas con algunas responsabilidades de estudiantes

	Responsabilidades de estudiantes		**Responsabilidades de profesora**
	Construcción de figuras		
47	Los estudiantes pueden (y deben) hacer refutaciones de ideas dadas por otros miembros de la clase.	19	La profesora se encarga de hacer correcciones de fondo y forma respecto a los procedimientos de construcción que los estudiantes proveen como solución de un problema. Ella, finalmente, escoge aquellas que son consideradas como correctas. Además, debe hacerse cargo de proveer ideas nuevas cuando los estudiantes están estancados.
13a	Los estudiantes deben hacer una construcción en EGD (parte robusta o parte blanda) cuando solucionan un problema.		
	Exploración (empírica) de figura		
13b 13c	Los estudiantes deben hacer una exploración y formular una conjetura cuando solucionan un problema.	21	La profesora se encarga de precisar cuáles son las conjeturas que podrían ser probadas luego de llevarse a cabo un estudio conjunto de forma y fondo (en relación con la Norma 14) entre ella y los estudiantes sobre aquellas conjeturas propuestas como solución a un problema. También de considerar cuál exploración es suficiente para determinar una propiedad plausible.
14	El enunciado de una conjetura es una proposición condicional *si… entonces…*. El antecedente de una conjetura se corresponde con lo construido en el EGD; el consecuente con lo descubierto o verificado en EGD.		
	Elaboración de prueba		
29	Los estudiantes son los responsables de proveer verbalmente (en leguaje geométrico) las ideas iniciales de los pasos argumentales (semántica).	24	El profesor asume la responsabilidad de preguntar por los elementos aserción, garantías y datos que constituyen los pasos argumentales de una prueba.
30	Los estudiantes son los responsables de precisar verbalmente, con nombres particulares (sintaxis), los objetos involucrados en cada uno de los pasos cuando la profesora pide tal precisión.	25	El profesor asume la responsabilidad de determinar la validez del uso de las proposiciones dichas por los estudiantes en cada paso argumental.
47	Los estudiantes pueden (y deben) hacer refutaciones de ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase.	26	El profesor asume la responsabilidad de tomar la decisión final cuando existen varias opciones correctas (de aserción, garantías o ideas argumentales) sugeridas por los estudiantes.
48	Los estudiantes pueden (y deben) legitimar ideas argumentales dadas por otros miembros de la clase.	53	La profesora es quien decide finalmente qué se prueba en el curso de manera colectiva; esto es, no toda conjetura aceptada se prueba de manera colectiva.
27	El profesor asume la responsabilidad de la sintaxis escrita (simbología geométrica) de los elementos que conforman el argumento global y ponerlos en el lugar indicado del formato Aserción-Garantía y Datos, cuando se hace la prueba en una actividad de toda la clase. Cuando la profesora lo decida, los estudiantes asumen tal responsabilidad.		

Responsabilidades de estudiantes		Responsabilidades de profesora	
Exploración(teórica) de situación			
47, 48		24 - 26	
Instalación de concepto/proposición			
36	Los estudiantes tienen la responsabilidad de proveer las primeras ideas respecto a la definición de un objeto.	38	La profesora se responsabiliza de formular la definición final luego escuchar a los estudiantes o usar el EGD para realimentar ideas.
		40	La profesora se encarga de sancionar la instalación de un objeto-concepto.
	Ver responsabilidades de elaboración de pruebas	35a	La profesora se encarga de sancionar la instalación de un objeto-proposición.

Tal como se indicó previamente, las Normas presentadas en la Tabla 130 son especificaciones de las Normas 2 (los estudiantes siempre deben participar, comunicar sus ideas y hacer preguntas) y 3 (la profesora debe escuchar a los estudiantes e interpretar sus ideas) que la profesora explicitó el primer día de clase. Dichas Normas (las de la Tabla 130) fueron identificadas en las interacciones entre estudiantes y profesores en prácticas específicas de cada situación instruccional, o en las entrevistas semiestructuradas implementadas. En lo que respecta a la profesora, es posible inferir que sus responsabilidades se puede sintetizar en cuatro grandes asuntos: (i) Proveer espacio a los estudiantes para que ellos produjeran diferentes piezas de conocimiento de manera autónoma, (ii) tener en cuenta dichas producciones en las puestas en común para instalar objetos en el sistema teórico de curso, (iii) corregir/complementar sintáctica o semántica las producciones de los estudiantes e (iv) institucionalizar las piezas de conocimiento puestas en juego. En términos generales, estos cuatros aspectos se corresponden con las ideas del contrato didáctico propuestas por Brousseau (2002) en lo que respecta la profesora. Lo interesante está en elementos particulares que concretan estos cuatro asuntos:

- En relación con (i): con el propósito de involucrar a los estudiantes en la actividad matemática, en primera instancia la profesora procuró proponer problemas al alcance de los estudiantes –Norma 8– (*i.e.*, que involucran objetos instalados en el sistema generalmente; o en su defecto, que fueran conocidos por ellos de manera informal). Luego, proveyó recursos (temporales y artefactuales –EGD, formatos para presentar la producción autónoma, formatos pasa presentar una prueba–) para que, en medio del abordaje de los problemas, se produjeran objetos primarios (procedimientos de construcción, exploraciones-conjeturas y argumentos) que dieran soluciones plausibles a dichos problemas. Así mismo, en las puestas en común (trabajo colectivo de toda la clase), la profesora dio espacio para que los estudiantes comunicaran sus producciones; de manera particular, durante la elaboración de una prueba, permitía que los estudiantes fueran *autores* proveyendo las ideas de pasos argumentales (o elementos que los componen –aserción, dato y garantía–).

- Con respecto al asunto (ii): Una vez los estudiantes comunicaban sus producciones o ideas, la profesora las ponía en consideración de la clase para discutirlas; los estudiantes tenían espacio para refutarlas o legitimarlas.
- En ese marco, la responsabilidad (iii) de la profesora se hizo evidente. Ella servía de *portavoz* corrigiendo o complementado lo comunicado por los estudiantes (*e.g.*, precisaba el lenguaje geométrico, usaba los formatos para presentar pruebas o etiquetaba símbolos en representaciones estática o dinámicas); o de *indagadora* cuestionando con cierta constancia sobre los aspectos semánticos involucrados (*e.g.*, por la validez de cierto procedimiento de construcción –garantías teóricas de los pasos–, por el contenido de alguna conjetura, por el contenido de una idea argumental –aserción o garantía principalmente–, o por el enunciado de una definición).
- En relación con el asunto (iv): Durante las prácticas descritas en el párrafo anterior, ella iba validando pequeñas piezas de conocimiento, y con ello, institucionalizaba objetos puestos en juego, manifestando explícitamente qué quedaba instalado en el sistema y qué no. Respecto a la elaboración de una prueba, la forma usual en que validaba pasos argumentales era fungiendo una función de *repetidora* de lo dicho por los estudiantes, y escribiendo lo respectivo si se estaba empleando alguno de los formatos para ello; se notaba que descartaba una idea porque enseguida *indagaba* sobre su certitud. Como se dijo en las secciones 4.1 y 4.2, los procedimientos de construcción se validaban por la producción de argumentos deductivos que soportaban cada uno de sus pasos, y se descartaban por argumentos de convicción externa basados en contraejemplos. En ambos casos, aunque los argumentos eran producidos por estudiantes, la profesora era quien los valoraba como correctos o no.

5.3.2 Gestión de normas

Las formas en que la profesora gestionó las Normas se pueden especificar en tres aspectos: (i) La explicitación hecha por ella de algunas normas para precisar tanto sus principales responsabilidades y las de los estudiantes, como algunos aspectos del funcionamiento mismo del curso (en armonía con los elementos de la innovación del curso –Tabla 127–); (ii) la actuación que ella hizo en relación con dichas normas (cumpliendo con éstas) o, en su defecto, con aspectos que ella pretendía que lo fueran (normas en acto); y (iii) las discusiones que ella orientó tomando en cuenta las actuaciones de los estudiantes (negociaciones en acto) para flexibilizar, complementar o especificar explícitamente o en acto, normas preexistentes. En términos generales, tales aspectos se corresponden con ideas planteadas por varios autores (*e.g.*, Cobb & Yackel, 1996; Yackel, 2002; Herbst y otros, 2010). Lo interesante vuelve a estar en elementos particulares que concretan dichos asuntos:

En relación con el asunto (i), es importante resaltar que fue en la presentación del curso, justo antes de presentar el primer problema (primera sesión de clase) y durante la prueba asociada al primer problema (segunda sesión de clase) los principales momentos en los cuales la profesora explicitó algunas normas (1-14, 22, 23, 32-34, 27 y 54). El objetivo de la profesora con ello tuvo que ver con su idea de instaurar las reglas de juego del curso en tanto principales responsabilidades de los estudiantes y ella (*e.g.*, Normas 1-3, 7-8, 9), y los aspectos mediacionales claves para el desarrollo del mismo (formato del reporte para resolver un problema –Normas 13a-13d–, elementos que debe contener una prueba y formatos para presentarla –22, 23, 32-34–, procesos para los cuales se debe usar el EGD –*e.g.*, 12a,12b, 14–).

Con respecto al asunto (ii), la profesora actuó como un modelo en el sentido de ilustrar con sus acciones cómo pretendía que actuaran los estudiantes en relación con las Normas relativas a sus responsabilidades. Ello sucedió principalmente durante el primer bloque cuando ilustró, por ejemplo, cómo hacer un reporte escrito de un procedimiento de construcción, cómo formular una conjetura, y cómo reportar la respectiva prueba. En otros momentos, particularmente al inicio del Bloque N° 4, ilustró de qué manera usar el EGD Cabri 3D para explorar situaciones en el Espacio mostrando el potencial de sus herramientas (redefinir, bola de cristal, etc.). De otro lado, ilustró aspectos que no se habían instaurado como normas pero que pretendía que lo fueran (normas en acto); por ejemplo, al momento de elaborar una prueba de un hecho específico, mostró maneras en que esta se debía hacer (*e.g.*, elaborar una prueba de una igualdad de conjuntos implica probar dos contenencias –Norma 56–) o estrategias que propicien su desarrollo (*e.g.*, producir argumentos abductivos para generar un plan –Norma 31–; o precisar los planos en los que están contenidos los objetos inmersos en una situación del Espacio para ver cómo hechos del dominio de la Geometría Plana pueden ser usados –Norma 54–).

Finalmente, en relación con el aspecto (iii), las negociaciones de Normas se dieron cuando hubo trabajo colectivo de toda la clase. Estas se produjeron en acto (Brousseau, 2002); esto es, durante diálogos cuyo objeto de discusión era algún objeto primario (*e.g.*, procedimiento de construcción, conjetura, argumento) y en la que los estudiantes ponían de manifiesto modificaciones (flexibilización, complemento o especificación) de normas preexistentes, la profesora admitió tales trasformaciones con miras a enriquecer la actividad misma. Un ejemplo concreto al respecto se presenta a continuación: Cuando fueron estudiadas las producciones de los estudiantes respecto a ciertos problemas (PP1 y PP4) la profesora tuvo que intervenir producto de conflictos o tensiones entre Normas[66]; con el fin de disiparlas, ella se vio avocada a poner en práctica la flexibilización de la Norma 9 en la Norma 9a (precisando características de un argumento informal o substancial) y a precisar las Normas 13a (admitiendo que no siempre hay construcciones blandas) y 12b (legitimando la exploración para verificar, no solo para descubrir). Más ejemplos al respecto pueden ser vistos en el Apartado 5.2.1, relativo al dinamismo de las Normas.

[66] Ejemplos de tensiones se presentan enseguida. En cuanto la comunicación: los estudiantes deben seguir un formato para reportar su producción (Normas 13) Vs. los estudiantes deben comunicar su producción real (sus ideas) cuando abordan un problema (Norma 2), (ii) en cuanto al objetivo de la tarea, se propone un problema que se espera pueda ser solucionado por los estudiantes (Norma 8) Vs. el problema debe permitir abordar objetos nuevos de conocimiento (Norma 7); y (iii) en cuanto la legitimidad del uso de objetos, los estudiantes pueden usar objetos nuevos en el procedimiento de construcción y exploración (Norma 16) Vs. un argumento formal implica usar objetos que hagan parte del sistema teórico del curso (Norma 9).

CAPÍTULO 6

Conclusiones del estudio

En este Capítulo se presentan los argumentos que permiten evidenciar respuestas a la pregunta principal que orientó el estudio, y el cumplimiento del objetivo general del mismo, cuyos enunciados se recuerdan:

> PP: *¿Cuál es el sistema de normas que influye en la práctica de argumentación y en la producción de varios tipos de argumentos específicos* (*inductivos, abductivos, deductivos y por analogía*) *que tienen lugar en un curso de Geometría del Espacio de nivel universitario que se fundamenta en la resolución de problemas abiertos de conjeturación y el uso de EGD*?

> OG: Caracterizar el sistema de normas que influye en la práctica de argumentación y fomenta la producción de varios tipos de argumentos específicos (inductivos, abductivos, deductivos y por analogía) que tienen lugar en un curso de Geometría del Espacio de nivel universitario que se fundamenta en la resolución de problemas abiertos de conjeturación y el uso de EGD.

Para ello, se aluden a las respuestas de cada una de las preguntas secundarias del estudio y se explicita el cumplimiento de cada uno de los objetivos específicos asociados, indicando los resultados más relevantes de la investigación los cuales han sido expuestos con detalle en el Capítulo 5. Para finalizar, se presenta un apartado en el que se exponen, a manera de comentarios finales, los principales aportes metodológicos y teóricos del estudio, y las perspectivas para estudios futuros.

6.1 SOBRE PREGUNTA PS1 Y OBJETIVOS ESPECÍFICOS ASOCIADOS

Esta sección se focaliza en presentar los resultados asociados a la primera pregunta secundaria del estudio (PS1), cuyo enunciado se recuerda:

> *¿Cómo los procesos de argumentación (y los tipos de argumentos asociados) articulan los objetos primarios emergentes de las prácticas matemáticas que tiene lugar en diferentes*

situaciones instruccionales (instalar un concepto, instalar una proposición, hacer una prueba de un teorema, construir una figura plana o del espacio, y explorar una figura plana o del espacio) presentes en un curso de Geometría Euclidiana del Espacio basado en la Resolución de Problemas y uso de EGD, en un programa de formación de futuros profesores de matemáticas?

Para abordar lo relativo a dicha pregunta, se ilustra el cumplimiento de los objetivos específicos asociados, a saber, OE1 y OE2. Para cada uno, se presenta su enunciado y luego la descripción correspondiente.

> OE1: Determinar configuraciones epistémicas o cognitivas en cada trayectoria didáctica identificada para precisar los objetos primarios (problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que emergen en las prácticas matemáticas asociadas.

Al final de cada una de las 18 trayectorias que componen el análisis didáctico, en las secciones de *síntesis y breves comentarios* fueron presentadas las Figuras con las configuraciones ontosemióticas (según el caso, cognitivas o epistémicas) con base en las cuales se indicaron los principales objetos primarios emergentes en las prácticas llevadas a cabo por estudiantes (durante su trabajo autónomo cuando abordaron un problema) o por toda la clase (durante la puesta en común cuando colectivamente se abordaron producciones de los estudiantes). Este escenario preparó el camino para dar cumplimiento al OE2, cuyo enunciado se trascribe:

> OE2: Describir las maneras en que los diferentes tipos de argumentos presentes en las configuraciones (epistémicas o cognitivas) identificadas en cada trayectoria didáctica, articula los demás objetos primarios emergentes en la configuración de la cual hace parte el argumento.

En la sección de *síntesis y comentarios finales* al final de cada Trayectoria fueron hechas descripciones sobre maneras en que cada argumento identificado articuló objetos de la configuración que lo contiene. En el Capítulo 5, mediante los Apartados 5.1.1 y 5.1.2, se precisaron los tipos de argumentos presentes en cada tipo de situación instruccional (Tabla 117) y una síntesis que ilustra las formas generales en las que cada tipo de argumento puede articular objetos primarios en cada tipo de situación (Tabla 119), con lo cual se tiene respuesta explícita a la pregunta PE1. Enseguida se exponen resultados generales asociados tal pregunta y dichos objetivos:

- En el curso hubo una gran producción de argumentos substanciales (inductivos, abductivos y analógicos), principalmente en situaciones de exploración teórica, empírica y de construcción de figuras (en consonancia con los trabajos de

Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010; Knipping & Reid, 2015; Stylianides & Stylianides, 2005; Pedemonte, 2007; Herbst, y otros, 2010). A diferencia de lo que usualmente sucede en el curso de Geometría Plana previo al curso en cuestión, en este último no hubo gran producción de argumentos inductivos. En su lugar, hubo mayor aparición de argumentos abductivos o analógicos. Esto obedece al hecho de que, al haber una gran cantidad de objetos instalados en el sistema teórico del curso, los estudiantes tuvieron la tendencia a usarlos para determinar posibles objetos-proposición (datos o garantías) ya conocidos del Dominio de la Geometría del Plana que les proveyera posibles soluciones a los problemas en el Dominio de la Geometría del Espacio. Esto los llevó a la no necesidad de explorar las situaciones de manera empírica (usando el EGD Cabri 3D) para determinar propiedades invariantes, y así inducir propiedades generales. Más bien, los condujo a generar planes (vía abductiva o analógica) para testearlos (usualmente mediante un procedimiento de construcción en el EGD) y con base en los resultados, establecer soluciones plausibles.

- La gran producción de argumentos abductivos y eventualmente analógicos fue resultado de que muchos problemas preguntaban por condiciones que llevaran a la existencia de objetos; en consecuencia, mediante este tipo de argumentos se planteaban la necesidad de contar con objetos (instalados o no en el sistema) para poder determinar la existencia del objeto en cuestión. En consonancia con Molina y Samper (2018), las principales consecuencias de este tipo de argumentos fue generar la necesidad de instalar nuevos objetos (conceptos, teoremas, postulados) al sistema teórico, y de plantear estrategias tanto para construir un objeto en el EGD como para elaborar una prueba determinada. En tal sentido, se ratifican resultados según los cuales este tipo de argumentos provocan la generación argumentos deductivos o pruebas formales (Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, & Stevenson, 2012; Pedemonte, 2007).
- Los argumentos de convicción fueron usados para refutar, durante puestas en común (trabajo colectivo de toda la clase), procedimientos de construcción producidos previamente por grupos de estudiantes que supuestamente solucionaban un problema. Dichos argumentos se soportaron en representaciones realizadas en el EGD Cabri 3D que mostraban contraejemplos de los procedimientos en cuestión (*i.e.*, representaciones dinámicas que no solucionan el problema aun cuando eran producto del procedimiento propuesto).
- Los ítems anteriores ponen de manifiesto la legitimidad que pueden llegar a tener los argumentos substanciales en ciertas situaciones instruccionales de un curso formal de geometría. En resumen: (i) Los argumentos abductivos y analógicos

proveen planes para construir objetos y elaborar una prueba, y plantean la necesidad de introducir objetos nuevos al sistema. (ii) Los argumentos de convicción externa, generan contraejemplos de procedimientos de construcción que supuestamente conducen a la solución de un problema.

