UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA. UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Tesis para optar al grado de Doctor en Educación Matemática

Tesista: Marco Antonio Rosales Riady

Profesor Tutor: Dra. Ismenia Guzmán Retamal

Enero, 2017

Santiago-Chile

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA. UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Tesis para optar al grado de Doctor en Educación Matemática

Tesista: Marco Antonio Rosales Riady

Profesor Tutor: Dra. Ismenia Guzmán Retamal

Enero, 2017

Santiago-Chile

AUTORIZACIÓN PARA LA REPRODUCCIÓN DE LA TESIS

(SELECCIONE UNA OPCIÓN)

Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.

FECHA-----------------------

FIRMA

DIRECCIÓN

E-MAIL - TELÉFONO

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica que acredita al trabajo y a su autor.

FECHA-----------------------

FIRMA

DIRECCIÓN

E-MAIL – TELÉFONO

AGRADECIMIENTOS

Hoy al concluir mis estudios de Doctorado quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que me apoyaron en esta magna tarea.

Primero a Dios, quien me proveyó del Espíritu Santo, para fortalecerme en especial en aquellos momentos de flaqueza.

A mi esposa Rosita, quien siempre me ha incentivado a lograr todas aquellas metas que me he propuesto, y de igual manera a mis hijos Marco Antonio, Sebastián Gustavo y Francisco Javier.

Una especial mención para mi Maestra y Directora de esta tesis, la Dra. Ismenia Guzmán Retamal, quien con su inmensa sabiduría me supo guiar, orientar, dar sugerencias, entregar continuas enseñanzas, y estar siempre disponible para atenderme pacientemente.

A mis profesores y compañeros del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos.

A mi institución, la Universidad del Bío-Bío, y a mis estudiantes, protagonistas de esta Tesis.

Todo mi trabajo y esfuerzo se lo dedico a mi familia.

Tabla de Contenido

	INTRODUCCIÓN	**1**
	CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	**5**
1.1.	Ámbito del estudio de la investigación	6
1.2.	Antecedentes	7
1.2.1.	Investigaciones afines sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría	9
1.2.2.	Investigaciones sobre formación de profesores de educación básica	14
1.3.	Formulación del problema y preguntas de investigación	18
1.4.	Hipótesis	21
1.5.	Objetivos	21
1.6.	Relevancia del estudio	22
	CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO	**24**
2.1.	Marco teórico para el estudio	25
2.1.1.	De la Teoría de Situaciones Didácticas del Dr. G. Brousseau	25
2.1.2.	De los Paradigmas Geométricos de Gonseth-Kusniak-Houdement	26
2.1.3.	De los Aprendizajes Intelectuales o las Actividades Cognitivas en el Aprendizaje de la Geometría del Dr. R. Duval	27

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA INVESTIGACIÓN 30

3.1.	La ingeniería didáctica como metodología de investigación	31
3.2.	Análisis preliminar	31
3.2.1.	Análisis epistemológico	31
3.2.2.	El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.	
3.2.2.1.	La importancia de la geometría en la enseñanza	49
3.2.2.2.	El currículum escolar	49
3.2.2.3.	Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación básica	52
3.2.2.4.	En torno a la enseñanza de la geometría escolar en educación básica, posturas de algunos autores e investigadores	54
3.2.2.5.	El mapa de progreso de geometría	57
3.2.2.6.	Los procesadores geométricos	59
3.2.2.7.	La formación de profesores de educación básica en la Universidad del Bío-Bío y la geometría	60
3.2.2.8.	Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Lenguaje y Comunicación o Educación Matemática	63
3.2.2.9.	Estándares pedagógico-disciplinares de desempeño	64
3.2.2.10.	El análisis de las concepciones de los estudiantes.	66
3.2.2.11.	Análisis de textos de enseñanza	67
3.2.3.	Especificación del campo de aplicación de la ingeniería	77
3.3.	Concepción y análisis a priori	83
3.3.1.	La propuesta	84
3.3.2.	Diseño y análisis a priori.	87
3.4.	Experimentación	118

3.5.	Análisis a posteriori	120
3.5.1.	Análisis a posteriori. Primera etapa: trabajo a lápiz y papel.	120
3.5.2.	Confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. (Primera etapa)	186
3.5.3.	Análisis a posteriori. Segunda etapa: trabajo con tecnología.	194
3.5.4.	Confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. (Segunda etapa)	162
3.5.5.	Análisis de entrevistas.	265
	CAPÍTULO IV: CONCLUSIONES	**272**
4.1.	conclusiones	273
4.2.	Alcances de la investigación	277
4.3.	limitaciones del estudio	277
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	**278**
	ANEXOS	**283**

Resumen

Esta investigación busca diseñar una Ingeniería Didáctica, cuyo fin es remediar la debilidad de los conocimientos geométricos presentados por estudiantes en formación inicial docente, de modo que tengan una sólida formación en el área para enfrentar su labor de profesor en Educación Básica. Para ello, se optó por la resolución de problemas como estrategia de enseñanza. Por eso, las actividades propuestas refieren a los conocimientos disciplinares que ellos necesitan movilizar para enfrentar problemas de construcción con utilización de instrumentos físicos, digitales e intelectuales. La investigación identifica las operaciones cognitivas que ponen en juego y los paradigmas geométricos en que se sitúan para validar sus producciones. El estudio se apoya en la Teoría de Situaciones de Brousseau, en los Aprendizajes Intelectuales de Duval, y en los Paradigmas Geométricos de Gonseth-Houdement-Kuzniak. La metodología de investigación es la Ingeniería Didáctica, de enfoque cualitativo con estudio de casos. Se trabajó una ficha de con seis actividades de tres o cuatro tareas cada una en dos sesiones e individualmente por ocho estudiantes. Utilizaron instrumentos para la construcción en la primera sesión y un procesador geométrico en la segunda. Entre los resultados, algunas de las respuestas a las tareas estaban condicionadas por la precisión con que representaban la configuración solicitada; dificultad superada al usar el procesador. Se ubicaban en la geometría física para verificar o probar una propiedad. Evocaban sus conocimientos previos al poner en juego las definiciones, propiedades y teoremas. Consideran el uso del procesador como una instancia para validar y visualizar propiedades. En cuanto a los procesos cognitivos, muestran diferentes niveles de razonamiento, privilegiando el discurso natural, aunque deficientemente.
Palabras clave: Formación docente, operaciones cognitivas, paradigma geométrico, construcción geométrica.

Abstract

This research seeks to design a Didactic Engineering, whose purpose is to remedy the weakness of the geometric knowledge presented by students in initial teacher training, so that they have a solid formation in the area to face their work as teacher in Basic Education. For this, it was decided to solve problems as a teaching strategy. Therefore, the proposed activities refer to the disciplinary knowledge that they need to mobilize to deal with construction problems using physical, digital and intellectual instruments. The research identifies the cognitive operations that they put into play and the geometric paradigms in which they are placed to validate their productions. The study is based on Brousseau's Theory of Situations, Duval's Intellectual Learning, and the Gonseth-Houdement-Kuzniak Geometric Paradigms. The methodology of investigation is Didactic Engineering, of qualitative approach with case study. A token was worked out with six activities of three or four tasks each in two sessions and individually by eight students. They used construction tools in the first session and a geometric processor in the second. Among the results, some of the answers to the tasks were conditioned by the precision with which they represented the requested configuration; Difficulty overcomes when using the processor. They were located in physical geometry to verify or prove a property. They evoked their prior knowledge by putting definitions, properties and theorems into play. They consider the use of the processor as an instance to validate and visualize properties. As for the cognitive processes, they show different levels of reasoning, privileging the natural discourse, although poorly.

Key words: Teacher training, cognitive operations, geometric paradigm, geometric construction.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación se inscribe en la línea de la geometría y la formación de profesores. Es conocida la debilidad en esta línea que presentan los futuros docentes en educación básica, y que se ha observado en distintos estudios nacionales relacionados con la Evaluación INICIA, e internacionales como Teacher Education Study in Mathematic (TEDS-M), lo que se ha comprobado en estudios preliminares con estudiantes de la carrera de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío (Rosales y Díaz, RELME 26-2012; Rosales, SOCHIEM USS-2012; Rosales, RELME 27-2013).

Las investigaciones que preceden a ésta estuvieron centradas en el estudio de las percepciones y concepciones preconcebidas de estos estudiantes y de las dificultades que se les presentan al abordar problemas geométricos, en particular de construcción en geometría plana (Rosales y Guzmán, 2016).

Cuando los estudiantes resolvieron los problemas propuestos en esas investigaciones, Se encontraron en sus producciones las siguientes dificultades de orden matemático y cognitivo: falta de descripción de los pasos de construcción de las tareas propuestas,
no respetando el orden de construcción, falta de validación de sus razonamientos matemáticos, y falta de argumentación de los procedimientos realizados. La causa de esto es la debilidad de sus aprendizajes geométricos.

Lo anterior plantea una interrogante en relación al problema de superación de esas dificultades: ¿con qué estrategias se podría ayudar a sobrepasarlas? Esta cuestión relacionada, desde nuestra óptica, con los tipos de problemas que se les propone en los procesos de formación. Por esto, la idea es que al cambiar la presentación de los problemas, los estudiantes podrán generen las condiciones para desarrollar las habilidades y conocimientos necesarios para abordar la tarea de profesor en esta área y en el nivel de desempeño.

En este contexto esta investigación busca diseñar una Ingeniería Didáctica, cuyo fin es remediar la debilidad de los conocimientos geométricos presentados por estudiantes en formación inicial docente, de modo que tengan una sólida formación en el área para enfrentar su labor de profesor en Educación Básica.

Desde esta perspectiva, la propuesta está focalizada en el aprendizaje de la geometría a través de la resolución de problemas geométricos cuyas características son: tienen enunciados no rutinarios, son abordables con instrumentos de construcción geométrica, tanto tradicionales como la regla y el compás, como digitales como los procesadores geométricos, y permiten manifestar habilidades argumentativas matemáticas. De esta manera, se puede remediar la falta de conocimientos geométricos.

Para realizar esta tarea, se han establecido los siguientes objetivos específicos: identificar las estrategias actuales, los procesos de representación y las relaciones geométricas que los estudiantes están poniendo en juego al resolver problemas geométricos; detectar pistas para fortalecer los diseños actuales de enseñanza de la geometría; y establecer el rol del uso los procesadores geométricos en beneficio del aprendizaje de la geometría de estudiantes en formación inicial.

La metodología de investigación utilizada es la ingeniería didáctica, que se caracteriza por: ser un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en el aula (es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza), por el registro de los estudios de caso y por la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

De esta manera, esta tesis pretende aportar al aprendizaje significativo de los estudiantes de profesorado a través de la metodología de la Ingeniería Didáctica, que pone en juego actividades que permiten a los estudiantes apropiarse de conocimientos y saberes geométricos, respetando las operaciones cognitivas que privilegian el encuentro con estos saberes. En otras palabras, la novedad y relevancia de esta propuesta reside en que haga emerger en los futuros profesores el sentido y la estructura de los conceptos geométricos a nivel de enseñanza básica.

La información contenida en el presente trabajo se estructura en siete capítulos que resumimos a continuación:

En el Capítulo I se expone la motivación y ubicación del problema de investigación, y se revisa la literatura científica. Se formula el problema, la pregunta de investigación, el objetivo y los específicos, y la hipótesis. Para terminar se indica la relevancia de esta investigación.

El Capítulo II describe el marco teórico de esta investigación, que está constituido por la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, los Aprendizajes Intelectuales de Raymond Duval, y los Paradigmas Geométricos trabajados en el Proyecto Ecos-Conicyt por Kuzniak, Guzmán et al. (2006).

El Capítulo III presenta el enfoque metodológico utilizado en la investigación, específicamente la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación. Es el capítulo más extenso, ya que en él se van presentando los análisis establecidos en cada una de sus fases. Es una metodología cualitativa con validez interna, producto de la contrastación de los análisis a priori y a posteriori, en torno a la información correspondiente a los ocho estudiantes participantes en la experiencia didáctica

En el Capítulo IV, se exponen las conclusiones organizadas en torno a los objetivos de la investigación, con las aportaciones más relevantes y se indican perspectivas de investigación que derivan del trabajo así como algunas limitaciones del estudio.

Por último, se finaliza la presentación de la investigación con las referencias bibliográficas utilizadas en la misma, y los anexos.

CAPÍTULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Ámbito del estudio de la investigación

La importancia de en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, en la formación de profesores de las carreras vinculadas a la educación básica y educación media impartidas por la Universidad del Bío-Bío. Abarca una formación disciplinar, didáctica y pedagógica, en cada una de las áreas prescritas en los programas de estudios oficiales y, particularmente, en el área de la geometría. Esta área es tan relevante, tanto desde el punto de vista de la docencia como desde la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

En los últimos años, el área de la geometría se ha potenciado al ser separada en dos partes para la educación básica: geometría propiamente tal, y en medida. Así se establece una importancia singular, ya que ahora se podrá potenciar su carácter formativo del pensamiento de los escolares; más aún al incorporar las tecnologías de la información y comunicaciones (TIC), a través del uso de procesadores geométricos.

Se valora esta iniciativa, ya que la Universidad tiene que replantearse su carácter formador, entregando nuevas herramientas a los futuros profesores para responder a estos nuevos desafíos del sistema escolar. De esta manera, esta investigación está centrada en la formación de profesores que se desempañaran en la asignatura de matemática en educación básica, e impartirán docencia en geometría. Por esto, se propone el diseño de una secuencia didáctica sobre estrategias de resolución de problemas que ponen en juego figuras fundamentales de la geometría plana, a través de una ingeniería didáctica.

1.2. Antecedentes

En la actualidad, existe un creciente interés por la problemática planteada en torno a la formación de profesores de educación básica, debido en parte al fracaso escolar, señalado por diferentes mediciones nacionales e internacionales. Esto ha dejado de manifiesto una insatisfacción, a pesar de que en los últimos años ha mejorado, pero no lo suficiente.

Como respuesta a esta situación, en forma paralela se estableció una serie de iniciativas ministeriales e institucionales relacionadas con la Formación Inicial Docente, las cuales se vieron concretadas en la formulación de la nueva Ley General de Educación (LGE), que establece parámetros como los ciclos de formación escolar y Bases Curriculares, los cuales debieron ser considerados por las instituciones formadoras de profesores.

Así se dio comienzo a una serie de proyectos con financiamiento estatal (MECESUP, MECESUP2, y Convenios de Desempeño) con el objeto de mejorar la “calidad” en la formación de los futuros profesores, tanto para Educación Básica como para Educación Media. Esto involucraba perfeccionamiento de las dotaciones académicas y renovaciones curriculares en cada una de las carreras de pedagogía, en particular en las universidades que conforman el CRUCH. Posterior a estas iniciativas siguieron otras, relacionadas con la implementación de un sistema de medición de la calidad de la formación, denominado Evaluación Inicia, la que al ir siendo implementada fue corroborando una formación deficitaria. Hoy, dicha prueba ha derivado en la Evaluación Nacional Diagnóstica para la Formación Inicial Docente, la que se aplicó en diciembre de 2016, a los estudiantes que cursan el penúltimo año de formación. Dicha evaluación, considera los Estándares Disciplinarios y Pedagógicos para egresados de carreras pedagógicas, según su especialidad. En el caso de la formación en Educación Básica, considera los ejes curriculares de a) Lenguaje y Comunicación, b) Matemática, c) Historia, Geografía y Ciencias Sociales, y d) Ciencias Naturales.

Esta articulación, hoy en día aún en tránsito, ha permitido a las instituciones formadoras hacer un análisis de sus ofertas académicas, llegando a discontinuar o adecuar programas de formación, de modo de satisfacer los requerimientos actuales del sistema escolar vigente, y considerando nuevos requisitos de ingreso y durabilidad de las carreras, de acuerdo a nuevas normativas ministeriales.

Algunas universidades han implementado carreras de Pedagogía en Educación Básica con Especialidades o con Menciones, las que tienen el propósito de formar profesionales altamente calificados, de modo de mejorar los aprendizajes de niños, niñas y jóvenes de nuestro país, los cuales han de ser evidenciados en futuras mediciones.

En este marco de especialización, la Universidad del Bío-Bío implementó iniciativas curriculares con énfasis en lo disciplinar, didáctico y pedagógico. Su desarrollo curricular disciplinar y didáctico en la especialidad Educación Matemática se ha focalizado en cuatro ejes: Números, Geometría, Álgebra, y Estadística y Probabilidades. Cada uno de estos ejes considera su didáctica específica. De esta manera, el eje Geometría, termina con Didáctica de la Geometría.

Por otro lado, es bien sabido que los profesores tienden a reproducir los mismos modelos que ellos experimentaron cuando fueron estudiantes, a pesar de que durante su formación hayan sido expuestos a diferentes puntos de vista. Entonces, cabe preguntarse ¿cómo es posible motivar la necesidad de cambios en la perspectiva de enseñanza disciplinar, tanto del punto de vista de los contenidos como el metodológico?

Dar respuesta a esta pregunta resulta difícil, en cuanto, a intervenir un modelo preexistente en el joven que ingresa a estudiar pedagogía, por lo cual se requiere de un trabajo focalizado que evidencie la necesidad de intervención. Desde esta perspectiva, es apropiado poner la debida atención a las principales variables que intervienen en un proceso coherente de enseñanza - aprendizaje. Inicialmente se podría focalizar en uno de los ejes de formación, el que es menos abordado por los profesores en ejercicio, la Geometría.

Las carencias disciplinares de los estudiantes en torno al eje Geometría, el fortalecimiento del eje respecto al nuevo currículum, tanto escolar (Bases Curriculares) como de formación inicial docente (Estándares Pedagógicos y Disciplinares), y el sistema de medición (Evaluación Nacional Diagnóstica para la Formación Inicial Docente) hacen plausible el investigar el proceso de aprendizaje de la geometría en los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica de la Universidad del Bío-Bío.

1.2.1. Investigaciones afines sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría

Para abordar este apartado, es necesario dividir el contexto de las investigaciones desde la perspectiva del interés del investigador. Inicialmente, como fuente primaria, está su interés por conocer cómo aprenden geometría sus estudiantes; así, la primera mirada se centra en la forma en que ellos se desempeñan en las tareas que se les presentan y en la forma en que utilizan sus conocimientos previos en la resolución de problemas geométricos. A partir de esta mirada, se recurre a fuentes secundarias, que ponen la base de los antecedentes que sustentan esta investigación. A continuación, se describen algunos de estas.

La primera fuente de información fue el Documento de Discusión del Estudio de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI, 1995), “Perspectivas de la Enseñanza de la Geometría para el Siglo XXI”[1], elaborado por Vinicio Villani. El documento establece que la enseñanza de la geometría no es fácil, y que se debe aprovechar y aplicar nuevos métodos de enseñanza. También indica que aún persisten fuertes desacuerdos acerca de los propósitos, contenidos y métodos para la enseñanza de la geometría en los diversos niveles, desde la escuela primaria hasta la universidad. En algunos casos la geometría está completamente ausente en sus currículos matemáticos. Por otro lado, se indica que las preguntas de las evaluaciones tienden a ser confinadas a algunos "hechos" elementales sobre figuras simples y sus propiedades. Además, establece que se debiese estudiar desde diversas dimensiones: social, cognitiva, epistemológica y didáctica. En cuanto a las tecnologías, indica que las computadoras también pueden ser usadas para obtener un entendimiento más profundo de las estructuras geométricas, gracias al software específicamente diseñado para fines didácticos.

La investigación en el campo del aprendizaje de la geometría (Herscowitz y Vinner (1987), Duval (1998), de Villiers (1999), Moreno (2002), en Castiblanco et al. (2004)) ha llevado a reconocer que el aprendizaje de la geometría es un

[1] Traducción de Víctor Hernández y Matha Villalba, PMME-UNISON, 2001.

proceso complejo, tal como se había mencionado en el estudio de la ICMI (1995), y como además se había corroborado en la ICME-2008, en México.

En su trabajo titulado “Algunos desarrollos en la enseñanza de la geometría”, De Villiers (1999) describe sintéticamente cuatro de los cinco niveles de pensamiento en el desarrollo de la comprensión geométrica de los alumnos, establecidos en la teoría de Van Hiele, e indica anecdóticamente que los esposos Van Hiele atribuían el fracaso del currículo tradicional de geometría al hecho de que el currículo se presentaba a un nivel más alto del de los alumnos. En este contexto el autor presenta una serie de investigaciones rusas en la enseñanza de la geometría; muestra que el currículo ruso en geometría consiste en dos fases: la fase intuitiva de 1° a 5° grado, y la fase sistemática desde 6° grado. Indica que los investigadores rusos buscaban establecer por qué los escolares presentaban poco progreso en geometría; las investigaciones rusas, que se apoyaron en la teoría de Van Hiele, concluyen que antes de comenzar la fase de sistematización se requiere por lo menos el nivel 3 de comprensión ya que solo entre un 10 y 15% se encontraban en el nivel 2. Van Hiele reporta además, que los rusos diseñaron un currículo experimental de geometría muy exitoso basado en su teoría, y que descubrieron que un factor importante era la secuencia y desarrollo continuo de conceptos desde el grado 1.

Moreno (2002), en su trabajo “Cognición y Computación: el caso de la geometría y la visualización”, da cuenta de cómo va evolucionando la enseñanza de la geometría desde la indagación sobre cómo entendían los estudiantes los conceptos matemáticos, pasando por las formas de conocimiento que desarrollan éstos y que no coinciden con los que se les enseña, hasta llegar a delinear su objeto de estudio y con ello las metodologías de investigación. En ese contexto, plantea estudiar diversas situaciones de la constitución de la geometría, y posteriormente describe una estrategia de reconstrucción de este conocimiento usando la computadora como un instrumento para lograr una experiencia cognitiva necesaria para acceder a la comprensión de estos conocimientos. Indica que los entornos informáticos promueven una transformación a nivel epistemológico de la experiencia matemática del estudiante. Por ejemplo, en geometría el programa Cabri-Géomètre permite manipular directamente las figuras construidas mediante el arrastre de ciertas partes de ellas, sin alterar las relaciones estructurales entre las partes constitutivas de éstas. En cuanto a la visualización, sostiene que ésta y las representaciones externas permiten validar los enunciados matemáticos. Además indica que la manipulación directa de los objetos geométricos hace posible la experimentación en dominios que anteriormente eran inaccesibles para el estudiante. Concluye que para el estudiante, su conocimiento queda marcado por la relación dialéctica entre percepción y conceptualización durante la interacción con la interface del sistema.

En cuanto a Duval (2008), presenta un apartado titulado "La geometría desde un punto de vista cognitivo"[2], en el Estudio ICMI "Perspectivas de la Enseñanza de la Geometría para el Siglo XXI" editado por Mammana y Villani. En el documento el autor indica que la geometría involucra tres procesos cognitivos: de visualización, de construcción y de razonamiento. Presenta además, algunos aspectos que dan cuenta cómo estos tres procesos deben ser desarrollados por separado, e indica que existe diferenciación entre los procesos de visualización y los de razonamiento, y que la coordinación entre estas tres clases de procesos ocurre después de dicha diferenciación. En la presentación de su análisis caracteriza las operaciones de aprehensiones relacionadas con la visualización y el razonamiento, como lo son la aprehensión perceptual y

[2] Traducción de Víctor Hernández y Matha Villalba, PMME-UNISON, 2001.

aprehensión discursiva. Analiza cómo trabaja la visión en la solución de problemas geométricos, caracterizando la aprehensión operativa. También aborda el razonamiento en geometría, distinguiendo tres procesos cognitivos: puramente configural (como aprehensión operativa), discursivo natural (comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación, argumentación), y discursivo teórico (realizado a través de la deducción). Plantea que: (a) No hay una correspondencia significativa entre el desarrollo del pensamiento y la construcción de cualquier conocimiento disciplinar, y consecuentemente entre un nivel de pensamiento y un nivel de conocimiento. (b) No existe una jerarquía de desarrollo entre las diferentes clases de actividades cognitivas: visualización, razonamiento discursivo natural, razonamiento deductivo teórico, pruebas axiomáticas formales, procesos analíticos o sintéticos. (c) Desde un punto de vista cognitivo el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje son logrados a través de una interiorización de varias representaciones semióticas. Por último, establece que el desarrollo cognitivo implica una diferenciación de los primeros registros semióticos, el lenguaje natural y la representación icónica de formas, y su coordinación.

Además, se ha consultado el trabajo realizado por Aravena y Caamaño (2013), en que se analiza el nivel de razonamiento geométrico que presentan los alumnos de establecimientos municipalizados de la Región del Maule con altos índices de vulnerabilidad. En este trabajo se implementó un diagnóstico considerando las temáticas de 6° Año Básico hasta 2° Año de Enseñanza Media, tomando como base el modelo de los Van Hiele y los atributos distintivos en los procesos de razonamiento propuesto por Gutiérrez y Jaime (1998). La metodología fue de corte cuantitativa. Los resultados a que llegaron los investigadores dejan en evidencia que el alumnado se encuentra en el nivel más básico del razonamiento geométrico y con un grado de adquisición bajo respecto de los procesos de razonamiento.

1.2.2. Investigaciones sobre formación de profesores de educación básica

En el contexto de la formulación del problema, es necesario abordar la investigación también desde la perspectiva de la formación inicial docente, pues el estudiante que ingresa a estudiar una carrera de pedagogía en educación básica se encuentra en una etapa de transición en torno a la actualización del currículum de formación. Esta mirada no solamente se focaliza en nuestro país, sino en la gran mayoría, a raíz de la globalización en que estamos inmersos. Los gobiernos tratan de satisfacer estándares que se establecen en las comunidades más avanzadas, incluso para pertenecer a ciertas agrupaciones y organismos internacionales, como es Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

Las políticas públicas han cambiado, y han propuesto diversas iniciativas y marcos regulatorios, que las entidades de educación superior deben considerar, particularmente las instituciones de formación inicial docente. En paralelo a esta situación, se han ido realizando diversas investigaciones en torno a la formación de profesores. Cisternas (2011) informa que este tipo de investigaciones en Chile se focalizan en problemas unidimensionales, es decir, donde la aproximación al fenómeno se realiza observando solo uno de los componentes involucrados en la formación. En el análisis bibliográfico de dicho estudio, da cuenta que diversas investigaciones son una crítica a la formación docente, y una de las razones que se esgrimen es "que la preparación de profesores articula débilmente la formación pedagógica y la formación en la especialidad; que el nivel de aprendizaje de los contenidos curriculares y la comprensión de la naturaleza teórico-práctica de la acción pedagógica resultan insuficientes; que las relaciones con el sistema educativo son aún incipientes y que pese a las mediciones externas (como era la prueba INICIA), no se ha avanzado en procedimientos internos confiables de monitoreo y evaluación a los programas de formación" (p 134).

En virtud de los antes señalado, es imperativo abordar una investigación de cómo los estudiantes de profesorado aprenden, tanto la disciplina como los aspectos pedagógicos y didácticos que involucran los procesos de enseñanza y aprendizaje, sin dejar de considerar el desarrollo cognitivo de los mismos.

Un primer acercamiento a estos antecedentes, lo aporta el trabajo doctoral de Tatiana Cisternas León (2011), quién establece que los focos más relevantes de investigación en la formación de profesores en nuestro país, previo análisis internacional, está en "(a) los sujetos , es decir, los distintos actores de la formación: futuros profesores, formadores y sus competencias, actitudes, representaciones; (b) los conocimientos profesionales, es decir, disciplinares, pedagógicos, didácticos, sociales: competencias y conocimientos a desarrollar, lugar en los programas, etc.; y (c) los dispositivos o procesos de formación, es decir, estrategias de formación, estructuras curriculares, modos de construcción de saberes, etc.". La información recabada para su estudio estuvo centrada en diversos criterios, como estudios difundidos y publicados, investigaciones financiadas por organismos que apoyan la investigación (Fondecyt, Fonide, CSE, CPEIP), Encuentros Nacionales de Investigadores en Educación, Universidades y otros. Clasificó las investigaciones según el número de investigadores; tipo de formación de profesores; según niveles educativos; según los componentes estudiados (actores, conocimientos profesionales y dispositivos). Establece que en las investigaciones predomina un interés por el estudiante de pedagogía en su proceso de formación inicial por sobre los egresados y el profesor en ejercicio.

Es relevante indicar que establece que las investigaciones "menos frecuentes son las investigaciones que seleccionan al estudiante de pedagogía para conocer sus procesos de aprendizaje o la forma en que se convierte en profesor". En este contexto, se pretendió que la presente investigación sea un aporte.

Otra de las investigaciones importantes en el contexto de la formación de profesores y geometría se refiere al estudio TEDS-M (Teacher Education Study – Mathematics) realizado entre 2006 y 2009, cuyos resultados nacionales indican que la formación en Matemática de docentes que se desempeñarán de 1° a 8° básico es insatisfactoria. Chile, único país latinoamericano participante aparece por debajo de la media. En cuanto al currículo de formación en Matemáticas, indica que "los programas de estudio cubren principalmente tópicos de las Matemáticas escolares correspondientes al primer ciclo básico en Números y, en menor escala, tópicos de Geometría y Álgebra" (Ávalos, 2010, pág. 13). Por otro lado, los futuros profesores, "Demuestran mejor conocimiento en los tópicos referidos a Números y Datos y Azar, que con respecto a tópicos de Geometría y Álgebra" (Ibíd., pág. 14). Entre los resultados más preocupantes para el nivel primario estuvieron los relacionados con los desempeños en geometría, pues solo el 23,4% de los 657 futuros profesores de ese tiempo respondieron correctamente los 12 ítems considerados en el tópico (íbid., pág. 92). Incluso, más bajo estuvieron los resultados de los 757 futuros profesores del nivel secundario, ya que su desempeño en geometría alcanzó solo el 20,5 % de respuestas correctas en igual número de ítems. En resumen, si bien este estudio abarca cuatro ejes temáticos en lo disciplinar, el eje de Geometría era el más bajo entre los futuros profesores de ese entonces.

Otra de las fuentes consideradas se refiere a la Evaluación INICIA, cuyo propósito es verificar la calidad de la Formación Inicial Docente. Los resultados de la prueba de matemática de los egresados generalistas de 2008 indicaban que el promedio de respuestas correctas era menos del 50%, y de los egresados con mención en matemática, era de menos de 30% en geometría, con un 39% global, evidenciando los aprendizajes deficientes en este último eje temático, pese a que los egresados con mención tienen una preparación mayor en la especialidad. Los resultados del 2009 indicaban que el promedio de respuestas correctas era en ese entonces de un 33% global en estos egresados, lo que agrava más esta situación. No obstante lo anterior, los resultados de la prueba del 2010, indican que el porcentaje de respuestas correctas es del 42% global, para este tipo de egresados, siendo el más bajo de todas las menciones. Además, el informe ministerial para esta prueba indica que los resultados son preocupantes, porque: (a) la mayoría de los egresados de Pedagogía Básica no tiene los conocimientos requeridos para un buen desempeño profesional, (b) existe concordancia con el SIMCE (evaluación externa que mide la calidad de la educación en los escolares) y estudios internacionales como TEDS-M (los resultados más pobres son en conocimientos de Matemática), y (c) quienes ingresaron a pedagogía con más alta PSU tienen mejores resultados en INICIA. En una nota periodística de la época, el ministro de Educación de entonces indicaba que los resultados de la prueba INICIA-2010 sugieren que la brecha de aprendizaje que se le exige superar a las escuelas, parece extenderse directamente a la enseñanza superior en la formación del profesorado; y en la prueba SIMCE-2010 la geometría es una de las áreas más débiles de nuestros niños, que también lo es para los jóvenes que egresan de pedagogía. (MINEDUC, 2010).

Otros trabajos de investigación consultados son los de Jiménez, J. (1997) y Barrantes y Blanco, (2005) en torno a problemas en el aprendizaje de la geometría que presentan los estudiantes de profesorado; éstos se refieren a dificultades en la identificación de conceptos geométricos, recuerdos limitados y vocabulario geométrico escaso. También señalan que en clases son preferidos la resolución de problemas clásicos con medidas y los ejercicios simples de identificación de características en figuras, aspectos que también persisten en nuestro país.

Tal como lo expresa el estudio ICMI, la geometría ha perdido progresivamente su posición formativa central en la enseñanza de las matemáticas de la mayoría de los países, y nuestro país no es la excepción. Por otro lado, investigaciones como las descritas anteriormente subrayan la necesidad de recuperar la enseñanza de los contenidos geométricos con el fin de ayudar a conocer mejor el espacio y crear situaciones problemáticas favorables para el aprendizaje de la matemática. La geometría bien abordada, por sobre otros tópicos de la matemática, propicia el desarrollo cognitivo de todos los estudiantes.

1.3. Formulación del problema y preguntas de investigación

Como se ha señalado anteriormente, evaluaciones estandarizadas nacionales e internacionales realizadas a escolares y a estudiantes de pedagogía han revelado que en clases de geometría la mayoría presenta dificultades ante situaciones problemáticas simples (Ávalos, 2010).

En el caso de las carreras de pedagogía relacionadas con la docencia en matemática y que son impartidas por la Universidad del Bío-Bío, las actividades geométricas que se presentan a los estudiantes habitualmente están relacionadas de manera directa con la visualización, la construcción y la demostración (argumentación), y aun así siguen presentando algunos problemas en la resolución de los problemas geométricos planteados.

Partiendo de la base de que en el segundo año de la carrera de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática el estudiante debe conocer objetos geométricos fundamentales y sus propiedades, ponerlas en juego en la construcción de configuraciones a mano alzada o usando instrumentos, como la regla y el compás, o algún procesador geométrico, no se ha podido superar las dificultades que emanan de la resolución de los problemas geométricos que se les presentan.

Entre las dificultades que se han detectado están aquellas relacionadas con: a) hallar condiciones para la existencia de un objeto, b) deducción de propiedades a partir de una configuración geométrica simple, c) verificación o demostración de una propiedad a partir de hipótesis.

En este contexto se considera esencial en la enseñanza de la geometría la concepción de Guzmán (2009), que define como actividades geométricas a aquellas que ofrecen diferentes tipos de tareas tales como: visualización, construcción y demostración; además de las exigencias cognitivas que deben ponerse en juego y en consecuencia las habilidades que se permiten desarrollar.

Para explicar lo anterior presentamos dos tareas planteadas en clases, las que dejaron en evidencia las dificultades ya mencionadas:

1. ¿Es posible construir un triángulo ABC rectángulo cuyo ángulo ABC tenga una amplitud de 60°? Explique y justifique.

2. En un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30 y 60 grados ¿Es posible relacionar un cateto con la hipotenusa? Si la respuesta es no, justifica, y si es afirmativa explica por escrito la o las propiedades que utilizas.

En la primera tarea todos los estudiantes visualizaron que faltaba el tercer ángulo, y rápidamente determinaron la medida, apoyándose en el teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo, o bien en que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, para afirmar que sí es posible construir el triángulo.

La segunda tarea no fue respondida por la mayoría de los estudiantes, que al parecer no recordaron que el cateto menor mide la mitad de la hipotenusa. Con esta información y el Teorema de Pitágoras, hubieran podido responder con éxito. También esta tarea se hubiera podido responder sólo con compás, trazando arcos de circunferencia.

Este ejemplo evidencia que los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática no reconocieron propiedades elementales ante situaciones sencillas y claves. En otros ejemplos presentan dificultades en la asignación de rótulos, tanto para identificar lados, ángulos, segmentos notables del triángulo u otras figuras geométricas; no disponen de los conocimientos previos que han estudiado y que deberían estar adquiridos, lo que les impide argumentar o fundamentar sus procedimientos y afirmaciones.

En consecuencia, este recorrido por las investigaciones estudiadas y las evidencias presentadas por los estudiantes de profesorado, dejan en evidencia grandes problemas en el aprendizaje de la geometría en los distintos niveles escolares. Entonces cabe preguntarse qué ocurre con las actividades que les son propuestas a los estudiantes durante las clases.

- ¿Son verdaderamente geométricas, o son actividades que focalizan solo cálculos de medidas angulares, de longitud, de perímetros y áreas, o reconocimiento y clasificación de figuras?

- ¿Qué estrategia metodológica permitiría favorecer y optimizar el proceso de aprendizaje de saberes en geometría en la formación inicial docente?

- ¿Qué estrategias permiten favorecer una formación didáctico-pedagógica en matemáticas y en particular en geometría?

- ¿Qué factores habría que considerar en el diseño de estrategias para la enseñanza de la geometría en la escuela básica distintas al modelo tradicional (definición, ejemplo, ejercicios)?

1.4. Hipótesis

Los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica, en el área de la geometría, presentan debilidades en sus conocimientos geométricos, los cuales pueden en alguna medida ser revertidos mediante el diseño de una Ingeniería Didáctica (ID), basada en la visualización y la construcción de los objetos de la geometría plana, que permita desarrollar el razonamiento argumentativo matemático de fondo de los estudiantes.

1.5. Objetivos

Objetivo General:

Diseñar una Ingeniería Didáctica (ID), cuyo fin es remediar la debilidad de los conocimientos geométricos presentados por estudiantes en formación inicial docente, de modo que tengan una sólida formación en el área de la geometría para enfrentar su labor de profesor en Educación Básica.

Objetivos Específicos:

- Identificar las estrategias actuales, los procesos de representación y las relaciones geométricas que los estudiantes están poniendo en juego al resolver problemas geométricos.

- Detectar pistas para fortalecer los diseños actuales de enseñanza de la geometría.

- Establecer el rol del uso los procesadores geométricos en beneficio del aprendizaje de la geometría de estudiantes en formación inicial.

1.6. Relevancia del estudio

Queda justificada por diversos documentos ministeriales. En las Bases Curriculares de la Educación Básica de Matemática (2012) se delimitan los tratamientos de la Geometría y la Medida, a pesar de que clásicamente se han tratado en conjunto y se ha menospreciado lo geométrico, al privilegiar un desarrollo algorítmico en los ámbitos aritmético y algebraico, por lo cual es necesario abordar la enseñanza de la geometría con una nueva mirada que involucre lo disciplinar y lo didáctico con diversos recursos como, en particular, el uso de tecnologías, con clara distinción entre lo “estático” y lo “dinámico” de los procesadores geométricos.

De igual manera, también es abordado por los Estándares Orientadores para los Egresados de Carreras de Pedagogía en Educación Básica (2011), lo que viene a corroborar la necesidad de implementar nuevas estrategias de la enseñanza de la geometría, el eje más descendido del currículum, especialmente en la formación de profesores de educación básica que se desempañarán en la asignatura de matemática, de modo que tengan una formación sólida disciplinar y didáctica.

De esta manera, esta tesis pretende aportar al aprendizaje significativo de los estudiantes de profesorado a través de la metodología de la Ingeniería Didáctica, que pone en juego actividades que permitan a los estudiantes apropiarse de conocimientos y saberes geométricos, respetando las operaciones cognitivas que privilegian el encuentro con estos saberes. En otras palabras, la novedad y relevancia de esta propuesta reside en que haga emerger en los futuros profesores el sentido y la estructura de los conceptos geométricos a nivel de enseñanza básica.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1. Marco teórico para el estudio

El marco teórico de esta investigación se apoya en la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau, y en los Paradigmas Geométricos de Gonseth, Houdement y Kuzniak, y es complementada con los Aprendizajes Intelectuales de Raymond Duval.

2.1.1. De la Teoría de Situaciones Didácticas del Dr. G. Brousseau

De la TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS de Brousseau, consideramos el modelo de gestión didáctica en clases que pone en práctica las situaciones de acción, formulación y validación, así como actividades centradas en los alumnos y los procesos de devolución e institucionalización a cargo de los profesores.

Respecto a los diferentes tipos de situaciones podemos decir que:

- Las situaciones de acción son aquellas en las que se genera una interacción entre los estudiantes y el problema situado en un medio. Esta fase involucra tanto aspectos cognitivos como cuestiones de índole práctica, ambos dirigidos a la solución de problemas que es preciso resolver en condiciones específicas y con recursos limitados.

- Las situaciones de formulación tiene por objetivo la comunicación de informaciones, entre estudiantes y los aportes del medio, sean cuestionamientos o apoyos. Concretar la solución exige al estudiante que explicite los conocimientos en un lenguaje que los demás puedan entender. Para ello se utilizan medios convencionales de representación que permiten la comunicación.
- Las situaciones de validación son aquellas en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. Es una fase de balance y representación de resultados, y de confrontación de procedimientos.

En cada una de estas situaciones, los profesores pueden pedir tareas específicas de acuerdo con los contratos didácticos preestablecidos.

Una de las tareas principales en el desarrollo de estas situaciones es el proceso de devolución consistente en respetar la actividad matemática de los estudiantes, planteándoles preguntas que no impidan la búsqueda de soluciones frente a las tareas propuestas.

Respecto al proceso de institucionalización, en éste se intenta que el conjunto de estudiantes de una clase asuma socialmente la significación establecida del saber que ha sido elaborado durante el desarrollo de las distintas situaciones trabajadas en la o las clases. En este proceso el profesor tiene que constatar lo que los estudiantes han aprendido o lo que tenían que aprender. Aceptando su responsabilidad en los resultados, y posteriormente actuando en consecuencia.

2.1.2. De los Paradigmas Geométricos de Gonseth-Kusniak-Houdement

Esta investigación también se apoya en la teoría de Gonseth, Houdement y Kuzniak, que considera tres paradigmas, los que se resumen a continuación:

- Geometría Natural o Física, Geometría I (GI): Sus objetos son físicos, concretos existentes en la realidad. Se representan por dibujos o figuras concretas. Se opera con material concreto, plantillas, pliegues, reglas, etc. La validación se realiza por: a) verificación mediante acciones y manipulación de instrumentos, y b) por medición. El razonamiento es el pragmático.
- Geometría Axiomática Natural o Geometría II (GII): (Geometría Euclidiana). Sus objetos son las figuras ideales (no concretas). Son representaciones de objetos de la realidad. Por ejemplo, una circunferencia es el modelo de una rueda de bicicleta. La validación de propiedades se realiza a través definiciones y teoremas (instrumentos teóricos).
- Geometría Axiomática Formal o Geometría III (GIII): Sus objetos son figuras ideales sin ninguna relación con el mundo real. La validación de relaciones se realiza a través de definiciones y teoremas. El razonamiento es lógico-formal.

En esta tesis, se consideran especialmente los paradigmas de la Geometría I y Geometría II, puesto que la formación del estudiante de pedagogía en educación básica necesita profundizar los conocimientos de estas dos geometrías.

2.1.3. De los Aprendizajes Intelectuales o las Actividades Cognitivas en el Aprendizaje de la Geometría del Dr. R. Duval

Los trabajos de Duval sobre las ACTIVIDADES COGNITIVAS necesarias en el aprendizaje de la geometría ayudan en la elección de las situaciones de aprendizaje previstas según el modelo de gestión de la clase de Brousseau, en especial privilegiando actividades de visualización, de construcción y de razonamiento.

En cuanto a la visualización, Duval plantea que son procesos con referencia a las representaciones espaciales para la ilustración de proposiciones, para la exploración heurística de una situación compleja, para echar un vistazo sinóptico sobre ella, o para una verificación subjetiva. (Duval, 1998).

La actividad de visualización de una figura o configuración asocia dos tipos de representación:

- Configuración de formas que constituye todo lo visual (imagen o dibujo).
- Enunciado verbal que informa sobre las propiedades de la figura o de la configuración (Guzmán, 2012).

Respecto a la construcción geométrica, Duval afirma que los procesos de construcción se realizan mediante herramientas. La construcción de configuraciones puede servir como un modelo en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados está relacionada con los objetos matemáticos que éstos representan. (Duval 1998).

Asimismo, Guzmán (2009) señala que el procedimiento de construcción exige la elaboración de un programa de construcción, es decir, escribir una secuencia de instrucciones que permitan a otra persona reproducirla. Esto requiere de un análisis de la figura en función de los instrumentos que se utilizarán. Para describir el programa de construcción es necesario tener en cuenta dos cosas:

- Un orden en la ejecución de los trazados según las propiedades y las características del instrumento.
- Una designación clara de las unidades figurales, para lo cual se necesita emplear los términos que describen las características del objeto a construir.

Por último, Duval añade que el razonamiento, en su relación con los procesos discursivos, sirve para la extensión del conocimiento, para la demostración, para la explicación. (Duval, 1998). Consecuente con esto, Guzmán (2009), respecto a la deducción de propiedades a partir de una figura, manifiesta que “es una actividad esencial para favorecer la toma de conciencia de lo que significa justificar lo que se afirma, expresar por qué se afirma aquello, y ello lleva consigo también el tomar conciencia de la necesidad de no aceptar afirmaciones sin comprender la razón, o realizar o aceptar declaraciones sin control”. En este sentido, el estudiante puede argumentar sus procedimientos, a la luz de sus conocimientos, lo que Duval (2001) ya indicaba al decir que “si la visualización es un recurso intuitivo que algunas veces es necesario para encontrar una demostración, el razonamiento depende exclusivamente del corpus de proposiciones (definiciones, axiomas, teoremas) de los que se dispone”.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA INVESTIGACIÓN

3.1. La ingeniería didáctica como metodología de investigación

La metodología usada en esta investigación es la ingeniería didáctica, la que se caracteriza por:

1. Un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.
2. El registro de los estudios de caso; y la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

¿LA VALIDACIÓN NO DEBERÍA SER EL PUNTO 3?

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

1. Primera fase: Análisis preliminares.
2. Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.
3. Tercera fase: Experimentación.
4. Cuarta fase: Análisis a posteriori y confrontación.

En esta tesis se desarrollan a continuación cada una de estas fases:

3.2. Análisis preliminar

3.2.1. Análisis epistemológico: Los elementos de Euclides

La obra de Euclides es una colección de trece libros, relacionados con la geometría y otras áreas de la matemática, escrito cerca del año 300 a. C. en Alejandría, hoy Egipto. Ya en la Edad Media, era parte del currículum educativo superior de esa época. Gran parte de esta colección se sigue incorporado en los currículos modernos, incluso hoy se puede ver un resurgimiento de esta disciplina al incorporar las nuevas tecnologías, como por ejemplo los procesadores geométricos que permiten visualizar y deducir propiedades de diferentes niveles de complejidad.

Euclides recopila gran parte del saber matemático de su época y anteriores (Thales, Pitágoras, Arquita, Eudoxo, Dinóstrato, Menecmo); además formula un sistema axiomático a través de cinco postulados que dan un desarrollo lógico a la geometría y a otras áreas de la matemática.

Los Elementos de Euclides se pueden considerar como la primera obra didáctica.

El contenido de los libros es el siguiente:

Libros 1 al 4 tratan sobre geometría plana.
Libros 5 al 10 tratan sobre razones y proporciones.
Libros 11 al 13 tratan sobre geometría de los cuerpos sólidos.

En concordancia con esta investigación, se ha focalizado en el libro I, en el cual se abordan los fundamentos de la Geometría, la teoría de los triángulos, las paralelas y el área.

El libro I está compuesto por 5 “nociones comunes” que corresponden a la relación de igualdad, 5 postulados, 23 definiciones, y 48 proposiciones. Cabe hacer notar que para los griegos los términos axioma y postulados son diferentes. Para ellos un axioma es una verdad evidente, mientras que un postulado es un enunciado razonable que podía ser aceptado sin demostrar.

Las 48 proposiciones están divididas en tres partes. Las primeras 26 están referidas a las propiedades de los triángulos. De la proposición 27 a la 32 se establece la teoría de las paralelas y se demuestra que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es lo mismo que dos ángulos rectos. De la proposición 33 a la 48 se tratan los paralelogramos, triángulos, cuadrados, y el Teorema de Pitágoras y su inverso.

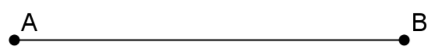
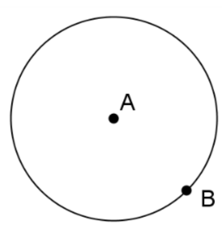
En cuanto al alcance de este apartado, y en particular de esta investigación, se ha limitado a los enunciados de los axiomas, postulados, definiciones y proposiciones, pero no a las demostraciones de estas últimas.

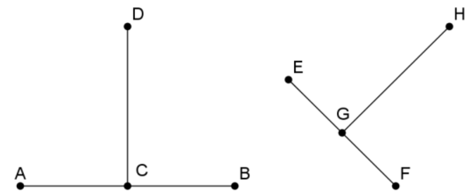
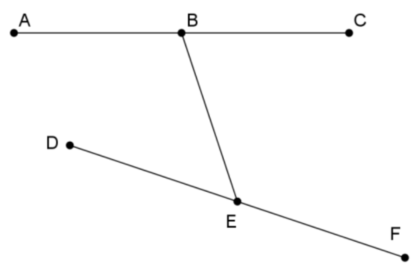
NOCIONES COMUNES DEL LIBRO I

Noción común 1.	Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
Noción común 2.	Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales también.
Noción común 3.	Si a cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales también.
Noción común 4.	Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
Noción común	El todo es mayor que la parte.

5.	

POSTULADOS DEL LIBRO I

Postulado 1.	Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta. 
Postulado 2.	Un segmento rectilíneo puede ser siempre alargado. 
Postulado 3.	Hay una sola circunferencia con un centro y un radio dados. 
Postulado 4.	Todos los ángulos rectos son iguales.

	
Postulado 5.	Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos; las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado. 

