UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NOCIONES INTUITIVAS DE PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN BÁSICA: ESTUDIO PSICOGENÉTICO EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS.

Tesis doctoral

TERESITA EUGENIA MÉNDEZ OLAVE

Directora: Dra. ISMENIA GUZMÁN RETAMAL

Osorno. Chile. 2019

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS
ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NOCIONES INTUITIVAS DE PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN BÁSICA: ESTUDIO PSICOGENÉTICO EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS.

Tesis Doctoral presentada por Teresita Eugenia Méndez Olave dentro del programa de Doctorado en Educación Matemática para aspirar al grado de **Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos**, dirigida por la Dra. Ismenia Guzmán Retamal, académica de la Universidad de Los Lagos, Chile.

Teresita Eugenia Méndez Olave

Dra. Ismenia Guzmán Retamal

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NOCIONES INTUITIVAS DE PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN BÁSICA: ESTUDIO PSICOGENÉTICO EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS.

Esta tesis doctoral ha sido desarrollada al seno del Grupo de Investigación sobre Didáctica de la Matemática (GIDMAT-ULAGOS) del departamento de Ciencias Exacctas de la Universidad de Los Lagos.

Dedicado a:

A Martinna, mi hija, a Gastón, a los alumnos y a los profesores de matemática de educación básica, con la esperanza que esta investigación sea un aporte para buscar entendimientos concretos apoyados en las experiencias reales de los alumnos frente a la incertidumbre.

AGRADECIMIENTOS

Ante todo agradezco a mi esposo y a mi familia, su apoyo y confianza fueron un aliciente para ver materializada esta etapa. Sé que para ellos es importante este momento de cierre.

También agradezco a Patricio Arévalo profesor, del Liceo Bicentenario de Molina y a Juan José Herrera profesor de la Escuela Ernesto Castro Arellano, a su directora en ese período, la profesora Luz Moya, ellos facilitaron mi entrada libremente a estos establecimientos y accedieron a que realizara clases en sus cursos de 5°, 6°, 7° y 8° básico, en los que se realizo la experiencia.

A los alumnos de estos cursos, por su participación y compromiso en las actividades realizadas.

A la Dra. Ismenia Guzmán, su acompañamiento durante mi formación constituyó un pilar fundamental en los avances que pude lograr, sus orientaciones me hicieron reflexionar y profundizar en diferentes aspectos de esta tesis y juntas encontramos algunos hallazgos que dieron respuesta a algunas trabas, propias de una investigación.

También agradezco a los profesores informantes, sus demandas y sugerencias permitieron completar ciertos aspectos no considerados y profundizar en otros.

RESUMEN

Esta investigación propone identificar los saberes en juego de alumnos de los niveles entre 5º a 8º básico, cuyas edades están comprendidas entre los 10 y 14 años, cuando se les plantean situaciones, diseñadas para de hacer emerger conocimientos intuitivos de probabilidad e incertidumbre, en educación primaria.

Se trata de un estudio psicogenético cuyo propósito es conocer la evolución de los conocimientos intuitivos y los razonamientos emergentes de los alumnos, en el período de sus clases normales de matemática.

Desde esta perspectiva una contribución de esta tesis es que permitiría proyectar la enseñanza de la probabilidad mediante situaciones escolares que, den sentido a esta noción, considerando las concepciones intuitivas de los alumnos para favorecer el reconocimiento y análisis de la incertidumbre en las situaciones del mundo real.

El marco teórico se inscribe en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), Brousseau (1998, 2004), Margolinas (1994, 1995), Perrin-Glorian y Hersant, (2003, 2015), focalizada especialmente en las nociones de medio, contrato didáctico, los procesos de devolución e Institucionalización y el modelo de la estructuración del medio de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD).

La metodología de investigación se basa en la Ingeniería Didáctica, descrita en Artigue (1990). El diseño metodológico describe un esquema experimental que se desarrolla en las fases siguientes Diseño las situaciones, Análisis a Priori de las Situaciones, Experimentación y Observación, Análisis a Posteriori de los datos recogidos y la Validación.

Se ha encontrado evolución psicogenética en las producciones de los alumnos de este segmento de edad. Los alumnos de 10 y 11 años, conciben la probabilidad desde una perspectiva determinista, manifestada por suposiciones subjetivas sobre los sucesos en estudio y por análisis concretos, apoyados en hechos ocurridos, durante sus experiencias en las situaciones propuestas. Algunos alumnos de 12 a 14 años reconocen la aleatoriedad en contextos más diversos, analizan el estado actual de los datos en juego proyectando decisiones y prediciendo resultados.

Palabras clave: Probabilidad. Incertidumbre. Aleatoriedad. Conocimientos intuitivos de los alumnos sobre probabilidad.

ABSTRACK

This research proposes to identify the knowledge of students in the levels between 5º and 8º of primary school, whose ages are between 10 and 14 years, when they are faced with situations, designed to make intuitive knowledge of probability and uncertainty emerge, in education primary.

It is a psychogenetic study whose purpose is to know the evolution of the intuitive knowledge and emerging reasoning of the students, during the period of their normal math classes.

From this perspective, a contribution of this thesis is that it would allow to project the teaching of probability through school situations that give meaning to this notion, considering the intuitive conceptions of students to favor the recognition and analysis of uncertainty in real-world situations.

The theoretical framework is part of the Theory of Teaching Situations (TDS), Brousseau (1998, 2004), Margolinas (1994, 1995), Perrin-Glorian and Hersant, (2003, 2015), focused especially on the notions of medium, contract didactic, the processes of devolution and Institutionalization and the model of the structuring of the means of the Theory of Teaching Situations (TDS).

The research methodology is based on Didactic Engineering, described in Artigue (1990). The methodological design describes an experimental scheme that is developed in the following phases Design the situations, Priority Analysis of the Situations, Experimentation and Observation, Subsequent Analysis of the collected data and the Validation.

Psychogenetic evolution has been found in the productions of students of this age segment. The students of 10 and 11 years, conceive the probability from a deterministic perspective, manifested by subjective assumptions about the events under study and by concrete analysis, supported by events, during their experiences in the proposed situations. Some students aged 12 to 14 recognize randomness in more diverse contexts, analyze the current state of the data at stake by projecting decisions and predicting results.

Keywords: Probability. Uncertainty. Randomness Intuitive knowledge of students about probability.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

INDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Indice de Gráficos

Introducción

En la década de los ‘50 Piaget revoluciona la escena científica con su método para evidenciar la forma en que el niño va desarrollando su pensamiento y que los niños en ciertas etapas de su desarrollo presentaban, en general, comportamientos específicos, síntomas de su relación con el medio circundante y de la adquisición de aprendizajes en esta interacción.
En sus experimentos, de epistemología genética, Piaget captura lo que los niños son capaces de hacer, en ciertos períodos de su desarrollo, lo que concebían al respecto y las limitaciones de su pensamiento.

Esta tesis se sitúa en esta línea de investigación, pues se propone estudiar cómo los niños y jóvenes de 10 a 14 años conciben la probabilidad y la incertidumbre, las características que de estas nociones son capaces de reconocer y poner en juego en la interacción con la probabilidad de la escuela y la del mundo real.

Así en este estudio interesa observar, con las herramientas de la didáctica de la matemática, como los niños de 10 a 14 años, de dos escuelas municipales, conciben los fenómenos aleatorios a los que son introducidos en la secuencia didáctica diseñada.

Es decir interesa identificar la evolución psicogenética de los conocimientos de los alumnos en este segmento de edad para proponer posteriormente, a partir de las informaciones obtenidas con esta investigación, situaciones de enseñanza que se encuentre en la zona de las experiencias reales de los alumnos.

Para identificar la evolución psicogenética de los alumnos, se consideraron 4 situaciones,tres de ellas originales y la cuarta esta inspirada en una situación propuesta por Callejos (1994). Todas estas situaciones se diseñaron a la luz de los conceptos de medio y contrato didáctico, conceptos clave de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y para la gestión de las clases experimentales, los procesos de devolución, institucionalización y estructuración del medio. Estas mismas nociones, del marco teórico forman parte de los análisis realizados a las respuestas de los alumnos.

Como indica el método psicogénetico, la secuencia didáctica se aplicó a los alumnos de los diferentes niveles, 5° a 8° básico. A partir del análisis de las respuestas escritas y video grabadas en sus clases normales, se busca obtener una caracterización de la evolución psicogenética sobre la noción de probabilidad de los alumnos, para estas edades.

Por otra parte esta tesis, para la autora, ha constituido una reflexión y profundización acerca de uno de los conceptos más controvertidos del conocimiento humano y ha contribuido a despejar dudas y confusiones sobre sus orígenes, su evolución y consolidación como objeto de conocimiento. Se considera que estas motivaciones se podrían extender a la comunidad didáctica.

Desde el punto de vista de la problemática, se identifican debilidades en las decisiones curriculares propuestas en los instrumentos ministeriales (programas de estudio para este segmento de edad y textos escolares), las que invisibilizan el fenómeno aleatorio, sustituyendolo por actividades simplificadoras que no ponen en juego el razonamiento de los alumnos, en el cual la toma de decisiones basada en los datos debería ser el centro de la actividad matemática del alumno en este tema.

Entonces al analizar el proceso de enseñanza, se ponen en evidencia obstáculos para la comprensión del azar y de la probabilidad, debido a que la enseñanza propuestas focaliza actividades que en vez de favorecer el razonamiento según los datos, sugiere a los profesores actividades ostensivas, que proponen a los alumnos seguir instrucciones, relacionadas con la recolección y organización de datos, en juegos de azar u otros fenómenos equiprobables, lo que produce una sustitución de objetivos y la ilusión de un aprendizaje, mnemotécnico, que no permite a los alumnos estimar probabilidades. Esto significa que las instrucciones ministeriales no han logrado enfatizar en las actividades que propone, que los alumnos desarrollen el sentido de la estimación de probabilidades.

Esta tesis está organizada en 6 capítulos: Estudios PreliminaresTransposicón Didáctica del Objeto Probabilidad, Marco teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), Metodología de Investigación, Experimentación, Resutados y Validación y Conclusiones y Prolongaciones.

El primer capítulo consta de tres estudios que fundamentan la problemática, precisando el objetivo general y los objetivos específicos.

El primero, se centra en el desarrollo histórico epistemológico de la probabilidad, el que abarca desde el período antiguo hasta las contribuciones de Laplace. Su propósito es poner en evidencia los diferentes contextos que sustentan significados diferentes de la probabilidad, los problemas que dieron origen al estudio sistemático de esta noción, el tipo de pensamiento que provocaron sus soluciones y su relación con las dificultades de los alumnos para adquirir un pensamiento probabilístico.

El segundo, corresponde a un análisis descriptivo y comparativo del estado actual de la enseñanza de la probabilidad, en 5 países latinoamericanos, entre los que se encuentra Chile. Este estudio propone determinar las diferencias y similitudes en las decisiones curriculares con respecto a la enseñanza de la probabilidad, en el concierto internacional Latinoamericano, con las decisiones curriculares chilenas.

El tercero, presenta investigaciones afines y antecedentes que ponen en evidencia, las dificultades de los alumnos y de los profesores para comprender el significado de esta noción y transferirla a la resolución de problemas escolares como a sus usos cotidianos. En este tercer estudio se describe, además, las dificultades de las personas para tomar decisiones en contextos de incertidumbre en los que la probabilidad juega un papel importante en este sentido.

En este mismo apartado, se describen propuestas innovadoras implementadas en la escuela primaria, investigaciones sobre las concepciones intuitivas que construyen los niños al enfrentar situaciones de incertidumbre y probabilidad antes de la instrucción formal en la escuela.

A partir de los estudios mencionados, se define la problemática y se plantean los objetivos de investigación.

El segundo capítulo comprende corresponde a la transposición didáctica, en tres niveles, del objeto probabilidad: El saber sabio, el análisis según la TSD del saber curricular (bases currciares y programas de estudio) y de los textos de estudio.

En relación con el Saber Sabio, se plantea la teoría de la probabilidad, desde una perspectiva didáctica, considerando inicialmente nociones intuitivas tales como suceso y experimento aleatorio y luego aspectos formales de la probabilidad, asociados al álgebra de conjuntos. Finaliza, esta parte, con la probabilidad subjetiva considerando sus principios, axiomas y propiedades, las que están en correspondencia con la teoría axiomática de Kolmogórov.

El tercer capítulo corresponde al marco teórico planteado por la Teoría de situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau, Perrin- Glorian, Margolinas, Hersant, entre otras.

El cuarto capítulo es la Metodología de Investigación, la que describe el diseño de la secuencia didáctica, su análisis a priori y a los protagonistas de este estudio.

El quinto capítulo se divide en dos partes, la experimentación de las situaciones con sus resultados y la validación de la ingeniería, en la confrontación del análisis a priori y el análisis a posteriori.

El sexto capítulo contiene las conclusiones, estas dan cuenta de los hallazgos encontrados en esta tesis y la evolución psicogenética de los conocimientos, que los alumnos evidenciaron.

En este capítulo se incluye un apartado sobre prolongaciones eventuales, a partir de los resutados obtenidos, estas podrían promover investigaciones que contribuyan a la formación de profesores y a producir cambios curriculares que antepongan, las concepciones intuitivas de los alumnos sobre la probabilidad, adquiridas como resultado de sus experiencias personales con el azar, al tratamiento formal con la que se ha desarrollado, en la practica, la enseñanza de esta noción.

La enseñanza, con enfasis en las intuiciones, podría evocar significados probabilísticos de conceptos complejos y ser uno de los eslabones entre las concepciones intuitivas de la probabilidad y las relaciones formales para favorecer el aprendizaje escolar de esta noción.

En síntesis, esta tesis propone que la enseñanza de la probabilidad tome en cuenta, en los diseños de los materiales curriculares, la evolución psicogenética de los conocimientos de los alumnos, considerados en estos niveles.

CAPÍTULO 1. ESTUDIOS PRELIMINARES

Este capítulo presenta estudios sobre la noción de probabilidad como objeto didáctico, para formular el problema de investigación, y como objeto epsitemológico, para comprender las dificultades de los alumnos en interacción con la probabilidad y la incertidumbre .

Para ello se han realizado tres estudios que dan cuenta de cada uno de los estatus mencionados: el primer estudio es epistemológico, presenta una interpretación del desarrollo de la noción de probabilidad. Este estudio pone en evidencia las necesidades y los problemas que dieron origen a la noción de probabilidad y los significados atribuidos a esta noción.

El segundo estudio corresponde a una descripción de las decisiones curriculares en relación a la enseñanza de la probabilidad de cuatro países latinoamericanos, profundizando en el campo de problemas que propone el currículo chileno actual en educación básica y sus efectos sobre las concepciones de los alumnos de 5º a 8º básico, a la luz de la noción de medio didáctico de la teoría de situaciones didácticas.

El tercer estudio considera resultados de investigaciones en didáctica de la matemática y de psicología educativa y evolutiva. A partir de estos antecedentes se formula la problemática y precisan los objetivos de investigación.

1.1 Estudio Epistemológico de la Noción de Probabilidad.

"Es notable que una ciencia que comenzó con las consideraciones de juegos de azar había de llegar a ser el objeto más importante del conocimiento humano. Las cuestiones más importantes de la vida constituyen en su mayor parte, en realidad, solamente problemas de probabilidad",
Pierre Simón de Laplace.

El análisis epistemológico contribuye a conocer las características de la actividad matemática y los procesos por los cuales la noción de probabilidad se fundó y desarrolló

(Artigue, 1990, p. 241; 2018, p.1). Se refiere a un estudio analítico bibliográfico sobre la evolución del objeto probabilidad desde el punto de vista filosófico, matemático y su influencia en la enseñanza de la probabilidad. Este estudio, pretende determinar los usos cotidianos de la probabilidad como los problemas que permitieron construir uno de los conceptos más utilizados por el sentido común, pero controversial en su reconocimiento como objeto matemático.

1.1.1 Significado etimológico de la probabilidad.

Torretti, (2012, p. 336), plantea que la palabra probabilidad es de origen grecorromano. En Tópicos, Aristóteles considera que una cosa es plausible, cuando parece bien a todos o a la mayoría o los más sabios, así la noción de probabilidad tiene el carácter de aprobable, (Santos del Cerro, 2006, p.105).

Un siglo más tarde, Carneades de Cyrene, crea el denominado probabilismo pagano, el que constituye una teoría del conocimiento que afirma que la realidad no puede percibirse ciertamente sino a lo sumo probablemente, o lo que es lo mismo, para el hombre no existe nada que no sea meramente probable. Carneades utilizó el vocablo $\pi\iota\theta\alpha\nu o\varsigma$ para caracterizar lo que consideraba apariencias sensibles verosímiles, Ciceron, jurista, político, filósofo, escritor y orador romano, utiliza en su oficio *probabilis,* como el equivalente latino de $\pi\iota\theta\alpha\nu o\varsigma$.

El adjetivo probabilis, deriva del verbo *probo,* que significa ‘declarar bueno’, ‘aprobar’, ‘probar’ y se aplica primordialmente a todo aquello que admite aprobación, citado en Torretti (2012, p. 336). Al parecer, de este uso Ciceroniano proviene la acepción moderna de probable.

El vocablo $\pi\iota\theta\alpha\nu o\varsigma$ es un adjetivo emparentado con el verbo $\pi\in\iota\theta\omega$ (cuyo significado es persuadir), y en griego clásico se aplica a las personas persuasivas (Tucídides, 3-36, 6.35, citado en Torretti 2012) y sus modales cautivantes (Jenofonte, Memorabilia, 3.10.3, citado en Torretti 2012). Por ejemplo, un sabio en la antigüedad o una eminencia, son personas persuasivas. Al respecto, Cicerón sostiene que “el sabio a menudo tiene que admitir lo probable, aquello que no es captado ni percibido ni confirmado como verdadero, pero que es verosímil, pues si no lo acepta la vida se le haría imposible”.

El adjetivo $\pi\iota\theta\alpha\nu o\varsigma$ también se aplica a los argumentos plausibles, relatos creíbles (Herodoto) y aun a una estatua por semejarse a la figura de una persona viva.

Lo probable, se concibe como un atributo de verdad aparente, predicable, de las apariencias presentes y adquiere un significado cualitativo, que dista de los usos que se atribuyen en la enseñanza a lo probable como sinónimo de probabilidad. Hoy en día se asignan probabilidades cuantitativas a ciertos sucesos que en la antigüedad no hubieran sido considerados como probables, por ejemplo, en aquella época no se concebía asignar una cuantificación al suceso salir cara en el lanzamiento de una moneda.

Torretti (2012), sostiene que los filósofos griegos tenían alguna idea de grados de creencia y confianza en la ocurrencia de un suceso, pero no hay indicios que hayan intentado cuantificar ni calcular probabilidades, (p. 338).

Esta actitud se reproduce en las escuelas, puesto que los niños de 10 y 11 años no atribuyen espontáneamente un significado cuantitativo a la probabilidad, sino que la caracterizan con expresiones del lenguaje natural o con aquellas expresiones establecidas en el currículo como probable, seguro, imposible, poco probable.

Esta diferencia entre las dimensiones cualitativa y cuantitativa de la probabilidad podrían representar en gran medida una dificultad para concebirla desde la perspectiva formal, asociada a una medida en el intervalo [0, 1] y a procedimientos matemáticos para determinar su valor, mientras que en el significado semántico su cuantía depende de consideraciones subjetivas como la confianza en el conocimiento experto de una autoridad que dictamina sobre algún tema.

1.1.2 Desarrollo histórico de la probabilidad en la antigüedad.

Borovcnik plantea que uno de los primeros obstáculos que caracterizan al pensamiento probabilístico fue el largo período en que la probabilidad estuvo relacionada a la adivinación del futuro, este oficio pudo ser uno de los factores que produjo su retraso como objeto de conocimiento, junto a una concepción del universo basada en la relación causa efecto, desarrollada en el mundo griego, que abarca desde la antigüedad hasta finales de la edad media, Borovcnik (2011).

Estos obstáculos reflejarían el pensamiento de la humanidad con relación a una clase de fenómenos, en un período de la historia, como también los intentos de avanzar en el entendimiento y conocimiento de estos fenómenos. En palabras del epistemólogo de las ciencias, Gastón Bachellard “el conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra. Las revelaciones de lo real son siempre recurrentes y … al volver sobre un pasado de errores se encuentra la verdad en un verdadero estado de arrepentimiento intelectual”, (Bachellard, 2003, p. 15). Además estos obstáculos se revelan, por cuanto reaparecen “es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones”, (Bachellard, 2003, p. 15). Por ello no es de extrañar encontrarlos en los conocimientos de los alumnos, a pesar de la enseñanza.

1.1.2.1 Significados y Practicas del Azar.

En una primera fase de exploración histórica, el azar estuvo ligado a la adivinación, a la superstición y al deseo de conocer la voluntad de los dioses. Durante la época antigua los ritos paganos eran oficiados por sacerdotes, los que lanzaban una serie de aparatos místicos que según su posición representaban la voluntad divina.

Algunas de estas tradiciones milenarias han trascendido en el tiempo y las personas las utilizan junto con el conocimiento científico, produciendo obstáculos epistemológicos para comprender el sentido de la aleatoriedad y su relación con la probabilidad y el azar.

1.1.2.2 Nociones tempranas de azar.

Los juegos de azar aparecen en antiguas civilizaciones como una actividad de entretención. Al respecto Heródoto (historiador griego, 484 – 426 A.C.) se refiere a la popularidad y difusión de los juegos de azar practicados en el Egipto

Imperial por las clases sociales más cercanas al Faraón a objeto de sustituir el tiempo de ocio.

Excavaciones arqueológicas en la India, Babilonia Egipto, Grecia y Roma han encontrado una mayor proporción de huesos de astrágalo que de otros huesos, datados en 40000 años atrás", lo que ha llevado a pensar en la necesidad de los juegos de azar en las antiguas civilizaciones, David (1962), citado en Borovcnik y Kapadia (2014, p. 8, 9), Batanero (1996, p. 30). Registros pictóricos encontrados en la Pirámide de Keops– Egipto, hacen suponer que en el año 3.500 a. C., ya se realizaban juegos de azar.

La figura 1 ilustra un juego de dados entre el héroe griego Aquiles y Ajax, en un descanso de la Guerra de Troya.

Figura 1: Juego de dados en la antigüedad

Fuente: Llagostera, E. 2011.

Se ha documentado además que los jefes de antiguas tribus lanzaban el astrágalo[1] para decidir frente a conflictos que tuvieran más de una opción. También se ha encontrado evidencia que hace suponer que las víctimas sacrificadas a los dioses, se seleccionaban al azar, entre los prisioneros de una tribu.

[1]El astrágalo es un hueso corto del pie que forma parte del tarso de los humanos y demás plantígrados. Comúnmente es llamado taba y por su forma de 4 a 6 seis caras se lo usaba en la antigüedad con fines de superstición o 6 ara juegos de azar.

Sáenz (1997) sostiene que, artefactos aleatorios han existido desde épocas muy remotas, astrágalos y dados, pero en un principio no proporcionaron un conjunto de resultados que permitiera identificar algunas regularidades del comportamiento aleatorio de los resultados, debido principalmente a irregularidades de fabricación", Hacking reacciona a esto, argumentando que en el Museo de Antigüedades del Cairo se conservan dados de marfil muy antiguos que están muy bien equilibrados, o los construidos de cerámica por los babilonios alrededor del 3000 AC y cocidos en hornos especiales, adoptando formas casi simétricas, Borovcnik y Kapadia (2014). Lo que hace suponer la dificultad en percibir patrones en los resultados obtenidos o simplemente no estaba en sus preocupaciones interesarse en ellas.

A pesar que estas actividades ponían de manifiesto el azar y permitieron observar sus efectos durante largos siglos, la idea de probabilidad como abstracción conceptual no surgió sino muchos más tarde, alrededor del S XVII.

Uno de los primeros intentos en desarrollar el cálculo de probabilidades lo constituyen las reglas que Cardano sugiere a los jugadores de la época, él proponía considerar la frecuencia relativa de resultados favorables en un juego de azar, (Batanero, 2006, p. 23). En esta primera fase, la probabilidad manifestada a través del azar no se asociaba a la aleatoriedad.