- El *lenguaje* empleado en los argumentos fue generalmente verbal para los argumentos substanciales, procurando en lo posible hacer uso de la terminología matemática-geométrica. En lo que respecta a los argumentos de estructura deductiva, particularmente en las situaciones de elaboración de una prueba colectiva, en los primeros bloques de problemas hubo un interés por hacer los respectivos registros escritos empleando los formatos establecidos para ello (Aserción-Garantía y Datos o Núcleo-Pilares). No obstante, en los dos últimos bloques tal exigencia se flexibilizó; esto es, en la elaboración colectiva de una prueba, el lenguaje empleado para reportarla fue verbal. La realización de los reportes escritos se propuso en las tareas extraclase.
- El uso sinérgico de la configuración ontosemiótica y del Modelo de Toulmin, permitió decantar con cierto detalle la manera en que los argumentos de cierta trayectoria articulan objetos primarios emergentes de la misma tal como se presentó en el Apartado 5.1.2.1. Vale indicar que la tipificación de objetos propuesta por el EOS permitió precisar el tipo de objetos primarios (concepto-definición, proposición-teorema/postulado) presentes en los elementos que conforma un argumento, y precisar el dinamismo de tales objetos en términos del lugar (o estatus) que toman en un argumento (aserción, dato, garantía, refutación) dependiendo de la práctica. Así mismo, precisar cómo un tipo de argumento se puede transformar en otro según la práctica de la cual emergió (ver Tabla 119). Uno de los resultados más importantes del estudio, en cuanto a la argumentación, tiene que ver con la identificación de argumentos por analogía, no muy tratados en la literatura en comparación con otros tipos de argumentos –inductivos, abductivos y deductivos– (English, 2004; Reid & Knipping, 2010; Lee & Sriraman, 2011). De manera más concreta, el análisis ontosemiótico permitió identificar, mediante la concreción de las configuraciones respectivas a los dominios Geometría Plana y Geometría del Espacio, cómo fueron articulados los objetos involucrados en un proceso de argumentación por analogía y, de esa forma, describir con mejor las fases para dicho proceso propuestas por Steinhart (2001).

6.2 Sobre pregunta PS2 y objetivos específicos asociados

Esta sección se focaliza en presentar los resultados asociados a la segunda pregunta específica del estudio (PS2), cuyo enunciado se recuerda:

> *¿Cómo el sistema de normas de las situaciones instruccionales presentes en el curso que sirve de escenario de investigación influye en las prácticas argumentativas involucradas en tales situaciones instruccionales*?

Para abordar lo relativo a dicha pregunta, se ilustra el cumplimiento de cada uno de los objetivos específicos asociados, a saber, OE3 y OE4. Para cada uno, se presenta su enunciado y luego la descripción correspondiente.

> OE3: Describir el sistema de normas que regula las prácticas matemáticas presentes en cada una de las situaciones instruccionales que toman lugar en curso de Geometría Euclidiana el Espacio basado en la Resolución de Problemas y uso de EGD, en un programa de formación de futuros profesores de matemáticas.

En cada una de las Trayectorias Didácticas identificadas, mediante los elementos *análisis didáctico* (Font, Planas, & Godino, 2010) –especialmente su *dimensión normativa*– fueron reconocidas normas que regularon las prácticas que tomaron lugar en las diferentes *situaciones instruccionales* (Herbst, y otros, 2010). En el Capítulo 5, específicamente en la Sección 5.2 fue presentado el compendio de todas las Normas del curso (ver Tablas 121 a la 126) para cada tipo de situación instruccional. Ahora bien, no solo se precisó el conjunto de Normas, sino que fue indicado su dinamismo a la luz de dos asuntos específicos (i) reconociendo las normas base (para este caso, congruentes con las características de la innovación del curso) y cómo de estas se desprenden todas las demás, y (ii) reconociendo las versiones que tuvieron varias normas durante el curso. En relación con el segundo asunto, el dinamismo se puede concretar en tres aspectos concretos: (a) Las especificaciones que dieron lugar a la legitimidad de usar objetos nuevos en varias situaciones instruccionales y argumentos substanciales, (b) las especificaciones que dieron lugar a la legitimidad de diversos medios para comunicar una prueba, y (c) la variación de ciertas responsabilidades por parte de los estudiantes. Fue con base en el dinamismo del sistema normativo (sintetizado en la Tabla 128), que se puedo inferir las principales diferencias normativas entre el curso de Geometría Plana y el curso de Geometría del Espacio, a saber: uso del EGD mediante herramientas especiales como redefinir y arrastre de bola de cristal, cambio del formato para presentar la prueba (del formato *Aserción-Garantía y Datos* a formato *Núcleo-*

Pilares), especificación de responsabilidades de los estudiantes (en términos de fortalecer su autonomía –no reportar todas sus producciones pero sí desarrollar prácticas relativas a la solución de un problema, reconstruir sintáctica y semántica una prueba que fue desarrollada colectivamente por “toda la clase”–); y precisión de estrategias para desarrollar pruebas o plantear procedimientos de construcción (uso de argumentos por analogía para hacer comparaciones –ver Apartado 5.1.2.1–, precisión de planos de objetos en el espacio y ajuste de situaciones del espacio a teoremas del Dominio de la Geometría Plana).

Las actividades hechas para lograr el OE3, permitió un escenario completo a partir de cual se pudo identificar el subconjunto de normas que influyó en los procesos de argumentación, y con ello, cumplir con el OE4, cuyo enunciado se trascribe:

> OE4: Describir el sistema de normas que influye en los procesos de argumentación (y tipos de argumentos) emergentes en las situaciones instruccionales que toman lugar en el curso de Geometría Euclidiana el Espacio basado en la Resolución de Problemas y uso de EGD, en un programa de formación de futuros profesores de matemáticas.

El cumplimiento de dicho Objetivo permitió responder de manera concreta la pregunta PS2. La Tabla 129 ilustra aquellas Normas que específicamente influyen en procesos argumentativos por cada tipo de situación instruccional (uno de los principales aportes de este estudio). Con base en los análisis normativos (focalizados en normas de Faceta Epistémica de Origen Didáctico o Matemático), se identificaron tres maneras en las que una Norma puede influir: (i) provocando la producción de argumentos en una práctica determinada, (ii) indicando la función del argumento en una práctica específica y (iii) regulando el proceso de argumentación –o el tipo de argumento– en sí mismo.

Resultados generales asociados la pregunta PS2 y objetivos correspondientes se presentan a continuación:

- El hecho de que todo se tuviera de argumentar (deductivamente) con objetos del sistema teórico (Norma 9) llevó a que argumentos de este tipo estuvieran presentes en todas las situaciones instruccionales. Así, por ejemplo, estos surgieron para soportar pasos de un procedimiento de construcción o para refutar o legitimar ideas surgidas de una exploración teórica.
- Se ratifica la idea de que la resolución de problemas con EGD es un primer detonador para propiciar procesos argumentativos (Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, & Stevenson, 2012; Pedemonte, 2007; Baccaglini-Frank &

Mariotti, 2010; Molina & Samper, 2018). Especificaciones de la Normas 7 (mediante la resolución de problemas se instalan objetos al sistema) y 12 (los procesos matemáticos se deben apoyar en el uso del EGD) condujeron a que se pudieran identificar tipos de argumentos que llevaron a la precisión de objetos primarios que debían ser instalados en el sistema teórico.

- Llama la atención la legitimidad del uso de argumento informales en todas las situaciones instruccionales (de *construcción de figuras*, *exploración teórica* o *empírica de situaciones*, y *elaboración de prueba*). Ello provocó la gran producción de argumentos substanciales tanto para descartar procedimientos de construcción (argumento de convicción externa) como para planear una prueba o un procedimiento de construcción (argumentos abductivos o analógicos).
- Fue en la elaboración de una prueba donde emergieron la mayor cantidad de normas influyentes en procesos de argumentación (deductivos principalmente). Esto responde a la intención de cumplir con el objetivo del curso a partir del cual los estudiantes debían aprender a probar. En tal sentido, hubo necesidad de explicitar tanto las responsabilidades de estudiantes y profesora (ver Tabla 130) como algunos asuntos específicos relativos a las pruebas mismas (especificación de formatos específicos para reportarla, elementos que esta debe contener, maneras para probar proposiciones de características específicas, etc.).
- Con lo anterior se ha dado sentido a la idea de que *el sistema de normas de un aula permite explicar y comprender lo que sucede en ella* (Herbst, y otros, 2010; Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009; Yackel & Cobb, 1996). Así, por ejemplo, se precisó *por qué* y *para qué* los argumentos informales y diferentes registros para presentar una prueba fueron usados en el curso. Los argumentos informales se usaron *porque*, a priori, la profesora los concibió como un lugar común cuando se solucionan problemas mediante el uso de un EGD y se permite comunicar las producciones respetivas, y *porque* favorecen la producción de argumentos deductivos *en tanto proveen planes para* procedimientos de construcción o la elaboración de una prueba. Además, dado que los objetos inferidos de tales argumentos fueron generalmente nuevos, estos *provocaron* la inserción de objetos nuevos al sistema teórico. De otro lado, diferentes registros para presentar una prueba se usaron *porque* se quiso focalizar sobre la producción de ideas (lo semántico) cuando se elabora una prueba mediante el formato Núcleos-Pilares, no poniendo tanto énfasis sobre el detalle de todos sus pasos (lo sintáctico) indicado por el formato Aserción-Datos y garantía[67]; además, *porque* se quiso ganar tiempo dado que el uso del formato Núcleos-Pilares al no exigir tanta formalidad llevó a una economía temporal evitando los detalles. Así mismo, varios

[67] Para mayor detalle sobre el uso de registros para la presentación de una prueba ver Molina y Pino-Fan (2018) o Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads y Samkoff (2012).

registros fueron usados *para* que los estudiantes reconocieran diversas maneras legítimas para presentar una prueba, y ganaran autonomía en términos de lograr precisar los pilares (aserciones claves) que la componen.

6.3 SOBRE PREGUNTA PS3 Y OBJETIVOS ESPECÍFICOS ASOCIADOS

Esta sección se focaliza en presentar los resultados asociados a la segunda pregunta específica del estudio (PS3), cuyo enunciado se recuerda:

> *¿Cuál es el papel del profesor durante el proceso de instrucción en un curso de Geometría del Espacio de nivel universitario que se fundamenta en la resolución de problemas abiertos de conjeturación y el uso de EGD, respecto a la generación y uso del sistema de normas que influye en los procesos de argumentación*?

Para abordar lo relativo a dicha pregunta, se ilustra el cumplimiento de cada uno de los objetivos específicos asociados, a saber, OE4 y OE5. Para cada uno, se presenta su enunciado y luego la descripción correspondiente.

> OE5: Identificar las responsabilidades que debe cumplir el profesor en cada una de situaciones instruccionales del curso que sirve de escenario de investigación.

En cada uno de los análisis de las Trayectorias identificadas, las responsabilidades de la profesora fueron reconocidas mediante las normas tipificadas como de *división de labores* (Herbst, y otros, 2010) y sus *funciones* en la participación o en el argumento propuestas por Krummheuer (2015). Tales responsabilidades fueron explicitadas en las Tablas 121-126 y sintetizadas en la Tabla 130. Estas se pueden agrupar en cuatro asuntos específicos –en correspondencia con los hallazgos de Lampert (1993; 2001)–: (i) proveer espacio a los estudiantes para que produzcan diferentes piezas de conocimiento de manera autónoma (procedimientos de construcción, conjeturas, argumentos), (ii) tener en cuenta dichas producciones en las puestas en común para instalar objetos en el sistema teórico de curso, (iii) corregir/complementar sintáctica o semántica las producciones de los estudiantes e (iv) institucionalizar las piezas de conocimiento puestas en juego. En el marco de estos asuntos se destacó su papel de *indagadora* cuestionando por aspectos semánticos relativos a la validez de procedimientos de construcción, o de un argumento deductivo (y de sus elementos); de *portavoz* corrigiendo o complementado sintácticamente lo comunicado por los estudiantes (con etiquetas a los objetos y leguaje escrito); y de *repetidora* principalmente para validar lo dicho por los estudiantes.

OE6: Describir las maneras mediante las cuales el profesor gestiona las normas del curso escenario de investigación, en particular aquellas que influyen en los procesos de argumentación presentes en situaciones instruccionales específicas.

En apartado 5.3.2 fueron presentadas las formas en que la profesora gestionó las Normas del curso; estas fueron: (i) la explicitación que ella hizo de algunas normas para precisar tanto sus responsabilidades y las de los estudiantes, como algunos aspectos del funcionamiento mismo del curso; (ii) su actuación cumpliendo con ciertas normas o, en su defecto, con aspectos que ella pretendía que lo fueran; y (iii) su orientación de discusiones en las que tomaba en cuenta las actuaciones de los estudiantes (negociaciones en acto) para modificar explícitamente o en acto, normas preexistentes. Tres resultados importantes se pueden inferir de los aspectos citados antes: a) el interés por legitimar (principalmente de manera implícita) argumentos informales o substanciales (abductivos o analógicos) para generar planes (de procedimientos de construcción o pruebas) vía la inferencia de objetos necesitados (instalados o no); y b) el interés por disipar tensiones o conflictos entre Normas surgidos en las prácticas de los estudiantes –en consonancia con Lampert (1985) y Herbst (2006)–, y c) el interés por que los estudiantes ganaran autonomía durante la elaboración de una prueba mediante el cumplimiento de ciertas normas (*e.g.*, relativas al uso de formatos, a maneras de cómo llevar a cabo pruebas de proposiciones con características específicas –igualdad de conjuntos, unicidades, existencia de objetos en el espacio–) que previamente la profesora había ilustrado mediante su actuar.

6.4 COMENTARIOS FINALES Y PERSPECTIVAS

El estudio realizado se fundamentó en el análisis didáctico de un curso de Geometría del Espacio de nivel universitario, siguiendo los primeros cuatro elementos propuestos por el EOS (Font, Planas, & Godino, 2010). En tal sentido, fueron analizadas las trayectorias e interacciones didácticas (tercer elemento), y en ese marco, analizados los tipos de problemas y sistemas de prácticas (primer elemento); elaborados las configuraciones de objetos y procesos matemáticos (segundo elemento) e identificado el sistema de normas (cuarto elemento), en particular aquel que influye en procesos de argumentación.

Los resultados obtenidos de dicho análisis (ver Capítulo 5 y apartado 6.4.1) proveyeron información concreta que aborda la problemática que motivó este estudio (ver Introducción y apartado 1.4.2.1). Esto es, proveyó un sistema de normas y maneras de gestionarla que un profesor podría considerar para contrarrestar las dificultades que enfrenta al gestionar las interacciones en el aula cuando se intenta que los estudiantes participen de manera significativa en la argumentación (en respuesta a la problemática que orientó la investigación). En este apartado final del trabajo investigativo, se sintetizan (i) los principales aportes teóricos del estudio y (ii) ideas de posibles asuntos que quedan por profundizar con estudios posteriores.

6.4.1 Principales aportes metodológicos y teóricos

A continuación, se destacan los principales resultados del estudio que contribuyen metodológica o teóricamente al campo de la Educación Matemática. En relación con lo metodológico:

1. El uso sinérgico de la herramienta *configuración de objetos* provista por el EOS junto con el *Modelo de Toulmin* –enriquecido con la propuesta de Knipping y Reid (2015)– para estructurar un argumento (o un proceso de argumentación) permitió dar cuenta de la forma en que los diferentes tipos de argumentos articulan objetos de la configuración a la que pertenecen.
2. El uso sinérgico de las situaciones instruccionales propuestos por TII junto con los elementos del análisis didáctico (particularmente de la dimensión normativa e identificación de prácticas y objetos) propuestos por el EOS, permitió caracterizar las situaciones instruccionales surgidas en el curso en términos de los tipos de argumentos y normas emergentes en ellas.
3. El uso sinérgico de la tipificación de normas propuesta por el TII (principalmente de *normas intercambio*) junto la tipificación de la EOS (principalmente de *faceta epistémica* de *origen matemático* y *didáctico*) permitió decantar las normas que influyen en los procesos de argumentación y sus formas de influencia.
4. El uso sinérgico de la tipificación de normas propuesta por el TII (principalmente de *normas de división de labores*) junto la tipificación de la EOS (principalmente de *faceta interaccional y mediacional*) permitió decantar las responsabilidades de la profesora y estudiantes para con el curso.

En relación con asuntos teóricos:

5. La TII propuesta por Herbst y sus colegas (2010) fue complementada en dos sentidos: con una situación instruccional emergente (*exploración de una situación*) y con la explicitación de Normas específicas que componen situaciones instruccionales de un curso universitario de Geometría del Espacio que se

caracteriza por la resolución de problemas, el uso del EGD para apoyar tal resolución y el interés por fomentar la interacción en la clase. De otro lado, fue ratificado con ejemplos que diferentes tipos de situaciones instruccionales pueden coexistir. Así, por ejemplo, la *instalación de un concepto/proposición* implica la *elaboración de una prueba*, o *la elaboración de una prueba* puede contener una *construcción de un objeto* para apoyarla, o la *exploración teórica/empírica* puede implicar la *instalación de una proposición/concepto*.

6. La dimensión normativa propuesta por el EOS (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009) fue complementada en dos sentidos: (i) Emergió un nuevo tipo de norma en lo que respecta al Origen, de *origen didáctico*, que establece que el natalicio de una norma surge según ciertos hallazgos provenientes de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. (ii) Fueron establecidas normas concretas (tipificadas según EOS) que influyen en procesos de argumentación.
7. Las *funciones* propuestas por Krummheuer (2015) fueron complementadas de la siguiente manera: En cuanto a la *argumentación*, además de considerar los tres elementos básicos de un argumento propuestos por Toulmin (aserción, dato, garantía), los análisis realizados evidenciaron que estudiantes o profesor proveen *refutaciones*, *backing* (soporte), *idea* o *paso argumental* (que contiene una aserción y garantía), principalmente cuando se elabora una prueba. En cuanto a la participación, además de considerar las cuatro formas básicas (autor, portavoz, repetidor, encubridor) se destacó, principalmente por parte de la profesora, su función *indagadora* para preguntar por una idea argumental o alguno de los elementos de un argumento, o para cuestionar por alguno de tales aspectos previamente enunciado por algún miembro de la clase.
8. Se ratificaron resultados propuestos por varios autores –Yackel y colaboradores (1996, 2002), Brousseau (2002), Herbst, y otros (2010)– según los cuales las normas se construyen colectivamente mediante negociaciones implícitas, fundamentadas especialmente en las prácticas de los estudiantes cuando trabajan de manera autónoma y que la profesora interpreta para modificar normas existentes (ver Tabla 128). Un aporte específico del estudio consiste en la concreción de maneras en que una norma se modifica (aspecto que indica el dinamismo de un sistema normativo); estas son: *Flexibilización*, cuando el compromiso impuesto por una versión de una norma y aplicable para todo tipo de situación instruccional, deja de serlo en situaciones específicas o en prácticas concretas de estas; en otras, sigue actuando como obligación (*e.g.*, normas 9 y su flexibilización en 9a). *Complemento*, cuando al compromiso impuesto en la versión inicial de una norma se le adiciona una característica más sin que las anteriores se vean modificadas (*e.g.*, Normas 7, 16, 18, 35a). *Especificación*:

cuando el compromiso impuesto en la versión inicial de una norma es precisado con mayor detalle (*e.g.*, Normas 12a, 12b como especificaciones de la Norma 12 etc.). *Variación*: cuando parte de obligación declarada tiene un cambio substancial, pero mantiene características originales (*e.g.*, Norma 27).