DEFINICIONES DEL LIBRO I

Definición 1.	Un punto es lo que no tiene partes.
Definición 2.	Una línea es una longitud sin anchura.
Definición 3.	Los extremos de una línea son puntos.
Definición 4.	Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los

	puntos que están en ella.
Definición 5.	Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura.
Definición 6.	Los extremos de una superficie son líneas.
Definición 7.	Una superficie plana es aquella superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.
Definición 8.	Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.
Definición 9.	Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.
Definición 10.	Cuando una línea recta que está sobre otra hace que los ángulos adyacentes sean iguales, cada uno de los ángulos es recto, y la recta que está sobre la otra se llama perpendicular a la otra recta.
Definición 11.	Un ángulo obtuso es un ángulo mayor que un ángulo recto.
Definición 12.	Un ángulo agudo es un ángulo menor que un ángulo recto.
Definición 13.	Un límite es lo que es extremo de algo.
Definición 14.	Una figura es aquello que está contenido por cualquier límite o límites.
Definición 15.	Un círculo es una figura plana comprendida por una sola línea (llamada circunferencia) de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están

	dentro de la figura son iguales entre sí.
Definición 16.	Y el punto se llama centro del círculo.
Definición 17.	Un diámetro de un círculo es una recta cualquiera que pasa por el centro y que acaba en ambas direcciones en la circunferencia del círculo; esta línea recta también divide el círculo en dos partes iguales.
Definición 18.	Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia cortada por él. El centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.
Definición 19.	Figuras rectilíneas son aquellas que están comprendidas por líneas rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras les comprendidas por cuatro y multiláteras las comprendidas por más de cuatro líneas rectas.
Definición 20.	De los triángulos, el equilátero es el que tiene los tres lados iguales; isósceles el que tiene dos lados iguales y uno de desigual; y escaleno el que tiene los tres lados desiguales.
Definición 21.	De los triángulos, triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto, obtusángulo el que tiene un ángulo obtuso y acutángulo el que tiene los tres ángulos agudos.
Definición 22.	De los cuadriláteros, cuadrado es el que tiene los lados iguales y los ángulos rectos; rectángulo el que es rectangular pero no equilátero; rombo el que es equilátero, pero no tiene los ángulos rectos; y romboide el que tiene los lados y los ángulos opuestos iguales, pero ni es equilátero ni tiene los ángulos rectos. Los

	otros cuadriláteros se llaman trapecios.
Definición 23.	Rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

PROPOSICIONES DEL LIBRO I

Proposiciones 1 a 26

Las proposiciones tratan fundamentalmente de las propiedades de los triángulos.
Las proposiciones 4, 8 y 26 constituyen los criterios de congruencia de triángulos.

N °	Enunciado original	Enunciado en lenguaje actual
1.	Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.	Construir un triángulo equilátero sobre un segmento de recta dado.
2.	Colocar una línea recta igual a otra recta dada con un extremo en un punto dado.	Dado un punto y un segmento construir a partir del punto un segmento igual al dado.
3.	Dadas dos rectas desiguales tomar de la mayor una recta igual a la menor.	Dados dos segmentos, uno mayor que el otro, construir sobre el mayor un segmento igual al menor.
4.	Si dos triángulos tienen dos lados iguales a dos lados	Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son

	respectivamente, y tienen iguales los ángulos contenidos por los lados iguales, entonces también tienen la base igual a la base, el triángulo igual al triángulo, y los ángulos restantes iguales a los ángulos restantes respectivamente, a saber aquellos opuestos a los lados iguales.(LAL).	respectivamente iguales a dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes. (LAL).
5.	En triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y, si las rectas iguales se prolongan, los ángulos debajo de la base serán iguales entre sí.	En todo triángulo isósceles los ángulos en la base son iguales, y si los lados iguales se prolongan, los ángulos por debajo de la base serán también iguales.
6.	Si en un triángulo dos ángulos son iguales entre sí, los lados que subtienden los ángulos iguales también serán iguales entre sí.	Si dos ángulos de un triángulo son iguales, entonces los lados subtendidos por tales ángulos, son también iguales.
7.	Dadas dos rectas construidas a partir de los extremos de una recta y encontrándose en un punto, no pueden ser construidas desde los extremos de la misma recta, y sobre el mismo lado de ella, otras dos rectas juntándose en otro punto e iguales a las dos primeras respectivamente, a saber cada una	Dos segmentos respectivamente iguales a otros dos con los mismos extremos en el mismo lado de un mismo segmento, no se juntan en dos puntos distintos.

	igual con aquella que parte del mismo extremo.	
8.	Si dos triángulos tienen los dos lados iguales a dos lados respectivamente, y tienen también la base igual a la base, entonces también tendrán los ángulos iguales a aquellos que están contenidos por los lados iguales. (LLL).	Si los tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro, entonces los dos triángulos son congruentes. (LLL).
9.	Bisecar un ángulo rectilíneo dado.	Dividir en dos ángulos iguales un ángulo rectilíneo dado.
10.	Bisecar una recta finita dada.	Dividir en dos partes iguales un segmento rectilíneo dado.
11.	Dada una recta trazar desde un punto en ella una línea recta que forme ángulos rectos.	Dado un segmento y un punto en él trazar a partir del punto un segmento perpendicular dado.
12.	Dada una recta indefinida trazarle, desde un punto dado que no esté en la misma, una recta perpendicular.	Dado un segmento y un punto fuera de él trazar un segmento perpendicular al dado que pase por dicho punto.
13.	Si una recta es levantada sobre otra, entonces se crean dos ángulos rectos o dos ángulos igual a dos ángulos rectos.	Si un segmento trazado sobre otro forma ángulos, entonces se forman dos ángulos rectos o dos ángulos cuya suma es igual a dos rectos.

14.	Si con cualquier recta y a partir de uno de sus puntos, dos rectas que no están colocadas del mismo lado de ella hacen que la suma de los ángulos adyacentes sea igual a dos ángulos rectos, entonces las dos rectas estarán en línea recta la una con la otra.	Dado un segmento y uno de sus puntos, si dos segmentos levantados a partir del punto no están del mismo lado del segmento y forman ángulos adyacentes iguales a dos rectos, entonces ambos segmentos están alineados.
15.	Si dos rectas se cortan entre sí, entonces se crean ángulos opuestos por el vértice, iguales entre sí.	Si dos segmentos se cortan entre sí, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
16.	En todo triángulo, si uno de los lados es prolongado, entonces el ángulo exterior es mayor que cualquiera de los ángulos interiores y opuestos.	En todo triángulo, si uno de sus lados es prolongado, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos a él.
17.	En todo triángulo la suma de cualesquiera dos ángulos es menor que dos ángulos rectos.	En todo triángulo la suma de cualesquiera dos ángulos internos es menor que 180º.
18.	En todo triángulo el lado mayor subtiende el ángulo mayor.	En todo triángulo al lado más grande se opone el ángulo más grande.
19.	En todo triángulo el ángulo mayor es subtendido por el lado mayor.	En todo triángulo al ángulo más grande se opone el lado más

		grande.
20.	En todo triángulo dos lados tomados a la vez, en cualquier forma, son mayores que el lado restante.	En todo triángulo la suma de cualesquiera dos de sus lados es mayor que el tercero.
21.	Si sobre uno de los lados de un triángulo, desde sus extremos, se construyen dos rectas que se encuentran dentro del triángulo, las rectas así construidas serán menores que los dos lados restantes del triángulo, pero contendrán un ángulo mayor.	Si dos segmentos que parten de los extremos de uno de los lados de un triángulo se encuentran dentro de él, la suma de tales segmentos es menor que la suma de los lados restantes del triángulo, pero el ángulo que comprenden es mayor.
22.	Con tres rectas, que son iguales a tres rectas dadas, construir un triángulo: así es necesario que dos de las rectas tomadas a la vez en cualquier forma deberán ser mayor que la restante.	Construir un triángulo con tres segmentos iguales a otros tres dados. Necesariamente la suma de cualesquiera dos de estos segmentos debe ser mayor que el restante.
23.	Sobre una recta dada y en un punto sobre ella construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado.	Construir un ángulo rectilíneo igual a otro ángulo rectilíneo dado sobre un segmento dado en uno de sus puntos.
24.	Si dos triángulos tienen los dos lados iguales a dos lados respectivamente, pero tienen uno	Si dos triángulos tienen dos de los lados de uno respectivamente iguales a dos de los lados del otro,

	de los ángulos contenido por las rectas iguales mayor que el otro, ellos también tendrán la base mayor que la base.	pero de los ángulos comprendidos por los lados iguales es uno mayor que el otro, entonces la base en uno es mayor que la del otro.
25.	Si dos triángulos tienen los dos lados iguales a dos lados respectivamente, pero tienen la base mayor que la base, entonces también tendrán uno de los ángulos contenido por las rectas iguales mayor que el otro.	Si dos triángulos tienen dos de los lados de uno respectivamente iguales a dos de los lados del otro, pero la base de uno es mayor que la del otro, entonces el ángulo comprendido por los lados iguales en uno es mayor que el del otro.
26.	Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectivamente, y un lado igual a un lado, a saber, el lado adyacente a los ángulos iguales o aquel que subtiende uno de los ángulos iguales, entonces también tendrán los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante igual al ángulo restante.(ALA).	Si dos triángulos tienen dos ángulos de uno respectivamente iguales a dos ángulos del otro y un lado de uno igual a un lado del otro, a saber, el lado adyacente a los ángulos iguales, o el lado opuesto a los ángulos iguales, entonces los dos triángulos son congruentes. (ALA).

Proposiciones 27 a 32

Las siguientes proposiciones establecen la teoría de las paralelas y demuestran que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.

N °	Enunciado original	Enunciado en lenguaje actual
27.	Si una recta al caer sobre dos rectas hace ángulos alternos internos iguales entre sí, entonces tales rectas serán paralelas entre sí.	Si una transversal a dos rectas forma con éstas ángulos alternos internos iguales entre sí, entonces las rectas son paralelas.
28.	Si una recta al caer sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al ángulo interno y opuesto del mismo lado, o los dos ángulos internos del mismo lado suman dos ángulos rectos, entonces las rectas serán paralelas entre sí.	Si una transversal a dos rectas forma con éstas un ángulo externo igual al ángulo interno no adyacente del mismo lado, o si los dos ángulos internos del mismo lado suman 180°, entonces las rectas son paralelas entre sí.
29.	Una recta al caer sobre dos rectas paralelas hace los ángulos alternos internos iguales entre sí, el ángulo externo igual al ángulo interno y opuesto del mismo lado, y la suma de los dos ángulos internos del mismo lado igual a dos ángulos rectos.	Una transversal a dos rectas paralelas forma con éstas ángulos alternos internos iguales entre sí, un ángulo externo igual al interno no adyacente del mismo lado, y los dos ángulos internos del mismo lado suman 180º.
30.	Dos rectas paralelas a una misma recta, son paralelas entre sí.	Rectas paralelas a una misma recta son paralelas entre sí.
31.	Dibujar una recta que pasa por un punto dado paralela a una recta	Trazar por un punto una recta paralela a otra recta dada.

	dada.	
32.	En cualquier triángulo, si uno de sus lados es prolongado, entonces el ángulo externo es igual a la suma de los dos ángulos opuestos e internos, y la suma de los tres ángulos internos del triángulo es igual a dos ángulos rectos.	En cualquier triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es la suma de los dos ángulos internos no adyacentes, y los ángulos internos del triángulo suman 180º.

Proposiciones 33 a 48

Las proposiciones que se presentan en este apartado tratan de las propiedades de los paralelogramos, triángulos y cuadrados, haciendo referencia especial a las relaciones de área.

En la Proposición 34, Euclides usa el término "área paralelográmica" en lugar de la palabra "paralelogramo", ésta por primera vez aparece en la Proposición 35.

Proclus indicó que la palabra "paralelogramo" fue creada por Euclides.

Con la Proposición 34 se inicia el estudio de áreas de figuras rectangulares.

En varios de los enunciados de las proposiciones, se habla de "igualdad de paralelogramos", o "igualdad de triángulos", o "un paralelogramo igual a un triángulo", etc. El concepto de igualdad al que se hace referencia, está dado en términos de las áreas de las figuras rectilíneas que se mencionan.

Es importante mencionar que la Proposición 47 es el Teorema de Pitágoras y la Proposición 48 es el recíproco del Teorema de Pitágoras.

N °	Enunciado original	Enunciado en lenguaje actual
33.	Líneas rectas que unen los extremos de rectas iguales y paralelas en la misma dirección, son también iguales y paralelas.	Los segmentos que unen los extremos de segmentos iguales y paralelos, son también iguales y paralelos.
34.	En áreas paralelográmicas los lados y los ángulos opuestos son iguales, y el diámetro biseca las áreas.	En todo paralelogramo los lados y los ángulos opuestos son iguales, y la diagonal divide el área del paralelogramo en dos áreas iguales.
35.	Los paralelogramos que están sobre la misma base y contenidos en las mismas paralelas, son iguales entre sí.	Los paralelogramos que tienen la misma base y están contenidos en las mismas paralelas, tienen áreas iguales.
36.	Los paralelogramos que están sobre bases iguales y están contenidos en las mismas paralelas, son iguales entre sí.	Los paralelogramos que tienen bases iguales y están contenidos en las mismas paralelas, tienen áreas iguales.
37.	Los triángulos que están sobre la misma base y están contenidos en las mismas paralelas, son iguales entre sí.	Los triángulos que tienen la misma base y están contenidos en las mismas paralelas, tienen áreas iguales.
38.	Los triángulos que están sobre	Los triángulos que tienen bases

	bases iguales y están contenidos en las mismas paralelas, son iguales entre sí.	iguales y están contenidos en las mismas paralelas, tienen áreas iguales.
39.	Triángulos iguales que están sobre la misma base y sobre el mismo lado, también están contenidos en las mismas paralelas.	Triángulos con áreas iguales y que tienen la misma base y están del mismo lado, están contenidos en las mismas paralelas.
40.	Triángulos iguales que están sobre bases iguales y sobre el mismo lado, también están contenidos en las mismas paralelas.	Triángulos con áreas iguales y que tienen bases iguales y están del mismo lado, están contenidos en las mismas paralelas.
41.	Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está contenido en las mismas paralelas, entonces el paralelogramo es el doble del triángulo.	Si un paralelogramo y un triángulo tienen la misma base y están contenidos en las mismas paralelas, entonces el área del paralelogramo es el doble del área del triángulo.
42.	Construir un paralelogramo igual a un triángulo dado en un ángulo rectilíneo dado.	Construir un paralelogramo de igual área a la de un triángulo dado en un ángulo dado.
43.	En cualquier paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno al diámetro son iguales entre sí.	En cualquier paralelogramo los complementos de los paralelogramos alrededor de la diagonal tienen áreas iguales.
44.	A una línea recta dada en un ángulo rectilíneo dado, aplicar un	Construir sobre un segmento dado en un ángulo dado un paralelogramo

	paralelogramo igual a un triángulo dado.	de igual área a la de un triángulo dado.
45.	Construir un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada en un ángulo rectilíneo dado.	Construir en un ángulo dado un paralelogramo de igual área a la de una figura rectilínea dada.
46.	Construir un cuadrado sobre una recta dada.	Construir un cuadrado sobre un segmento dado.
47.	En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados sobre los lados que comprenden el ángulo recto.	En los triángulos rectángulos el área del cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los lados que comprenden el ángulo recto.
48.	Si en un triángulo el cuadrado sobre uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados sobre los dos lados restantes del triángulo, entonces el ángulo comprendido por los dos lados restantes del triángulo es recto.	Si en un triángulo el área del cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los dos lados restantes, el ángulo comprendido por esos dos lados restantes del triángulo es recto.

En el contexto de esta investigación es necesario hacer notar que gran parte de los enunciados anteriores, en su versión actual, son aprendidos y utilizados progresivamente a lo largo de la educación escolar, es decir desde educación básica a educación media.

3.2.2. El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.

3.2.2.1. La importancia de la geometría en la enseñanza

Los procesos de enseñanza y aprendizaje están condicionados por la naturaleza del saber, a su lógica interna, al nivel de madurez de los estudiantes a los que se pretende enseñar, como también al currículum prescrito y vigente, a las competencias profesionales de los profesores, etc. Para hacer un análisis en torno a un saber escolar específico, es necesario establecer un punto de referencia que permita hacerlo; consecuente con esto, el presente apartado será abordado desde una triple dimensión: desde lo curricular, desde los procesos de enseñanza y aprendizaje, y desde la formación inicial docente, en torno a la geometría euclidiana para Educación Básica.

3.2.2.2. El currículum escolar

La actual Ley General de Educación (LGE) establece que la educación básica comprenderá de 1° a 6° año, y la educación media tendrá 6 años en vez de cuatro (cuatro de formación general y dos de formación diferenciada). En vista de este cambio curricular, que entrará en vigencia en 2017, la Unidad de Currículum y Evaluación (UCE) del Ministerio de Educación (MINEDUC) elaboró nuevas Bases Curriculares para el sistema escolar, en las que se formularon estándares pedagógicos y disciplinarios para los egresados de carreras de pedagogía en educación básica. Para satisfacer las nuevas exigencias, las instituciones formadoras de docentes también iniciaron procesos de renovación curricular.

En las Bases Curriculares de Matemática (2012) se establece que los principales focos a ser considerados en la asignatura son:

a) Tránsito de lo **CO**ncreto a lo **PI**ctórico (icónico) y a lo **SI**mbólico (abstracto) (**COPISI**)
b) Construir bases sólidas para la educación continua
c) Resolución de problemas como foco en la enseñanza
d) Uso de TICs
e) Destrezas de cálculo

La organización curricular del nuevo marco considera: habilidades, ejes temáticos y actitudes.

Respecto a las Habilidades, establece que: "en la educación básica se busca desarrollar el pensamiento matemático. En este desarrollo, están involucradas cuatro habilidades interrelacionadas: resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar." (BC-2012, p 4).

Respecto a los ejes temáticos o conceptuales, establece que son cinco: números y operaciones, patrones y álgebra, Geometría, medición, datos y probabilidades.

Respecto a las actitudes, son cinco: a) manifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico, b) abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas, c) Manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de las matemáticas, d) manifestar una actitud positiva frente a sí mismo y sus capacidades, e) demostrar una actitud de esfuerzo y perseverancia

La enseñanza de la **geometría** euclidiana y el tratamiento de la **medida** son ejes temáticos principales que se desarrollan progresivamente a lo largo de los doce años de escolaridad. Su importancia es innegable, y su pertinencia en el currículum está plenamente justificada en el Marco Curricular de 1998, así como en las Bases Curriculares 2012, en particular para las de Educación Básica.

Los ejes Geometría y Medición están íntimamente ligados, y son establecidos de la siguiente manera en las Bases Curriculares de Matemática:

"Geometría

En este eje se espera que los estudiantes aprendan a reconocer, visualizar y dibujar figuras, y a describir las características y propiedades de figuras 3D y figuras 2D en situaciones estáticas y dinámicas. Se entregan conceptos para entender la estructura del espacio y describir con un lenguaje más preciso lo que ya conocen en su entorno. El estudio del movimiento de los objetos —la reflexión, la traslación y la rotación— busca desarrollar tempranamente el pensamiento espacial de los alumnos.

Medición

Este eje pretende que los estudiantes sean capaces de identificar las características de los objetos y cuantificarlos, para poder compararlos y ordenarlos. Las características de los objetos -ancho, largo, alto, peso, volumen, etc.- permiten determinar medidas no estandarizadas, Una vez que los alumnos han desarrollado la habilidad de hacer estas mediciones, se espera que conozcan y dominen las unidades de medida estandarizadas. Se pretende que sean capaces de seleccionar y usar la unidad apropiada para medir tiempo, capacidad, distancia y peso, usando las herramientas específicas de acuerdo con lo que se está midiendo." (BC-2012, p 6).

Por otro lado, las cuatro habilidades propuestas en las Bases Curriculares de Matemática (resolver problemas, representar, modelar y argumentar, y comunicar) están directamente relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, que tradicionalmente las utiliza para desarrollar el pensamiento matemático, en forma progresiva y articulada.

3.2.2.3. Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación básica

Para ser abordados estos dos ejes (geometría y medida) es necesario tener en cuenta que "la geometría colabora en el desarrollo del niño y en su perfeccionamiento. De manera especial, en las capacidades relacionadas con la comunicación, su relación con los objetos y las personas que le rodean, favoreciendo una serie de habilidades, entre las que se destacan:

- Habilidades visuales.
- Habilidades de comunicación.
- Habilidades de dibujo.
- Habilidades de razonamiento lógico.
- Habilidades de aplicación y transferencia.” (López, O. y García, S., 2008)

De igual manera Nortes Checa (1993) sugiere que estas cinco habilidades desarrollan el pensamiento matemático de los niños a través del estudio de la geometría. Lo anteriormente dicho no se contraviene con lo propuesto por la Unidad de Currículum del MINEDUC en torno a que estas habilidades deben ser desarrolladas en la sala de clase.

Si analizamos lo declarado en el eje geometría, claro está que el inicio del estudio de la geometría se focaliza en el desarrollo de un lenguaje geométrico básico y el desarrollo de la imaginación y la orientación espacial; entonces la importancia de reconocer, visualizar y dibujar figuras, y describir las características y propiedades de figuras 3D y figuras 2D, se manifiesta al ser desarrolladas estas cinco habilidades, propias de la geometría. Las habilidades propuestas en las Bases Curriculares, son más genéricas y abordan globalmente cada uno de los ejes temáticos.

Según Nortes Checa (1993), y en concordancia con lo propuesto por el eje temático de geometría, “la apreciación espacial se circunscribe a dos grandes bloques, por un lado al mundo real, constituido por el ambiente que nos rodea, y por otro, a las representaciones del mundo real, que hacen uso de figuras y diagramas.” De allí la importancia de abordar en primer lugar una “geometría visual", en 3D, para luego pasar a una 2D. Lo que viene a ser desarrollado en los cuatro primeros cursos de Educación Básica, al caracterizar las formas de una, dos y tres dimensiones: líneas curvas y rectas, la relación entre ellas, los triángulos y cuadriláteros, los prismas rectos, pirámides, cilindros, conos y esfera.

Respecto a la medición, y en concordancia a lo propuesto por la Bases Curriculares, se puede entender a la medición como una comparación. Cuando se comparan dos objetos, se buscan propiedades comunes que permitan efectuar la comparación, sea cualitativa o cuantitativamente. Se inicia el proceso de adquisición de la noción de medición tempranamente, en los primeros cursos, a través de patrones no estandarizados y con comparaciones gruesas, y muchas veces dicotómicas: grande-pequeño, alto-bajo, etc., y otras más finas: chico, mediano, grande, enorme. Se introducen patrones no estandarizados, a partir de elementos concretos, que por lo general son los útiles escolares. Así, por ejemplo, se puede medir el largo de una mesa escolar con un lápiz como patrón de medida. El proceso sigue con la introducción de patrones estándares, como es el mm., el cm., y el m. Si bien, a lo largo del desarrollo escolar se introducen diferentes procesos de medición (de longitud, de superficie, de volumen, de tiempo), la acción de medir en Educación Básica está relacionada con el concepto de número, pero estrechamente ligado a la geometría, en el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, de figuras y cuerpos geométricos, y a lo largo de toda la educación escolar.

3.2.2.4. Posturas de algunos autores e investigadores en torno a la enseñanza de la geometría escolar en educación básica.

Muchos investigadores que han centrado su estudio en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la geometría escolar (Plunkett, Dickson, Jaulín-Mannoni, Piaget, Dienes, Golding, Mongeau, Lunkenbeim, Orton, Alsina, Choquet), citados por Nortes Checa (1993), concuerdan en que el estudio de esta rama de la matemática desarrolla el pensamiento matemático del niño; y que se debe iniciar tempranamente, a través de la apreciación espacial, la representación a través de figuras y diagramas. Además, afirman que debe tener una determinada consideración en la estructuración espacial que da cuenta de la orientación espacial o de un sistema de coordenadas relativo correspondiente a nociones de situación, las que incluyen:

a) Orientación: delante-detrás, derecha-izquierda, arriba-abajo.
b) Proximidad: cerca-lejos.
c) Interioridad: dentro fuera, abierto-cerrado.
d) Direccionabilidad: hacia y desde-hasta.

Según este autor, después de la ubicación espacial, es necesario introducirse en las nociones geométricas fundamentales que van desde las nociones de punto, línea y superficie, hasta las figuras y cuerpos geométricos, con sus propiedades y características.

El proceso de construcción del pensamiento geométrico sigue una evolución muy lenta desde las iniciales formas intuitivas hasta las formas deductivas finales, aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares más avanzados que los que se dan en la educación básica, e incluso más allá de la educación media.

Según Itzcovich y Broitman (2001), la enseñanza de la geometría en la educación básica apunta a dos grandes objetivos: el estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos; y por la otra, al inicio en un modo de pensar propio del saber geométrico.

El estudio de las propiedades de las figuras y los cuerpos implica mucho más que reconocerlas perceptivamente y saber sus nombres. Implica conocer, cada vez con mayor profundidad, sus propiedades y poder disponer de ellas para resolver diversos tipos de problemas geométricos.

El "modo de pensar geométrico" permite apoyarse en las propiedades estudiadas para poder dilucidar relaciones no conocidas, es decir, obtener un resultado en principio desconocido a partir de relaciones ya conocidas.

En geometría, el modo de demostrar la validez de una afirmación no es empírico (por ejemplo midiendo o dibujando) sino racional (a través de argumentos). Según Itzcovich y Broitman (2001), estos aspectos del estudio de la geometría se inician en los primeros años, pero son más propios de los cursos superiores, particularmente de los cursos de educación media.

3.2.2.5. El mapa de progreso de geometría

El currículum nacional anterior a las Bases Curriculares 2012 consideraba mapas de progreso para cada uno de los ejes temáticos de los sectores de aprendizaje (hoy asignaturas). Los Mapas de Progreso (según el investigador, instrumentos valiosos para el profesor como ruta orientadora para lograr un aprendizaje significativo de sus estudiantes) buscan describir el crecimiento del aprendizaje como competencia a lo largo de 12 años de trayectoria escolar. En el currículum anterior de Matemática, los contenidos estaban organizados en cuatro ejes temáticos, con su correspondiente Mapa de Progreso: Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, y Datos y Azar. El Razonamiento Matemático constituye una dimensión que era abordada transversalmente en estos cuatro Mapas de Progreso.

El Mapa de Progreso de Geometría describe el progreso de las competencias relacionadas con la comprensión, medición y el modelamiento de las formas, las transformaciones, la posición y el espacio. Los aprendizajes descritos en él consideran cuatro dimensiones que se desarrollan de manera interrelacionada: Comprensión de la forma, Medición, Descripción de posición y movimiento, y Razonamiento matemático.

Este Mapa parte de la base de que durante la trayectoria escolar los estudiantes desarrollan conocimientos y habilidades relacionados con diferentes enfoques para el tratamiento de la forma, el tamaño y la posición.

Particularmente, los primeros niveles están relacionados con el aprendizaje de la geometría euclidiana, con énfasis en la comprensión de las figuras geométricas en el plano y el espacio, el descubrimiento de relaciones matemáticas entre sus elementos y la capacidad de medir los diversos parámetros de estas figuras.

La Medición es un componente central de la formación del pensamiento espacial, que permite relacionar lo aprendido en matemática con el entorno y con otras áreas del conocimiento. Esta dimensión incluye también el cálculo de longitudes, perímetros, áreas y volúmenes.

En este Mapa, el Razonamiento Matemático incluye:

- el reconocimiento de patrones y regularidades en la forma, el tamaño o el lugar;
- la formulación y verificación en casos particulares de conjeturas acerca de figuras, cuerpos y sus relaciones, en el plano y en tres dimensiones,
- la resolución de problemas,
- la formulación y análisis de estrategias,
- la deducción geométrica y
- la verificación de resultados, relaciones y conjeturas.

La demostración se introduce en los primeros niveles (correspondientes a la educación básica) como verificación en casos particulares, luego como justificación de construcciones o de relaciones entre objetos geométricos, para luego avanzar en formalidad de acuerdo con la madurez de los estudiantes.

Tal como se indicó al inicio de este apartado, el investigador considera que estos instrumentos son valiosísimos, ya que muestra un panorama general del desarrollo del eje temático, y que es abordable por cada profesor, de modo de lograr una secuenciación de los contenidos sin repetirlos.

3.2.2.6. Los procesadores geométricos

En el currículum actual, es decir en las Bases Curriculares (2012), una de las principales prescripciones es la integración de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC), ya que el uso de recursos digitales permite abordar especialmente las formas geométricas. Esta integración se condice con el Mapa de Progreso de Geometría, ya que éste se puede articular con el Mapa de Progreso de las TIC –que es transversal a todas las asignaturas-. Los procesadores geométricos (una TIC), también llamados procesadores de geometría dinámica, constituyen verdaderos laboratorios que permiten explorar y representar distintas formas geométricas, admiten su modificación y, por lo tanto, el estudio de propiedades generales y la búsqueda de relaciones y regularidades.

Para Michael De Villiers (1999), "la geometría euclidiana está experimentando un renacer excitante en gran parte debido al desarrollo reciente del software de geometría dinámica como Cabri y Sketchpad." Si bien ambos software son con licencia comercial, hoy existen otros gratuitos como por ejemplo GeoGebra, y Regla y Compás (CaR).

Entre las tareas más importantes que estos procesadores geométricos pueden hacer están: construcción de figuras geométricas a partir de relaciones y propiedades, modificación de la construcción geométrica "moviendo" objetos que forman parte de ésta, medición de magnitudes, establecimiento de un protocolo de construcción, repetición de construcciones, opción de guardar y recuperar las construcciones almacenadas en carpetas, opción de exportar las construcciones a otros programas.

El uso de este tipo de software ha permitido a investigadores encontrar nuevas propiedades de figuras geométricas clásicas como el triángulo. Por ejemplo, Adrian Oldknow (1995, 1996), citado por De Villiers (1999) "utilizó Sketchpad para descubrir el hasta ahora desconocido resultado que establece que el centro de Soddy, el incentro y el punto de Gergonne de un triángulo son colineales". Muchos otros descubrimientos realizados recientemente con el uso de los procesadores geométricos, así como la pertinencia de éstos a la realidad tecnológica actual de los estudiantes, y el beneficio que implica para los alumnos el paso a una geometría dinámica en que la representación gráfica no distorsiona la figura geométrica, hacen interesante y útil su inclusión como recurso pedagógico en el aula.

3.2.2.7. La formación de profesores de educación básica en la Universidad del Bío-Bío y la geometría

La Universidad del Bío-Bío, a través de su Facultad de Educación y Humanidades, imparte ocho carreras de pedagogía, de las cuales tres tienen directa relación con la formación de profesores que ejercerán en el área de la matemática. Una de ella para Educación Media –Pedagogía en Educación Matemática-, y dos carreras para Educación Básica.

Las mallas curriculares incluyen asignaturas que abordan la geometría con diferentes profundidades y modalidades. Las asignaturas son las siguientes:

Carrera de Pedagogía en	Asignaturas relacionadas con la geometría
Educación Matemática	• Álgebra y Geometría Analítica • Geometría Plana • Geometría del Espacio • Didáctica del Álgebra y la Geometría
Educación General Básica	• Matemáticas I • Matemáticas II • Matemáticas III • Didáctica de la Matemática
Educación Básica con Especialidad en Lenguaje y Comunicación o Educación Matemática	• Geometría: Generalidades, Triángulos y Cuadriláteros • Polígonos y Cuerpos Geométricos • Geometría Proporcional

	• Vectores y Transformaciones Isométricas • Didáctica de la Geometría • Didáctica y TIC

La geometría euclidiana escolar en Pedagogía en Educación Matemática es vista prácticamente en dos asignaturas, Geometría Plana y Geometría del Espacio, y su Didáctica es tratada y mezclada con el álgebra. Por lo que no es presentada extensivamente ni con la profundización que se requiere, pues el énfasis de la formación de un profesor de Educación Media, está en el análisis matemático, el álgebra lineal, las estructuras algebraicas, la estadística e inferencia, etc.

En Pedagogía en Educación General Básica, cada asignatura de Matemáticas está dividida en unidades temáticas, de las cuales, una de éstas está dedicada a la geometría. Así, se sigue el mismo patrón de la enseñanza escolar básica, en la que se encuentran la aritmética, el tratamiento de la información o datos y azar, y la geometría. En la asignatura de Didáctica se trabaja involucrando cada uno de los ejes temáticos, por lo que al igual que en Pedagogía en Educación Matemática, no existe una profundización y dedicación exclusiva a la Geometría.

En el caso de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Lenguaje y Comunicación o Educación Matemática, carrera donde se realiza esta investigación, para aquellos estudiantes que eligieron la especialidad de Educación Matemática, la malla curricular les presentan cuatro ejes temáticos disciplinarios: Números y Operaciones, Geometría, Tratamiento de la Información, y Modelización Algebraica, con al menos cuatro asignaturas por eje. En el caso del eje Geometría, la carrera consta de seis asignaturas progresivas, que abordan desde las generalidades a lo más complejo, con la una mirada símil a lo expresado en el Mapa de Progreso de Geometría, y articuladamente con las TIC, a través del uso de software de Geometría Dinámica. Además, se promueve un aprendizaje cooperativo con la estrategia de Taller, en la que se busca desarrollar el pensamiento geométrico de los futuros profesores de matemáticas para la Educación Básica.

Comparativamente, existe una diferencia sustantiva entre un profesor especialista y un profesor con mención, ya que el primero tiene una formación disciplinar profunda en cada uno de los ejes disciplinares, y a la formación del segundo se le añaden otras dos asignaturas complementarias al plan de la carrera en la disciplina de la mención. El máximo de asignaturas de la disciplina de la mención sería cuatro más cuatro, es decir ocho asignaturas, más un año opcional de formación (que corresponde a la mención); dentro de su formación, el especialista tiene al menos veintisiete asignaturas de la misma especialidad, sin extenderse de la duración de la carrera.

3.2.2.8. Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Lenguaje y Comunicación o Educación Matemática

La carrera de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Lenguaje y Comunicación o Educación Matemática fue la concreción del Proyecto MECESUP UCV0402 en Consorcio que data de 2004, y hecho realidad en

2009, recibiendo en 2010 su primera cohorte. Producto de las nuevas políticas ministeriales, la carrera alcanzó a tener cuatro cohortes, 2010 a 2013, ya que tuvo que cerrar el ingreso de nuevos estudiantes, al instituirse la Evaluación INICIA, la que medía contenidos disciplinarios en cuatro áreas (Lenguaje y Comunicación; Matemática; Historia, Geografía y Ciencias Sociales; y Ciencias Naturales), siendo que la carrera preparaba en una sola área, Lenguaje y Comunicación, o Educación Matemática. Para esta investigación se consideró la última promoción de la especialidad de Educación Matemática (2013), cuyos estudiantes egresan el 2016.

Los estándares disciplinarios y programas de estudio por competencias que fueron generados en la realización de este proyecto terminaron siendo insumos para la elaboración de los Estándares Orientadores para Egresados de Carreras de Pedagogía en Educación Matemática que fueron publicados por el MINEDUC el año 2012. Paralelamente, se estableció el Programa INICIA, consistente en una evaluación diagnóstica y formativa para estudiantes de carreras de pedagogía egresados o próximos a egresar. Dicha evaluación, vigente entre 2008 y 2015, hoy ha sido reemplazada por la Evaluación Diagnóstica de la Formación Inicial Docente, vigente desde 2016, y es aplicada a los estudiantes que se encuentran en el penúltimo año de formación. Ésta iniciativa impulsada por el Ministerio de Educación para avanzar integralmente en el mejoramiento de la formación inicial docente está centrada en conocimientos disciplinares y pedagógicos.

3.2.2.9. Estándares pedagógico-disciplinares de desempeño

Los estándares ministeriales (2012) son pedagógicos y disciplinares, y para los sectores de aprendizaje: a) Lenguaje y Comunicación, b) Matemática, c) Historia, Geografía y Ciencias Sociales, y d) Ciencias Naturales.

En lo que respecta a los Estándares de Matemática para Educación Básica, se consta de:

a) seis estándares para el eje Números,
b) cinco estándares para el eje Geometría,
c) tres estándares para el eje Álgebra, y
d) tres estándares para el eje Datos y Azar.

Los cuatro ejes temáticos concuerdan con los ejes temáticos disciplinares de la carrera de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Lenguaje y Comunicación o Educación Matemática, lo que vino a fortalecer la carrera, por el alineamiento curricular de lo que ofrecía la Universidad del Bío-Bío, y los requerimientos curriculares del Ministerio de Educación, a pesar de que la carrera se debió cerrar por las razones expuestas anteriormente.

Los Estándares de Geometría establecidos por el Ministerio de Educación son:

Estándar 7	Es capaz de conducir el aprendizaje de las formas geométricas.
Estándar 8	Es capaz de conducir el aprendizaje de las figuras planas.

Estándar 9	Está preparado para conducir el aprendizaje de conceptos y aplicaciones de la medición.
Estándar 10	Está preparado para conducir el aprendizaje de los conceptos de perímetro, área y volumen.
Estándar 11	Demuestra competencia disciplinaria en el eje de Geometría.

Los Estándares Ministeriales están articulados con las Bases Curriculares, los Programas de Estudio, los Mapas de Progreso y la Prueba INICIA. Además, el Currículum de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Lenguaje y Comunicación o Educación Matemática también está alineado con estos.

3.2.2.10. El análisis de las concepciones de los estudiantes.

El investigador realizó tres estudios preliminares en relación a la enseñanza de la geometría con los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío y los presentó en algunos congresos del área (Rosales y Díaz, RELME 26-2012; Rosales, SOCHIEM USS-2012; Rosales, RELME 27-2013).

Estos estudios consistieron en la aplicación de actividades relacionadas con la visualización, construcción y argumentación de procedimientos. Estas actividades, que exigen movilizar conocimientos disciplinares en torno a propiedades de figuras que se mezclan entre sí (triángulos, cuadriláteros y circunferencia) se analizaron sobre el marco teórico que sustenta esta investigación. Dicho análisis permitió corroborar, en tareas en que se pedía verificar o probar y demostrar, algunas deficiencias en partes tales como la construcción y la justificación o argumentación.

En cuanto a los errores, se logró determinar errores de prerrequisitos, procedimentales y de razonamiento. Los errores de prerrequisitos se refieren a los conocimientos geométricos previos que debieron ser adquiridos en educación escolar, por ejemplo definiciones y propiedades que son usadas como herramientas intelectuales. Los errores procedimentales se refieren a los protocolos de construcción. Los errores de razonamiento se observan en sus argumentaciones, en algunos casos deficientes.

Por otro lado, en entrevistas y conversaciones, los estudiantes manifestaron que en la etapa escolar tuvieron una formación en geometría mínima o, en algunos casos, nula.

3.2.2.11. Análisis de textos de enseñanza

Los siguientes son los textos referidos a la geometría más utilizados en las carreras de Pedagogía en Educación Básica que se dictan en la Facultad de Educación y Humanidades de la Universidad del Bío-Bío, y que se encuentran disponibles en la Red de Biblioteca de la institución.

Baldor, A. (2008). *Geometría y Trigonometría*. Segunda edición. México: Grupo Editorial Patria.

Texto clásico, cuya primera edición data de 1966. En su prólogo manifiesta que:

“El texto del profesor Baldor tiende al concepto actual de la enseñanza de la geometría en el ciclo secundario (12 a 15 años). No se trata de enseñar una geometría euclidiana al estilo clásico, sino aprovechar el valor formativo de esta materia en el sentido axiomático, que constituye la esencia de toda la matemática, estableciendo los teoremas como “cortas cadenas deductivas sobre algo menos que una base estrictamente axiomática”. La obra señala un provechoso término medio entre la enseñanza de tipo clásico y lo que podríamos llamar un enfoque contemporáneo de la geometría que debe iniciarse en el grado superior del bachillerato y en la universidad.” Marcelo Santaló. México. Universidad Nacional Autónoma de México.

Dicho párrafo deja en claro que este texto aportaría a producir una reorientación en la enseñanza de la geometría en los niveles medios y superior de la educación en México. En esta perspectiva, este texto se populariza en todo el continente, tanto así que actualmente sigue vigente. En este contexto, el año 2008, se lanza una segunda edición, con cambios que se reflejan en una modificación de los ejemplos y ejercicios, la presentación de nuevos gráficos e ilustraciones, y la complementación digital interactiva.

El libro se encuentra dividido en tres secciones: Geometría Plana, Geometría del Espacio, y Trigonometría, y estos distribuidos en 29 capítulos. Contiene también una breve reseña histórica de la geometría, generalidades como un glosario de términos, y un par de apéndices dedicados a los logaritmos. Por último, tablas matemáticas (numéricas y geométricas), un repaso de álgebra, y ejercicios adicionales de los temas tratados en cada una de las secciones.

En cuanto a los **elementos de interés en esta investigación**, se puede decir que el texto aborda los siguientes contenidos:

a) La perpendicularidad y el paralelismo, en el capítulo III. Además muestra cinco **construcciones** básicas como problemas gráficos:

- Trazar una perpendicular en el punto medio de un segmento.
- Trazar una perpendicular en un punto cualquiera de una recta.
- Trazar una perpendicular en un extremo de un segmento sin prolongarlo.
- Trazar una recta paralela por un punto exterior a una recta dada.
- Trazar una bisectriz de un ángulo.

b) Los triángulos y sus generalidades se tratan en el capítulo V. En éste se puede ver la clasificación, rectas y puntos notables, y los teoremas de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo.

c) Los casos de igualdad de triángulos, es decir, de congruencia son abordados en el capítulo VI. Se enuncian y demuestran criterios ALA, LAL y LLL. Además se estudia la igualdad de triángulos rectángulos. Cabe hacer mención que el texto no aborda el cuarto criterio de congruencia LLA.

d) Los cuadriláteros son tratados en el capítulo VIII. Se presentan las generalidades, tales como sus elementos constitutivos y sus relaciones fundamentales, su clasificación, las propiedades de los paralelogramos, un teorema y su recíproco con las correspondientes demostraciones.

e) La circunferencia, los elementos asociados a esta, tales como radios, cuerdas, diámetros, arcos, secantes y tangentes, y algunas propiedades son tratados en el capítulo XII.

Los teoremas y propiedades se **demuestran** utilizando el método deductivo, formulando las hipótesis y tesis respectiva. En algunos casos, se plantea una **construcción auxiliar**, para luego proceder a la demostración definitiva. Cabe hacer mención que esta construcción auxiliar corresponde al añadir o restar elementos a la configuración, como es prolongar los lados de un ángulo o triángulo, trazar una paralela a uno de los lados de un triángulo, etc. Si el teorema admite el **recíproco**, éste se encuentra formulado, y demostrado.

Cada capítulo, contiene una serie de entre 10 y 20 ejercicios.

- De los 11 ejercicios del capítulo III, solo dos requieren demostración, y los restantes están asociados al cálculo de medidas angulares. Todos presentan su configuración.

- Once de los 17 ejercicios del capítulo V están referidos a la construcción de triángulos que cumplan una condición referida a medidas dadas, y complementariamente que se tracen los segmentos notables y se señale el correspondiente punto notable asociado a éstos. Los restantes ejercicios son preguntas que interpelan el análisis de una situación hipotética para dar la respuesta.

- En el capítulo VI, se plantean 20 ejercicios agrupados de a dos, tres, hasta cinco, por cada configuración que se presenta. La actividad a realizar en cada uno de ellos es demostrar. En ninguno de ellos, se plantea construir.

- El capítulo VIII trae 15 ejercicios, de los cuales 11 son de construcción de cuadriláteros, la mayoría de ellos asociados a medidas de longitud. Dos de los otros son de cálculo de medidas de ángulos.

- Ocho de 12 problemas están asociados a demostrar alguna propiedad que involucra elementos tratados en el capítulo XII.

El libro no contiene referencias al uso de un procesador geométrico, ni a un link, por lo que las construcciones son abordadas con regla y compás. Las demostraciones se realizan según los ejemplos tratados en cada capítulo, mediante el método directo, "Sí…, entonces,…", o bien, por reducción al absurdo.

Carreño, X. y Cruz, X. (2008). *Geometría*. Santiago: McGraw-Hill/Interamericana de Chile.

El presente texto está dirigido a estudiantes de enseñanza media y profesores que ejercen en el nivel. Fundamentalmente es un texto de ejercicios. Está dividido en nueve capítulos, y cada uno de ellos contiene: esquema básico de contenidos, ejercicios resueltos, ejercicios propuestos, y una prueba de selección múltiple con su respectiva tabla de respuestas correctas. Los ejercicios propuestos, cuyo objetivo es que el estudiante determine las razones que generan la situación, se caracterizan por su versatilidad, ya que algunos contienen datos irrelevantes y otros no tienen solución. Por último, el texto contiene dos anexos: una prueba final de selección múltiple con su respectiva tabla de respuestas correctas, y un capítulo adicional con aplicaciones del procesador geométrico Cabri para la resolución de problemas geométricos.

Respecto a los **elementos de interés en esta investigación**, el texto aborda los siguientes contenidos:

El capítulo 3 está dedicado al estudio de los triángulos. Presentan sus definiciones, y clasificaciones según lados y según ángulos, pero no se mezcla la clasificación. Se formula un listado de 12 teoremas, que incluyen el Teorema de Pitágoras, los cuales no se demuestran. Se definen los elementos secundarios de un triángulo, es decir segmentos y puntos notables, y presentan sus respectivas configuraciones. Llama la atención que al definir transversales de gravedad, también las llaman medianas. Luego definen las medianas como otro segmento notable. Esto crea confusión, ya que estas últimas son conocidas como las paralelas medias. En este mismo capítulo, entregan un formulario para el cálculo del perímetro y el área de un triángulo. Concluyen con la formulación de los cuatro criterios de congruencia: LLL, LAL, ALA y LLA. Formulan una observación respecto al cuarto criterio LLA, y su consistencia.

Entre los 23 ejercicios resueltos se presenta una variedad de tareas, tales como dibujar triángulos, demostrar algunos teoremas y propiedades, calcular área y ángulos en diversas configuraciones triangulares. En cuanto a los ejercicios y problemas propuestos, se presenta una colección de 61 de diversa dificultad. Los 15 primeros corresponden a un test de verdadero o falso en que se deben justificar las respuestas. Los restantes ejercicios abordan las estrategias presentadas en los ejercicios resueltos. Se entregan las soluciones, y se concluye el capítulo con la prueba de selección múltiple y su pauta de corrección, que aborda la temática tratada.

En el capítulo 5 se presentan los cuadriláteros: definiciones y clasificación, un listado de 23 propiedades y teoremas sin demostración, un formulario de área y perímetro, datos necesarios para que un cuadrilátero quede determinado. Los

20 ejercicios resueltos consideran demostraciones y construcciones. Se presentan 20 problemas propuestos en el mismo tenor a los resueltos. Se dispone de las soluciones de éstos. El capítulo concluye con la correspondiente prueba de selección múltiple y su pauta de corrección.

El capítulo 6 trata sobre la circunferencia y el círculo, y se divide en cuatro secciones: elementos y propiedades, ángulos en la circunferencia y sus medidas, relaciones métricas en la circunferencia, y perímetro y área. En cuanto a las dos primeras secciones, de nuestro interés, se presentan la circunferencia y sus elementos, tales como radio, diámetro, arco, tangente y secante; propiedades y posiciones relativas de dos circunferencias; elementos del círculo; ángulos en la circunferencia y sus medidas. En los problemas resueltos se muestran 10 demostraciones de propiedades y teoremas. Los ejercicios propuestos conforman una colección de 64 ejercicios de cálculo de la medida de ángulos en la circunferencia, cada uno de ellos viene con su respectiva configuración. Se entregan las respuestas. Cada una de las dos últimas secciones, siguen el mismo patrón: problemas resueltos, problemas propuestos y prueba de selección múltiple. Ésta última incluye todo el contenido tratado en el capítulo.

El capítulo 8 está referido a lugares geométricos. Su tercer apartado aborda la construcción de triángulos. Establece la metodología: análisis, construcción, demostración y discusión. Los 5 ejercicios resueltos siguen la pauta establecida. Los ejercicios de construcción propuestos, dados elementos primarios y secundarios de un triángulo, conforman una colección de 11 ítems con 5 a 8 partes.

El texto considera un anexo dedicado al Cabri Géomètre. En la introducción se explicitan las bondades didácticas del procesador geométrico. Se describe la barra de herramientas y se ejemplifica su uso en: trazado de rectas y segmentos, medición de ángulos, longitudes, perímetro y área, construcción de figuras poligonales y circunferencias, ampliación y reducción de un objeto, construcción y aplicación de simetrías, traslaciones, y homotecias; construcción y aplicación de rotaciones, determinación de lugares geométricos. No se plantean ejercicios propuestos. Este anexo es una colección de actividades geométricas que ilustran las bondades de Cabri Géomètre.

Clemens, S., O'Daffer, P. y Cooney, T. (1998). *Geometría*. México: Addison Wesley Longman de México.

Este texto está dirigido a estudiantes de nivel preuniversitario y universitario de Latinoamérica. Pertenece a la Serie AWLI de Addison Wesley Longman Iberoamericana. Su didáctica se basa en la actualidad de los contenidos, ejemplos y aplicaciones reales, con un enfoque paso a paso en las explicaciones de los procedimientos en la resolución de problemas. Es un texto con las siguientes características:

- Está dividido en 14 capítulos.