1.1.2.3 El pensamiento griego.

Otra causa de retraso fue la fuerte tradición del mundo griego, la que obstaculizó la construcción de hipótesis basadas en la variabilidad de datos empíricos. Se impuso una lógica que concibió las relaciones en torno al modelo deductivo de la geometría de Euclides. Bennett (1993) asegura que por muchos siglos y hasta comienzos de la edad media, perduró el convencimiento de que el azar estuvo relacionado con la fortuna y la causalidad, citado en Batanero

(2006, p. 19). En este marco, los filósofos griegos desarrollaron varios puntos de vista. Para Demócrito cada cosa en la tierra es el fruto combinado del azar y la necesidad, Aristóteles consideraba que el azar resulta de la coincidencia inesperada pero notable de dos o más series de eventos, independientes entre sí y debido a muy diferentes factores, el resultado final es pura casualidad, Batanero (2006, p. 19).

Otras corrientes abrazaron ideas incipientes de aleatoriedad en las leyes que gobernaban el universo. Epicuro, filósofo griego (341 a.C.-270 A.C), discípulo de Demócrito, imaginaba el mundo constituido por átomos moviéndose en el vacío. Pensaba que caían todos con la misma velocidad, siguiendo trayectorias paralelas. ¿Cómo podían entonces entrar en colisión? ¿Cómo la novedad - nueva combinación de átomos - podía aparecer? Epicuro supuso la existencia de desviaciones infinitesimales, que tenían lugar no se sabe cuándo, ni cómo ni donde, cuyo efecto era la desviación espontanea en cadena de la trayectoria predeterminada por los átomos originando el nacimiento de un mundo. Gracias a este elemento de espontaneidad de los átomos, Epicuro, y más tarde Lucrecio, niegan el carácter determinista del universo, concibiendo un cierto grado de indeterminismo suficiente para mantener la libertad, tanto física como moral, (Prigogine,1995, p. 17).

David señala que en esta época existieron situaciones empíricas del juego de azar en las que el jugador deseaba hacer un análisis acerca de la posible ocurrencia o no ocurrencia de un suceso con el objeto de valorar de antemano sus posibles pérdidas o ganancias. David (1962), afirma que Cicerón (44 A.C.), lo expresa en términos de sucesos fortuitos y sus implicancias en el juego. Él sostiene en su *De divinatione* que: “si al lanzar cuatro dados se producen cuatro caras, tú puedes hablar de accidente; pero supongamos que haces una prueba de 100 lanzamientos en los que la cara aparece 100 veces; ¿podría llamar a eso accidental?, (p. 24).

Durante cientos de años este problema quedó sin resolver, llegando a la conclusión que en los juegos de azar operaba el principio de incalculabilidad, puesto que luego de un gran número de intentos sin éxito sobre el cálculo de sus predicciones, todos los métodos de predicción fallaban cuando se presentaba la aleatoriedad.

Otra fuente de la manifestación del azar son los escritos bíblicos. Algunos episodios lo señalan de la siguiente manera: "Dios les permitió a los israelitas echar suertes como forma de revelarles su voluntad divina, en casos inciertos" (La Biblia, Num. 33:54[2]; I Sam. 14:42; I Cron. 24:5). El echar suertes representaba una súplica solemne a Dios, frente a la incertidumbre de tomar la mejor decisión, pues este procedimiento revelaba la voluntad divina. Asì lo hicieron los discípulos de Jesús para conocer, la voluntad de Dios para reemplazar a Judas Iscariote, (La Biblia, Hechos 1:15-26).

En la época del emperador romano Julio Cesar (100 – 44 A.C.), lanzando una moneda al aire se zanjaba una disputa, que tenía a la cara del emperador como juez del veredicto. Bellos sostiene que, en este contexto, "el azar no era algo aleatorio sino la expresión de la voluntad divina. Del mismo modo, según la Biblia, sacar la pajita más corta constituía un método imparcial de selección solo en la medida en que Dios así lo quisiera: "La suerte se echa en el regazo; más del Señor viene toda decisión" (La Biblia, Proverbios 16, 33), (Bellos, 2011, p. 391).

La influencia del cristianismo, impulsado por Teodosio I el grande (380 D. C.), produjo el detrimento en los juegos de azar en el imperio romano. La convicción adoptada por San Agustín (354 – 430 D. C.), según lo expresa David (1962) "nada sucede por azar, todo está controlado por la voluntad de Dios. Si los

---

[2]Num 33:54 de la Biblia: Heredareis la tierra por sorteo, por vuestras familias; a las más grandes daréis … Donde la suerte caiga a cada uno, eso será suyo. …

acontecimientos parecen transcurrir por azar, se debe a la ignorancia del hombre y no a la naturaleza de los eventos", (p. 26) son una manifestación del pensamiento medieval.

Esta convicción revela una actitud de determinismo divino, la que niega la influencia del azar como causa de los acontecimientos impredecibles e impide todo tipo de discusiones sobre la aleatoriedad.

1.1.2.4 Obstáculos al progreso conceptual de la probabilidad.

Esta concepción de un mundo en que el azar no existía, contribuyó a producir obstáculos que dificultaron conceptualizar la noción de probabilidad, algunos de los cuales, Borovcnik y Capada (2014) asocian a:

- La práctica de los juegos de azar pudo alimentar un profundo deseo de explorar la voluntad de los dioses y al mismo tiempo haber traído consecuencias religiosas indeseadas al indagar en sus misterios. La observación de regularidades presentada en la caída de astrágalos u otros artefactos aleatorios, pudo haber producido el temor de revelar el deseo de la deidad al intentar formalizar lo que a vistas de algunos parecía un nuevo conocimiento.
- Los sumos sacerdotes tenían la autoridad de interpretar la voluntad divina usando artefactos y procedimientos aleatorios. Se cree que muchos sacerdotes manipulaban estos resultados como una manera de someter a la gente común mediante el designio divino. Lo que pudo obstaculizar la observación de regularidades en los resultados de estos experimentos.

Kendall, citado en Mateos y Morales (1985, p. 34), Batanero y Díaz (1996, p.30) considera cuatro razones como causa para no advertir la equiprobabilidad, estas son:

a) Superstición en los jugadores.
b) Ausencia de una notación adecuada de los sucesos de azar.
c) Trabas morales y religiosas para el desarrollo de la idea de aleatoriedad.
d) Ausencia de una teoría combinatoria.

> (...) Antes del cristianismo los griegos y romanos parece que consideraban el mundo parcialmente determinado por el azar (...). Un procedimiento mediante el cual las deidades como La Fortuna, Los Hados o el Destino podían expresar sus deseos era interviniendo en el lanzamiento del dado (...). Precisamente, en Grecia y Roma las cuatro tabas de jugadores se usaban también en los templos de los dioses", (Mateos y Morales, 1985, p. 34).

Un obstáculo mayor lo constituye superar la racionalidad determinista de concebir el estado pasado y presente de un suceso aleatorio para situarse en el estado futuro del mismo y analizar sus posibles resultados.

Fue la primera manera de razonar la que opero en las soluciones propuestas por Luca Pacioli, al problema de los puntos, cuya formulación, en la versión de Bellos (2011) p. 395) es la siguiente: Jean y Jacques apuestan a ver quién saca el número más alto tirando los dados en varias rondas. El ganador será el primero que obtenga tres victorias. En el caso de que hubiera que finalizar el juego después de tres rondas, cuando Jean ha sacado el número más alto dos veces y Jacques una vez, ¿cómo debería repartirse la apuesta? (p. 395).

Una respuesta a este problema que refleja la relación entre sucesos pasados es concebir un reparto proporcional, en la razón 2 es a 1, razonamiento que es muy común, aún en personas con bastante instrucción, (Bellos, 2011, p. 397).

Hasta aquí la conceptualización del azar y la probabilidad se ha caracterizado por un pensamiento asociado a la superstición, a la religión y a la emergencia de casos asilados relacionados con problemas en los que había necesidad de impartir justicia, la que se manifestaba en la ganancia recibida por cada jugador, conduciendo a incipientes progresos en esta área.

1.1.3 Mecanismos incipientes de la noción de probabilidad.

Las restricciones impuestas por estos obstáculos sumados a la supremacía religiosa limitaron el desarrollo de las ciencias y la matemática, las que se canalizaron a través de otras formas de expresión. En efecto, Bellhouse (2000) analizó un manuscrito del SXIII titulado De Vetula, de Richard de Fournival (1200 – 1250) y constata un salto cognitivo que favorece el desarrollo de esta noción.

En uno de sus pasajes el manuscrito describe un juego de dados en el que los jugadores apostaban a la suma de puntos obtenida al lanzar tres dados y se establece la primera relación entre la frecuencia y la enumeración de sus posibles resultados En este episodio se afirma que si se lanzan tres dados hay 216 combinaciones posibles para la suma de ellos.

La importancia de este hallazgo es la exhaustiva enumeración que De Fournival realizo para determinar las distintas combinaciones que este juego produce, incluso el orden en que aparecían los números en los tres dados, la frecuencia de aparición de cada suma y el hecho que de Fournival piensa, sin tomar conciencia, en términos de resultados posibles y futuros. Este mismo problema fue estudiado por Galileo cuatro siglos más tarde, a objeto de explicar por qué, aunque las sumas 9 y 12 se pueden componer el mismo número de veces que las sumas 10 y 11, al lanzar dos dados la experiencia de los jugadores les hace apostar a 10 y 11, las que ocurren con mayor frecuencia, (Batanero, 2005, p. 250). Para explicar esta paradoja, Galileo, tuvo en cuenta, lo mismo que De

Fournival, el orden en que aparecían los números en los tres dados, y dio una prueba combinatoria: 25 configuraciones diferentes para las sumas ordenadas 9 y 12 y 27 configuraciones posibles para las sumas 10 y 11.

1.1.3.1 Girolamo Cardano (1501 – 1576).

Cardano efectúa la primera idealización explícita de lo equiprobable, basada en la práctica aleatoria. En efecto, en el capítulo 6 de su “Liber Ludo Alea” él recomienda a los jugadores exigir el principio fundamental que rige todo juego de azar, el cual es simplemente la igualdad de condiciones de los contrincantes, de los mirones, del dinero, de la situación, del cubilete y del dado mismo. En la medida en que usted se aparte de la igualdad, si es a favor de su contrincante, usted es tonto, y si es al suyo propio, usted es injusto. Además, recomendaba tener en cuenta todas las posibilidades de los diferentes resultados al hacer sus apuestas para que lograran un juego equitativo, (Santos y Camuñez 2007, p.45).

En “Liber Ludo Alea” Cardano analiza juegos de dados para encontrar reglas de calculo que permitieran obtener ventaja en el juego.

Él se interesa en resolver problemas relacionados con la división de una apuesta (≈ 1543), el mismo problema que Paccioli había solucionado utilizando un razonamiento proporcional y logrando determinar el reparto en la razón 5 es a 3, el que no concuerda con el reparto 7 es a 1, resultado que se obtiene por el funcionamiento de un razonamiento probabilístico.

Cardano realiza un estudio bastante minucioso sobre los juegos de dados, utilizando dos métodos: el recuento exhaustivo de las diferentes posibilidades y cuando este método se complicaba o se extendía mucho, utilizaba el método de la ganancia media o principio de igualdad, De Mora, (1981).

Cardano utilizó este principio en el lanzamiento de uno, dos y tres dados, de la siguiente manera:

Sea $\boldsymbol{p}$ la probabilidad de éxito en el lanzamiento de un dado. Entonces $p = \frac{1}{6}$ y la igualdad en el juego se encuentra cuando la probabilidad es $\frac{1}{2}$, lo que ocurre, en este caso, al realizar 3 lanzamientos, pues $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Cardano generaliza rápidamente este resultado y establece que si la probabilidad de conseguir éxito en un suceso simple es $\boldsymbol{p}$ entonces la expresión $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p} = \frac{1}{2}$, representa la igualdad en el juego, donde $\boldsymbol{n}$ corresponde a la cantidad de intentos a realizar para obtener esta igualdad.

Aplicando este resultado plantea que al lanzar un dado la igualdad se encuentra siempre en la mitad de los números, "y así un punto sale en tres lanzamiento o bien saldrá uno de tres puntos en un lanzamiento. Por ejemplo se puede obtener 1, 3 o 5 de igual manera que 2, 4 o 6", (De Mora, 2011, p.125).

Según este principio la igualdad al lanzar un dado se encuentra en 3 lanzamientos, lo que se expresa como $1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, para el primer lanzamiento.

En un juego con dos lanzamientos se producen 36 casos posibles. Cada cara puede salir en 6 de estos 36 casos, así obtiene $2 \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{3}$, para dos lanzamientos del dado. Valor que concibe como la probabilidad de obtener una cara del dado, al lanzarlo dos veces.

Y en un juego con 3 lanzamientos se obtiene, $3 \cdot \frac{36}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$, (De Mora, 1981, p. 132), lo que concuerda con el principio de igualdad y con la probabilidad de este suceso de acuerdo a sus convicciones.

Actualmente se sabe que los resultados para la probabilidad de 1, por ejemplo en el lanzamiento de un dado, una dos y tres veces son $\frac{1}{6}$, $\frac{11}{36}$ y $\frac{91}{216}$, respectivamente.

Con la expresión $n \cdot p = \frac{1}{2}$, se producirá igual chance de tener éxito o de fracasar. Entonces, el número de intentos $'n'$ en el que se podría llegar a tener igual chance seria:

$$\boldsymbol{n = \frac{1}{2p}} \qquad (1)$$

Cardano realizaba ajuste a sus cálculos por lo que el segundo resultado, 11 casos posibles de 36, le parecía una aproximación del $\frac{12}{36}$, que obtenía en sus cálculos.

También había notado que la generalización de su método para más de 6 lanzamientos sobrepasaría al suceso seguro Cardano advierte esta incoherencia pero no logra explicarla, a falta de argumentos teóricos para interpretar esta contradicción.

La dificultad de Cardano es que confunde la independencia de cada lanzamiento particular con la probabilidad de obtener el valor $\frac{1}{2}$ al menos una vez en un número determinado de lanzamientos. Es decir, Cardano no es consciente que los lanzamientos son independientes entre si y que si en el primer lanzamiento apareció 1 el hecho que salga 1 o cualquier otro número del dado es independiente del resultado en el segundo o tercer lanzamiento.

De este manera los obstáculos de Cardano se relacionan con no considerar la independencia de los sucesos en estos juegos, lo que lo lleva a formular el principio de la ganancia media como una propiedad del juego, De Mora (1981), resultado que lo conduce a tratar las probabilidades como la media o esperanza de una variable aleatoria de tipo binomial, con probabilidad de éxito igual a $\frac{1}{6}$ y con n igual al número de lanzamientos, él convierte dicha media, en probabilidad. Ese es su error, (Santos y Camuñez 2007, p. 46).

Cardano concibe que, en el juego la probabilidad está relacionada a la fortuna, es decir al azar, al analizar el juego con dos dados, él concluye que "…si no se obtiene la igualdad en este número de lanzamientos esto se deberá a la fortuna".

Hasta ese momento la probabilidad no estaba asociada a la incertidumbre, y particularmente en sus análisis deja traslucir un pensamiento determinista, puesto que deduce: "Por tanto se pactará con seguridad de acuerdo con esta propiedad, si el dado es justo, y tanto más o menos cuanto más difiera de la verdadera igualdad", (Santos y Camuñez, 2007, p. 126).

Cardano consideraba que sus análisis contribuían verdaderamente para comprender el fenómeno del juego, pero el aporte para su práctica, apenas en muy poco.

1.1.3.2 Pierre de Fermat (1601 - 1665) y Blaise Pascal (1623 - 1662).

Un siglo más tarde se produce el intercambio de correspondencia entre Fermat y Pascal, la que contenía reflexiones sobre los problemas formulados por el caballero de Méré. El primer problema propuesto a Pascal fue: Al lanzar dos dados, ¿cuántos lanzamientos son necesarios para apostar con ventaja a conseguir un "doble seis"?

Caballero de Méré tenía dos respuestas a este problema, 24 y 25 lanzamientos. La segunda respuesta la fundamentaba en la experiencia y para la primera su razonamiento era proporcional ya que, (Santos y Camuñez., p. 43) sabía que con 4 lanzamientos de un dado tenia, ventaja al apostar a cualquier número, en especial al 6. De esta manera realizaba un cálculo aritmético basado en la proporción. De este modo obtiene n = 24, argumentando que "si con 4 lanzamientos de un solo dado hay ventajas a mi favor, ¿por qué no con 24 lanzamiento con dos dados?”. De Méré razona de manera proporcional: 4 es a 6 como 24 es a 36 y concluye que con 24 lanzamientos tiene ventaja frente a su oponente al apostar al doble 6, (Santos y Camuñez, p. 44).

Sáenz (1997) sostiene que el razonamiento de De Méré se basó quizá en un conflicto teórico entre una enumeración directa del conjunto de sucesos posibles y la regla de Laplace. Esta regla produce soluciones correctas si es aplicada a sucesos favorables que son elementos simples del espacio muestral. Pero en los juegos anteriores se aplica la regla a series de 4 (de 6) o 24 (de 36) ensayos como casos favorables los cuales no son, elementos del mismo espacio muestral (p. 96).

En la carta que Pascal envió a Fermat, fechada el 29 de julio de 1654, le notifica que “no tengo tiempo de enviarle la solución al problema que ha confundido al señor de Méré, pero usted lo verá fácilmente por los principios (combinatorios) que tiene”,Saenz (1997).

El segundo problema consiste en dividir con justicia el monto de una apuesta si un juego finalizaba antes de lo previsto.

Considérese la siguiente formulación del problema: ‘A’ y ‘B’ realizan una apuesta, a ‘A’ le falta solo un juego para ganar y a B le faltan dos juegos. ¿Cuál es la manera más justa de repartirse la apuesta?

Pascal y Fermat (S XVII) razonaron considerando los juegos futuros de cada jugador, en el escenario que el juego terminaría, y fuera favorable a cada uno de ellos en forma independiente.

Pascal razona de manera analítica, primero defiendo una regla de interrupción del juego y en coherencia con ella propone dos principios y dos corolarios.

Regla de interrupción del juego.

Para entender la regla de los repartos hay que considerar que los jugadores renuncian a la propiedad de lo que se apuesta y en recompensa reciben el derecho a esperar lo que el azar les pueda brindar, de acuerdo a lo que hayan convenido previamente.

Cuando de común acuerdo los jugadores deciden interrumpir el juego, en cualquier estado que este se encuentre, cada contrincante renuncia a lo que esperaba del azar y cada uno recupera la propiedad de algo.

Bajo la ley de interrupción del juego, es justo que cada jugador acepte lo que se le asigna, de acuerdo a una relación proporcionada por lo que tenían derecho a esperar de la fortuna o a continuar la aventura del juego: y esta justa distribución se llama el reparto" ("le parti", en francés), DeGroot, M.H., 1970, citado en Santos, Camuñez, Domínguez (2002, p. 26).

En la regla de los repartos Pascal propone que al apostar los jugadores renuncian a la propiedad de la apuesta que han colocado en el juego, o sea lo que cada uno ha colocado ya no les pertenece.

Por ejemplo, al comprar un boleto de lotería el dinero ya no es del jugador, pero la recompensa que este recibe es el derecho a esperar lo que el azar (la suerte) le pueda dar, de acuerdo a las reglas de la lotería.

A continuación, Pascal, formula dos principios:

Primer principio.

Si para uno de los jugadores (J) se aplica la regla que para cualquier cosa que ocurra en el juego, una cierta suma ($) le debe pertenecer en caso de perder, ganar o no jugar, sin que el azar le pueda arrebatar esta suma, entonces él no debe hacer reparto alguno, sino que debe tomarla entera como segura ya que el reparto debe ser proporcional al azar y como el azar de perder es nulo, debe retirar todo sin reparto.

En este principio Pascal propone que si J juega con la regla que si pierde, gana o no juega, una suma $ le pertenece, J debe tomar $ sin necesidad de hacer reparto puesto que hay una ganancia segura.

Segundo principio.

Si dos jugadores se encuentran en tal condición que, si el uno gana, le pertenecerá una cierta suma, y si pierde, le pertenecerá al otro, si el juego es de puro azar en el que hay tanto azar para el uno como para el otro y por consecuencia no hay más razón de ganar para el uno que para el otro, si quieren separarse sin jugar, y tomar lo que les pertenece, el reparto es que dividan la suma que está en juego por la mitad, y que cada uno coja la suya.

En este principio la palabra legítimamente esta utilizada en el sentido del derecho. Esta igualdad de condiciones conduce al campo de la justicia como instrumento de resolución del problema.
Estos principios determinan dos corolarios:

Corolario 1

Si dos jugadores juegan a un juego de puro azar, con la condición de que si el primero gana, le corresponderá una cierta suma, y si pierde, le corresponderá una menor; si ellos quieren separarse sin jugar, y tomar cada uno lo que les pertenece, el reparto es que el primero coja lo que le correspondería en caso de perder, y además la mitad del exceso, el cual es lo que sobrepasa lo que le correspondería en caso de ganar de lo que le correspondería en caso de pérdida.

El exceso a que se refiere Pascal corresponde a la diferencia entre lo que le correspondería en caso de ganar y lo que le correspondería en caso de perder.

Si $\boldsymbol{a}$ es lo apostado y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el exceso. Sea $\boldsymbol{x}$ lo que correspondería ganar, entonces $\boldsymbol{a-x}$ es la expresión que correspondería perder. Donde: $\boldsymbol{0<x<a}$ y $\boldsymbol{\varepsilon>0}$.

El exceso $\boldsymbol{\varepsilon}$ se representa por: $\boldsymbol{\varepsilon = x-(a-x)}$; entonces:

$$\boldsymbol{\varepsilon = 2x - a}. \qquad (2)$$

De acuerdo a este corolario Pascal plantea que los repartos serían $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x+\varepsilon}$

Así al jugador $\boldsymbol{A}$ le correspondería $\boldsymbol{x+\varepsilon}$ si gana la apuesta y $\boldsymbol{x}$ si la pierde, según estas condiciones. En cualquiera de los casos, A recupera parte de su apuesta.

Para el exceso $\boldsymbol{\varepsilon}$, Pascal propone que es la cantidad que se arriesga, en el sentido de ganar $\boldsymbol{\varepsilon}$ o ganar 0. Ahora Pascal aplica sus principios.

Por el primer principio a $\boldsymbol{A}$ le corresponde $\boldsymbol{x}$, en caso de ganar o perder mientras que por el segundo principio $\boldsymbol{A}$ debe llevarse además la mitad de $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Así, si $\boldsymbol{A}$ gana debe llevarse $\boldsymbol{x+\frac{\varepsilon}{2}}$ (3)

Corolario 2.

Si dos jugadores están en la misma condición que acabamos de decir, yo digo que el reparto se puede hacer de esta manera que viene a ser lo mismo: que se junten las dos sumas de ganancia y pérdida y que el primero tome la mitad de esta suma. Pues la mitad de la suma de dos números es siempre la misma que el menor, más la mitad de su diferencia.

En este corolario Pascal plantea que da lo mismo repartir:

$$\frac{x+x+\frac{\varepsilon}{2}}{2} \quad \text{que} \quad x+\frac{x+\frac{\varepsilon}{2}-x}{2}$$

En ambos casos se obtiene $\quad \boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{4}}$ (4)

División de la apuesta por Pascal.

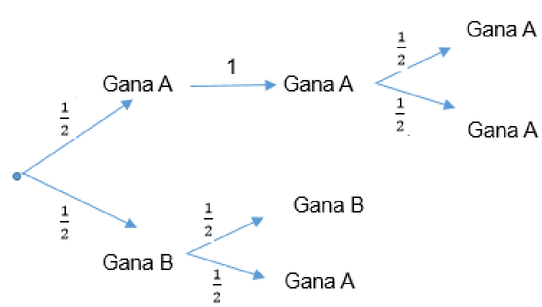
Así aplicando estas reglas al problema de la división de la apuesta, formulado como: ‘A’ y ‘B’ realizan una apuesta, a ‘A’ le falta solo un juego para ganar y a B le faltan dos juegos. ¿Cuál es la manera más justa de repartirse la apuesta?