9. De manera similar a los trabajos de Yackel (2002), Lampert (2001), Herbst, y otros (2010), Mariotti (2009), se ratificó el importante papel que tiene el profesor en la gestión de normas que impliquen el involucramiento de los estudiantes en prácticas argumentativas. Con este estudio, se precisaron responsabilidades específicas del profesor y sus formas de gestionar dichas normas, en un aula de indagación que emplea la resolución de problemas y EGD como recursos (ver sección 6.3). En particular, el cumplimiento continuo (y cíclico) de las responsabilidades del profesor y estudiantes, llevaron a instaurar normas epistémicas que influyen en la argumentación (Molina & Pino-Fan, 2018).
10. En complemento a resultados propuestos por varios autores –*e.g.*, Yackel y colaboradores (1996, 2002), Marrades y Gutiérrez (2000)– se precisó un conjunto de normas que influyen en procesos de argumentación y la producción de tipos de argumentos. Se precisaron responsabilidades de los estudiantes y normas que regulan prácticas que pueden llevar a que ellos se involucren en prácticas argumentativas de una manera un poco más autónoma. De otro lado, se precisó cómo mediante prácticas provocadas por la resolución de problemas (mediada por EGD y regulada por normas específicas), ciertos argumentos informales (o substanciales) son legitimados en un curso formal geometría de nivel universitario. En tal sentido, los resultados encontrados por Molina y Samper (2018) en cuanto a la relación entre tipos de problemas y tipos de argumentos (ver Tabla 28) pueden complementarse teniendo en cuenta situaciones instruccionales, y otros tipos de problemas y de argumentos (ver Tabla 131).

Tabla 131. Relación tipo de problema - tipo de argumento

Tipo de Argumento	**Tipo de Problema**	**Situación Instruccional**
Inductivo (eventualmente, deductivo)	Búsqueda de consecuente	Exploración de Figura
Abductivo	Búsqueda de antecedente	Construcción de Figura
Analógico	Exploración Teórica	Exploración teórica de situación
Deductivo	Elaboración de Prueba	Elaboración de Prueba
Convicción externa	Formulación de definición	Instalación concepto/proposición
Inductivo Abductivo	Determinación de dependencia	Exploración de Figura Construcción de Figura

Para sintetizar la contribución de esta investigación a la comunidad de educadores matemáticos, en seguida se citan trabajos académicos realizados:

Molina, O., & Pino-Fan, L. (2018). Diferencias entre discursos colectivos (verbales) e individuales (escritos) al hacer demostraciones en geometría: una explicación a partir del sistema de normas. *Educación Matemática, 2*(30).

Molina, O., & Samper, C. (En prensa). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática.*

Molina, O., Font, V., & Pino-Fan, L. (En evaluación). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Revista Enseñanza de las Ciencias.*

Molina, O., Pino-Fan, L., & Font, V. (En prensa) Tensions and dilemmas about what is "legitimate" in a geometry course. *First PME Regional Conference South America.*

Molina, O., & Pino-Fan, L. (2018) Tensiones de estudiantes y profesor que influyen en el proceso de argumentación: una tarea de geometría como contexto de estudio. Presentado en Relme 32. Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.

Molina, O., Pino-Fan, L., & Font, V. (2018) Sistemas de normas y argumentación: gestión del profesor en una clase de geometría del espacio de nivel universitario. Ponencia presentada en el Grupo de Discusión "Incidencias en Latinoamérica de un Marco Teórico Inclusivo en la Investigación en Educación Matemática". Relme 31. Lima, Perú: Universidad de Lima.

Molina, O. (2017) Discurso e Interacción en un Aula de Geometría: Construcción Colectiva y Escritura "Individual" de una Demostración. Presentado en Sochiem 32. Valparaiso, Chile: Universidad de Valparaiso.

Molina, O., & Samper, C. (2017) ¿Solo argumentos deductivos en el aula de geometría? Presentado en Relme 31. Lima, Perú: Universidad de Lima.

6.4.2 Perspectivas para estudios futuros

El análisis didáctico propuesto por el EOS (Font, Planas, & Godino, 2010) tiene cinco elementos. Como se dijo previamente, el estudio realizado se fundamentó en los primeros cuatro, mediante los cuales se proveyó información concreta (un sistema de normas y maneras de gestionarla) que un profesor podría considerar para tratar las interacciones en el aula cuando se intenta que los estudiantes participen de manera significativa en la argumentación. Sacar a la luz el sistema de normas de un curso suministró una manera para comprender lo que en ella sucedía, principalmente en lo que respecta a prácticas de argumentación. Lo anterior se constituye en una contribución a la sugerencia de Stylianides, Stylianides y Weber (2017), según la cual es necesaria más investigación sobre cómo apoyar el trabajo de los profesores para que sus estudiantes se involucren en procesos de argumentación y mejoren su comprensión sobre la prueba. Sin embargo, con el fin de tener más información al respecto y lograr una mayor certeza de su fiabilidad, un siguiente paso investigativo debería ser realizado. Este consiste en valorar la idoneidad didáctica del proceso de estudio (quinto elemento del análisis didáctico) llevado a cabo en el curso escenario de investigación. Con el ánimo de precisar posibles preguntas de investigación, se proponen los siguientes escenarios de reflexión:

- El análisis realizado mostró evidencia del involucramiento de los estudiantes en prácticas argumentativas tanto informales (substanciales) como formales. Razones para el dinamismo del sistema normativo y la identificación de las responsabilidades de los estudiantes fueron un indicador de ello. Sin embargo, es claro que no todos los estudiantes se hicieron partícipes de tales prácticas y que no todos lograron los aprendizajes esperados en el curso: 10 de los 31 estudiantes registrados reprobaron el curso. En general, estos fueron estudiantes periféricos que no participaron con autonomía en dichas puestas en común (lo hicieron cuando la profesora se los exigía con el fin de involucrarlos). En una entrevista, colectiva y oral, realizada a los estudiantes al final del curso, antes de que fueran informados sobre su aprobación o no, se les preguntó sobre la percepción general del curso y los asuntos por mejorar: Mauricio y Ronald, dos de los estudiantes que finalmente reprobaron, dijeron lo siguiente:

  > Mauricio: […] yo no sabía cuándo debía hacer una demostración [prueba formal] o no […] si cuando se resolvía un problema o… solo en las tareas… Y también cuándo se podía usar cosas [objetos primarios] que no se había visto [instalado en clase]. […] Si eso se aclara desde el principio pues… uno… sabría qué poner.
  >
  > Ronald: No entendí los de los formatos núcleos y pilares. Saber los pilares a mí me pareció… esto, difícil, no es fácil siempre. Si eso se dijera desde plana [curso previo] pues sería mejor.

  Las respuestas de estos estudiantes permiten afirmar que algunas normas no fueron claras para ellos, bien sea por su temporalidad (Normas 9a y 16 para el caso de Mauricio)[68] o por características de su faceta epistémica (Normas 33 y 34 para el caso de Ronald)[69], y que probablemente esa falta de claridad fue parte de la causa de su reprobación. Este escenario induce preguntas como las

[68] Norma 9a: La justificación puede ser un argumento informal o una prueba […]. Norma 16: objetos nuevos se puede introducir en situaciones de exploración o construcción de objetos.
[69] Norma 33: Una prueba válida no necesariamente debe contener todos los pasos […]. Norma 34: Uno de los formatos legítimos para presentar una prueba, denominado Núcleo-Pilar […].

siguientes: *¿Qué del sistema normativo puede llevar a que no todos los estudiantes se involucren en las prácticas argumentativas de manera significativa*? *¿Son algunas normas excluyentes*? Si es el caso, *¿en qué sentido lo son*? *¿Son todas las normas reconocidas por los miembros de la clase*? Si no es así, *¿por qué ocurre esto*? *¿Existe un sistema de normas que logre involucrar a todos los estudiantes en prácticas argumentativas de manera autónoma y significativa*? Si es el caso, *¿qué características debe tener tal sistema*?

- El análisis realizado evidenció, no sólo que no todos los estudiantes se involucraron en las prácticas de la clase, sino que puede haber conflictos (o tensiones) entre normas que la profesora explicitó al inicio del curso. Una posible causa de ello pudo haber sido la no precisión, por parte de ella, de las *situaciones instruccionales* que las normas deben regular. Así, por ejemplo, si la profesora hubiese advertido desde un comienzo que los argumentos informales son legítimos en *situaciones de exploración* o *construcción de objetos*, probablemente no se hubiese presentado tensiones entre las Nomas 9 y 16 (o la no claridad por parte de Mauricio). Esta explicación hipotética, posibilita el planteamiento de preguntas como las siguientes: *¿Es necesario que la profesora explicite las situaciones instruccionales que cada norma debe regular*? O *¿Tal asociación (norma - situación instruccional que regula) va surgiendo de manera "natural" en las sucesivas reiteraciones de las normas durante el trascurso del curso sin necesidad de su explicación por parte de la profesora*? *¿Las tensiones (o conflictos) entre normas se pueden evitar si la profesora explicita la situación instruccional que una norma determinada debe regular*? *¿Existen normas que regulan mejor una situación instruccional determinada*?

Los anteriores, son casos particulares de dos preguntas más generales que se pueden enunciar de la siguiente manera:

- ¿Tiene sentido aludir a la idoneidad de un sistema normativo para inducir un proceso matemático determinado, en particular el proceso de argumentación? O ¿cómo un sistema normativo de un curso determinado se relaciona con los criterios de idoneidad (cognitivo, epistémico, afectivo, interaccional, ecológica, mediacional) propuestos por el EOS?
- ¿Tiene sentido aludir a la idoneidad de la gestión de un sistema normativo por parte del profesor que pretende inducir un proceso matemático determinado, en particular el proceso de argumentación?

Dar respuestas a estas peguntas permitiría refinar los niveles de análisis de los procesos de estudio propuestos por el EOS, y daría cuenta de asuntos de interés actual en lo que respecta a conocimiento del profesor de matemáticas, y diseño o evaluación de programas de formación de profesores (Breda, Font, & Pino-Fan, 2018; Breda, Pino-Fan, & Font, 2018), pero aterrizados al sistema normativo y su influencia en la argumentación:

a. Decantar la idoneidad del papel del profesor en relación con la gestión del sistema de normas en lo que tiene que ver con los procesos de argumentación en un curso fundamentado en la resolución de problemas, uso de EGD y una interacción en el aula específica (ver la Introducción de este documento).
b. Con base en los resultados obtenidos a partir del ítem a, generar una especificación de componentes e indicadores para cada uno de los criterios de idoneidad propuestos por el EOS en relación, específicamente, con procesos de argumentación. En ese marco, proveer información pertinente sobre el conocimiento didáctico-matemático que un profesor debería tener, en lo que respecta al sistema de normas y los procesos de argumentación, o un referente con el cual valorar un proceso formativo en lo que respecta a tales aspectos.

Breda y sus colaboradores plantean que uno de los elementos para precisar criterios de idoneidad consiste en la producción científica emanada de procesos investigativos del campo de la Educación Matemática. Teniendo esto presente, una nueva lectura de la literatura que conforma los antecedentes del presente estudio (ver Capítulo I) deja inferir que algunos de los resultados de las investigaciones implícitamente sugieren criterios de idoneidad (relativos a los procesos de argumentación en específico) que se pueden clasificar según las facetas sugeridas por el EOS. Para ilustrar esto último, la Tabla 132 presenta la relación entre asuntos comentados en los antecedentes de este estudio con criterios de idoneidad (CI) según cada faceta.

Tabla 132. Relación resultados antecedentes - criterios de idoneidad relativos a la argumentación

Resultados Antecedentes	**CI**
Sobre intervenciones en el aula. Se sugiere:	
Tareas (problemas abiertos) que inviten a la exploración y formulación de conjeturas (*e.g.*, Olivero & Robutti, 2001; Pedemonte, 2007; Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010).	Epistémico (en tanto riqueza de procesos): De manera concreta, se especifican tipos de tareas (descriptores) que provocan la producción de argumentos.
Tareas centradas en actividades metacognitivas -comentar situaciones hipotéticas, completar pruebas, etc.- (*e.g.*, Heinze, Reiss, & Groß, 2006; Kuntze, 2008).	

Uso del EGD para (i) provocar argumentos substanciales y, por esa vía, argumentos formales; (ii) provocar la necesidad de argumento deductivos; (iii) apoyar la resolución de problemas y provocar riqueza en producciones (*e.g.*, Jones, 2000; Olivero, 2006; Jones & Tzekaki, 2016; Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, & Stevenson, 2012; Sinclair & Yerushalmy, 2016; Sinclair, et al., 2016).	Mediacional: Variedad de recursos no solo para abordar una situación de exploración sino para presentar (representar) una prueba. Epistémico: Descriptores específicos que dan cuenta del “buen” uso de tales recursos que tiene que ver con la representatividad de los argumentos, traducida en los diferentes tipos de argumentos.
Uso de diagramas de flujo para presentar la estructura de una prueba (Miyazaki, Fujita, & Jones, 2015).	
Uso de diferentes tipos de registro para presentar una prueba (Herbst, Chen, Weiss, & González, 2009; Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads, & Samkoff, 2012).	
Sobre el papel del profesor. Se sugiere:	
Conformación de pequeños grupos (dos o tres personas) para la producción autónoma relacionada con tareas específicas -resolución de un problema o elaboración de una prueba- (*e.g.*, Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010;).	Interaccional: Se precisan maneras (descriptores) en que un profesor debe gestionar la clase para involucrar a estudiantes en procesos de argumentación: Interacciones para generar autonomía, para precisar cuándo un argumento es válido o legítimo, o para buscar consenso sobre el mejor argumento.
Que el profesor sea el responsable de gestionar y negociar normas que precisen lo que cuenta como argumentos legítimos o válidos en matemáticas (Mariotti, 2009; Yackel, 2002).	
Gestionar un sistema de normas que posibilite la participación genuina y autónoma de los estudiantes decantando, por ejemplo, lo que cuenta como un argumento legítimo o válido en matemáticas (Yackel & Cobb, 1996; Schwarz, Hershkowitz, & Azmon, 2006; Azmon, Hershkowitz, & Schwarz, 2011).	
Administrar los intercambios de instrucción creando tareas y oportunidades de trabajo en donde los estudiantes puedan activar efectivamente procesos de argumentación (Herbst, y otros, 2010).	
Que el profesor apoye la actuación de los estudiantes proveyendo o insinuando elementos de un argumento siguiendo el modelo de Toulmin (Yackel, 2002; Ubuz, Dinçer, & Bulbul, 2013).	Cognitivo: gestión del profesor para promover una zona de desarrollo próximo; esto es, apoyar a los estudiantes con el fin de acercarlos la producción de un argumento válido o legítimo.

La información de la Tabla 132 permite no solo justificar la pertinencia del estudio sugerido en las líneas anteriores, sino vislumbrar un primer paso para el desarrollo de este, caracterizado por la organización de la literatura existente que se base en los criterios de idoneidad y que allane el proceso de identificación de posibles descriptores desde los resultados de investigación.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, M. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, 121-140.

Acosta, M., Mejía, C., & Rodríguez, C. (2013). Lugares geométricos en la solución de un problema de construcción: presentación de una posible técnica de una praxeología de geometría dinámica. *Educación Matemática, 25*(2), 141-160.

Anscombre, J. C., & Ducrot, O. (1994). *La argumentación en la lengua.* Madrid: Gredos.

Antonini, S., & Mariotti, M. (2008). Indirect proof: What is specific to this way of proving? *ZDM Mathematics Education, 40*(3), 401–412.

Arzarello, F., Bartolini-Bussi, M., Leung, A., Mariotti, M., & Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs . En G. Hanna, & M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education* (págs. 97-146). New York: Springer.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM, 34*(3), 66-72.

Assis, A., Godino, J. D., & Frade, C. (2012). As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,, 15*(2), 171–198.

Azmon, S., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2011). The impact of teacher-led discussions on students' subsequent argumentative writing. *Proceedings of PME 35 International Conference*, *2*, págs. 73–80.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*, 225–253.

Balacheff, N. (2002). The researcher epistemology: a deadlock from educational research on proof. En F.-L. Lin (Ed.), *International Conference on Mathematics "Understanding proving and proving to understand"* (págs. 23-44). Taipei, Taiwan: NSC and NTNU. Obtenido de www.tpp.umassd.edu/rc/reading/Balachef_Taiwan2002.pdf

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis. En H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska, *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (págs. 65–84). Reston, VA: NCTM.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. En T. Cooney, & D. Grouws, *Effective Mathematics Teaching* (págs. 27-46). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Birkhoff, G. A. (1932). Set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics* , *33*(2), 329-345. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/1968336

Blanton, M., Stylianou, D., & David, M. (2003). The nature of scaffolding in undergraduate students' transition to mathematical proof. En N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Ed.), *Proceedings of the 27 PME International Conference. 2*, pág. 113—120. Honolulu: University of Hawaii.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism.* Engelwood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *Iternational Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* Obtenido de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Boero, P., & Planas, N. (2014). Habermas' construct of rational behavior in mathematics education: New advances and research questions. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36*, *1*, págs. 205–235.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. M. Pinto, & T. F. Kawasaky (Ed.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1*, págs. 179-204. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., & Mariotti, M. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. En L. Meira, & D. Carraher (Ed.), *Proceedings of the 19th PME International Conference*, *2*, págs. 113-120.

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2017). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema.*

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278. doi:http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2018). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6). doi:10.12973/eurasia.2017.01207a

Brousseau, G. (1984). The crucial rôle of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. En H. G. Steiner, *Theory of Mathematics Education (Occasional Paper 54)* (págs. 110-119). Bielefeld: IDM.

Brousseau, G. (2002). The Didactical Contract: The Teacher, the Student and the Milieu. En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Mathematics Education Library* (Vol. 19). Dordrecht: Springer.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* (Tesis doctoral), Universitat de València, Valencia.

Camargo, L., Perry, P., Samper, C., & Molina, O. (2015). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de rayo al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las ciencias, 33*(3), 99-116.

Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A., & Molina, Ó. (2015). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de rayo al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(3), 99-116.

Camargo, L., Samper, C., Perry, P., Molina, O., & Echeverry, A. (2009). Use of dragging as organizer for conjecture validation. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Ed.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, págs. 257-264. Thessaloniki, Greece: PME.

Cheng, Y.-H., & Lin, F.-L. (2006). Using reading and colouring to enhance incomplete prover's performance in geometry proof. *Proceedings of PME 30 International Conference*, *2* , págs. 289–296.

Cheng, Y.-H., & Lin, F.-L. (2007). The effectiveness and limitation of reading and colouring strategy in learning geometry proof . *Proceedings of PME 31 International Conference*, *2*, págs. 113–120 .