- Los ejercicios se clasifican en tres niveles denominados A, B, y C, y van desde problemas numéricos a pruebas formales.

- Los problemas impares incluyen la respuesta.

- Cada capítulo finaliza con un resumen de los conceptos importantes estudiados en él, y orientaciones metodológicas tales como técnicas para la resolución de problemas y repasos de álgebra. Además, un examen del capítulo.

- Al final del libro se encuentran una lista de símbolos, un glosario de términos geométricos y listas de teoremas y postulados.

Respecto a los **elementos de interés en esta investigación**, el texto aborda los siguientes contenidos:

El capítulo 1, referido a definiciones y construcciones, nos presenta las generalidades y relaciones básicas entre puntos, rectas y planos. También, algunas figuras geométricas básicas, segmentos y ángulos, congruencia y medición, y algunas construcciones fundamentales. Cada apartado tiene sus respectivos ejemplos. Los ejercicios y problemas son de diverso tipo, según la clasificación establecida (A, B, C). Los temas tratados en este capítulo no siguen el patrón clásico. Las actividades de solución de problemas son presentados como desafíos como problemas de ingenio. Cada apartado del capítulo tiene una guía de ejercicios. Al final del capítulo está el examen y las orientaciones técnicas para la solución de problemas.

El capítulo 2 se refiere al razonamiento en geometría. Se ejemplifica y explicita el proceso de razonamiento inductivo. De igual manera, se ejemplifican generalizaciones falsas y contraejemplos. Se analizan y ejemplifican diversos esquemas de razonamiento. Se presentan postulados. Cada una de sus apartados tiene sus respectivos ejemplos, ejercicios y problemas, siguiendo la estructura establecida para cada uno de los capítulos. Al igual que el capítulo anterior, dispone de un resumen de conceptos importantes, otro resumen, el examen y un repaso de álgebra.

El tema central del capítulo 3 son los triángulos y la congruencia. Se formulan los postulados de congruencia LAL, ALA y LLL. Contiene una guía de ejercicios orientada a contrastar pares de triángulos congruentes según los criterios. Se presentan diversos tipos de pruebas: uso de postulados de congruencia, uso de definiciones, uso de postulados y definiciones, uso de la congruencia de ángulos y segmentos, uso de solape de triángulos, uso de cadenas de congruencias. Cada apartado cuenta con ejemplos, ejercicios y problemas. Por último se presentan los conceptos importantes, el resumen y el examen.

En el capítulo 4, se aborda la prueba de teoremas mediante propiedades básicas. Se detallan como procedimiento los pasos para la prueba de un teorema. Se ejemplifica el método. Se presentan ejercicios y problemas variados. Se presentan los conceptos importantes, el resumen, el examen.

El capítulo 6 se refiere a triángulos. Entre los contenidos que se abordan están la clasificación de los triángulos, algunas propiedades del triángulo isósceles, el teorema de la congruencia LAA. Al igual que los demás capítulos se tiene: ejemplos, ejercicios y problemas, conceptos importantes, resumen y examen.

Los cuadriláteros son estudiados en el capítulo 8. Se presentan las generalidades, la clasificación, teoremas referidos a los paralelogramos, y el teorema del segmento medio de un triángulo. Se presentan, además, ejemplos, ejercicios y problemas, conceptos importantes, resumen y examen.

Las generalidades o definiciones básicas de la circunferencia se presentan en el capítulo 10. Si bien el capítulo es más extenso, el apartado inicial es de nuestro interés; éste tiene sus correspondientes ejemplos, ejercicios y problemas.

3.2.3. Especificación del campo de condiciones de aplicación de la ingeniería

Con respecto a la resolución de problemas geométricos, se abordarán los Objetivos de Aprendizaje (OA) formulados en los currículos de formación inicial y escolar, que refieren al eje de geometría del segundo ciclo básico; es decir, los prescritos por el MINEDUC en las Bases Curriculares y el Programa de Asignatura en el Plan de Formación de Pedagogía en Educación Básica con Especialidad en Educación Matemática.

En el eje de geometría, estos objetivos enfatizan la visualización, construcción y argumentación. En este contexto, los Objetivos de Aprendizaje formulados en las Bases Curriculares que interesan a esta investigación son:

Quinto Año Básico:

OA17. Describir y dar ejemplos de aristas y caras de figuras 3D y lados de figuras 2D:

- que son paralelos
- que se intersectan
- que son perpendiculares

OA18. Demostrar que comprenden el concepto de congruencia, usando la traslación, la reflexión y la rotación en cuadrículas y mediante software geométrico.

Sexto Año Básico:

OA12. Construir y comparar triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y/o sus ángulos con instrumentos geométricos o software geométrico.

OA13. Demostrar que comprenden el concepto de área de una superficie en cubos y paralelepípedos, calculando el área de sus redes (plantillas) asociadas.

OA15. Construir ángulos agudos, obtusos, rectos, extendidos y completos con instrumentos geométricos o software geométrico.

OA16. Identificar los ángulos que se forman entre dos rectas que se cortan (pares de ángulos opuestos por el vértice y pares de ángulos complementarios).

OA17. Demostrar de manera concreta, pictórica y simbólica que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º y de un cuadrilátero es 360º.

Séptimo Año Básico:

OA10. Descubrir relaciones que involucran ángulos exteriores o interiores de diferentes polígonos.

OA11. Mostrar que comprenden el círculo:

- describiendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo
- estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo
- aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria

- identificándolo como lugar geométrico

OA12. Construir objetos geométricos de manera manual y/o con software educativo:

- líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros
- puntos, como el punto medio, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito de un triángulo
- triángulos y cuadriláteros congruentes

Octavo Año Básico:

OA12. Explicar, de manera concreta, pictórica y simbólica, la validez del teorema de Pitágoras y aplicar a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana, de manera manual y/o con software educativo.

Tal como se indicó en apartados anteriores, esta investigación se realizó en la carrera de Pedagogía en Educación Básica con especialidad de la Universidad del Bío-Bío. Su plan de estudios tiene un eje temático exclusivo para geometría, que cuenta con cinco asignaturas. Una de ellas es “Polígonos y Cuerpos Geométricos” (ver anexo). A esta asignatura están asociados los Objetivos de Aprendizajes (OA) que son de interés a esta investigación en cuanto a resolución de problemas geométricos relacionados con la visualización, construcción y argumentación, y que ponen en juego figuras fundamentales de la geometría plana. Estos son:

OA1. Comprender en profundidad conceptos, representaciones, propiedades y construcciones de formas geométricas planas y del espacio.

OA2. Adquirir las competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales, de un profesor en formación, a través del eje temático Geometría

OA3. Utilizar recursos didácticos y tecnológicos que le permitan construir figuras geométricas; deducir, verificar y demostrar propiedades asociadas a éstas.

OA4. Valorar el carácter formativo, funcional e instrumental de la Geometría en el desarrollo del pensamiento matemático de sus potenciales alumnos y alumnas.

Este programa de estudio, cuenta con seis unidades programáticas, de las cuales las cuatro primeras están alineadas con las intenciones de esta investigación, y son las siguientes:

UNIDADES	**CONTENIDO**
1. Polígonos y circunferencia Generalidades de los polígonos.	Criterios de clasificación. Polígonos regulares. Congruencia de figuras geométricas. Propiedades. Circunferencia y círculo. Cuerdas. Posición relativa entre una circunferencia y una recta. Ángulos en la circunferencia. Circunferencia inscrita, circunscrita y ex inscrita a un polígono.

	Resolución de problemas contextualizados.
2. Construcciones geométricas de figuras planas.	Construcciones fundamentales: paralelas, perpendiculares, simetral, bisectriz. Adición y sustracción de trazos. Copia de ángulos. Adición y sustracción de ángulos. División de un trazo. Construcción de triángulos y cuadriláteros. Construcción de polígonos regulares y estrellados. Resolución de problemas contextualizados.
3. Perímetro y área de regiones poligonales y circulares.	Teoremas de Euclides y Particular de Pitágoras. Cálculo de perímetro de polígonos. Cálculo del área de figuras planas. Comparación de áreas de polígonos. Área del círculo, sectores y segmentos circulares. Resolución de problemas contextualizados.

Las actividades propuestas son problemas geométricos relacionados con la visualización, construcción y argumentación, y que ponen juego figuras fundamentales de la geometría plana, tales como triángulos, cuadriláteros, circunferencia, además de herramientas intelectuales, como definiciones y teoremas. Le son presentadas en fichas de trabajos y tienen que ser abordadas de modo individual.

En este contexto, los **ocho estudiantes participantes** debían tener ya cursada al menos la segunda asignatura semestral de geometría euclidiana, anteriormente individualizada, con el fin de asegurar que ya hubiesen abordado la temática de construcciones geométricas por medio de regla y compás y, también, mediante un procesador geométrico.

El docente a cargo es el investigador, quien tiene formación en didáctica de la matemática, de modo de seguir la modelación propuesta en el análisis de las actividades.

En este caso, las intenciones del investigador son las siguientes:

- Caracterizar los conocimientos disciplinares que los estudiantes necesitan movilizar en la resolución de problemas de construcción geométrica.
- Explorar las operaciones cognitivas (aprehensiones) que ponen en juego los estudiantes de pedagogía en educación básica en la resolución de problemas geométricos.
- Identificar qué instrumentos se privilegian en problemas de construcción geométrica.
- Pesquisar las formas de validación de propiedades que privilegian los estudiantes en la resolución de problemas construcción (G1, G2).

3.3. Concepción y análisis a priori

En el campo de las condiciones de aplicación de la ingeniería se establecieron variables referidas a los Objetivos de Aprendizaje que deben ser alcanzados por los estudiantes de profesorado en esta investigación. Además de esas es necesario formular variables de comando relacionadas con la resolución de problemas geométricos, con énfasis en la visualización, construcción y argumentación.

Las variables macro-didácticas, concernientes a la organización global de la ingeniería, son:

- Referidas a la dimensión cognitiva. Las actividades están concebidas de modo que los estudiantes pongan en juego operaciones cognitivas (aprehensiones) al resolver problemas geométricos. Además, las actividades contemplen al menos dos estrategias de resolución que estén asociadas a los paradigmas geométricos G1 y G2.
- Referidas al contenido. Las actividades consideran conocimientos disciplinarios en torno a definiciones y teoremas de triángulos, cuadriláteros y circunferencia, y construcciones fundamentales (paralelas, perpendiculares, simetral, bisectriz, triángulos, cuadriláteros, circunferencia, polígonos regulares, entre otros)
- Referidas a la dimensión didáctica. Las actividades están concebidas en el sentido de Brousseau, considerando las fases de acción, formulación, validación e institucionalización.

En cuanto a las variables micro-didácticas, concernientes a la organización local de la ingeniería, o sea, la organización de la secuencia.

- Referidas a la gestión de la secuencia en la sala de clases. Se fijó de común acuerdo el día y la hora para la aplicación del instrumento. Posteriormente, al entregarles la ficha de trabajo que presenta las actividades, se indicó el objetivo de la experiencia. Se acordó que el desarrollo de cada situación sería llevado a cabo de manera completamente individual, sin comunicación entre ellos, y sin supervisión del investigador. Además, se les indicó que podían tardar todo el tiempo que estimasen necesario, y que tenían la libertad de utilizar todos los recursos que ellos consideraran pertinentes, sin darle opciones concretas, como por ejemplo dibujar a mano alzada, usar regla y compás, o bien, un procesador geométrico. Por último, se estableció que debían entregar sus producciones en forma escrita.

3.3.1. La propuesta

La propuesta está constituida por seis problemas geométricos que conforman la ficha de trabajo, elegidos de una batería de doce que fueron experimentados por el investigador en los estudios preliminares, los cuales fueron reformulados cuidando que los enunciados satisficieran las condiciones establecidas para esta investigación.

La ficha de trabajo presentada a los seis estudiantes es la siguiente:

Identificación: ____

Situación 1

Considere tres segmentos de 4, 5 y 8 centímetros de longitud.

a) ¿Se puede construir siempre un triángulo cuyos lados sean esos tres segmentos? Justifica tu respuesta.
b) ¿Qué ocurre si los segmentos midiesen 4, 5 y 9 cm de longitud? Justifica tu respuesta.
c) ¿Y si midiesen 4, 5 y 10 unidades? Justifica tu respuesta.
d) ¿Qué puedes concluir después de haber realizado las construcciones anteriores? Enuncia una conjetura.

Situación 2

Sobre los lados BC y CA del triángulo ABC hacia el exterior están construidos los cuadrados BCDE y ACFG.

a) Construya el paralelogramo FCDQ
b) ¿Cuál es la medida del <FCD en términos de los ángulos interiores del ΔABC?
c) Y también, ¿cuál es la medida del <QFC?
d) Pruebe que los triángulos CQF y QCD son congruentes al triángulo ABC

Situación 3

Trace dos bisectrices interiores de un triángulo ABC.

a) ¿Es posible determinar la tercera bisectriz sin construirla? Justifica tu respuesta.

b) ¿Qué puedes decir de la distancia entre el punto de intersección de las bisectrices, y cada uno de los lados?
c) ¿Es posible trazar una circunferencia tangente a los tres lados con centro en el punto de intersección de las tres bisectrices? Justifica y demuestra tu respuesta

Situación 4

Se traza una recta tangente m por un punto T a una circunferencia de diámetro AB con centro en C.

Sobre la recta m ubicar los puntos D y P de modo que los segmentos AD y BP sean respectivamente perpendiculares a la recta m.

a) Construir la configuración resultante
b) Establecer el protocolo de construcción
c) Probar que CD = CP

Situación 5

Considere un triángulo acutángulo ABC.

a) Trace el ortocentro H.
b) En la misma configuración, trace una circunferencia de diámetro BC.
c) Trace desde el vértice A las tangentes a la circunferencia determinando los puntos P y Q.
d) ¿Qué clase de triángulo forman el trío de puntos P, Q y H?

Situación 6

En un triángulo ABC se traza la altura interior BD, AN es la perpendicular a AB y CM la perpendicular a BC; además |AN|=|DC|, |CM| = |AD|.

a) Construir la configuración resultante
b) Establecer el protocolo de construcción
c) Mostrar que M y N son equidistantes del vértice B.

3.3.2. Diseño y análisis a priori.

A continuación se presenta el enunciado original, su modificación, y el **análisis a priori** de los nuevos enunciados. Se establecen los conocimientos previos mínimos que los estudiantes deben movilizar para la resolución del problema, la configuración esperada, las operaciones cognitivas (aprehensiones) correspondientes posibles de ser evidenciadas al abordar cada una de las tareas. Además de las eventuales dificultades para enfrentar cada tarea.

Las tareas fundamentalmente se refieren a la construcción de la configuración asociada al enunciado, la formulación de su protocolo de construcción, y según el caso la demostración de alguna propiedad inherente a la configuración.

En cuanto a las tareas de probar y mostrar, se espera que realicen algunas de las siguientes acciones según el paradigma geométrico en que se sitúa el estudiante:

En G1,

a) Calcular medidas
b) Trazar arcos de circunferencia

En G2,

Demostrar, asumiendo la veracidad del resultado encontrado, recurriendo a alguna definición o propiedad pertinente.

SITUACIÓN 1

Enunciado original	Enunciado modificado
Considere tres segmentos de recta. ¿Bajo qué condiciones se puede construir un triángulo con los segmentos dados? Al establecer tales condiciones, construya un triángulo dados sus tres lados utilizando sólo regla y compás. Establezca el protocolo de construcción.	Considere tres segmentos de 4, 5 y 8 centímetros de longitud. e) ¿Se puede construir siempre un triángulo cuyos lados sean esos tres segmentos? Justifica tu respuesta. f) ¿Qué ocurre si los segmentos midiesen 4, 5 y 9 cm de longitud? Justifica tu respuesta. g) ¿Y si midiesen 4, 5 y 10 unidades? Justifica tu respuesta. h) ¿Qué puedes concluir después de haber realizado las construcciones anteriores? Enuncia una conjetura.

Esta nueva situación contiene explícitamente cuatro tareas.

Se espera que los estudiantes tengan como **conocimientos disponibles** los siguientes:

- El concepto de triángulo
- Trazado de segmentos y arcos de circunferencia.
- Rotular con notaciones adecuadas

En relación a las **operaciones cognitivas**, se espera que dejen en evidencia las siguientes aprehensiones:

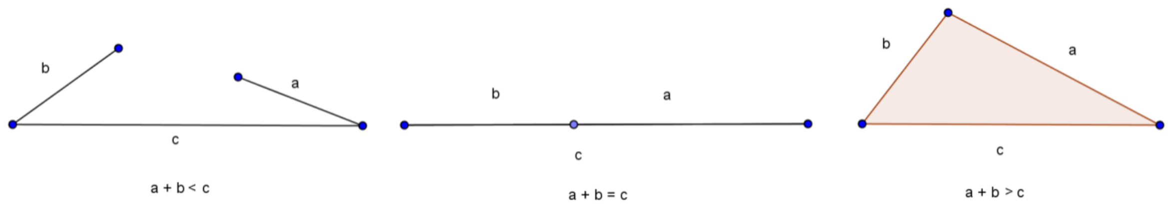
- Aprehensión perceptiva (visualizar propiedades)
- Aprehensión operativa (pasaje del enunciado a la construcción solicitada)
- Aprehensión secuencial (respeto al orden de construcción)
- Aprehensión discursiva (justificación verbal de lo construido)

Para la **Tarea**, se espera que los estudiantes, comparen, discutan y lleguen a conjeturar alguna propiedad general.

La propiedad esperada es la siguiente:

Para construir un triángulo dadas las medidas de tres lados es necesario que *la suma de las medidas de dos lados cualquiera sea mayor a la medida del tercer lado*.

Por otra parte, se espera que en sus construcciones los estudiantes realicen **configuraciones** como las siguientes:



La principal dificultad que podrían presentar los estudiantes sería no darse cuenta que el orden de construcción no tiene importancia sino la elección de las medidas.

SITUACIÓN 2

Enunciado original	Enunciado modificado
Sobre los lados BC, CA y AB del triángulo ABC hacia el exterior están construidos los cuadrados BCDE, ACFG, BAHK. Sean FCDQ y EBKP dos paralelogramos. Probar que el triángulo APQ es rectángulo e isósceles.	Sobre los lados BC y CA del triángulo ABC hacia el exterior están construidos los cuadrados BCDE y ACFG. a) Construya el paralelogramo FCDQ b) ¿Cuál es la medida del <FCD en términos de los ángulos interiores del ΔABC? c) Y también, ¿cuál es la medida del <QFC? d) Pruebe que los triángulos CQF y QCD son congruentes al triángulo ABC

Esta nueva situación contiene explícitamente cuatro tareas.

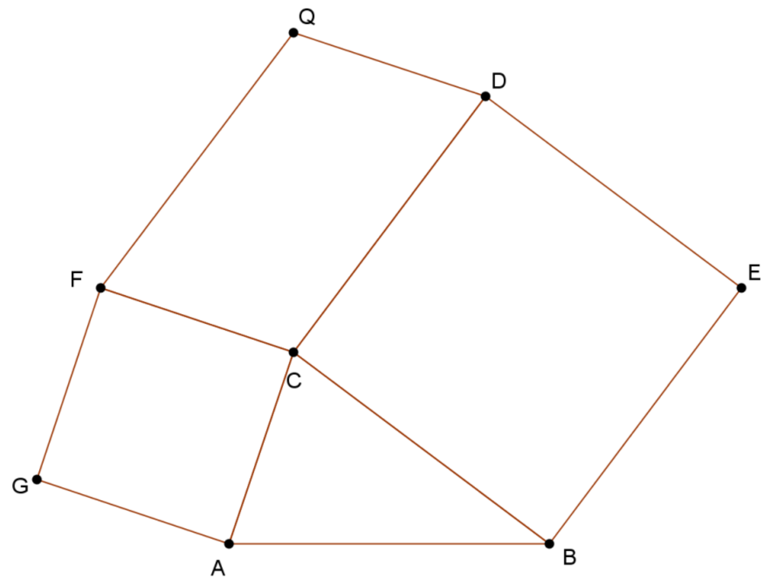
Se espera que los estudiantes tengan como **conocimientos disponibles** los siguientes:

- Los conceptos de triángulo, cuadrado, paralelogramo, paralelismo, perpendicularidad.
- Trazado de segmentos, perpendiculares y paralelas.
- Rotular con notaciones adecuadas.
- Los teoremas de la suma de los ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros, y criterios de congruencia.

En relación a las **operaciones cognitivas**, se espera que dejen en evidencia las siguientes:

- Aprehensión perceptiva (visualizar propiedades)
- Aprehensión operativa (pasaje del enunciado a la construcción solicitada)
- Aprehensión secuencial (respeto al orden de construcción)
- Aprehensión discursiva (justificación verbal de lo construido)

Para la **Tarea 1**, se espera que los estudiantes construyan la siguiente **configuración**: y rotulen adecuadamente utilizando la información dada en el enunciado.

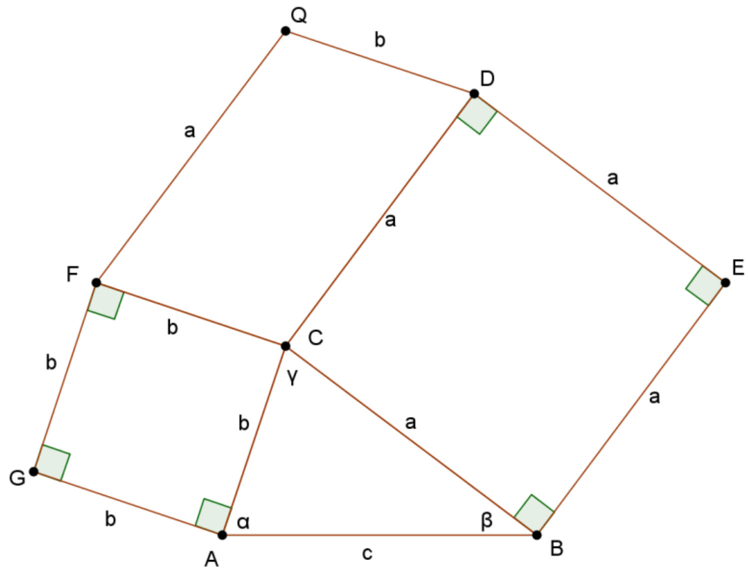


Entre las posibles **dificultades** se pueden prever:

1) Imprecisiones en el uso de los instrumentos de construcción.
2) Dificultades con la construcción de los cuadrados señalados en el enunciado.
3) Dificultades con el trazado de paralelas en la construcción del paralelogramo.
4) Descuido con las rotulaciones.

Para resolver la **Tarea 2**, se espera que los estudiantes le asignen las medidas α, β y γ a los ángulos y por a, b y c las medidas de los lados del triángulo ABC, y las medidas de cada uno de los cuadriláteros según corresponda a la información dada en el enunciado.

Así la configuración queda definida de la siguiente manera:



Visualizando de la configuración tenemos:

<FCD + <DCB+ <BCA + <ACF = 360°   (Propiedad en G2)

<FCD + 90° + γ + 90° = 360°

<FCD = 180° - γ

<FCD = (α + β + γ) - γ (Propiedad en G2)

<FCD = α + β lo pedido.

Las **dificultades** principales que pueden presentar los estudiantes serían de operatoria y que no sepan que un ángulo completo mide 360° y que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180°, ambas propiedades en G2.

Para realizar la **Tarea 3**, es de esperar que los estudiantes conozcan propiedades de los paralelogramos:

a) El teorema que dice: *los ángulos opuestos de todo paralelogramo son congruentes*, les indica que <QFC = <CDQ y <FCD = <DQF.
b) El teorema que dice: la suma de los ángulos interiores de todo cuadrilátero es 360°, les indica que <FCD + <CDQ + <DQF + <QFC = 360°.

De a) y b) se tiene:

<FCD + <CDQ + <DQF + <QFC = 360°
<FCD + <QFC + <FCD + <QFC = 360°
2<FCD + 2<QFC = 360°
<FCD + <QFC = 180°

Por otro lado, <FCD = $\alpha + \beta$ por **Tarea 2**
Y además que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ porque la suma de ángulos interiores de un triángulo.

Luego

$\alpha + \beta +$ <QFC $= \alpha + \beta + \gamma$
<QFC $= \gamma$ lo pedido.

Nuevamente las **dificultades** principales que pueden presentar los estudiantes serían de operatoria y que no sepan utilizar las propiedades anteriormente señaladas.

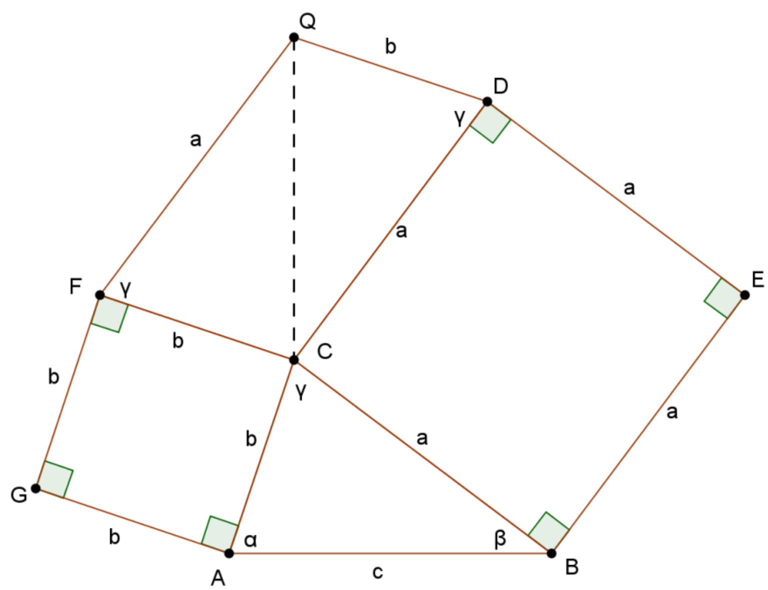
Para realizar la Tarea 3, se puede recurrir a los paradigmas G1 y G2.

En G1, bastaría con medir o bien superponiendo los triángulos, o bien comparando las longitudes con la abertura del compás.

En G2, se puede recurrir al segundo criterio de congruencia, LAL.

En efecto,

Completando la configuración por las tareas anteriores, se tiene:



Visualizando desde la configuración

QF = BC = a

<QFC = <BCA (= γ)

CF = AC = b

Luego por el criterio LAL se tiene que $\Delta CQF \cong \Delta ABC$

Análogamente

CD = BC = a
<CDQ = <BCA (= γ)
DQ = AC = b

Luego por el criterio LAL se tiene que $\Delta QCD \cong \Delta ABC$
En resumen

$\Delta CQF \cong \Delta QCD \cong \Delta ABC$

Entre las **dificultades** que pueden evidenciar los estudiantes están:

1) Que no puedan visualizar los triángulos congruentes desde la configuración.
2) Que no sepan registrar las hipótesis y tesis.
3) Que no sepan utilizar el criterio de congruencia, LAL.

SITUACIÓN 3

Enunciado original	Enunciado modificado
“El punto de intersección de las tres bisectrices interiores de un triángulo es el centro de la circunferencia inscrita”. Represente la afirmación.	Trace dos bisectrices interiores de un triángulo ABC. a) ¿Es posible determinar la tercera bisectriz sin construirla? Justifica tu respuesta.

	b) ¿Qué puedes decir de la distancia entre el punto de intersección de las bisectrices, y cada uno de los lados? c) ¿Es posible trazar una circunferencia tangente a los tres lados con centro en el punto de intersección de las tres bisectrices? Justifica y demuestra tu respuesta

Esta nueva situación contiene tres tareas.

Se espera que los estudiantes tengan como **conocimientos disponibles** los siguientes:

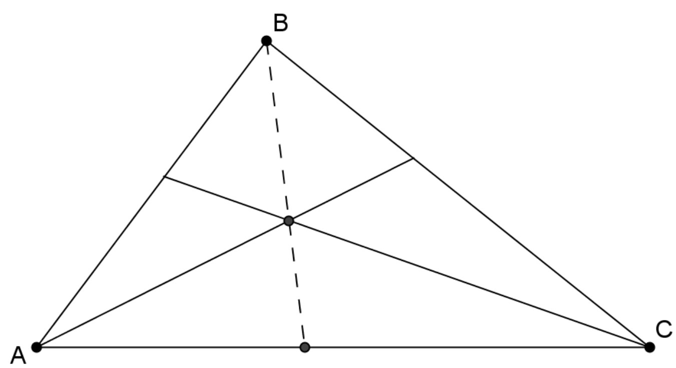
- Los conceptos de bisectriz, perpendicularidad, distancia de un punto a una recta, circunferencia, radio, tangencia.
- Trazado de segmentos, perpendiculares, circunferencia, tangente.
- Rotular con notaciones adecuadas

En relación a las **operaciones cognitivas**, se espera que dejen en evidencia las siguientes:

- Aprehensión perceptiva (visualizar propiedades)
- Aprehensión operativa (pasaje del enunciado a la construcción solicitada)
- Aprehensión secuencial (respeto al orden de construcción)

- Aprehensión discursiva (justificación verbal de lo construido)

Para la **Tarea 1**, se espera que los estudiantes construyan la siguiente **configuración**, a partir de la definición de bisectriz, es decir, debe saber que es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales, o bien que es el lugar geométrico de todos los puntos equidistante de los lados del ángulo:

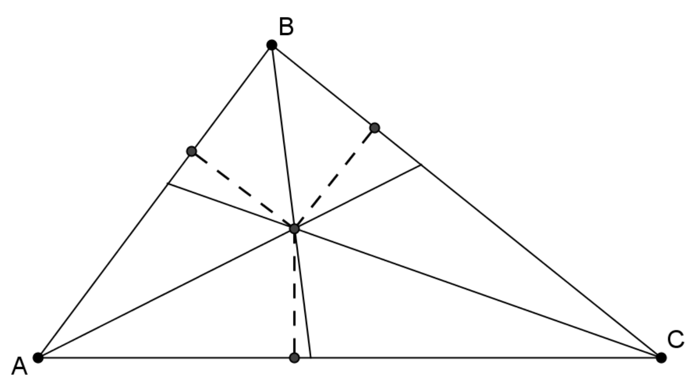


Entre las posibles **dificultades** se pueden prever:

1) Confundir la definición de bisectriz con otros segmentos notables en un triángulo, como las alturas, transversales de gravedad, simetrales, lo que los llevaría a otras configuraciones no solicitadas.
2) Dificultades con el trazado de las dos bisectrices iniciales.
3) Imprecisiones en el uso instrumentos que lo llevarían a conclusiones equivocadas.
4) Desconocimiento que las tres bisectrices son concurrentes y que la tercera se obtiene trazando desde el tercer vértice al punto de intersección de las otras dos.

5) Descuido con las designaciones de elementos construidos, lo que puede conducir a construcciones no solicitadas.

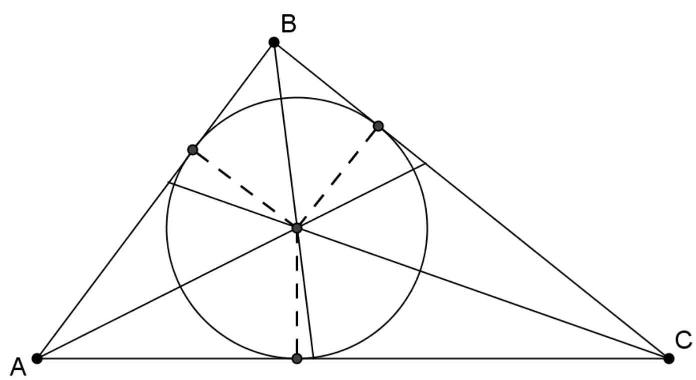
Para responder a la **Tarea 2**, el estudiante debe recurrir nuevamente a la definición de bisectriz de un ángulo, y a la transitividad que se establece entre el punto de intersección de las bisectrices y cada par de lados del triángulo, para concluir que dicho punto es equidistante de los tres lados del triángulo. La configuración se vería así:



Entre las probables **dificultades** que los estudiantes pudieran evidenciar están:

1) No sepan trazar una perpendicular desde un punto a una recta.
2) Imprecisiones en el uso de los instrumentos de construcción que lo llevarían a conclusiones equivocadas.
3) Si utilizan un procesador no sepan usar las herramientas correctas del programa, como trazar bisectriz, trazar perpendicular, calcular distancia, entre otras.

Para realizar la **Tarea 3** basta con afirmar que sí es posible trazar la circunferencia inscrita, pues a partir de las respuestas de las Tareas 1 y 2, se tiene las condiciones para trazarla. La prueba queda establecida inmediatamente en el paradigma G1, simplemente trazando. La configuración sería la siguiente:



La principal **dificultad** que podrían presentar los estudiantes, es que no pudieran realizar esta tarea por haber mal realizadas las tareas anteriores.

SITUACIÓN 4

Enunciado original	Enunciado modificado
Se traza una recta tangente m por un punto T a una circunferencia de diámetro AB con centro en C. Sobre la recta m se localizan los puntos D y P de modo que los segmentos AD y BP	Se traza una recta tangente m por un punto T a una circunferencia de diámetro AB con centro en C. Sobre la recta m ubicar los puntos D y P de modo que los segmentos AD y

son respectivamente perpendiculares a m. Probar que CD = CP.	BP sean respectivamente perpendiculares a la recta m. a) Construir la configuración resultante b) Establecer el protocolo de construcción c) Probar que CD = CP

La nueva situación contiene explícitamente tres tareas.

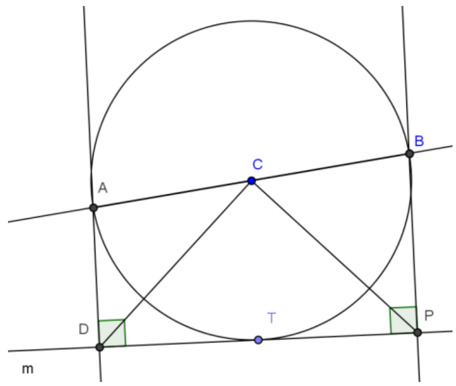
Se espera que los estudiantes tengan como **conocimientos disponibles** los siguientes:

- Los conceptos de circunferencia, radio, diámetro, perpendicularidad, paralelismo, punto de tangencia.
- Trazado de segmentos, perpendiculares, circunferencia y tangente.
- Rotular con notaciones adecuadas
- Los enunciados de los teoremas de congruencia y de Thales

En relación a las **operaciones cognitivas**, se espera que dejen en evidencia las siguientes:

- Aprehensión perceptiva (visualizar propiedades)
- Aprehensión operativa (pasaje del enunciado a la construcción solicitada)
- Aprehensión secuencial (respeto al orden de construcción)
- Aprehensión discursiva (justificación verbal de lo construido)

Para la **Tarea 1**, se espera que los estudiantes construyan la siguiente **configuración**:



Entre las posibles **dificultades** se pueden prever:

1) Imprecisiones en el uso de instrumentos de construcción que llevan a conclusiones equivocadas.
2) Dificultades con el trazado de perpendiculares ya sea en un punto de la recta o desde un punto fuera de ella y trazado de circunferencia.
3) Descuido con las notaciones de los elementos construidos, lo que puede conducir a construcciones no solicitadas.

Para la **Tarea 2** se espera que establezcan un **protocolo de construcción** que tenga los siguientes pasos como mínimo:

1) Construcción de la circunferencia dados su centro C y un punto de ella, A o B.
2) Construcción del diámetro AB.
3) Construcción de la tangente en un punto dado. (m y T en este caso)

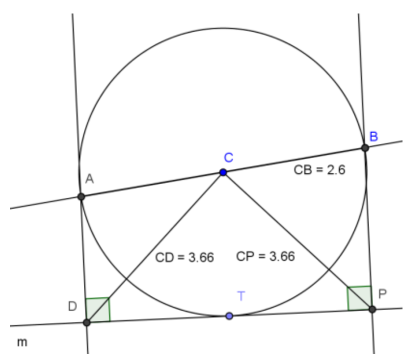
4) Construcción de la recta que contiene a un punto y es perpendicular a una recta dada. (A y m en este caso; determinando el pié de la perpendicular. Punto D en el enunciado) .Ídem para B, m, P.
5) Identificar segmentos congruentes o de igual longitud.

Las posibles **dificultades** para esta tarea pueden ser no respetar el orden de construcción.

Respecto a la **Tarea 3**, se espera que los estudiantes respondan situándose en uno de los paradigmas, G1 o G2 para justificar sus producciones.

En el paradigma G1. Validando por medición con regla graduada la producción realizada.

Por ejemplo, si se obtiene la producción siguiente, bastaría medir.

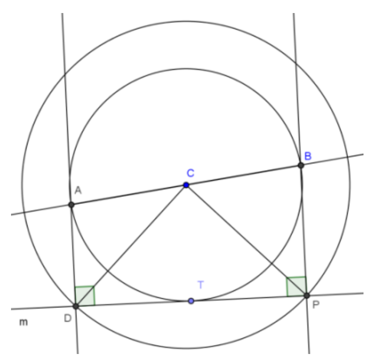


Como **dificultad** posible se puede prever que las medidas varíen por la inexactitud de la construcción.

Esta dificultad desaparece si la construcción se hiciera con un procesador geométrico correctamente utilizado.

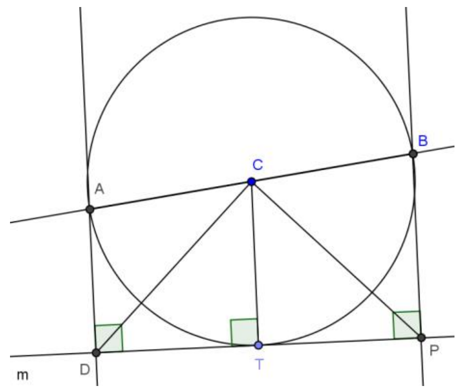
También en el paradigma G1. Se puede validar con uso de compas, la producción realizada.

Por ejemplo si se obtiene la producción siguiente:



En este caso la **dificultad** radicaría en la inexactitud de la construcción con regla y compas. Lo que no ocurriría con un procesador geométrico.

En cuanto al paradigma G2. La validación se realiza recurriendo a definiciones y teoremas de Congruencias y de Thales.



- Para la validación en este caso es necesario precisar las hipótesis:

$CT \perp m$

AD //CT // BP

r = *AC* = *BC*

El Teorema de Thales permite escribir: $\frac{PT}{TD} = \frac{BC}{CA}$

Como $\frac{BC}{CA} = 1$ se tiene $\frac{PT}{TD} = 1$

Luego: PT = TD (primera conclusión)

Comparando los triángulos DTC y PTC, se obtiene:

- PT = TD
- <DTC = <PTC = 90°
- TC = r lado común

Por el segundo teorema de congruencia (Criterio LAL) los triángulos DTC y PTC son congruentes. Luego se obtiene

DC = PC (segunda conclusión)

Con esta segunda conclusión se obtiene lo pedido.

Entre las **dificultades** que podrían tener algunos estudiante están, el no distinguir la hipótesis de la tesis. Además no reconocer en las informaciones alguna propiedad o teorema pertinente que le ayude a encontrar el camino para la validación.

SITUACIÓN 5

Enunciado original	Enunciado modificado
Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC. Las tangentes por A a la circunferencia de diámetro BC lo son en P y Q. Demostrar que P, Q y H son colineales.	Considere un triángulo acutángulo ABC. a) Trace el ortocentro H. b) En la misma configuración, trace una circunferencia de diámetro BC. c) Trace desde el vértice A las tangentes a la circunferencia determinando los puntos P y Q. d) ¿Qué clase de triángulo forman el trío de puntos P, Q y H?

Esta nueva situación contiene cuatro tareas.

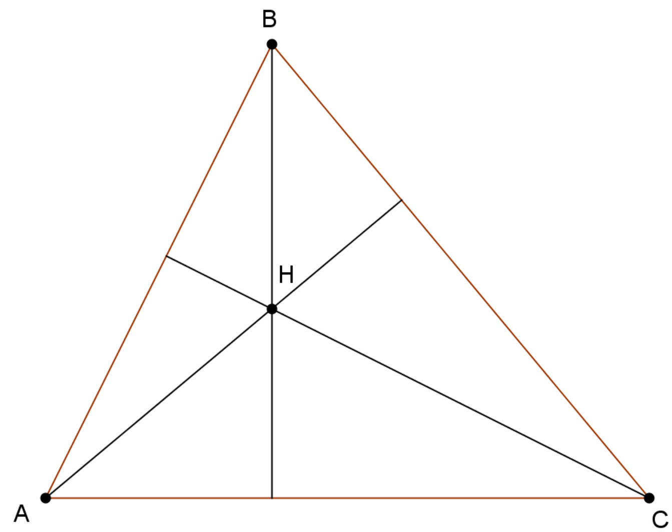
Se espera que los estudiantes tengan como **conocimientos disponibles** los siguientes:

- Los conceptos de altura, ortocentro, circunferencia, diámetro, radio, tangente.
- Trazado de segmentos, perpendiculares, circunferencia, tangente.
- Rotular con notaciones adecuadas

En relación a las **operaciones cognitivas**, se espera que dejen en evidencia las siguientes:

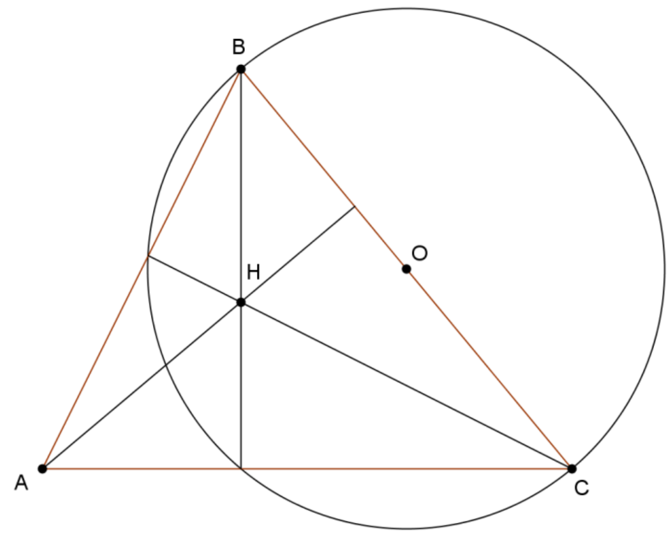
- Aprehensión perceptiva (visualizar propiedades)
- Aprehensión operativa (pasaje del enunciado a la construcción solicitada)
- Aprehensión secuencial (respeto al orden de construcción)
- Aprehensión discursiva (justificación verbal de lo construido)

Para la **Tarea 1**, se espera que los estudiantes construyan la siguiente **configuración**, utilizando la definición de altura, y la propiedad que concurren a un punto interior llamado ortocentro, y lo rotulen por H.



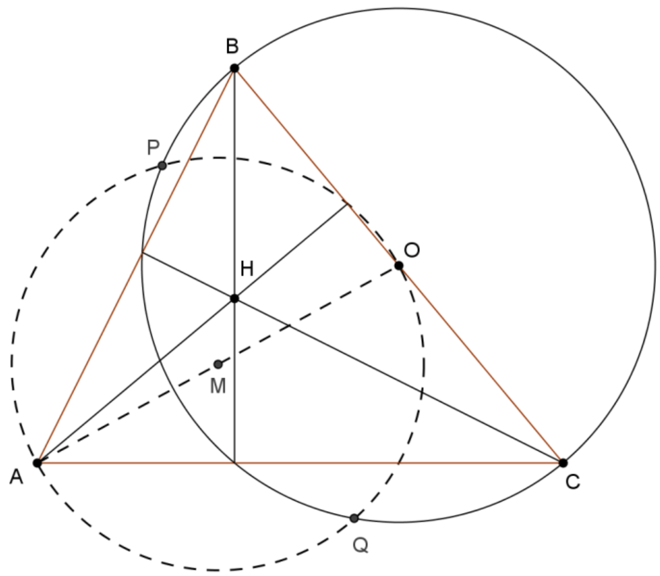
Entre las **dificultades** que pueden evidenciar los estudiantes están, no saber trazar una altura, es decir, una perpendicular por un punto exterior (vértice) a una recta (lado opuesto). También, la impericia de utilizar correctamente los instrumentos de construcción, regla y compás o procesador geométrico.

Para la **Tarea 2** se espera que los estudiantes determinen el punto medio del lado BC, el diámetro de la circunferencia, lo rotulen por ejemplo con O, de modo de usarlo como el centro de ella y la tracen, llegando a la siguiente configuración:

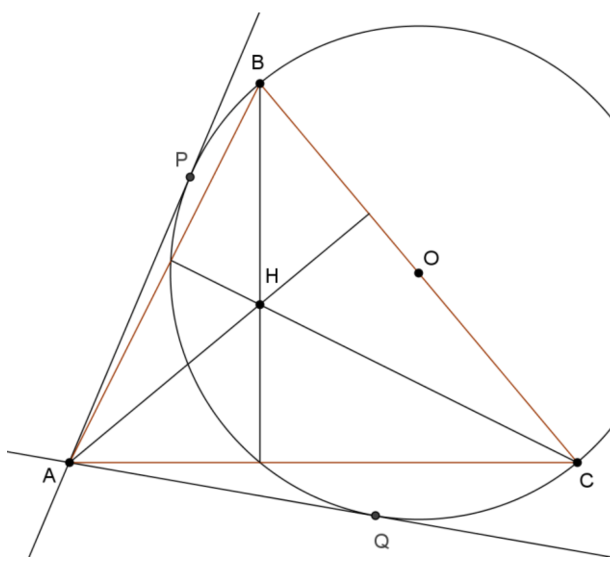


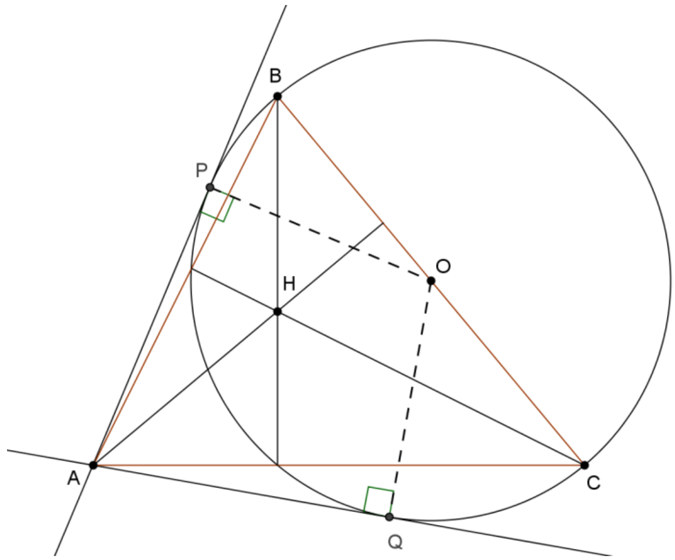
La **dificultad** principal que pueden presentar los estudiantes, radica en que no reconozcan que el radio de una circunferencia es la mitad del diámetro, por lo cual no podrían determinar el punto medio, centro de la circunferencia, y trazarla.

Para realizar la **Tarea 3**, se espera que los estudiantes utilicen la propiedad de G2 que dice que *toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio*. Para ello procederán a trazar una circunferencia de centro en el punto medio M del segmento que une el vértice A y el centro de la circunferencia de centro O, estableciendo los puntos de intersección entre ambas circunferencia, los que corresponderán a los puntos de tangencia. La configuración sería así:



Por último para completar la **Tarea 3** se trazan las tangentes desde A, quedando la siguiente configuración:

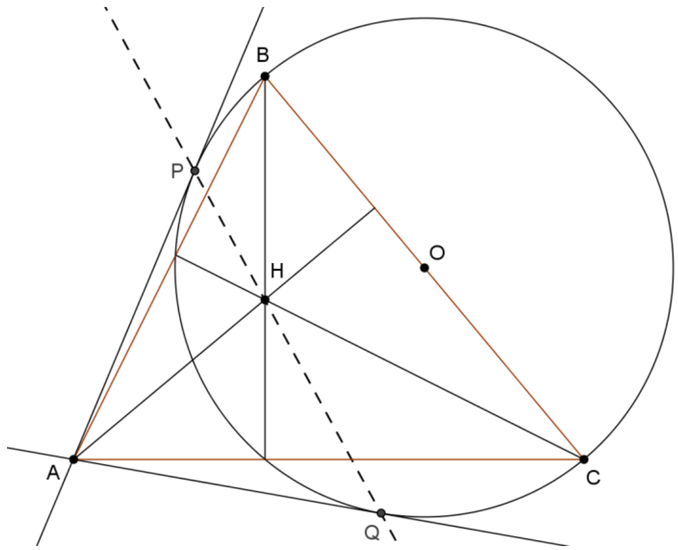




Entre las **dificultades** que los estudiantes pueden evidenciar están:

1) Inexactitud de la representación al utilizar inapropiadamente los instrumentos de construcción.
2) No conocen el procedimiento para determinar los puntos de tangencia.
3) Suplir el procedimiento de construcción por el trazado aproximado al usar libremente la regla.
4) Esta ambigüedad se evita si se utiliza un procesador geométrico.

Para responder la Tarea 4 bastaría con visualizar en la configuración la posición los puntos P, Q y H. De este modo se puede afirmar que no forman un triángulo, sino una triada colineal, y que se verifica en G1 al trazar una recta que pasa por ellos, como lo que indica la siguiente configuración.