Pascal afirma que si A pierde en el primer lanzamiento entonces estaría empatado con B y así para ambos, como *el azar no les puede arrebatar nada,* recuperarían su parte de lo apostado, según el primer principio.

Si decidieran no jugar el punto que falta, el juego quedaría en tal estado que, aplicando el segundo principio ‘A’, podría argumentar “tengo segura mi parte de la apuesta, pues incluso si pierdo el punto, la recibiré (Principio 1). Lo que resta de la apuesta tal vez la gane tal vez no, el riesgo es el mismo. Por lo tanto dividamos (sin jugar) esa parte por la mitad (Principio 2) y además dadme la parte de mi apuesta que tengo segura (Corolario 1),”. Pascal decide el reparto diciendo que este se hará en la razón 3 es a 1.

Los juegos futuros de A y B están diagramados en el árbol siguiente:

Figura 2. Diagrama de árbol, la apuesta interrumpida.



El cálculo aritmético siguiente lo constata:

Sean $P(A)\ y\ P(B)$ las probabilidades de ganar de los jugadores A y B. De acuerdo al diagrama de árbol se tiene:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$$

El diagrama de árbol también grafica las tres oportunidades de ganar de A frente a una de B.

Fermat resuelve el problema del reparto mediante un razonamiento combinatorio, el que refina por la amplia correspondencia con Pascal y sus inquisidoras objeciones.

Fermat resuelve el problema, planteando a Pascal que a ‘A’ le faltan dos lanzamientos y a ‘B’ tres para que el juego concluya. A continuación, él afirma que “el vencedor absoluto quedará decidido como máximo en cuatro juegos más”, (Fernández, 2006, p. 102).
Fermat determina las combinaciones que harían ganar a A y también a B para dividir la apuesta en esta proporción. El cuadro combinatorio que Fermat utiliza es el siguiente:

Figura 3. Cuadro combinatorio de Fermat

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

Fuente: Garcia, J. 2000.

Fermat explica, con este cuadro, que las columnas representan las 16 combinaciones que resultan al terminar el juego en las 4 partidas, considerando que a A le faltan dos juegos y a B tres juegos para ganar. Por ejemplo la combinación (a, b, b, b) indica que A gano la primera partida y luego B gano las restantes, por lo tanto el reparto consiste en una parte para A y tres para B.

Al final de la tabla aparecen 1 y 2 de acuerdo a si en la combinación se da ganador a A o a B respectivamente.

Así, de acuerdo a la figura 2, B gana en 5 de las 16 combinaciones y A gana en las 11 restantes, por lo tanto para las condiciones que propone Fermat, el reparto de la apuesta debería realizarse en $\frac{11}{16}$ para A y $\frac{5}{16}$ para B.

Si se aplica este razonamiento al problema de los puntos planteado por De Méré a Pascal, habría que decir que el juego quedará decidido en a lo más dos juegos y la tabla combinatoria sería como la siguiente:

a	a	b	b
a	b	a	b
1	1	1	2

Con lo cual se tiene, razonando como Fermat que el reparto se debería hacer en la razón 3 es a 1, como concluyo Pascal.

Paralelamente al desarrollo del cuerpo teórico del cálculo de probabilidad como aritmética del azar, surgían distintas concepciones de la probabilidad como conglomerados indistinguibles de cuantificación matemática de lo incierto con la idea filosófica de lo probable de la Grecia clásica.

Desde esta perspectiva, “lo probable se entendía como todo aquello que siendo contingente parecía ser aprobado por todos, o por una mayoría, o se constituía en la opinión autorizada de los más sabios”, (Martin, 2002, p. 76).

Durante los siglos XVI y XVII las preocupaciones de la teología moral se relacionaron con saber cómo obrar con justicia frente a la debilidad moral de los hombres, en situaciones en las que el conocimiento de la ley era insuficiente. Durante este período, la probabilidad se consideró como un atributo de opinión frente a la conducta moral y ética de los hombres, relacionados con, por ejemplo, contratos de distinta naturaleza, interpretación de leyes civiles entre otros.

La noción de lo probable se aplica a lo cotidiano y frente a ellas surgieron dos corrientes filosóficas: una de ellas es la de los Probabilioristas y Jansenistas y la otra de los Probabilistas.

Los jansenistas se caracterizaron por ser defensores de la aplicación de principios generales que bien se utilizaban para problemas de distinta naturaleza, entre ellos los de carácter moral. Los teólogos moralistas (casuistas) aplicaron el probabilismo moral para analizar y solucionar un conjunto de problemas morales.

Bartolomé de Molina, fundador del probabilismo moral, reconoce que el juicio práctico de la justa razón, será un juicio de probabilidad, el que podrá estar más o menos cerca de la verdad y se moverá generalmente en la zona de probabilidad.

La raíz filosófica del probabilismo esa inspirada en que el conocimiento de la ley natural no es un conocimiento científico ni de la fe, sino un conocimiento de la opinión. La aplicación de la ley natural no conduce a conclusiones ciertas sino a proponer opiniones probables frente a situaciones de incertidumbre.

El criterio adoptado por el probabilismo, que Medina destaca en su obra “Expositio in Priman Secundae de Tomás de Aquino”, publicada en 1578, establece que “Si una opinión es probable (en el sentido aristotélico de aprobable) es lícito seguirla, aunque la opuesta sea más probable”.

Este principio suscitó gran polémica en los miembros de la Escuela de Salamanca, de donde provenían los padres Vázquez, Suárez, Lumbier, quienes adoptaron posiciones más rigurosas o bien más laxas, según si se aceptaba o no una opinión probable frente a otra que fuera aún más probable.

Esto último, también impulsó el desarrollo del rigorismo acentuado de los jansenistas, quienes se oponían a la superficialidad con la que, suponían, se resolvían los asuntos morales.

La defensa del rigorismo jansenista se plasma en Cartas Provinciales, manuscrito cuyos últimos capítulos se atribuyen a Blaise Pascal y en los que se trata, e incluso se introduce por primera vez, la palabra probabilidad para designar a ésta en su acepción estadística. En Cartas Provinciales aparece con cierta nitidez la noción de probabilidad epistemológica, que recoge parte de lo aportado por los autores españoles probabilistas, quienes plantean que la probabilidad admite grados (de certidumbre) y que además puede aceptarse la probabilidad subjetiva propuesta por cada persona, (Santos, 2002, p.71).

En la teoría de la probabilidad, se distingue su conceptualización de su cálculo. Santos del Cerro, sostiene que la noción de probabilidad en la teoría de probabilidad, representa una asimilación conceptual y analítica de la tradición filosófica aristotélica y principalmente de la doctrina del probabilismo moral, también señala una conexión con las reglas sistemáticas, matemáticas, creadas por las Pascal y Fermat en la polémica entre jansenistas y probabilistas, en la segunda mitad del S XVII, las que dieron lugar al cálculo de probabilidades.

Baudin, citado en Santos del Cerro (2002, p.112), señala que, para Pascal, la probabilidad "es una aproximación a la verdad que, en ausencia de la verdad demostrada, la razón no debe despreciar. A él le parece razonable, es decir conforme a la razón y exigido por esta, reconocer lo probable y apreciar su valor, utilizarlo para todos los fines del conocimiento y de la acción".

La conexión del cálculo de azares con la concepción filosófica y teológica de la probabilidad fue la Lógica desarrollada en el convento de Port Royal, de orientación jansenista. En este tratado se clasifican en internas y externas, las circunstancias que rodean a los sucesos humanos y contingentes, para evaluar el grado de certeza sobre la licitud o ilicitud de la aplicación de ciertas leyes para resolver estos casos. Las circunstancias internas, pertenecen al caso mismo y las externas se refieren a las personas, en virtud de cuyo testimonio nos inclinamos a creerlo.

Esta clasificación coincide con lo que los doctores españoles habían llamado factores intrínsecos y extrínsecos, al respecto Medina puntualiza que la autoridad de los sabios, aduciendo a razones de peso validas, puede hacer que una opinión sea considerada probable.

Se produce, entonces, una analogía en la estructura de razonamiento y análisis conceptual que se encuentra en la doctrina moral del probabilismo y en los principios de la Lógica de Port Royal, la que influiría en los desarrollos ofrecidos por Pascal en la resolución de los problemas planteados por Caballero de More.

Por otra parte, en la teología moral, la probabilidad tiene sentido cuantitativo, al exigir valorar el grado de probabilidad de distintas opiniones, relacionadas con acciones morales, en las que era necesario determinar su licitud o ilicitud. Es decir, ponderar la autoridad de los expertos. Al respecto Caramuel, teólogo español, publica un tratado titulado "Apologema pro antiquissima et universalissima doctrina de probabilitate" (1670) en el que defiende las ideas probabilistas, cuantifica la autoridad de los expertos: un profesor que ocupase una catedra distinguida, prevalecía sobre 4 profesores de menor rango, Jonsen y Toulmin, citado en Santos del Cerro (2002, p. 114).

A Pascal y a Fermat se debe la creación de lo que el primero denominó “geometría del azar”, ambos propondrán métodos propios, es decir reglas de actuación, para resolver un problema de decisión ante una situación de incertidumbre.

El esquema de análisis utilizado por Pascal para resolver juegos de azar, lo aplicara al proponer la Apuesta sobre la existencia de Dios, un problema que contiene incertidumbre por parte del conocimiento humano, tal como los juegos de azar, es decir un género de problemas que los doctores españoles resolvieron creando una doctrina moral, denominada probabilismo.

La concepción jansenista de la probabilidad, también influyó en los conceptos seminales del Cálculo de Probabilidades, Bernoulli lo reconoce de manera explícita en la cuarta parte de “Ars Conjectandi”.

Algunas de estas ideas, Bernoulli las expresan como sigue:

> El conocimiento que un individuo en un momento dado tiene a su disposición es, a veces, insuficiente para obtener “certeza” acerca de la ocurrencia o no ocurrencia de un posible suceso.
> Sobre esta base el individuo puede obtener solamente “un grado de confianza” definido, que es a la certeza como un subconjunto es al conjunto total, y que es llamado “probabilidad”. Este grado de confianza o probabilidad depende del conocimiento que el individuo tiene a su disposición y, por tanto, puede variar de unos individuos a otros, (Mateos – Morales,1985, p. 157).

1.1.3.3 Christian Huygens (1629-1695).

Christian Huygens fue un científico holandés, se traslada a París con objeto de obtener su doctorado en leyes en la Universidad Protestante de Angers (1655) a la edad de 26 años. Allí tuvo conocimiento de la correspondencia entre Fermat y Pascal con relación a los problemas propuestos y se interesó por los métodos utilizados. A su regreso a Holanda sintetiza las primeras ideas fundamentales sobre el cálculo de la probabilidad, en su obra "De Ratiociniis in Alea Ludo", publicado en 1654. Este tratado es considerado la primera obra científica que procede de manera metódica sobre probabilidad.

Consta de un prefacio, en el cual establece el principio que debe regir lo que él entendía por juego justo y 14 proposiciones. En las tres primeras proposiciones, Huygens introduce el concepto de esperanza matemática para variables aleatorias que toman dos o tres valores y estas constituyen las bases del cálculo de probabilidad.

Él define la esperanza como la ganancia que esperaría obtener si el juego se repitiera muchas veces. En la cuarta, quinta, sexta y séptima proposiciones Hyugens resuelve el problema del reparto de apuestas con dos jugadores, razonando en forma recursiva. En la octava y la novena proposiciones analiza este problema para el caso de tres jugadores. Al final del tratado Hyugens propone cinco problemas sin resolver, cuyas soluciones fueron obtenidas años más tarde por Jacques Bernoulli y recogidas en su obra Ars Conjectandi.

Huygens, más tarde demuestra sus proposiciones utilizando un razonamiento analítico. Para ello considera que juega con un oponente con el que pacta**:** que cada uno apueste $'\boldsymbol{x}'$ y quien gane se llevará todo el premio, pero el que gane le tendrá que dar una pequeña cantidad '$\boldsymbol{a}$' al que pierda. Entonces se tiene la misma probabilidad de ganar '$\boldsymbol{a}$' que '$\boldsymbol{2x - a}$'.

Las primeras tres proposiciones son generales y Huygens las utiliza en la resolución de estos juegos con dados, particularmente en el reparto de la apuesta.

Proposición I: Si puedo obtener igual de fácil '$\boldsymbol{a}$' o '$\boldsymbol{b}$' entonces mi expectatio es

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2}} \qquad (5)$$

Huygens utiliza la palabra expectatio, representada por x, para referirse a lo que espera ganar en el juego.

Demostración: Si $\boldsymbol{x}$ representa la expectatio, como el juego es equitativo, entonces tiene la misma probabilidad de ganar '$\boldsymbol{a}$' que '$\boldsymbol{2x - a}$'' Substituyendo '$\boldsymbol{2x - a}$' por $\boldsymbol{b}$ y despejando $\boldsymbol{x}$ resulta que: $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2}}$.

La expectatio que Huygens construye es la ganancia promedio de un juego justo, en el que se determina, de acuerdo a la proposición 1 que el ganador dará '$\boldsymbol{a}$' al perdedor y se quedara con '$\boldsymbol{b}$'.

Con este mismo método formula la proposición II

Proposición II: Si puedo obtener igual de fácil 'a', 'b' o 'c' entonces mi expectatio es:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{3}} \qquad (6)$$

Proposición III: Si el número de chances para ganar "$\boldsymbol{a}$" es $\boldsymbol{p}$ y el número de chances para ganar "$\boldsymbol{b}$" es $\boldsymbol{q}$, suponiendo chances iguales, el valor esperado de la apuesta, o su expectatio, debería ser igual a $\frac{\boldsymbol{pa+qb}}{\boldsymbol{p+q}}$.

En esta proposición $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ no indican probabilidades.

Demostración:

Sea $\boldsymbol{x}$ el valor de su expectatio. Este valor debe proporcionar la expectativa de un juego justo.

Sean $\boldsymbol{p + q}$ la cantidad de jugadores, incluido Huygens tal que cada uno apuesta $\boldsymbol{x}$, así el total de la apuesta es $\boldsymbol{px + qx}$.

Huygens realiza dos acuerdos con el resto de los jugadores. Acuerda con $\boldsymbol{q}$ jugadores que si cualquiera de ellos gana le dará "$\boldsymbol{b}$" a él y si él gana, dará "$\boldsymbol{b}$" a cada uno de los $\boldsymbol{q}$. Con los $\boldsymbol{p - 1}$ jugadores restantes (se excluye él) acuerda que si cualquiera de ellos gana le dará "$\boldsymbol{a}$" a él y si él gana le dará a cada uno de los $\boldsymbol{p - 1}$, "$\boldsymbol{a}$".

Así, si Huygens gana el juego, lo que le toca es el valor de la apuesta total menos el compromiso de los acuerdos, es decir:

$$\boldsymbol{px + qx - bq - a \cdot (p - 1) = px + qx - bq - ap + a}$$

Pero: $\boldsymbol{px + qx = bq + ap}$; o mejor dicho $\boldsymbol{px + qx - bq - ap = 0}$

Así: $\boldsymbol{px + qx - bq - ap + a = a}$

Y despejando $\boldsymbol{x}$ encontramos:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{ap+bq}}{\boldsymbol{p+q}} \qquad (7)$$

Huygens no calcula probabilidades como tampoco la menciona en sus proposiciones. En su trabajo deriva reglas recursivas para el valor esperado de una situación y desde la perspectiva actual, esta es interpreta con probabilidades.

En la proposición 4 Huygens desarrolla el problema de la división de la apuesta y la demuestra aplicando su método.

Proposición IV: A y B juegan a un juego de azar. Gana el juego el primero, A o B, que logre ganar 3 partidas. Si A ha ganado dos partidas y B solo una, que parte de la apuesta debe cobrar cada uno si deciden no jugar las partidas que restan?

Demostración: Suponga que el juego hubiera continuado. Si $\boldsymbol{A}$ gana la primera partida se acaba el juego y A ganaría el total de la apuesta. Sea ‘$\boldsymbol{a}$’ el total de la apuesta.

Si $\boldsymbol{B}$ gana en la primera partida, entonces las posibilidades de ganar o de perder el juego serán iguales para ambos, a partir de ese mismo momento. Por lo tanto cada uno podrá reclamar el monto de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}$.

En tal estado del juego queda otra partida. Evidentemente $\boldsymbol{A}$ tiene la misma posibilidad de ganar que de perder este lanzamiento. Luego $\boldsymbol{A}$ tiene igual posibilidad de conseguir $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}$ ó $\mathbf{0}$. Así por la proposición **I,** a $\boldsymbol{A}$ le corresponde:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a} + \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a} + \mathbf{0}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{a}$$

Luego a $\boldsymbol{B}$ le corresponde $\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$**,** en García (2000).

Huygens también trabajó en la teoría de decisión, cuando la probabilidad no era concebida aún como un número, sino como un argumento (en pro o en contra) con el fin de sopesar la posibilidad de ocurrencia o validez de tal o cual argumento.

Huygens también realizó observaciones sobre la frecuencia de sucesos específicos, lo que condujo a la posibilidad de considerar a la frecuencia como un argumento.

Las aplicaciones de su trabajo lo llevaron a elaborar tablas de mortalidad y trabajó las frecuencias de la misma manera que la probabilidad. Él contribuyo a desarrollar la idea de probabilidad como un concepto basado en la frecuencia relativa.

En ese tiempo, la probabilidad jugó un rol de concepto elemental no definido, de uso pragmático en los juegos de azar y reducido a la equiposibilidad de los casos.

Ubaldo Nieto, en Mateos y Morales, sostiene:

Aunque sólo sea por la cristalización de las ideas de los matemáticos franceses, este autor ha ganado el derecho a ser considerado como el padre de la teoría de la probabilidad. Después de Huygens el interés de la probabilidad no estuvo solamente centrada en el juego, aunque este continuó durante unos cien años aproximadamente. Su libro fué el primero que se publicó sobre cálculo de probabilidades y ejerció una gran influencia sobre Jacob Bernoulli y De Moivre, por tal razón, con Huygens el cálculo de probabilidades se puede dar por comenzado seriamente.

1.1.3.4 Jacob Bernoulli (1654 – 1705).

Ars Conjectiandi (o el arte de la previsición), es la obra escrita por Jacob Bernoulli (1654 – 1705), en la que formula por primera vez de manera más general el cálculo de probabilidades. Esta obra, publicada en 1713, tras la muerte de su autor es considerada por Gouraud un gran progreso y la sistematización del conocimiento existente. Meusnier destaca una parte de la carta que Bernoulli escribierá a Leibnizt el 3 octubre de 1703: “he terminado ya la mayor parte de un libro pero me falta la parte escencial en la cual muestro como los fundamentos del arte de conjeturar pueden aplicarse a la vida civil, moral y politica”.

El libro se divide en cuatro partes: la segunda es un estudio sobre teoría de combinaciones y permutaciones y la tercera las respectivas aplicaciones a un conjunto de juegos de azar, Santos (2002, p. 42).

En la primera parte, Bernoulli sistematiza la teoría expuesta por Huygens en su “De Ratiociniis in Ludo Alae” y comenta estos resultados. Es precsiamente en estas anotaciones en las que aprace por primera vez la palabra probabilitas. Bernoulli comenta un principio esencial del pensamiento probabilistico, a propósito del problema la división de la apuesta:

Así para calcular las suertes no se debe tener en cuenta los juegos pasados sino solamente los juegos que faltan por jugar; dado que en ninguno de los próximos juegos hay una probabilitas (probabilidad) hacia unos jugadores que hacia otros ….

Considerando la tercera proposición de Huygens, “Si me corresponde ***‘a’*** en ‘***p’*** casos y b casos en ***‘q’*** casos, mi esperanza sera: $\frac{pa+qb}{p+q}$” **,** Bernoulli obtiene un corolario que resulta de hacer $\boldsymbol{b}$ = $\boldsymbol{0}$ en la formula anterior. Su formulación es la siguiente:

Corolario 1*:* "Si me corresponde ***'a'*** en ***'p'*** casos y cero casos en ***'q'*** casos, mi esperanza sera: $\frac{\boldsymbol{pa+qb}}{\boldsymbol{p+q}}$**."**

$$\frac{\boldsymbol{pa}}{\boldsymbol{p+q}}. \qquad (8)$$

Bernoulli consigue genarlizar este corolario encontrando un valor de la esperanza, la que corresponde al calculo de la probabilidad según la regla de Laplace pero no utiliza explicitamente la palabra probabilidad. Él escribe:

Entonces, si alguien pretende lograr alguna cosa en el primer intento, es claro que tiene $\boldsymbol{b}$ casos o bien tiene $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$ casos para lograrlo, es decir para obtener lo depositado (en referencia a lo apostado) – lo que supongamos sea de ahora en adelante igual a $\mathbf{1}$ - y $\boldsymbol{c}$ casos para obtener 0, así según el corolario 1 de la proposición III (de Huygens) su suerte es $\frac{\boldsymbol{a-c}}{\boldsymbol{a}}$.

En esta formulación Bermouilli considera que '$\boldsymbol{a}'$ representa los casos posibles, '$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}'$ los casos favorables y $'\boldsymbol{c}'$ los casos desfavorables (en los que se obtiene 0). Así los casos posibles '$\boldsymbol{a}'$ los divide en dos grupos, los casos favorables $\boldsymbol{b}$ y los desfavorables $\boldsymbol{c}$**.** Es decir $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$**.** A continuación agrega:

Se sabe que la suerte de lo que alcance en el primer intento es $\frac{\boldsymbol{a-c}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$.

Considerando $\boldsymbol{b}$ como los casos favorables y $\boldsymbol{c}$ los desfavorables, determina una de las formulas más notables, las suertes de que un suceso ocurra al menos $\boldsymbol{m}$ veces en $\boldsymbol{n}$ lanzamientos, cuando se conoce la suerte de que ocurra en un lanzamiento sencillo.

La palabra suertes es utilizada en esa época como la fortuna, el azar o la casualidad.

Bernouilli razona de la siguiente: Si la suertes de éxito en un lanzamiento sencillo de un juego es $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$ y la de fracaso es $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$ entonces la suerte en el segundo intento es $\frac{b \cdot c}{a^2}$, en tercero $\frac{\boldsymbol{b \cdot c^2}}{\boldsymbol{a^3}}$, y en el n-ésimo $\frac{\boldsymbol{b \cdot c^{n-1}}}{\boldsymbol{a^n}}$.

Estos resultados provienen del siguiente razonamiento, en lenguaje actual:

La probabilidad de éxito en el primer lanzamiento es $\frac{b}{a}$. Si éxito no ocurriera en el primer lanzamiento y se espera que ocurra en el segundo entonces su probabilidad será la probabilidad de fracaso en el primer lanzamiento y la probabilidad de éxito en el segundo lanzamiento, lo que escribe como:

$$\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{b \cdot c}}{\boldsymbol{a^2}} \qquad (9)$$

Si el éxito no ocurriera ni en el primer lanzamiento ni en el segundo lanzamiento y se espera que ocurra en el tercero entonces su probabilidad será la probabilidad de fracaso en el primer lanzamiento y de fracaso en el segundo lanzamiento y de éxito en el tercer lanzamiento, lo que escribe como:

$$\frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b \cdot c^2}{a^3} \qquad (10)$$

Y así sucesivamente para n lanzamientos.

Estos resultados se conocen en la actualidad como probabilidad de sucesos independientes.

La cuarta parte del “Ars Conjectandi” contiene el famoso teorema de Bernoulli, su formulación es la siguiente:

> …al aumentar las observaciones crece también constantemente la probabilidad de que el número de las observaciones favorables alcance su verdadera relación con respecto al número de las desfavorables, y ello

precisamente hasta el extremo de que dicha probabilidad supere finalmente cualquier grado de certeza… (Wussing y Arnold, 286), citado en Gutiérrez (2013, p. 90)

La demostración de este teorema le llevo a Bernoulli 20 años. Por otra parte Bernoulli sistematiza ideas sobre la probabilidad filosófica y teológica, también la probabilidad aleatoria derivada de los trabajos de Pascal y Fermat. Esta última representa el marco de referencia fundamental de la conceptualización moderna de la probabilidad, Santos (2006).