Civil, M., & Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: Does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 7-12.

Clark, P. (2005). *The emergence of a classroom community of practice in a mathematical structures course.* Doctoral Dissertation. Department of Philosophy, Arizona State University. Obtenido de www.ibrarian.net/navon/paper/Phillip_G___Clark.pdf?paperid=4676423

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*(3-4), 175-190. doi:http://dx.doi.org/10.1080/00461520.1996.9653265

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 258-277.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal, 29*, 573–604.

Conde, L., Parada, S., & Fiallo, J. (2016). Reflexiones en comunidad de práctica sobre Triángulos imposibles en clase de matemáticas. *Educação e Pesquisa*. Obtenido de http://dx.doi.org/10.1590/s1517-9702201611150509

Cusi, A., & Malara, N. A. (2009). The role of the teacher in developing proof activities by means of algebraic language. *Proceedings of PME 33 International Conference*, *2*, págs. 361–368.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. (2007). La Dimensión Metadidáctica de los Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática. *Paradigma, 28*(2), 49-70.

Dawkins, P., & Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 123-142.

de Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Douek, N. (2007). Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice. En P. Boero, *Theorems in School* (págs. 163-184). Rotterdam: Sense Publishers.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S., & Tanguay, D. (2012). Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. En G. Hanna, & M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education* (págs. 349-368). New York: Springer.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration Duval. *Educational Studies in Mathematics, 22*(3), 233–261.

Duval, R. (1999). *Algunas cuestiones relativas a la argumentación.* Obtenido de Lettre de la Preuve: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html

Echeverry, A., Molina, Ó., Samper, C., Perry, P., & Camargo, L. (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de matemáticas en formación enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de la Ciencias, 30*(1), 73-88.

Eco, U. (1989). Cuernos, cascos, zapatos. Algunas hipótesis sobre tres tipos de abducción. En U. Eco, & T. Sebeok, *En El signo de los tres: Dupim, Holmes, Peirce* (págs. 265-294). Barcelona: Lumen.

English, L. (2004). Mathematical and analogical reasoning of young learners. En L. English, *Mathematical and Analogical Reasoning in Early Childhood* (págs. 1-22). New Yersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics.* Albany, NY : SUNY Press.

Font, V., Godino, J., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97–124. doi:https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Font, V., Planas, N., & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Garfinkel, H. (2006). *Estudios en etnometodología.* (H. Pérez, Trad.) Bogotá: Anthropos.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. d. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59–76.

Godino, J., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88 .

Goffman, E. (1981). *Forms of talk.* Philadelphia: University of Philadelphia Press.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-3), 5-23.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education.* New York: Springer.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. En S. Campbell, & R. Zazkis, *Learning and teaching Number Theory. Journal of Mathematical Behavior* (págs. 185–212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Harel, G., & Showder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 805-842). Charlotte, NC: NCTM, Information Age Publishing Inc.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky, *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 3, págs. 234–283). American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM, Information Age Publishing Inc.

Hattermann, M. (2010). A first application of new theoretical terms on observed dragging modalities in 3-D dynamic-geometry-environments. En M. Pinto, & T. Kawasaki (Ed.), *Proceedings of PME International Conference*, *3*, págs. 57–64. Belo Horizonte.

Heinze, A., Reiss, K., & Groß, C. (2006). Learning to prove with heuristic worked-out examples. *Proceedings of PME 30 International Conference*, *3*, págs. 273–280.

Herbel-Eisenmann, B., Hoffmann, A., & Seah, W. (2003). The role of beliefs, values and norms in mathematics classrooms: A conceptualization of theoretical lenses. *Paper presented in a Symposium (organized by Jinfa Cai) at the Pre-session of National Council of Teachers of Mathematics 81th annual conference.* April 9-12, San Antonio, Texas.

Herbst, P. (2003). Using Novel Tasks in Teaching Mathematics: Three Tensions Affecting the Work of the Teacher. *American Educational Research Journal, 40*(1), 197-238.

Herbst, P. (2006). Teaching geometry with problems: Negotiating instructional situations and mathematical tasks. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 313—347.

Herbst, P., & Chazan, D. (2012). On the instructional triangle and sources of justification for actions in mathematics teaching. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 44*(5), 601-612.

Herbst, P., & Kosko, K. W. (2014). Mathematical knowledge for teaching and its specificity to high school geometry instruction. En J. .. Lo, K. R. Leatham, & L. R. Van Zoest, *Research trends in mathematics teacher education* (págs. 23-46). New York: Springer.

Herbst, P., Chen, C., Weiss, M., & González, G. (2009). "Doing proofs" in geometry classrooms. En D. Sthlianou, M. Blanton, & E. Knuth, *Teaching and learning proog across the grades* (págs. 250-268). New York: Taylor & Francis.

Herbst, P., Fujita, T., Halverscheid, S., & Weiss, M. (2017). *The Learning and Teaching of Geometry in Secondary Schools A modeling perspective* . New York, NY: Routledge.

Herbst, P., González, G., Hsu, H. Y., Chen, C., Weiss, M., & Hamlin, M. (2010). *Instructional situations and students' opportunities to reason in the high school geometry class.* Manuscript. Deep Blue at the University of Michigan. Obtenido de http://hdl.handle.net/2027.42/78372

Herbst, P., Nachlieli, T., & Chazan, D. (2011). Studying the Practical Rationality of Mathematics Teaching: What Goes Into "Installing" a Theorem in Geometry? *Cognition And Instruction, 29* (2), 218-255.

Hoyles, C., & Healy, L. (1999). Linking informal argumentation with formal proof through computer integrated teaching experiments. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, *3*, págs. 105 - 112.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-3), 55-85.

Jones, K., & Herbst, P. (2012). Proof, Proving, and Teacher-Student Interaction: theories and contexts. En G. Hanna, & M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education* (págs. 261-278). New York: Springer.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the Teaching and Learning of Geometry. En A. Guitérrez, G. Leder, & P. Boero, *The Seond Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (págs. 109-152). Rotterdam: Sense Publishers.

Jones, k., Gutiérrez, A., & Mariotti, M. (2000). Proof in Dynamic Geometry Environments: A PME Special Issue. *44*(1-3).

Juthe, A. (2005). Argument by Analogy. *Argumentation, 19*(1), 1–27. doi:https://doi.org/10.1007/s10503-005-2314-9

Kelly, A., & Lesh, R. (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education. .* N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Knipping, C., & Reid, D. (2015). Reconstructing Argumentation Structures: A Perspective on Proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (págs. 75-101). Dordrecht: Springer.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb, & H. Bauersfeld, *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (págs. 229–269). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2007). The Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(1), 60-82.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (págs. 51-74). Dordrecht: Springer.

Kuntze, S. (2008). Fostering geometrical proof competency by student-centred writing activities . *Proceedings of PME 32 and PME-NA 30*, *3* , págs. 289–296.

Laborde, C. (2000). Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving. *44*(1), 151–161.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1985). How Do Teachers Manage to Teach? Perspectives on Problems in Practice. *Harvard Educational Review, 55*(2), 178-194.

Lampert, M. (1993). Teachers' thinking about students' thinking about geometry: The effects of new teaching tools. En J. Schwartz, M. Yerushalmy, & B. Wilson, *The Geometric Supposer: What is it a case of?* (pág. 107—116). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching .* New Haven, CT: Yale University Press.

Lee, K., & Sriraman, B. (2011). Conjecturing via reconceived classical analogy. *Educational Studies in Mathematics*, 123-140.

Leiter, K. (1980). *A primer on ethnomethodology.* New York: Oxford University Press.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(2), 135–157.

Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lo, J.-J., Tsamir, P. T., & Stylianides, G. (2012). Teachers' Professional Learning of Teaching Proof and Proving. En G. Hanna, & M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education* (págs. 327-348). New York: Springer.

Mackey, A., & Gass, S. (2005). *Second Language Research: Methodology and Design.* London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mariotti, M. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (págs. 173-204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Mariotti, M. (2009). Artefacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM Mathematics Education, 41*(4), 427–440.

Mariotti, M., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history andepistemology to cognition. En E. Pehkonen, *Proceedings of the 21st Conference of the theInternational Group for thePsychology of Mathematics Education* (Vol. 1, págs. 180-195). Lahti, Finland: PME.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 87–125.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. (2004). The space of learning. . En F. Marton, & A. Tsui, *Classroom discourse and the space of learning* (págs. 3–40). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, INC Publishers.

Matos, J. F., & Rodrigues, M. (2011). Proof in classroom social practice. *Proceedings of PME 35. 3*, págs. 177–184. Ankara: PME.

McClain, K., & Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(3), 236-266. doi:http://10.2307/749827

Mehan, H., & Wood, H. (1975). *The reality of ethnomethodology. .* New York : John Wiley.

Mejia-Ramos, J., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 3-18.

MEN. (1998). *Serie lineamientos curriculares matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional .

MEN. (3 de febrero de 2016). *Resolución 02041. Características específicas de calidad de los programas de Licenciatura.* Bogotá: MEN.

Miles, M., & Huberman, A. (1994). *Qualitative Data Analysis. An expanded Sourcebook.* (2 ed.). California: SAGE Publications Inc.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2015). Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proof. . *ZDM Mathematics Education, 47*(7), 1211–1224.

Molina, O., & Pino-Fan, L. (2018). Diferencias entre discursos colectivos (verbales) e individuales (escritos) al hacer demostraciones en geometría: una explicación a partir del sistema de normas. *Educación Matemática, 2*(30).

Molina, O., & Samper, C. (2018). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(62).

Molina, Ó., Perry, P., Camargo, L., & Samper, C. (2015). Conocer y refinar significados personales abordando un error: el caso del Teorema Localización de Puntos . *Educación Matemática, 27*(2).

Molina, Ó., Samper, C., Perry, P., Camargo, L., & Echeverry, A. (2010). Estudio del Cuadrilátero de Saccheri como Pretexto para la Construcción de un Sistema Axiomático Local. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 24*, 117-134.

Morse, J. (1998). Designing funded qualitative research. En N. Denzin, & Y. Lincoln, *Strategies of Qualitative Inquiry* (págs. 56-85). California: Sage Publications.

Ng, O. (2016). The interplay between language, gestures, dragging and diagrams in bilingual learners' mathematical communications. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 307–326.

Olivero, F. (2006). Hiding and showing construction elements in a dynamic geometry software: A focusing process. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Ed.), *Proceedings of PME 30 International Conference*, *4*, págs. 273–280. Prague.

Olivero, F., & Robutti, O. (2001). Measure in Cabri as bridge between perception and theory. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, *4*, págs. 9–16.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 25*(3), 313–348.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41.

Pedemonte, B., & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 104–122.

Peirce, C. S. (1878). Illustratios of the logic of science. Deduction, induction, and hypothesis. *Popular Science Monthly, 13*(Agosto), 470-482. Obtenido de https://en.wikisource.org/wiki/Popular_Science_Monthly/Volume_13/August_1878/Illustrations_of_the_Logic_of_Science_VI

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (1989). *Tratado de la Argumentación.* (J. Sevilla, Trad.) Madrid: Editorial Gredos.

Perry, P., Camargo, L., & Samper, C. (2006). *Actividad Demostrativa en la Formación Inicial del Profesor de Matemáticas.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper, & Ó. Molina, *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (págs. 11-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Molina, O., Camargo, L., & Echeverry, A. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo: Una aproximación metodológica alternativa. *Épsilon - Revista de Educación Matemática, 29*(3), 41-56.

Pino-Fan, L., Assis, A., & Godino, J. D. (2015). Análisis del proceso de acoplamiento entre las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento matemático en el contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones. *Educación Matemática, 27*(1), 37-64.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(1), 63-94. doi:http://dx.doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Planas, N., & Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 12*(2), 179-213.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning.* New Jersey: Princeton University Press.

Recio, A., & Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 83–99.

Reid, D., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching.* Rotterdam: Sense Publishers.

Romberg, T. (1992). Perspectives on scholarship and research methods. En D. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 49-64). New York: Simon y Shuster Macmillan.

Sáenz-Ludlow, A., & Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter- interpretation: A Peircean perspective. *Pre-proceedings of the 12th icme.* Obtenido de http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Samper, C., & Plazas, T. (2017). Tipos de mensajes del profesor durante la producción de una demostración en geometría. *Educación Matemática, 29*(1), 37-60.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, Ó., & Echeverry, A. (2010). Geometría dinámica: Su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si-entonces Educación Matemática. *22*(3), 119-142.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Sáenz-Ludlow, A., & Molina, O. (2016). A dilemma that underlies an existence proof in geometry. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 35–50.

Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics. En D. Tirosh, & T. Wood, *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (págs. 321–354). Rotterdam: Sense Publishers.

Schwarz, B., Hershkowitz, R., & Azmon, S. (2006). The role of the teacher in turning claims to arguments. *Proceedings of PME 30 International Conference*, *5* , págs. 65–72.

Selden, A. (2012). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. En G. Hanna, & M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education* (págs. 391-422). New York: Springer.

Sfard, A. (2008). *Sobre las metáforas de la adquisición y de la participación para el aprendizaje de las matemáticas.* (P. Perry, & L. Andrade, Trads.) Santiago de Cali, Colombia: Programa Editorial Universidad del Valle.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M., de Villier, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 48*(5), 691–719.

Sinclair, N., & Yerushalmy, M. (2016). Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning: A Decade Focused on Theorising and Teaching. En A. Guitérrez, G. Leder, & P. Boero, *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (págs. 235-274). Rotterdam: Sense Publishers.

Steinhart, E. (2001). *The Logic of Metaphor: Analogous Parts of Possible Worlds.* Dordrecht: Springer Science Business Media.

Stylianides, A. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, A., Bieda, K., & Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. En A. Guitérrez, G. Leder, & P. Boero, *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (págs. 315-352). Rotterdam: Sense Publishers.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2005). Validation of solutions of construction problems in dynamic geometry environments. *International journal of computer for Mathematical Learning, 10*, 31- 47.

Stylianides, G., Stylianides, A., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai, *First compendium for research in mathematics education.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments* (Actualización de 1 ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Ubuz, B., Dinçer, S., & Bulbul, A. (2013). Argumentation in Undergraduate Math Courses: a Study on Definition Construction. En A. M. Lindmeier, & A. Heinze, . *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 313-320). Kiel: PME.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 69-118.

Voigt, J. (1989). Social functions of routines and consequences for subject matter learning. *International Journal of Educational Research, 13*(6), 647–656.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interactional and sociomathematical norms. En P. Cobb, & H. Bauersfeld, *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (págs. 163-202). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

von Glasersfeld, E. (1984). An introduction to radical constructivism. En P. Watzlawick, *The invented reality* (págs. 17-40). New York: Norton.

Wittgenstein, L. (1999). *Investigaciones filosóficas.* (A. García, & U. Moulines, Trads.) España: Ediciones Altaya S.A.

Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and argumentation in mathematics classrooms. *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education PME-25* (págs. 1-9). Utrecht: PME.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 423–440.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(4)*, 458-477.

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. En G. Toerner, E. Pehkonen, & G. Leder, *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (págs. 313–320). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Yackel, E., Rasmussen, C., & King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behavior, 19*(3), 275-287.

Zack, V. (1997). "You have to prove us wrong": Proof at the elementary school level. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME. 4*, págs. 291–298. Lanti: PME.

Anexos

Anexo 1. Recuento de Clase N° 20

Clase N°:	20
Fecha:	25-04-2017
Curso:	Geometría del Espacio
Profesora:	Carmen Samper
Fragmentos de clase:	1. Comentarios de la Tarea Extraclase 10 sobre el siguiente ítem: Escribir la prueba de los siguientes teoremas enunciados al finalizar la clase [sesión 19]. **T. unicidad Plano-recta perpendicular punto interno:** Sea un plano α y un punto A, tal que $A \in \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$. 2. Comentarios de la Tarea Extraclase 10 sobre el siguiente ítem: Escribir la prueba de los siguientes teoremas enunciados al finalizar la clase [sesión 19]. **T. Recta-plano perpendicular punto externo:** Sea m una recta y $A \notin m$. Entonces existe un único plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A. **T. Plano-recta perpendicular punto externo:** Sea un plano α y un punto A tal que $A \notin \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$. 3. Abordaje, por grupos, del Problema Principal 10: Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes? En la actividad se pedía un reporte de construcción, exploración, conjetura y su correspondiente demostración.

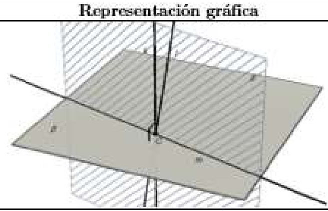
OSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Le vamos a seguir un seguimiento a este problema... esto, por cuanto es un problema que no es tan evidente en su solución; es el más abierto que se ha propuesto hasta el momento. Permite introducir el plano mediador.

Fragmento 1

Dentro de los comentarios que hizo, destacó que el ítem 2a, en esencia, alude a que la recta perpendicular a un plano β por un punto C es única; aclaró que este hecho se incluirá en el T. Plano punto interno – recta perpendicular. La profesora comenta cómo teoremas previos son útiles para demostrar otros, hecho que ilustra cómo se va construyendo un sistema teórico; alude lo anterior debido a lo que había estado pasando en las últimas sesiones de clase: en la búsqueda de mostrar cómo un plano es perpendicular a una recta, se demostró el T. Fundamental de la perpendicularidad; y cómo estos dos teoremas permitieron demostrar el T. Plano punto interno – recta perpendicular. De manera específica, la profesora pide al grupo C que comenten su respuesta y justificación a tal ítem 2a; Brayan 1 (miembro de tal grupo) dice que la respuesta es No e inicia su justificación. Alude en primera instancia a la creación de un plano: al suponer que sí existe dicha recta l, se genera el plano $\delta_{l,k}$ por el T. Dos rectas – plano. La profesora valida esa respuesta y dice que es muy importante, para este tipo de demostraciones (en el contexto de la Geometría del Espacio) buscar planos [3:50 C.Pan1]. Hecho esto, la profesora pregunta a la clase qué implica tal construcción; varios aluden a la recta m de intersección entre los dos planos inmersos en la situación. Brayan 1 retoma su justificación; con lo hecho hasta el momento, se tendría $l \perp m$ por C, $k \perp m$ por C por D. Recta perpendicular a un plano; la profesora ayuda en la conclusión de la demostración aludiendo a que tal hecho es contradictorio porque no pueden existir dos rectas perpendiculares a una recta por un mismo punto en un mismo plano; esto gracias a la unicidad que provee el T. Existencia perpendicular punto interior.

OSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Norma sobre estrategia para hacer demostraciones en Geometría del Espacio.

Representación gráfica



La profesora termina comentando que en este tipo demostraciones se debe observar cómo las situaciones del espacio se pueden llevar al plano [6:57 C.Pan1]. Vale decir que las demostraciones solo son verbalizadas en sus ideas claves; no se alude a algún formato ni se escucha las palabras Núcleos y Pilares; se enuncian los núcleos más no los pilares verbalmente y se acompaña de una

> **OSCAR JAVIER MOLINA JAIME**
> Refuerza la norma del comentario anterior. Estrategia para abordar una demostración en el espacio.