La principal dificultad que se puede manifestar en los estudiantes radica en que si la configuración está mal construida, los tres puntos formarían un triángulo, lo que es falso.

SITUACIÓN 6

Enunciado original	Enunciado modificado
En un triángulo ABC está trazada la altura BD, AN es la perpendicular a AB y CM la perpendicular a BC; además |*AN*|=|*DC*|*,* |*CM*| = |*AD*|*. Mostrar que M y N son equidistantes del vértice B.*	En un triángulo ABC se traza la altura interior BD, AN es la perpendicular a AB y CM la perpendicular a BC; además |AN|=|DC|, |CM| = |AD|. a) Construir la configuración

	resultante b) Establecer el protocolo de construcción c) Mostrar que M y N son equidistantes del vértice B.

Esta nueva situación contiene explícitamente tres tareas

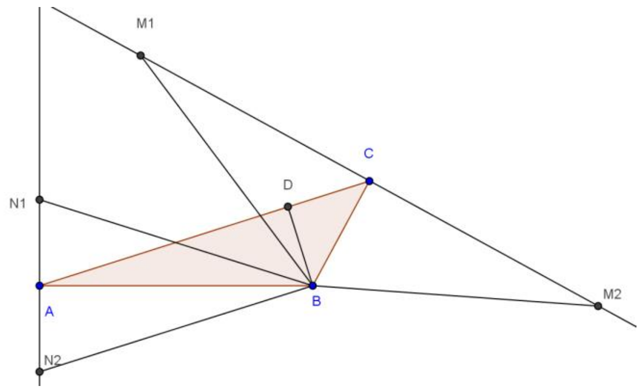
Se espera que los estudiantes tengan como **conocimientos disponibles** los siguientes:

- Propiedades de la altura en un triàngulo
- Trazado de segmentos, perpendiculares, arcos de circunferencia
- Rotular con notaciones adecuadas
- Los teoremas de congruencia y de Pitágoras

En relación a las **operaciones cognitivas**, se espera que se dejen en evidencia las siguientes:

- Aprehensión operativa (pasaje del enunciado a la construcción solicitada)
- Aprehensión secuencial (respeto al orden de construcción)
- Aprehensión perceptiva (visualizar propiedades a recurrir)
- Aprehensión discursiva (justificación verbal de lo construído)

En la **Tarea 1**, se espera que los estudiantes siguiendo el enunciado lleguen a construir la siguiente **configuración**:



Entre las posibles **dificultades** se pueden prever:

1) Imprecisiones en el uso instrumentos que lo llevarían a conclusiones equivocadas.
2) Dificultades con el trazado de la altura del lado AC.
3) Dificultades con el trazado de perpendiculares por los puntos A y C.
4) Dificultades para determinar los puntos M y N, respetando las condiciones de equidistancia.
5) Descuido con las designaciones de elementos construidos, lo que puede conducir a construcciones no solicitadas.

En la **Tarea 2** se espera que establezcan un **protocolo de construcción** que tenga por ejemplo los siguientes pasos:

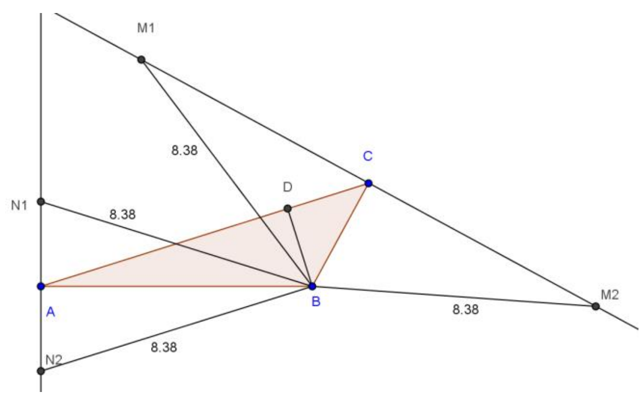
1) Construcción del triángulo A, B y C.
2) Construcción de la altura interior del triángulo. Determinación y rotulación del pie de la altura (D en este caso)
3) Construcción de las perpendicular es a AB en A y a CB en C
4) Determinación de los puntos N y M en las rectas perpendiculares determinadas en 3) respetando las condiciones de las hipótesis.

5) Identificar los segmentos de igual longitud (o congruenets) .

La principal **dificultad** para esta tarea sería en el no respeto del orden de construcción.

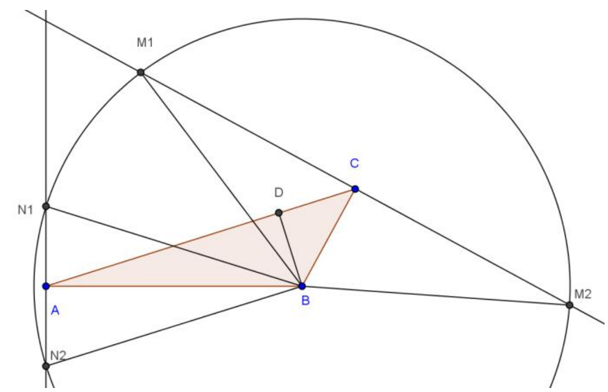
En cuanto a la **Tarea 3**, se espera que los estudiantes justifiquen sus producciones en alguno de los paradigmas, G1 o G2.

En el paradigma G1. Puede validar por medición con regla graduada
Por ejemplo, para la producción siguiente bastaría medir.



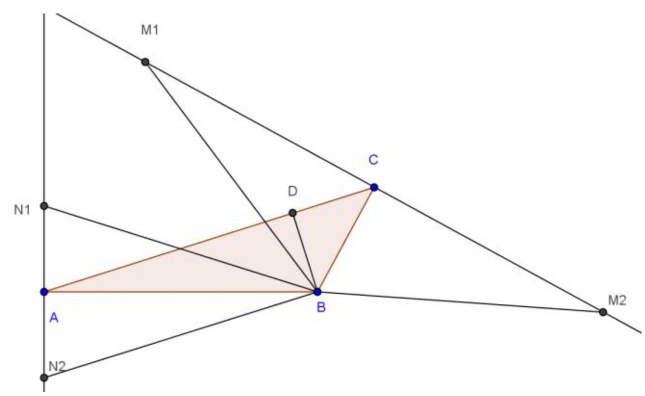
La **dificultad** se podría presentar en las medidas, ya que éstas se alteran por la inexactitud del instrumento o la impericia del estudiante. Esta dificultad desaparece si la construcción se hiciera con un procesador geométrico correctamente utilizado.

También en el paradigma G1. Se puede validar con uso de compas. Por ejemplo, para la siguiente producción:



La **dificultad** en este caso se presentaría por la inexactitud de la construcción con regla y compas. Ella desaparece si se realiza con un procesador geométrico.

En cuanto al paradigma G2. La validación debe recurrir a definiciones y teoremas en este caso al teorema de Pitágoras.



En efecto:

Hipótesis dadas en el enunciado son:

(1) BD altura

(2) AN $\perp$ AB

(3) CM $\perp$ BC

(4) $|AN| = |DC|$

(5) $|CM| = |AD|$

Lo que hay que probar (Tesis) es: $|BM| = |BN|$

Demostración (validación)

Triángulo BAD es rectángulo (hipótesis (1)

Donde por teorema de Pitágoras por visualización se puede escribir:
$|BA|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$ (6)

Análogamente

Δ BCD rectángulo y $|BC|^2 = |CD|^2 + |BD|^2$ (7)

Δ BNA rectángulo y $|BN|^2 = |BA|^2 + |AN|^2$ (8)

Δ BMC rectángulo y $|BM|^2 = |BC|^2 + |CM|^2$ (9)

Conmutando (7): $|CD|^2 + |BD|^2 = |BC|^2$ y sumando con (6)

Se obtiene:

$$|AD|^2 + |BD|^2 + |BC|^2 = |CD|^2 + |BD|^2 + |BA|^2$$

Cancelando se tiene $|AD|^2 + |BC|^2 = |CD|^2 + |BA|^2$ (10)

En 10 se sustituye $AD\ por\ CM\ y\ CD\ por\ AN$ (por 4 y 5)

Se obtiene $|CM|^2 + |BC|^2 = |AN|^2 + |BA|^2$ (11)

En 11 sustituyendo Desde (8) y (9)
Se obtiene

$$|BM|^2 = |BN|^2$$

Luego se deduce la tesis $|BM| = |BN|$

Entre las **dificultades** que podrían ser evidenciadas en algunos estudiantes están, se cuentan el no distinguir la hipótesis de la tesis, no reconocer en las informaciones dadas alguna propiedad o teorema pertinente (aprehensión perceptiva) que le ayude a validar.

3.4. Experimentación

La experimentación se realizó en tres etapas, con una diferencia de dos semanas entre ellas. La primera etapa consistió en el desarrollo a lápiz y papel de la ficha de trabajo por parte de los estudiantes, con la intención de evidenciar las fases de acción y formulación. La segunda etapa consistió en el desarrollo de la misma ficha de trabajo, con apoyo tecnológico, es decir, con un procesador geométrico, y la intención de asegurar la fase de validación. La tercera etapa, de institucionalización, se desarrolló en una entrevista personal del investigador con cada estudiante, donde se abordó lo que habían aprendido, y lo que se les presentó con mayor dificultad al enfrentar cada situación.

Para el inicio de la realización de la experimentación se fijó de común acuerdo, día y hora: lunes 16 de noviembre de 2015, a las 15:40 horas, en el Laboratorio de Didáctica y Recursos Multimediales de la Facultad de Educación y Humanidades de la Universidad del Bío-Bío, con la presencia de los ocho estudiantes participantes.

Al entregarles la ficha de trabajo con las actividades se indicó el objetivo de la experiencia. Se acordó que el desarrollo de cada actividad sería llevada a cabo de manera completamente individual, sin comunicación entre ellos, y sin supervisión del profesor (investigador). Además, se les indicó que podían tardar todo el tiempo que estimasen necesario, y que tenían la libertad de utilizar todos los recursos que ellos consideraran pertinentes, sin darle opciones concretas en la primera etapa (por ejemplo dibujar a mano alzada o usar regla y compás).

Durante la experimentación se procedió a fotografiar a los estudiantes trabajando en la ficha. Sus producciones se encuentran con formato de imagen jpg en una carpeta digital.

Después de trabajar por más de dos horas, los estudiantes fueron entregando uno a uno sus producciones escritas.

La segunda etapa, se realizó el lunes 30 de noviembre de 2015, a las 14:10 horas en el mismo lugar, es decir, en el Laboratorio de Didáctica y Recursos Multimediales. Cada estudiante se presentó con su notebook, con el procesador GeoGebra. Ellos abordaron la ficha de trabajo, con las mismas condiciones de la primera etapa, salvo porque en esta ocasión debían utilizar con un procesador geométrico para desarrollarla. Debían entregar sus producciones digitales en una carpeta, con los archivos en formato Word (docx) y GeoGebra (ggb).

La tercera etapa, correspondiente a la fase de institucionalización, se realizó a través de entrevistas individuales seguida de un plenario, que tuvo lugar el lunes 14 de diciembre de 2015. Los registros de las entrevistas y plenario están como archivos mp3 en la carpeta digital.

3.5. Análisis a posteriori

El análisis se realiza por etapa y actividad.

Las situaciones se denotan por Si donde i precisa 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

A los estudiantes se denominan por Ei, donde i precisa el número correspondiente al estudiante, del 1 al 8, cuando se habla de él, independientemente de la situación.

A los estudiantes se denominan por Ei-j, donde i precisa el número correspondiente al estudiante, del 1 al 8, y j precisa la situación 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Las tareas de cada situación se denotan por Ti donde i precisa 1, 2, 3 o 4 según corresponda.

3.5.1. Análisis a posteriori. Primera etapa: trabajo a lápiz y papel.

Situación 1:

S 1	T 1	T 2	T 3	T 4
E 1	• Representa los tres segmentos, con sus respectivas medidas. • **Argumenta** que sí se puede construir el triángulo, enunciando el teorema de la desigualdad triangular. En este caso se evidencia la **aprehensión discursiva** al justificar su respuesta con un teorema. • Corrobora el teorema señalando las	• Argumenta diciendo que sí se puede construir el triángulo, haciendo mención al mismo teorema (**aprehensión discursiva**), y señala dos desigualdades y una igualdad, lo que se contradice con lo señalado por el teorema. • Además, dibuja el triángulo con regla graduada, situándose en **G1**, indicando las	• **Argumenta** que no se cumple el teorema (**aprehensión discursiva**). • Muestra las desigualdades, indicando con los signos x y ✓ el cumplimiento o no de la aseveración del teorema. • Afirma que las longitudes señaladas no cumplen con ser un trío pitagórico, lo que evidencia una	• El estudiante no aborda esta tarea.

	desigualdades correspondientes. • Lo dibuja, representando la configuración requerida, solo con regla graduada, situándose en el paradigma **G1**. • Rotula los segmentos con las medidas. • Responde correctamente la T 1.	medidas de los lados, pero no se da cuenta que no es posible obtener dicho triángulo. • Su respuesta se ubica en el paradigma **G1** • Se evidencia imprecisión al representar un triángulo inexistente. • Responde erróneamente la T 2.	**aprehensión discursiva** no utilizada anteriormente, y sin relación directa con el teorema a que se refiere esta situación. • A pesar de lo señalado anteriormente, la respuesta es correcta.	
E 2	• Representa los tres segmentos, con sus respectivas medidas. • **Argumenta** que sí se puede construir el	• Argumenta diciendo que sí se puede construir el triángulo, haciendo mención al mismo teorema	• **Argumenta** que no se cumple el teorema (**aprehensión discursiva**). • Muestra las	• El estudiante no aborda esta tarea.

	triángulo, enunciando el teorema de la desigualdad triangular. En este caso se evidencia la **aprehensión discursiva** al justificar su respuesta con un teorema. • Señala un sólo ejemplo de las desigualdades. • Dibuja el triángulo, representando la configuración requerida, sólo con regla graduada, situándose en **G1**. • Rotula los segmentos con sus respectivas	(**aprehensión discursiva**), y señala dos desigualdades y una igualdad, lo que se contradice con lo señalado por el teorema. • Además, dibuja el triángulo, indicando las medidas de los lados, pero no se da cuenta que no es posible obtener dicho triángulo. • Se evidencia imprecisión al representar un triángulo inexistente. • Su respuesta se	desigualdades, indicando con los signos x y ✓ el cumplimiento o no de la aseveración del teorema. • Afirma que las longitudes señaladas no cumplen con ser un trío pitagórico, lo que evidencia una **aprehensión discursiva** no utilizada anteriormente, y sin relación directa con el teorema a que se refiere esta situación. • Responde	

	medidas. • Responde correctamente la T 1.	ubica en el paradigma **G1**. • Responde erróneamente la T 2.	correctamente la T 3.	
E 3	• Parte del supuesto que el triángulo existe si cumple el teorema de Pitágoras. • Argumenta que no se puede construir, pues al verificar el teorema de Pitágoras con las medidas dadas, no resulta la igualdad pitagórica, se evidencia una **aprehensión discursiva** errónea. • Además, no reconoce	• Indica que tampoco se puede construir. • Utiliza nuevamente la igualdad pitagórica, **aprehensión discursiva**, para mostrar numéricamente que no se satisface. • Presenta una configuración con los segmentos rotulados por a, b y c, y las medidas dadas.	• Indica que tampoco se puede construir. • Utiliza nuevamente la igualdad pitagórica, **aprehensión discursiva**, para justificar su respuesta, sustituyendo en la igualdad pitagórica. • No presenta configuración. • A pesar de lo señalado	• Conjetura que cada lado (cateto) deben medir 4 cm, 5 cm y que el mayor 6 cm o 6,4 cm. Afirma que tales medidas son las que permitirían obtener el triángulo. • Presenta el triángulo con las medidas dadas por el estudiante, pero sin rótulos.

	la existencia de la hipotenusa, ya que a todos los lados les llama catetos, ni deja en evidencia que este teorema está asociado a triángulos rectángulos. • Presenta una configuración construida con regla graduada y las medidas dadas, pero no satisface el requerimiento de ser el triángulo pedido, situándose en **G1**. • Rotula con a, b y c los correspondientes	• Se sitúa en **G1.** • Su respuesta a pesar de que es correcta, esta no es consistente con el teorema asociado, el de la desigualdad triangular. • Respuesta incorrecta.	anteriormente, la respuesta es incorrecta.	

	segmentos. • Responde erróneamente.			
E 4	• Representa los tres segmentos, con sus respectivas medidas. • **Argumenta** que sí se puede construir el triángulo, enunciando el teorema de la desigualdad triangular. En este caso se evidencia la **aprehensión discursiva** al justificar su respuesta con un teorema. • Ejemplifica desigualdades con las	• Afirma que la suma de esos lados suman igual al valor del segmento que no ha sido tomado, pero no indica si es posible o no construirlo. • Dibuja un triángulo y lo rotula con las medidas dadas, utilizando regla graduada. • Se evidencia imprecisión al representar un triángulo inexistente.	• Argumenta que es imposible realizar el triángulo, utilizando el teorema de la desigualdad triangular, ya que la suma de los lados menores es menor que el lado mayor. • No presenta configuración. • Respuesta correcta.	• Concluye que es posible construir un triángulo solo si la suma de dos de sus lados es mayor que el tercer lado. • Afirma que en la T2 no es posible porque no se cumple el teorema, **pero que en la práctica si se puede construir.** (debido a la impericia de utilizar instrumentos de precisión, regla

	medidas dadas. • Representa la configuración requerida, con regla graduada, ubicándose en **G1**. • Rotula los segmentos con las medidas. • Respuesta correcta.	• No relaciona su afirmación con la configuración. • Respuesta incorrecta.		graduada) • Dibuja un triángulo rotulándolo con a, b y c, con medidas dadas por él (3, 5 y 6 cm) • Formula las desigualdades en términos de los rótulos. • Respuesta parcialmente correcta.
E 5	• Representa los tres segmentos, con sus respectivas medidas. • **Argumenta** que sí se puede construir el triángulo, enunciando	• Utiliza el teorema de la desigualdad, pero lo modifica al decir que la suma de los dos lados menores puede ser mayor o	• Indica que con las medidas dadas no se puede construir el triángulo, porque no cumple el teorema de la desigualdad	• El estudiante no aborda esta tarea.

	el teorema de la desigualdad triangular, evidenciando una **aprehensión discursiva**. • Representa la configuración con regla graduada y las medidas dadas, situándose en **G1**. • Rotula los segmentos con las medidas dadas. • Respuesta correcta	igual al lado más largo. **Aprehensión discursiva** errónea. • Dibuja el triángulo y rotula con las medidas dadas utilizando regla graduada. Se sitúa en **G1**. • No relaciona su afirmación con la configuración. • Se evidencia imprecisión al representar un triángulo inexistente. • Respuesta incorrecta.	triangular. • **Aprehensión discursiva**. • Respuesta correcta.	
E 6	• Representa los tres segmentos,	• Afirma que si se puede construir el	• Afirma que no se puede construir el	• Plantea que los segmentos que

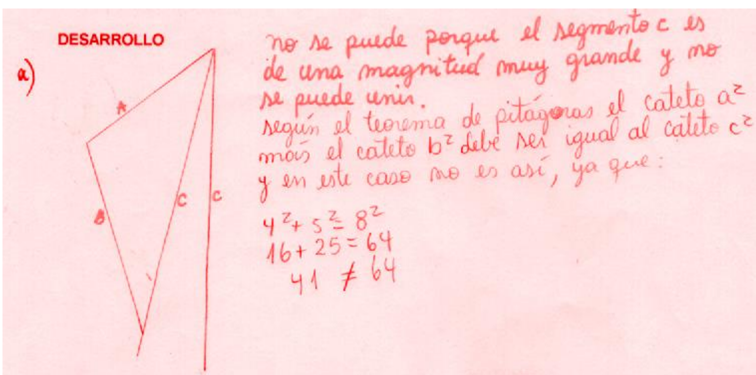
	inicialmente con medidas 4, 5 y 6 cm, luego corrige alargando el segmento de 6 cm a 8cm, y los rotula con sus respectivas medidas. • **Argumenta** que sí se puede construir el triángulo, pero no enuncia el teorema de la desigualdad triangular, sino que justifica por la cercanía de las medidas de los segmentos. En este caso se evidencia la **aprehensión discursiva** al justificar	triángulo con las medidas dadas, apoyándose en la propiedad que formuló e insiste que eso se debe a la intersección de los tres segmentos. • Evidencia una confusión de conceptos: intersección de segmentos y construcción de triángulos. • Respuesta incorrecta.	triángulo con los tres segmentos de esas medidas, pero no justifica el por qué, e indica como en el ejemplo anterior. De esta manera se contradice con su afirmación en la T2. • La respuesta es correcta (que no se puede construir), pero no la justificación.	conforman un triángulo debe cumplir que la suma de los segmentos menores debe ser mayor o igual a la medida del segmento mayor. • Con lo que enunció, intenta recordar el teorema de la desigualdad triangular, pero no la usa en la resolución de las tareas anteriores. • Respuesta incorrecta.

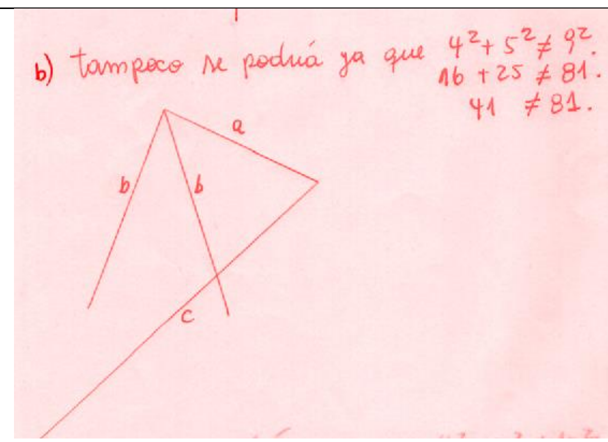
	su respuesta con una propiedad no verificada. Además afirma que la intersección de los segmentos permiten la construcción del triángulo. • Representa una configuración con regla graduada y compás, utilizando las medidas 4, 5 y 6 cm. Pinta el triángulo. Se sitúa en **G1**. Rotula los segmentos con las medidas. • Respuesta correcta.			
E 7	• Construye un triángulo	• Afirma que al cambiar	• Argumenta que no se	• Sus conjeturas están

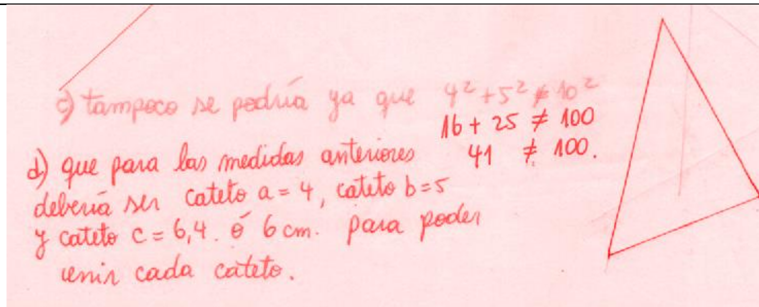
	con regla graduada, con las medidas dadas, rotulando los vértices por A, B y C. Se sitúa en el paradigma **G1**. • Argumenta que como las medidas son diferentes, el triángulo es escaleno. Se evidencia **aprehensión discursiva**. • Del mismo modo, al formular el teorema de la desigualdad triangular.	la medida de un lado, cambia la forma. • Admite que se puede construir el triángulo, pero que no cumple el teorema de la desigualdad. • Dibuja sin precisión con regla graduada, por lo que le resulta un triángulo. Sigue en el paradigma **G1**. • Respuesta incorrecta.	puede construir el triángulo con las medidas dadas, basándose en el teorema de la desigualdad, pero se equivoca al registrar la palabra menor en vez de mayor (**aprehensión operativa**). • No obstante, representa correctamente la configuración. Nuevamente se sitúa en **G1**. • Respuesta correcta.	dadas como conclusiones. • Primero indica que al ir aumentando el valor de uno de sus lados, se hace difícil la construcción (T3). • Además, enuncia el teorema de la desigualdad triangular. • Respuesta correcta.
E 8	• Construye un triángulo	• Se evidencia	• Construye la	• Después de realizar

	con las medidas dadas utilizando regla graduada, por lo que se sitúa en el paradigma **G1**. • Argumenta que si es posible construirlo, pero que es factible si se hace con transportador. Deja en evidencia que desconoce los diferentes instrumentos que se utilizan para la construcción geométrica. • Aparece la **aprehensión perceptiva**, al afirmar	imprecisión al representar el triángulo inexistente, pero es más precisa que la realizada por los otros estudiantes. • A partir de su configuración (**aprehensión perceptiva**) argumenta que es posible la construcción del triángulo, pero que al alargar más el segmento más largo, los segmentos menores tienden a tocar el segmento	configuración con regla graduada y compás, situándose en **G1**. • A partir de la configuración (**aprehensión perceptiva**) indica que no es posible construir. • Respuesta correcta.	las tareas anteriores, conjetura que si un segmento es mayor que la suma de los otros dos segmentos necesarios para formar el triángulo, el triángulo no podrá cerrarse, por ello no se logrará construir el triángulo. • Formuló una aproximación al teorema de la desigualdad triangular. • Respuesta correcta.

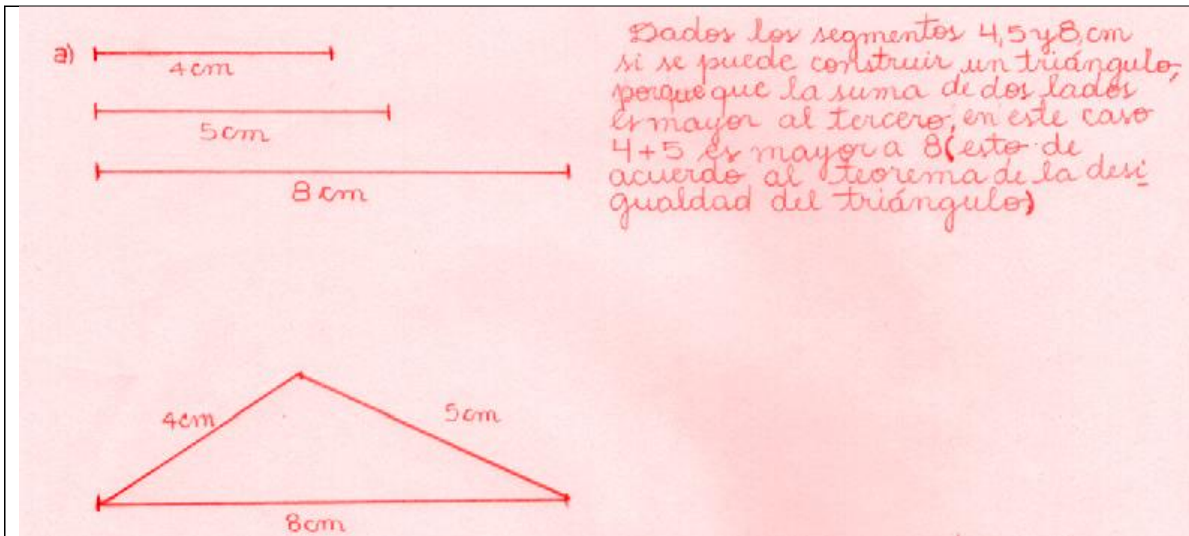
	que se percata de que el triángulo es obtuso. Utiliza la palabra obtuso, en vez de obtusángulo. • Respuesta correcta.	mayor, y que de esta forma no se podría formar el triángulo. • Pero no concluye que no se tiene un triángulo con las medidas dadas. • Respuesta medianamente correcta.		



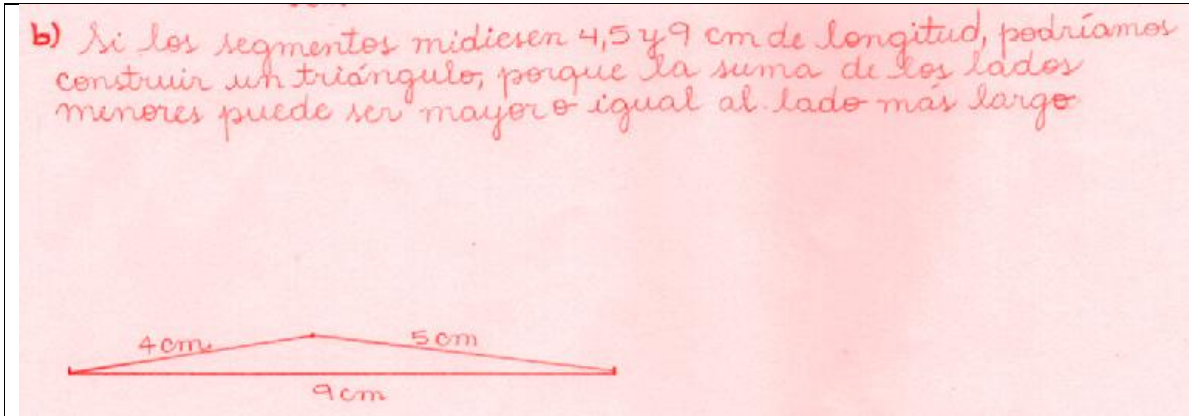




Respuestas de E 3 para la Situación 1



Respuestas de E 5 para la Situación 1

Situación 2:

S 2	T 1	T 2	T 3	T 4
E 1	• Construye con regla graduada la configuración solicitada a partir de un triángulo rectángulo de lados	• Utiliza trigonometría en el triángulo rectángulo para determinar sus ángulos agudos, por lo tanto usa	• Indica la medida del ángulo QFC y argumenta con un procedimiento algebraico para determinarlo,	• Argumenta que los triángulos CQF y QCD son congruentes al triángulo ABC, calculando las

	3, 4 y 5 cm. • Rotula correctamente las unidades figurales. • Señala con línea punteada una de las diagonales de paralelogramo, lo pinta e indica los lados paralelos con | y ||. • Indica los ángulos rectos de los cuadrados y del triángulo. • Se evidencia implícitamente la aprehensión secuencial en la	calculadora. • Para calcular el ángulo FCD, utiliza la identidad que dice que la suma de los ángulos que conforman un ángulo completo es 360°. • Es decir, se evidencia la aprehensión discursiva, al utilizar la definición de seno de un ángulo y la igualdad de que la suma de los ángulos que conforman un ángulo completo es 360°.	valiéndose de que la suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es 360°, y que los ángulos opuestos son iguales (**aprehensión discursiva**). • Así se evidencia la aprehensión discursiva y su interacción con la aprehensión operativa.	medidas angulares, pero no hace referencia a las medidas de los lados, ni aplica los criterios de congruencia. • Se evidencia una aprehensión discursiva. • Respuesta incorrecta. •

	construcción. • Respuesta correcta.	• Respuesta correcta.		
E 2	• Construye con regla graduada la configuración solicitada a partir de un triángulo equilátero. • Rotula correctamente las unidades figurales. • Señala con línea punteada una de las diagonales del paralelogramo, lo pinta e indica los lados paralelos con ǁ. • Indica los ángulos	• Registra algebraicamente el procedimiento de cálculo del valor del ángulo α a partir de que la suma de los ángulos que conforman un ángulo completo es 360°. • Posteriormente, para identificar el ángulo β, utiliza las propiedades de que la suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es 360° y que posee	• La registra en la tarea 2.	• No prueba la congruencia, sólo argumenta que trasladando el triángulo ABC sobre el triángulo CQF y utilizando la simetría se puede verificar la congruencia. • De este modo, se evidencia la **aprehensión discursiva** y se sitúa en el paradigma **G1**.

	rectos de los cuadrados y los ángulos del triángulo equilátero. • Se evidencia implícitamente la aprehensión secuencial en la construcción. • Respuesta correcta. • Asigna los rótulos α y β a los ángulos obtuso y agudo del paralelogramo. •	dos pares de ángulos suplementarios. • El orden de presentación de estos procedimientos fue inverso, registrando primero el segundo. • Estos procedimientos los registra al lado de la configuración. • Se evidencia así una **aprehensión discursiva** al asociar el procedimiento a un teorema o		

		propiedad.		
E 3	• Construye la configuración sobre un triángulo “parecido” a un triángulo equilátero (indica el ángulo de 60°). • Rotula correctamente las unidades figurales. • Utiliza transportador para medir uno de los ángulos del paralelogramo y así determinar los restantes. • Los valores asignados están	• No la especifica, pero la registra en la configuración.	• No la especifica, pero la registra en la configuración.	• Argumenta que sí son congruentes, porque sus ángulos interiores y exteriores son iguales y sus lados miden lo mismo, comprobado con regla graduada. • Se sitúa en el paradigma **G1**.

	Calcula valores aproximados, determinados por el uso del instrumento de medición, y la impericia del estudiante. • Utiliza la propiedad de que los ángulos opuestos son iguales y los ángulos adyacentes son suplementarios. • Respuesta correcta por la configuración. •			
E 4	• Construye la configuración sólo con regla.	• Indica que no puede determinar la medida del ángulo indicado,	• No lo hace, argumentando la falta de datos	• Indica la congruencia entre los triángulos CQF y QCD

	• Rotula correctamente. • Achura el paralelogramo requerido. • La **aprehensión secuencial** es evidenciada tácitamente. • Respuesta correcta.	argumentando que desconoce las medidas del triángulo y que no se señala qué tipo de triángulo es, e indicó que no utilizó el transportador.	aportados por la respuesta 2.	argumentando que el triángulo CQF es un reflejo del triángulo ABC el QCD es una rotación y traslación del triángulo ABC • De este modo se evidencia una **aprehensión discursiva**, al asociar propiedades y movimientos figurales.
E 5	• Construye y rotula correctamente la configuración solicitada sobre la base de un triángulo equilátero e indica	• Para calcular el ángulo FCD, utiliza la identidad que dice que la suma de los ángulos que conforman un ángulo	• Utiliza que los ángulos opuestos del paralelogramo son de igual medida. Así determina que éste vales 360°.	• No aborda esta tarea.

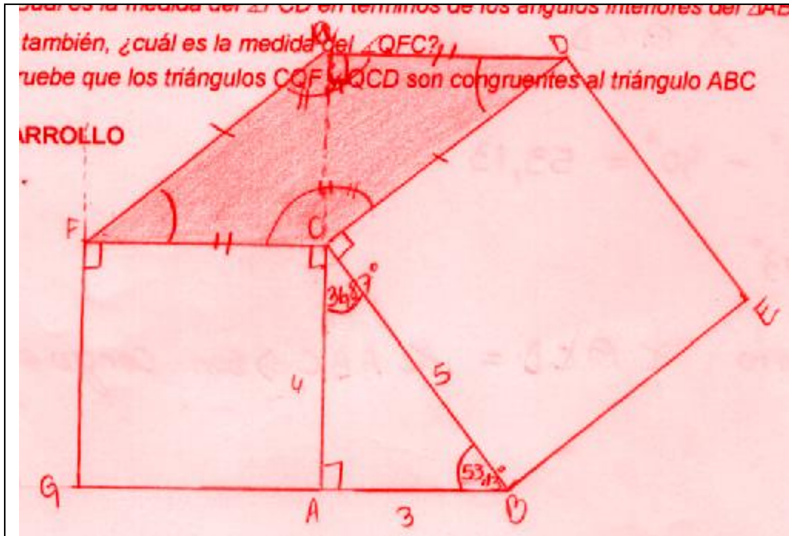
	las medidas angulares, • Se evidencia la **aprehensión secuencial** al dar cuenta del enunciado.	completo es 360°.		
E 6	• Su configuración no da cuenta del enunciado. • Se evidencia que no reconoce las características de un paralelogramo. • A pesar de eso, dibuja y rotula correctamente los cuadrados, utilizando regla y compás para	• Formula una ecuación (correcta) para determinar el ángulo solicitado. • Indica que la medida es de 135° sin especificar cómo la obtuvo, sin embargo se infiere de esto que le otorgó a uno de los ángulos del triángulo el valor de	• Entrega un valor de 55°, calculado con transportador. • Respuesta incorrecta.	• Mediante una traslación de 45° indica erróneamente que los triángulos ABC y QCD son congruentes, ya que las traslaciones no se miden en grados, y las dos figuras no son congruentes por construcción.

	trazar sus perpendiculares. • En vez de trazar un paralelogramo, dibujó un deltoide (cuadrilátero formado por dos triángulos isósceles de base común). • La **aprehensión secuencial** no es evidenciada correctamente. • Respuesta incorrecta.	45°.		
E 7	• Construye correctamente el triángulo equilátero y los dos cuadrados,	• Afirma que la suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es de	• De igual manera, afirma sin justificación que el ángulo solicitado	• No la aborda.

	pero a estos últimos los rotula incorrectamente (al revés), por lo que la configuración no da cuenta del enunciado. • A partir de las diagonales de los cuadrados trata de dibujar un paralelogramo (deltoide), pero por impericia en el uso del instrumento, no traza exactamente un paralelogramo. • A los ángulos obtusos del supuesto	360°, y que los ángulos opuestos son iguales, concluyendo que el ángulo pedido es de 90°. • Respuesta incorrecta.	mide de 90°.	

	paralelogramo asigna las medidas de 90°. • La interacción entre las **aprehensiones discursiva** y **operativa** no es correcta. • Respuesta incorrecta.			
E 8	• Construye –con regla y compás– y rotula correctamente la configuración a partir de un triángulo equilátero. • Traza una diagonal del paralelogramo, determinando dos	• Afirma que la medida del ángulo solicitado corresponde a la suma de dos de los ángulos interiores del triángulo, pero no indica valor (supuestamente es 120°, por tratarse de	• Sin justificación, indica que la medida del ángulo solicitado es 60°.	• Afirma que ambos triángulos son congruentes con el triángulo ABC, ya que poseen las mismas medidas de sus ángulos interiores. • Observa claramente

	triángulos, que pinta de distinto color. • Se evidencia la **aprehensión secuencial** tácitamente. • Respuesta correcta.	un triángulo equilátero).		(**aprehensión perceptiva**) que el triángulo es equilátero, al construir los cuadrados sobre los lados del triángulo rotando el triángulo original sobre uno de sus vértices, calzando perfectamente. • Su respuesta, correcta, se sitúa en el paradigma **G1**, al utilizar la rotación del triángulo.

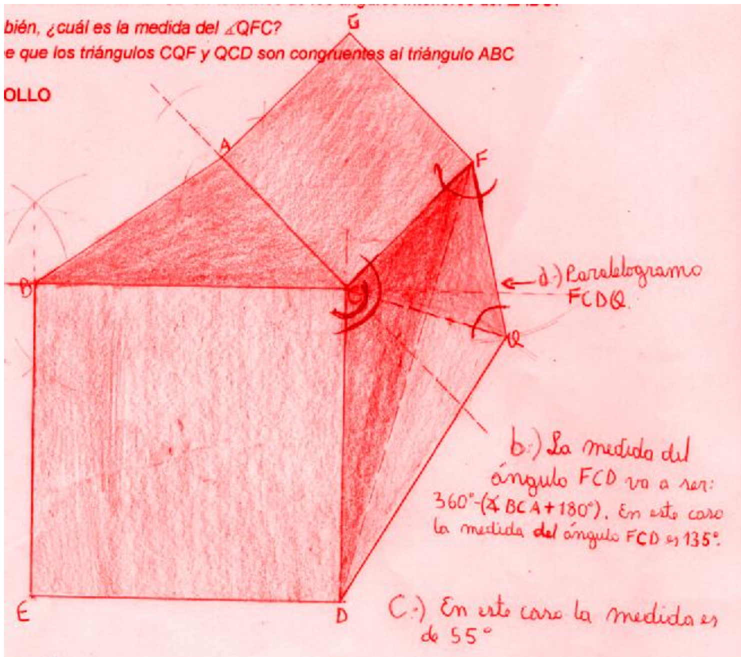
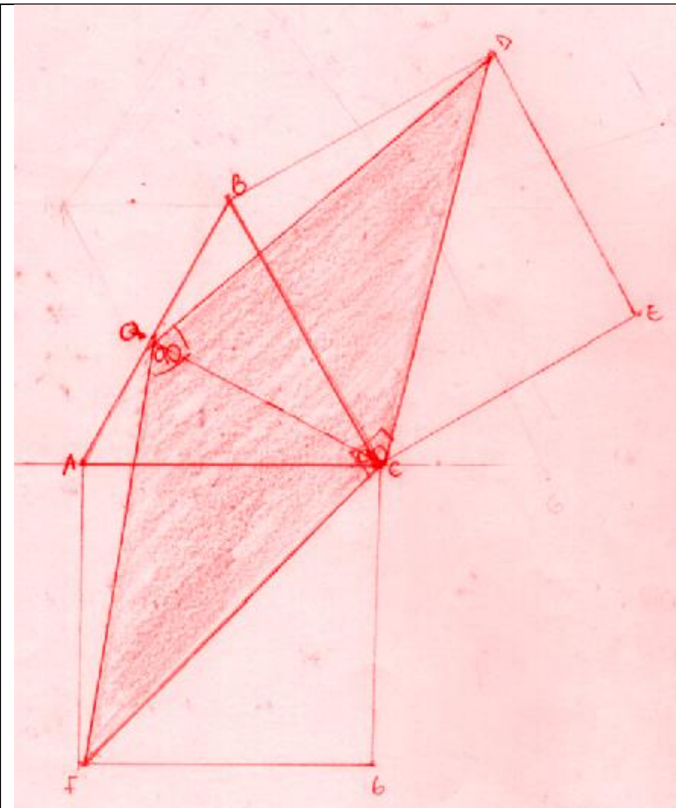
<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
c) $\measuredangle QFC = 36,87^\circ$

Sí, $\measuredangle FCD = 143,13^\circ = \measuredangle FQD$ y los dos suman $286,26^\circ$ ∴ las medidas interiores de un paralelogramo es 360° y los dos ángulos que faltan son iguales así que $360^\circ - 286,26^\circ = 73,74 \Rightarrow$ suma de los dos angulos pequeños.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
b) $\text{Sen } B = \frac{4}{5} = 0,8$ $B = \text{arc sen } 0,8 = 53,13$

$C = 90 - 53,13 = 36,87^\circ$

$\measuredangle FCD = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 36,87^\circ) = 143,13^\circ$
</td>
<td>
Respuestas de E 1 para la Situación 2
</td>
</tr>
</table>

	
Respuestas de E 6 para la Situación 2	Respuestas de E 7 para la Situación 2

Situación 3:

S 3	T 1	T 2	T 3
E 1	• Traza dos las bisectrices con compás y regla en un triángulo equilátero, que rotula correctamente. Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada, además, la **aprehensión secuencial,** tácitamente. • Afirma que sí se puede determinar la tercera bisectriz, al tener la intersección de las bisectrices y al unirla con el tercer vértice. • Respuesta correcta.	• Afirma que el punto de intersección de las bisectrices es el incentro, y que existe la misma distancia hacia cualquiera de los tres lados, pero no especifica cómo se determina. • Se evidencia una **aprehensión discursiva** al referirse a esta propiedad. • Respuesta correcta.	• Afirma la posibilidad de trazar una circunferencia tangente a los tres lados, pero justifica mal, ya que se refiere a tangentes que se forman en cada lado y que son iguales desde el centro. Siendo que los lados son los tangentes a la circunferencia, y no tangentes a los lados. • En la configuración dibuja inexactamente una circunferencia circunscrita al triángulo y otra inscrita. • Sus respuestas están condicionadas por el tipo de triángulo elegido (equilátero, en el que coinciden simetrales,

			bisectrices y alturas), por lo que en otro tipo de triángulo no hubiese respondido correctamente valiéndose de estos procedimientos. • Demuestra su respuesta trazando la circunferencia inscrita, y situándose en el paradigma **G1**. • Respuesta medianamente correcta porque justifica mal, pese a trazar correctamente las circunferencias en configuración.
E 2	• Traza dos las bisectrices con compás y regla en un triángulo equilátero, que es rotulado correctamente. Se evidencia la **aprehensión operativa**, al	• La respuesta es parcial. Identifica el pun to de intersección como incentro, y afirma que tienen la misma distancia.	• Afirma que sí es posible dibujar la circunferencia tangente a los tres lados (la que tiene como centro la intersección de las tres

	pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Afirma que sí se puede determinar la tercera bisectriz, sin construirla, y lo justifica diciendo que la bisectriz divide a la mitad el ángulo, siendo esta justificación insuficiente porque para determinarla hay que trazar una recta que pase por el punto de intersección ya determinado y el tercer vértice. • Se evidencia la **aprehensión secuencial** de manera tácita. • Respuesta incorrecta.	• La respuesta, medianamente correcta, es condicionada por el tipo de triángulo (equilátero).	bisectrices) y hace alusión a lo realizado en la configuración, en este caso de manera errónea porque dibujó la circunferencia circunscrita al triángulo y no la solicitada (inscrita). • Si bien se evidencia la **aprehensión discursiva**, ésta se realiza deficientemente, por lo que la respuesta es incorrecta.
E 3	• Dibuja un triángulo acutángulo y traza imprecisamente las dos bisectrices con regla; lo rotula correctamente, y rotula las	• La respuesta es incorrecta porque afirma erróneamente que el punto tiene medida. Posiblemente es un error de	• Afirma que sí es posible y justifica que • Indica que los segmentos de las bisectrices hacia los lados

	bisectrices con minúscula b1 y b2. Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Afirma que sí se puede construir la tercera bisectriz, porque se tiene el punto de intersección entre las bisectrices b1 y b2. La traza con línea punteada en la configuración. • Se evidencia la **aprehensión discursiva** al utilizar la propiedad de las bisectrices. • Respuesta correcta.	redacción.	son de igual medida. • Toma como referente uno de ellos para trazar la circunferencia, y como no corresponde al radio de tangencia, la circunferencia no es inscrita. • Al trazar demuestra estar en el paradigma **G1**. • Su respuesta, incorrecta, está condicionada por lo que ve, basándose en la **aprehensión perceptiva**, pero como el dibujo es trazado de manera inexacta, desprende información errónea.
E 4	• Dibuja una configuración trazando arbitrariamente dos segmentos que aparentan ser	• Afirma que hay igualdad de medidas entre el punto de intersección y los tres lados,	• Indica que al observar a configuración no se puede realizar una circunferencia, a

	bisectrices, determinando así el punto de intersección. Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Afirma que sí se puede determinar la tercera bisectriz porque se conoce el punto de intersección de las otras dos pero no indica cómo se traza. • Respuesta medianamente correcta, porque indica el elemento con que se traza (intersección entre las otras dos bisectrices) pero no indica cómo. • Se evidencia parcialmente la **aprehensión discursiva**.	pero no justifica su respuesta. • La **aprehensión discursiva** estaría evidenciada solamente si el estudiante sabe con certeza que su respuesta está correcta.	menos que estén mal calculadas las bisectrices. Esto evidencia que no supo cómo calcular el radio de la circunferencia circunscrita, s pesar de que indica en la T2 que esas medidas son iguales • Respuesta incorrecta.

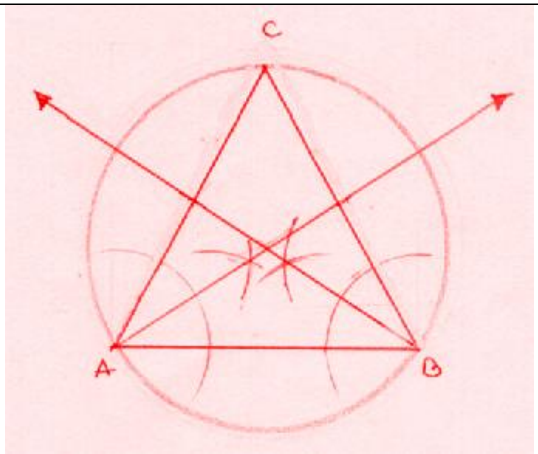
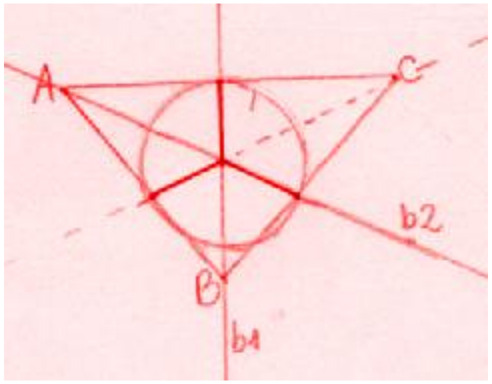
E 5	• Presenta una configuración sin rotular, con las dos bisectrices en un triángulo isósceles. Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Afirma que se puede trazar sin problemas la tercera bisectriz, considerando el punto del triángulo (supuestamente el tercer vértice), pasando por el incentro (punto de intersección de las bisectrices). • Se evidencia una **aprehensión discursiva** al usar la definición de bisectriz de un ángulo en un triángulo. • Respuesta correcta.	• Analiza la situación diferenciando los tipos de triángulos para dar respuesta a esta tarea. • Indica que las distancias determinadas por estas bisectrices varían. • Dibuja los dos triángulos (equilátero e isósceles) con sus respectivas bisectrices, e indica la igualdad de medida de los segmentos correspondientes con || y |||. • No obstante lo anterior, ambas situaciones son equivalentes como lo presenta, ya que un triángulo equilátero también es isósceles. • A pesar de lo que dice y lo que	• Afirma que sí es posible trazar una circunferencia tangente en un triángulo equilátero, pero no lo hace, por lo que, carente de demostración, la respuesta es medianamente correcta.