Bernoulli tiene una concepción epistemológica y subjetiva de la probabilidad heredada de la tradición filosófica y teológica probabilista. Desde este punto de vista, él concibe la probabilidad como aquello sobre lo que no alcanzamos certeza subjetiva absoluta. En Ars conjectandi, parte IV, él afirma: “las probabilidades son estimadas a partir del número y también del peso de los argumentos que de alguna manera prueban o rvelan que alguna cosa es, será o ha sido”, (2006, p.45).

Shafer sostiene que Jacob Bernoulli fue el primero que contribuyó sustancialmente a establecer la relación entre la teoría de los juegos de azar y la probabilidad, la que hasta entonces se ocupaba de cuestiones de teología moral y filosófica. En esta misma línea Shafer afirma que la ley de los grandes números ocupa un sitial importante en esta parte de la obra porque es una de las herramientas por las cuales se determina la facilidad con la que ocurren diferentes casos.

Es decir la tradición del pensamiento filosófico y teológico de Bernoulli no se ocupó del cálculo numérico de la probabilidad, como se enseña hoy en los colegios, sino más bien su trabajo estuvo influenciado por la doctrina probabilista en la que la probabilidad era un atributo de la opinión, un producto del argumento o de la autoridad. Su teoría fue un intento de aplicar a los juegos de azar la probabilidad, manteniendo la idea de una noción basada en los argumentos.

Considerando este enfoque Bernoulli tiene conciencia de que para evaluar una probabilidad es preciso tener en cuenta tanto los argumentos a favor con en contra, lo que actualmente serían los casos favorables y desfavorables del suceso en cuestión.

Años más tarde, de la publicación de Ars Conjectandi, el intelectual holandés Willem Gravesande, quien había hecho contacto con Nicolás Bernoulli, escribe sobre el tema:

“Se puede ver que la probabilidad no se aplica sobre las cosas mismas, sino que sobre el conocimiento que de ellas tenemos; además se la puede considerar como una cantidad que crece desde el más pequeño grado de conocimiento, hasta el pleno convencimiento”.

En estas líneas queda en evidencia el carácter epistemológico de la noción de probabilidad de Gravesande. También plantea que en ciertas ocasiones la probabilidad se fundamenta en las cosas mismas y que tanto en uno como en otro caso, la probabilidad va a estar determinada por la relación entre casos favorables y posibles, manifestándose así claramente la concepción aleatoria de la probabilidad, que desde Jacob Bernoulli predominó sobre la epistemológica posterior al Ars Conjectandi.

Santos del Cerro asegura que el desarrollo posterior de la probabilidad no se entendería sin la clasificación de la probabilidad a priori y a posteriori, sin el teorema de Bernoulli y sin la nueva conceptualización de la probabilidad aleatoria y epistemológica, propia de la filosofía y la teología. Él plantea que muchas de las confusiones y polémicas que han rodeado a este concepto, se explican por su peculiar origen, (2006, p. 53).

1.1.3.5 Abraham de Moivre (1667 – 1754).

Aún cuando nació en Vitry (Champagne) Francia, figura en la escuela de matemáticos ingleses. Fue admitido como miembro en la Royal Society en1697 y en las Academias de Paris y Berlín.

En sus investigaciones sobre el cálculo de probabilidades es reconocido por formular la regla para obtener la probabilidad de un suceso compuesto.

Entre sus obras sobre la teoría de la probabilidad figuran De mensura sorti, Doctrine of Chances y Miscellania analítica, publicada en 1730, antes de la tercera edición de Doctrine of Chances.

La obra más importante de De Moivre fue “Doctrine of chances” publicada en 1718 y considerada como el segundo libro más importante sobre el tema luego de la obra Ars Conjectandi de Jacques Bernoulli.

“Doctrine of chances” contiene 53 problemas, 26 de estos recogidos de su memoria *De mensura sorti.* En ella, De Moivre utiliza el método combinatorio de Fermat para resolver el Problema de los Puntos con tres jugadores. En la segunda edición, publicada en 1738, De Moivre discute algunos casos sencillos de este problema siguiendo el método que utilizó Pascal con dos jugadores y propone una regla para resolver el problema cualquiera que sea el número de jugadores basándose en el método de Fermat, según Mateos y Morales (1985, p. 70).

Otro grupo de problemas se refieren a sencillos problemas de probabilidad mediante los que establece una teoría de permutaciones y combinaciones, la que aplica en la resolución de otros problemas.

En esta misma obra plantea emplear una sola letra en lugar de dos o tres para representar la probabilidad de que un *suceso* ocurra o no. Así si "$\boldsymbol{p}$" es la probabilidad de ocurrencia de un suceso, "$\boldsymbol{1 - p}$" representa la probabilidad de su fracaso; y que si "$\boldsymbol{q}$" y "$\boldsymbol{r}$" representan la probabilidad de otros sucesos entonces:

$$\boldsymbol{p \cdot (1 - q) \cdot (1 - r)} \qquad (11)$$

Corresponde a la probabilidad que el primer suceso ocurra a la vez que el segundo y tercer suceso no ocurran. Esta notación representa un avance importante en los cálculos para determinar las probabilidades.

En síntesis De Moivre es reconocido por desarrollar una teoría de permutaciones y combinaciones que utiliza para resolver problemas emblemáticos planteados por sus antecesores, además amplía la formulación de estos problemas extendiéndolos al caso de tres o más jugadores con distinta habilidad para ganar, es decir distinta probabilidad. Otra de sus contribuciones se presenta en el ámbito de la simbolización, representando con una sola letra la probabilidad de ocurrencia o de fracaso de un suceso, aspecto que por sí solo constituye un salto de abstracción. Por ello es reconocido como el gran perfeccionador de esta teoría.

1.1.3.6 Pierre Simon Laplace (Francia 1749 – 1827).

Matemático y astrónomo francés es otro de los personajes que se destaca en la avolución de la teoría de la probabilidad.
Su obra, Teoría analítica de las probabilidades (Théorie Analytique des Probabilités) se publicó por primera vez en París en el año 1812, la segunda edición ocurrió en 1814 y en el año 1820 se publica la tercera edición en la que Laplace incorpora "Ensayo Filosófico de la probabilidad", dedicado al uso del cálculo de las probabilidades a las ciencias morales: el derecho y la política. Esta obra es una de las más reconocidas de Laplace y constituye una recopilación de sus numerosas memorias sobre el estudio de este tema.

En esta obra, Laplace afirma que "La probabilidad se vincula en parte con nuestra ignorancia y en parte con nuestro saber" y establece que "La teoría del azar consiste en llevar todos los acontecimientos semejantes a una cierta cantidad de casos igualmente posibles, es decir, que nos despierten la misma duda sobre su existencia y en establecer el número de casos favorables al hecho cuya probabilidad se persigue. La relación de este número con el de todos los casos posibles da la medida de esa probabilidad que no consiste más que en una fracción cuyo numerador es el número de los casos favorables y el denominador el de los casos probables".

A continuación propone un conjunto de principios para el cálculo de probabilidades, que aplica a situaciones de juegos de azar para ejemplificar la regla. Al respecto solo comentaremos los que interesan al propósito del presente estudio.

Primer principio es la definición de probabilidad como razón entre el número de casos favorables y casos posibles.

Segundo principio supone que todos los casos diversos son igualmente posibles y de no serlo la probabilidad se establecerá mediante la suma de las probabilidades de cada caso favorable.

Tercer principio enuncia que la probabilidad de sucesos independientes es el producto de las probabilidades de cada suceso.
Generaliza este principio formulando la regla: “La probabilidad de que en idénticas circunstancias un hecho simple ocurra un determinado número $\boldsymbol{n}$ de veces, es igual a la potencia $\boldsymbol{n}$ **-** ésima de la probabilidad de este hecho simple.

Cuarto principio es el de la probabilidad condicional, el que formula como: Si dos acontecimientos dependen el uno del otro, la probabilidad del acontecimiento compuesto es el producto de la probabilidad del primero por la probabilidad de que si ocurre este acontecimiento, ocurrirá el otro.

Este principio lo ejemplifica suponiendo la existencia de tres urnas A, B y C, de las cuales dos solo contienen bolitas blancas y otra urna solo contiene bolitas negras, La probabilidad de extraer una bola blanca de C es 2/3, pues de las tres urnas, solo dos contienen bolitas blancas. Pero si se ha sacado una bolita blanca de la urna C, la incertidumbre con respecto a dicha urna sólo alcanza a A y a B, la probabilidad de sacar una bolilla blanca de B es $\frac{1}{2}$; el producto de $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{2}$ o sea $\frac{1}{3}$ es la posibilidad de obtener simultáneamente dos bolitas blancas de B y C. En efecto, para ello es necesario que A sea de las tres urnas la que contenga bolitas negras y su probabilidad es, indudablemente $\frac{1}{3}$.
En “Memoire sur les suites récurrent et sur les usages dans la théorie des hasards”, Laplace resuelve tres problemas, de los cuales el llamado la Duración del Juego había sido tratado anteriormente por De Moivre y Montmort. Laplace lo plantea para el caso de dos jugadores con igual habilidad e igual capital.

Luego lo plantea para un caso particular en el que cada jugador aplica distinta habilidad pero manteniendo la condición de capitales iguales para ambos jugadores. También resuelve el antiguo Problema de los Puntos, de Pascal y Fermat.

En 1776 publica “Recherches sur l’intégration des Équations différentielles aux différences finies, et sur leur usages dans la théorie des hasards” en la que realiza observaciones generales a los problemas tratados en su primera memoria. En esta nueva publicación vuelve a abordar los problemas de su primera memoria utilizando diferentes métodos y discutiendo el problema de la duración del juego para jugadores con capitales iguales y también con capitales distintos, pero no se plantea la posibilidad de habilidades diferentes para los jugadores.

A modo de cierre se puede apreciar que las preocupaciones de los jugadores de la época no plantearon problemas de probabilidades a los sabios (Pascal, Fermat y otros), en el sentido formal, sino que estas eran más prácticas y concretas por ejemplo, en cuantos lanzamientos debían esperar la aparición del doble 6, para pactar la apuesta, al lanzar dos dados.

Claramente esta esperanza está estrechamente relacionada con la probabilidad de ganar el juego, sin embargo, los problemas no son planteados en términos de probabilidades sino en términos de esperanza matemática.

Entonces ¿Por qué no plantear en estos términos, los problemas de la enseñanza?

Por otra parte, el estudio epistemológico permitió identificar los tipos de conocimientos que obstaculizaron la construcción de este concepto, (Barrantes, 2006) y su relación con las dificultades que se observan, en los alumnos, para la adquisición de ciertas nociones matemática. Así las creencias sobre el cálculo de la ocurrencia de un suceso con el objeto de valorar de antemano las posibles pérdidas o ganancias en un juego de azar, pueden reaparecer en distintas generaciones, sobre todo en niños y jóvenes en edad escolar.

Por otra parte, el extraordinario desarrollo, matemático y formal que dio lugar al cálculo de probabilidades, desde los siglos XVII al XX, ha logrado ensombrecer al concepto mismo de probabilidad, generando confusión sobre el origen de la conceptualización de esta noción y los aportes al contenido conceptual y analítico de la moderna noción de probabilidad proporcionado por la doctrina moral del probabilismo, desarrollada por algunos doctores escolásticos españoles de los siglos XVI y XVII. Particularmente la concepción axiomática de la probabilidad atribuida al matemático ruso Kolmogorov, ha contribuido a acentuar esta confusión.

No obstante, y al parecer en la práctica cotidiana, el concepto de probabilidad, aún mantiene el carácter epistemológico de los desarrollos de los doctores españoles y su tratamiento matemático a través de teoremas y proposiciones, ha llegado a alcanzar un desarrollo tan complejo y sofisticado que se tiende a confundir la esencia del concepto de probabilidad con su medida y tratamiento formal.

Entonces se pueden distinguir dos tipos de probabilidad, la probabilidad aleatoria y la epistemológica.

La primera se aplica en juegos de azar y otras situaciones parecidas, seguros, rentas y pensiones y otras. Especialmente en los juegos de azar, las cualidades de uniformidad y simetría, establecen una hipótesis de equiposibilidad de resultados elementales, que define la probabilidad de un suceso particular como el cociente entre casos favorables y posibles del juego, lo que da curso a la Ley de Laplace.

La probabilidad epistemológica se refiere al grado de veracidad que concibe el entendimiento humano ante un juicio o una proposición, semejantes a las que surgen en la Teología Moral, sobre la licitud o ilicitud de la aplicación de ciertas leyes a determinadas situaciones o casos particulares, de esta naturaleza. Por lo tanto, la probabilidad epistemológica, opera aplicando ciertas leyes o principios probables, a situaciones concretas, en las que en general no es posible establecer una enumeración de posibilidades ni mucho menos afirmar la igualdad de posibilidades.

Se sintetizan las principales aportaciones de los personales considerados.

Tabla 1 Contribuciones al desarrollo de la probabilidad

Personaje	Contribución
Girolamo Cardano 1501 - 1576	Formula el principio de la ganacia media, como una propiedad del juego, utilizando la esperanza matemàtica como probabilidad, lo que lo conduce a errores. No considera la independencia entre sucesos. Aconseja a los jugadores, exigir el principio de igualdad de condiciones y tener en cuenta los casos posibles de la partidas.
Blaise Pascal	Propone reglas (de interrupción del juego), principios y corolarios y los aplica, mediante un razonamiento analìtico, para resolver los problemas planteados. En Cartas Provinciales, plantea que la probabilidad admite grados (de certidumbre) y que además puede aceptarse la probabilidad subjetiva propuesta por cada persona.
Pierre de Fermat	Utiliza un razonamiento combinatorio, para lo cual elabora tablas con columas, las que representan las diferentes combinaciones que resultan para resolver el problema propuesto.
Jacques Bernouilli	Escribe Ars Conjectiandi (1773),obra en la que se genralizan las ideas del cálculo de Probabilidad. Plantea el teorema de

1654 - 1705	Bernoulli, cuya demostración le llevo 20 años, sistematiza ideas sobre la probabilidad filosófica y teológica, también la probabilidad aleatoria derivada de los trabajos de Pascal y Fermat.
Christian Hyugens 1629 -1695	Hyugens expone (1654) las primeras ideas sintéticas sobre el cálculo de la probabilidad, en “De Ratiociniis in Alea Ludo”, con el enfoque de la esperanza matemática.
Abraham De Moivre 1667 - 1754	Reconocido como ‘Gran Perfeccionador’ de este tema, desarrolla una teoría de permutaciones y combinaciones, que aplica al resolver problemas. Formula la regla para la probabilidad de un suceso compuesto. Representa con un mismo símbolo, la probabilidad de un suceso y el de su complementario.
Pierre de Laplace 1749 - 1827	Contribuye a formalizar la teoría clásica de la probabilidad, en Théorie Analytique des Probabilités, enunciando un conjunto de principios para el cálculo de probabilidades, que aplica a situaciones de juegos de azar para ejemplificar la regla.

1.2 Análisis Curricular del Objeto de Enseñanza Probabilidad

1.2.1 La Enseñanza de la probabilidad en educación básica en 5 currículos internacionales

Este estudio propone comparar las decisiones curriculares para abordar la enseñanza de la probabilidad adoptadas por cuatro países latinoamericanos, con la propuesta chilena. El estudio es descriptivo y pretende indagar si existe una transferencia de los aprendizajes formales a problemas del mundo real y viceversa de los alumnos entre 10 a 14 años de escuela.

Los currículos considerados son los que corresponden a los países de Argentina, Colombia, México y Uruguay,. Ellos han sido seleccionados debido a que en estos países se han iniciado reformas educacionales y además cuentan con equipos de investigadores en educación matemática cuyos aportes se han visto progresivamente reflejados en los cambios que ha tenido la educación matemática en estos últimos 15 años.

El análisis realizado considera el contenido matemático, los aprendizajes esperados que especifican las habilidades a desarrollar, los propósitos y las orientaciones didácticas.

1.2.1.1 El currículo de probabilidad en Argentina.

La educación escolar en Argentina, se divide en cuatro niveles, uno de ellos es el nivel de Educación Primaria, el que comienza a partir de los seis años y tiene una duración de seis o siete años, dependiendo de cada jurisdicción. El siguiente nivel es el de Educación Secundaria, el que está dividido en dos ciclos: un ciclo básico de dos o tres cursos de carácter comunes a todas las orientaciones y un ciclo orientado de tres cursos en el que se pueden elegir distintas modalidades según el camino que quiera seguir el alumno.

El currículo de matemática argentino se estructura en áreas de pensamiento matemático denominadas ejes, uno de ellos es el eje “Estadística y Probabilidad”, cuyo objetivo es que los alumnos sean capaces de “Recurrir a nociones de probabilidad para cuantificar la incertidumbre”, Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Educación Secundaria - Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba
http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL003226.pdf, 18 de febrero 2018.

En este país el estudio de la probabilidad comienza en el primer grado de la educación secundaria, cuando los alumnos tienen aproximadamente 12 años.

Comparativamente hablando, en el sistema educativo chileno los alumnos cursan el 7º básico. En este estudio, se considerarán los grados del currículo argentino que sean equivalentes, en cuanto al contenido tratado, con los niveles de 5º a 8º básico de la enseñanza formal chilena.

Para el currículo argentino la noción de probabilidad en la escuela cobra sentido en situaciones de enseñanza que promuevan en los alumnos y alumnas “El reconocimiento y el modo de cuantificar la incertidumbre en situaciones problemáticas que lo requieran”, Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Tercer Ciclo EGB/Nivel Medio,
http://www.me.gov.ar/curriform/publica/nap/nap3matem.pdf.

Así para el primer grado de la enseñanza básica secundaria se espera que los alumnos de 12 o 13 años logren:

- Comparar probabilidades de diferentes sucesos, incluyendo seguros e imposibles, para espacios muéstrales finitos”.

Al parecer, este objetivo pretende establecer diferencias entre lo predecible y lo impredecible, lo que en Chile se propone para niños de 10 años en contextos cotidianos y de espacio muestral finito.

En el segundo grado se espera que los alumnos, de 13 o 14 años logren:

- Determinar la frecuencia relativa de un suceso mediante experimentación real o simulada y la comparan con la probabilidad teórica.
- Comparar las probabilidades de diferentes sucesos incluyendo casos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas

Los objetivos de este grado proponen relacionar los significados frecuencial y clásico de la probabilidad.

En el tercer grado se espera que los alumnos, de 14 o 15 años logren:

- Explorar, producir y utilizar fórmulas sencillas de combinatoria para calcular probabilidades.

El cuarto, quinto y sexto grado de la educación secundaria argentina, se denomina ciclo orientado y el propósito de enseñanza de la probabilidad y estadística es vincularse con la toma de decisiones, analizando situaciones extra matemáticas tales como las vinculadas a los juegos de azar.

En estos niveles los alumnos tienen entre 15 y 17 o 18 años, respectivamente.

Este ciclo plantea que los alumnos logren:

- Interpretar y aplicar conceptos y procedimientos básicos de la estadística y la probabilidad, reconociendo los alcances y limitaciones de sus usos en la toma de decisiones de acuerdo a la situación planteada.

Los contenidos seleccionados en los distintos niveles de este ciclo se ponen en juego en actividades de “análisis de situaciones de probabilidad y el conveniente uso de fórmulas”, así en el primer grado del ciclo orientado los objetivos que se proponen son:

- Analizar la posibilidad de recurrir a la fórmula de Laplace para determinar la probabilidad de un suceso en la situación que se está abordando y, en caso de no ser posible, acudir a su determinación empírica.
- Determinar la probabilidad de sucesos en contextos variados apelando a fórmulas para el conteo de los casos favorables y los casos posibles, si es conveniente.

Aquí el foco está puesto en el significado clásico de la probabilidad y en los métodos de conteo para obtener los resultados posibles y favorables al suceso.

En segundo grado:

- Caracterizar diferentes sucesos (excluyentes, no excluyentes, independientes, dependientes), y seleccionar la estrategia más pertinente para determinar sus probabilidades.
- Analizar fenómenos para calcular probabilidades condicionadas, teniendo en cuenta las características de los sucesos que intervienen.

En tercer grado:

- Evaluar la probabilidad de un suceso para la toma de decisiones al analizar el funcionamiento de situaciones extra matemáticos.

En el segundo y tercer grado del ciclo orientado el foco de le enseñanza esta puesto en el significado axiomático de la probabilidad.

La enseñanza de la probabilidad en Argentina desarrolla, en el nivel de secundaría (desde los 13 a 18 años) significados clásico, frecuencial, y axiomático de esta noción.

En este currículo la noción de aleatoriedad tiene lugar en la diferenciación entre lo posible y lo seguro, a los 12 a 13 años de edad. En el resto de los niveles la enseñanza de la probabilidad sigue un desarrollo curricular ya conocido.

1.2.1.2 El currículo de probabilidad en Colombia.

La educación formal en Colombia depende del ministerio de educación y se estructura en cuatro niveles, uno de ellos es el nivel básico, el que se divide en dos ciclos: la educación básica primaria (de los 6 a los 10 años) y la educación básica secundaria (de los 11 a los 14 años).
El documento Lineamientos curriculares, colombianos contiene principios generales para la enseñanza de la probabilidad, basados en la tendencia de favorecer el pensamiento aleatorio, el que está situado en la teoría de la probabilidad y su aplicación como medida de la incertidumbre para acceder a un manejo apropiado de esta.

En la organización curricular de la enseñanza de la matemática se definen cinco tipos de pensamiento, uno de ellos es: Pensamiento aleatorio y sistema de datos.

Al respecto el documento: “El plan de Matemática”, 2014, de la secretaria de Educación plantea que el Pensamiento aleatorio y sistema de datos: “Hace énfasis en el desarrollo del pensamiento aleatorio, el cual ha estado presente a lo largo del tiempo, en la ciencia y en la cultura y aún en la forma del pensar cotidiano. Los fenómenos aleatorios son ordenados por la estadística y la probabilidad…”, (MEN, 1998, p. 47), en http://www.atlantico.gov.co/images/stories/adjuntos/educacion/medellinmatematicas.pd18 de febrero, 2018.

Por otra parte, para los lineamientos curriculares la aleatoriedad surge en relación con el azar, noción que se antepone a lo deducible y que se considera como un patrón que explica los sucesos que no son predecibles o de los que no se conoce la causa. Esta concepción se concreta a través de ejemplos en situaciones reales, en tendencias, predicciones, conjeturas. Ministerio de educación nacional república de Colombia” La revolución educativa: estándares básicos de matemáticas y lenguaje educación básica y media, 2003.

En la educación básica, el aprendizaje de las nociones de probabilidad se favorece con el uso de representaciones gráficas: circulares, histogramas, diagramas de árbol, los que permiten captar la aleatoriedad y la incertidumbre tanto en forma cuantitativa como cualitativa y sobre los cuales los estudiantes pueden hacer evaluaciones y tomar decisiones, sin recurrir a un esquema único de cálculo que los llevaría a encontrar valores deterministas definidos, los que no permiten reflejar la naturaleza específica de la aleatoriedad, Steinbring, en Lineamientos Curriculares Colombianos (2006, p. 47)..

El proyecto del Consejo Escolar de Educación Estadística propone tres principios a tener en cuenta al introducir los conceptos de probabilidad:

- Los conceptos y las técnicas deben introducirse dentro de un contexto práctico.
- No es necesario desarrollar completamente las técnicas en el momento en que se presentan por primera vez.
- No es necesario ni deseable una justificación teórica completa de todos los temas, algunos de ellos se tratarán dentro de un problema particular, otros se considerarán mediante experiencias y no se justificarán teóricamente.

Por otra parte los estándares básicos de matemáticas señalan las competencias que los alumnos deben desarrollar en los distintos grados de estudio y su progresión intra y extra grado.

Estas competencias se operacionalizan mediante situaciones didácticas que ponen en juego:

- La recolección sistemática y organizada de datos.
- La ordenación y presentación de la información.

- Los gráficos y su interpretación.
- Métodos estadísticos de análisis.
- Nociones de probabilidad.

En la enseñanza básica, la probabilidad se inicia en tercer grado, alumnos con 8 o 9 años, en este nivel los estándares proponen:

  - Explicar, desde su experiencia, la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.
  - Predecir si la posibilidad de ocurrencia de un suceso es mayor que la de otro.