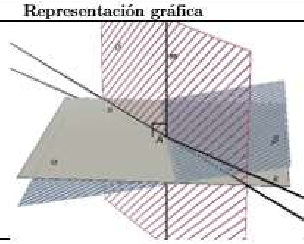
La profesora propone abordar la *Unicidad de plano perpendicular a una recta por punto interno.* Pregunta a los estudiantes cómo abordar esa demostración. José Luis proponen suponer que hay dos planos; la profesora lo parafrasea diciendo que una demostración de unicidad siempre es por contradicción.

Antes de iniciar el proceso de demostración, la profesora recuerda que siempre que vaya a usar el formato *Núcleos y Pilares* para una demostración, es necesario reportar los asuntos previos a la demostración misma, esto es, *datos, aserción* y el *tipo de demostración*, para que se puedan entender los núcleos y pilares. De otro lado, comenta que las construcciones auxiliares son muy importantes para el curso aun cuando no son muy frecuentes; ilustra la situación con base en la construcción de clase pasadas, de dos triángulos congruentes empleando sus respectivas alturas, y no directamente construyendo sus partes correspondientes. A la luz de ese ejemplo, la profesora resalta que este caso, los datos serían los triángulos que comparten un lado, cada uno en un plano respectivamente y sus alturas congruentes. [23:00 C.Pan1]

> **OSCAR JAVIER MOLINA JAIME**
> Norma sobre formatos. La profesora aclara asunto relativo al Formato Núcleo y Pilares, en términos de los aspectos que se deben poner previo a la demostración

Volviendo al asunto de demostrar la unicidad del plano, Natalia expone su demostración y es apoyada por Sebastián. Finalmente, este último provee ideas, mientras la profesora las parafrasea y las escribe con notación geométrica en el tablero, no precisando el formato a usar, pero estipulando los Núcleos y Pilares. Hace una representación gráfica similar la que sigue.

Representación gráfica



En el tablero que escrita la demostración como sigue:

Anexo 2. Enunciados Problemas por Bloques

BLOQUE N° 1		
Dominio temático: Geometría Plana	**Temas:** Segmentos Congruentes; Circunferencia	
Problema Principal 1	**Objetivo**	**Sesión N°**
Construir dos segmentos congruentes.	Generar de la necesidad de introducir objetos primarios en torno a la circunferencia: su definición y teorema de existencia.	1,2
Problema Auxiliar 1.1	**Objetivo**	**Sesión N°**
Quiero que ahora definamos circunferencia. ¿Quién se acuerda, quién quiere promover una primera definición de circunferencia?	Precisar las condiciones que permiten definir circunferencia dadas por los estudiantes, contrastándolas con el procedimiento de construcción exigido por el software Cabri 3D cuando se emplea la herramienta circunferencia.	3
Problema Auxiliar 1.2	**Objetivo**	**Sesión N°**
Ahora nos toca pensar en cómo muestro que realmente existe una circunferencia en nuestro sistema teórico, es decir, usando los elementos que tenemos hasta ahora, ¿es posible?	Demostrar e instaurar el Teorema de la existencia de una circunferencia	3
Tarea Extraclase 1	**Objetivo**	**Sesión N°**
Los triángulos se clasifican según relaciones entre los lados o de acuerdo con propiedades de los ángulos. Demuestre, si es posible, que existen triángulos de cada tipo, dentro de cada clasificación. Si no es posible explique por qué.	Usar el objeto circunferencia, entre otros, como herramienta para construir y justificar la existencia de los triángulos, particularmente isósceles y equiláteros.	2, 4
Tarea Extraclase 2	**Objetivo**	**Sesión N°**
En clase demostramos que las circunferencias tienen infinitos puntos. Para ello, ¿es realmente necesario usar los rayos opuestos? Justifique su respuesta.	Aclarar la diferencia entre la infinitud de puntos que puede tener un objeto determinado y la totalidad de puntos que conforma a dicho objeto.	4

BLOQUE N° 2		
Dominio temático: Geometría Plana	**Temas:** Plano, Relación de Paralelismo	
Problema Principal 2	**Objetivo**	**Sesión N°**
¿Se puede justificar o no si los planos tienen infinitos puntos, de manera análoga a cómo tenemos para las rectas con el Teorema recta – infinitos puntos?	Instaurar el Teorema plano infinitos puntos.	4
Problema Auxiliar 2.1	**Objetivo**	**Sesión N°**
¿Es cierto que con el método de considerar todas las rectas que contienen al punto C en el plano y a un punto de la $\overline{AB}$ hay puntos del plano que no están en esas rectas? Justifique su respuesta.	Generar la necesidad de demostrar el T. Existencia de la paralela: existe una recta paralela a la $\overline{AB}$ que contiene a C. [Surge la primera demostración por contradicción en el curso]	5
Tarea extraclase 3	**Objetivo**	**Sesión N°**
1. En clase, se propuso la siguiente situación: α plano, $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$, C punto, $C \in \alpha$, $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Sean $X_i \in \overleftrightarrow{AB}, i = 1,2, \ldots$. Entonces si $l \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $C \in l$ se tiene que $\alpha = \overleftrightarrow{AB} \cup \bigcup \overleftrightarrow{CX_i} \cup l$. Analice la situación, indique su acuerdo o desacuerdo, y justifique su respuesta.	Generar la necesidad de introducir el Postulado de las Paralelas	6
2. Sean ΔABC y un punto $D \in m$ tal que $A \in m, B, C \notin m$ y $\Delta ABC \cong \Delta BAD$. ¿Cuál es la relación entre m y $\overleftrightarrow{BC}$? Justifique su respuesta.	Generar la necesidad de introducir el Teorema AIP	6
3. Demuestre, si es posible, el teorema propuesto en clase. Si no es posible, explique por qué. **T. Perpendicular paralela-perpendicular** En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces es perpendicular a la otra	Usar el Postulado de las paralelas.	7
Tarea Extraclase 4	**Objetivo**	**Sesión N°**
3. Determine si la respuesta a la pregunta es Sí, No o No Se Sabe. Justifique su respuesta. a) Sean $\angle ABC$ y $\angle EFG$ tal que $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{FG}$. Sean $\overrightarrow{BX}$ y $\overrightarrow{FY}$ las bisectrices de los ángulos, respectivamente; $\overrightarrow{BX} \parallel \overrightarrow{FY}$. ¿Es $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{FE}$? b) Las rectas m y k son paralelas. ¿Todos los puntos de m equidistan de k? c) La recta t es una traseversal de las rectas paralelas, m y n; $t \cap m = \{S\}$; $t \cap n = \{Q\}$; P punto, $P \in m$ y R punto tal que $R \in S_{t,P} \cap n$. ¿Es $\angle PSQ \cong \angle SQR$?	Usar los diferentes teoremas asociados al paralelismo: T. AIP, T. PAI.	9

BLOQUE N° 3		
Dominio temático: Geometría Plana	**Temas:** Recta tangente a una circunferencia	
Problema Principal 3	**Objetivo**	**Sesión N°**
Sea recta m en plano α y circunferencia de centro P y radio r contenida en α. ¿Existe un radio de la circunferencia perpendicular a m? Justifique su respuesta.	Generar la necesidad de introducir teoremas relativos a la recta tangencia de una circunferencia: Si una recta es tangente a una circunferencia en un punto S, entonces el radio con extremo en S es perpendicular a dicha recta.	6, 7
Tarea Extraclase 4	**Objetivo**	**Sesión N°**
2. En clase, tratamos de demostrar el siguiente teorema: **T. Tangente - perpendicular** Si $\overleftrightarrow{DE}$ es tangente a $\odot P_r$ en el punto D, entonces $\overline{PD} \perp \overleftrightarrow{DF}$. Un estudiante propuso hacer la demostración por contradicción, suponiendo que la recta no es perpendicular al radio, e hizo una demostración, que todos aceptamos, que lleva a que la recta tendría que intersecar a la circunferencia en dos puntos. Esto es la contradicción a que se llega. Lo que no nos quedó claro fue en qué momento usó la negación de la conclusión en su demostración. ¿Sí usa la negación de la conclusión? Justifique su respuesta.	Reflexionar sobre una demostración previamente hecha, con el ánimo de precisar el método llevado a cabo para la misma.	8
1. Demuestre el siguiente teorema: **T. Perpendicular a radio -tangente:** Sean $\odot P_r$ y l recta, $\overline{PX}$ es un radio y $l \perp \overline{PX}, X \in l$, entonces l es tangente a $\odot P_r$.	Demostrar el respectivo teorema bien sea por método directo (usando teoremas de desigualdades) o por método indirecto (negando la tesis del teorema).	9

BLOQUE N° 4		
Dominio temático: Geometría Plana, Geometría del Espacio	**Temas:** Relación de paralelismo, Cuadriláteros, Cuadriláteros plegados, El espacio, Visualización de Planos en el espacio	
Problema Principal 4	**Objetivo**	**Sesión N°**
Sean A, B, C y D cuatro puntos. ¿Qué figura sería la unión de segmentos determinados por estos puntos, si ningún par de segmentos se intersecan en puntos diferentes a los extremos?	Generar la necesidad de definir cuadriláteros y algunos de sus tipos. Generar la necesidad de establecer el Postulado de existencia de puntos fuera del plano, si por su propia iniciativa, los estudiantes ponen un punto fuera del plano.	8, 9 (Geometría Plana) 11 (Geometría del Espacio)
Tarea Extraclase 5 (Geometría Plana)	**Objetivo**	**Sesión N°**
1. En clase, surgió la propuesta de usar el HG Ángulo inscrito en semicircunferencia, que se estableció en el curso Elementos de Geometría, para demostrar que realmente existe un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos congruentes y un par de ángulos opuestos rectos. La propuesta resultó a partir del uso de la circunferencia que contiene tres vértices del cuadrilátero para encontrar el cuarto vértice. Como no hemos demostrado el hecho geométrico, no se aceptó la propuesta. La tarea consiste en decidir si el hecho geométrico se puede deducir a partir de la teoría que tenemos en el momento. En caso afirmativo, escribir la demostración completa. Si no se puede, explique por qué.	Demostrar e instaurar el T. ángulos inscrito en circunferencia.	10
2. Para la siguiente tarea, use geometría dinámica. Reporte su construcción, exploración y conjetura. Para demostrar sus conjeturas, consigne solo los Núcleos y Pilares. Determine la relación entre “tipo de cuadrilátero” y la propiedad “una diagonal biseca a la otra”.	Generar la necesidad de instaurar teoremas relativos a propiedades de varios tipos de cuadriláteros, en particular aquellos que son paralelogramos.	10, 11
3. ¿Las diagonales de un paralelogramo se intersecan? Demuestre su respuesta.	Usar teoremas de paralelismo y semiplanos.	11

<table>
<tr><th>Tarea Extraclase 6 (Geometría Plana)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>1. a) Desarrolle la demostración completa usando el formato Aserción-Garantía y Datos.
Tipo de demostración: Directa
Datos: ΔABC, X punto medio de $\overline{AB}$, Y punto medio de $\overline{AC}$
Aserción: $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$, $XY = \frac{1}{2}BC$
<table>
<tr><th>Núcleos</th><th>Pilares</th></tr>
<tr><td>1. Punto $Z \in \overleftrightarrow{XY}$ tal que $YZ = XY$</td><td>T. Localización de puntos</td></tr>
<tr><td>2. $\Delta AXY \cong \Delta CZY$</td><td>P. LAL</td></tr>
<tr><td>3. $\boxdot XBCZ$ paralelogramo</td><td>T. Lados opuestos paralelos y congruentes-paralelogramo</td></tr>
</table></td><td>Usar teoremas relativos a las propiedades de cuadriláteros</td><td>12, 13</td></tr>
<tr><td>2. Demuestre, si es posible, que existen los trapecios. (Formato Aserción-Garantía y Datos).</td><td>Instaurar el T. Existencia de los trapecios usando en su demostración T. de la paralela.</td><td>12</td></tr>
<tr><td>3. Usando el formato Núcleos y Pilares, demuestre: Si un segmento tiene extremos en lados opuestos de un paralelogramo y contiene el punto de intersección de las diagonales, entonces ese punto lo biseca.</td><td>Usar teoremas relativos a las propiedades de cuadriláteros</td><td>13</td></tr>
<tr><th>Problema Auxiliar 4.1 (Geometría del Espacio)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>¿Es el espacio diferente a un punto, a una recta y a un plano?</td><td>Establecer teóricamente y no de manera figural las diferencias entre punto, recta, plano y espacio.
Generar la necesidad del P. del Espacio.</td><td>11, 12, 13</td></tr>
<tr><th>Problema Auxiliar 4.2 (Geometría del Espacio)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>¿Cuántos puntos tiene el espacio?</td><td>Garantizar que el espacio tiene infinitos puntos.</td><td>13, 14</td></tr>
<tr><th>Problema Auxiliar 4.3 (Geometría del Espacio)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>Al redefinir fuera del plano base dado un vértice de un $\boxdot ABCD$. ¿La figura que queda es un cuadrilátero?</td><td>Construir la definición de cuadrilátero plegado y pirámide</td><td>13, 14</td></tr>
<tr><th>Tarea Extraclase 7 (Geometría del Espacio)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>1. Resuelva el siguiente problema con Cabri 3D. Reporte el proceso: construcción, exploración, conjetura. Demuestre su conjetura. ¿Existe un cuadrilátero plegado con un par de ángulos opuestos rectos?</td><td>Proveer procedimientos para construir un cuadrilátero plagado con características específicas.</td><td>15</td></tr>
</table>

Problema Principal 5 (Geometría del Espacio)	Objetivo	Sesión N°
En una línea de una demostración de geometría del espacio un estudiante ha escrito una aserción. Escriba todas las posibles garantías que conozca para dicha aserción, y datos correspondientes que posibilitaría usar dicha garantía (Si necesita poner más filas, puede hacerlo):	Recodar todas las garantías y respectivos datos que permiten justificar teóricamente, la determinación de un plano. [Este Problema se concibe como útil para explicitar varias herramientas para determinas planos en el espacio].	13, 14

Aserción	Garantía	Datos
Sea el plano α		

Problema Principal 6 (Geometría del Espacio)	Objetivo	Sesión N°
Dado el $\triangle ABC$, sean D y F puntos tal que $F \in \overleftrightarrow{AB}, D \in \overleftrightarrow{AC}$, e I un punto que no pertenece al plano determinado por A, B y C. Sea un punto H tal que $H \in \overleftrightarrow{DI}$, y un punto G tal que $G \in \overleftrightarrow{FH}$. a) ¿Pueden determinarse por lo menos tres planos distintos al inicial? Justifique su respuesta. b) Considere todos los planos determinados por triángulos que no comparten vértice con el ΔABC ¿Qué relación tienen esos planos con α_{ABC}?	Visualizar distintos planos en el espacio y generar la necesidad de establecer el P. Intersección de planos y el T. Intersección de planos.	16, 17

	Tarea Extraclase 8	Objetivo	Sesión N°
Espacio	Responda la pregunta. Justifique su respuesta con una demostración. c) Considere el siguiente teorema: **T. Punto – Infinitas rectas** Dado un punto A en un plano β entonces existen infinitas rectas en β que contiene al punto A. ¿Seguirá siendo un teorema si se elimina toda mención del plano β?	Demostrar que existen infinitas rectas no coplanares en el espacio.	17
	Ya vimos que los cuadriláteros plegados pueden tener dos ángulos opuestos rectos. La pregunta que surge es si pueden tener más de dos ángulos rectos. Describan cómo exploran la situación y cuál es la conclusión que establecen. Indiquen cómo llegaron a esa conclusión. **NO** DEBEN DEMOSTRAR SU RESPUESTA.	Proveer procedimientos para construir un cuadrilátero plagado con características específicas.	17
Plano	Justifique cada afirmación usando el formato Núcleos y Pilares. a) Si ambos pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces es paralelogramo. b) Si dos ángulos consecutivos de un trapecio son congruentes, pero no suplementarios, entonces el trapecio es isósceles.	Poner en juego el sistema teórico relativo al paralelismo o perpendicularidad en el plano para demostrar las proposiciones enunciadas.	17

BLOQUE N° 5

Dominio temático: Geometría del Espacio	Temas: Relación de perpendicularidad entre plano y recta	
Problema Principal 7	**Objetivo**	**Sesión N°**
Dados m recta, α plano, $m \cap \alpha = \{X\}$, ¿existe recta l, $l \subset \alpha$, tal que $l \perp m$?	Precisar que una recta que interseca a un plano en un único punto y que es perpendicular a una recta de tal plano, no son condiciones suficientes para garantizar que tal recta es perpendicular al plano.	17, 18
Problema Auxiliar 7.1	**Objetivo**	**Sesión N°**
¿Cómo lograr que la recta m sea perpendicular al plano α?	Generar la necesidad de introducir la D. de recta perpendicular a plano y de la existencia de un plano perpendicular a una recta por un punto de ella.	18
Problema Auxiliar 8.1	**Objetivo**	**Sesión N°**
Un estudiante asegura que dados un $\overline{PQ}$ y puntos B y C tales que equidistan de los extremos de tal segmento, con seguridad la $\overleftrightarrow{BC}$ es mediatriz del $\overline{PQ}$. Además, afirma que cualquier punto S entre B y C equidista de P y Q. ¿Está de acuerdo con las dos aseveraciones del estudiante? Justifique su respuesta.	Generar e instaurar el T. de equidistancia en el espacio, importante para la demostración del T. Fundamental de la perpendicularidad.	18
Tarea Extraclase 9	**Objetivo**	**Sesión N°**
Demuestre el siguiente teorema que corresponde a la situación que estudiamos al finalizar la clase: **T. Interestancia – Equidistancia en el Espacio:** Sean A, B, X, T puntos no coplanares y ningún trio de ellos colineales, tal que T y X equidistan de A y B. Sea S un punto tal que $X - S - T$; entonces S equidista de A y B. Se provee una tabla con todas las aserciones.	Demostrar e instaurar el T. Interestancia – Equidistancia en el Espacio	18
Problema Principal 8	**Objetivo**	**Sesión N°**
a) Construya un ΔABC en el plano α y un ΔABD congruente al ΔABC, tal que $D \notin \alpha$. i) Escriba el proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación. ii) Escriba el proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.).	Identificar el criterio por excelencia para determinar que un plano es perpendicular a una recta: una recta es perpendicular a un plano por un punto si dos rectas de este son perpendiculares a la recta dada por dicho punto (T.	19

iii) Provea una conjetura que responda la pregunta del problema. iv) Provea una demostración de dicha conjetura [Núcleos y Pilares].	Fundamental de la perpendicularidad)	
Problema Auxiliar 8.2	**Objetivo**	**Sesión N°**
Para construir el ΔABD del problema anterior, un estudiante propuso la siguiente construcción: i) Construye $\overline{CE}$ altura relativa al $\overline{AB}$ ii) En un plano β que interseca a α en $\overleftrightarrow{AB}$, construye $m \perp \overleftrightarrow{AB}$, m recta, $E \in m$. iii) D punto, $D \in m$, $DE = CE$. a) Represente la situación. b) ¿Se cumple que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$? Justifique su respuesta. c) ¿Existe una relación especial entre una recta y alguno de los planos que se pueden determinar? Si es el caso indique la relación, y cuáles la recta y el plano.	Generar la necesidad del T. Fundamental de la perpendicularidad	19
Tarea Extraclase 10	**Objetivo**	**Sesión N°**
1. Escribir las pruebas de los siguientes teoremas enunciados al finalizar la clase [sesión 19]. **T. Recta-plano perpendicular punto interno** Sea m una recta y A un punto de ella. Entonces existe un plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A. **T. unicidad Plano-recta perpendicular punto interno:** Sea un plano α y un punto A, tal que $A \in \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$. [Lo análogo para los siguientes teoremas: **T. Plano-recta perpendicular punto interno:** Sea un plano α y un punto A, tal que $A \in \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$. **T. Recta-plano perpendicular punto externo** Sea m una recta y $A \notin m$. Entonces existe un único plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A. **T. Plano-recta perpendicular punto externo:** Sea un plano α y un punto A tal que $A \notin \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$.]	Demostrar los Teoremas respectivos.	19, 20