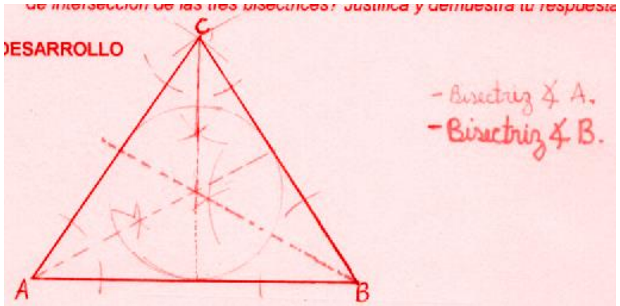
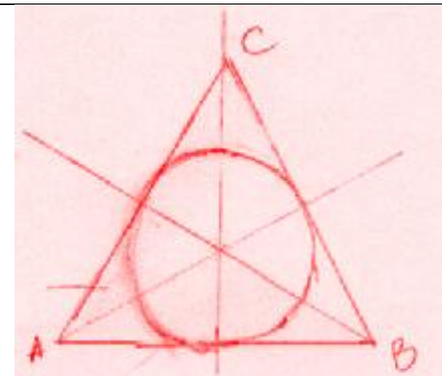
		representa, la respuesta es incorrecta, ya que se refiere a los segmentos determinados por el incentro en cada bisectriz, y no a la distancia entre el incentro y los lados.	
E 6	• Dibuja un triángulo isósceles y traza las bisectrices basales, cumpliendo con lo requerido. Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Afirma que sí es posible trazar la tercera bisectriz, considerando el punto de intersección de las otras dos bisectrices y el vértice del faltante, y luego trazando una	• Afirma que la distancia dependerá del tipo de triángulo, que todos los lados están a la misma distancia de la intersección, y que en los triángulos isósceles y escaleno sus medidas no son iguales. • A pesar de lo que dice y de representarlo en un triángulo escaleno, la respuesta es incorrecta, ya que se refiere a los segmentos determinados por el incentro en cada	• Indica que sí es posible trazar la circunferencia, y para que se cumpla esto se debe construir un triángulo equilátero, y que de esta manera se construye un circulo inscrito en el triángulo. • Representa la afirmación en una configuración con un triángulo equilátero. • Se cumple esta firmación por ser un triángulo equilátero, ya que el punto de intersección

	recta que pasa por ambos puntos. • Se evidencia tácitamente una **aprehensión discursiva**. • Respuesta correcta.	bisectriz, y no a la distancia entre el incentro y los lados.	de las bisectrices también lo es de las alturas, transversales y simetrales. El radio de tangencia mide el segmento inferior de cada bisectriz. • Se evidencia en la configuración **aprehensiones discursiva** y **operativa**.
E 7	• Presenta una configuración constituida por un triángulo equilátero, rotulado correctamente, y las tres bisectrices, evidenciando de manera tácita una **aprehensión secuencial**. • Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada.	• Afirma que las distancias desde la intersección de las bisectrices a sus lados son igual, pero no indica por qué. • Respuesta incorrecta.	• Afirma que sí es posible trazar la circunferencia tangente, teniendo como centro el incentro, y la medida de los lados se traza con un compás. • Verifica trazando la circunferencia inscrita a mano alzada en la configuración. • Es correcto utilizar este centro para trazar la circunferencia tangente, sin embargo esta

	• Afirma que sí se puede trazar la tercera bisectriz, ya que las otras dos determinaron el incentro por donde deben pasar las tres bisectrices, pero no indica cómo se hace esto. • Evidencia una **aprehensión discursiva**. • Respuesta medianamente correcta.		respuesta es incorrecta porque la medida del radio no es la "de los lados", sino que es la distancia entre el incentro y cada uno de los lados.
E 8	• Dibuja un triángulo equilátero, traza dos de las bisectrices. Dice que sí se puede hacer la tercera, ya que tiene que pasar por la intersección de las tres bisectrices. Manifiesta problemas de redacción. • Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del	• Afirma que tienen la misma distancia, ya que el punto de intersección de las bisectrices es el punto medio. Por eso se posee la misma distancia. Se evidencia una **aprehensión perceptiva**, ya que afirma a partir de lo que ve en su configuración (triángulo	• De igual manera, afirma que sí es posible trazar la circunferencia, porque el centro es el punto medio entre los lados del triángulo. • Respuesta incorrecta, ya que no indica en la configuración el triángulo inscrito, sino que traza un triángulo circunscrito.

	enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta inconclusa.	equilátero). • Respuesta parcialmente correcta, pues depende del tipo de triángulo.	

	
Respuestas de E 2 para la Situación 3	Respuestas de E 3 para la Situación 3

	
Respuestas de E 6 para la Situación 3	Respuestas de E 7 para la Situación 3

Situación 4:

S 4	T 1	T 2	T 3
E 1	• Construye la configuración con regla y compás, según el enunciado. • Rotula correctamente las unidades figurales. • La configuración muestra un trapecio rectángulo.	• Establece el protocolo de construcción en siete pasos. • 1°) Considera una circunferencia con radio de 4,6 cm. 2°) Ubica el centro C y traza la circunferencia. 3°) Traza el diámetro AB. 4°)	• En el 7°) paso afirma que se comprueba la igualdad de CD y CP. • Representa con un arco de circunferencia la comprobación en la configuración. Se sitúa en el

	• Señala el punto de tangencia e indica la perpendicularidad. • Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta.	Ubica el punto T y traza la tangente m (no indica cómo). 5°) Desde el punto A traza una tangente (perpendicular) a la recta m determinando el punto D, y repite el proceso desde B determinando P. • El 6°) paso lo describe diciendo que con centro en C se traza una circunferencia que pasa por los puntos D y P, de radio CD o CP que son de la misma distancia. Con esto prueba que ambas distancias son iguales, es decir realiza la T3. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	paradigma **G1**. • Se evidencia la interacción de las **aprehensiones discursiva y operativa**. • Respuesta correcta.

E 2	• Construye la configuración con regla y compás, según el enunciado y rotula correctamente las unidades figurales. • Considera la perpendicularidad, tanto a la recta m como al diámetro AB. • En estas condiciones las configuración muestra un rectángulo. • Señala el punto de tangencia. • Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta.	• Establece el protocolo de construcción en siete pasos. • 1°) Considera una circunferencia con radio de 6 cm y diámetro 12 cm. 2°) El centro lo denota por C. 3°) Traza la circunferencia y designa el diámetro por AB. 4°) Traza la tangente m (no indica cómo), designa el punto de tangencia por C (T). 5°) Desde el punto A traza una perpendicular a la recta m determinando el punto D. 6°) repite el proceso desde B determinando P. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	• Enumera como 7°) el paso del protocolo, para describir que CD = CP trazando una circunferencia de radio CP. • Se sitúa en **G1**. • Se evidencia la interacción de las **aprehensiones discursiva y operativa**. • Respuesta correcta.

E 3	• Construye la configuración con regla y compás, según el enunciado y rotula correctamente las unidades figurales. • Considera la perpendicularidad, tanto a la recta m como al diámetro AB. • En estas condiciones las configuración muestra un rectángulo. • Señala el punto de tangencia. • Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta. •	• Establece el protocolo de construcción en seis pasos. • Se da un segmento de 12 cm e indica que ese será el diámetro AB y que el radio será de 6 cm. • 1°) Traza un radio para ubicar el diámetro AB. 2°) Traza la circunferencia con tal radio. 3°) Traza el diámetro encontrando A y B. 4°) Ubica el punto T y traza la tangente m (no indica cómo). 5°) Desde el punto A traza la perpendicular a la recta m determinando el punto D, y repite el proceso desde B determinando P. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**.	• Como 6°) paso del protocolo, indica que al trazar una circunferencia de radio CP con centro en C se prueba que CD = CP. • Se sitúa en **G1**. • Se evidencia la interacción de las **aprehensiones discursiva y operativa**. • Respuesta correcta.

		• Respuesta correcta.	
E 4	• Construye la configuración con regla y compás según el enunciado, y rotula correctamente las unidades figurales. • Considera la perpendicularidad, tanto a la recta m como al diámetro AB. • Traza los segmentos que debe probar que son de igual longitud. • En estas condiciones la configuración muestra un rectángulo. • Señala el punto de tangencia. • Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción	• Describe un procedimiento sin orden de construcción. • La descripción es la siguiente: • 1°) se traza un tangente m. 2°) se dibuja el círculo. 3°) así aparece el punto T. 4°) se traza el diámetro. 5°) aparecen los puntos A y B. 6°) como son paralelos a los puntos de la tangente m se puede trabajar sin problemas. • La **aprehensión secuencial** no se evidencia claramente, ya que en su descripción no se respeta el orden de construcción. • Respuesta medianamente correcta.	• Justifica la igualdad de los segmentos indicando que C es el centro de la circunferencia y los puntos A y B son paralelos a la tangente m trazada, por lo cual cualquier punto dentro del diámetro será paralelo a los puntos de la tangente. Por lo cual si es la misma medida obviamente la distancia de CD es la misma que CP. • El estudiante muestra evidentes problemas de redacción. • La **aprehensión discursiva** es deficiente.

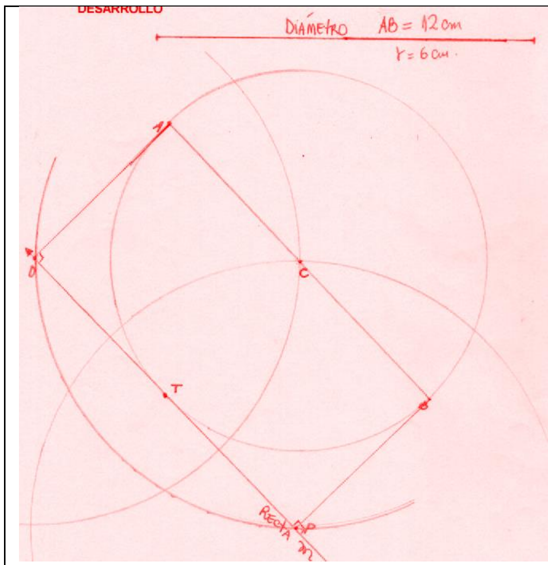
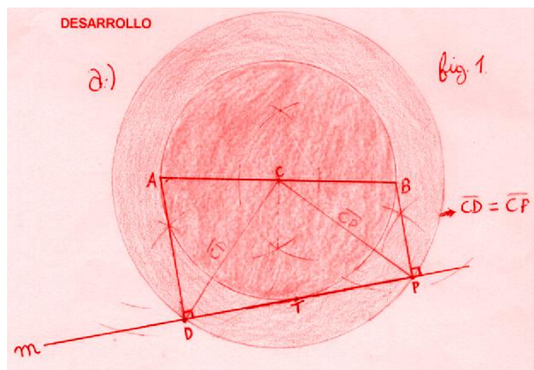
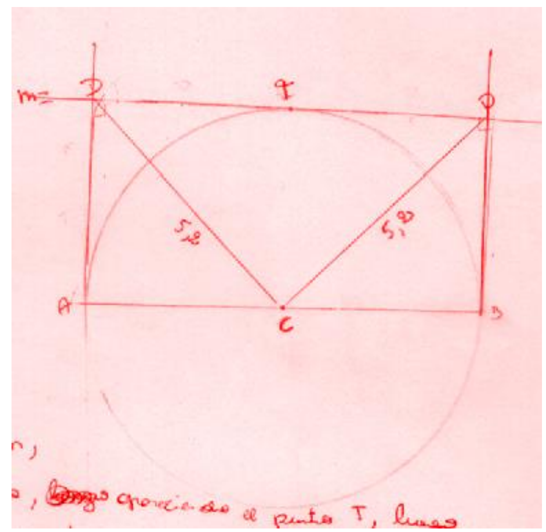
	solicitada. • Respuesta correcta.		
E 5	• Construye la configuración con regla y compás, según el enunciado. • Rotula correctamente las unidades figurales. • La configuración muestra un trapecio rectángulo. • Señala el punto de tangencia e indica la perpendicularidad. • Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta.	• Formula su protocolo de construcción. • 1°) Determina el radio de 5 cm. 2°) Ubica el punto C y traza un circunferencia. 3°) traza el diámetro AB. 4°) Ubica el punto T y traza la tangente m. 5°) Desde el punto A traza una tangente (perpendicular) a la recta m determinando D, y 6°) de igual manera desde B determinando el punto P. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	• Indica que con centro en C se traza una circunferencia que pasa por los puntos D y P, de radio CD o CP que son de la misma distancia. Con esto prueba que ambas distancias son iguales. • Se sitúa en **G1**. • Se evidencia la interacción de las **aprehensiones discursiva y operativa**. • Respuesta correcta.
E 6	• Construye la configuración con	• Describe un procedimiento	• Indica que para probar su

	regla y compás, según el enunciado. • Rotula correctamente las unidades figurales. • La configuración muestra un trapecio rectángulo. • Señala el punto de tangencia e indica la perpendicularidad. • Traza los segmentos que debe probar que son de igual longitud. • Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta.	como protocolo, es el siguiente: • 1) se requiere de un compás y una regla. 2) calcula "el punto medio" y luego dibuja la circunferencia. 3) "encuentra" los trazos AD y BP, todo con compás (señala figura 1). 4) indica los siguientes pasos: construir el segmento AB, luego encontrar el punto medio C, luego hacer una circunferencia con centro C, luego el punto T, trazando una recta, para finalmente encontrar los puntos de IP. • La **aprehensión secuencial** no está completamente clara porque no respeta totalmente	igualdad se debe construir otra circunferencia con radio CD o CP, y de esta manera, si la circunferencia pasa por ambos puntos, estos segmentos son iguales. • Remite a la figura 1 indicando que los segmentos CD y CP son iguales, ya que la circunferencia pasa por los dos puntos (CD y CP). • Se produce la interacción entre las **aprehensiones discursiva y operativa**. Se sitúa en el paradigma **G1**.

		el orden de construcción. • Respuesta medianamente correcta, tiene problemas de redacción.	
E 7	• Construye la configuración con regla y compás, según el enunciado. • Rotula correctamente las unidades figurales. • La configuración muestra un trapecio rectángulo. • Señala el punto de tangencia e indica la perpendicularidad. • Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta.	• Establece el protocolo de construcción en los siguientes siete pasos. • 1) traza un segmento AB, luego busca el punto medio que corresponde al punto C. 2) desde el punto C se hace una circunferencia de radio BC o AC. 3) se traza una recta que intersecte un punto de la circunferencia (tangente), sea la recta m. 4) se buscan los puntos D y P, encontrando las perpendiculares de los puntos A y B con respecto a la recta	• Indica que usando como radio CD o CP se prueba la igualdad con la semicircunferencia de centro C. • Se evidencia la interacción de las **aprehensiones discursiva y operativa**. • Respuesta correcta.

		m (tangente). • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	
E 8	• Construye la configuración con regla y compás según el enunciado, y rotula correctamente las unidades figurales. • Considera la perpendicularidad, tanto a la recta m como al diámetro AB. • Traza los segmentos que debe probar que son de igual longitud. • En estas condiciones la configuración muestra un rectángulo. • Señala el punto de tangencia.	• Establece el protocolo de construcción en los siguientes siete pasos. • 1) se traza la recta m, tangente a la circunferencia, apareciendo el punto T. 2) el diámetro de ella. 3) posterior a ello, los puntos D y P, los que deben ser perpendiculares a m. 4) una vez que se forman los segmentos AD y BP, 5) tras ellos se miden los segmentos CD y CP. • La **aprehensión secuencial** no está completamente clara	• Indica que los segmentos tienen la misma longitud (5,2 cms.), ya que le diámetro dividido en 2 a la circunferencia y cualquier segmento desde el diámetro será de la misma medida, esto se da ya que la recta m es paralela al diámetro. • La **aprehensión discursiva** deja de manifiesto que en la configuración construyó un rectángulo. • Además, se presenta la interacción entre las

	• Se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta.	porque no respeta totalmente el orden de construcción. • Respuesta medianamente correcta, tiene problemas de redacción.	**aprehensiones operativa** y **discursiva**. • La respuesta, correcta, se sitúa en el paradigma **G1**.

		
Respuesta de E3 para la Situación 4	Respuesta de E6 para la Situación 4	Respuesta de E8 para la Situación 4

Situación 5:

S 5	T 1	T 2	T 3	T 4
E 1	• Construye un triángulo acutángulo, rotulándolo correctamente. • Traza las tres alturas con escuadra, determinando el ortocentro y rotulándolo correctamente. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	• Con regla y compás determina el centro de la circunferencia solicitada. • Traza la circunferencia. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	• Traza las tangentes arbitrariamente, determinando los puntos P y Q (no indica cómo). • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, pero no hay precisión en el trazado de las tangentes en la configuración. • Respuesta medianamente correcta.	• Afirma que el trío de puntos forma un triángulo obtusángulo (**aprehensión discursiva**). • Respuesta incorrecta, ya que si el trazado de las tangentes hubiese sido con precisión, los tres puntos son colineales, es decir no existe triángulo.

E 2	• Construye un triángulo acutángulo, rotulándolo correctamente. • Traza las tres alturas con escuadra, determinando el ortocentro y rotulándolo correctamente. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	• Con regla y compás determina el centro de la circunferencia solicitada. • Traza la circunferencia. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	• Traza las tangentes arbitrariamente, determinando los puntos P y Q (no indica cómo). • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, pero no hay precisión en el trazado de las tangentes en la configuración. • Respuesta medianamente correcta.	• Afirma que el trío de puntos forma un triángulo obtusángulo (**aprehensión discursiva**). • Respuesta incorrecta, ya que si el trazado de las tangentes hubiese sido con precisión, los tres puntos son colineales, es decir no existe triángulo.
E 3	• Realiza dos veces la actividad, descarando la primera, no obstante	• Con regla y compás determina el centro de la circunferencia solicitada.	• Traza las tangentes arbitrariamente, determinando los puntos P y Q (no	• No indica qué tipo de triángulo es conformado por el trio de puntos.

	esto, la primera configuración da cuenta del enunciado. • En la segunda configuración, construye un triángulo acutángulo, rotulándolo correctamente. • Traza las tres alturas con escuadra, determinando el ortocentro y rotulándolo correctamente. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**.	• Traza la circunferencia. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	indica cómo). • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, pero no hay precisión en el trazado de las tangentes en la configuración. • Respuesta medianamente correcta.	• Tanto en la primera como en la segunda configuración, se visualizan triángulos extremadamente obtusos, tendiendo a la colinealidad. Esto se debe a la imprecisión de la construcción.

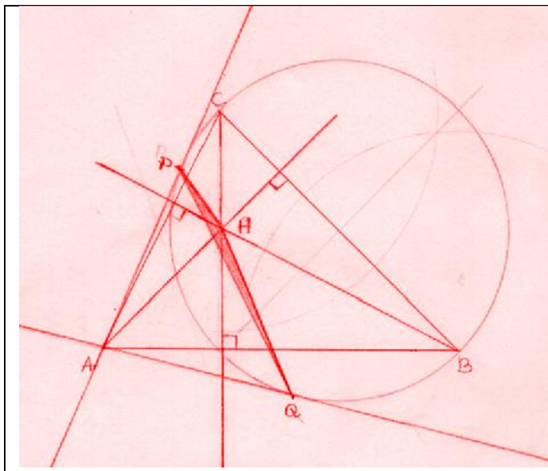
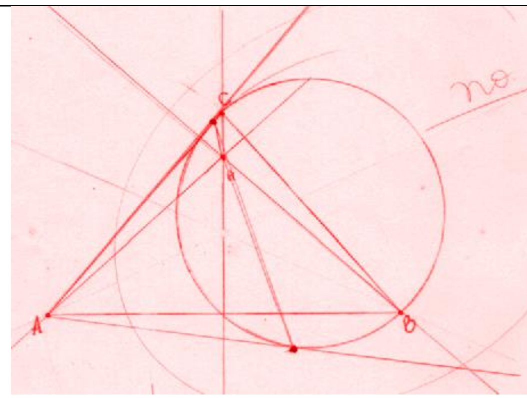
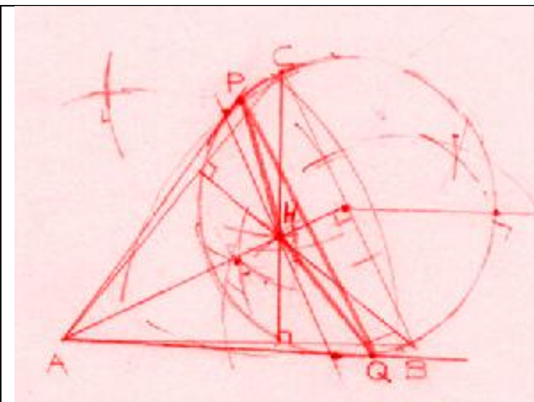
	• Respuesta correcta.			
E 4	• Construye un triángulo acutángulo, rotulándolo correctamente. • Traza las tres alturas con escuadra, determinando el ortocentro y rotulándolo correctamente. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	• Con regla y compás determina el centro de la circunferencia solicitada. • Traza la circunferencia. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	• Traza las tangentes arbitrariamente, determinando los puntos P y Q (no indica cómo). • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, pero no hay precisión en el trazado de las tangentes en la configuración. • Respuesta medianamente correcta.	• Afirma que el trío de puntos forma un triángulo obtusángulo (**aprehensión discursiva**). • Respuesta incorrecta, ya que si el trazado de las tangentes hubiese sido con precisión, los tres puntos son colineales, es decir no existe triángulo.
E 5	• Construye un triángulo acutángulo, rotulándolo	• Con regla y compás determina el centro de la circunferencia	• Traza las tangentes arbitrariamente, determinando los	• Afirma que el triángulo es escaleno.

	correctamente. • Traza las tres alturas con escuadra, determinando el ortocentro y rotulándolo correctamente. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	solicitada. • Traza la circunferencia. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	puntos P y Q (no indica cómo). • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, pero no hay precisión en el trazado de las tangentes en la configuración. • Respuesta medianamente correcta.	• Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta incorrecta, ya que si el trazado de las tangentes hubiese sido con precisión, los tres puntos son colineales, es decir no existe triángulo.
E 6	• Construye un triángulo acutángulo, rotulándolo correctamente. • Traza las tres alturas con escuadra, determinando el	• Con regla y compás determina el centro de la circunferencia solicitada. • Traza la circunferencia. • Se evidencia la	• Traza las tangentes arbitrariamente, determinando los puntos P y Q (no indica cómo). • Se evidencia la **aprehensión**	• Afirma que el triángulo es obtusángulo isósceles, debido a que el triángulo acutángulo que consideró también

	ortocentro y rotulándolo correctamente. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	**aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	**secuencial**, pero no hay precisión en el trazado de las tangentes en la configuración. • Respuesta medianamente correcta.	es isósceles. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta incorrecta, por la imprecisión del trazado de las tangentes.
E 7	• Construye un triángulo acutángulo, rotulándolo correctamente. • Traza las tres alturas con escuadra, determinando el ortocentro y rotulándolo correctamente.	• Con regla y compás determina el centro de la circunferencia solicitada. • Traza la circunferencia con compás pero imprecisamente. • Se evidencia la **aprehensión**	• Traza las tangentes arbitraria e imprecisamente, y sin indicar cómo, determinando los puntos P y Q. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, pero no hay precisión en el	• Afirma que el triángulo es escaleno. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta incorrecta, ya que por ser impreciso el trazado de las

	• Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	**secuencial**. • Respuesta correcta.	trazado de las tangentes y la circunferencia. • Respuesta medianamente correcta.	tangentes, no se evidencia la colinealidad de los tres puntos.
E 8	• Dibuja un triángulo acutángulo isósceles. • Traza “alturas” de modo impreciso y arbitrario, pese al uso de regla. No obstante, determina un punto de intersección de los tres segmentos, al cual rotula como H. • Se evidencia la	• Determina el centro y traza la circunferencia. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	• Traza las tangentes arbitrariamente y sin explicación, determinando los puntos P y Q. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, pero no hay precisión en el trazado de las tangentes y la circunferencia. • Respuesta	• Afirma que el triángulo es obtusángulo isósceles, debido a que el triángulo acutángulo que consideró también es isósceles. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta incorrecta, por la

	aprehensión secuencial. • Respuesta medianamente correcta, por la imprecisión en el trazado.		medianamente correcta.	imprecisión del trazado de las tangentes.

		
Respuesta de E2 para la Situación 5	Respuesta de E3 para la Situación 5	Respuesta de E5 para la Situación 5

Situación 6:

S 6	T 1	T 2	T 3
E 1	• Realiza la configuración utilizando regla y compás. • Respeta la consigna. • Rotula correctamente las unidades figurales. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, ya que se respeta el orden de construcción. Además, la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta.	• Establece el siguiente protocolo de construcción: • 1) construye un triángulo acutángulo escaleno ABC, traza la altura del vértice B al lado AC (no indica el rótulo del pie de la altura, D, pero lo indica en la configuración). 2) traza la perpendicular a AB que pasa por el vértice A. 4) traza una perpendicular a BC que pasa por el vértice C. 5) ubica N en la perpendicular que pasa por AB, haciendo a N = DC (establece dos puntos N y los registra en la configuración). 6) ubica M en	• En el protocolo de construcción, como séptimo paso, muestra la equidistancia, indicando que con centro en B se traza una circunferencia que pasa por los puntos M y N, siendo así BM = BN, y que equivalen al radio de la circunferencia. • Se evidencia la interacción entre las **aprehensiones secuencial y discursiva**. • La respuesta, que se ubica en el paradigma **G1**, es correcta. • Se concluye con la **aprehensión operativa**, ya que se efectúa el pasaje del

		la perpendicular que pasa por CB, haciendo a CM = AD (determinando dos puntos M, que registra en la configuración). • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta.
E 2	• Realiza la configuración utilizando regla y compás sobre un triángulo equilátero. • Respeta parcialmente la consigna, ya que no considera toda la información. • Rotula las unidades figurales. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, ya que un orden de construcción con la información parcial.	• Establece el siguiente protocolo de construcción para la configuración que presenta: • 1) Construye un triángulo equilátero de lado 6 cm. 2) C0nstruye la perpendicular en A (Asigna AN a esta perpendicular). 3) Construye la perpendicular en C (signa CM a esta perpendicular). 4) A la intersección de las	• La equidistancia queda determinada por construcción, con la información que utilizó. • Se evidencia la interacción entre las **aprehensiones secuencial y discursiva** para su construcción. • La respuesta, incorrecta, se ubica en el paradigma **G1**.

	• Respuesta parcialmente correcta.	perpendiculares le asigna el rotulo N. 5) Fuerza la equidistancia, al trazar con compás un arco de radio BN, y a ese punto lo denota por M. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, en su protocolo de construcción. • Respuesta incorrecta para lo solicitado.	
E 3	• Construye una configuración sobre un triángulo ABC rectángulo en C. • Puesto que la altura trazada desde el vértice B coincide con el cateto BC, el pie de tal altura coincide con C, es decir C=D. • En tales condiciones, |DC|=0,	• Establece el siguiente protocolo de construcción: • 1) sobre un triángulo acutángulo escaleno se traza la altura interior al vértice AC, encontrando el punto D. 2) traza una perpendicular a AB por A, encontrando los puntos N y N'. 3) se traza una	• 5) traza una semicircunferencia que pasa por M, M', N y N', con centro en B, para comprobar que son equidistantes. • Se evidencia la interacción entre las **aprehensiones secuencial y discursiva**. • La respuesta, que se ubica en

	es decir A=N, por lo que solo se puede determinar M a una distancia AD. • La configuración está correcta, con la salvedad de que la altura no es interior. • Si traza el arco de radio AB (=NB), claramente pasa por M, mostrando la equidistancia. • No se da cuenta de esto, por lo que afirma que en un triángulo rectángulo no se puede construir la configuración. • Por otro lado, si el triángulo fuese rectángulo pero en B, se podría trazar la altura interior, y se tendría, también la configuración solicitada.	perpendicular a BC por C, encontrando los puntos M y M'. 4) para encontrar los puntos M y N se deben tomar las medidas de CD y DA. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	el paradigma **G1**, es correcta. • Se concluye con la **aprehensión operativa**, ya que se efectúa el pasaje del enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta.

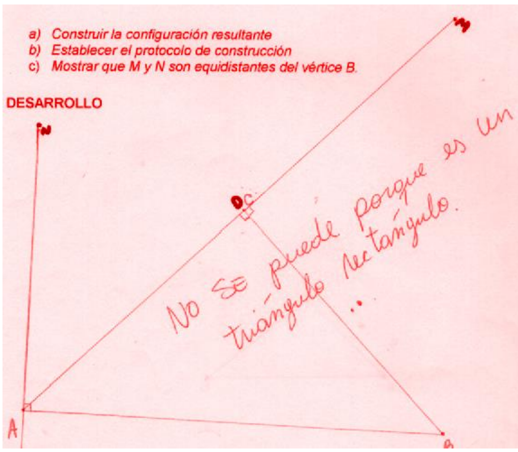
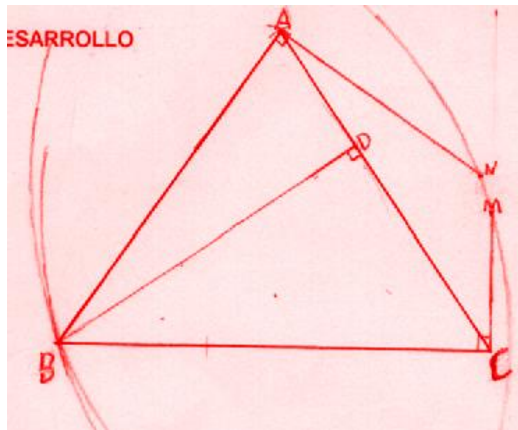
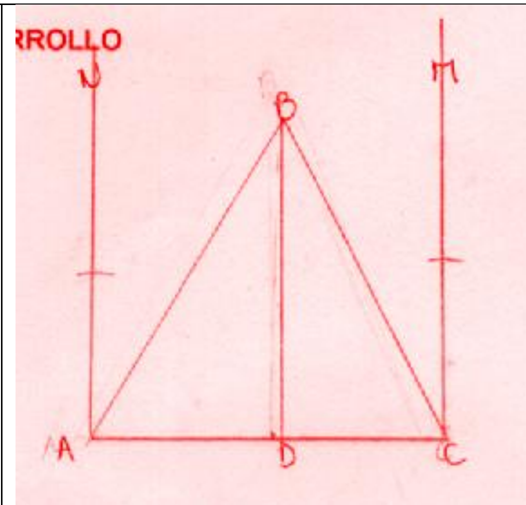
	• Su segunda configuración la construye sobre un triángulo acutángulo escaleno, con regla y compás. • Respeta la consigna. • Rotula correctamente las unidades figurales. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, ya que se respeta el orden de construcción. Además, la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta.		
E 4	• Sólo construye un triángulo ABC acutángulo, y traza sus tres alturas interiores. • No concluye la tarea.	• No la aborda.	• No la aborda.

E 5	• Construye una configuración sobre un triángulo isósceles, rotula correctamente. • Traza la altura interior y establece el pie rotulándolo por D. • Se equivoca al dibujar perpendiculares a AC en A y en C, siendo que debería hacer AB en A y BC en C. • Se evidencia la **aprehensión secuencial** en las dos primeras etapas de la configuración, que son las que alcanza a realizar. • Respuesta incorrecta.	• Establece el siguiente protocolo de construcción: • 1) dibuja un triángulo ABC. 2) traza la altura interior BD. 3) traza la perpendicular AN desde AB. (erróneamente, ya que es perpendicular a AC) 4) traza la perpendicular CM desde BC (erróneamente, ya que es perpendicular a AC). • Se evidencia la **aprehensión secuencial** en las dos primeras etapas de la configuración, que son las que alcanza a realizar. • Respuesta incorrecta.	• No la aborda.
E 6	• Realiza la configuración utilizando regla y compás. • Respeta parcialmente la	• Establece el siguiente protocolo de construcción: • 1) construye un triángulo ABC.	• No la especifica, pero traza en la configuración un arco que pasa por N y M. se ubica en el

	consigna, porque determina los puntos N y M a partir de segmentos perpendiculares en vez de rectas perpendiculares. Si hubiese trazado las rectas perpendiculares, hubiese determinado pares de puntos, dos M y dos N. • Rotula correctamente las unidades figurales. • Se evidencia la **aprehensión secuencial**, ya que se respeta el orden de construcción, y la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la construcción solicitada. • Respuesta correcta.	2) busca la perpendicular a B en el segmento AC, pero redacta al revés, (debería haber indicado que busca la perpendicular al segmento AC en el punto B). • Se evidencia la **aprehensión secuencial**. • Respuesta correcta.	paradigma **G1**. • La **aprehensión secuencial** está tácita. • Respuesta correcta.
E 7	• Construye una configuración sobre un triángulo isósceles,	• Establece el siguiente protocolo de construcción:	• No la aborda.

	rotula correctamente. • Traza la altura interior y establece el pie rotulándolo por D. • Se equivoca al dibujar perpendiculares a AC en A y en C, siendo que debería hacer AB en A y BC en C. • Se evidencia la **aprehensión secuencial** en las dos primeras etapas de la configuración, que son las que alcanza a realizar. • Respuesta incorrecta.	• 1) dibuja un triángulo ABC. 2) traza la altura interior BD. 3) traza la perpendicular AN desde AB. (erróneamente, ya que es perpendicular a AC) 4) traza la perpendicular CM desde BC (erróneamente, ya que es perpendicular a AC). • Se evidencia la **aprehensión secuencial** en las dos primeras etapas de la configuración, que son las que alcanza a realizar. • Respuesta incorrecta.	
E 8	• Sólo construye un triángulo ABC acutángulo, traza sus tres alturas interiores y rotula correctamente el pie de cada altura.	• No la aborda.	• No la aborda.

	• No concluye la tarea.		

		
Respuesta de E3 para la Situación 6	Respuesta de E6 para la Situación 6	Respuesta de E7 para la Situación 6

3.5.2. Confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. (Primera etapa).

Situación 1:

La situación 1 está relacionada con el teorema de la desigualdad triangular. Los datos que se utilizan en las tareas están dados con medidas en centímetros. Los estudiantes E1, E2, E4 y E6 trazan los segmentos con las medidas dadas y a partir de ella construyen el triángulo solicitado y lo rotulan con las medidas dadas. Argumentan directamente con el teorema de la desigualdad triangular y verifican con las mediadas dadas, salvo en el caso del estudiante E6. Los estudiantes E7 y E8 no realizan la verificación. Todo lo anterior está dado según el análisis a priori. No obstante, el estudiante E3 argumenta erróneamente la imposibilidad de construcción del triángulo con el hecho de que no se cumple un teorema que no es pertinente (teorema de Pitágoras). Construye una configuración que no da cuenta del triángulo solicitado.

Respecto a la tarea 2, E1, E2, E5, E7 y E8, por la impericia en el uso de los instrumentos, construyen con las medidas dadas un triángulo inexistente. Algunos cambian su argumentación al teorema de la desigualdad triangular le agregan el "mayor o igual", es decir, la suma de dos lados debe ser mayor o igual al tercer lado. Aquí se aprecia una **aprehensión perceptiva** errónea, ya que cambian la propiedad o teorema según lo construido.

La interacción entre las **aprehensiones perceptiva** y **discursiva** es deficiente. En todos los casos anteriores se evidencia la interacción entre las **aprehensiones discursiva y operativa**.

El estudiante E3 nuevamente se basa en el teorema de Pitágoras, respondiendo mal a la tarea. El estudiante E4 no indica si existe o no el triángulo, a pesar de que lo construye, pero afirma que la suma de dos segmentos es el tercero. No concluye la tarea.

En cuanto a la tarea 3, todos afirman que no es posible construir el triángulo. Salvo el estudiante E3 (que argumenta con el teorema de Pitágoras), todos argumentan con que no se verifica el teorema de la desigualdad. E1, E2 y E4 verifican formulando las desigualdades. E7 y E8 representan la configuración establecida en el análisis a priori.

En las respuestas correctas se evidencia la interacción entre las **aprehensiones perceptiva, operativa** y **discursiva**, al construir lo solicitado, al visualizar propiedades y al justificar verbalmente lo construido, respetivamente, según el análisis a priori.

Sobre la tarea 4, la conjetura es utilizada para justificar las tareas anteriores. Los estudiantes E4, E6 y E7 formulan el teorema de la desigualdad triangular. De esta manera se manifiesta sólo la **aprehensión discursiva**. Claramente los estudiantes tenían como conocimientos previos el teorema de la desigualdad triangular.

Situación 2:

En cuanto a la tarea 1, la construcción de las configuraciones de los estudiantes fue hecha con regla graduada, evidenciándose una **aprehensión secuencial** de segmentos, lados de triángulo, lados de paralelogramos. E2, E5 y E8 construyen la configuración sobre un triángulo equilátero, por lo cual el paralelogramo construido resulta ser un rombo, y los dos cuadrados, congruentes.

El análisis a priori está hecho sobre la base de un triángulo cualquiera, pero los estudiantes realizaron la actividad usando un triángulo equilátero. E1 lo hace para un triángulo rectángulo, el clásico de 3, 4 y 5 centímetros. E3 considera un triángulo acutángulo escaleno, pero reescribe el ángulo y le asigna 60°. E6 lo hace también con un triángulo acutángulo escaleno. E7 lo hace con un triángulo equilátero, pero rotula mal los cuadrados, lo que lo lleva a construir un paralelogramo hacia el triángulo. Así, no cumple con lo solicitado. E6 confunde el paralelismo llegando a construir un deltoide en vez del paralelogramo requerido.

Respecto a la tarea 2, los estudiantes E2, E5 y E8 determinan fácilmente la medida requerida, recurriendo a las propiedades de los paralelogramos y de un ángulo completo; por lo tanto se evidencia una interacción entre las **aprehensiones perceptiva** y **discursiva**. E3 calcula las medidas con un transportador y no se condice con la medida angular que se da en el triángulo, pero aplica las propiedades de los paralelogramos. E4 indica que no se puede calcular porque el triángulo no tiene las medidas dadas. E6 indica el procedimiento para calcularlo pero utiliza un valor (45°) no identificado en la configuración. E7 indica un valor azaroso de 90° sin justificación.

E1 utilizó en su configuración un triángulo rectángulo de medidas 3, 4 y 5 centímetros. Se escapa del contexto de la actividad al introducir la trigonometría en el triángulo rectángulo, determinando con calculadora la medida de 53,13° para el ángulo ABC, y las propiedades de los cuadriláteros y de la medida de un ángulo completo determina el valor del ángulo requerido.

En todos los casos hay una interacción entre las **aprehensiones operativa, perceptiva** y **discursiva**, con excepción de los estudiantes E6 y E7.

En cuanto a la tarea 3, tales estudiantes (E1, E2, E5 y E8) se valen del mismo procedimiento para determinar la medida del ángulo QFC. Análogamente hay una interacción entre las **aprehensiones operativa, perceptiva** y **discursiva**. E2, E5 y E7 no abordan la tarea 4. E1, E2, E3, E4. E6 y E8.

E2 y E4 indican que los triángulos son congruentes si se efectúan rotaciones y traslaciones, es decir, situándose en el paradigma **G1** a través de una **aprehensión operativa**.

En el caso de E1, argumenta que los triángulos CQF y QCD son congruentes al triángulo ABC, calculando las medidas angulares, pero no hace referencia a las medidas de los lados, ni aplica los criterios de congruencia, por lo cual la pruebe es insuficiente.

Se evidencia la **aprehensión discursiva** al justificar verbalmente la prueba.

Situación 3:

Todos los estudiantes construyen una configuración que da cuenta del trazado de dos de las bisectrices interiores de un triángulo ABC, y no todos las rotulan, tal como se previó en el análisis a priori. Por lo tanto, se evidencia una **aprehensión secuencial** tácita.

Respecto a la tarea 1, todos afirman que sí es posible trazar la tercera bisectriz sin construirla. De esta manera, se evidencia el conocimiento previo de las propiedades de las bisectrices, que todas se intersectan en un mismo punto, llamado incentro.

En cuanto a la tarea 2, no todos los estudiantes responden correctamente, ya que no distinguen entre distancia del incentro a los lados, y la longitud del segmento de cada bisectriz hacia los lados tal como se preveía en el análisis a priori. Por esto, se aprecia una errónea **aprehensión perceptiva**.

Sobre la tarea 3, E1, E2, E4 y E6 trazan la circunferencia circunscrita al triángulo, lo que evidencia que no reconocen la diferencia entre ésta y la circunferencia inscrita (tangente a los lados), dificultad que fue prevista en el análisis a priori.

E1 también traza la circunferencia inscrita, pero sin precisión. E3, E6 y E7, además de afirmar que sí se puede, la representan. No obstante esto y la confusión entre radio de tangencia y segmento de la bisectriz hacia los lados, logran trazarla porque consideraron un triángulo equilátero donde coinciden ls mediadas de estos segmentos y el radio de tangencia, como se previó en el análisis a priori.

En el desarrollo de esta actividad se observa una interacción entre las **aprehensiones operativa, perceptiva** y **discursiva**, en el caso de las respuestas correctas.

Situación 4:

La construcción de la figura asociada al enunciado de la Situación 4 exigió a los estudiantes una aprehensión secuencial de trazados de segmentos.

Todos los estudiantes realizan una construcción con regla y compás. Efectúan una **aprehensión discursiva** con cambio desde lo discursivo a lo visual en forma correcta.

En cada una de las configuraciones de los estudiantes E1, E5, E6 y E7 el cuadrilátero que forma parte de ésta es un trapecio rectángulo; y en las configuraciones del resto de los estudiantes es un rectángulo, ya que estos últimos optaron por trazar la tangente paralela al diámetro. Todas estas configuraciones fueron construidas con una buena precisión. Todos los estudiantes presentaron el protocolo de construcción, con diferencias en el nivel de detalle de cada uno de éstos. No obstante lo anterior, se presentan dificultades de redacción.

E1, E2, E3, E5, E6 Y E7 se sitúan en el paradigma **G1**, trazando un arco de circunferencia para probar la igualdad de las longitudes de los segmentos CD y CP. E8 calcula la distancia y E4 argumenta coloquialmente que ambos segmentos tienen a misma medida. Estos dos últimos estudiantes también se sitúan en el paradigma **G1**.

En cuanto a los conocimientos previos que se esperaba que fueran puestos en escena, tales como los conceptos de perpendicularidad, paralelismo y tangente a una circunferencia en un punto de ella, aplicación de propiedades, teoremas, efectivamente aparecieron mayoritariamente en las respuestas de los estudiantes que en general se situaron en el paradigma **G1**.

Situación 5:

La construcción de la configuración asociada a las cuatro tareas implicó una **aprehensión secuencial** de trazado de segmentos: lados del triángulo, alturas, además trazar una circunferencia y tangentes a ellas.

Cabe mencionar que la consigna de la situación 5 corresponde a una secuencia de construcción de la configuración, para la cual todos los estudiantes se valieron de regla o escuadra, y compás. No obstante, sus configuraciones presentan imprecisiones, evidenciadas en la construcción de un triángulo obtuso con los puntos del trío PQR, los cuales por ser definidos en el análisis a priori como colineales no pueden conformar un triángulo (siendo ésta la respuesta a la tarea 4). Sin embargo este sesgo estaba contemplado en el análisis a priori.

Por otro lado, todos los estudiantes rotularon correctamente la configuración.

En todo caso, se evidencia una **aprehensión operativa** parcial, ya que el pasaje del enunciado a la construcción solicitada es impreciso. La **aprehensión secuencial** viene dada por el orden de las tareas. La **aprehensión perceptiva** se manifiesta al dar cuenta de la tarea 4, ya que al visualizar el triángulo se establece que es obtusángulo. Claramente la imprecisión en el uso de los instrumentos llevó a los estudiantes a conclusiones equivocadas.

Situación 6:

La construcción de la figura asociada al enunciado implicó una **aprehensión secuencial** de trazados de segmentos: lados del triángulo, la altura y las perpendiculares; además de la determinación de los puntos M y N bajo las condiciones establecidas en la hipótesis.

Las configuraciones de los estudiantes E1, E2, E3, E5 y E6 dieron cuenta del enunciado correctamente; sus construcciones están hechas con regla y compás, efectuando una **aprehensión discursiva** con cambio desde lo discursivo a lo visual. No obstante la configuración realizada por E6 fue parcial, ya que estableció los puntos M y N como únicos, y no en duplas como se esperaba en el análisis a priori. E4 y E8 construyeron el triángulo y trazaron la altura sin continuar con las instrucciones, lo que podría significar debilidad en los conocimientos requeridos. E5 y E7 construyen una configuración sobre un triángulo isósceles, trazando la atura interior y estableciendo el pie, rotulándolo correctamente; pero se equivocan al dibujar perpendiculares no pedidas, dejando la configuración inconclusa. Además, de la semejanza entre sus configuraciones y respuestas se evidencia que conversaron entre ellos en ausencia del investigador.

El estudiante E3 inicialmente construyó correctamente una configuración sobre un triángulo rectángulo, en que coincide el vértice del ángulo recto con el pie de la altura. Esto es destacable porque no fue considerado en el análisis a priori. Ante tal situación, afirma que no se puede continuar porque es un triángulo rectángulo, y procede a construir la configuración solicitada sobre un triángulo acutángulo escaleno que también da cuenta del enunciado. En todo caso, en el caso del triángulo rectángulo el enunciado es válido si el vértice B está en el ángulo recto.

Los estudiantes E1, E2, E3 y E6 se sitúan en el paradigma **G1**, al verificar la equidistancia trazando un arco de circunferencia con centro en el vértice B.

Los estudiantes E1, E2 y E3 presentan el protocolo de construcción íntegro, en cambio E6 lo presenta parcialmente. Los estudiantes 5 y E7 presentan el protocolo de construcción de sus configuraciones, (incorrectas), de manera parcial.

Respecto a los conocimientos previos de los estudiantes, todos dejaron en evidencia que sabían trazar segmentos perpendiculares, arcos, rotular, tal como se preveía en el análisis a priori.

En resumen, en relación a la solución de las situaciones planteadas, los estudiantes dejaron en evidencia la movilización de conocimientos previos en torno a las propiedades de la circunferencia, propiedades de triángulo y la relación entre triángulo y circunferencia, con distintos grados de profundidad.

Respecto a las habilidades de comunicación escrita, los estudiantes presentan problemas de redacción, quedando de manifiesto al establecer el protocolo de construcción de manera sintética e incluso en forma implícita, sin explicarlo paso a paso.

3.5.3. Análisis a posteriori. Segunda etapa: trabajo con tecnología.

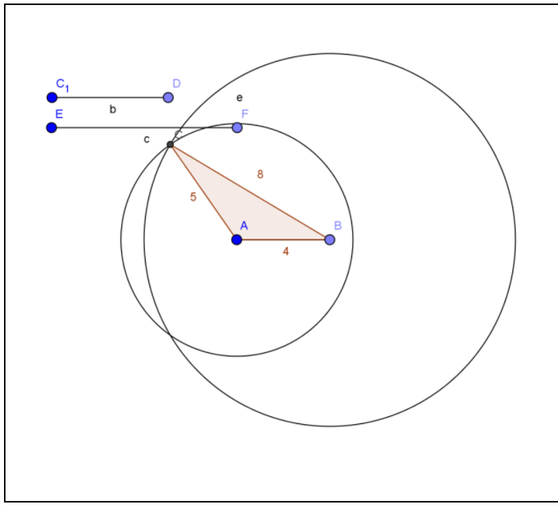
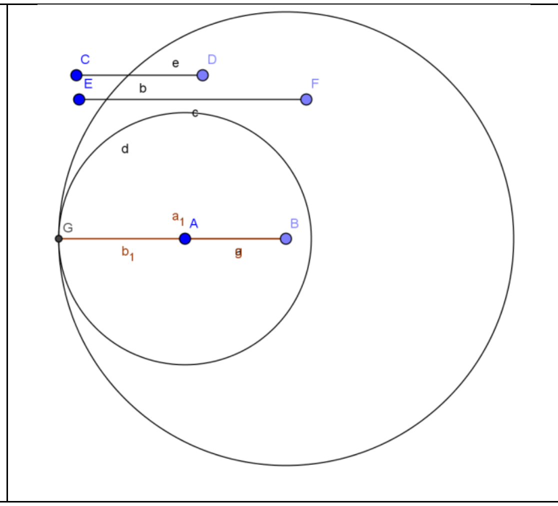
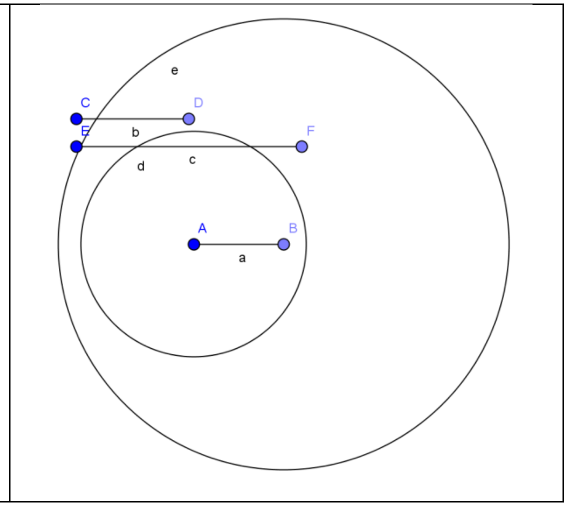
A continuación se presentan las mismas actividades realizadas por los estudiantes, dos semanas después de las efectuadas a lápiz y papel, ahora apoyados por la tecnología digital, es decir, con un procesador geométrico, en este caso por el programa GeoGebra.