Al parecer, el estándar pretende desarrollar un enfoque intuitivo de la probabilidad.

En quinto grado a la edad de 10 u 11 años, el estándar establece:

- Hacer conjeturas y poner a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.

Al parecer el estándar pretender desarrollar el significado frecuencial de la probabilidad, mediante la repetición de experimentos aleatorios.

En séptimo grado, a los 12 o 13 años, el estándar establece:

- Usar modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. Hacer conjeturas acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.

En la primera parte de la descripción, al parecer el estándar pretende desarrollar el significado clásico de la probabilidad y por lo tanto la regla de Laplace. En la segunda parte no especifica cuáles son las nociones básicas de probabilidad involucradas y porque se debería usar proporcionalidad. ¿Se referirá a la razón entre resultados favorables y posibles?

En el noveno grado, a los 14 o 15 años, el estándar establece:

- Diseñar experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta.
- Interpretar conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.
- Resolver y formular problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazamiento).
- Proponer inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.

Se aprecia una profundización del significado axiomático de la probabilidad el que cobra relevancia en cuanto corresponda a un medio para crear modelos probabilísticos experimentales que den respuestas a las preguntas formuladas en el modelo.

La enseñanza de la probabilidad en Colombia desarrolla, en el nivel de primaria (desde los 8 a 13 años), significados intuitivo, clásico y frecuencial, lo que concuerda con la experiencia chilena, y al inicio de la enseñanza secundaria se inicia el estudio del significado axiomático de esta noción.

En este currículo, la noción de aleatoriedad adquiere un estatus de objeto de enseñanza que favorece la formación del pensamiento probabilístico, en tanto los alumnos se apoyen en sus experiencias reales para analizar la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos y la describan en el lenguaje de la incertidumbre.

1.2.1.2. El currículo de probabilidad en México.

En México "La educación primaria es obligatoria y se imparte a niños de entre 6 y hasta 14 años de edad"; a la enseñanza secundara accede los alumnos fluctúan entre de 12 a 16 años de edad y que han aprobado el ciclo anterior.

ttp://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/1447/1/images/sistemaedumex09_01.pdf. 21/01/2018.

En el currículo mexicano la matemática escolar se organiza por ejes temáticos, tal como en el currículo chileno. En el ámbito de la incertidumbre este eje se orienta al “conocimiento de los principios básicos de la aleatoriedad”. Y frente a la probabilidad, su propósito es que los alumnos “Calculen la probabilidad de experimentos aleatorios simples, mutuamente excluyentes e independientes”.

En el currículo mexicano los aprendizajes esperados corresponden a conocimientos y habilidades que los alumnos deben construir durante el proceso de estudio. Los aprendizajes se van desarrollando en cada tema a través del contenido propuesto.

A los 13 - 14 años los alumnos mexicanos tienen sus primeras experiencias escolares sobre probabilidad, en la primera etapa del nivel secundario a diferencia del currículo chileno que inicia las primeras ideas de probabilidad en el primer ciclo básico con alumnos desde los 6 a 9 años

Para el primer grado de educación secundaria, se especifican los siguientes contenidos:

C.1: Identificación y práctica de juegos de azar sencillos y registro de resultados.

C.2: Elección de estrategias en función del análisis de resultados posibles.

C.3: Anticipación de resultados de una experiencia aleatoria y su posterior verificación experimental, utilizando el registro de tabla de frecuencias y el cálculo de la frecuencia relativa para determinar la probabilidad experimental del suceso.

C.4: Resolución de problemas de conteo mediante diversos procedimientos, tales como diagrama de árbol y tablas de doble entrada.

C.5: Búsqueda de recursos para verificar los resultados.

Se observa que C4 coincide con el objetivo de aprendizaje 17 de la actualización 2016 del programa de estudio de 8° básico chileno.

Las orientaciones didácticas del currículo mexicano señalan que “los conocimientos especificados en este grado pueden ser considerados como un primer contacto con el estudio de la noción de probabilidad y por ello el registro de los resultados de los juegos de azar permite caracterizarlos como juegos en los que las posibilidades de ganar no dependen de la habilidad del jugador”, Programas de estudio 2011 / Guía para el Maestro Secundaria / Matemáticas.

Se observa que la estimación de resultados de experimentos aleatorios, el uso del diagrama de árbol y el cálculo de la frecuencia relativa se plantea como medio de verificación de las estimaciones realizadas (estas habilidades son desarrolladas en los niveles 6° y 7° en el currículo chileno, entre los 11 y 12 años de edad).

En este grado se propone una aproximación a la noción de probabilidad apoyada en la experimentación con juegos de azar para dar sentido a la probabilidad experimental.
En el segundo grado de educación secundaria (15 años de edad) los aprendizajes esperados (A. E.) y contenidos (C) son los siguientes:

A. E.1: Compara cualitativamente la probabilidad de eventos simples.

C1.: Comparación de do o más eventos a partir de sus resultado posibles, usando relaciones como: “es más probable que…”, “es menos probable que…”.

C2.: Realización de experimentos aleatorios y registro de resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial. Relación de ésta con la probabilidad teórica.

A. E.2: Explica la relación que existe entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica.

C.3: Comparación de las gráficas de dos distribuciones (frecuencial y teórica) al realizar muchas veces un experimento aleatorio.

Los contenidos de C.1 corresponden a conocimientos intuitivos acerca de la ocurrencia de un suceso y al uso del lenguaje cotidiano para caracterizar la incertidumbre y lo aleatorio (queda en el ámbito de lo subjetivo).
Los contenidos C.2 y C.3 corresponden a formas de organizar los datos para representar la probabilidad y establecer relaciones entre la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica.

Además en este grado el foco del estudio es determinar la probabilidad de sucesos usando la frecuencia absoluta y relativa.

En el tercer grado los aprendizajes esperados y contenidos son:

- A. E.1: Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.
- C.1: Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.
- C.2: Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).
- C.3: Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).
- A. E.2: Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.
- C.4: Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

En este grado el foco del estudio está puesto en la teoría axiomática la probabilidad, cuantificada en su intervalo de medida $[0{,}1]$, y en el análisis de diferentes tipos de sucesos: complementarios, mutuamente excluyentes e independientes, los que serán objeto aplicaciones en la resolución de problemas.

Las propiedades de la teoría de probabilidades involucradas en el desarrollo de este currículo son:

a) La escala de medida de la probabilidad de un suceso es el intervalo $[0{,}1]$.

b) La probabilidad cero hace referencia a un evento imposible y la probabilidad uno corresponde a un evento seguro.

c) Si A_1 y A_2 son sucesos mutuamente excluyentes, su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos.

d) Si A_1 y A_2 son sucesos independientes, su probabilidad es igual al producto de las probabilidades de los sucesos.

En este grado el foco esta puesto en "Calcular la probabilidad de ocurrencia de dos sucesos mutuamente excluyentes (regla de la suma) y de sucesos independientes".

Como se aprecia este eje incluye el análisis de la información, su uso para la toma de decisiones informada y el conocimiento teórico de la probabilidad.
Se aprecia que la enseñanza de la probabilidad en México desarrolla los significados clásico y frecuencial. En este sentido, adopta un esquema tradicional en el que se articulan dos significados de esta noción con las consecuencias didácticas señaladas por Henry y Henry, los que sostienen que "se plantea un problema de coherencia en los conceptos frecuencial y clásico de la probabilidad.

La frecuencia observada en un gran número de experiencias no permite introducir el concepto de probabilidad. Esta debe pensarse anticipadamente para dar un sentido exacto a la observación de la estabilidad de esta frecuencia", Henry y Henry (1996, p.96)

La noción de aleatoriedad se pone en evidencia en situaciones que requieran describirlas en el lenguaje de la incertidumbre con palabras como: posible, seguro, imposible. Su estatus de conocimiento es de objeto para matemático, relacionada con palabras del lenguaje cotidiano más que con aspectos teóricos, como los de espacio muestral, principio multiplicativo y otros.

1.2.1.4 El currículo de probabilidad en Uruguay.

La educación escolar en Uruguay está gestionada por el Ministerio de Educación y Cultura, en sus modalidades educación inicial, primaria y secundaria.

La educación inicial y primaria se inicia a los 5 años hasta los 11 o 12 años y la educación secundaria está dirigida a adolescentes, que han egresado de Educación Primaria, sus edades fluctúan entre 13 y 17 años.

Aunque no está directamente explicitado, la enseñanza de la matemática se plantea por áreas, una de las cuales es la estadística y probabilidad.

El currículo de primaria de matemática uruguayo considera que toda actividad humana está asociada a niveles de incertidumbre y ha propuesto acciones curriculares para el desarrollo del pensamiento no determinista, en la formación escolar obligatoria, mediante la enseñanza de la probabilidad. Esta rama de la matemática, sostiene el currículo, p. 62, "intenta cuantificar la posible ocurrencia de un suceso particular". Este currículo se apoya en el planteamiento de Gadino y Bressan: "Uno de los objetivos fundamentales de la probabilidad es evaluar la posibilidad de que un suceso ocurra o que no ocurra. Es importante saber que el cálculo de probabilidades permite la toma de decisiones” (Gadino y Bressan, 2005).

El currículo Uruguayo, plantea iniciar la enseñanza de la probabilidad desde los 5 años con contenidos y actividades sobre:

- Sucesos en la exploración de situaciones de azar.
- Experimentos aleatorios, en el primer grado, a la edad de 6 años.
- El espacio muestral y la diferenciación de sucesos: seguros, posibles e imposibles, en el segundo grado, a los 7 años.
- Los sucesos simples y compuestos y la representación: el diagrama de árbol, en tercer grado.
- La comparación de frecuencias relativas de sucesos simples. La probabilidad de un suceso: El suceso no probable, poco probable, con alto grado de probabilidad o seguro, en cuarto grado, a la edad de 9 a.
- “La formulación y la comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de sucesos aleatorios: El tratamiento de la información, La combinatoria, La resolución de problemas de tanteo, Los sucesos equiprobables, La elaboración de tablas de frecuencia”, en quinto grado (10 años).
- “La predicción y el cálculo de la probabilidad experimental de sucesos aleatorios”, en sexto grado, a la edad de 11 años.

Se aprecia que las nociones de la probabilidad están presentes desde los 5 años en adelante, es decir desde kínder, mediante contenidos relacionados con la incertidumbre y la aleatoriedad, hasta el 2º grado, materializado en la diferenciación entre sucesos seguros, posibles e imposibles, en Méndez y Guzmán (2016, p.1161) se plantea que estas actividades invisibilizan, en el currículo chileno para niños de 10 años, la noción de aleatoriedad implícita en ellas y la simplifican, lo que daría lugar a una sustitución de objetivos y a producir un efecto Topaze.

Otros procedimientos involucrados en el cálculo de la probabilidad presentes en este currículo son el diagrama de árbol, la combinatoria y la frecuencia relativa que se ponen al servicio de la probabilidad frecuencial, noción que se estudia en último grado de primaria.

En este currículo se aprecia que la probabilidad emerge como una medida cuantitativa, asociada a la frecuencia relativa, en Programa de educación inicial y primaria, 2008.

El programa del primer ciclo básico de secundaria (lo que corresponde a 13 años) especifica resolver problemas elementales de probabilidad mediante la definición clásica de Laplace.

En el tercer ciclo (lo que corresponde a 15 años) los contenidos de probabilidad son: Probabilidad de un suceso, Sucesos Equiprobables, Definición de Laplace, Frecuencia Relativa y Probabilidad y la Ley de los Grandes Números.

La orientación didáctica establece que:

> El concepto de probabilidad teórica se presentará como la tendencia de la probabilidad experimental al aumentar el número de experimentos. Se sugiere comprobar experimentalmente la ley de los grandes números. Resolver problemas de aplicaciones del cálculo de probabilidades, tales como los estadísticos vinculados a otras disciplinas como Ciencias Sociales, Biología, Ciencias de la Educación, y otras.

En el segundo ciclo de bachillerato los contenidos y orientaciones de probabilidad son: Combinatoria y aplicaciones al cálculo de probabilidades, Propiedades de la Probabilidad, Probabilidad Condicional, Probabilidad Total, Fórmula de Bayes, Paseo al Azar Simétrico. Experimentos de Bernoulli. Probabilidades binomiales.

La orientación didáctica específica que:

Se trabajará con estrategias de conteo conocidas como diagrama de árbol y principio de adición y de multiplicación. Se introducirá el estudio de arreglos con y sin repetición, permutaciones y combinaciones sin repetición. Deducción de fórmulas y aplicación en distintos problemas de probabilidad.

La enseñanza de la probabilidad en Uruguay desarrolla, en el nivel inicial de primaria (desde los 5 a 11 años) los significados intuitivo y frecuencial de la probabilidad. En el primer ciclo básico de secundaria se da curso al significado clásico, tal como lo plantea el currículo chileno en el 8º básico y posteriormente en los ciclos de bachillerato se abordan contenidos relacionados con el significado axiomático de la probabilidad.

La noción de aleatoriedad emerge en tanto se concrete el enfoque intuitivo, el que permite aproximaciones a la incertidumbre y está presente en el primer ciclo básico, desde los 5 a 9 años. Por otra parte se promueve asignar palabras del lenguaje cotidiano que puedan caracterizar a la aleatoriedad, por ejemplo describiendo sucesos en términos de las palabras seguro, posible, imposible, poco y muy posible.

1.2.1.5 El currículo de probabilidad en Chile.

En Chile la educación básica tiene una duración de 8 años. Los niños inician la educación básica a la edad de 6 años y la terminan a los 13 o 14 años.

Las bases curriculares definen los objetivos de aprendizaje (O. A.), los programas de estudio plantean los propósitos para cada eje y ejemplos de actividades que materializan los O. A. Para el eje datos y probabilidad, el propósito de la enseñanza de la probabilidad es que los alumnos “se inicien en temas relacionados con el azar para que reconozcan estas representaciones en su vida familiar. Para este aprendizaje, es necesario la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después que registren lo obtenido", programa de estudio 5° y 6° básico, (2012, p. 34).

En los primeros niveles de enseñanza, de segundo a cuarto básico (7 a 9 años), se plantean Objetivos de Aprendizajes que involucran obtener resultados de juegos aleatorios con dados y monedas; registrar, ordenar y organizar estos resultados en tablas y gráficos de barra simple.

Desde 5° a 8° se afianza el estudio de la incertidumbre y la probabilidad. Los O. A. plantean:

Quinto básico (10 a.) el currículo plantea dos O. A. los cuales son: "Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento por sobre la base de un experimento aleatorio, empleando los términos seguro – posible - poco posible - imposible" y "Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas".

En sexto básico el O. A. es: "Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo".

El 7° y 8° básico se rigen por las modificaciones al decreto supremo N° 40, 1996, el que fija normas generales para la aplicación de Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica, los que se concretan mediante Aprendizaje Esperado (A. E.)

En séptimo básico el A. E. "Predecir la probabilidad de ocurrencia de eventos a partir de la frecuencia relativa obtenida en la realización de experimentos aleatorios simples", permite profundizar el estudio de situaciones de incerteza y experimentos aleatorios, mediante el trabajo con tablas de frecuencia a partir del registro de los resultados de experimentos aleatorios.

En este nivel los contenidos a tratar son: › Experimento aleatorio › Evento de un experimento aleatorio › Ocurrencia de un evento y Probabilidad (experimental) de ocurrencia de un evento.

En octavo básico el A. E.: “Asignar probabilidades teóricamente a la ocurrencia de eventos, en experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con resultados experimentales” permite introducir el modelo de Laplace combinado con la experimentación y el uso de tablas de frecuencias y gráficos.

En este nivel los contenidos a tratar son: › Equiprobabilidad de eventos › Principio multiplicativo › Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio › Probabilidad teórica de un evento › Modelo de Laplace › Condiciones del modelo de Laplace: finitud del espacio muestral y equiprobabilidad.

La enseñanza de la probabilidad en Chile desarrolla, en la educación básica (desde los 6 a 13 años) los significados intuitivo, clásico, frecuencial y nociones básicas de la teoría de la probabilidad, tales como suceso aleatorio, espacio muestral, principio multiplicativo entre otros lo que correspondería al significado axiomático de esta noción.

La noción de aleatoriedad emerge en tanto se concrete el enfoque intuitivo, el que permite aproximaciones a la incertidumbre y está presente en el inicio del segundo ciclo básico, a los 10 años. Por otra parte se promueve asignar palabras del lenguaje cotidiano que puedan representar la incertidumbre de sucesos aleatorios, por ejemplo describiéndolos con las palabras seguro, posible, imposible, poco y muy posible. Estas consideraciones, formarían parte del enfoque intuitivo de la probabilidad en el que, al parecer, no es indispensable que la aleatoriedad sea reconocida como una noción del estudio de la probabilidad.

En el año 2016 se pone en vigencia las bases curriculares desde 7° a 2° medio. En estos niveles se sustituyen aprendizajes esperados por objetivos de aprendizaje y en 7° básico en particular se amplía la forma de obtener probabilidades: por medio de experimentos, mediante estimaciones intuitivas de probabilidad, utilizando frecuencias relativas y expresándolas como razones, fracciones o porcentaje.

Por otra parte el programa del 2016 plantea comparar y relacionar la probabilidad experimental con la probabilidad teórica, mediante experimentos aleatorios, diagramas de árbol, tablas o gráficos. Estos aprendizajes formaban parte de los aprendizajes propuestos en 8° básico en el programa de estudio anterior, de tal modo que el programa 2016 adelanta estos contenidos y se advierte un énfasis calculatorio de la probabilidad.

Para 8° básico, el propósito del programa de estudio plantea que:

"En el área de la probabilidad, se busca que estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos; que determinen la probabilidad en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias. Programa Mineduc 7º básico (2016, p. 41).

También se precisan los objetos de enseñanza, Principio Combinatorio y Evento Compuesto, Equiprobabilidad y los procedimientos de conteo para calcular probabilidades. Entre estos últimos: principio multiplicativo, la representación tabular, gráficas y diagramas de árbol de sucesos, se ponen al servicio para calcular la probabilidad de sucesos compuestos.

Se advierte en 8° básico una concepción primero intuitiva y luego calculatoria de la probabilidad y en 7° básico, solo se advierte con una concepción calculatoria, en el propósito de enseñanza de la probabilidad, lo que podría favorecer una tendencia a calcular probabilidades mediante fórmulas deterministas frente al significado interpretativo que esta tiene.

1.2.1.6 Comparación de los currículos de probabilidad, de los países Argentina, Colombia, México y Uruguay con Chile.

En este apartado se comparan las descripciones curriculares, sobre la enseñanza de la probabilidad, de los cuatro países mencionados, con las decripciones del currículo chileno.

El currículo Argentino y el Chileno consideran contenidos comunes, que se desarrollan desfasados, en la enseñanza de la probabilidad respecto al currículo chileno. En Argentina la enseñanza de la probabilidad comienza a los 13 años y en Chile a los 10. En ambos países coexisten de manera preferente los significados frecuencial y clásico de la probabilidad y por consiguiente los respectivos enfoques de la probabilidad.
Por otra parte el currículo argentino no considera relacionar el lenguaje cotidiano de la incertidumbre con la aleatoriedad de un suceso, lo si está presente en la propuesta chilena, la uruguaya y la colombiana.

En Colombia la enseñanza de la probabilidad se inicia a temprana edad, tal como ocurre en Chile. Los lineamientos curriculares colombianos, plantean que la experiencia de los alumnos les permitiría aproximarse a la noción de probabilidad, mediante explicaciones y predicciones de los alumnos sobre la posibilidad de ocurrencia de un suceso. Particularmente en Chile esta experiencia proviene de los juegos de azar, los que ponen en funcionamiento artefactos aleatorios, como dados, monedas y ruletas.
En el currículo colombiano se consideran las experiencias reales de los alumnos para analizar la posibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos, mediante actividades concretas, en las que podrían emerger palabas del lenguaje naturalde los alumnos, como posible, seguro o imposible, las que caracterizan a la aleatoriedad.

También se aprecia que en quinto y séptimo grado colombiano, entre 10 y 13 años, se desarrollan los significados frecuencial y clásico de la probabilidad a partir de experimentos aleatorios y problemas sobre equiprobabilidad, utilizando artefactos convencionales (dados, monedas, etc.). Los significados frecuencial y clásico de la probabilidad, forman parte de los contenidos de séptimo y octavo básico en Chile.

En el noveno grado del currículo colombiano y en octavo del currículo chileno respectivamente, las nociones de espacio muestral, suceso, sucesos independientes (principio multiplicativo) son tratados como conceptos teóricos de la probabilidad, dando paso al significado axiomático en la educación básica. Además se popone el uso de los métodos de conteo: listados, diagramas de árbol, tablas de doble entrada, para calcular la probabilidad de sucesos compuestos.

El currículo Mexicano presenta un desfase de tres años, en la enseñanza de la probabilidad respecto al currículo chileno. En México comienza a los 13 años y en Chile a los 10. En el currículo mexicano, el punto de partida es el calculo de la probabilidad experimental de un suceso, a través de experimentos aleatorios y surge la noción de frecuencia relativa y emerge la posibilida de calcularla. Por otra parte plantea el desarrollo de métodos de conteo para resolver problemas y verificar resultados.

De manera similar, los currículos de México y Chile, consideran el uso de un lenguaje para caracterizar la incertidumbre y la aleatoriedad, con palabras del lenguaje cotidiano tales como es posible, seguro e imposible.

A la edad de 14 años, en México se plantea establecer una relación entre la probabilidad frecuencial y la clásica y visualizarla mediante gráficos de frecuencia relativa. Esta misma relación se plantea en 7º y 8° básico en el currículo chileno, a la edad de 12 a 14 años.

A la edad de 15 años cobra relevancia la probabilidad teórica, el cálculo de probabilidades compuestas y de sucesos independientes, el que solo esta incluido explícitamente en la adecuación curricular chilena del 2016.

En los primeros niveles del currículo Uruguayo, (5 a 9 años) se aprecia una caracterización de la incertidumbre y la aleatoriedad mediante expresiones del lenguaje cotidiano y una aproximación experimental a las nociones básicas de probabilidad, a saber, sucesos simples y compuestos, experimento aleatorio, espacio muestral, suceso seguro, posible, imposible, diagrama de árbol.

En los currículos uruguayo y chileno, el foco de la enseñanza, a los 10 y 11 años, es desarrollar la noción de probabilidad frecuencial, prediciendo la posibilidad de ocurrencia y comprobando de forma experimental las conjeturas sobre el comportamiento de sucesos aleatorios (lanzamientos de dados, monedas, etc.). En el primer nivel de secundaria (a los13 años) el contenido es la ley de Laplace, lo que coincide con el nivel de 8° básico del currículo chileno.

En el tercer nivel de secundaria en uruguay (15 años) se abordan contenidos sobre: probabilidad de un suceso, de sucesos equiprobables, Ley de Laplace, relación entre la frecuencia relativa y la probabilidad, la ley de los grandes números, lo que constituye los contenidos de 7º y 8º básico del currículo chileno.

En síntesis se observa una homogeneización en las decisiones curriculares en lo que respecta a los significados de la probabilidad involucrados en la enseñanza de esta noción como también en los contextos de aplicación didáctica considerados (dados, monedas, ruletas, otros).

Los temas comunes en los currículos analizados son la probabilidad experimental, ley de los grandes números, probabilidad frecuencial, ley de Laplace y nociones de espacio muestral, suceso, diagrama de árbol, básicas de la teoría de la probabilidad

Las orientaciones de estos curriculos, se constata que los problemas propuestos son generalmente convencionales (juegos con cartas, dados, monedas), los que encasillan al azar y a la probabilidad en el ámbito de los sucesos equiprobables, de espacio muestral finito y discreto.

Estas situaciones de la escuela difícilmente se encontrarían en experiencias reales de los alumnos, lo que lleva a formular preguntas como las siguientes: las situaciones didácticas de la escuela, ¿preparan a los alumnos para que se desenvuelvan con situaciones de incertidumbre del mundo real? ¿Qué situaciones favorecerían alguna transferencia entre aprendizajes escolares y experiencias del mundo real?