<table>
<tr><th colspan="3">BLOQUE N° 6</th></tr>
<tr><td>Dominio temático: Geometría del Espacio</td><td colspan="2">Temas: Conjunto mediador y Plano mediador</td></tr>
<tr><td>Problema Principal 9</td><td>Objetivo</td><td>Sesión N°</td></tr>
<tr><td>Para responder las siguientes preguntas, deben usar la geometría dinámica Cabri 3D. La tarea no es solo responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en el que incluyan para cada numeral la siguiente información:
i) El proceso de construcción de los procesos involucrados en la situación.
ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o bola de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o bola de cristal-, si se redefinió algún objeto, etc.).
iii) Una conjetura que responda a la pregunta del problema.
iv) La demostración de la conjetura (núcleos y pilares).
Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes?</td><td>Usar la definición de mediatriz como herramienta para solucionar el problema, si la situación se aborda en un plano.
Generar la necesidad de introducir el Plano Mediador de un segmento para solucionar el problema, si los segmentos dados son alabeados.</td><td>20, 21, 22, 24</td></tr>
<tr><td>Problema Auxiliar 9.1</td><td>Objetivo</td><td>Sesión N°</td></tr>
<tr><td>Para responder las siguientes preguntas, deben usar geometría dinámica Cabri 3D. La tarea no es solo responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en la que incluyan para cada numeral la siguiente información:
i) El proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación.
ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.).
iii) Una conjetura que responda la pregunta del problema.
1. a) Dados dos puntos A y B en un plano α, ¿existen puntos P y Q talque $P, Q \notin \alpha$ y equidistan de A y B? Si es el caso, represéntelos.
b) Sea $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$. ¿Qué relación existe entre Q y $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$?
c) ¿Qué relación existe entre los puntos del $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$ y los puntos A y B?
2. a) ¿Cuántas mediatrices tiene un segmento?
b) ¿Se agrupan las mediatrices para formar una figura geométrica espacial?</td><td>Precisar las características del plano mediador y, con base en ello, introducir la Definición de Plano Mediador y el T. Plano Mediador</td><td>22</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tarea Extraclase 11</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>

Un estudiante propone la siguiente demostración para el teorema:

El conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$) es igual al plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$.

¿Está usted de acuerdo con ella? Explique su respuesta

Demostración:

Datos: $\mu_{\overline{AB}}$ el conjunto de todos los puntos que equidistan de A y B; α el plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$

Aserción: $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$.

La demostración del teorema implica demostrar la igualdad entre dos conjuntos: $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$. Es decir, se debe demostrar que $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

Se demostrará primero que $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

Tipo de demostración: Directa

<table>
<tr><th>Aserción</th><th>Datos y garantía</th></tr>
<tr><td>1. Sea X tal que $X \in \mu_{\overline{AB}}$</td><td>Dado</td></tr>
<tr><td>2. $XA = XB$</td><td>D. Conjunto Mediador (1)</td></tr>
<tr><td>3. Sea β_{ABX}</td><td>P. Plano-Puntos (2)</td></tr>
<tr><td>4. Sea la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$</td><td>T. Existencia de la mediatriz (2)</td></tr>
<tr><td>5. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB}}$</td><td>T. Mediatriz (2, 4)</td></tr>
<tr><td>6. $\mathcal{M}_{\overline{AB}} \subset \alpha$</td><td>Caracterización de α (5)</td></tr>
<tr><td>7. $X \subset \alpha$</td><td>T. Contenencia (5, 6)</td></tr>
</table>

Se demostrará ahora que $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$

Tipo de demostración: Directa

<table>
<tr><th>Aserción</th><th>Datos y garantía</th></tr>
<tr><td>1. Sea X tal que $X \in \alpha$</td><td>Dado</td></tr>
<tr><td>2. Sea β_{ABX}</td><td>P. Puntos - plano (2)</td></tr>
<tr><td>3. $X = \beta \cap \alpha$</td><td>D. Intersección de conjuntos (1, 2)</td></tr>
<tr><td>4. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$</td><td>T. Existencia mediatriz (2)</td></tr>
<tr><td>5. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta} = \beta \cap \alpha$</td><td>T. intersección de planos; Principio de sustitución (3)</td></tr>
<tr><td>6. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$</td><td>Transitividad (3, 4)</td></tr>
<tr><td>7. $XA = XB$</td><td>D. Mediatriz (6)</td></tr>
<tr><td>8. $X \in \mu_{\overline{AB}}$</td><td>D. Conjunto mediador (7)</td></tr>
</table>

Como $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$ entonces $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$ por D. Igualdad de conjuntos.

</td><td>Corregir la demostración provista del teorema El conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$) es igual al plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$ el cual es otra forma de caracterizar al Plano Mediador.</td><td>24</td></tr>
</table>

BLOQUE N° 7		
Dominio temático: Geometría del Espacio	**Temas:** Cubo, Ángulos diedros	
Problema Principal 10	**Objetivo**	**Sesión N°**
¿Existe un cubo?	Definir cubo y demostrar su existencia a partir de métodos de construcción válidos. Generar la necesidad de instaurar el T. rectas perpendiculares a plano - paralelas. Generar la necesidad de instaurar la definición de ángulo diedro y el T. Ángulos diedros.	24

Anexo 3. Recuento Bloque N° 6 y preanálisis con Atlas.ti 7

Recuento

Problema Principal 9 y Problema Auxiliar 9.1

Al finalizar la sesión de clase 20, la profesora entrega una hoja con el Problema Principal 9 para el cual debía hacerse uso de Cabri 3D. Su enunciado es el siguiente:

> **PP9**: Para responder las siguientes preguntas, deben usar geometría dinámica Cabri 3D. La tarea no es solo responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en la que incluyan para cada numeral la siguiente información:
>
> i) El proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación.
> ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.).
> iii) Una conjetura que responda la pregunta del problema.
> iv) La demostración de la conjetura (Núcleos y pilares)
>
> Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes?

En la actividad se pedía un reporte de construcción, exploración, conjetura y su correspondiente demostración. Dice la profesora que de él surge un teorema bien importante. Al recogerse dicha actividad (luego de 20 minutos aproximadamente), se dio por terminada la sesión de clase 20.

En la sesión de clase 21, luego de que la profesora hiciera un breve comentario sobre la Tarea Extraclase 10, la profesora retoma el Problema Principal 9. Pide a los estudiantes que se organicen por grupos pues se van a estudiar usando el software Cabri 3D cada una de las propuestas producidas por ellos. La profesora, muestra un documento donde pone cada una de las propuestas, y lo proyecta en el televisor; dice que los resultados fueron muy chéveres. El documento es el siguiente:

I. Caso I: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, E coplanares

1. R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, E punto medio de $\overline{RT}$
2. $E \in \mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha} \cap \mathcal{M}_{\overline{CD},\alpha}$

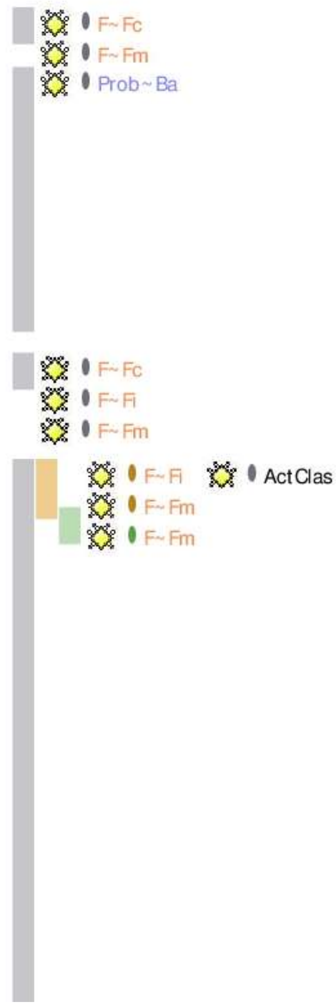
II. Caso II: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ coplanares, E no coplanar a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$

1. $\boxdot ABCD$ paralelogramo, $X \in \overline{AC} \cap \overline{BD}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$, por X, $E \in l$
2. R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, M punto medio de $\overline{RT}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$ por M, $E \in l$
3. Punto medio de $\overline{AD}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$ por M, $E \in l$

III. Caso III: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ no coplanares

1. R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, $\beta \perp \overline{AB}$ por R, $\delta \perp \overline{CD}$ por T, $l = \beta \cap \delta$, $E \in l$ (Pr2)

La profesora dice que va a formular las propuestas, y que quiere que cada grupo las estudie en el software para ver sin son válidas o no. Para cada propuesta, la profesora pide que algún grupo/estudiante pase al frente, con su computador, para ilustrar la situación. Ella advierte que el problema no dice algo sobre la localización de puntos. En consecuencia, varios grupos pensaron que



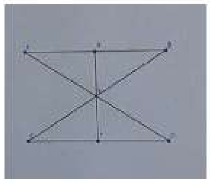
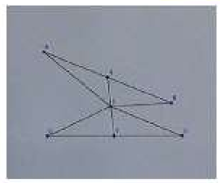
todos los puntos dados, extremos del segmento y el punto E, debían estar en el mismo plano [6:43 C.Pan1].

CASO I: $\overline{AB}$, $\overline{CD}, E$ coplanares

1. R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, E punto medio de $\overline{RT}$

Un grupo (el de Sandra) dice que No siempre funciona; Ronald pasa con su equipo y muestran un ejemplo en el que los triángulos en cuestión son congruentes y otro en el que no. Este grupo usa Geogebra para hacer su representación. Dicha propuesta es descartada [12:00 C.Pan1].

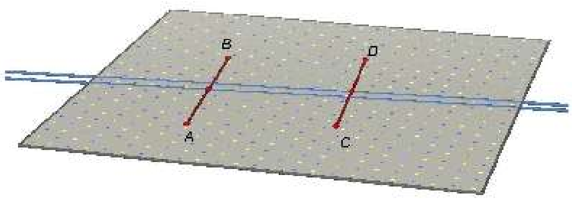
Arg~ Ce
SI~ E

2. $E \in M_{\overline{AB},\alpha} \cap M_{\overline{CD},\alpha}$

Pasa Tatiana 2 con su equipo para ilustrar la situación. Ella usa Cabri 3D. Ella muestra casos donde se cumple la propiedad y casos en los cual ello no pasa. Específicamente, si los dos segmentos son paralelos las mediatrices no se intersecan.

Arg~ Ce
SI~ CF
SI~ E

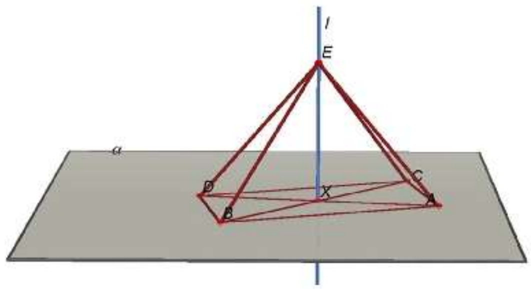


Faltó decir que existe en punto E siempre y cuando los segmentos no sean paralelos o colineales. Luego de que Tatiana 2 mueve cualquiera de los segmentos dados mediante sus extremos, se percatan que en este caso se cumple muy pocas veces la propiedad en cuestión.

Continuando con las opciones de exploración, la profesora comenta que hubo otros grupos que pensaron los segmentos dados coplanares, pero el punto E en un plano diferente al plano en referencia. Dice que estas propuestas son chéveres porque estamos en un curso de Geometría del Espacio, y pues que se podría "pensar que me están pidiendo cosas en el espacio".

CASO II: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ coplanares, E no coplanar a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

1. $\boxdot ABDC$ paralelogramo, $X \in \overline{AD} \cap \overline{BC}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$, por X, $E \in l$.
   Pasa José Luis e lustra la situación.



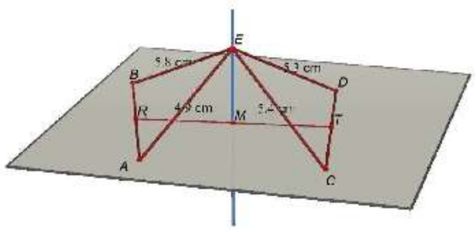
Steven dice que la recta l es mediatriz de cada una de las diagonales en los planos que determina cada diagonal con l. La profesora pide arrastra el punto E y visualmente pareciera que los ΔABE y ΔCDE son congruentes. Steven y Oscar inician un proceso para argumentar que los triángulos, en este caso, necesariamente son congruentes. Se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y son paralelos. Como l es perpendicular al plano, lo es a cada diagonal. Por definición de mediatriz, se sabe que $\overline{BE} \cong \overline{CE}$ y $\overline{AE} \cong \overline{DE}$. Por el T. L.L.L, los triángulos son congruentes.

Arg~Ad~Dir
SI~CF

2. R punto medio de $\overline{AB}, T$ punto medio de $\overline{CD}$, M punto medio de $\overline{RT}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$ por M, $E \in l$.

Comenta la profesora que lo bueno de esta propuesta es que los segmentos dado en este caso no tienen una posición relativa especial. Karen pasa con su equipo y muestra su representación. En ella, están las medidas de los segmentos de los triángulos en cuestión, y se observan que no son iguales; razón por la cual no son congruentes. Es descartada tal propuesta.

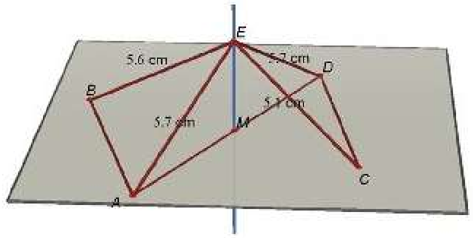
Arg~Ce
SI~CF
SI~E



3. M punto medio de $\overline{AD}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$ por M, $E \in l$

Zayra pasa con equipo para mostrar la representación asociada. La profesora resalta que, en esta propuesta, no se trata del punto medio de los segmentos dados, sino del punto medio del $\overline{AD}$. Zayra hace varios arrastres y toma la medida de los lados de los triángulos.

Arg~Ce
SI~CF
SI~E



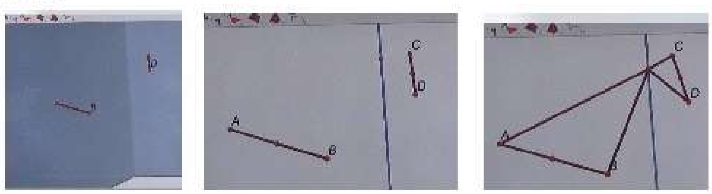
José Luis dice que la recta l es mediatriz de $\overline{AD}$. La profesora dice que, entonces los $\overline{AE}$ y $\overline{ED}$ son congruentes y nada más. La profesora dice que teóricamente solo se puede garantizar la congruencia de dos parejas de lados. La propuesta es descartada entonces.

La siguiente propuesta, dice la profesora, es muy interesante porque asumieron que todo lo dado estaba en diferentes planos.

CASO III: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ no coplanares

> R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, $\beta \perp \overline{AB}$ por R, $\delta \perp \overline{CD}$ por T, $l = \beta \cap \delta$, $E \in l$

Pasa Andrés, miembro del grupo que propuso esta solución. Para la construcción del $\overline{CD}$ congruente al $\overline{AB}$, Andrés hace una esfera de centro C y radio AB; de esa manera no solo garantiza congruencia, sino que no sean coplanares. Mientras Andrés llevaba a cabo los demás pasos de la construcción (R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, $\beta \perp \overline{AB}$ por R, $\delta \perp \overline{CD}$ por T, $l = \beta \cap \delta$, $E \in l$) la profesora la parafraseaba. SI~ CF

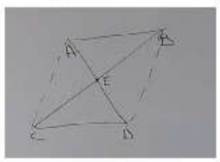


Dado que era difícil determinar la congruencia de los ΔABE y ΔCDE visualmente, la profesora sugirió tomar medida de los lados de los triángulos. Sin embargo, después de mover la caja de cristal, se dieron cuenta que no lo eran. SI~ E

Así que realizaron un ajuste a la propuesta respecto a los puntos medios, diciendo que: R punto medio de $\overline{BD}$, T punto medio de $\overline{CA}$, $\beta \perp \overline{BD}$ por R, $\delta \perp \overline{AC}$ por T, $l = \beta \cap \delta$, $E \in l$. Andrés hace la construcción con el ajuste, pero el tiempo de la clase agotó y no se alcanzó explorar con detalle la situación. La sesión de clase termina. SI~ CF

En la sesión de clase 22, luego de que la profesora hiciera unos comentarios sobre las producciones relativas al Parcial 3, retoma las propuestas correspondientes al Problema Principal 9 [00:00 C.Pan2]. Reitera que fueron chéveres la soluciones que surgieron dado que algunos grupos propusieron que los segmentos y el punto E fueran coplanares, otros que los segmentos fueran coplanares pero el punto E no estuviera en el plano que contiene los segmentos, y solo un grupo que los segmentos no fueran coplanares. La profesora pide a los estudiantes que recuerden lo realizado hasta el momento con respecto al problema. Específicamente, les pregunta a los estudiantes qué les impactó sobre el proceso llevado a cabo. Le pregunta a Edwin; él dice no recordar mucho al respecto. Esteban recuerda que algunas propuestas consideraron los segmentos y el punto E en el plano, otras los segmentos en el plano y el puto fuera de él y otros todo en distintos semiplanos. La profesora pregunta qué le impacto del proceso llevado a cabo. Esteban dice que la única propuesta que llevó a una solución fue aquella que consideró los segmentos dados como lados de un paralelogramo y la propuesta descrita al final de la clase anterior que consideró la intersección de planos (aquella comentada por Andrés). La profesora luego le pregunta a Zayra qué le impresionó; antes de que ella le responda dice que la profesora que "a veces uno dice por qué no se me ocurrió las propuestas que otros exponen". Zayra comenta que su grupo consideró todo en el plano, pero que no les ocurrió considerar objetos en el espacio. Jefferson alza la mano para participar luego de que la profesora preguntara qué les sorprendió del proceso. Dice que a ellos no se les ocurrió pensar la situación en el plano; de una vez estudiaron el caso de segmentos dados no coplanares.