Las producciones de los estudiantes se han transcrito, y al final de cada actividad se hace el análisis correspondiente.

Cabe hacer mención que el estudiante E4 se eximió de hacer esta actividad por encontrarse con una prolongada licencia médica.

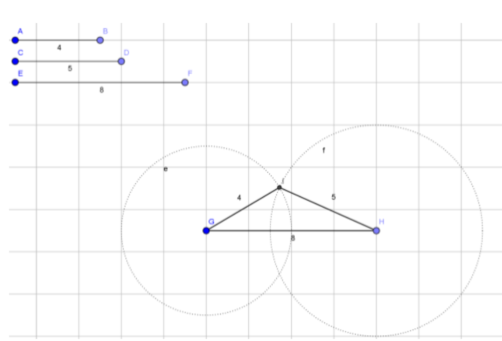
Situación 1

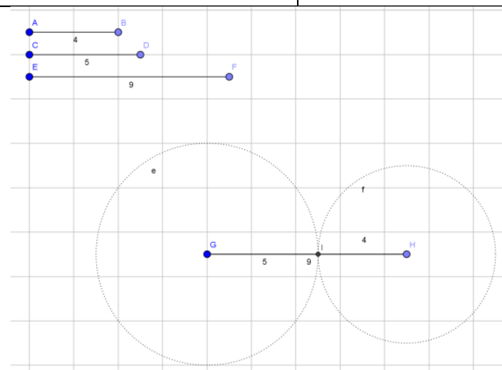
S 1	T 1	T 2	T 3	T 4
E 1	Si se puede, porque primero se cumple con el principio de que el lado mayor debe ser menor que la suma de los otros dos lados y en GeoGebra nos podemos dar cuenta que siguiendo el protocolo de construcción de un triángulo de dichos lados nos resulta un triángulo escaleno.	Primero vemos que no se cumple el principio de que el segmento mayor es menor a la suma de los otros dos lados sino que es igual. En GeoGebra se observa que al unir los segmentos no se obtiene un triángulo por lo tanto con estas medidas no resulta ningún tipo de triangulo.	La suma de los dos lados menores es menor que el segmento mayor por lo tanto no se cumple el principio, en GeoGebra se demuestra lo imposible que se pueda realizar un triángulo con estos segmentos.	El principio de que para la construcción de un triángulo es necesario cumplir con que la suma de los dos segmentos más pequeños debe ser mayor al lado o segmento más grande de otra forma es imposible su construcción.

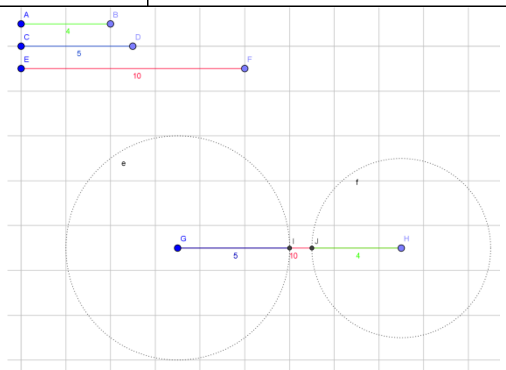
  

E 2	Si se puede construir un triángulo con las medidas los segmentos 4,5 y 8; ya que la suma de los lados menores, es mayor que el tercer lado. La forma de construcción para verificar que lo	No, se puede construir un triángulo con las medidas los segmentos 4, 5 y 9 ya que la suma de los lados menores, es igual al lado mayor lo que provocara que solo intercepte en la misma	No se puede construir un triángulo con las medidas los segmentos 4, 5 y 10 ya que la suma de los lados menores, es menor al lado mayor lo que provocara que nunca se intercepte.	

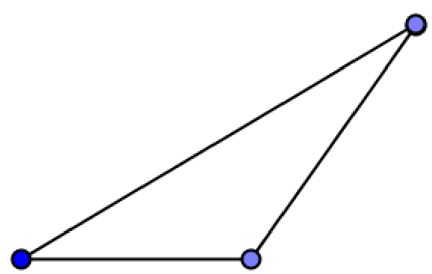
	realizado: - Se construye los segmentos - Luego se construye el segmente más grande y con el uso de compas se toma la medida de los otros dos lados - Y por último se hace un punto en la intercesión donde se juntan las líneas del compás y se unen los puntos creando un triángulo de lados mencionados anterior mente.	recta. La forma de construcción para verificar que lo realizado: Se construye los segmentos Luego se construye el segmente más grande y con el uso de compas se toma la medida de los otros dos lados Y por último se hace un punto en la intercesión donde se juntan las líneas del compás y comprobamos que corta la recta y no se puede generar un triángulo con esas medidas.	La forma de construcción para verificar que lo realizado: - Se construye los segmentos - Luego se construye con el uso del compás el segmente más grande y con el uso de compas se toma la medida de los otros dos lados - Y como las medidas se ve que nunca se van a interceptar	

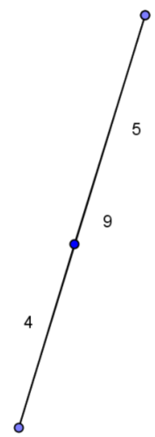


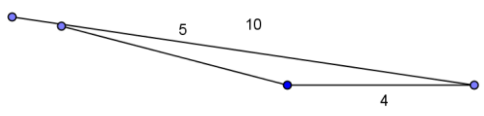




E 3	Si se puede armar y siempre se podrá pues sus medidas calzan ya que la suma de las dos medidas de menor longitud es mayor a la longitud de mayor medida.	No se puede ya que el segmento de 9cm no se puede unir ya que quedaría una línea recta pues la suma de los dos segmentos menores es igual al segmento mayor.	No se puede armar pues la longitud del tercer segmento es muy grande y no se podrá unir. Esto se debe a que la suma de los dos primeros segmentos es menor al tercer segmento.	



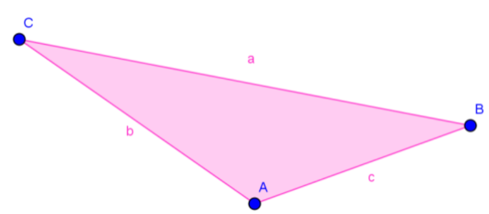


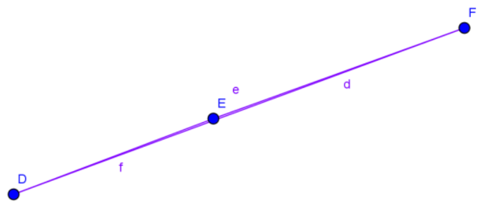


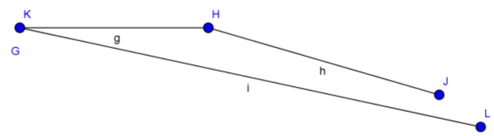
E 5	Efectivamente con las medidas dadas podemos construir un triángulo, dado que los tres puntos se intercepten sin problema, formando un	Dadas las medidas, los puntos si logra interceptarse, sin embargo no se puede construir un triángulo, dado que los tres puntos	No es posible formar un triángulo con esas medidas, dado que los puntos no logran interceptarse, formando	A la hora de realizar la construcción de un triángulo dado tres segmentos de diferente longitud, es importante considerar el siguiente

	polígono, específicamente un triángulo escaleno.	quedan situados en la misma recta, es decir están en igual dirección.	una figura abierta.	principio, el cual siempre debe cumplirse para que la construcción resulte exitosa Para formar un triángulo el segmento mayor debe ser menor a la suma de los dos segmentos más pequeños. Al ser igual o mayor que la suma de estos dos segmentos más pequeños, no se cumplirá. Si son iguales los tres puntos, estarán en la misma dirección, por ende no se formará el

				triángulo. Y si es mayor, los puntos no se alcanzarán a interceptarse, por consecuencia quedará



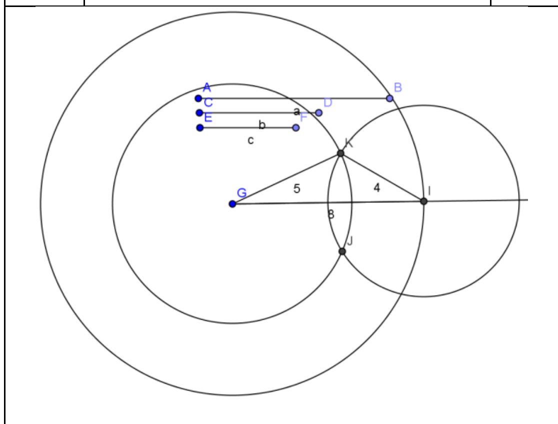


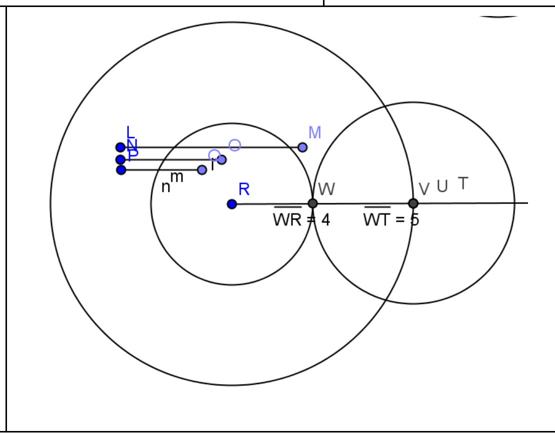


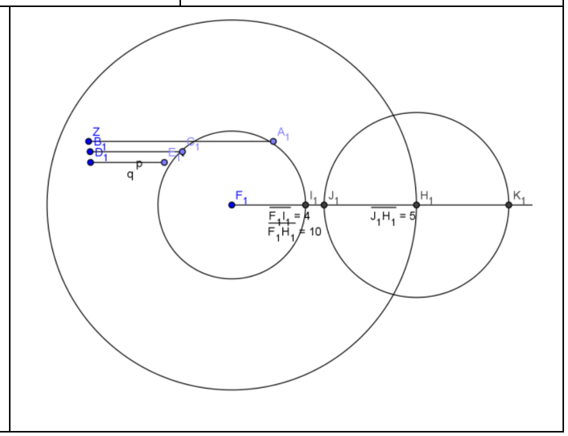
E 6	Si, si se puede construir un triángulo con estas medidas, ya que no existe ninguna dificultad para que los tres puntos se intercepten y formen una figura cerrada, de esta	Los puntos si se alcanzan a interceptar, pero no se puede construir un triángulo con estas medidas, ya que los tres puntos quedan situados en la	No, no se puede formar un triángulo con esas medidas, de ninguna forma, por la sencilla razón de que los puntos no se alcanzan a interceptan, por lo tanto	Para construir un triángulo dado tres segmentos diferentes, es necesario que se cumpla un principio muy importante, el cual se debe considerar al

	manera, se forma un polígono, precisamente un triángulo escaleno.	misma recta, es decir los tres puntos están situados en la misma dirección, por lo tanto no se puede formar un triángulo, de ninguna manera.	no forman una figura cerrada, sino que queda un figura abierta, por ende no se forma un triángulo.	momento de su construcción. Para formar un triángulo el segmento mayor debe ser menor a la suma de los dos segmentos más pequeños, siendo de esta manera, se formará un triángulo. Por el contrario al ser igual o mayor que la suma de estos dos segmentos más pequeños, no se cumplirá. Si son iguales los tres puntos, estarán en la misma dirección, por ende no se formará el triángulo. Y si es mayor, los puntos no se

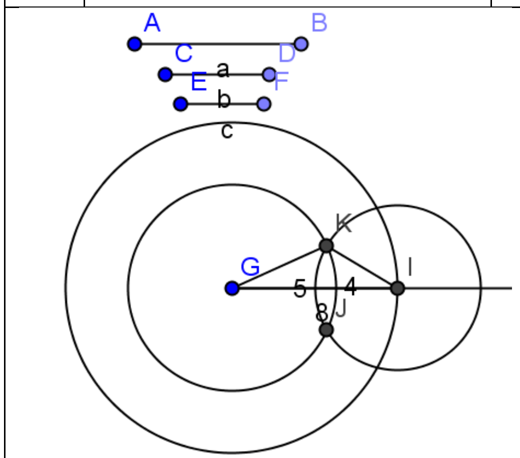
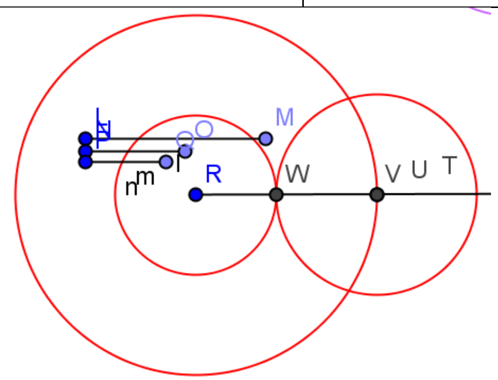
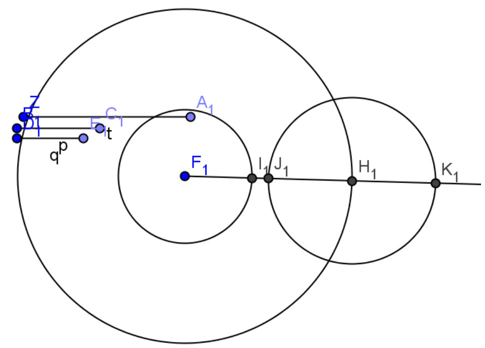
				alcanzarán a interceptarse, por consecuencia quedará una figura abierta.

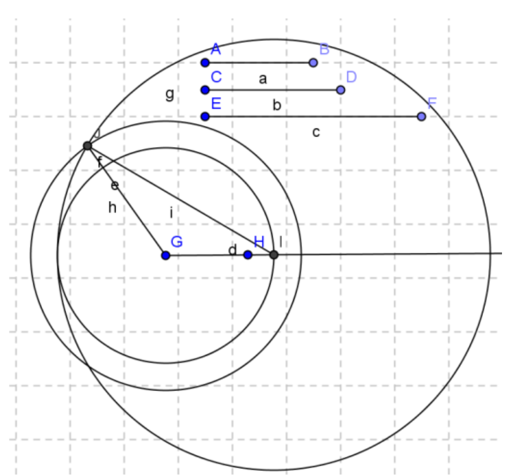
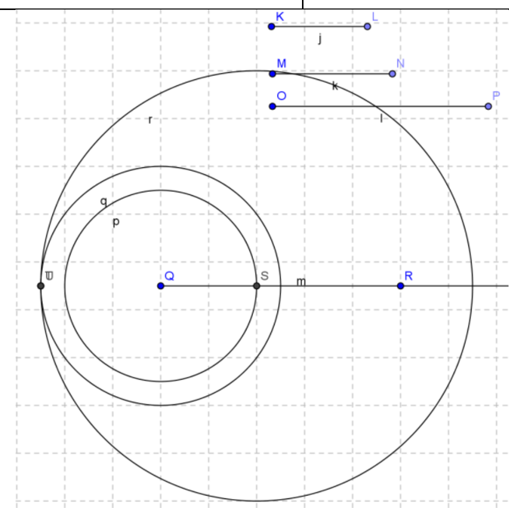
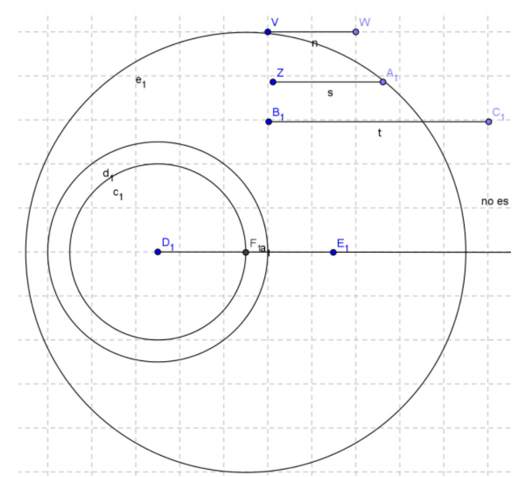






E 7	Si se puede construir un triángulo con las medidas entregadas, ya que los tres puntos se interceptan	Los puntos se interceptan pero no se alcanza a formar el triángulo por lo tanto con	Con estas medidas tampoco se puede construir un triángulo puesto que las figuras no	Para formar el triángulo se debe cumplir con la propiedad euclidiana de que al sumar dos lados

	y forman una figura cerrada. Cumpliendo también con la propiedad que la suma de dos lados es mayor a la tercera y formando un triángulo escaleno.	estas medidas no se puede construir un triángulo.	se interceptan.	del triángulo debe ser mayor a la medida del tercer lado.
				

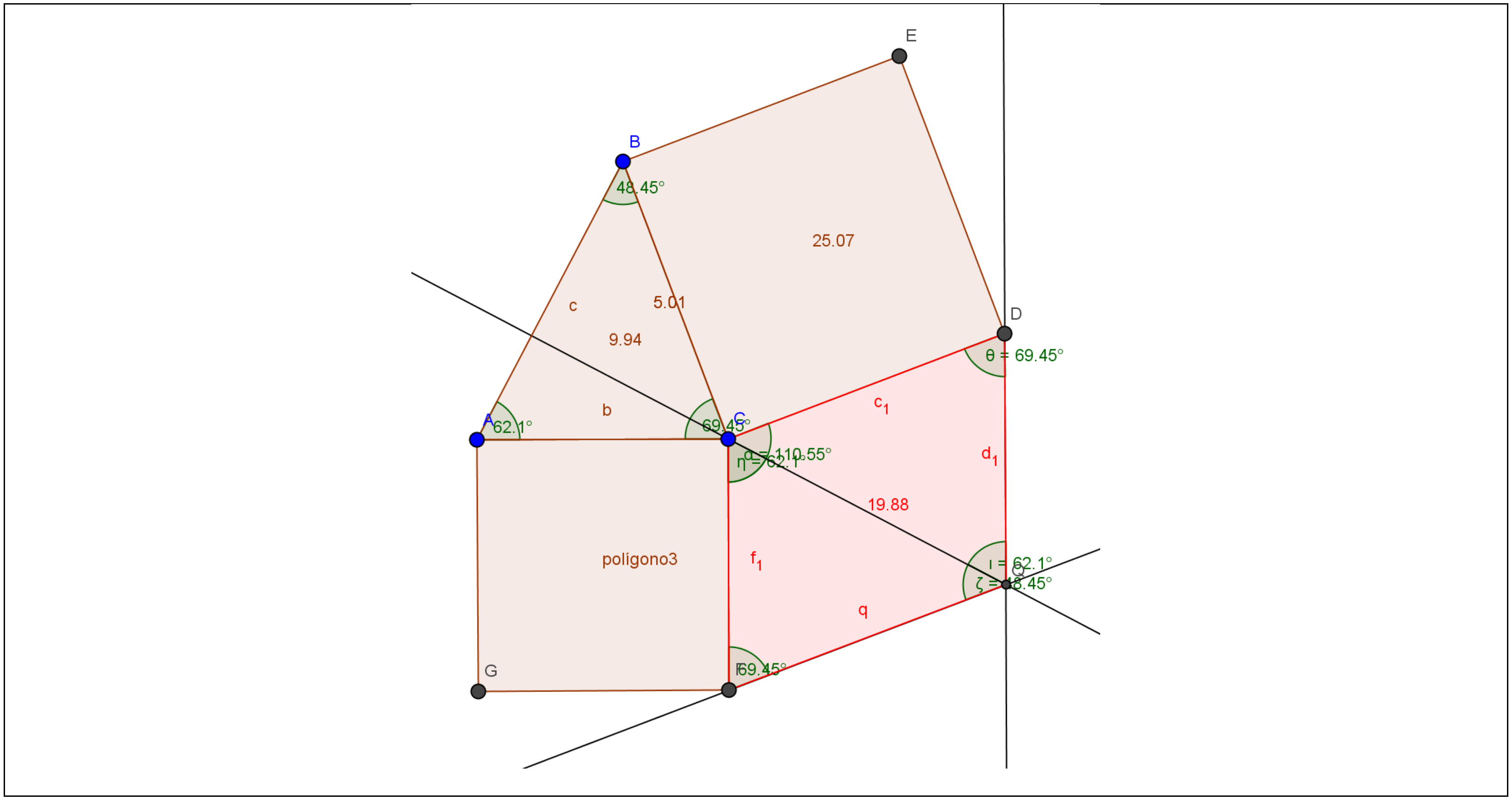
<table>
<tr>
<td>E 8</td>
<td>Si es posible la construcción con esos segmentos, dado que la suma de cualquiera de sus lados es mayor que el tercero.</td>
<td>No es posible la construcción del triángulo, dado que la suma de los lados de 4 y 5 cm no es superior a 9 (es igual).</td>
<td>No es posible la construcción de triángulo, tal como se puede apreciar, dado que la suma de los lados de 4 y 5 cm. es inferior al tercer lado de 10 cm.</td>
<td>Conjetura: tras realizar los triángulos anteriores, es posible percatarse que la construcción depende de que al sumar dos lados este resultado debe ser mayor que el tercer lado de todo triángulo</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
</td>
<td colspan="2">
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Análisis

- La mayoría de los estudiantes representa con exactitud cada configuración, según la tarea. No obstante, algunas configuraciones no permiten ver con claridad la propiedad, como lo es el caso de los estudiantes E1 y E8.
- Se presentan dificultades de rotulación debido a que al procesador geométrico rotula automática y secuencialmente al ir construyendo la configuración. Los estudiantes no previeron esto.
- Por la precisión en la construcción de la configuración, y por el orden correcto de su protocolo de construcción, el estudiante ejerce la **aprehensión perceptiva** de manera que puede asociar pertinentemente conocimientos previos.
- Se evidencia la **aprehensión perceptiva** para visualizar la existencia o la no existencia de los triángulos, dadas las condiciones de los enunciados. Se evidencia la interacción entre las **aprehensiones operativa** y **discursiva** al representar la tarea solicitada.
- En cuanto a las respuestas, (**aprehensión discursiva**) sus explicaciones son más extensas, pero aún persisten problemas de redacción.
- Comparativamente con la actividad realizada con lápiz y papel, todos los estudiantes se dieron cuenta que es imposible dibujar un triángulo con las medidas indicadas en la tarea 2.
- No todos abordan la tarea 4, ya que conjeturan para justificar sus respuestas en las tareas anteriores.

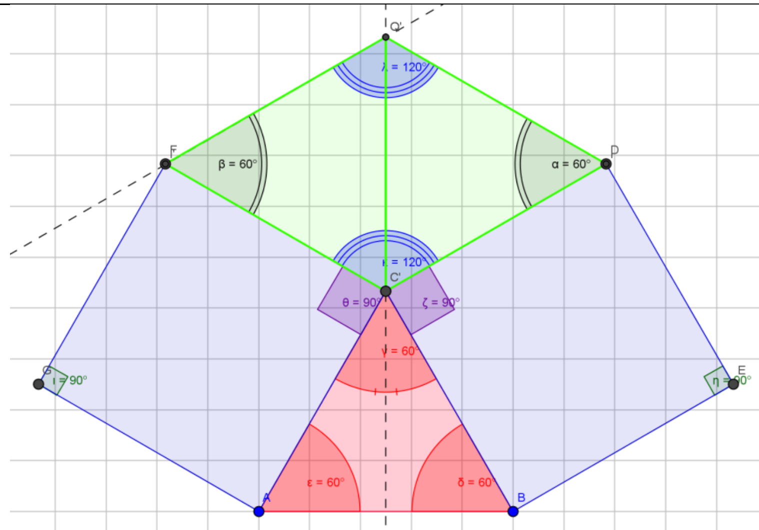
Situación 2

S 2	T 2	T 3	T 4
E 1	El ángulo FCD mide 110,55° que es el suplementario del ángulo ACB que mide 69,45°	La medida del ángulo QFC es de 69,45°	Son congruentes porque los tres triángulos tienes las mismas medidas de cada uno de sus ángulos interiores.

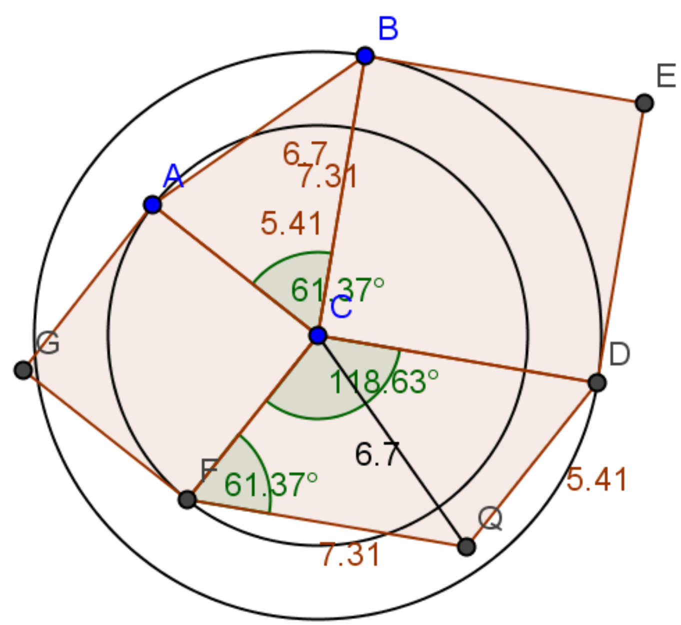


E 2	La medida del ángulo FCD se obtiene con la saber el ángulo	La medida del ángulo QFC debemos recordar que es un	

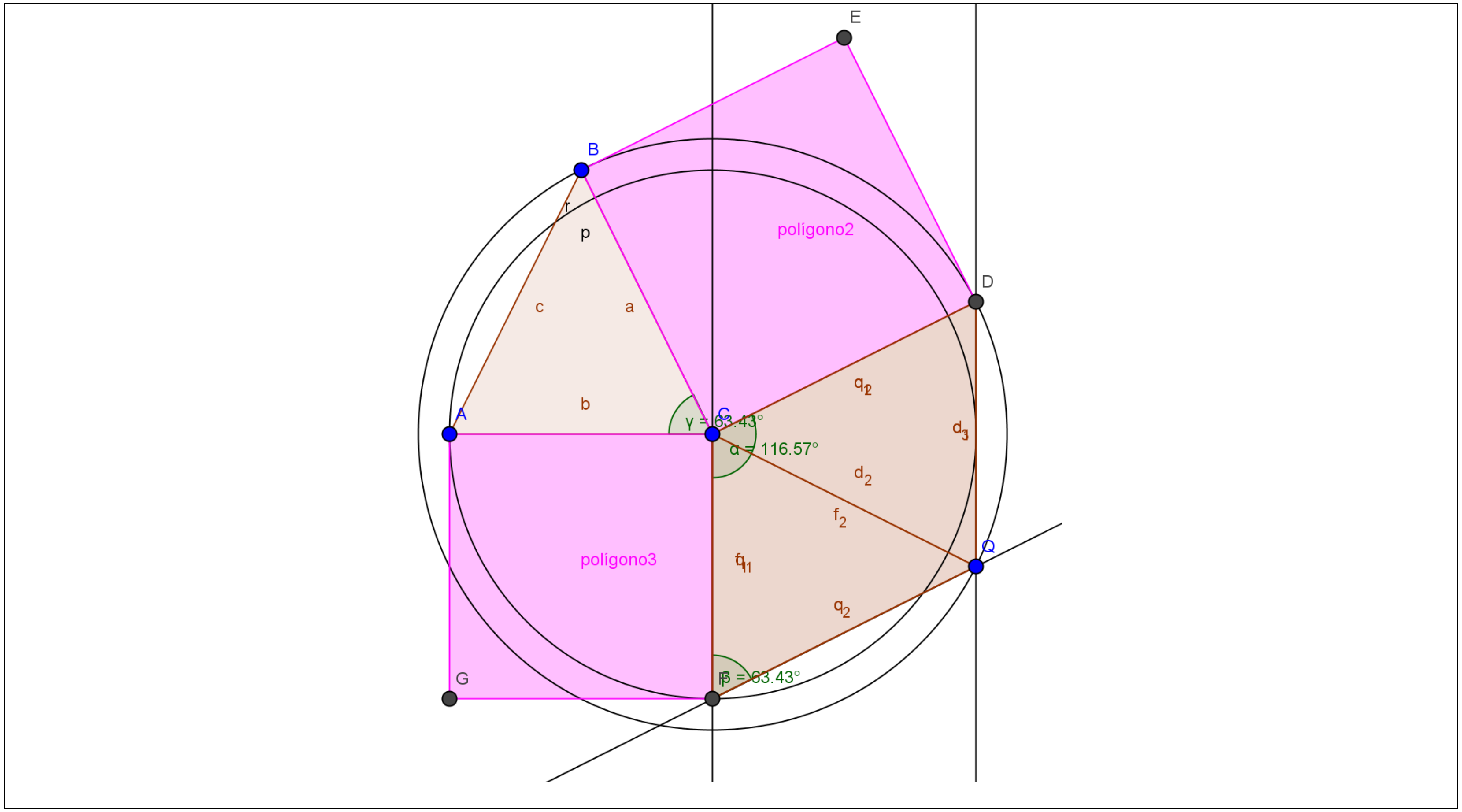
	interior del triángulo ABC; pero en este caso es muy fácil, ya que como es un triángulo equilátero y tiene todas sus medidas iguales, es decir, mide 60° y como se crea un cuadrado a los lados del triángulo sabemos que su ángulos miden 90° y la suma de esto es 240° y como se genera un ángulo completo hay que sacar la diferencia de 360° -240° que es 120° .	paralelogramos que es un Rombo y como sabemos la medida del ángulo FCD es 120°, la misma medida debe ser el ángulo FQD y como es un paralelogramos la suma de todos sus ángulos es 360° y demos sacar la diferencia y dividirla en dos ya que son iguales. Entonces la medida de ángulo QFC es de 60° = QPC que es 60°.	



E 3	La medida del ángulo FCD en términos de los ángulos interiores del triángulo ABC son el complemento puesto que los angulos FCD+ACB=180º	La medida del ángulo QFC es igual al ángulo ACB ya que ambos triángulos son el complemento del ángulo FCD.	Los triángulos CQF y QCD son congruentes, pues las rectas AC=FC=QD ; BC=CD=FQ y CQ=AB

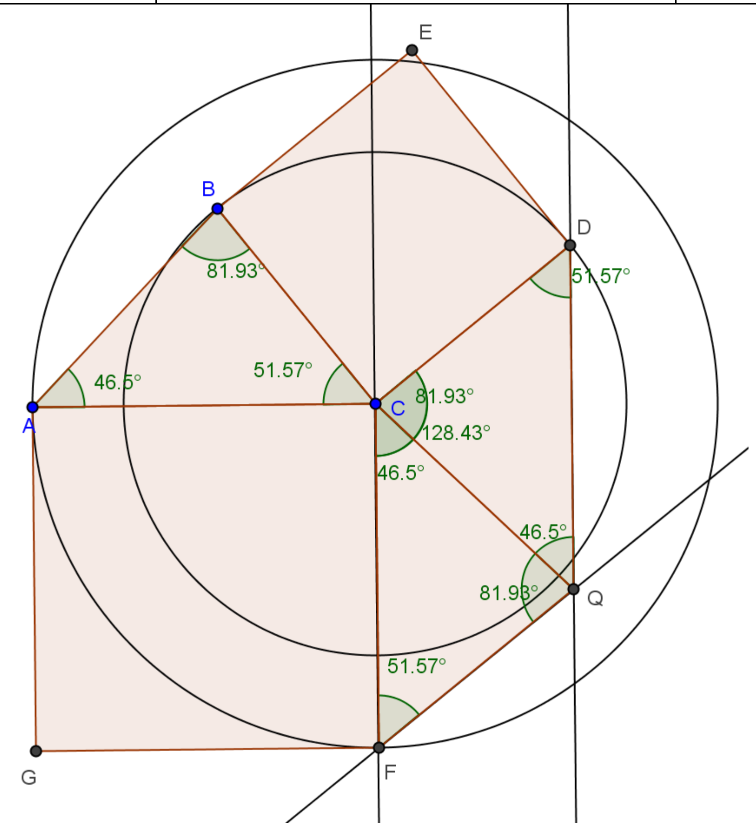


E 5	La medida del ángulo FCD, corresponde en este caso al suplemento del ángulo BCA.	La medida del ángulo QFC, corresponde al suplemento del ángulo FCD o también es igual al ángulo BCA del triángulo ABC.	

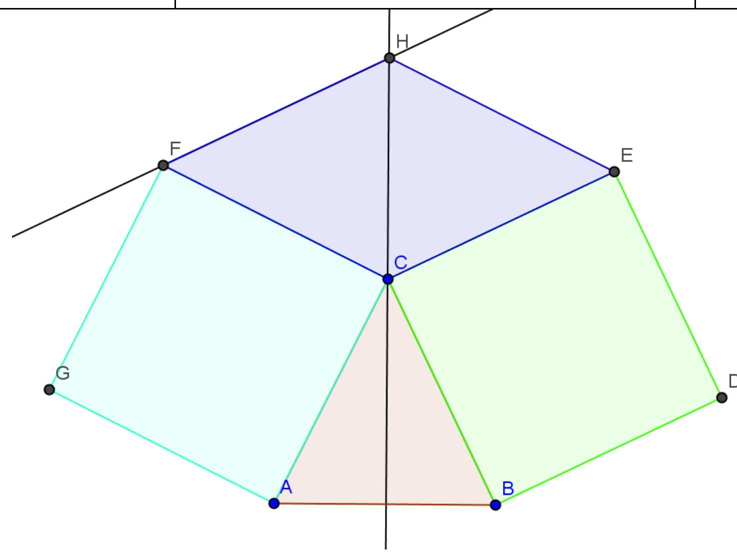


E
B
r
p
poligono2
D
c
a
b
A
C
γ = 63.43°
α = 116.57°
d
Q
poligono3
G
β = 63.43°

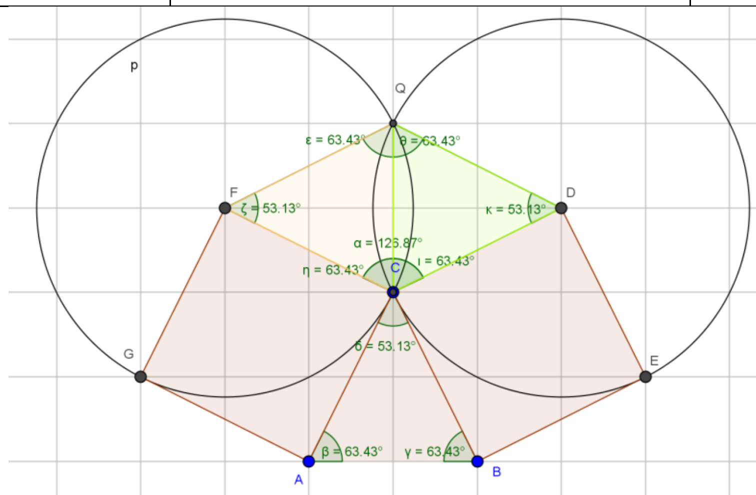
E 6	La medida del ángulo FCD, corresponde al suplemento del ángulo BCA.	La medida del ángulo QFC, corresponde al suplemento del ángulo FCD o también es igual al ángulo BCA del triángulo ABC.	



E 7	La medida del ángulo FCD es el suplemento de ángulo BCA.	La medida del ángulo QFC es el suplemento del ángulo FCD.	



E 8	La medida del ángulo FCD corresponde a la suma de los dos ángulos que no son opuestos por	El ángulo QFC = 53,13°	Son congruentes, pues tienen la misma de sus ángulos interiores

	el vértice		
			

ANÁLISIS

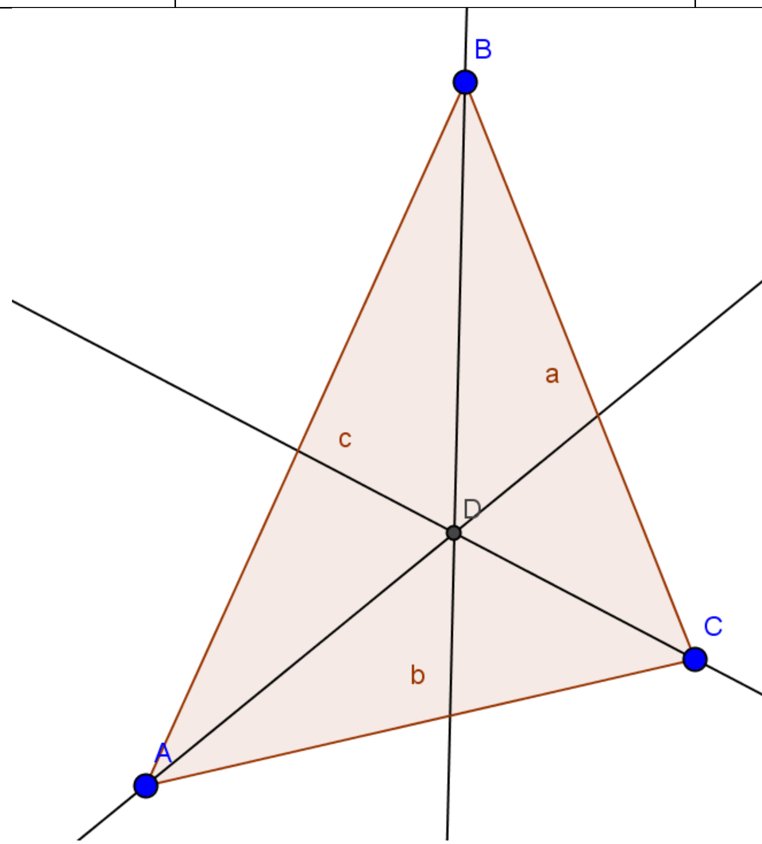
- Dos estudiantes construyen la configuración sobre un triángulo equilátero.
- Nuevamente se presentan algunas dificultades de rotulación en el estudiante E7, al rotular con H en vez de Q.
- Todos los estudiantes construyeron con exactitud la configuración solicitada, por lo que se evidencia la **aprehensión operativa**, al pasar del enunciado a la configuración. Además se presenta tácitamente la **aprehensión secuencial**.
- Por otro lado, la verificación de la congruencia de los triángulos es hecha través de medidas angulares, evidenciándose así la **aprehensión perceptiva**. Tal verificación se ubica en el paradigma **G1**.

- Algunos estudiantes tienen problemas de redacción, por ejemplo el estudiante E3 utiliza equivocadamente la palabra triángulos en vez de ángulos. No obstante, al justificar sus respuestas evidencian en general la **aprehensión discursiva**. En cuanto a la tarea 4, la justificación es parcial, ya que al hablar de congruencias se refieren exclusivamente a medidas angulares, soslayando las medidas laterales. Sin embargo, al justificar a partir de la visualización de la configuración, evidencian la **aprehensión perceptiva**.
- La gran mayoría calcula las medidas angulares a través del procesador geométrico, dando así respuesta a las tareas 2 y 3.
- E2 y E7 no aborda la tarea 4.
- Comparativamente con las tareas a lápiz y papel, las tareas con procesador geométrico fueron realizadas correctamente por los estudiantes que presentaron dificultades en la construcción anterior. Esto sugiere pensar que el uso de procesadores geométricos facilitó la recuperación de los conocimientos previos de ellos.

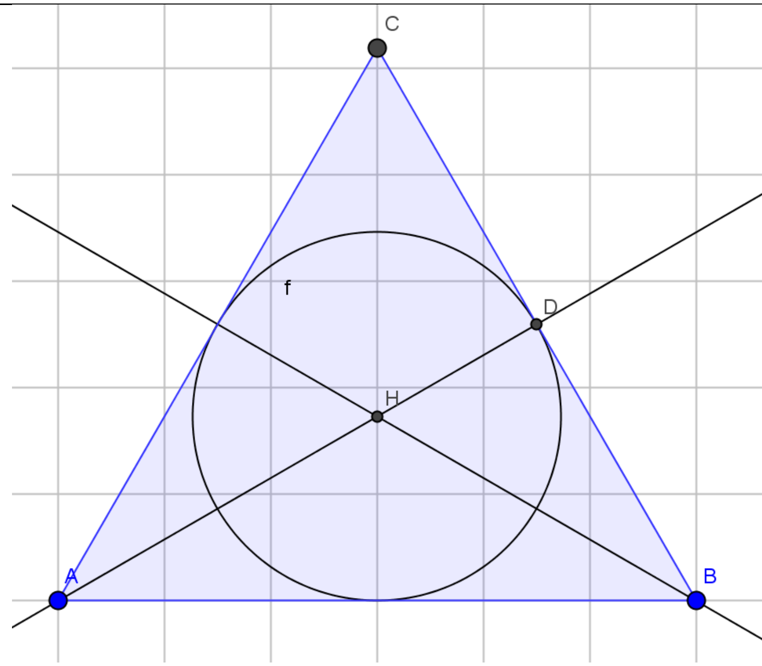
Situación 3

S 3	T 1	T 2	T 3
E 1	Al tener ya dos bisectrices obtenemos su punto intersección por lo tanto se puede trazar siempre y cuando pase por el	La distancia es la misma entre el incentro y cada uno de los lados.	Sí, es posible porque la medida de cada punto medio de los lados del triángulo hacia el incentro es igual y por lo tanto el incentro

	incentro.		hacia cualquier lado es el radio de la circunferencia.

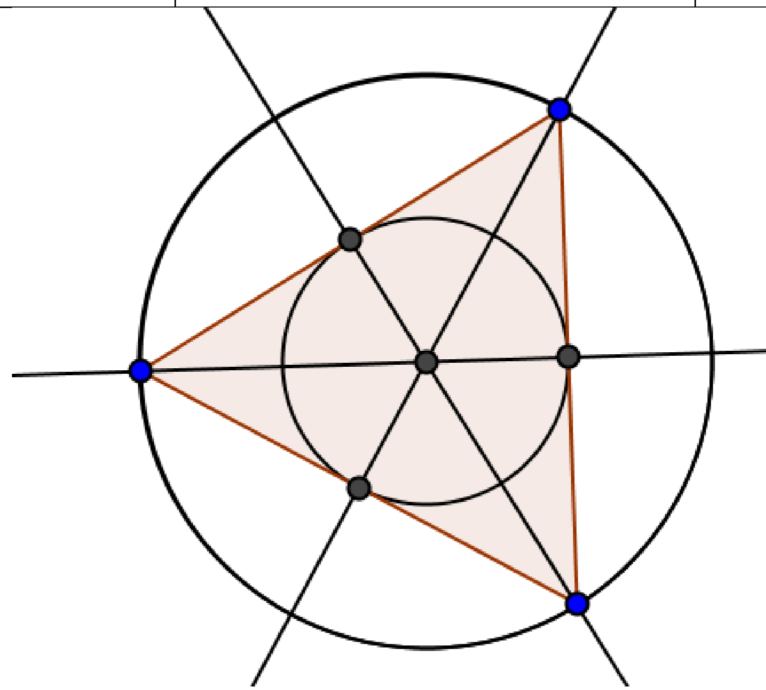


E 2	Si, se puede determinar la tercera bisectriz sin construirla porque al tener la intercesión de dos alturas, y sin tener la necesidad de construir la tercera altura se puede solo unir ese punto de intersección de las dos bisectrices con el vértice con el vértice y así lograr obtener la tercera altura.	Lo que se puede decir con la distancia entre el punto de intersección de las bisectrices es igual a los de sus lados.	Si es posible trazar una circunferencia tangente a los tres lados con centro en el punto de intersección de las tres bisectrices.



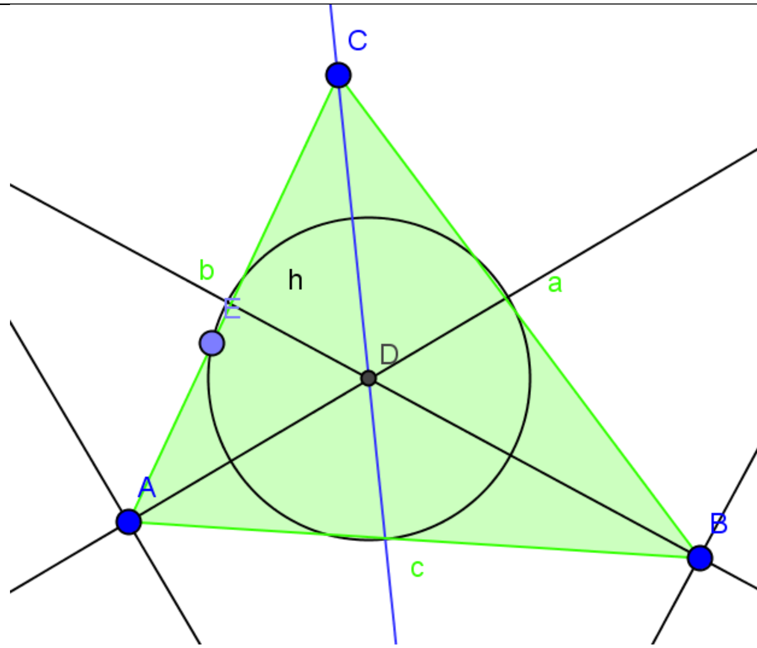
E 3	Si es posible determinar la tercera bisectriz ya que se encuentra entre la intersección de las dos anteriores y su vértice.	La distancia entre el punto de intersección de las bisectrices y cada uno de los lados es igual en cada caso.	Claro que es posible trazar una circunferencia tangente puesto que el punto de intersección de las Bisectrices resulta ser el centro

			del triángulo, dejando cada vértice a la misma distancia y quedando El triángulo en el centro de la circunferencia.



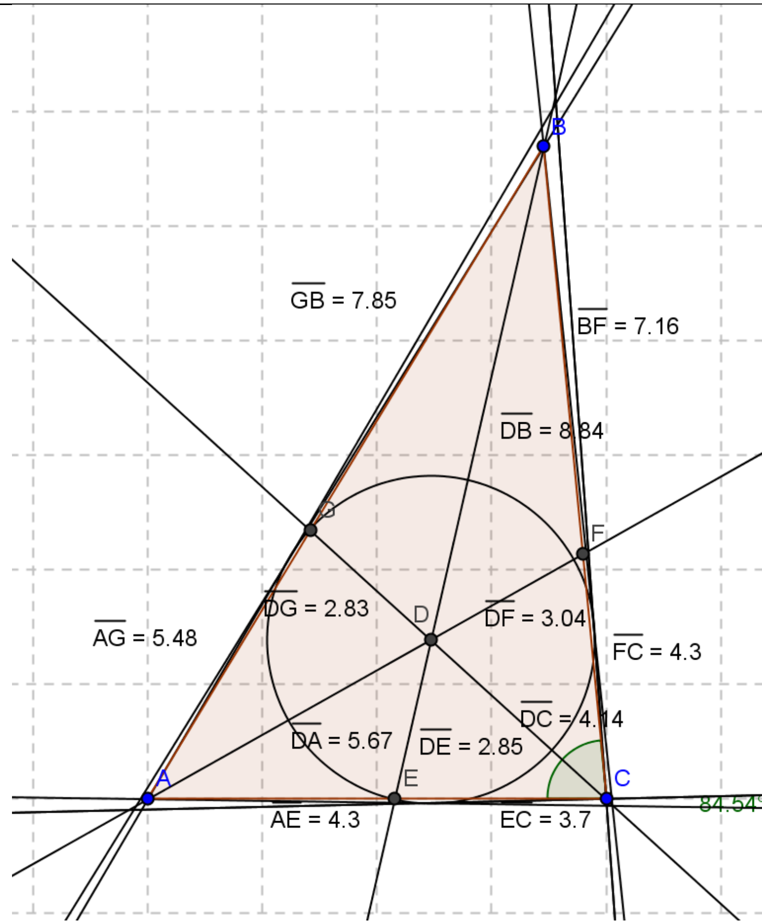
E 5	Efectivamente es posible determinar la tercera bisectriz, dado que ya hemos construido dos, por lo tanto ya tenemos el punto de intersección de estas, dicho punto es denominado Incentro, esto significa que todas las bisectrices del triángulo pasarán por este punto. Por ende, para encontrar la tercera bisectriz, debemos considerar el Incentro y el vértice faltante	La distancia del punto de intersección de las bisectrices llamado Incentro con los vértices de cada ángulo, va depender exclusivamente del tipo de triángulo que se ha construido en un principio, pudiendo este ser equilátero, escaleno o isósceles. - Si es equilátero: todas las medidas de los segmentos formados por el Incentro con los respectivos vértices serán iguales, esto dado a que la característica principal de este tipo de triángulo es que todos sus lados tienen igual medida. - Si es escaleno: al contrario del triángulo equilátero, en este todas las medidas son	Esto es posible en casi totalidad de los triángulos, sólo en el tipo de triángulo escalenos obtusángulo, específicamente en los mayores a 109 º no se cumple, ya que la circunferencia deja dentro de ella a uno de los vértices del triángulo ABC, en los demás si es posible, ya que al hacer la circunferencia, está se encuentra dentro de los vértices, por ello se puede hacer una unión entre un punto de la circunferencia con los vértices del triángulo y construir así la recta tangente.

		diferentes, dado que todos sus lados tienen medidas distintas. - Si es isósceles: dos de las bisectrices tendrán medidas iguales en las uniones del Incentro con los vértices, esto debido a que la característica de dicho triángulo es que tiene 2 lados iguales y uno distinto.	