En los currículos analizados, salvo en el agentino, el uso de juegos de azar y las palabras seguro, posible e imposible caracterizan a las situaciones de incertidumbre. En consecuencia la noción de aleatoriedad está presente en estos currículos, como objeto de enseñanza institucional, sin embargo tiene un estatus de herramienta, en el sentido de Chevallard (1998).

Aunque en los currículos analizados, no se percibe una concepción calculista de la enseñanza de la probabilidad, en la práctica se evidencia una tendencia hacia esta dimensión, la que no esta presente en las experiencias reales de los alumnos. Existen otras stuaciones en las cuales los alumnos podrían estimar o asignar una probabilidad subjetiva de ocurrencia.

Se aprecia por lo tanto una falta de coordinación de los diferentes significados de la probabilidad y las ocasiones que la escuela proporciona a los estudiantes, para reconocer la incertidumbre y dar significado a la probabilidad, en el mayor espectro de situaciones posibles.

1.3 Estudios Afines

La Sociedad Chilena de Estadística SOCHE (2011), sostiene que la presencia de la probabilidad en el currículo escolar, se debe a su aplicabilidad en la vida cotidiana como en otras áreas del conocimiento y a la necesaria toma de decisiones bajo incertidumbre, (p. 17 y 33). SOCHE considera que la probabilidad es una disciplina relacionada con la estadística que se ocupa de modelar situaciones en las cuales existe incertidumbre, además advierte que la probabilidad como objeto matemático y como herramienta estadística emplean distintos enfoques y diferentes tipos de razonamiento. En efecto la probabilidad matemática utiliza un razonamiento deductivo para simular el comportamiento de un fenómeno aleatorio y como herramienta estadística utiliza los datos en forma inductiva para determinar la validez de ciertos supuestos, SOCHE (2011).

La complejidad de las nociones de estadística y de probabilidad hace imprescindible iniciar su formación a temprana edad, incluso desde el parvulario, a lo largo de una instrucción en etapas, para acceder a "comprender como se usan los datos para estimar probabilidades" Garfield y Ben-Zvi (citado en Estrella 2009), uno de los seis principios que caracterizan el pensamiento estadístico.

En la actualidad numerosos países incluyen en sus currículos escolares el eje Estadística y Probabilidad considerando las orientaciones del marco curricular y conceptual para el desarrollo de la educación estadística entregado por el informe

GAISE[3], respaldado por la ASA[4] el cual complementa los principios para la educación matemática del NCTM (2000).

[3]GAISE: guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education.
[4] ASA: American Statistical Association.

Nueva Zelanda pionera en esta materia lo incluye en algunos niveles de la escuela primaria desde 1969 y en 1992 en los doce niveles de la enseñanza formal. En Italia desde 1979 en educación secundaria y desde 1985 en las escuelas primarias (Ottaviani, 1995; Boero, Consogno, Guala y Gazzolo (2009)). España en el 2006 la incluye desde el primer ciclo (niños de 6 y 7 años) en el MEC (: Decreto de enseñanzas mínimas para la educación primaria.), (Arteaga, Batanero et al., 2011). En Inglaterra, desde 1999 en los cuatro primeros niveles de primaria, en Singapur desde primaria hasta secundaría a partir del 2007.

El currículo chileno de la década 80 – 90, propone el estudio de la probabilidad en los dos últimos niveles de la secundaria, 3º y 4º medio, Las decisiones curriculares impulsadas por la reforma educativa iniciada el año 1996 proponen adelantar su estudio al 2º medio y en el año 2012 se incorpora al currículo de matemática desde primero básico hasta cuarto medio.

Estas ampliaciones curriculares, en el contenido matemático, constatan que la presencia de la probabilidad en la escuela es un síntoma de la necesidad de los ciudadanos de realizar estimaciones aleatorias y aprender a hacer frente a la incertidumbre en el S XXI.

Por otra parte las investigaciones en este tema han puesto en evidencia las dificultades de los alumnos sobre los significados que les atribuyen a esta noción (Konold y Falk 1992, Lecoutre y Durán 1988; Azcarate et al. 1998; Ortiz 2002; Batanero 2005, 2013; Vásquez, Parraguez 2011). Estos investigadores han constatado que estas dificultades producen obstáculos para la comprensión de las nociones relacionadas con la probabilidad, entre ellas el débil reconocimiento de la aleatoriedad en situaciones cotidianas como en otras áreas del conocimiento; en la manera de relacionarse con la incertidumbre y las dificultades para desarrollar un pensamiento probabilístico que permita a las personas tomar decisiones basadas en los datos. La enseñanza actual también ha favorecido la producción de obstáculos didácticos y epistemológicos, en el sentido en que lo ha reportado Brousseau en sus investigaciones, (Brousseau, 2004).

En relación a los obstáculos epistemológicos, durante la enseñanza de la probabilidad surge la creencia que la probabilidad de obtener cara y sello (CS) en el lanzamiento de dos monedas es $\frac{2}{3}$, debido a que se considera que el suceso CS es igual a SC. Un razonamiento análogo fue realizado por D'Alembert, matemático notable del SXVII. En su artículo sobre "Croix ou Pile", publicado en 1754 en la Encyclopédie, desarrollo algunas ideas sobre la probabilidad, sosteniendo que al efectuar dos lanzamientos de una moneda, la probabilidad de obtener una cara y un sello seria $\frac{2}{3}$ y no los $\frac{3}{4}$, generalmente aceptados, dado que el juego se termina si aparece cara en el primer lanzamiento, (Boyer, 2003, p. 573).

Sobre la noción de aleatoriedad Azcarate, Cardeñoso y Porlán (1998); Konold (1991); Bennet (1993), reconocen que la comprensión del azar es fundamental para comprender y dominar ciertos aspectos probabilísticos y estadísticos. En el estudio de la probabilidad, la aleatoriedad se revela como una noción compleja y ambigua Konold (1991), (citao en Azcarate, Cardeñoso y Porlán, 1998). Batanero da cuenta de esta complejidad, al caracterizarla con cinco significados que surgen en el desarrollo histórico epistemológico de la probabilidad, (2005, p. 252).

Batanero, Henry y Parzysz, (2005), sostienen que los aportes de la psicología han revelado las dificultades en la toma de decisiones bajo incerteza constatando que, a falta de la comprensión del azar, ponemos en juego procedimientos, considerando datos incompletos o parciales, para simplificar la solución del problema, Kahneman y Tversky (1971; 1972), (p. 30). Estos procedimientos son denominados heurísticos o sesgos cognitivos por la psicología y los empleamos aun cuando tenemos datos que permitirían una evaluación más confiable. Uno de los heurísticos es el de representatividad, descrita por Kahneman et al. (1982), el que consiste en evaluar la probabilidad de un suceso en base a la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene, produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras. Por ejemplo en una población conformada por 70% de estudiantes de ingeniería y 30% de literatura existe la creencia de que es más probable que una persona cuya diversión principal son los computadores sea estudiante de ingeniería.

Desde la psicología educativa Fischbein constato que algunos estudiantes de 10 a 16 años y profesores en formación reforzaron fuertemente sus concepciones erróneas sobre probabilidad con la aparición del estadio de las operaciones formales, mientras que otros lo hicieron más débilmente, Fischbein (1997). En sus investigaciones él ha probado la capacidad de los niños de procesar información probabilística de un modo significativo y útil y los efectos positivos de la instrucción sobre estas cuestiones, Díaz Godino, Batanero, Cañizares (1996).

Estos resultados han influido en la elaboración de curriculos, en distintas países, por ejemplo en Chile, Colombia, Argentina, México y Uruguay, el estudio de la probabilidad se inicia en el ciclo de primaria; a los 10 años en Chile, en Colombia a los 8 o 9 años, en Argentina a los 12 o 13 años, en México a los 13 años y 5 o 6 años desde los en Uruguay.

Estos cambios han estado preparados por toda una corriente gradual en la que se ha notado la influencia de investigadores y educadores estadísticos, en Ortiz (2002). Sin embargo los cambios no han estado exentos de dificultades, optar por el enfoque experimental representado por el significado frecuencial de la probabilidad, Batanero (2005), ha originado – en los estudiantes y profesorado- una serie de obstáculos como los reportados en Henry y Henry(1996), los que sostienen que se plantea un problema de coherencia en los conceptos frecuencial y clásico de la probabilidad. La frecuencia observada en un gran número de experiencias no permite introducir el concepto de probabilidad. Esta debe pensarse anticipadamente para dar un sentido exacto a la observación de la estabilidad de esta frecuencia, (p. 96).

Por su parte Batanero (2005), advierte que:

> "Un problema práctico es que en el enfoque frecuencial nunca obtenemos el valor exacto de la probabilidad, sino solo una estimación. Por otro lado, a veces es imposible realizar experimentos exactamente en las mismas condiciones y también es difícil saber con certeza cuál es el número de experimentos que debemos realizar para aceptar la estimación de la probabilidad como buena; más aún, ciertos sucesos (por ejemplo, en el campo de la economía o de la historia), aunque aleatorios, son irrepetibles y, de acuerdo con esta concepción, no podríamos aplicar la teoría de la probabilidad para su estudio", (p. 254).

Particularmente en Chile la noción de probabilidad se introduce en forma intuitiva por los usos de palabras cotidianas como seguro, posible e imposible, que se relacionarían con el azar. Los análisis sobre estas actividades han evidenciado una sustitución de objetivos, lo que podría producir un efecto Topaze al implementarlo.

En el currículo chileno, en el nivel de primaria actual, (niños de 10 a 14 años que cursan 5º a 8º básico) se aprecia contextos de aprendizaje restringidos a experimentos aleatorios en los que la probabilidad se conceptualiza mediante su relación con la frecuencia relativa y además otros contextos con enunciados en los que se reconoce la presencia de espacios muestrales finitos, discretos y equiprobables en los que la probabilidad se conceptualiza mediante la ley de Laplace. Batanero sostiene que estos enfoques junto a los significados intuitivo, subjetivo y matemático de la probabilidad idealmente deberían estar articulados.

1.3.1 La noción de aleatoriedad.

Los resultados de las investigaciones en el campo de la probabilidad y la aleatoriedad, en los últimos veinte años, han centrado sus miradas en las dificultades para reconocer la aleatoriedad en los fenómenos del mundo real. Trabajos realizados por Azcarate, Cardeñoso y Porlan (1998), sostienen que el reconocimiento de la incertidumbre, como una característica de la realidad y aprender a manejarse en ella, son fundamentales en el desarrollo intelectual del individuo del S XXI. Ellos caracterizan la noción de aleatoriedad afirmando que "siendo el núcleo del conocimiento probabilístico, es considerada habitualmente como un concepto obvio y su significado no es analizado con profundidad", lo que les lleva a suponer que determinadas concepciones sobre ella pueden convertirse en importantes obstáculos para la comprensión de la naturaleza probabilística de ciertos aspectos de la realidad.

Respecto de esta noción, ella sostiene que "la concepción de suceso aleatorio ha sido un elemento clave en la comprensión y desarrollo histórico del conocimiento probabilístico· lo que se ve reflejado en el desarrollo de los individuos", (p. 86),

Konold señala que "la noción de aleatoriedad es compleja y ambigua, pero entendemos que las variantes del concepto son el corazón del pensamiento probabilístico y estadístico". Bennet (1993, p. 158) considera que "una clara adquisición del concepto de aleatoriedad es de crucial importancia para dominar ciertos conceptos probabilísticos y estadísticos", (citado en Azcarate (1998).

Kyburg (1974, p 217) analiza esta noción y plantea que "la aleatoriedad es un concepto relacionado con nuestro cuerpo de conocimientos, el cual refleja lo que conocemos y lo que no conocemos", estableciendo una clara relación entre el reconocimiento de un suceso aleatorio y la forma de comprender la realidad y el conocimiento, ibid. Lo que con cuerda con las expresones de Laplace, hace más de dos siglos atrás, al referise a la probabilidad.

Konold y colaboradores (1991) categorizan las concepciones de un conjunto de adultos, noveles y expertos, con las que explican lo aleatorio en una serie de sucesos. Sus resultados dan cuenta de cuatro argumentos explicativos, según que el juicio estuviera basado en criterios de equiprobabilidad, múltiples posibilidades, incertidumbre o causalidad. Estos hallazgos han sugerido que la confianza excesiva en las múltiples posibilidades y la equiprobabilidad pudieran ser un obstáculo para la comprensión de los fenómenos aleatorios en su conjunto, lo que coincide con los planteamientos de Lecoutre y Durán (1988) quienes caracterizan el "sesgo de equiprobabilidad" como uno de los más frecuentes y resistentes al cambio, en las explicaciones dadas".

Konold y Falk (1992) analizan los juicios aleatorios en un conjunto de estudiantes universitarios, reportando que los resultados obtenidos reflejan una gran diversidad de razonamientos para justificar la aleatoriedad, lo que deja traslucir la influencia de las valoraciones subjetivas de los sujetos ante la complejidad de esta noción. Ayton, Hunt y Wright (1989) lo explican por la imposibilidad de definir de forma rigurosa la idea de secuencia aleatoria, explicando este fenómeno por la capacidad del cerebro de disponer de un patrón de referencia que determiné cuando se está en una situación aleatoria.

Lo que caracteriza a los fenómenos aleatorios son su resistencia a la predicción, por el contrario lo que caracteriza a nuestro cerebro es la capacidad de intentar siempre controlar las situaciones, buscando causas explicativas de los efectos producidos en los fenómenos observados. Una evidencia de ello es la creencia de que “el premio de la lotería suele salir pasado un punto de acumulación, y que tocara pronto” explicaba Baerlocher, (Bellos, 2013, p. 83). Sin embargo este razonamiento es erróneo, sostiene Bellos. Cada partida es un suceso aleatorio, es decir, todos los que juegan, en cada nueva partida, tienen las mismas probabilidades de ganar, pero es algo instintivo pensar que es más probable que salga el premio si hace tiempo que no lo hace. Esto se conoce como la falacia del jugador. Es un absurdo pensar de esa manera en juegos de azar, pues las probabilidades son siempre las mismas. Otro fenómeno asociado a esta complejidad es que instintivamente asignamos patrones de formación en situaciones aleatorias aun sabiendo que no existe ninguno.

Green (1983, 1988, 1989 y 1991), (citado en Azcarate et all. (1998), analizan la comprensión de aleatoriedad de niños de diferentes estratos sociales. Sus resultados dan cuanta que los niños esperan la presencia de equiprobabilidad y no logran captar que la distribución equitativa de sucesos aleatorios equiprobables no ocurre para muestras pequeñas. En este sentido reportan que los niños, y muchos adultos, piensan y esperan que al lanzar 10 veces una moneda aparecerán las caras y sellos distribuidos en forma equitativa, cinco caras y cinco sellos, y más aún alternados.

Fischbein y Gazit (1984); Fischbein, Nello y Marino (1991), ibid., han constatado las dificultades en diferenciar fenómenos aleatorios y deterministas, atribuyendo el éxito o fracaso en juegos de azar, a la habilidad de generar estrategias adecuadas o a la concentración mental que les permitiría ganar las partidas o juegos.

Serrano (1993) y Azcarate (1995) informan que las personas, reconocen el carácter aleatorio de los juegos de azar, sin embrago en situaciones cotidianas existen grandes dificultades para reconocerla.

La dificultad que subyace en estas investigaciones es la falta de consenso sobre el significado de la noción de aleatoriedad, sobre la que no hay cosntruìda una concepciòn clara, como tampoco es evidente reconocerla en los diferentes contextos en los que se manifiesta. Azcarate et al. (1998) la caracterizan como noción controvertida. Garfield y Del Mas (1989) y Well, Pollatsek y Boyce (1990) obtienen la misma caracterización, al analizar las argumentaciones de sujetos sometidos a experiencias concretas en la formación de las nociones de independencia, aleatoriedad, la influencia en el tamaño de la muestra y del contexto en que se presenta la tarea y la propia estructura de esta.

Por otra parte, para una persona, identificar la aleatoriedad en una situación especifica, depende tanto de su actividad racional como de la información empírica de la que disponible. Steinbring y Harten (1993); Steinbring (1990, 1991, 1991a) analizan la naturaleza del conocimiento aleatorio y su relación con las construcciones socialmente producidas y concluyen que la existencia de dificultades de comprensión de estas nociones se soslayan solo mediante un proceso continuo de retroalimentación en la construcción de significados relacionados con ellos; es decir, su progresiva adquisición en un proceso de exploración sobre los mismos conceptos, ampliando el campo de aplicación y su profundización, en Azcarate et al. (1998, p. 87).

Otros autores, Hietele (1975), Steinbring (1991) consideran que el nivel de comprensión de la aleatoriedad influye sustancialmente en el conocimiento probabilístico. La capacidad de reconocimiento y tratamiento de los sucesos aleatorios depende a su vez del nivel de reconocimiento de la incertidumbre y de la complejidad en los fenómenos; es decir, de la comprensión y aceptación del azar, noción básica en el entendimiento de estos conceptos.

Cardeñoso (2001), precisa las nociones de aleatoriedad y probabilidad, afirmando que “la aletaoriedad es una magnitud que caracteriza la incertidumbre de ciertos fenómenos y la probabilidad es una medida relativa, al menos ordinalmente considerada, del grado de certeza en la verificación de un evento", (Moreno y Cardeñoso (2014, p. 199).

1.3.2 Intuiciones probabilisticas.

Las primeras investigaciones sobre nociones intuitivas de probabilidad se remota a los estudios psicogenéticos de Piaget e Inhelder (1951), quiénes plantearon a los niños experimentos y entrevistas clínicas para ver la forma en que razonaban sobre los mismos. Luego de analizar las respuestas de niños en diferentes estadios de desarrollo cognitivo, estos investigadores concluyen que, para la comparación de probabilidades en la etapa preoperatoria del desarrollo del concepto de probabilidad, hay ausencia de comparación lógico-aritmética y esto no permite resolver el problema; en la de operaciones concretas el niño logra comparar una variable y en la de operaciones formales llega a una solución general y rápida.

Vasquez y Alsina (2017), reportan que ,Green (1983), estudia posteriormente el fenómeno, construyendo un cuestionario de 26 ítems sobre conceptos o intuiciones aleatorias que aplica a una muestra de 2930 alumnos de 11 a 16 años, para establecer niveles de razonamiento probabilístico y la edad promedio en que éstos son alcanzados. En su investigación, Green analiza el lenguaje probabilístico que surge en las respuestas de los niños, determinando tres categorías: 1) capacidad de comprensión del lenguaje de probabilidad y su aplicación a situaciones de incertidumbre; 2) capacidad de razonamiento combinatorio y probabilístico; 3) intuiciones de los alumnos sobre aleatoriedad. Definidas estas categorías, logra situar a los alumnos en distintos niveles de razonamiento probabilístico, que guardan cierta similitud con las etapas del desarrollo de la idea de azar propuesta por Piaget e Inhelder.

En lo que respecta al lenguaje probabilístico, los resultados obtenidos por Green muestran que existe un bajo dominio y comprensión del lenguaje vinculado a la probabilidad (p. 463, 464).

Por su parte, Fischbein y Gazit (1984) analizan el efecto de la enseñanza en los juicios probabilísticos, examinando algunos errores en relación con la asignación de probabilidades y al lenguaje probabilístico. Tales errores se manifiestan mayoritariamente en alumnos de 9 a 14 años, para quienes la noción de *seguro* presenta mayores dificultades que la de *probable*, dado que asocian esta noción con un resultado único y posible con variados resultados; caracterizando, además, *raro* con *imposible*, e *imposible* con *incierto*, debido a que se basan en sus experiencias subjetivas o creencias.

Cañizares (1997) estudia la influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Para ello, realiza un análisis fundamentado en las investigaciones realizadas por Piaget e Inhelder (1951) y Green (1983) desde una perspectiva clásica de la probabilidad versus las de Fischbein (1975) realizadas desde una perspectiva intuitiva. Además, realiza un análisis estructural de los instrumentos de evaluación del razonamiento probabilístico intuitivo de los niños que fueron utilizados en las investigaciones de Green (1983) y de Fischbein y Gazit (1984), aclarando que en el cuestionario de Fischbein y Gazit (1984) se otorga gran importancia a la aproximación intuitiva de la probabilidad basada en las creencias y factores culturales, incluyendo además contextos cotidianos como los vinculados a las loterías.

Después de este análisis realiza una comparación experimental de los dos cuestionarios por medio del estudio de la correlación existente entre ambos instrumentos. Para ello, aplicó el cuestionario de Green (1983) a una muestra de 251 alumnos de 11 a 14 años, y el cuestionario de Fischbein y Gazit (1984) a una muestra ampliada a 320 alumnos entre los 10 y 14 años. En general, los resultados de ambas aplicaciones fueron mejores que los obtenidos por Green

(1983) y Fischbein y Gazit (1984), evidenciando que el grupo de niños de Cañizares muestran una mejor comprensión y utilización del lenguaje probabilístico a excepción de los términos improbable e imposible ante los cuales manifiestan cierta dificultad

Recientemente e Alvarado, Estrella, Galindo y Retamal (2018, p. 131) han intentado relevar el papel potencialmente influyente de la intuición en la construcción del conocimiento probabilístico. Para ello evaluaron las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad en 257 estudiantes de ingeniería mediante un cuestionario de ocho ítems cerrados, analizando las argumentaciones de 148 de ellos en un ítem abierto. Los resultados que obtuvieron les indican una alta variación en la asignación cualitativa de la intuición probabilística en situaciones de incertidumbre y la existencia de intuiciones correctas e incorrectas de los estudiantes. En vista de estos resultados ellos proponen una enseñanza de la probabilidad que relacione la comprensión teórica y práctica de los significados de la probabilidad, promoviendo gradual y progresivamente que el razonamiento intuitivo transite hacia el razonamiento axiomático con comprensión, estimando probabilidades y concibiéndolas como grado de creencia personal, confrontado explícitamente las diversas heurísticas con el conocimiento formal de la probabilidad, para desarrollar un pensamiento probabilístico útil al ciudadano.

Vasquez y Alsina (2017, p. 454), realizan un estudio exploratorio a un proceso de instrucción con alumnos de segundo curso de Educación Primaria (7-8 años aproximadamente) que no han recibido instrucción previa sobre el tema, describen y analizan cómo emergen los primeros elementos lingüísticos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.
Estos investigadores, caracterizan al lenguaje probabilístico como preciso y especializado, el cual permite expresar, de forma cualitativa, la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso.

En concreto, ellos analizan la multiplicidad de términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones que usan los profesores cuando se pretende que los alumnos aprendan gradualmente la noción de probabilidad y adquieran el respectivo lenguaje probabilístico asociado.
Los resultados muestran un fuerte predominio de términos y expresiones verbales provenientes del lenguaje común vinculadas principalmente al significado intuitivo de la probabilidad, que transitan hacia conceptos de corte probabilístico.

Vásquez (2018) analiza cómo estudiantes de un segundo año de primaria se aproximan a la probabilidad de ocurrencia de un suceso por medio del uso de términos y expresiones que constituyen una escala cualitativa de los grados de posibilidad de ocurrencia de un suceso. Este estudio se focaliza en el lenguaje probabilístico, empleado por los estudiantes, entendido como un lenguaje preciso y especializado que permite expresar de forma cualitativa la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso, el cual a su vez constituye un soporte para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Con este propósito, ella implementó un conjunto de tareas probabilísticas a través de la cuales accedió al lenguaje probabilístico que usan los estudiantes de los primeros años de Educación Primaria al verse enfrentados a situaciones de incertidumbre. Esto permitió analizar y describir cómo emergen los primeros elementos lingüísticos asociados a la probabilidad durante un proceso de instrucción.

Ramal (2014), realiza una evaluación de intuiciones probabilísticas en alumnos de tercer ciclo de Educación Primaria, que no han recibido instrucción previa sobre probabilidad. Para ello diseñó un cuestionario considerando una selección de ítems utilizados por Green (1981) y Fischbein y Gazit (1984), en sus investigaciones, a objeto de comparar sus resultados con estos investigadores y además Cañizares (1997).

Obtiene resultados muy parecidos a las investigaciones mencionadas. Concretamente los alumnos de Ramal han presentado más dificultades en alguno de los ítems del cuestionario propuesto y concluye que sería posible introducir ciertos aspectos o conceptos de la probabilidad con más precocidad en el currículo de educación primaria, http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/36310/Ramal%20Martin_%20Pablo.pdf?sequence=1&isAllowed=y, visitado 23/06/019.