La profesora comenta que cuando se abordó la solución en el plano, solo se estableció una solución. Esto es, tomar los segmentos paralelos y tomar el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo asociado como la solución al problema. Hace la representación en el tablero.

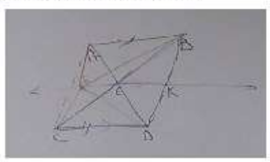


La profesora pregunta si en el plano, sólo se establece esa solución o si hay otra.

Ronald propone la siguiente idea:

1. m recta, $m \parallel \overline{CD}$ por el punto E
2. K punto, $K \in m \cap \overline{DB}$

La profesora hace la siguiente representación en el tablero:



Esta idea exige demostrar que el punto K es punto medio del $\overline{DB}$, lo cual dio lugar a un nuevo teorema: SI~IP

T. Segmento paralelo punto medio triángulo Dado el $\triangle CBD$, si $\overline{EK} \parallel \overline{CD}$, E es punto medio de $\overline{CB}$, entonces K es punto medio de $\overline{DB}$.

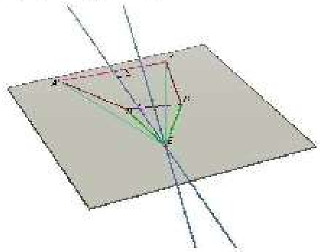
La demostración fue sugerida por Andrés; la profesora parafrasea lo dicho por él, pero no la escribe.

La profesora dice que esta propuesta (de Ronald) la deja para que los estudiantes la exploren de tarea extraclase. Arg~Ad~Dir SI~HP

La profesora ahora sugiere explorar otra solución en el plano si los segmentos dados no son paralelos, es decir si no tienen ninguna condición especial. Entrega a los estudiantes el computador para que SI~E hagan la respectiva exploración en grupos. Los estudiantes toman 10 minutos aproximadamente en hacer lo correspondiente.

El grupo de Vanesa es el primero que expone una solución: En Cabri 3D construyen los $\overline{AC}, \overline{BD}$ y sus mediatrices. Luego afirman que $\{E\} = M_{\overline{AC}} \cap M_{\overline{BD}}$.

SI~CF



Comenta la profesora que le pareció curioso que los estudiantes en sus producciones no usaran los criterios de congruencia, esto es, buscar congruencias o bien de lados o bien de ángulos; pues eso era lo natural. Si se buscan lados congruentes, pues el punto e debería estar en la mediatriz de segmentos. Con esa afirmación, la profesora parece validar la idea de este grupo de estudiantes [3:00 C.Pan3] Dice que esta es una solución para cualesquiera segmentos congruentes en el plano.

Arg~Ab
F~Fc
F~Fe

Enseguida, la profesora le pide a Andrés que describa el procedimiento de solución que su grupo propuso para los segmentos no coplanares (aquella que había intentado exponer en la sesión de clase anterior). Andrés dice que construyen los planos perpendiculares por el punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, y determinan la recta que es intersección de los dos planos. La profesora comenta que ellos propusieron exactamente lo mismo que en el plano, pero ahora en el espacio: lo que son rectas se convierten, en la solución de Andrés, en planos. Parafrasea lo dicho por el estudiante y dice que, entonces, el plan que el grupo de Vanessa propuso para el plano, se puede pasar a un plan en el espacio, en donde, en lugar de mediatrices, se busca planos.

Arg~Aa
F~Fc
F~Fe

Justo después del fragmento anterior, la profesora propuso el Problema Auxiliar 9.1, para ser abordado en grupos y con el uso de Cabri 3D [07:20 C.Pan3]:

F~Fm

PA9.1: Para responder las siguientes preguntas, deben usar geometría dinámica Cabri 3D. La tarea no es solo responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en la que incluyan para cada numeral la siguiente información:

Prob~Bc

i) El proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación.
ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.).
iii) Una conjetura que responda la pregunta del problema.

1.
   a) Dados dos puntos A y B en un plano α, ¿existen puntos P y Q talque $P, Q \notin \alpha$ y equidistan de A y B? Si es el caso, represéntelos.
   b) Sea $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$. ¿Qué relación existe entre Q y $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$?
   c) ¿Qué relación existe entre los puntos del $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$ y los puntos A y B?

2.

a) ¿Cuántas mediatrices tiene un segmento?

b) ¿Se agrupan las mediatrices para formar una figura geométrica espacial?

3. Hecho este proceso, ¿algo de lo realizado lo sorprendió verdaderamente (es decir, no esperaba un resultado como el arrojado luego de llevar a cabo todo el proceso)?

La profesora provee 45 minutos aproximadamente para abordar su solución. Luego de que los estudiantes entregan sus producciones, la profesora establece la siguiente definición sin mediar interacción entre ella y la clase [20:04 C.Pan4]:

SI~IC

> **D.** El **conjunto mediador** de un segmento es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento.
>
> Notación: $\mu_{\overline{AB}}$
>
> Así pues, $\mu_{\overline{AB}}=\{X \in \mathcal{E} | XA = XB\}$

F~Fi

La profesora pregunta que, con base en lo realizado en dicho taller, le indiquen qué condición tienen esos puntos del conjunto mediador diferente a la explicitada en la definición. Varios responden que están en un plano; Andrés dice que ese plano es perpendicular al plano por el punto medio. Pregunta luego, si todos los puntos de ese plano están en el conjunto mediador; algunos responden que sí. Dice entonces la profesora que otra formar de decir lo anterior es que: $\mu_{\overline{AB}}$ es igual β, un plano perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio. Dice que ello hay que demostrarlo. La profesora evoca la situación ocurrida en su momento con la mediatriz, que es similar a la que se tiene entre manos: la mediatriz se define como el conjunto de puntos que equidistan del plano y luego se mostró que dicho conjunto es una recta perpendicular al segmento por su punto medio. La sesión de clase termina.

SI~IP

Los objetos instaurados en la sesión de clase fueron:

> **T. Segmento paralelo punto medio triángulo** Dado el $\triangle CBD$, si $\overline{EK} \parallel \overline{CD}$, E es punto medio de $\overline{CB}$, entonces K es punto medio de $\overline{DB}$.
>
> **D.** El **conjunto mediador** de un segmento es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento.

Tarea Extraclase 11

Prob~Cp

SI~HP

En la sesión de clase 24, la profesora aborda la Tarea Extraclase 11, sin que ella previamente haya hecho la revisión de las producciones de los estudiantes. En un primer momento aborda el ítem dos de la tarea [01:05 C.Pan0]:

> 2. Un estudiante propone la siguiente demostración para el teorema:
>
> *El conjunto de puntos que equidistan de A y B* ($\mu_{\overline{AB}}$) *es igual al plano que contiene todas las mediatrices del* $\overline{AB}$.
>
> ¿Está usted de acuerdo con ella? Explique su respuesta
>
> **Demostración:**
>
> *Datos:* $\mu_{\overline{AB}}$ el conjunto de todos los puntos que equidistan de A y B; α el plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$
>
> *Aserción:* $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$.

La demostración del teorema implica demostrar la igualdad entre dos conjuntos: $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$. Es decir, se debe demostrar que $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

Se demostrará primero que $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

Tipo de demostración: Directa

Aserción	Datos y garantía
1. Sea X tal que $X \in \mu_{\overline{AB}}$	Dado
2. $XA = XB$	D. Conjunto Mediador (1)
3. Sea β_{ABX}	P. Plano-Puntos (2)
4. Sea la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Existencia de la mediatriz (2)
5. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Mediatriz (2, 4)
6. $\mathcal{M}_{\overline{AB}} \subset \alpha$	Caracterización de α (5)
7. $X \subset \alpha$	T. Contenencia (5, 6)

Se demostrará ahora que $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$

Tipo de demostración: Directa

Aserción	Datos y garantía
1. Sea X tal que $X \in \alpha$	Dado
2. Sea β_{ABX}	P. Puntos - plano (2)
3. $X = \beta \cap \alpha$	D. Intersección de conjuntos (1, 2)
4. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	T. Existencia mediatriz (2)
5. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta} = \beta \cap \alpha$	T. intersección de planos; Principio de sustitución (3)
6. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	Transitividad (3, 4)
7. $XA = XB$	D. Mediatriz (6)
8. $X \in \mu_{\overline{AB}}$	D. Conjunto mediador (7)

Como $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$ entonces $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$ por D. Igualdad de conjuntos.

La profesora comenta que este teorema surgió del Problema Auxiliar 9.1 el cual había sido propuesto en la sesión de clase 22. Dice que esta es otra manera de caracterizar al conjunto mediador advirtiendo ahora que es un plano que contiene todas las mediatrices del segmento dado. Se inicia el proceso de corrección de la demostración que se proponía en enunciado del ejercicio. La profesora aclara que en este caso hay que demostrar dos inclusiones: $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

Se inicia con la primera de ellas: $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

Les pregunta a varios grupos sobre cada uno los pasos. De igual forma, cuestiona a otros grupos sobre las ideas que los primeros proponen. A continuación, se presentan sendas Tablas que exponen los cambios de algunos de los pasos de la prueba de cada contenencia. Se destaca el autor respectivo a cada complementación. Vale indicar que la profesora iba corrigiendo un documento de Word que proyectó en el televisor en donde tenía las pruebas en cuestión.

Aserción	Datos y garantía	Complemento Aserción	Complemento Datos y garantía	Autor Complemento
1. Sea X tal que $X \in \mu_{\overline{AB}}$	Dado	Sea X, $X \in \mu_{\overline{AB}}$, M punto medio de $\overline{AB}$	T. Existencia Conjunto mediador	Profesora

FArg~A~E
FArg~A~P~I
FArg~G~E
FArg~G~P~I
FArg~R~E
FPar~A~E

2. $XA = XB$	D. Conjunto Mediador (1)			
3. Sea β_{ABX}	P. Plano-Puntos (2)		P. Puntos-Planos (2)	Varios
4. Sea la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Existencia de la mediatriz (2)	Sea la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$ en β_{ABX}	T. Existencia de la mediatriz (2, 3)	Steven
5. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Mediatriz (2, 4)		D. Mediatriz (2, 4)	Varios
6. $\mathcal{M}_{\overline{AB}} \subset \alpha$	Caracterización de α (5)			
7. $X \subset \alpha$	T. Contenencia (5, 6)	$X \in \alpha$	Noción primitiva. Pertenecer a y D. Subconjunto (5, 6)	Profesora

En relación con el primer paso, la profesora dice que se debe tener claro lo siguiente:

- **Sea** significa que se está seguro de que hay un objeto geométrico en el conjunto.
- **Suponer** significa que consideramos cierto que hay un elemento en el conjunto, pero es tan solo una posibilidad.

La profesora sugiere abordar la segunda inclusión: $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$

Se hace el mismo ejercicio que para la demostración de la contenencia anterior. En la tabla siguiente se pone la complementación respectiva, precisada en clase.

FArg~A~E
FArg~A~P~I
FArg~G~E
FArg~G~P~I
FArg~R~E
FPar~A~E

Aserción	Datos y garantía	Complemento Aserción	Complemento Datos y garantía	Autor Complemento
1. Sea X tal que $X \in \alpha$	Dado	α plano que contiene las mediatrices	Dado	Profesora
		Sea X tal que $X \in \alpha$	T. Plano Infinitos Puntos	
2. Sea β_{ABX}	P. Puntos - plano (2)			
3. $X = \beta \cap \alpha$	D. Intersección de conjuntos (1, 2)			
4. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	T. Existencia mediatriz (2)			
5. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta} = \beta \cap \alpha$	T. intersección de planos; Principio de sustitución (3)			
6. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	Transitividad (3, 4)		Transitividad o Principio de sustitución (3, 4)	Varios
7. $XA = XB$	D. Mediatriz (6)			
8. $X \in \mu_{\overline{AB}}$	D. Conjunto mediador (7)			

La profesora aclara que es importante saber qué es lo que se provee como dado, para realizar bien la demostración. Para que la demostración sea válida tenemos que desarrollar el caso en el que X no sea el punto medio $\overline{AB}$, pues un punto con esta condición sí está en $\mu_{\overline{AB}}$ y no estaríamos demostrando algo nuevo [20:05 C.Pan0].

En relación con el paso 5, luego de una discusión entre varios (José Luis, Tatiana 1) la profesora indicó que toca determinar que α, el plano determinado por las mediatrices existe. Al respecto, Tatiana 1, Steven y Yesid sugieren pasos de la respectiva demostración. Las ideas centrales de la misma, las cuales fueron verbalizadas, son las siguientes: al emplear el T. Existencia mediatriz en cada uno de los planos que contiene al segmento dado, existen infinitas mediatrices del segmento. Entonces por T. Mediatriz se tiene que cada una es perpendicular al segmento y contienen al punto medio. Por ende, comparten un punto por lo menos dos mediatrices; es decir se intersecan. Por el T. Rectas-plano se tiene el plano α. Se tiene que al menos dos rectas de α son perpendiculares a la $\overleftrightarrow{AB}$ por el mismo punto. Entonces por el T. Fundamental de la Perpendicularidad, el plano α es perpendicular a la $\overleftrightarrow{AB}$ por el punto medio del segmento. Por tanto, se demostraría que el plano α contiene a todas las rectas perpendiculares a $\overline{AB}$ por el punto medio del segmento. Por el T. Mediatriz, dichas rectas son mediatrices del $\overline{AB}$; en consecuencia, el plano α es la unión de las mediatrices.

FArg~Id~E
SI~HP

Los demás pasos fueron corregidos, pero no generaron mayor discusión.

Hecha la demostración sugerida en el enunciado del problema de la tarea, la profesora advierte que se puede introducir a nuestro sistema teórico el siguiente teorema:

SI~IP

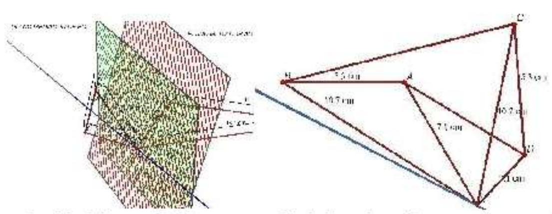
> **T. Plano mediador** El plano mediador de un segmento es el plano perpendicular al segmento por el punto medio.

La profesora propone retomar las soluciones dadas al Problema Principal 9 [08:50 C.Pan1]:

> **PP9**: *Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes?*

La Profesora recuerda las propuestas: (i) tomar los segmentos dados paralelos, (ii) tomar los dos segmentos coplanares, pero no paralelos. En relación con esta última propuesta, la profesora usa una representación gráfica en el tablero con la cual recuerda la construcción respectiva consistente en hacer las mediatrices de los otros dos segmentos formados por los extremos de los segmentos dados ($\overline{AC}$ y $\overline{CD}$, por ejemplo), y determinar la intersección de las mediatrices. Esta intersección es el punto E buscado. Así los triángulos son congruentes por el T. LLL. Dice la profesora que esta propuesta fue la que el grupo de Andrés intentó llevar al espacio, pero en lugar de usar mediatrices se construyen unos planos. Pregunta cómo hacer la construcción asociada a ese caso. Varios responden que para construir los segmentos congruentes se empleó una esfera. La profesora da la instrucción de que cada grupo haga la respectiva construcción en Cabri 3D sugerida por el grupo de Andrés. Yesid hace la construcción proyectando su pantalla en el Televisor. Específicamente, construye los dos segmentos no coplanares siguiendo las directrices del grupo citado, esto es, utilizando la esfera para construir los segmentos congruentes no coplanares. Una vez construidos los segmentos, oculta la esfera. Luego, construye los planos mediadores de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, determina la recta de intersección y pone el punto E en ella. Construye los lados de los ΔABE y ΔCDE y toma sus medidas. Resumiendo, la construcción tiene las siguientes condiciones: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Sean $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $M_{\overline{AC}}$ $M_{\overline{BD}}$, E punto, tal que $E \in M_{\overline{AC}} \cap M_{\overline{BD}}$. Entonces $\Delta ABE \cong \Delta CDE$.

SI~CF
Arg~Aa
Arg~Ad~Dir



La profesora le pide el favor a Yesid que, por medio de la exploración, comprobara que todo punto de la recta de intersección da lugar a todos los posibles triángulos congruentes. Al arrastrar el punto E sobre la recta m, vemos que se cumple la congruencia de los triángulos. La profesora dice que el argumento es similar al realizado para el caso de los segmentos coplanares, esta vez usando la definición de plano mediador. Los objetos instaurados luego del proceso descrito fueron los siguientes:

SI~E

> **T. Conjunto Mediador** El conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$), es igual al plano unión de todas las mediatrices.

> **T. Plano mediador** El plano mediador de un segmento, es el plano perpendicular al segmento por el punto medio.

SI~IP

Anexo 4. Programa del curso

I. IDENTIFICACIÓN

Geometría del Espacio (1444413)
Semestre en el plan de estudios: III
Intensidad ADD[70] **(semanal)**: 4
Horario del espacio académico: martes y jueves de 9 a 11
Horario de atención a estudiantes: Se precisa con los estudiantes
Prerrequisito(s): Geometría Plana
Nombre del profesor: Carmen Samper de Caicedo
Correo electrónico del profesor: csamper@pedagogica.edu.co/carmensamper@gmail.com

Semestre: 2017-I
Número de créditos: 3
Intensidad TI[71] **(semanal)**: 5
Salón: B311
Lugar de atención: B306

II. PRESENTACIÓN DEL ESPACIO ACADÉMICO

El espacio académico Geometría del Espacio continúa el proceso formativo disciplinar del Área de Geometría posterior al estudio de procesos de la geometría (visualización, exploración, conjeturación, comunicación con lenguaje formal, argumentación en el marco de un sistema teórico, etc.) y de contenidos relativos a la geometría plana (relaciones entre puntos, rectas y planos, ángulos, congruencia de triángulos, etc.). En tal sentido, pretende repasar y afianzar los conceptos y teoremas relacionados con las temáticas ya estudiadas, y apoyar al desarrollo de las habilidades necesarias para producir demostraciones formales, esta vez en el marco de la geometría del espacio. En tal sentido, abordar asuntos como la visualización en tres dimensiones (3D) y la exploración con objetos virtuales que están en 3D (con la ayuda de software especializado), se convierte en uno de los ejes central del curso, dado que ello cambia esquemas de pensamiento con relación al contexto de la geometría plana.