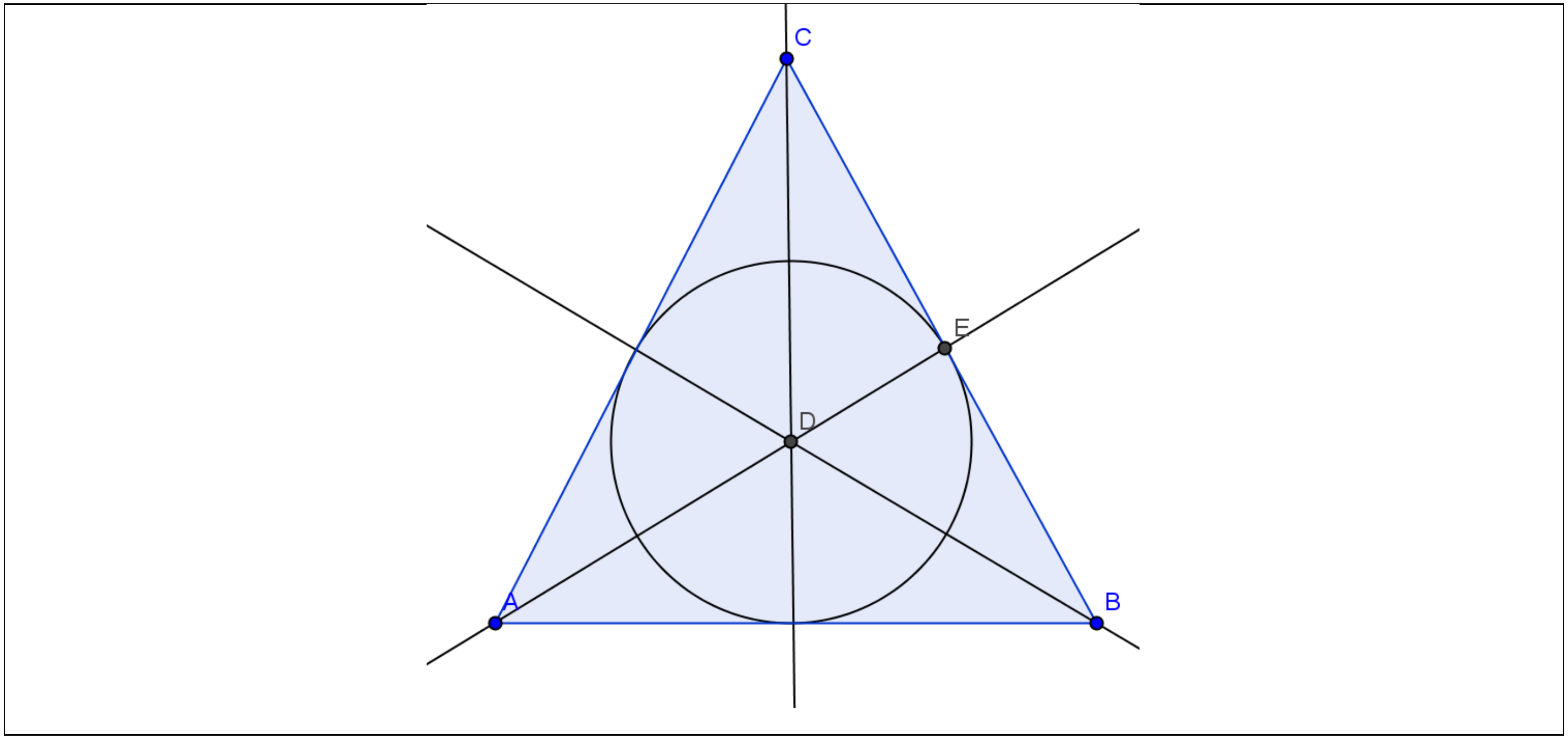
E 6	Sí, si es posible determinar la tercera bisectriz, ya que al tener dos bisectriz tenemos un punto de intersección entre estas, el cuál es el punto de intersección de las	La distancia del Incentro con los vértices de cada ángulo, va depender directamente del tipo de triángulo (Equilátero, Escaleno e isósceles). Si es equilátero todas	Esto es posible en casi totalidad de los triángulos posibles, sólo en el tipo de triángulo escalenos obtusángulo (Mayor a 109°), no se cumple, ya que la

	bisectrices (Incentro), lo que quiere decir que todas las bisectrices del triángulo pasarán por ese punto. Por lo tanto para encontrar la tercera bisectriz, solo se debe encontrar el punto de intersección y luego unir con el vértice del ángulo faltante.	las medidas de los segmentos formados por el Incentro con los respectivos vértices serán iguales, esto debido a que todos sus lados son iguales; En un triángulo Escaleno pasa lo contrario, todas las medidas son desiguales, esto debido a que todos sus lados son diferentes y finalmente en un triángulo Isósceles, dos de las bisectrices tendrán medidas iguales en las uniones del Incentro con los vértices, esto es porque este tipo de triángulos tiene 2 lados iguales y uno desigual.	circunferencia deja dentro de sí a un vértice del triángulo ABC, en los demás si es posible, ya que al hacer la circunferencia, está se encuentra dentro de los vértices, es por esto que se puede hacer una unión entre un punto de la circunferencia con los vértices del triángulo y hacer de esta manera la recta tangente.



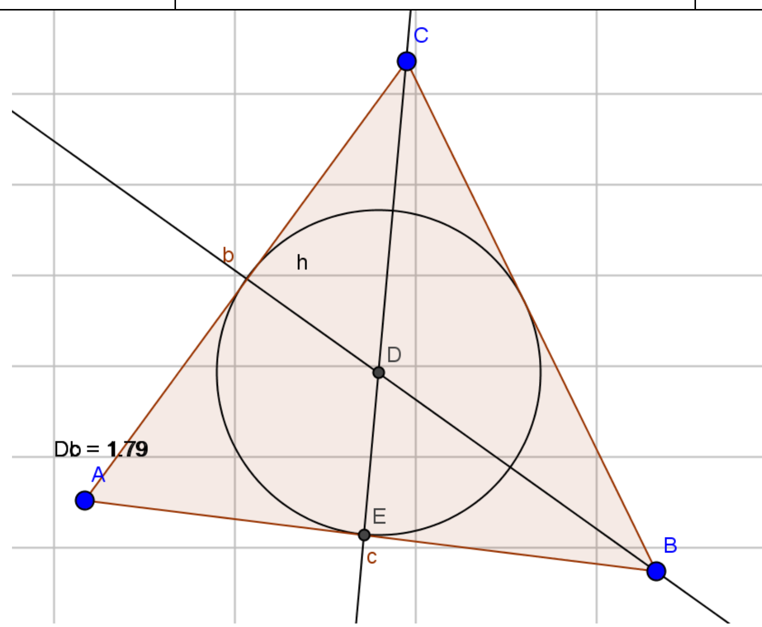
B
GB = 7.85
BF = 7.16
DB = 8.84
G
F
DG = 2.83
D
DF = 3.04
AG = 5.48
FC = 4.3
DC = 4.14
DA = 5.67
DE = 2.85
A
E
C
84.54°
AE = 4.3
EC = 3.7

E 7	Es posible determinar la tercera bisectriz, puesto que con solo dos podemos observar el punto de intersección (Incentro) y construirla.	Dependerá del tipo de triangulo, si es equilátero las medidas formadas del Incentro con sus vértices serán iguales. Si es Isósceles dos de las bisectrices serán iguales en la unión del Incentro con los vértices. Si es escaleno todos sus lados son desiguales.	



E 8	a) si, ya que solo con dos bisectrices es posible encontrar el punto de intersección (incentro) y	b) miden la misma longitud, pues el incentro forma un circulo al interior del triángulo, por ende	c) si es posible trazar la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo y con centro en

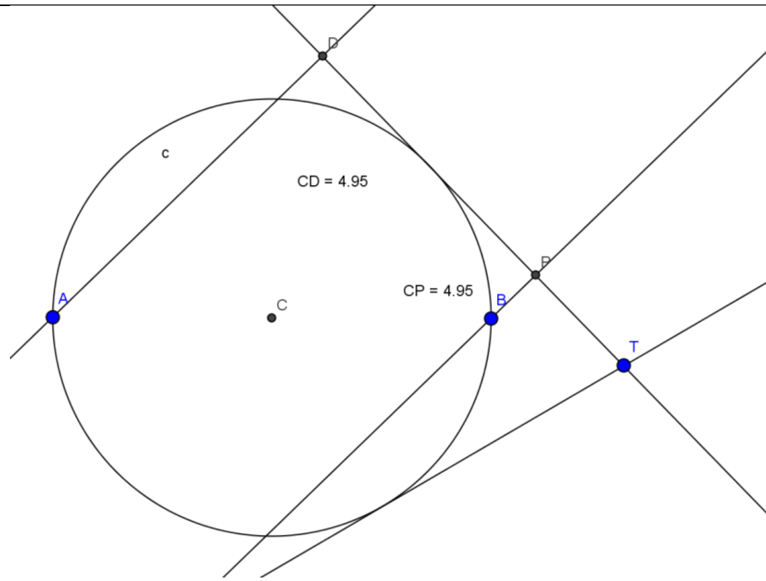
	de esa manera determinar la tercera bisectriz.	desde el centro del circulo hacia los lados son radios de este círculo, y por ello tienen igual medida.	el punto de intersección de las bisectrices, ya que estan tienen la misma longitud, desde el el punto de intersección hacia los lados. Solo en triángulos escalenos obtusángulos, no.



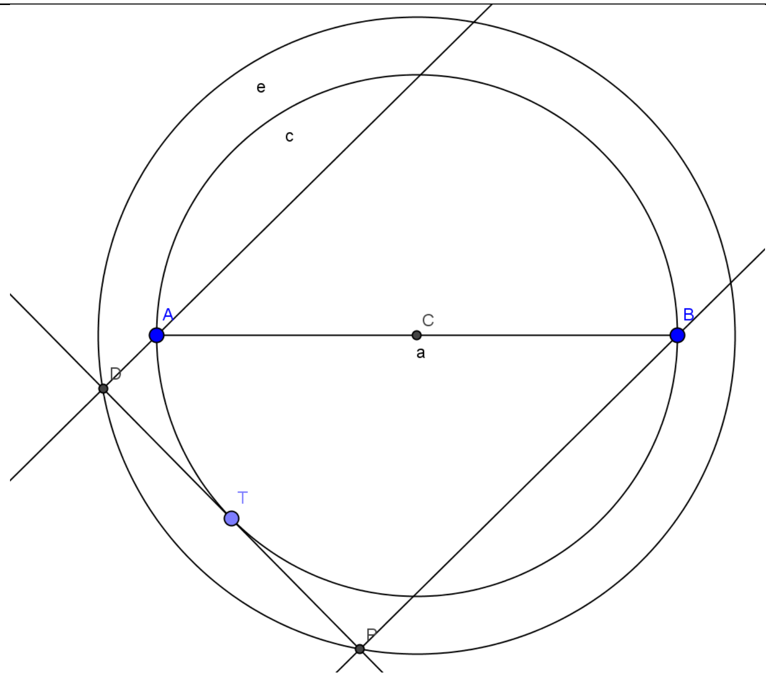
Análisis

- Todos los estudiantes construyeron la configuración solicitada. E2, E3, E7 y E8 lo hicieron sobre la base de un triángulos equilátero, los otros estudiantes lo hicieron sobre la base de un triángulo acutángulo escaleno.
- Al igual que en la actividad a lápiz y papel, confirman que bastan construir bisectrices para determinar la tercera. se observa la interacción entre las **aprehensiones perceptiva** y **discursiva**.
- En cuanto al trazado de las bisectrices, éstas son hechas automáticamente por el procesador geométrico, por lo que no se requiere de un proceso de construcción.
- La dificultad de la tarea 3, que consiste en el trazado de la circunferencia inscrita, difiere según el tipo de triángulo. Para los estudiantes que consideraron el triángulo equilátero, fue más fácil porque el radio de la circunferencia coincide con la longitud del segmento determinado por el incentro y por el lado correspondiente del triángulo en cada bisectriz. Mientras que para aquellos que consideraron el triángulo acutángulo la dificultad fue mayor, porque el radio y dicho segmento no coinciden.
- Por eso E1 no trazó la circunferencia inscrita, y E5 la traza inexactamente. En cuanto a E6, tiene errores conceptuales, evidenciados en su análisis, en el que manifiesta que el trazado depende del tipo de triángulo, y sobre la base de las distancias desde el incentro a los respectivos vértices del triángulo. Las afirmaciones de E1, respecto a la diferencia de medidas de tales segmentos, evidencian la **aprehensión perceptiva**.
- Nuevamente las explicaciones son más extensas que las indicadas en las tares con lápiz y papel, lo que hace suponer que la distancia entre la primera y la segunda experimentaciones les ha permitido reflexionar sobre sus respuestas, pero aun así presentan algunas dificultades comunicativas. En estas respuestas se observa la interacción entre las **aprehensiones operativa**, **perceptiva** y **discursiva**.

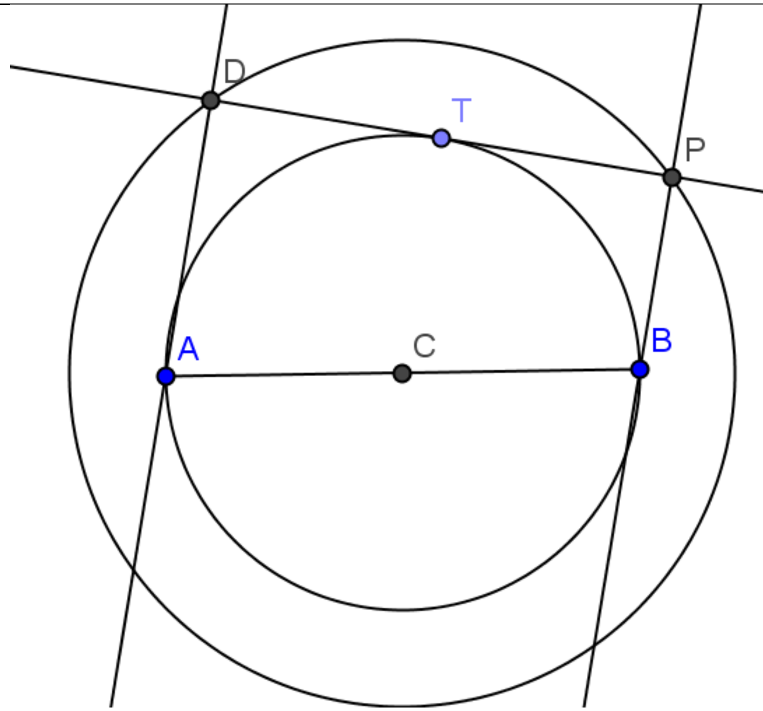
Situación 4

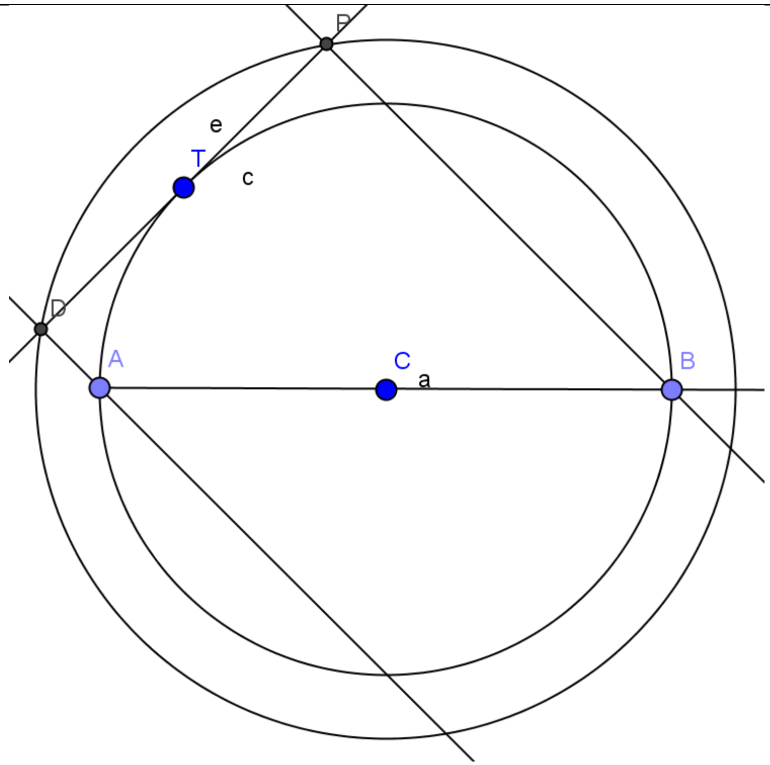
S 4	T 1	T 2	T 3
E 1		1.- Se establecen dos puntos A y B que serían el diámetro de la circunferencia 2.- Se ubica el punto medio entre A y B que lo denominaremos C 3.- Se construye la circunferencia a partir del punto C y el punto A, quedando con Diámetro AB y radio AC o CB. 4.- Se ubica un punto T	8.- Se calcula la distancia de CD y CP. 9.- Se comprueba que las distancias de CD y CP son iguales

		fuera de la circunferencia 5.- Se traza la tangente m desde el punto T a la circunferencia. 6.- Se traza la perpendicular desde el punto A a la tangente m y luego del punto B a la tangente m. 7.- Se ubican los puntos D y P donde intersectan cada perpendicular con la tangente	

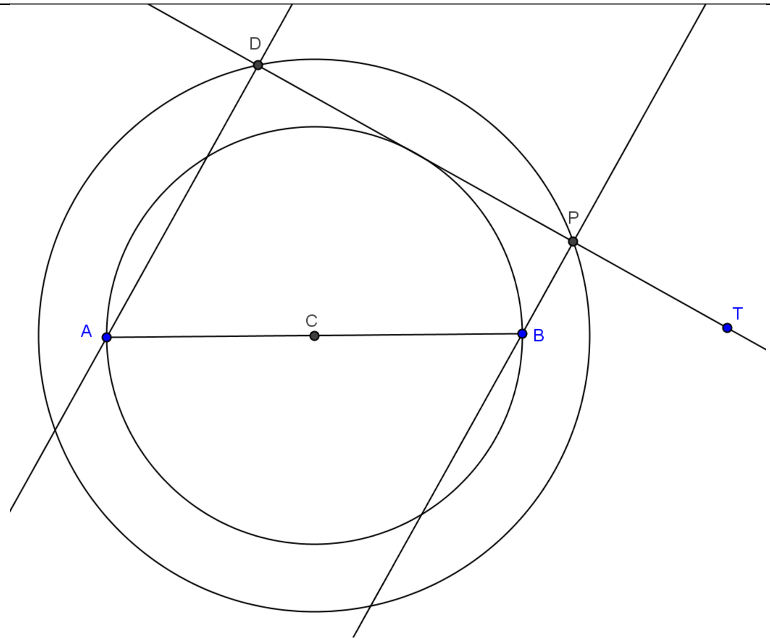
E 2		1) Construir un segmento cualquiera 2) Luego de ese segmento se le pone la letra A y B 3) Después se busca en punto centro entre A y B, a este nuevo punto lo llamare con la letra C 4) Con el radio CB se construirá una circunferencia un circulo 5) Se debe construir un punto cualquiera dentro de la circunferencia a este punto se le designa la letra T	Si son iguales CD = CP, ya que al hacer una circunferencia y si esta pasa por ambos puntos, es decir, son iguales

		6) Después construir una recta tangente, llamada **m** 7) Sobre la recta **m** se ubicara los puntos D y P los cuales deben ser perpendiculares a la recta **m**	

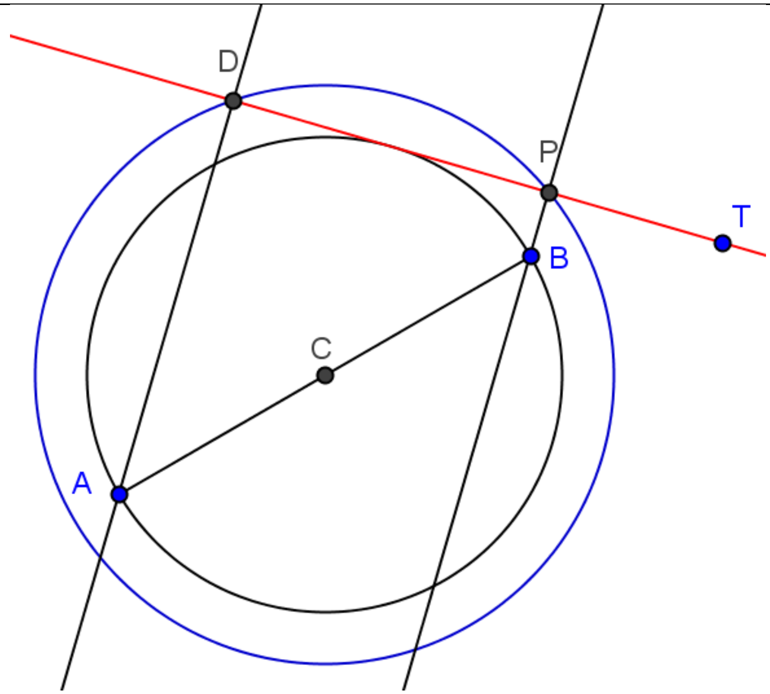
E 3		1º Crear una circunferencia de radio AC y de diámetro ab con centro en C. 2º Trazar una recta m tangente a la circunferencia encontrando el punto t 3º Trazar una recta perpendicular a la recta m por el punto a, encontrando D. 4º Trazar una perpendicular a la recta mpor el punto b, encontrando P.	5º Trazar una circunferencia con centroen C que pase por D y P, demostrandoque CD=CP.

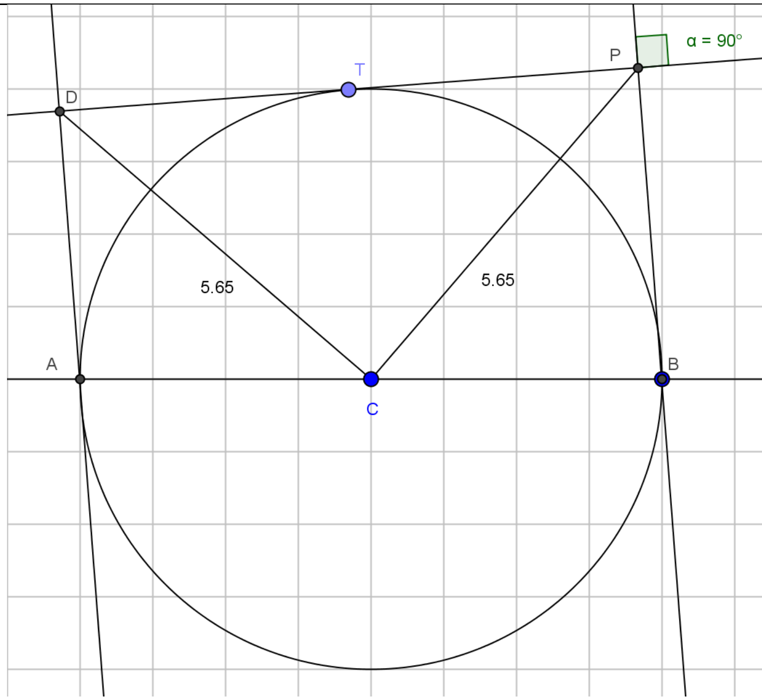
E 4			
E 5		Se construye un segmento con vértices AB, luego se calcula el punto medio (centro circunferencia "punto C"). • Se construye la circunferencia de radio AC o BC. • Se sitúa un punto T por el borde de la circunferencia. • Con la herramienta "tangentes" de GeoGebra, se construye recta	• Se construye una circunferencia de radio CD, comprobando así que CD = CP

		tangente m considerando el punto T. • Se trazan rectas perpendiculares (con Herramienta GeoGebra), desde los puntos A y B, hacia la recta m, formando los puntos D y P. •	

E 6		Se construye un segmento con vértices AB, luego se calcula el punto medio (centro circunferencia “punto C”). • Se construye la circunferencia de radio AC (o bien BC). • Se sitúa un punto T fuera de la circunferencia y luego con la herramienta “tangentes” de Geogebra, se une el punto T con la circunferencia formando de esta	• Finalmente se construye una circunferencia de radio CD, para comprobar la igualdad de los segmentos CD Y CP

		manera dos tangentes (Se oculta una para visualizar mejor). Y así queda visualizada la recta m. • Se trazan rectas perpendiculares (con Herramienta Geogebra), desde los puntos A y B, hacia la recta m, formando los puntos D y P. •	

E 7		1) Construir la circunferencia de radio AC. 2) Ubicar un punto T fuera de la circunferencia, luego se une el punto T con la circunferencia formando de esta manera dos tangentes para formar la recta m. 3) Trazar rectas perpendiculares desde A Y B hacia la recta m creando los	4) Construir una circunferencia de radio CD, comprobando la desigualdad de CD y CP.

		puntos D Y P.	
E 8		Se traza una circunferencia con centro C y radio B, se traza una recta tangente en T a la circunferencia, - se traza el diámetro de la circunferencia utilizando una recta dados el punto C y B (diámetro AB) - Se utiliza una recta perpendicular desde la tangente m hacia los puntos A y B (el diámetro de la	- se mide la distancia CD y CP - son iguales puesto que tienen la misma longitud

		circunferencia), naciendo los puntos D y P en la tangente m	

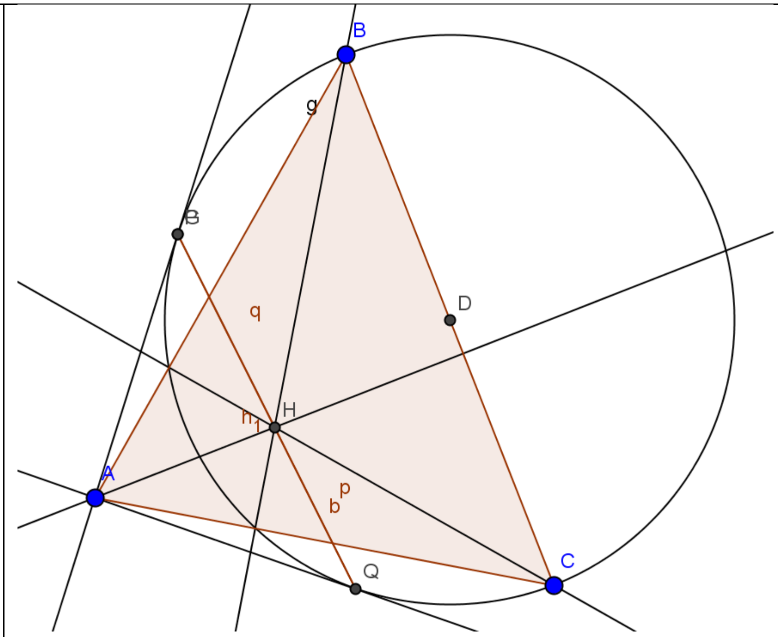
Análisis

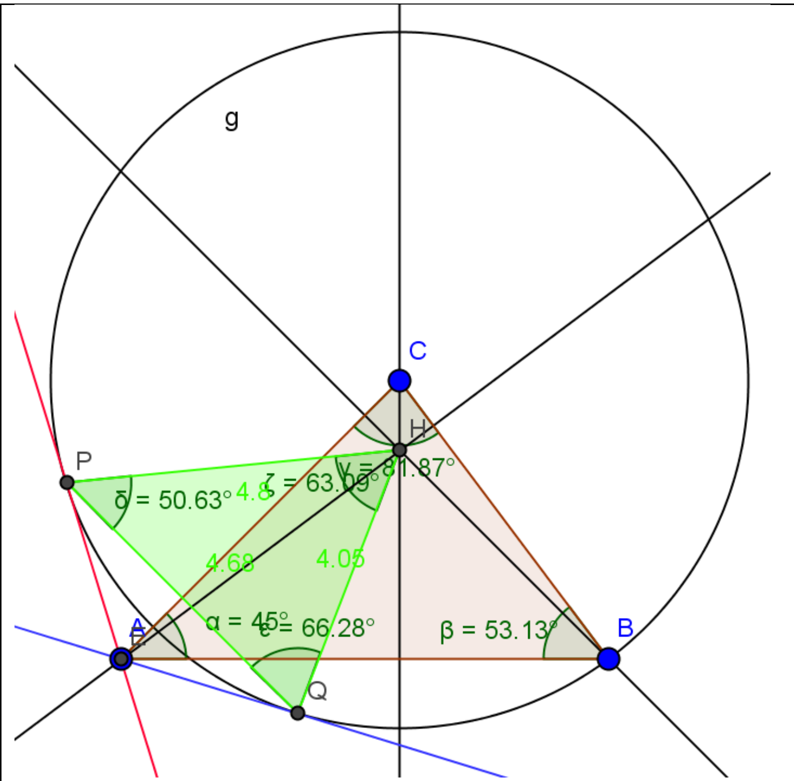
- Todos los estudiantes abordaron esta actividad, pero con algunas dificultades porque al contar el procesador geométrico con la función de trazar tangentes a una curva (circunferencia), ellos pudieron elegir entre dos opciones de trazado de tangente, con la posibilidad de elegir incorrectamente. Las opciones de trazado de tangente son: desde un punto exterior a la curva, determinando dos puntos de tangencia; y directamente desde un punto en la curva, obteniendo una única recta tangente. Esta segunda opción era la correcta.
- En el caso de E1, su protocolo de construcción establece que no eligió el punto de tangencia, sino que optó por un punto exterior a la circunferencia, y de ese trazó las tangentes. No obstante siguió el proceso de determinar las perpendiculares y calcular las longitudes de los segmentos para probar su igualdad. En otras palabras, se evidencian errores conceptuales, porque el punto de tangencia es común a la circunferencia y la recta., y no sólo a esta último, como lo indica. Casos similares son los de los estudiantes E6 y E7, que ubican el punto T (tangencia) fuera de la circunferencia. Los demás estudiantes desarrollan procesos correctos y prueban a través del trazado de arcos la igualdad de medida de los segmentos correspondientes. E8 calcula las longitudes de tales segmentos.

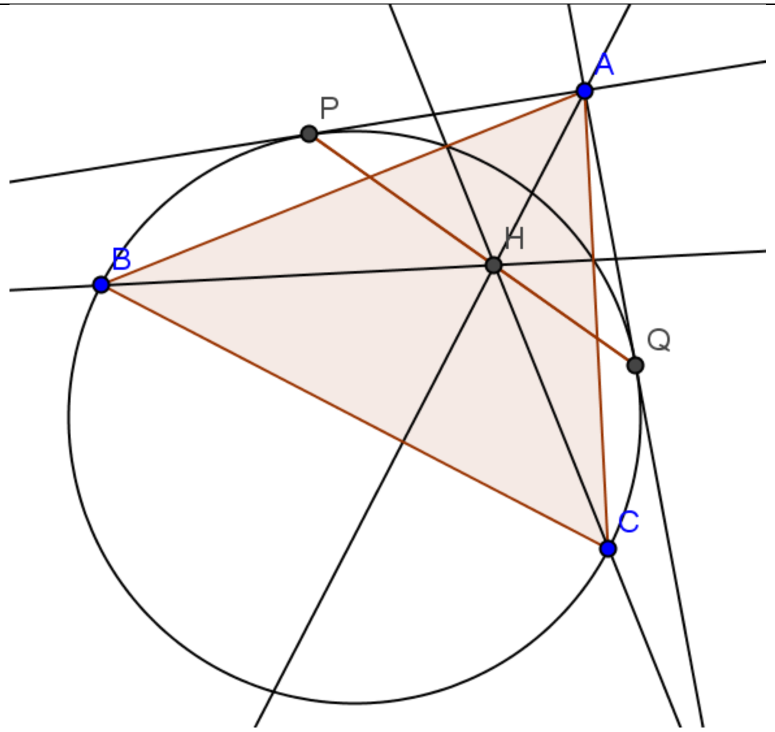
- En cuanto a la formulación del protocolo de construcción, todos los estudiantes lo describen en al menos tres pasos, y en correlación con su configuración. La verificación de la igualdad de medida de los segmentos se sitúa en todos los casos en el paradigma **G1**.
- Se observa la interacción entre las **aprehensiones operativa**, **perceptiva** y **discursiva**. La **aprehensión secuencial**, sólo en aquellos que utilizaron el punto de tangencia único.
- Al no conocer todas las herramientas del procesador geométrico, los estudiantes no supieron que al construir cualquier configuración, este programa establece automáticamente un protocolo de construcción.

Situación 5

S 5	T 1- T 2- T 3	T 4

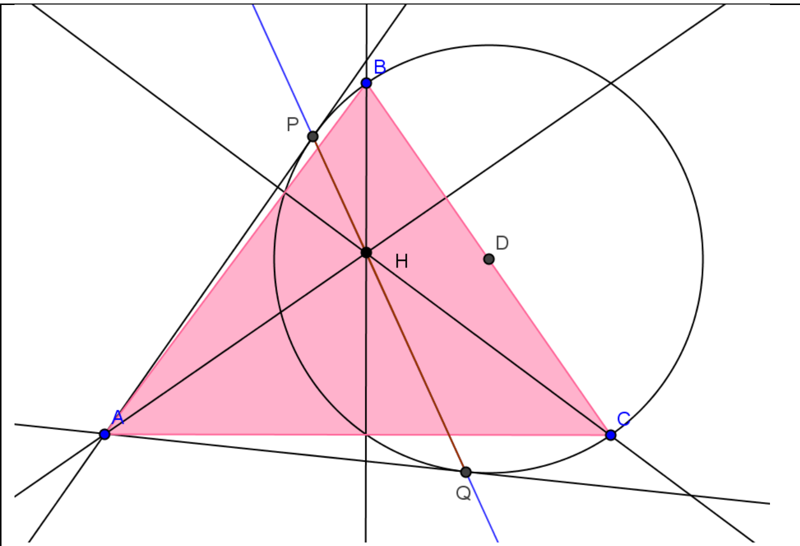
E 1		No se forma ningún triangulo ya que los puntos están situados en una misma recta por lo cual es imposible que lleguen a formarlo.

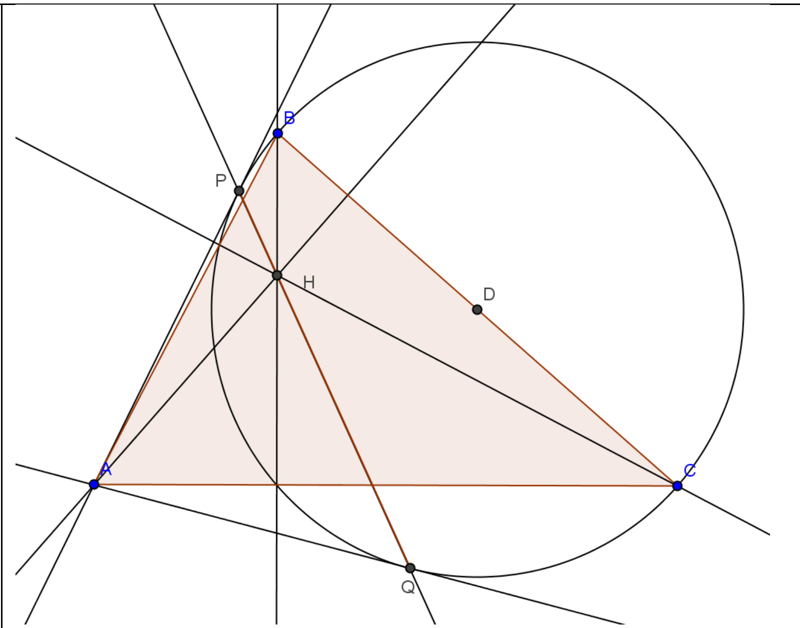
E 2		El tipo de triángulo que se formó con los puntos P,Q y H es un triángulo escaleno ya que tiene todos sus ángulos y lados de distinta medida.

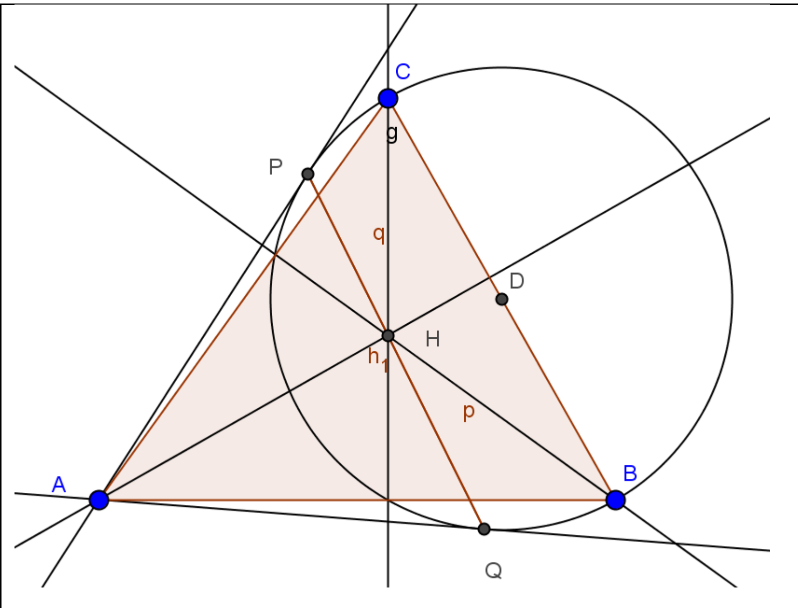
<table>
<tr><td>E 3</td><td>
</td><td>No forman un triángulo ya que la suma de

Las rectas PH y HQ son iguales a la recta pq

Por lo tanto se forma una línea recta</td></tr>
<tr><td>E 4</td><td></td><td></td></tr>
</table>

E 5		Realizada la construcción, se obtienen los puntos P, Q y H, los que pertenecen a una misma recta, por lo tanto es imposible construir un triángulo.

E 6		Hecha la construcción pedida, se obtienen los puntos P, Q y H, siendo estos pertenecientes a una misma recta, es decir no se puede formar el triángulo solicitado, están todos en una misma dirección.

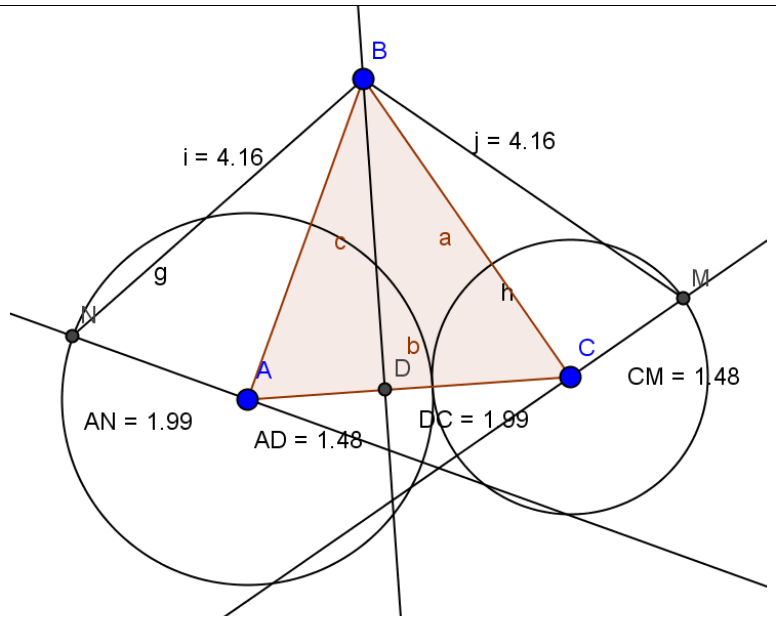
E 8		Los puntos P,Q,H, no logran formar un triángulo, solo una línea recta.

Análisis

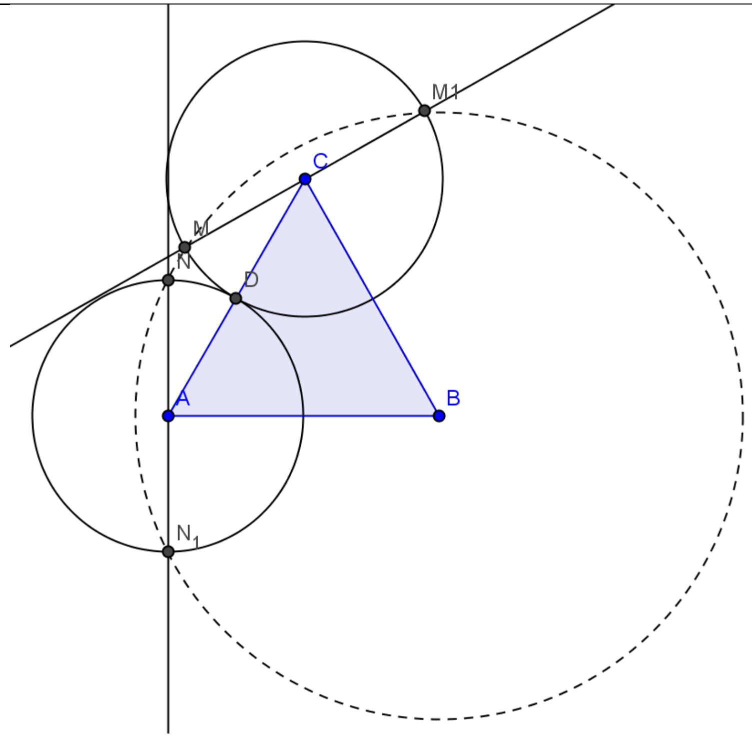
- De los estudiantes participantes, E7 no llegó a la configuración esperada, cometiendo el mismo error que cuando enfrentó esta tarea con lápiz y papel. ¿CUÁL?
- Los demás estudiantes visualizaron que los tres puntos no determinan un triángulo, sino que un segmento (determinado por puntos colineales).
- En esta actividad se manifiesta la importancia de la precisión con que trabaja el procesador geométrico, porque los estudiantes pudieron verificar in situ que sus respuestas en la actividad a lápiz y papel estaban condicionadas a la precisión con que fe hecha la configuración. En este caso, se evidencia la **aprehensión**

operativa, ya que el pasaje del enunciado a la configuración solicitada fue correcto, y a través de la **aprehensión perceptiva** se pudo visualizar la propiedad de la colinealidad.

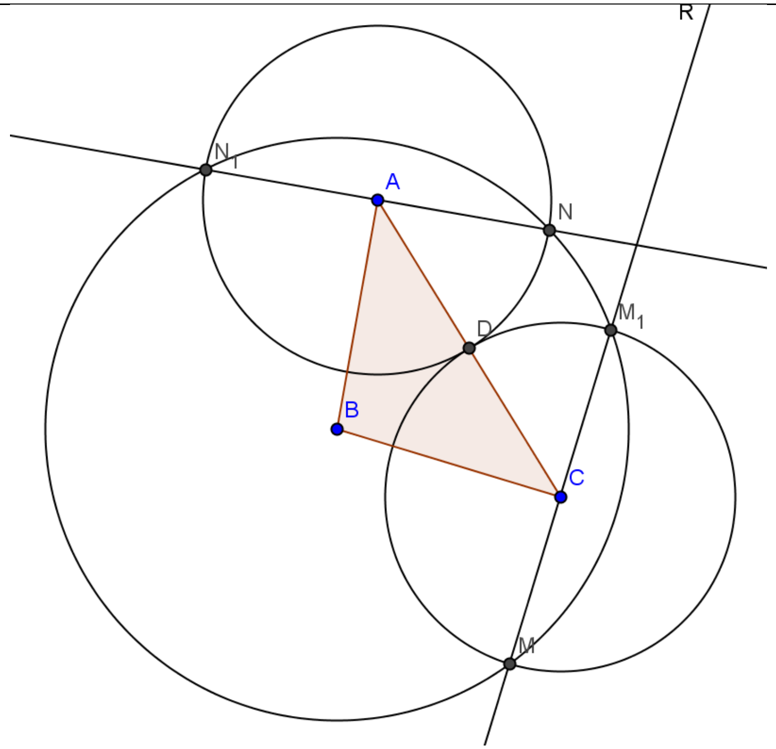
Situación 6

S 6	T 1	T 2	T 3
E 1		1.- Se construye un triángulo de vértices ABC 2.- Se traza la perpendicular desde el vértice B al lado AC y se ubica el punto D 3.- De A se traza la perpendicular a AB y desde C se traza la perpendicular a CB 4.- Con centro en A y	8.- Se calcula distancias de NB y MB y se comprueba que N y M son equidistantes a B

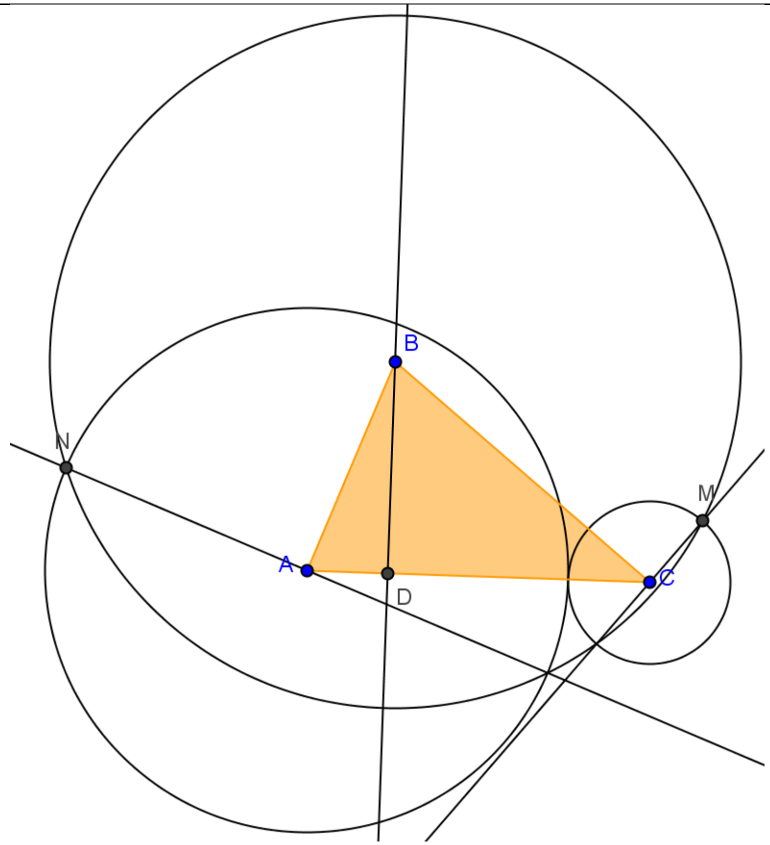
		radio DC se construye la circunferencia y luego con centro en C y radio AD se construye otra circunferencia. 5.- Se procede a ubicar los puntos N y M 6.- Se calcula las distancias de AD, DC, AN y CM 7.- Se demuestra que AN = DC y CM = AD	

E 2		1) Se construye un triangulo equilátero con las letras ABC 2) Se realiza una perpendicular a punto A y en el punto C 3) Luego se busca el punto medio entre A y B a este punto se llamara D 4) Con el radio de AD se hace una circunferencia 5) Realizar radio de con los puntos CD se hace una circunferencia 6) Y donde la circunferencia toque	Para demostrar que M y N son iguales al vértice B, realizaremos una circunferencia para observar que pasa por ambos puntos y demostrar que son iguales

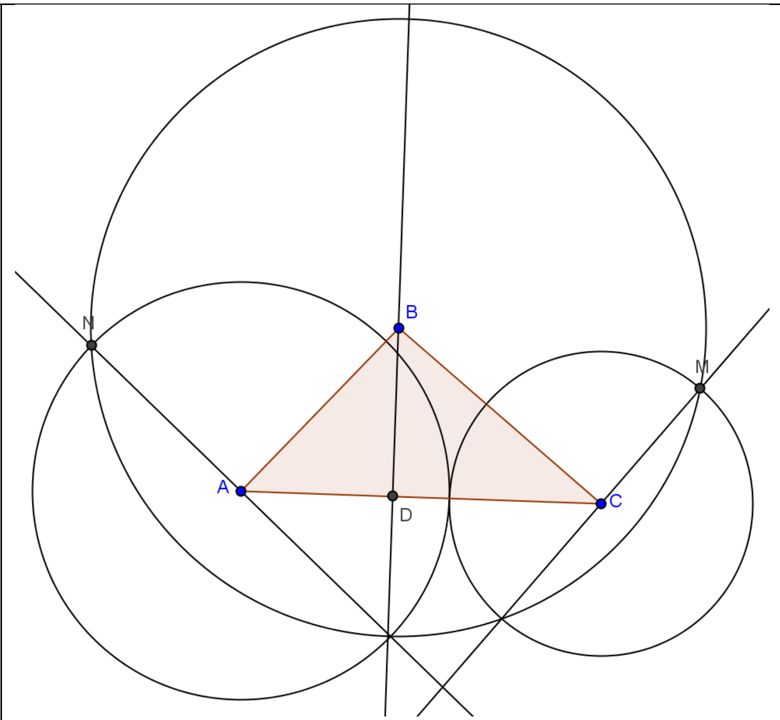
		con la perpendicular poner las letras M o N, pero como intercepta dos veces le pondremos M o M1 , N o N1	

E 3		1º Crear un triángulo escaleno acutángulo 2º Trazar la altura interior BD 3º Trazar una recta perpendicular a AB con centro en A 4º Trazar una perpendicular a cm con centro en C. 5º Trazar una circunferencia con centro en A hasta el punto D, cuya intersección de la circunferencia y la recta l serán N y N1	7º Trazar una circunferencia con centro en B que pase por M, M1, N y N1 para demostrar que M y N son equidistantes del vértice B (no será así siempre puesto que si se mueve el vértice A, B o C cambia la situación y no serán equidistantes)

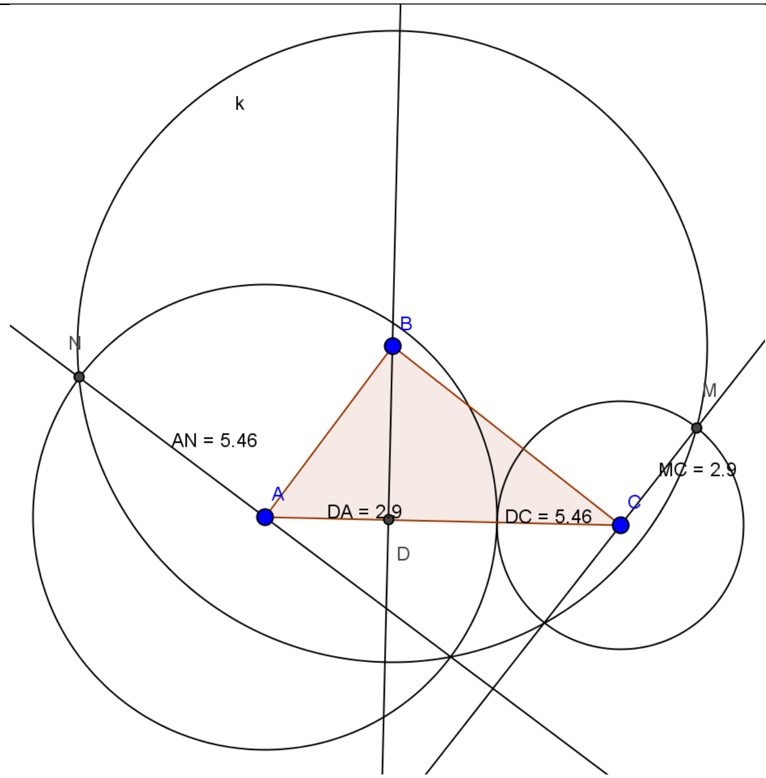
		6º Trazar una circunferencia con centro en C hasta el punto D, cuya intersección de la circunferencia y la recta r serán M y M1	
E 4			

E 5		Se construye el triángulo ABC. • Se traza una recta perpendicular al vértice B con el lado opuesto, para así buscar la intersección de la recta perpendicular con el lado opuesto a B. • Se traza una recta perpendicular al lado AB, y luego otra recta perpendicular al lado BC. • Se utiliza el compás, considerando como	Situamos el compás con distancia AD, desde el vértice C, trazamos la distancia.

		distancia el segmento formado por los puntos DC, para encontrar de esta manera el punto N, desde el vértice A, y para encontrar el punto M.	