Sanchez y Valdez, (2017, p. 127) describen y analizan los razonamientos que 30 estudiantes de bachillerato (17 – 18 años), los que cursaban probabilidad y estadística II, formulan a partir de su conocimiento de las interpretaciones frecuencial y clásica de probabilidad. Ellos aplican un cuestionario con tres situaciones de urnas en las que se pide estimar probabilidades y hacer predicciones. Sus resultados revelan la tendencia de los estudiantes al cálculo de probabilidades, mayormente apoyados en razonamientos inadecuados sobre las ideas de variabilidad, aleatoriedad e independencia. Los razonamientos son descritos en una jerarquía con la finalidad de informar sobre las trayectorias de los estudiantes. Con base en este resultado, sugieren formular los problemas de manera de propiciar que emerjan nociones sobre estas grandes ideas para permitir su precisión y desarrollo mediante simulaciones acompañadas de interacciones y cuyo manejo potenciaría el razonamiento probabilístico informal de los estudiantes.

1.3.3 La noción de probabilidad.

La probabilidad es un dominio de conocimiento complejo, en el sentido epistemológico y también como objeto de enseñanza.
Carranza (2009) se refiere al objeto de enseñanza en los siguientes términos: “En general, muchos docentes centramos nuestra atención en aspectos de la

probabilidad, que llamaremos operatorios o calculatorios. Sin embargo, en estadística, la probabilidad es algo más que un número, ella representa dos posibles significados: una medida de certeza o la frecuencia de aparición de un fenómeno dado". Carranza y Fuentealba (2010, p.58) entienden la probabilidad desde dos dimensiones, una calculatoria, relacionada a lo matemático con predominio en lo frecuencial, y otra semántica, vinculada al significado del número.

La dimensión semántica representaría una medida de cuánto creemos en la veracidad de una proposición.

Esta dimensión de la probabilidad, se ve afectada por las informaciones que tenga un observador del fenómeno, acerca de la situación, por ello la dimensión semántica de la probabilidad, es subjetiva, dado que su valor puede diferir de una persona a otra.

Otra dimensión es la operatoria, esta se refiere a la frecuencia con la que ocurre un fenómeno o suceso dado, si se lo reprodujese un número muy grande de veces, bajo las mismas condiciones.

Vásquez y Parraguez (2011, p.580), indagan en las construcciones del concepto de probabilidad en un estudio realizado a 12 estudiantes de primer año de la carrera Licenciatura en ciencias estadísticas, en el Instituto de Estadística de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, focalizando la atención en su significado más que en el cálculo. Ellas constatan que existe un gran predomino de la dimensión semántica frecuencial, dado que los estudiantes reconocen y argumentan de mejor manera aquellas situaciones bajo un enfoque frecuencial, mientras que en aquellas situaciones en las cuales es necesario responder en base ya sea a creencias y/o evidencias, tienen mayores dificultades. Lo que se refleja en que algunos estudiantes de la muestra argumentan que "no es posible asignar una probabilidad exacta (calculatoria) sino que solo se puede asignar una opinión personal", (Vásquez y Parraguez, 2011, p. 578). Además se documenta la predominancia de la dimensión calculatoria por sobre la semántica, porque los estudiantes se sienten más confiados al efectuar cálculos con los datos que presenta un problema y muestran inseguridad y confusión al tener que interpretar la probabilidad, dándole un significado.

Batanero (2005) distingue cinco significados de la probabilidad atribuidos a su evolución histórica: significado intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático. Ella sostiene que estos significados se reproducen en distintas generaciones y además son utilizadas en las prácticas de enseñanza de la probabilidad.

Cada uno de esto significados está asociado a un desarrollo conceptual especifico que refleja el tipo de actividad en las que esta noción se ponía en juego.
En particular, el significado axiomático de la probabilidad, iniciado durante el S XX por Kolmogorov define a la probabilidad como un modelo matemático para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios y ha mostrado ser útil en distintos campos de la actividad humana.

Las actuales contribuciones, permiten considerar en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, las concepciones de los estudiantes como el punto de partida para hacer evolucionar su conocimiento y comprensión del azar. Así como Konold (1991) afirma que: "el papel de las concepciones[5] iniciales de los sujetos es de considerable importancia para hacer posible la comprensión de la probabilidad y su significado", (citado en Azcarate 1998).
Batanero recomienda que los:

---

[5] Las concepciones son tomadas, aquí en el sentido de Thompson (1992, p. 132), como una estructura mental que incluye sus creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias, conscientes o inconscientes.

> "Significados deben incluirse progresivamente, comenzando desde las ideas intuitivas de los alumnos sobre azar y probabilidad, ya que la comprensión es un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona, progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto".

1.3.4 La enseñanza de la probabilidad.

Otra arista en función de esta investigación son los currículos escolares que desde hace una veintena de años han venido incorporando el estudio de la probabilidad en la educación obligatoria, actualmente desde la escuela primaria hasta la educación superior.

Con relación a esta arista, el estudio analítico realizado por Anne y Michel Henry a los programas de estadística y probabilidad franceses, determinaron una fuerte influencia del enfoque frecuencial para introducir el concepto de probabilidad. Ellos sostienen que se presenta un problema de coherencia en los conceptos de frecuencia y probabilidad, ya que la frecuencia observada en un gran número de experimentos no permite introducir el concepto de probabilidad sin que esta se determine con anticipación para dar sentido exacto a la observación de la estabilización de la frecuencia. Concluyen que bajo este enfoque la probabilidad no puede predecirse con anticipación y que la experimentación no determina la probabilidad en forma absoluta, en el sentido de que siempre es una estimación diferente para cada experimento, Henry, Henry (1996, p. 96).

En países como Chile, Uruguay y Colombia, lo enfoques curriculares actuales, han diseñado programas de estudio en los que la probabilidad se aborda a temprana edad: alrededor de los 8 a 9 años en Colombia, 5 a 6 años en Uruguay y a la edad de 10 años en Chile. Estos se aproximan en forma gradual e intuitiva al lenguaje de la probabilidad, con enunciados de certidumbre e incertidumbre asociados a las expresiones: seguro, posible e imposible, del lenguaje natural, con el objeto de que el alumno(a) decida que palabra asocia al enunciado.

Sánchez y Valdez (2013, p. 39) citan a Konold et al. 2011, quienes analizan las consecuencias de introducir el enfoque frecuencial y el clásico de la probabilidad, estudiando el pensamiento de una joven de 8º grado (14 años) con conocimientos iniciales de probabilidad, los que le permitían realizar cálculos de probabilidad frecuencial y teórica, Konold et al., concluyen que ella tiene serios obstáculos para vincular las nociones de probabilidad teórica con la experimental.

Por otra parte Pfannkuch (2012, p. 906) aportan nuevos antecedentes sobre la investigación de Konold: la niña en cuestión cree que todos los problemas de probabilidades podrían ser resueltos teóricamente y que el propósito de los experimentos consiste simplemente en corroborar los resultados teóricos, porque ella cree que la probabilidad experimental es la verdadera probabilidad, puesto que eso es lo que sucede en la práctica. Estos hallazgos son corroborados en la práctica pedagógica habitual y en distintos niveles formativos, primaria secundaria y universitaria.

Respecto de la investigación de Konold, Sánchez – Valdez (2013) afirman que se constata la dificultad de los estudiantes de esa edad para entender la conexión entre las nociones de probabilidad experimental y clásica, lo que muestra que la Ley de los grandes números les resultará más complicada de comprender, (p. 39, 40).

Konold et al. (2011) recomienda que para enseñar probabilidad se debería plantear problemas que no pudieran ser resueltos por la vía teórica con tareas que soliciten estimar probabilidad mediante experimentos. También sostienen que centrarse solo en un enfoque de la probabilidad limita el pensamiento de los alumnos, lo que no permitiría contribuir a la construcción de relaciones entre la probabilidad y la inferencia, en Sánchez – Valdez (2013, p. 39, 40).

Claramente estas orientaciones muestran una visión reducida de la probabilidad, puesto que la encasillan al ámbito de los sucesos equiprobables con espacio muestral finito y discreto o se basan en la recolección y organización de datos obtenidos en juegos de azar. Ambos enfoques no permiten caracterizar la naturaleza aleatoria de la situación ni tampoco reconocer otras dimensiones de la probabilidad que no sea la de los juegos de azar.

En Chile el estudio de la probabilidad se inicia en quinto básico, con ejemplos de actividades que pretenden vincular lo aleatorio y lo determinista con las palabras seguro, posible e imposible. El análisis de estos ejemplos y del enfoque curricular propuesto conduce a pensar que esta clasificación podría sustituir el aprendizaje de las características de la aleatoriedad, puesto que en estas situaciones no se coloca al alumno en posición de analizar sus propias expectativas futuras sobre la ocurrencia de los ejemplos de certidumbre o incertidumbre proporcionados. Por esta razón es que la noción de aleatoriedad queda invisible para los actores de la relación didáctica y produce obstáculos para la comprensión de la probabilidad..

Al respecto Sánchez y Valdez (2013. P.39) señalan la necesidad de un enfoque pedagógico holístico, que haga intervenir y articule distintos significados de la probabilidad.
Estos investigadores, sostienen que un conocimiento funcional de la probabilidad, no se restringe a utilizar el enfoque clásico, frecuencial e incluso el subjetivo si el número obtenido no puede ser utilizado para hacer afirmaciones

que extiendan el conocimiento o permitan tomar decisiones o formular predicciones.

Por otra parte, Batanero (2013) afirma que una de las razones de porque se hace más complejo el estudio de las nociones probabilísticas es que, al contrario de lo que ocurre en otras áreas de la matemática, no existe una experiencia acerca de lo aleatorio, por su naturaleza incierta, no podemos manipular estos fenómenos para producir un resultado específico, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación, como en aritmética u otras áreas. Esta falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios sin duda influye en el desarrollo más tardío de las ideas intuitivas al respecto.

Sobre los logros de aprendizaje de los enfoques curriculares, desde la investigación surgen cuestionamientos que han llevado a los investigadores a incursionar en otros modos de enfrentar la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

Al respecto Eicher y Vogel (2012) diseñaron e implementaron una secuencia de actividades dirigida a alumnos de 4º y 6º grado, en Alemania, para identificar los modelos mentales de los estudiantes cuando interactuaban con situaciones elementales de incertidumbre antes de haber recibido instrucción formal sobre probabilidad. Ellos sugieren que a los estudiantes no se les puede encasillar en niveles generales de cognición, como Piaget y sus colaboradores han señalado, ya que estos niveles dependen de la complejidad de las tareas específicas realizadas por los alumnos. Los hallazgos de estos investigadores han determinado que los estudiantes presentaron niveles cognitivos situacionales provocados por un tipo de tarea particular.

Esta perspectiva ha llevado a que se promueva el desarrollo de currículos que consideren otros medios de aprendizaje para la comprensión y desarrollo del pensamiento probabilístico. Algunos pioneros en realizar investigaciones sobre adaptaciones a las orientaciones curriculares son: Abrahamson, Garfield et al. y

Pfannkuch et al., ellos proponen utilizar como recurso para el aprendizaje la percepción, el modelado, la simulación y las imágenes respectivamente, ya que estos medios didácticos, pueden proporcionar valiosos recursos para la construcción de conceptos probabilísticos, (citado en Beihler y Pratt, 2012,).
Boero, Consogno, Guala y Gazzolo (2009) utilizan la noción de campo de experiencia para implementar una secuencia didáctica centrada en la aproximación al pensamiento probabilístico. Ellos utilizan contextos accesibles a los estudiantes considerando “el domino de los fenómenos aleatorios como un campo de experiencias y no como una mera colección de ejercicios relacionados con la probabilidad”, Boero et al. (2009, p. 64). Las actividades estaban dirigidas a alumnos del ciclo de primaria (8 a 12-13 años) en Italia y privilegiaban actividades argumentativas en clases que podrían producir progresos significativos en algunos aspectos cruciales del pensamiento probabilístico en el conocimiento de los estudiantes.

Méndez y Guzmán, (2016) analizan las interacciones observadas con alumnos de 13 y 14 años, frente a una secuencia didáctica sobre aleatoriedad y certeza. El medio material son imágenes fotográficas las que permitieron identificar concepciones de los alumnos sobre aleatoriedad en su estatus paramatemático, es decir, las nociones funcionando como herramientas para predecir sucesos. Entre los hallazgos se determina que la mayoría de los alumnos han asignado significados subjetivos a los fenómenos aleatorios contemplados en las situaciones, lo cual deja en evidencia que estos alumnos no logran percibir la incertidumbre en las historias formuladas.

El grupo elemental Irem de Franche Compte, (2007), implementa una situación de aproximación a la noción de azar y de toma de decisiones bajo incertidumbre para niños de 8 a 11 años. Para ello adaptan un juego creado por Houdement y Schwartz, consiguiendo con ello que los niños elaboren razonamientos más finos para el desarrollo de sus estrategias, ya que en el transcurso del juego van a tener que reflexionar para tomar decisiones bajo incerteza. El juego enfrenta parejas de niños que tienen que formar dos números de dos cifras, cuyos dígitos se seleccionan al azar de una baraja de 9 cartas. El sorteo de los dígitos es sin repetición y una vez que han formado sus números, gana el que obtiene la suma más grande. La situación es adidáctica y permite introducir en la clase situaciones de aproximación a la noción de aleatoriedad, tener en cuenta los conocimientos a priori de niños de 8 a 11 años y sus representaciones sobre la noción de azar, (p. 45, 46).

Méndez T. (2013) reproduce esta situación con 6 niñas de 11 años de una escuela municipal. El análisis de producciones escritas y verbales constata la elaboración de reglas de decisión deterministas, las niñas encuentran estrategias para ganar que son invalidadas por el juego o por argumentos analíticos. Al final de la clase las niñas descubren que el juego es a la chuña (a la suerte).

1.3.5 Problemática y objetivos de investigación.

La formulación de la problemática se inspira en estudios que han puesto en evidencia, que los currículos actuales podrían favorecen restricciones que tienden a producir obstáculos en la comprensión del azar y la probabilidad como medida de la incertidumbre, la que solo puede ser calculada en contextos equiprobables asociada a los juegos de azar. Existe poca comprensión de la utilización de los datos para estimar probabilidades, (Garfield y Ben-Zvi, 2007, citado en Estrella 2009) y de otras formas de pensar, distintas a las del álgebra, la geometría y sus interconexiones, cuyo nicho más apropiado para el desarrollo de este pensamiento es la probabilidad.

Este fenómeno tiene implicancias a diferente escala: en la escuela los niños no pueden establecer relaciones entre sus aprendizajes sobre el tema y las ocasiones de interacción con situaciones de incertidumbre del mundo real; en la enseñanza actual los enfoques clásicos y frecuencial de la probabilidad producen confusión al grado que los niños pueden llegar a creer que la verdadera probabilidad es la frecuencial porque es lo que sucede en realidad y que los experimentos tienen la finalidad de corroborar la probabilidad clásica, resultado obtenido por Konold et al., en Pfannkuch (2012, p. 906).

En el ámbito profesional, este fenómeno se hace evidente en las confusiones involuntarias de profesionales al diagnosticar e interpretar resultados de informes que tienen un cierto nivel de incertidumbre.

Frente a la debilidad de los enfoques pedagógicos, las decisiones curriculares invisibilizan el fenómeno aleatorio y lo sustituyen por actividades en las que se propone clasificar enunciados en posible, imposible o seguro. Estas actividades no ponen en juego el razonamiento de los alumnos en el cual la toma de decisiones basada en los datos sería el centro de la actividad matemática en este tema.

Por otra parte, el estado actual de la enseñanza de la probabilidad se ha caracterizado por el desconocimiento de lo que los alumnos piensan, de sus creencias y de sus reacciones frente a la incertidumbre y la probabilidad. Se han establecido tipificaciones acerca del desarrollo cognitivo de los niños señalando etapas caracterizadas por conductas concretas o más analíticas, pero ¿cómo se materializan están conductas en contextos de incertidumbre? ¿Cuál es el interés en conocer y comprender como reaccionan los alumnos en distintos segmentos de edad frente a la incertidumbre y al cálculo de probabilidad?

Esta investigación se propone describir estas conductas como parte del proceso de evolución del pensamiento probabilístico de alumnos de 5º a 8º básico con la finalidad de proponer adecuaciones curriculares a los programas vigentes, en una suerte de prolongación de esta tesis. En estas adecuaciones sería pertinente considerar el diseño de situaciones didácticas relacionadas con la zona de experiencias reales de los alumnos, para contribuir a proporcionar condiciones favorables para el progreso del pensamiento probabilístico. La formulación de la problemática da origen a las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué medios (en el sentido de Brousseau) considerar en el diseño de situaciones didácticas, cuyo propósito sea identificar la evolución psicogenética de las concepciones de incertidumbre y probabilidad, de alumnos de entre 10 y 14 años, cursando quinto a octavo básico en la escuela?
2. ¿Qué conocimientos intuitivos de los alumnos emergen en la interacción con un medio adidáctico preparado para provocar el funcionamiento del pensamiento probabilístico?
3. ¿Cómo evoluciona el razonamiento probabilístico frente a las tareas propuestas en las situaciones planteadas, en los niveles de escolaridad considerados?

Para esta tesis la evolución psicogenética de las nociones en estudio se concibe como la modificación en las conductas de los sujetos y de sus concepciones intuitivas sobre la incertidumbre y la probabilidad. En paralelo estas conductas e intuiciones se van desarrollando y progresando a medida que los alumnos y sujetos en general van teniendo más experiencias con los fenómenos relacionados con el azar y la incertidumbre.

1.3.5.1 Objetivo General

Diseñar una secuencia didáctica, controlada por la teoría de situaciones didácticas, que permita identificar la evolución psicogenética de las concepciones de la probabilidad, en educación básica, considerando que la homogeneización de los currículos actuales dificulta que el conocimiento escolar de la probabilidad se apoye en el conocimiento intuitivo de niños de 10 a 14 años.

1.3.5.2 Objetivos Específicos

1. Analizar la evolución histórica – epistemológica de la noción de probabilidad y su relación con la evolución psicogenética de los conocimientos de los alumnos.
2. Analizar el estado actual de las investigaciones del proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad afines a la problemática.
3. Analizar los programas de estudios y los textos escolares difundidos por el MINEDUC, desde la perspectiva de la TSD e identificar las representaciones de las nociones de probabilidad presentes en ellos.
4. Diseñar situaciones controladas por la teoría de situaciones didácticas, que permitan poner en evidencia el conocimiento intuitivo de niños de 10 a 14 años sobre incertidumbre y probabilidad.
5. Descubrir y Describir los razonamientos de los alumnos y el rol de sus intuiciones respecto de las nociones de incertidumbre y probabilidad.

Este estudio pretende aportar conocimiento concreto sobre las concepciones de alumnos de 10 a 14 años relacionadas con la incertidumbre y la probabilidad, sus modos de razonamiento frente a ella, lo que podría robustecer las propuestas curriculares en este tema.

CAPÍTULO 2. TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL OBJETO PROBABILIDAD

Este capítulo corresponde a un estudio de la transposición didáctica del objeto probabilidad, considerando tres niveles de este proceso, el saber sabio, el saber ofical y el saber de los textos de los textos escolares.

Al respecto, Chevallard (1998) concibe que los objetos de enseñanza corresponden a una adaptación, para la enseñanza, de los objetos del saber sabio, adjudicado a la comunidad de científicos del área.

Chevallard concibe 5 etapas por las que el saber sabio, de referencia, transita para transformarse en el saber del alumno, estas son: el saber sabio es transformado en el saber oficial, el que está contenido en los programas de estudio. En Chile, las bases curriculares, el marco de la buena enseñanza, entre otros también forman parte del saber institucional. Una segunda transformación se presenta en los textos escolares, en este caso los autores interpretan el saber institucional y determinan el saber a enseñar, posteriormente el profesor interpreta el saber que está en los textos y se determina el saber que el profesor enseña, que se denomina saber enseñado. Finalmente, el saber enseñado es interpretado por los alumnos, dando origen al saber de los alumnos.

Para esta tesis el saber sabio de Chevallard es el saber de referencia, el que ha sido planteado desde una perspectiva didáctica, para favorecer la comprensión del profesor del sistema escolar, que lea esta tesis.

Otros niveles de la transposición didáctica, para esta investigación, son el saber oficial, y el de los textos de estudio, los que son analizados a la luz de las nociones de la Teoría de Situaciones Didácticas.

2.1 El saber sabio: El Objeto Probabilidad

En este capítulo se describen los conceptos de la teoría de la probabilidad desde la perspectiva de la realidad escolar, foco de este estudio~~,~~ y del aprendizaje de esta noción en educación básica.

Dado que cada situación didáctica contiene un conocimiento matemático: una propiedad, una herramienta o estrategia que permite aproximarse al objeto escolar, se han considerado las conexiones entre la matemática escolar y las características de uso cotidiano de la probabilidad.

Los contextos de uso cotidiano de la probabilidad son las distintas instancias en las que podemos experimentar los fenómenos que han sido organizados mediante el concepto de probabilidad, juegos de azar, pronósticos sobre acontecimientos futuros, situaciones relacionadas con la toma de decisiones, entre otros.

Los medios de organización de los fenómenos de la probabilidad son el espacio muestral, la frecuencia relativa, las estimaciones subjetivas y las nociones que se ponen en juego al experimentar la incertdiumbre y la aleatoriedad.

Por ejemplo las palabras azar, lo incierto y lo probable son palabras con las que se expresa la incertidumbre, lo aleatorio, y en el lenguaje cotidiano se utilizan como sinónimos. Batanero y otros se refieren a que el significado de ellas no queda claramente determinado lo cual, ellos señalan que se crean dificultades de comprensión en los estudiantes", (Batanero et al., 1995, p 16).

El diccionario Pequeño Larousse (1995, p.121), describe la palabra azar como la casualidad, la desgracia imprevista, el estorbo en el juego de pelota, y en la página 45, en relación a la aleatoriedad la describe como: es lo relativo a los juegos de dados, lo fortuito. Se aprecian por lo tanto relaciones de significado entre estas dos palabras, lo que explicaría la substitución de una palabra por la otra, en el lenguaje cotidiano.

Por otra parte la aleatoriedad está en la base de la comprensión de la noción de probabilidad y de su cuantificación, pues el carácter aleatorio de los fenómenos, le da sentido al hecho de establecer una medida de probabilidad. Frente a lo anterior, Batanero (1995, p. 16) pregunta ¿Qué es la aleatoriedad? ¿Es una propiedad de los fenómenos a los que aplicamos este calificativo? ¿De dónde surge esta idea? Respecto a tales interrogantes no hay un consenso debido a su complejidad.

No obstante en el nivel de educación básica, solo puede describirse la aleatoriedad como un fenómeno incierto. Para ahondar en la complejidad de este concepto se necesita recorrer un camino que llega hasta Kolmogorov, responsable de que la probabilidad tenga un carácter matemático.

2.1.1 Nociones básicas de la teoría de la probabilidad en el ámbito de la educación básica.

2.1.1.1 Suceso Aleatorio.

En las experiencias del mundo real se distinguen dos tipos de fenómenos, los aleatorios y los deterministas, los que son adaptados para las experiencias del sistema escolar.

Particularmente los fenómenos aleatorios del mundo real como los diseñados en las adaptaciones curriculares, pueden dar origen a distintas hipótesis sobre la ocurrencia de un suceso las que constituirían los sucesos posibles del espacio muestral. Estas hipótesis, podrían constituir un conjunto de resultados posibles.

Por ejemplo las distintas historias que los alumnos formularon para la imagen “la jugada de futbol”, constituiría un conjunto de jugadas posibles, ¿cuál de ellas ocurrirá?, nadie lo sabe, es impredecible su ocurrencia. Este ejemplo es un fenómeno del mundo real que podría ser adaptado como situación de enseñanza – aprendizaje.