De manera específica, los propósitos del espacio son:

1. Relacionar al estudiante con procesos matemáticos, tales como: intuir, conjeturar, interpretar, crear, diseñar estrategias, ensayar - errar - corregir, explorar, razonar, generalizar; entre otras en el contexto de la geometría del espacio.
2. Ampliar el sistema axiomático de la geometría euclidiana plana para incluir los elementos propios de la geometría del espacio.
3. Consolidar el desempeño comprensivo de los estudiantes dentro de un sistema teórico de la geometría, afianzando la habilidad para hacer demostraciones formales por medio del planteamiento de ideas y estrategias que involucran conceptos geométricos.
4. Comunicar correctamente, en el marco de una teoría específica, argumentos que refuten, apoyen o complementen ideas. Participar en el marco de una comunidad de práctica cuya empresa es continuar con el proceso de aprendizaje de la geometría plana e inicial el respectivo al de la geometría del espacio. En esa comunidad, el trabajo cooperativo (en grupo) es fundamental –ver metodología-

[70] ADD. Acompañamiento directo de docente (Decreto 0808 de abril 25 de 2002, Artículo 5.)
[71] TI: Trabajo Independiente

5. Usar adecuadamente el software de geometría dinámica Cabri 3D con el objetivo de solucionar problemas de la geometría del espacio en correspondencia con una teoría específica.
6. Experimentar una manera de gestionar una clase de geometría, alternativa a la tradicional –ver metodología-.

III. APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que el estudiante durante el curso:

1. Establezca conjeturas respecto de propiedades o relaciones de la geometría del espacio.
2. Use representaciones gráficas 3D como apoyo en la interpretación de conceptos y relaciones geométricas.
3. Valide proposiciones con argumentos formales que se ciñan al sistema axiomático de referencia.
4. Use con significado los conceptos, propiedades y relaciones geométricas, tanto de la geometría plana como la del espacio, para justificar hechos geométricos. [Los anteriores propósitos se corresponden con la competencia básica del educador colombiano: Conocer y utilizar proceso y conceptos fundamentales de las matemáticas]
5. Comunique correctamente, en el marco de una teoría específica, argumentos que refuten, apoyen o complementen ideas. [Se corresponde con la competencia básica del educador colombiano: Comunicarse efectivamente de manera verbal y no verbal]
6. Usa adecuadamente un software de geometría dinámica con el objetivo de extraer elementos de una situación, resultado del dinamismo de las representaciones obtenidas en el software, como recurso en la elaboración de justificaciones. [Se corresponde con la competencia básica del educador colombiano: Usar de manera responsable los medios y tecnologías de la información y comunicación]
7. Desarrolle actitudes propias de un futuro profesor de matemáticas (Puntualidad, responsabilidad con las tareas asignadas, participación y proposición de actividades y soluciones a las mismas de manera activa y autónoma, entre otras).

IV. CONTENIDOS

1 Propiedades de Cuadriláteros

1.1. Cuadriláteros en un plano
1.2. Paralelismo de rectas
1.3. Cuadriláteros especiales (paralelogramo, rectángulo, rombo, trapecio, cometa)

2 Semejanza de triángulos

2.1. Proyección paralela
2.2. Criterios de semejanza
2.3. Teoremas fundamentales de la semejanza

3 Relación de perpendicularidad y paralelismo en el espacio

3.1. Definición de perpendicularidad para rectas y planos
3.2. Propiedades fundamentales de planos y rectas paralelos
3.3. Ángulos diedros
3.4. Planos perpendiculares
3.5. Teoremas asociados
3.6. Poliedros: tetraedro regular y cubo

4 Circunferencia y esfera

4.1. Propiedades de las circunferencias y las esferas
4.2. Tangencia de planos y rectas a una esfera y circunferencia, respectivamente.

V. METODOLOGÍA

El curso se desarrollará a través del diálogo participativo, en el que intervienen profesor-estudiante, estudiante-estudiante, por el cual se busca la construcción colectiva de conceptos y relaciones y la consolidación de los procesos argumentativos propios de la estructuración formal del sistema axiomático de la geometría euclidiana. También se realizarán talleres en forma grupal que permitan el acercamiento a los resultados fundamentales de los temas estudiados y lleven a la comprensión y a la solución de problemas que involucren las temáticas del curso. Para el desarrollo de las actividades que buscan favorecer la construcción del sistema teórico del curso se utiliza los softwares de geometría dinámica Cabri II plus y Cabri 3D. Específicamente, el profesor tiene el papel de proponer problemas que propicien la actividad demostrativa, y ser dinamizador de la discusión matemáticas que tenga lugar con respecto a la producción de los estudiantes en cuanto a la solución de los problemas. Por su parte, los estudiantes, como se vislumbra de lo anterior, deben ser actores enérgicos de la clase pues de su producción depende el desarrollo de esta. Ellos deben solucionar un problema usando, por lo general, los softwares ya precisados; presentar ante la clase su producción; refutar o apoyar ideas que se aborden en el marco de la presentación; y con ello, participar en la construcción del cocimiento a institucionalizar. Esta actividad permitirá repasar y afianzar los conceptos y teoremas relacionados con las temáticas estudiadas, y apoyar al desarrollo de las habilidades necesarias para producir demostraciones formales; además describe perfectamente el *Trabajo de acompañamiento directo del docente* que se lleva a cabo en las sesiones de clase.

Las actividades de *trabajo independiente* se centran en:

- Realización de trabajos en grupo (formados por dos o tres personas) a manera de **tarea oficial** extraclase.
- Realización de las notas de clase. Las mismas consisten en el recuento que dé cuenta de lo ocurrido en el transcurso de una clase. En las notas de clase se deben describir las actividades propuestas en clase, y dar un recuento de las discusiones que estas ocasionaron y las respectivas conclusiones. Además, deben contener un relato sobre el uso de la geometría dinámica en clase, y el listado de las definiciones y hechos geométricos establecidos. Estas notas de clase se realizan por grupos; un grupo es escogido para cada clase. El documento Notas de Clase se comparte a toda la clase mediante sistemas de comunicación virtuales como Dropbox o email.
- Realización autónoma de ciertas actividades cuyo registro no necesariamente se recoge por parte del profesor

VI. EVALUACIÓN

En este espacio académico se valorará la participación y el compromiso del estudiante hacia el curso por medio de la asistencia a las clases y acompañamientos, mediante trabajos en grupo e individuales, comprobaciones escritas, exposición ante la clase de solución de problemas. Se llevará a cabo una evaluación formativa y participativa, con miras a desarrollar competencia geométrica. La calificación final se obtiene de acuerdo con los siguientes porcentajes.

Comprobaciones escritas y notas de clase	35 %
Tareas en grupo	20 %
Participación, trabajo individual, trabajo en clase	15 %
Examen final	30 %

Nota: 1) El promedio de las calificaciones obtenidas en los documentos Notas de Clase, realizados a lo largo del semestre, se convierte en una nota equivalente a un parcial, que se incluye con las demás calificaciones de parciales para obtener el 35% de la nota final.

2) Se tratará de hacer un parcial cada tres semanas.

VII. BIBLIOGRAFÍA

MOISE, E (1964). *Elementary Geometry from an advanced standpoint.* Addison – Wesley Publishing Company.

ALFONSO, H. (1997). *Geometría Plana y del Espacio.* Universidad Pedagógica Nacional.

BARNETT, R. (1991). *Geometría.* Mc Graw Hill.

CAMPOS, A. (1994). Axiomática *y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.* Universidad Nacional de Colombia.

Anexo 5. Sistema Teórico

Postulados

P. de Existencia Puntos, rectas y planos existen.

P. Conjunto de puntos Rectas y planos son conjuntos no vacíos de puntos.

P. Dos Puntos – Recta Dados dos puntos diferentes existe una única recta que los contiene.

P. Recta – Reales Dada una recta m, se establece una correspondencia con $\mathbb{R}$ tal que:
i. A cada punto A en m le corresponde un único $x \in \mathbb{R}$.
ii. A cada $x \in \mathbb{R}$ le corresponde un único punto A en m.

Nota: El número x asignado al punto A se denotará como $c(A)$ y se leerá coordenada de A.

P. de la Distancia Dados dos puntos A y B, existe un único $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ tal que $x = AB$.

P. Llaneza del plano Dados dos puntos A y B diferentes en un plano α entonces $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$.

P. Tres Puntos – Plano Dados tres puntos A, B y C existe un plano que los contiene y si son no colineales, entonces existe un único plano β que los contiene.

P. Plano – Tres Puntos Dado plano β entonces existen A, B y C no colineales que pertenecen a β.

P. Rayos – Reales Dada la $\overleftrightarrow{OP}$ en el plano α y los semiplanos δ_1 y δ_2 determinados por $\overleftrightarrow{OP}$ en α. Se puede establecer una correspondencia entre los números reales x entre 0 y 180 y los puntos $A \in \delta_1$ de tal forma que:
i. A todo $\overrightarrow{OA}$ corresponde un único número x.
ii. A todo número x *entre* 0 y 180 corresponde un único $\overrightarrow{OA}$.
iii. Al $\overrightarrow{OP}$ le corresponde $x = 0$.
iv. Al $\overrightarrow{OQ}$ opuesto al $\overrightarrow{OP}$ le corresponde $x = 180$.

Nota: El número x asignado a $\overrightarrow{OA}$ se representará como $x = r_{A,\overrightarrow{OP}}$.

P. Medida de ángulo Dado $\angle ABC$, existe un único $x \in \mathbb{R}$, con $0 < x < 180$ tal que $m\angle ABC = x$.

P. Adición medida de ángulo Si $K \in int\angle ABC$ entonces $m\angle ABC = m\angle ABK + m\angle KBC$.

P. LAL Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\angle A \cong \angle M$, $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\overline{AC} \cong \overline{MO}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

P. Paralelas Dada una recta l y un punto $C, C \notin l$, sea m una recta paralela a l talque $C \in m$, entonces m es única.

P. Paralelas Dada una recta l y un punto $C, C \notin l$, sea m una recta paralela a l talque $C \in m$, entonces m es única.

P. Espacio Dado un plano, existe un punto que no pertenece a él.

P. Intersección de planos Si dos planos α y β, talque $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, entonces la intersección es por lo menos dos puntos.

Definiciones

D. Interestancia El punto B está entre los puntos A y C si y solo si:
a) A, B y C colienales.
b) $AC = AB + BC$.
Notación: $A - B - C$

D. Colinealidad A, B y C son colineales si y solo si existe una recta m tal que $A, B, C \in m$.

D. Segmento $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X \mid A - X - B\}$.

D. Rayo $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \mid A - B - X\}$.

D. Punto medio M es punto medio de $\overline{AB}$ si y solo si: **(i)** $AM = MB$ y (ii) $A - M - B$.

D. Rayo opuesto $\overrightarrow{AC}$ opuesto al $\overrightarrow{AB}$ si y solo si $C - A - B$.

D. Segmentos congruentes $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ si y solo si $AB = CB$.

D. Semirrecta $SemAB = \overrightarrow{AB} - \{A\}$.

D. Semiplano Dada recta m y plano α tal que $m \subset \alpha$, m determina en α dos conjuntos δ_1 y δ_2 llamados semiplanos, tal que:
a) $\delta_1 \cap \delta_2 = \emptyset$.
b) $\delta_1 \cap m = \emptyset$.
c) $m \cap \delta_2 = \emptyset$.
d) $\delta_1 \cup \delta_2 \cup m = \alpha$.

D. Ángulo $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$ donde A, B, C no colineales.

D. de Interior de ángulo $int\angle ABC = \delta_{\overrightarrow{AB},C} \cap \delta_{\overrightarrow{BC},A}$. Nota: $\delta_{\overrightarrow{AB},C}$ es el semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{AB}$ en el cual está el punto C.

D. Ángulos congruentes $\angle ABC \cong \angle MNO$ si y solo si $m\angle ABC = m\angle MNO$.

D. Ángulos par lineal $\angle ABC$ y $\angle ABD$ par lineal si y solo si
a) $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$ son rayos opuestos y
b) $A \notin \overleftrightarrow{BD}$.

D. Ángulos adyacentes $\angle ABC$ y $\angle DBC$ adyacentes si y solo si $D \in \delta_{\overrightarrow{BC},\sim A}$.

D. Rectas perpendiculares $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ si y solo si $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{X\}$ y$\angle CXA$ recto

D. Triángulo $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ donde A, B, C no colineales.

D. Congruencia de triángulos $\Delta ABC \cong \Delta MNO$ si y solo si $\angle A \cong \angle M$, $\angle B \cong \angle N, \angle C \cong \angle O$, $\overline{AB} \cong \overline{MN}$, $\overline{BC} \cong \overline{NO}$, y $\overline{AC} \cong \overline{MO}$

D. Mediatriz La mediatriz del $\overline{AB}$, $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$, es el conjunto de puntos del plano que equidistan de A y B. $\mathcal{M}_{\overline{AB}} = \{X \mid AX = XB, \text{donde } X, A, B \text{ coplanares}, \}$.

D. Altura de un triangulo $\overline{AK}$ es altura del ΔABC si y solo si:
a) $\overleftrightarrow{AK} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{K\}$.
b) $\overleftrightarrow{AK} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

D. Recta paralela Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se intersecan.

D. Circunferencia Todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo en el mismo plano.

D. Centro Punto fijo de la circunferencia.

D. Radio Distancia constante entre el centro y un punto de la circunferencia.

D. El **espacio** es el conjunto de todos los puntos.

D. cuadrilátero plegado Dados cuatro puntos no coplanares tales que cada punto es extremo de exactamente dos segmentos. Entonces la unión de los segmentos determinados por los cuatro puntos es un **cuadrilátero plegado**.

D. Esfera Dado un punto P, un $r \in \mathbb{R}^+$, entonces el conjunto de puntos del espacio que equidista r unidades en P se llama esfera. **Notación**: $\circledast P_r$.

D. Recta perpendicular a un plano Una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas del plano, que contienen al punto de intersección de la recta y el plano.

D. El **conjunto/plano mediador** de un segmento es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento.

D. Rectas alabeadas. Dos rectas son alabeadas si no se intersecan y no son coplanares.

Teoremas

T. Recta – Dos puntos Dada la recta m, existen puntos A y B en ella diferentes.

T. Recta – Infinitos puntos Dada la recta m, existen infinitos puntos en ella diferentes.

T. Punto entre Dados puntos A y B diferentes, existen un punto C tal que $A - C - B$.

T. Punto al lado Dados puntos A y B diferentes existen un punto C tal que $A - B - C$.

T. Recta – Rayo – Segmento
- Dado el $\overline{AB}$, se tiene entonces el $\overrightarrow{AB}$ y viceversa.
- Dado el $\overline{AB}$, se tiene entonces el $\overleftrightarrow{AB}$ y viceversa.
- Dado el $\overleftrightarrow{AB}$, se tiene entonces el $\overrightarrow{AB}$ y viceversa.

T. Existencia rayo opuesto Dado el $\overrightarrow{AB}$ entonces existe el $\overrightarrow{AD}$ opuesto a él.

T. Existencia del punto medio Dados los puntos A y B diferentes existe un único punto C tal que C es punto medio del $\overline{AB}$.

T. Localización de puntos Dado $\overrightarrow{AB}$ y $x > 0$. Existe un único punto $D \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AD = x$.

T. Punto – Infinitas rectas Dado un punto A en un plano β entonces existen infinitas rectas en β que contienen al punto A.

T. Recta, punto – Plano Dada una recta y un punto que no pertenece a la recta, entonces existe un único plano que los contiene.

T. Dos Rectas – Plano Dadas dos rectas diferentes. Si las rectas se intersecan entonces existe un único plano que las contiene.

T. Intersección de rectas Si dos rectas diferentes se intersecan, entonces su intersección es un único punto.

T. Axioma de Pash Dados δ_1, δ_2 semiplanos determinados por m en plano α y los puntos $A, B, C \in$**T. Ángulo coplanar** Dado $\angle ABC$ entonces existe un único plano α tal que $\angle ABC \subset \alpha$.

T. Construcción de ángulos Dado $\overrightarrow{AB}$ y $K \notin \overleftrightarrow{AB}$, $x \in \mathbb{R}$ $(0 < x < 180)$ entonces existe un único $\overrightarrow{AC}$ tal que $C \in \delta_{\overrightarrow{AB},K}$ y $m\angle BAC = x$.

T. Existencia perpendicular punto interior Dados recta l y plano α, $l \subset \alpha$ y un punto $A \in l$ entonces existe una única recta m en α tal que $m \perp l$ por A.

T. Existencia perpendicular punto externo Dados recta l y plano α y un punto $A \notin l$ entonces existe una única recta m en α tal que $m \perp l$ por A.

T. Par lineal – Congruentes Si $\angle ABC$ y $\angle ABD$ par lineal con $\angle ABC \cong \angle ABD$ entonces $\angle ABC$ y $\angle ABD$ rectos.

T. Mediatriz $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$ es la recta perpendicular al $\overline{AB}$ por el punto medio.

T. Existencia mediatriz Dado el $\overline{AB}$ existe una única $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$.

T. ALA Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\angle A \cong \angle M$, $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\angle B \cong \angle N$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

T. LLL Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\overline{BC} \cong \overline{NO}$ y $\overline{AC} \cong \overline{MO}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

T. AAL Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\angle A \cong \angle M$, $\overline{BC} \cong \overline{NO}$ y $\angle B \cong \angle N$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

T. Cateto – Hipotenusa Dados ΔABC y ΔMNO rectángulos con $\angle B$ y $\angle N$ rectos. Si $\overline{AB} \cong \overline{MN}$, $\overline{AC} \cong \overline{OM}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

T. 180 Si ΔABC entonces $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$.

T. Plano - infinitos puntos Dado plano α, existen infinitos puntos en él no colineales.

T. Existencia circunferencia Dado el plano α, entonces existe una circunferencia en él.

T. Circunferencia – Infinitos puntos Si $\odot P_x$, entonces existen infinitos puntos en ella.

T. Punto entre dos puntos Dado un punto P en una recta m entonces existen dos puntos Y, Z tal que $Y - P - Z$.

T. Ángulo inscrito en semicircunferencia Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

T. Puntos no coplanares Si cuatro puntos son no coplanares, entonces ningún trío de ellos son colineales.

T. Punto - infinitas rectas (ε) Dado un punto, hay infinitas rectas en el espacio que lo contienen.

T. Existencia esfera Las esferas existen.

T. Intersección de planos Si dos planos se intersecan, la intersección es una recta.

T. Punto en plano Dado un punto, existen infinitos planos que lo contienen.

T. Recta en plano Dada una recta existen infinitos planos que la contienen.

T. Fundamental de la perpendicularidad Si una recta m interseca al plano α y m es perpendicular a dos rectas l_1 y l_2 contenidas en α, entonces m es perpendicular al plano.

T. Interestancia – equidistancia en el espacio Sean A, B, X, T puntos no coplanares tales que T y X equidistan de A y B. Sea S un punto tal que $X - S - T$ entonces S equidista de A y B.

T. Recta-plano perpendicular punto interno Dada una recta y un punto en ella, existe un plano perpendicular a la recta por ese punto.

T. Plano-recta perpendicular punto interno Dado un plano y un punto de este, existe una recta perpendicular al plano por ese punto.

T. Recta-plano perpendicular punto externo Dado una recta y un punto externo a ella, existe un plano perpendicular a la recta que contiene el punto dado

T. Plano-recta perpendicular punto externo Dado un plano y un punto externo a él, existe una recta perpendicular al plano que contiene al punto dado.

T. Plano mediador: el conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$) es igual al plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$

T. Existencia conjunto/plano mediador: Dado un segmento existe el plano mediador de este.

T. Perpendiculares a plano - paralelas. Si dos rectas son perpendiculares a un plano, entonces son paralelas.