E 6		• Se construye el triángulo ABC. • Se traza una recta perpendicular al vértice B con el lado opuesto, de esta manera se busca la intersección de la recta perpendicular con el lado opuesto a B. • Se traza una recta perpendicular al lado AB, y luego otra recta perpendicular al lado BC. • Se utiliza el compás, teniendo como	

		distancia el segmento formado por los puntos DC, para encontrar de esta manera el punto N, desde el vértice A, y para encontrar el punto M, situamos el compás con distancia AD, desde el vértice C, trazamos la distancia.	

E 8		1) Se traza el triángulo ABC 2) Se traza la altura desde el vértice B hacia el lado opuesto y se establece el punto D 3) Se trazan perpendiculares al lado AB, y luego otra recta perpendicular al lado BC 4) Utilizando el compás se mide la distancia entre el punto D y el vértice B para encontrar el punto N desde el vértice A	5) Utilizando el compás se mide la distancia entre el punto D y el vértice Apara encontrar el punto M desde el vértice C

Análisis

- Nuevamente el estudiante E7 no enfrenta esta actividad. Los restantes estudiantes construyen la configuración correctamente. A pesar de que todas las configuraciones muestran dos pares de puntos M y N respectivamente, y que algunos estudiantes los identifican así, otros no lo hacen (E1, E5, E6 y E8). Esto se debe a que los arcos son circunferencias, y las perpendiculares son rectas, por lo tanto por la curvatura de los arcos, la posición relativa de las rectas es secante. Es decir las corta en dos puntos.
- En esta actividad se evidencia la interacción entre las **aprehensiones operativa** y **secuencial**. En cuanto al protocolo de construcción (tarea 2), los estudiantes manifiestan al menos cuatro pasos; así se observa la interacción entre las **aprehensiones operativa** y **discursiva**. Para validar la equidistancia de M y N respecto al vértice D, se sitúan en el paradigma **G1**, ya que algunos lo hacen calculando las distancias, y otros trazando una circunferencia con centro en B.
- Es necesario insistir que la interacción entre las distintas aprehensiones se da por el correcto uso del procesador geométrico. Es necesario conocer sus herramientas más usuales, que permiten resolver este tipo de problemas.

3.5.4. Confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. (Segunda etapa)

De acuerdo a lo previsto en el análisis a priori para la construcción de las configuraciones geométricas, los estudiantes no se dieron cuenta de la importancia del orden de construcción en las tareas realizadas con lápiz y papel. Esto fue evidenciado en el análisis de los resultados, de los cuales en varios casos una construcción inexacta o incorrecta determinó conjeturas erróneas que los llevaron a un resultado incorrecto. La posibilidad de estas inexactitudes fue excluida por el posterior uso del procesador geométrico, que incidió en una disminución de errores debidos a visualizaciones incorrectas.

Al ser exacto el procesador geométrico, el causal de error se reduce a factores relativos a conocimientos previos del estudiante, como no respetar el orden del procedimiento de construcción o tener prerrequisitos o creencias erróneas, y desconocer o mal utilizar contenidos geométricos conceptuales.

Al contar el procesador con diversas herramientas que permiten hacer automáticamente diversos tareas (como trazados de rectas y segmentos, perpendiculares, paralelas, bisectrices, tangentes, etc.), no se requiere de un proceso de construcción, de modo que facilita la visualización correcta de propiedades de las configuraciones.

Respecto a las operaciones cognitivas, el análisis a posteriori de los resultados dio cuenta de que la mayoría de los estudiantes sí evidenciaron las aprehensiones explicitadas en el análisis a priori (perceptiva, operativa, secuencial y discursiva), dependiendo éstas de un correcto orden y de la precisión con que se realice la construcción, así como de los conocimientos asociados a ella. Al facilitar la construcción, el procesador geométrico potenció el desarrollo de habilidades cognitivas.

Por ser una herramienta de precisión y exactitud en la construcción de configuraciones, el procesador geométrico, disipa posibilidades de errores. De esta manera, se comprueba lo previsto en el análisis a priori.

En el caso de los estudiantes que no evidenciaron algunas aprehensiones, se debió, por ejemplo con la **aprehensión perceptiva**, a que a veces no respetaron el orden de la construcción de la configuración, o a que no supieron ubicar el punto de tangencia, y también cuando otro estudiante confundió los conceptos diámetro y radio. Esto demuestra que si bien el procesador geométrico incide en la disminución de errores, su uso está supeditado a la experticia de la persona que lo utiliza. Es decir, debe estar familiarizado con las funciones del programa. Es necesario conocer sus herramientas más usuales, que permiten resolver este tipo de problemas.

Es necesario insistir que la interacción entre las distintas aprehensiones se da por el correcto uso del procesador geométrico. Pero también recordar que la correcta resolución de problemas geométricos depende de un dominio correcto de contenidos geométricos conceptuales.

El análisis de las justificaciones demostró que los estudiantes se situaron siempre en el paradigma geométrico **G1**, de acuerdo a lo previsto en el análisis a priori. El uso del procesador geométrico sitúa a los estudiantes solamente en el paradigma **G1**, ya que permite verificar pero no demostrar, que es una actividad que demanda el correcto uso de propiedades y teoremas, así como la capacidad de comunicarlas en un lenguaje matemático formal escrito, como es característico del paradigma geométrico **G2**.

Acerca de los conocimiento previos, el análisis a posteriori ha comprobado la presencia, parcial y variada de un estudiante a otro, de los conocimientos previos explicitados en el análisis a priori. La distancia entre la primera y la segunda experimentaciones les ha permitido reflexionar sobre sus respuestas; pese a que persisten algunas dificultades comunicativas, el análisis de sus respuestas sugiere pensar que el uso del procesador geométrico facilitó la recuperación de sus conocimientos previos.

Sobre la aprehensión discursiva, se comprobó que, como se indicó en el análisis a proiri, depende de conocimientos previos, de modo que al no conocer definiciones y teoremas, como fue el caso de algunos estudiantes, no pueden evidenciar la aprehensión discursiva correcta.

La exactitud del procesador geométrico permitió más visualizaciones correctas que permitieron recuperar conocimientos previos, así como generar otros nuevos, de modo de remediar las carencias conceptuales que tienen los estudiantes.

La investigación estableció distintas dificultades, las cuales fueron explicitadas en el análisis a priori: procedimentales (construcción de configuraciones), conceptuales y comunicativas.

En el caso de la dificultad conceptual, puede estar determinada por el tipo de polígono y sus propiedades. En el caso de los triángulos, la dificultad depende del tipo de triángulo, porque en el equilátero los elementos secundarios o segmentos notables coinciden, de modo que las tareas se simplifican considerablemente. Hay tareas que requieren procesos adicionales que no se realizan cuando el triángulo es equilátero, y que aumentan la dificultad.

Un ejemplo de esto es el trazado de la circunferencia inscrita, que difiere según el tipo de triángulo. El trazado en el triángulo equilátero es más fácil porque el radio de la circunferencia coincide con la longitud del segmento determinado por el incentro y por el lado correspondiente del triángulo en cada bisectriz. Mientras que el trazado de ésta en el triángulo acutángulo es más difícil porque el radio y dicho segmento no coinciden.

Así es como al trabajar sobre el triángulo equilátero, los estudiantes E2, E3, E7 y E8 pudieron trazar la circunferencia inscrita. Mientras que los estudiantes E1, E5 y E6, que trabajaron en un triángulo acutángulo escaleno, trazaron la circunferencia erróneamente por no determinar el radio de la circunferencia.

La coincidencia de segmentos notables en el triángulo equilátero impide evidenciar si el estudiante distingue las diferencias en sus propiedades. Pero sí se evidencia en las tareas que realizan usando procesador geométrico, porque sus construcciones pueden ser reconstruidas paso a paso, de modo de permitirle al profesor un nivel y profundidad de evaluación de los aprendizajes esperados nunca antes lograda sin el procesador.

3.5.5. Análisis de las Entrevistas

La tercera etapa, correspondiente a la fase de institucionalización, se realizó a través de conversaciones individuales no pauteadas, seguidas de un plenario, que tuvo lugar el lunes 14 de diciembre de 2015. Los registros de las entrevistas y plenario están como archivos mp3 en la carpeta digital.

Esta etapa se desarrolló en una entrevista personal del investigador con cada estudiante, donde se se analizó cada una de las actividades y se abordó lo que habían aprendido, y lo que se les presentó con mayor dificultad al enfrentar cada situación.

La conversación fue individual, de modo de que no se influencien mutuamente entre sus opiniones en cuanto al desarrollo de cada actividad. El objetivo de esto fue asegurar que estas sean fidedignas respecto a sus propias producciones.

Situación 1

La inexactitud en el uso de instrumentos manuales de construcción geométrica permitió la construcción de un triángulo que de acuerdo al teorema de la desigualdad triangular no existe. Incluso, en casos como el del estudiante E7, el triángulo fue construido pese a notar que no se cumple la propiedad. Esto denota la poca importancia dada a los conocimientos geométricos teóricos. Así, su percepción, en este caso errónea, influyó en sus conjeturas.

Si bien algunos estudiantes reconocen esto como un error de construcción suyo (E3, E5), otros estudiantes no notan su error. Así se evidencia que la visualización de construcciones incorrectas lleva a errores interpretativos, o mal uso de conceptos, por ejemplo agregarle al teorema la condición de igualdad, a pesar de que el teorema trata exclusivamente una desigualdad, de manera de justificar el trazado del triángulo inexistente. Esto denota que una mala visualización genera conceptualizaciones incorrectas.

Si bien algunos estudiantes fueron conscientes de sus conocimientos geométricos conceptuales previos (por ejemplo E5, que considera la propiedad de desigualdad de los triángulos para justificar, y E1, que pudo conjeturar que para trazar la circunferencia debe conocer teorema de desigualdades de triángulos), la mayoría no fue consciente de éstos, o bien reconocieron haber usado el teorema, pero no pudieron conjeturarlo.

El estudiante E5, al afirmar que le costó comprender los problemas propuestos, denota problemas de comprensión lectora, los cuales impiden o dificultan la asociación de la tarea encomendada a una propiedad o teorema, y por lo tanto determinan la construcción y la justificación.

Si bien E3 no sabe cómo explicar sus justificaciones, reconoce la importancia de hacerlo basándose en contenidos conceptuales en lugar de utilizar lenguaje natural. Demuestra que recuerda.

Situación 2

De la construcción depende la visualización y la justificación. La dificultad de la tarea estuvo determinada por la elección del triángulo a construir. Algunos estudiantes (E2 y E8) trazaron un triángulo equilátero. E8 reconoce que al trazar éste, le fue más fácil argumentar, basándose en una propiedad. E2 también se basa en una propiedad, si bien cree estar equivocado.

E6 Construyó la configuración pero no pudo argumentar. Dice no haber utilizado conocimientos anteriores, no se hizo consciente de las propiedades que utilizó en la construcción de la configuración.

E4 dice haberla construido de manera práctica, sin basarse en teoremas ni propiedades. Cambia de opinión pese a contar con su construcción a la vista, ya que insiste en que no puede probar porque no tenía medidas angulares, lo que denota la impericia para asignar valores genéricos a las medidas angulares. Esto también evidencia el efecto del énfasis histórico que se le ha dado al cálculo en la enseñanza de la geometría.

Situación 3

Algunos estudiantes se basan en propiedades para realizar la tarea, por ejemplo el estudiante E5, si bien reconoce que no la completa. Otros estudiantes, como el E2, no se basaron en alguna definición o propiedad para realizarla, lo que los indujo a un error del que no son conscientes, como por ejemplo el mismo E2, y el E3.

Todas estas afirmaciones evidencian el conocimiento de los objetos matemáticos en juego, como son las bisectrices, el incentro, la circunferencia inscrita.

Situación 4

Algunos estudiantes toman propiedades que son verdaderas en un rectángulo, para afirmar sobre los elementos constitutivos de él. No obstante, la asignación de la medida (como es en el caso del estudiante E8) es por usar regla graduada. Esto demuestra que no supieron usar sus propias construcciones.

En el caso del estudiante E4, tiene una opinión reactiva en cuanto a lo que se le pregunta, pues parte diciendo que realizó la construcción de forma errónea sin saber si realmente erró.

En general, los estudiantes denotan una carencia en competencias comunicativas que les permitan expresar sus ideas correcta y entendiblemente en lenguaje formal matemático. Tal es el caso de los estudiantes E1 y E6, que justifican con un lenguaje informal, sin propiedades y sin hacerse consciente de sus conocimientos previos. Reconocen que como hablan mal, pueden tener dificultades en transmitir su conocimiento.

Situación 5

Todos los estudiantes manifestaron su asombro en cuanto a que la configuración dibujada con instrumentos manuales no se condice con la construcción efectuada con el procesador geométrico, ya que en el primer caso obtuvieron triángulos, siendo que se trataba de tres puntos colineales. La visualización que hicieron de esta construcción errónea los llevó deducir conjeturas incorrectas. Si bien algunos estudiantes, como el E2, reconocieron que su análisis es erróneo, otros no reconocen su error (E4, E5 y E7). Esto demuestra que para la construcción no se basaron en conocimientos previos. En general los estudiantes no le dan importancia a las propiedades, ya que siguen ciegamente las construcciones sin considerar propiedades.

La incidencia de la visualización de una construcción errónea en conjeturas equivocadas y respuestas incorrectas reafirma que el procesador geométrico permite hacer una visualización correcta, y por ende dar respuesta correcta a la tarea encomendada.

Situación 6

El estudiante E1 diferencia la experiencia entre la primera y la segunda situación, de modo que al visualizar las configuraciones trazadas con el procesador geométrico, recordó posteriormente las propiedades.
El estudiante E3 reconoce que pudo realizar la tarea, pero que no pudo argumentar. Le cuesta comunicar sus procesos a través de un leguaje formal escrito.
Según los estudiantes E6 y E8, no se pudo seguir con los pasos de construcción, ni explicitar el protocolo, porque no pudieron recordar sus conocimientos previos.

Plenario

A la puesta en común corresponde la etapa de institucionalización de los aprendizajes. En ésta, los estudiantes corroboraron las opiniones entregadas individualmente en las entrevistas, y se dieron cuenta de esta coincidencia. Si bien algunos difirieron respecto al tiempo dispuesto para resolver las tareas. Manifestaron la importancia de realizar la actividad en más de una instancia, y con un periodo intermedio de tiempo, ya que esta distancia les permitió reflexionar sobre sus estrategias de aprendizaje. En esta sesión, el proceso de evaluación de sus producciones les permitió justificar la carencia de conocimientos, así como el olvido de otros.

Se podría inferir que la manifestación de un nivel deficiente de comprensión lectora se debe a la falta de familiarización con el tipo de problemas al que se vieron enfrentados.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

4.1. Conclusiones

Para el investigador, el presente trabajo de investigación significó un desafío personal al plantearse un problema al cual darle solución en una de las áreas más descendidas de la enseñanza de la matemática, y que involucra tanto a estudiantes escolares como a profesores en formación. Para ello, se buscó una estrategia que pudiera remediar las falencias que presentan estos actores.
En este contexto, la metodología de la Ingeniería Didáctica nos entrega herramientas en dos aspectos: como metodología de la investigación, y como metodología de producción, que se encuentran plasmados en este trabajo.
A continuación se detallan las principales conclusiones en torno a los objetivos planteados.

Acerca del primer objetivo específico, "Identificar las estrategias actuales, los procesos de representación y las relaciones geométricas que los estudiantes están poniendo en juego al resolver problemas geométricos", la investigación permitió identificar las estrategias actuales, las que están centradas en la medida, a través del cálculo de distancias, en desmedro de la geometría. Esto se evidenció en el hecho de que los estudiantes otorgaron medidas en algunas de las tareas de la secuencia didáctica, siendo que las situaciones no las contemplaban.

Respecto a los procesos de representación identificados, se identificó impericia y falta de motricidad fina para trabajar con instrumentos de construcción geométrica manuales, dificultades que fueron superadas en alguna medida con el uso de la tecnología.

Acerca de las relaciones geométricas de los estudiantes, se identificó el nivel de profundidad de los contenidos conceptuales y procedimentales en el eje temático de geometría, ya que la secuencia didáctica consideraba contenidos relacionados con definiciones, propiedades y teoremas relacionados con triángulos, cuadriláteros y circunferencias. En cuanto a los procesos cognitivos a través de los cuales se adquieren, manipulan y asocian las relaciones geométricas, los estudiantes mostraron niveles de razonamiento en general débiles, y deficientes habilidades comunicativas formales orales y escritas, a causa del poco uso y magra comprensión de aspectos conceptuales y procedimentales, determinados por la reducción histórica de los problemas geométricos al cálculo numérico o algebraico.

En cuanto al segundo objetivo, la investigación logró establecer y caracterizar, a partir del análisis de las entrevistas, las concepciones preconcebidas que dificultan a los estudiantes un desarrollo progresivo en el aprendizaje de la geometría, determinado principalmente por la formación nula o insuficiente que recibieron en el sistema escolar. Así se determinó que éstos se inclinan a procesos de aprendizaje que les demandan menos tiempo y esfuerzo, no le dan importancia a la representación figural, no diferencian entre verificar y demostrar o probar, y no argumentan o lo hacen con dificultad, utilizando un lenguaje natural. Esto permite hacer un diagnóstico en orden de cumplir con el objetivo específico 2, que guarda relación con fortalecer los diseños actuales de enseñanza de la geometría.

En atención a cumplir con el objetivo específico 3, la investigación permitió establecer el rol del uso de los procesadores geométricos, caracterizando sus beneficios. Al excluir inexactitudes en el trazado de construcciones, el procesador geométrico incidió en una disminución de errores debidos a visualizaciones incorrectas. Su exactitud permitió más visualizaciones correctas que lograron recuperar conocimientos previos, así como generar otros nuevos, de modo de remediar las carencias conceptuales que tienen los estudiantes.

Mediante la función que permite reconstruir paso a paso las configuraciones geométricas de los estudiantes, el procesador le permite al profesor un nivel y profundidad de evaluación de los aprendizajes esperados no lograda sin este recurso tecnológico.
La coincidencia de segmentos notables en el triángulo equilátero impide evidenciar si el estudiante distingue las diferencias en sus propiedades. Pero sí se evidencia en las tareas que realizan usando procesador geométrico, porque sus construcciones pueden ser reconstruidas paso a paso, de modo

Tal como los estudiantes manifestaron en las conversaciones, la experiencia les fue significante porque pudieron recordar conocimientos adquiridos anteriormente, remediar las debilidades de otros, y también adquirir nuevos. Considerando tres elementos innovadores en esta modalidad de trabajo: la forma de presentar el enunciado de un problema, el hecho de tener dos instancias para resolver las mismas tareas, y en tiempos distintos (lo que permite redundar sobre el contenido y depurar sus procedimientos), y contar con la ayuda de tecnología para validar sus respuestas.

Puesto que se han cumplido los tres objetivos específicos, se puede concluir que se ha visto cumplido el objetivo general: "Diseñar una Ingeniería Didáctica (ID), cuyo fin es remediar la debilidad de los conocimientos geométricos presentados por estudiantes en formación inicial docente, de modo que tengan una sólida formación en el área de la geometría para enfrentar su labor de profesor en Educación Básica."

Además se puede afirmar, a partir de la observación de las contrastaciones, que también se cumple la hipótesis, que guarda relación con el diagnóstico de debilidades por un lado, y por el otro con la reversión de éstas mediante la implementación de una ID:

“Los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica, en el área de la geometría, presentan debilidades en sus conocimientos geométricos, los cuales pueden en alguna medida ser revertidos mediante el diseño de una Ingeniería Didáctica (ID), basada en la visualización y la construcción de los objetos de la geometría plana, que permita desarrollar el razonamiento argumentativo matemático de fondo de los estudiantes.”

Así, las debilidades en los conocimientos geométricos de los estudiantes fueron identificadas en la concreción del Objetivo Específico 1 (a través del análisis de las situaciones que conforman la ID), así como en la entrevista (en la cual ellos tomaron conciencia de sus errores y debilidades, así como adquirir nuevos conocimientos). Por el otro lado, como resultado de la Ingeniería Didáctica (ID) y de las características de los problemas que la conforman, particularmente luego de la última fase –de Institucionalización de los saberes– los estudiantes pudieron recuperar conocimientos y adquirir otros.

Uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de la matemática es la resolución de problemas. En este contexto, como es abarcada ésta por la ID, puede ser utilizada como una estrategia de enseñanza o de aprendizaje.

Para dar cuenta de la resolución de problemas como estrategia de enseñanza, los enunciados tradicionales se adecuaron de modo que para el estudiante sean verdaderos desafíos, en virtud de la teoría de situaciones. Para que así se cumplan las fases de acción, formulación y validación, que le competen directamente al estudiante.

SUGERENCIAS Y ORIENTACIONES

Los hallazgos de la investigación dejaron en evidencia los siguientes las recomendaciones que puedan ser útiles al problema de investigación:

- La necesidad de fortalecer la generación de aprendizajes geométricos con diseños didácticos apropiados y que se recurra las TICS.

- Que la enseñanza discursiva o secuencial que privilegia la clase expositiva no permite desarrollar el pensamiento divergente en general y más particularmente en geometría.

- La necesidad de romper con los enunciados tradicionales centrados en los cálculos, con el fin de plantear problemas que los sobrepasen y aborden situaciones de visualización y construcción que permitan conjeturar, probar y demostrar utilizando objetos propios de la geometría.

4.2. Alcances de la investigación

Establecer la necesidad de adecuar los enunciados de problemas geométricos tradicionales de modo que planteen preguntas o desafíos que motiven a la búsqueda de respuesta o de caminos para la resolución del problema como una estrategia de aprendizaje exitosa. En ese contexto, el presente estudio puede esclarecer áreas de la geometría que están más allá de la geometría básica.

4.3. Limitaciones del estudio

Las limitaciones del estudio están dadas principalmente porque se hizo en una carrera que ya no recibe nuevos estudiantes. Sin embargo, se puede replicar en otros contextos educativos relativos a la enseñanza de la geometría, ya sea en el sistema escolar como en el contexto de la formación inicial docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aravena, M., Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométricoen estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. Talca, Chile. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 16 (2): 139-178.
- Ávalos, B. y Matus, C. (2010). La Formación Inicial Docente en Chile desde una Óptica Internacional. Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS--M. Santiago: Ministerio de Educación.
- Baldor, A. (2008). Geometría y Trigonometría. Segunda edición. México, Grupo Editorial Patria.
- Carreño, X. y Cruz, X. (2008). Geometría. Santiago: McGraw-Hill/Interamericana de Chile.
- Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Ministerio de Educación Nacional. Colombia. Recuperado el 3 de octubre de 2011 de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf
- Cisternas, Tatiana. (2011). La investigación sobre formación docente en Chile: Territorios explorados e inexplorados. Calidad en la educación, (35), 131-164. Recuperado en 29 de octubre de 2013, de

http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-45652011000200005&lng=es&tlng=es. 10.4067/S0718-45652011000200005
- Clemens, S., O'Daffer, P. y Cooney, T. (1998). Geometría. México: Addison Wesley Longman de México.
- De la Torre, E., Pérez, M. (2010). Paradigmas y espacios de trabajo geométricos en los libros de texto de la ESO. Universidade da Coruña.
- De Villiers, M. (1996) The Future of Secondary School Geometry. La lettre de la preuve. Novembre-Décembre 1999. Traducido por Martín Acosta. Algunos desarrollos en geometría contemporánea. En

http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/futurea.pdf

- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II, pp. 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (2001). La Geometría desde un Punto de Vista Cognitivo. En http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La gaceta de la RSME. Vol. 9.1. Págs. 143-168. En http://www.usc.es/dmle/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf
- Duval, R. (2010). Los cambios de mirada necesarios sobre las figuras. TEA Tecné, Epísteme y Didaxis. N° 27. Pp. 108-129.
- García, S. y López, O. (2008) La enseñanza de la Geometría. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México.
- Guzmán, I. (2005) PUCV-CPEIP Nivelación en geometría para 7° Básico. Ediciones IMA-PUCV. en http://ucv.altavoz.net/prontus_unidacad/site/artic/20110725/asocfile/20110725123521/libro_del_profesor_para_nivelacion_en_geometria_para_7mo_basico__leonardo_cardenas_hernan_fibla___ismenia_guzman_andrea_pizarro.pdf
- Guzmán, I. (2009) Actividades geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo. Unión. Número 19. Pg. 22-33.
- Itzcovich, H. y Broitman, C. (2001) Orientaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en EGB. Dirección de Educación General Básica. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática. Buenos Aires.
- Giménez, J. (1997). Aprendiendo a enseñar geometría en primaria. Análisis de simulaciones sobre la intervención. RELIEVE, vol. 3, n. 2. Consultado en

http://www.uv.es/RELIEVE/v3n2/RELIEVEv3n2_1.htm

- Kuzniak, A. (2008) Diversidad de las matemáticas enseñadas "aquí" y "en otro lugar": el ejemplo de la geometría. Matematicalia. Vol. 4, N° 1. En
http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=446&Itemid=270
- MINEDUC (2006). Estándares en Tecnología de la Información y la Comunicación para la Formación Inicial Docente. Ministerio de Educación de Chile.
- MINEDUC (2010). Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Geometría. Ministerio de Educación de Chile. Santiago.
- MINEDUC (2011). Estándares Orientadores para Egresados de Carreras de Pedagogía en Educación Básica. Ministerio de Educación de Chile. Santiago.
- MINEDUC (2012). Bases Curriculares para Educación Básica. Matemática. Ministerio de Educación de Chile. Santiago.
- Moreno, L. (2002) Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. En, Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Págs. 87-95.
- Olfos, R., Guzmán, I. y Estrella, S. (2014) Gestión Didáctica en Clases y su Relación con las Decisiones del Profesor: el caso del Teorema de Pitágoras en séptimo grado. Bolema Río Claro. V. 28. N. 48. P. 341-359.
- Rosales, M.A. y Guzmán, I. (2016). Resolución de problemas de Construcción Geométrica con estudiantes de Pedagogía en Educación Básica. Paradigma. 37(1). 135-160.
- Rosales, M. A. (2014). Análisis de procesos cognitivos en geometría con estudiantes de profesorado. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 1915-1922.

- Rosales, M. A. y Díaz, L. (2013). Pensamiento geométrico en estudiantes de profesorado. En, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 1487-1496
- Rosales, M. A. (2012). Pesquizando competencias geométricas en estudiantes de Pedagogía en Educación Básica. Actas de la 16° Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Sociedad Chilena de Educación Matemática.
- Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. Enseñanza de las Ciencias, 28(3), 327-340.
- Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10(2), 275-300.
- Villani, V. (1995). Perspectivas sobre la Enseñanza de Geometría para el siglo XXI, Documento de discusión. Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI). Traducción del Programa de Maestría en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora (PMME-UNISON). México.

En el sitio http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

ANEXOS

Anexo 1: Programa de Estudio

El programa de estudio, 320088, “Polígonos y Cuerpos Geométricos” se encuentra como archivos de imagen (pdf) en la carpeta digital denominada “Programa de Estudio”.

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
VICERRECTORÍA ACADÉMICA – DIRECCIÓN DE DOCENCIA
DIRECCIÓN DE ADMISIÓN, REGISTRO Y CONTROL ACADÉMICO

ASIGNATURA : POLÍGONOS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS
CÓDIGO : 320088

I. IDENTIFICACIÓN

1.1. SEDE	: CHILLÁN
1.2. FACULTAD	: EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
1.3. UNIDAD	: DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
1.4. CARRERA	: PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ESPECIALIDAD EN LENGUAJE Y COMUNICACIÓN O EDUCACIÓN MATEMÁTICA
1.5. Nº CRÉDITOS	: 5
1.6. TOTAL DE HORAS	: 6 HT : 4 HP : 2
1.7. REQUISITOS DE LA ASIGNATURA	: GEOMETRÍA, TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS (320062)
1.8 CORREQUISITOS DE LA ASIGNATURA	: NO TIENE

II. DESCRIPCIÓN

Asignatura teórico-práctica de profundización disciplinar en el Eje Geometría, cuya intenciones es hacer que los profesores en formación en la especialidad puedan adquirir las competencias conceptuales, procedimentales y actitudinales, asociadas a este eje temático, de modo que puedan transmitir a sus alumnos conceptos y nociones geométricas en forma correcta con un lenguaje simple y entendible al tipo de destinatario.

III. OBJETIVOS

Los alumnos y alumnas desarrollarán la capacidad de:

- Comprender en profundidad conceptos, representaciones, propiedades y construcciones de formas geométricas planas y del espacio.
- Adquirir las competencias cognitivas, procedimentales y actitudinales, de un profesor en formación, a través del eje temático Geometría
- Utilizar recursos didácticos y tecnológicos que le permitan construir figuras geométricas; deducir, verificar y demostrar propiedades asociadas a éstas.
- Valorar el carácter formativo, funcional e instrumental de la Geometría en el desarrollo del pensamiento matemático de sus potenciales alumnos y alumnas.

IV. CONTENIDO UNIDADES PROGRAMÁTICAS

UNIDADES	CONTENIDO	HORAS
4. Polígonos y	Criterios de clasificación. Polígonos	12

circunferencia Generalidades de los polígonos.	regulares. Congruencia de figuras geométricas. Propiedades. Circunferencia y círculo. Cuerdas. Posición relativa entre una circunferencia y una recta. Ángulos en la circunferencia. Circunferencia inscrita, circunscrita y ex inscrita a un polígono. Resolución de problemas contextualizados.	
5. Construcciones geométricas de figuras planas.	Construcciones fundamentales: paralelas, perpendiculares, simetral, bisectriz. Adición y sustracción de trazos. Copia de ángulos. Adición y sustracción de ángulos. División de un trazo. Construcción de triángulos y cuadriláteros. Construcción de polígonos regulares y estrellados. Resolución de problemas contextualizados.	20
6. Perímetro y área de regiones poligonales y circulares.	Teoremas de Euclides y Particular de Pitágoras. Cálculo de perímetro de polígonos. Cálculo del área de figuras planas. Comparación de áreas de polígonos. Área del círculo, sectores y segmentos	14

	circulares. Resolución de problemas contextualizados.	
7. Área de polígonos regulares inscritos o circunscritos en una circunferencia.	Cálculo de los lados de los polígonos regulares inscritos y circunscritos en función del radio de la circunferencia. Cálculo de apotemas. Cálculo de área de un polígono regular. Resolución de problemas contextualizados.	14
8. Cuerpos geométricos: poliedros y cuerpos redondos.	Generalidades. Cuerpos poliedros. Principio de Cavalieri. Prismas y pirámides. Cuerpos redondos. Cilindro, cono y esfera. Teorema de Eudoxio. Área y volumen de cuerpos geométricos. Resolución de problemas contextualizados.	20
9. Diseño de secuencias de situaciones didácticas asociadas a distintos sectores del currículo.	Análisis de las orientaciones metodológicas en planes y programas de estudio de Educación Básica. Recursos didácticos y tecnológicos para el tratamiento de la medida. Diseño de secuencias didácticas.	16

V. METODOLOGÍA

Como la primera asignatura de profundización en la formación disciplinar del Eje Geometría, y de carácter teórico-práctico, tendrá un énfasis en la resolución de problemas asistidos por un procesador de geometría dinámica (GeoGebra), por lo que se usarán como apoyos medios audiovisuales, guías de trabajo, textos bibliográficos y documentos ministeriales. Como modalidad básica se privilegiará el Taller, como lugar de encuentro a modo de desarrollar las capacidades de integración a través del trabajo colaborativo.

VI. EVALUACIÓN

La asignatura considera la evaluación diagnóstica, formativa y sumativa. La evaluación diagnóstica, considera como instrumento una prueba escrita con aspectos básicos previos, la que se socializará, al inicio de la siguiente sesión. La evaluación formativa, estará presente durante todo el proceso enseñanza aprendizaje de cada unidad, en que se efectuará observación directa en cada actividad propuesta, se debatirá y sugerirán las correcciones pertinentes. Se considerará, también, la autoevaluación y la coevaluación, cuando sea pertinente. La evaluación sumativa, estará presente, a través de tres certámenes, correspondientes a un 25 % cada uno, de la nota final de la asignatura. El promedio de los trabajos de taller, grupales e individuales, tendrá una ponderación del 25 % de la nota final de la asignatura, es decir:

VII. BIBLIOGRAFÍA

Básica

1. BALDOR, A. (2008). Geometría y Trigonometría. Segunda edición. México, Grupo Editorial Patria.	516.3 B193
2. CARREÑO, X. Y CRUZ, X. (2008). Geometría. Santiago: McGraw-Hill/Interamericana de Chile.	516 C2321
3. CLEMENS, S., O'DAFFER, P. Y COONEY, T. (1998). Geometría. México: Addison Wesley Longman de México.	516 C591

Complementaria

4. ALSINA, C.; BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. (1997). Invitación a la Didáctica de la Geometría. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. N°12. Madrid, Síntesis.	372.7 Al78
5. ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. (2008). Materiales para construir la Geometría. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. N°11. Madrid, Síntesis.	372.7 Al78M
6. ALSINA, C.; FORTUNY, J.M., PÉREZ, R. (1997). ¿Por qué Geometría? Propuestas Didácticas para la ESO. Volumen 5 de Educación Matemática en Secundaria. Madrid. Síntesis.	375.51 Al78
7. GÓMEZ CHACÓN, M. (2000). Matemática Emocional. Madrid. Narcea.	372.7019 G586
8. GORGORIÓ, N., DEULOFEU, J. y BISHOP, A (Coords.) (2000). Matemática y Educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional. N° 154. Barcelona, Grao.	372.7 M4161
9. MERCADO SCHÜLER, C. (1983). Geometría. Colección Curso de Matemáticas Elementales. Santiago, Universitaria.	375.51 M533C

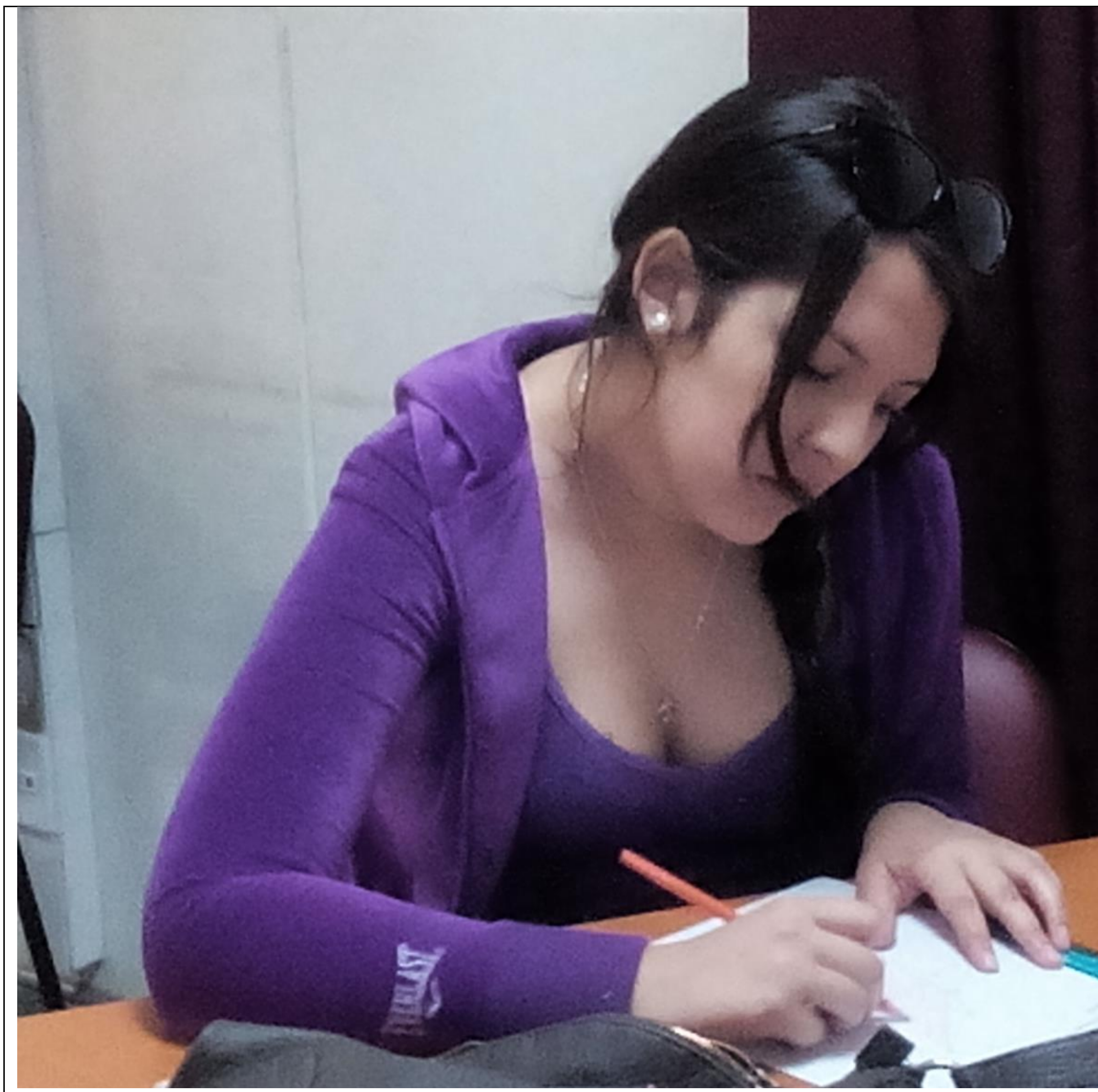
Documentos Ministeriales ubicables en www.mineduc.cl

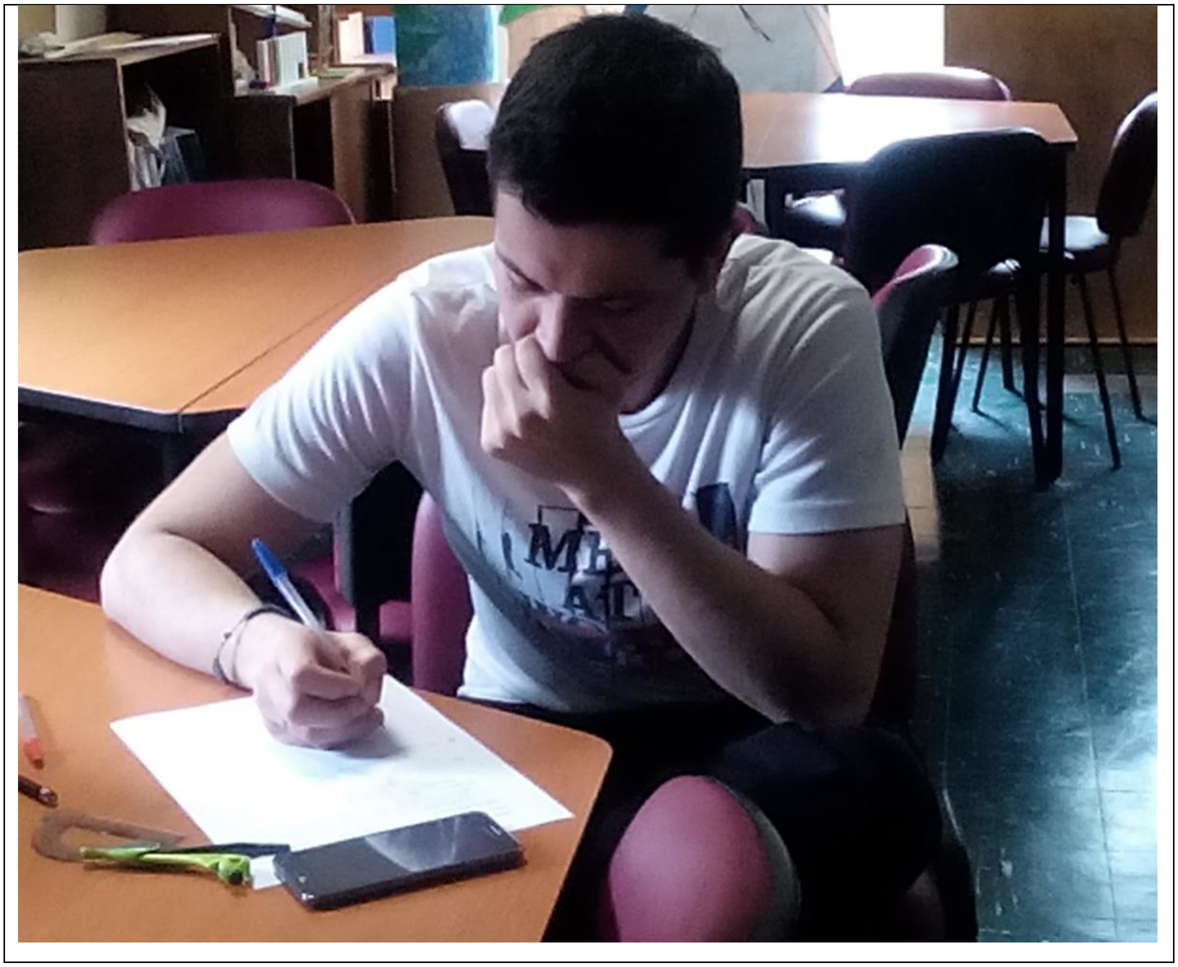
1. MINEDUC. (2012). Bases Curriculares de 1° a 6° Básico – Matemática. Santiago. MINEDUC.
2. MINEDUC. (2013). Bases Curriculares de 7° Básico a 2° Medio – Matemática. Santiago. MINEDUC.
3. MINEDUC. (2013). Estándares de Aprendizaje Matemática 4° y 8° Básico. Matemática. Santiago. MINEDUC.

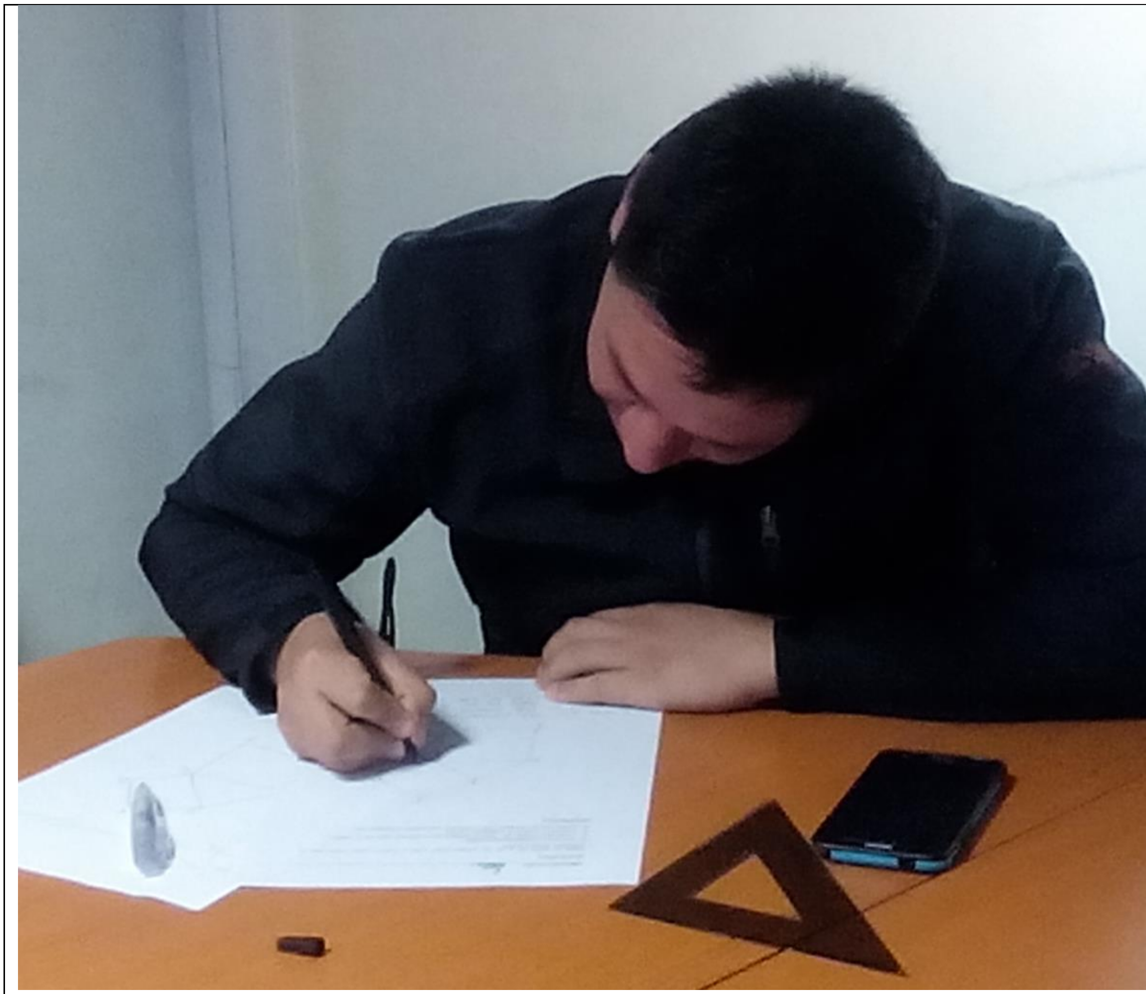
4. MINEDUC. (2011). Estándares Orientadores para Egresados de Carreras de Pedagogía en Educación Básica. Estándares Pedagógicos y Disciplinares. Santiago. MINEDUC.
5. MINEDUC. (2013). Programa de Estudio. 1° a 6° Básico. Matemática. Santiago. MINEDUC.
6. MINEDUC. (2011). Programa de Estudio. 7° y 8° Básico. Matemática. Santiago. MINEDUC.
7. MINEDUC. (2011). Programas de Estudio. 1° y 2° Medio. Matemática. Santiago. MINEDUC.
8. MINEDUC. (2000). Programa de Estudio. 3° Medio. Matemática. Santiago. MINEDUC.
9. MINEDUC. (2001). Programa de Estudio. 4° Medio. Matemática. Santiago. MINEDUC.

Anexo 2: Imágenes de los Estudiantes

Las imágenes de los estudiantes durante la experimentación se encuentran como archivos de imágenes (jpg) en la carpeta digital denominada “Imágenes de los Estudiantes”.







Anexo 3: Producciones de la Primera Fase

Las producciones a lápiz y papel de los estudiantes se encuentran como archivos de imágenes (jpg) en la carpeta digital denominada “Producciones a Lápiz y Papel”.

Anexo 4: Producciones de la Segunda Fase

Las producciones con tecnologías digitales de los estudiantes se encuentran como archivos Word (doc) y GeoGebra (ggb) en la carpeta digital denominada “Producciones con Tecnologías”.

Anexo 5: Entrevistas

Las entrevistas hecha a cada estudiante se encuentran como archivos de sonido mp3 en la carpeta digital denominada “Entrevistas”.