Para el estudio escolar de los fenómenos aleatorios se realizan experimentos, entendidos como procedimientos que se realizan bajo condiciones específicas.
Considere un fenómeno real, por ejemplo contraer un resfrió, las condiciones para resfriarse pueden ser: viajar frecuentemente en locomoción colectiva, salir al frio desabrigado, dormirse destapado o con una ventana abierta, entre otros. Si se consideran los viajes que realiza una persona en locomoción colectiva y que en un día de invierno realiza 3 viajes, ¿puede esta persona contraer un resfrió? Puede que sí o puede que no. El fenómeno, contraer un resfrió en tres viajes en invierno, es aleatorio.

Predecir el número de autos que atraviesa por la intersección de dos arterias viales de una ciudad, desde las 13:00 a 14:00 horas de un día de la semana, es un fenómeno aleatorio. En este caso no se puede asegurar el resultado por anticipado, por lo tanto en este experimento existe, intrínsecamente, cierta incertidumbre.

Por el contrario los fenómenos deterministas tienen un resultado seguro, se pueden predecir su resultado, contrariamente a los fenómenos aleatorios.
Por ejemplo si alguien dice “tengo este objeto en mi mano (un llavero por ejemplo), si lo suelto es seguro que cae” si consideramos la caída de un objeto desde una altura dada como un experimento, el suceso “el objeto cae”, es determinista. Numerosas leyes de la física tienen el carácter de ser determinista.

Los experimentos aleatorios se caracterizan porque al realizados bajo las mismas condiciones pueden dar origen a distintos resultados. Estos resultados constituyen los sucesos posibles del experimento.

Entre los sucesos aleatorios se distinguen los sucesos elementales y los compuestos. Por ejemplo en el lanzamiento de una moneda, cada una de las caras constituye un suceso elemental, ya que el suceso cara no puede descomponerse en sucesos más simples, por eso es elemental.
El suceso doble cara al lanzar dos veces una moneda, es un suceso compuesto ya que está formado por los sucesos elementales, salir cara la primera vez y salir cara la segunda vez.
Para Román, en http://studylib.es/doc/5523389/tema-3-espacios-de-probabilidad--definición - axiomática-y, recuperado en mayo 2018.

> "un suceso aleatorio es cualquier característica, hecho o proposición lógica cuya ocurrencia o no ocurrencia pueda ser observada tras la realización del experimento. Así, todo suceso puede identificarse con un subconjunto del espacio muestral".

2.1.1.2 Noción de Aleatoriedad

Cardeñoso (2001), concibe a la aleatoriedad como una magnitud que caracteriza la incertidumbre de ciertos fenómenos y a la probabilidad como una medida relativa, al menos ordinalmente considerada, del grado de certeza en la verificación de un evento, (citado Moreno 2014, p. 199).
Meyer (1986), caracteriza un experimento aleatorio como aquel en el que se identifican los siguientes aspectos:

a) Es posible repetir cada experimento en forma indefinida sin cambiar esencialmente las condiciones.
b) En general no se puede precisar un resultado particular, si se puede describir el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.
c) A medida que se repite el experimento, los resultados individuales parecen ocurrir de forma caprichosa. Sin embargo como el experimento

se repite un gran número de veces, aparece un patrón definido o regularidad, la que hace posible la construcción de un modelo matemático con el cual analizar el experimento, (p. 9, 10).

2.1.2 Espacios de probabilidad.

Los espacios de probabilidad son estructuras Matemáticas que representan modelos de probabilidad para el estudio de los fenómenos aleatorios.
Las definiciones y propiedades que siguen, precisan esta noción.

2.1.2.1 Espacio muestral.

Considere el lanzamiento de un dado, los diferentes resultados que se pueden obtener, representan los resultados posibles de este experimento y determinan un conjunto de 6 resultados: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definición 1: El conjunto de los resultados posibles de un fenómeno aleatorio se denomina espacio muestral. El espacio muestral se anota $\boldsymbol{E}$.

Por ejemplo, suponga el experimento aleatorio de lanzar un dado de 4 caras y observar el número que aparece en la cara que queda en contacto con la superficie. El espacio muestral es $\boldsymbol{E} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ y algunos sucesos posibles A_i son:

A_1: Al lanzar el dado salga 1
A_2: Al lanzar el dado salga 2
A_3: Al lanzar el dado salga el 1 o el 2
A_4: Al lanzar el dado salga el 1 o el 3
A_5: Al lanzar el dado no salga el 2
A_6: Al lanzar el dado no salga el 1

A_7: Al lanzar el dado salga cualquiera de sus caras

A_8: Al lanzar el dado salga un 6 o que no se lance.

Los sucesos A_1 y A_2 son simples, los sucesos A_3, A_4, A_5 y A_6 son compuestos, el suceso A_7 se denomina el suceso imposible y A_8 se denomina el suceso seguro.

En este ejemplo, el conjunto potencia de $\boldsymbol{E}$**,** anotado como ***P (E)*** es el conjunto

P (E) = $\{\emptyset, \boldsymbol{E}, \{\mathbf{1}\}, \{\mathbf{2}\}, \{\mathbf{3}\}, \{\mathbf{4}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}\{\mathbf{1}, \mathbf{3}\}\{\mathbf{1}, \ \mathbf{4}\}, \ \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}, \ \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}, \ \{\mathbf{3}, \mathbf{4}\}, \ \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}\}$.

Observación: Se puede demostrar que ***P (E)*** es un conjunto cerrado con respecto a las operaciones de unión e intersección de conjuntos. Además la terna (**P** (***E***), ∪, ∩) satisfacen las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, idempotencia, involución, cancelativa y las leyes de De Morgan, por lo que este conjunto formado por **P** (***E***), ∪, ∩ constituyen una estructura algebraica denominada álgebra de Boole.

Sea **F** un subconjunto del conjunto ***P (E),*** el cual podría ser, por ejemplo:

F $= \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \boldsymbol{E}, \emptyset\}$

Este conjunto **F** , se caracteriza por:

1. F $\subseteq$ P (E), F $\neq$ $\emptyset$.
2. Todo elemento de **F,** es el complemento de algún elemento de **F**.

   En efecto $E^c = \emptyset$; $\{1\}^c = \{2, 3, 4\}$, $\{1, 2\}^c = \{3, 4\}$, etc.
3. La unión de los elementos de **F** es un elemento **F** .

Los siguientes ejemplos ilustran esta propiedad:

i) $E = \{1\} \cup \{2\} \cup \{1, 2\} \cup \{3,4\} \cup \{1, 3,4\} \cup \{2, 3, 4\} \cup E \cup \emptyset$

ii) $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$

Un subconjunto del conjunto ***P(E)*** que satisface las condiciones 1 y 2 anteriores determina una estructura algebraica denominada algebra de conjuntos.

En este caso los conjuntos representan sucesos aleatorios y estos por lo tanto cumplirán con las siguientes operaciones.

2.1.2.2 Operaciones entre sucesos.

Definición 2: Un suceso o evento es una característica de interés en un experimento aleatorio. Normalmente se los denotara por las letras A, B, C, etc.

Por ejemplo, si en el experimento de lanzar un dado normal, la característica de interés es que salga un número primo entonces se determina el suceso $A = \{2, 3, 5\}$. O si interesa que sea número impar, entonces se determina el suceso $B = \{1, 3, 5\}$.
Como en este enfoque los sucesos aleatorios corresponden a conjuntos entonces son válidas las operaciones de conjuntos entre ellos.

2.1.2.3 Unión de sucesos.

Sean *A* y *B* dos sucesos, la unión de ellos determina otro suceso, el que es compuesto y se representa por $A \cup B$. El suceso $A \cup B$ se verifica si y solo si se produce al menos uno de los suceso *A* o *B.*
Por ejemplo en el experimento: preguntar a un matrimonio por el sexo de cada uno de sus dos hijos. Sea $\boldsymbol{A}$ el suceso "el mayor es niña" y $\boldsymbol{B}$*,* el suceso "el menor es niña". El suceso "el matrimonio tiene al menos una niña" es un suceso compuesto de la forma $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$**.** En este caso $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ es un conjunto que contiene a los sucesos $A\ o\ B$.

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \text{ ó } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$$

Se llama unión de los sucesos $(A_i), i$ perteneciente al subconjunto de índices *I,* al suceso que se verifica si y solo si se cumple al menos uno de los sucesos A_i. Esto, se indica de la siguiente manera: $\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i}$

2.1.2.4 Intersección de sucesos.

Sean $A\, y\, B$ dos suceso, la intersección de ellos determina un suceso compuesto representado por $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, el que se verifica si y solo si ambos sucesos ocurren simultáneamente. La intersección de los sucesos $(A_i), i$ perteneciente al subconjunto de índices *I,* es el suceso que se verifica si y solo si se cumplen simultáneamente todos los sucesos A_i. Esto, se indica de la siguiente manera:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i}$$

En el ejemplo anterior, el suceso "los dos hijos del matrimonio son niñas" es un suceso que compuesto de la forma $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$.

En el caso que la intersección de sucesos de origen a un suceso imposible, representado por $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset,$ diremos que $A\, y\, B$ son sucesos incompatibles.
Por ejemplo al lanzar una moneda los sucesos salir cara y salir sello, al mismo tiempo, son sucesos incompatibles.

2.1.2.5 Suceso Contrario o Complementario.

A todo suceso posible $\boldsymbol{A}$ de un experimento aleatorio le corresponde otro suceso $\overline{\boldsymbol{A}}$ ó $\boldsymbol{A^c}$ llamado suceso contrario que se verifica si y solo si el suceso $\boldsymbol{A}$ no ocurre.

Por ejemplo en el experimento del lanzamiento de una moneda, el suceso cara es contrario al suceso sello. El suceso sello se verifica solo si el suceso cara no ocurre.

En el lanzamiento de un dado el suceso salir un 6 es contrario al suceso salir un número menor que 6. El suceso salir 6 en el lanzamiento de un dado se verifica si y solo si el suceso salir un número menor que 6 no ocurre.

2.1.3 Formalización del cálculo de probabilidades.

Para realizar esta formalización se recurrirá a un modelo axiomático, que considera a los resultados de un experimento aleatorio como subconjunto del espacio muestral y que estos a su vez pueden agruparse en clases de sucesos.

2.1.3.1 Clases de Sucesos.

Definición 3: A todo conjunto no vacío, S, cuyos elementos son conjuntos se le denominará clase de conjuntos.

Sea ***E*** un espacio muestral arbitrario y S una clase de conjuntos del espacio muestral *E*, es decir $S \subset$ P (E), el conjunto potencia de *E.* Considere $S \neq \emptyset$.

S tiene estructura de Algebra de sucesos o Algebra de Boole, si es cerrada para uniones finitas y para la operación de complemento, esto es, si se cumple que:

1. $\forall A \in S$ se verifica que su complemento, $A^c \in S$

2. $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$ se cumple que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in S$

De esta definición, se deducen las siguientes propiedades:

a) El espacio muestral $E \in S$. En efecto, dado un suceso $A \in S$, por la condición 1 se verifica que $A^c \in S$ y por la condición 2, $A \cup A^c = E \in S$.

b) El suceso imposible $\emptyset \in S$. En efecto, $E^c = \emptyset$

c) En función de las leyes de De Morgan, la condición 2 se puede intercambiar por:

$\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$ se verifica que $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in S$

d) Si $A; B \in S$, entonces:

i) $A \setminus B = A \cap B^c \in S$ ii) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in S$.

Al par E, S, donde S es una clase de conjuntos con estructura de algebra de conjuntos, se denomina espacio medible.

Es decir (E, S) es un espacio que contiene conjuntos que son medibles mediante una función que determina en (E, S) una medida.

En el ejemplo del dado de 4 caras, considere al conjunto medible

$$\mathbf{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\{1,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \boldsymbol{E}, \emptyset\}$$

F es un algebra de sucesos, pues **F** $\subset$ ***P (E)*** y **F** $\neq \emptyset$. Además para todo A en **F** se cumple que

$$E^c = \emptyset \,;\ \{1\}^c = \{2,3,4\}\,,\ \{1,2\}^c = \{3,4\}, \{2\}^c = \{1,3,4\}$$

y la unión de los elementos de **F** es un elemento **F**, como se ilustra en los siguientes ejemplos:

i) $\{1\} \cup \{2\} \cup \{1,2\} \cup \{1,3\} \cup \{1,3,4\} \cup \{2,3,4\} \cup E \cup \emptyset = E$

ii) $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$

Entonces $(E,$ **F** $)$ es un espacio medible.

2.1.3.2 Definición axiomática de la probabilidad.

Esta definición se basa en un conjunto de axiomas que establecen los requisitos mínimos para precisar la noción de probabilidad y proporciona las bases para el desarrollo formal de la Teoría de la Probabilidad.

Definición 4: Dado un espacio muestral $\boldsymbol{E}$ asociado a un determinado experimento aleatorio y una clase de conjuntos con estructura de álgebra de conjuntos S, (esto es, (E, S) un espacio medible) se define una función de probabilidad, medida de probabilidad o simplemente probabilidad como una función P definida sobre S y con valores en [0; 1]j

$$P: \; S \; \rightarrow \; [0, 1]$$

que verifica los axiomas:

I. Axioma de no negatividad

$$P(A) \geq \; 0; \; \forall A \; \in S$$

II. Axioma del suceso seguro

$$P(E) \; = \; 1$$

III. Axioma de adición numerable o finita:

Dada una colección numerable de sucesos, $\{A_i\}_{i \in N} \subset$ S, incompatibles dos a dos, es decir , $A_i \cap, A_j = \; \emptyset, \forall \; i \; \neq j$, se cumple que

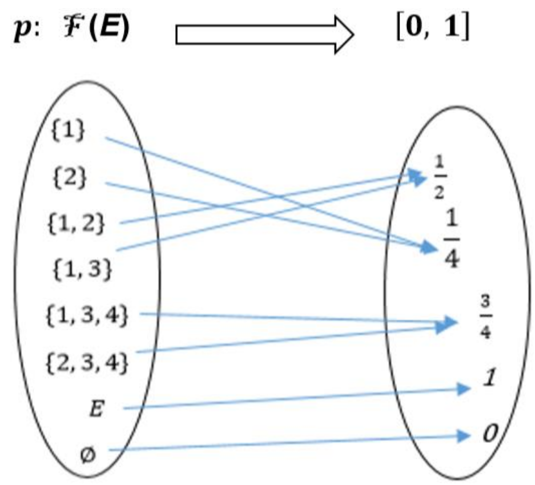
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Así $P(A), \forall A \; \in S$, denota la probabilidad del suceso A.

A la terna formada por el espacio muestral E, el álgebra de conjuntos S y la probabilidad $P, (E; \; S; \; P)$ se le denomina espacio probabilístico o espacio de probabilidad.

Por ejemplo sabemos que si $\boldsymbol{E} = \{1, 2, 3, 4\}$ y

F = $\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\{1, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \boldsymbol{E}, \emptyset\}$, $(\boldsymbol{E},$ **F** $)$ es un espacio de medible, así: $\boldsymbol{p}$: **F (*E*)** $\Rightarrow$ $[\mathbf{0},\ \mathbf{1}]$ se puede representar como:



2.1.4 Propiedades de la Teoría Axiomática de la Probabilidad:.

2.1.4.1 Reglas para calcular probabilidades:

I1. La probabilidad del suceso imposible es nula: $P(\emptyset) = 0$.

I2. Aditividad Finita: $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in S\ y\ A_i \cap, A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$, se cumple que:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

I3. Para cualquier suceso $A \in S$ se verifica que la probabilidad de su complemento $P(A^c)$ es

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

I4. Para dos sucesos cualesquiera $A \ y \ B \ \in S$ se verifica que

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

I5. Para dos sucesos cualesquiera $A \ y \ B \ \in S$; con $A \subset B$ se verifica que

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$$

I6. **Regla de adición**: Para dos sucesos cualesquiera $A \ y \ B \ \in S$ se verifica que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

I. Otras propiedades

II1. Para cualquier suceso $A \in S$, se verifica que $0 \leq P(A) \leq 1$.

II.2. Para dos sucesos cualesquiera $A \ y \ B \ \in S$; con $A \subset B$ se verifica que

$$P(A) \leq P(B)$$

Dos de las interpretaciones más convencionales de la probabilidad, por sus aplicaciones a situaciones concretas distintas son el significado clásico, materializado en la regla de Laplace y el significado frecuencial, materializado en la ley de estabilización de la frecuencia. Ambas interpretaciones satisfacen los axiomas de la teoría axiomática de Kolmogórov.

2.1.4.2 Significado Clásico de la Probabilidad: Regla de Laplace.

La concepción clásica considera espacios muéstrales *E* asociados a experimentos aleatorios, los que satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. E consta de un número finito de elementos.
2. Todos los sucesos elementales son igualmente probables.

Sea A un suceso arbitrario asociado al experimento, que se puede presentar en m de los n posibles resultados de este. Se define la probabilidad del suceso A como:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Siendo $\boldsymbol{m}$ el número de sucesos elementales que corresponden al suceso A y $\boldsymbol{n}$ el número de elementos del espacio muestral E**.**

Por el ejemplo, en el dado de 4 caras, sea A el suceso de que aparezcan los números 1 ó 2 al lanzarlo. La probabilidad de que ocurra A y de que no ocurra A, viene dada por:

$P(A) = P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; por regla de Laplace y por axioma III, de adición finita.

Por otra parte $P(A^c) = 1 - P(1 \cup 2) = 1 - [P(1) + P(2)] = 1 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; por regla I3, probabilidad del complemento.

2.1.4.3 Significado frecuencial de la Probabilidad:

Esta definición fue formalmente establecida por Richard von Mises en 1928, y se basa en el concepto de frecuencia relativa de un suceso asociado a un experimento aleatorio que se repite sucesivamente bajo idénticas condiciones.

Sea $\boldsymbol{\varepsilon}$ un experimento aleatorio y A_i los sucesos que lo componen. Se designa por $f(A_i)$ a la cantidad de veces que el suceso A_i se presenta en $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $f(A_i)$ se denomina la frecuencia de aparición de A_i.

Sea A un suceso y $f(A)$ la frecuencia con la que ocurre A. Se define la frecuencia relativa de A, $h(A)$, en las N pruebas como:

$$h(A) = \frac{f(A)}{N}$$

Se consideran las siguientes propiedades de la frecuencia relativa.

1. La frecuencia relativa $h(A)$ con la que aparece un mismo resultado ***A*** en una serie idéntica de experimentos es un número comprendido entre cero y uno.

   Es decir:

   $0 \leq h(A) \leq 1.$

2. Para cualquier número n de realizaciones del experimento, $h(E) = 1$, es decir el suceso seguro aparece con frecuencia relativa 1.

3. Para cualquiera sucesos $A \, y \, B$ incompatibles asociados a un mismo experimento, se verifica que $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$.
4. Cuando aumentamos el número de pruebas de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa de un suceso tiende a aproximarse alrededor de un valor fijo. Este valor se define como la probabilidad del suceso, en la concepción frecuencial de la probabilidad y es conocido como ley de la estabilidad de la frecuencia.

La teoría frecuencial asegura que existe el límite de esas frecuencias relativas, y define la probabilidad de un suceso como este límite. Lo expresa como:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} h(A)$$

2.1.4.4 Un ejemplo de probabilidad con espacio muestral infinito no contable.

En este caso, se define un suceso en un subconjunto X de un espacio muestral *E*, no numerable, con medida finita $m(X$ ***).***

Sea E el intervalo abierto (x, y) de la recta real $R,\ x, y\ \in R;\ x \neq y\boldsymbol{.} E\ es$ un espacio muestral con medida finita.

El intervalo abierto (x, y) determina una bola abierta $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$, definida como

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}\ \ /\ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \in\ \boldsymbol{R}^{+}\}.$$

Es decir $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$ son los puntos de la recta real que se encuentran a una distancia menor que $\boldsymbol{r}$ de $\boldsymbol{a}$, lo que se representa por el intervalo $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{r}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{r})$ y por el grafico siguiente:

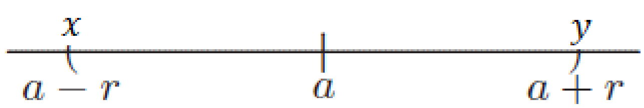
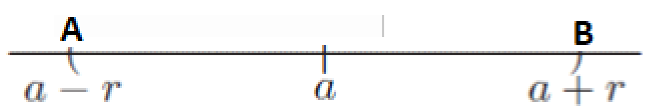


Figura $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$; (x, y)

Considere en la recta real los puntos A, B como extremos del intervalo (x, y).

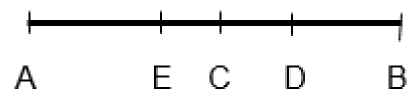


Se selecciona un punto aleatorio Q en una familia de subconjuntos de $\overline{AB}$, la probabilidad de que dicho punto pertenezca a algún elemento X de esta familia, los que también son intervalos, se define como:

$$P(Q) = \ \frac{\boldsymbol{m}(X)}{\boldsymbol{m}\overline{AB}}$$

Donde $X \subset \overline{AB}, \boldsymbol{m}(X)$ corresponde a la medida del intervalo X y $m\overline{AB}$ es la medida del segmento $\overline{AB}$.

Por ejemplo sea *E* el segmento $\overline{AB}$ y 'd' una función distancia definida en *E*, así (*E, d)* es un espacio de medida.



Sean $X = \overline{AE}, \overline{EC}, \overline{CD}\ y\ \overline{DB}$ subconjuntos de $\overline{AB},$ tales que:

$$\overline{AE} + \overline{EC} + \overline{CD} + \overline{DB} = \overline{AB}$$

La función distancia 'd', permite determinar la medida de estos subconjuntos, expresadas en las relaciones siguientes:

$$\overline{AB} = 2\,\overline{AC}; \qquad \overline{AB} = 3\,\overline{AE}; \qquad \overline{AB} = 4\,\overline{DB}$$

Se selecciona aleatoriamente un punto de $\overline{AB}$, la probabilidad de que dicho punto pertenezca al subconjunto $X = \overline{EC}$ viene dada por:

$$\overline{EC} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{6}\overline{AB}$$

Así $$P(\overline{EC}) = \frac{\boldsymbol{m}(\overline{\boldsymbol{EC}})}{\boldsymbol{m}(\overline{\boldsymbol{AB}})} = \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\overline{\boldsymbol{AB}}}{\overline{\boldsymbol{AB}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

Luego la probabilidad que el punto se encuentre en el segmento $\overline{\boldsymbol{EC}}$ es un sexto.

Si dicho punto se encuentra en el segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$, entonces su probabilidad es:

$$P(\overline{\boldsymbol{CD}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}.$$

Probabilidad Subjetiva

El cálculo de probabilidades no es más que la teoría matemática
que enseña a ser coherentes
Bruno de Finetti.

2.2.1 La probabilidad subjetiva.

Este enfoque de la probabilidad se basa en el supuesto que toda persona, que se precie de una actitud coherente frente a la vida, tiene que ajustar sus estimaciones a las reglas del cálculo de probabilidades, si no quiere exponerse a perder pase lo que pase. Bruno de Finetti y Frank Ramsey, descubrieron en forma independiente este hecho fundamental, el que dio origen al enfoque subjetivista de la probabilidad.

Para De Finetti la probabilidad es un atributo de nuestras opiniones subjetivas sobre aquellos asuntos acerca de los cuales no podemos o no queremos hacer una aseveración objetiva. Por otra parte, asegura que una aseveración objetiva es verdadera o falsa, más no probable y el valor numérico de las probabilidades mide el grado de confianza que cada opinión inspira, ahora y aquí, a quien la profesa.
La probabilidad subjetiva que de Finetti indica puede estar referida a sucesos singulares y no implica ni supone la r epetición de experimentos bajo condiciones controladas.

En este enfoque también se considera que en un importante género de casos si los sujetos son coherentes en la asignación subjetiva de probabilidad, estas tenderán al acuerdo intersubjetivo, conforme lo establece el Teorema de Representación.

Dicho de otro modo, si distintos sujetos basan las decisiones en la misma experiencia, las estimaciones subjetivas de estos sujetos necesariamente convergen.
La noción de probabilidad subjetiva se atribuye al grado de creencia real de una persona, tal y como lo manifestaría en una apuesta. Este grado de confianza da lugar a una hipótesis o proposición H, la que considera la ocurrencia de una evidencia E, en Mateos y Morales (1985, p.129).

En el lenguaje cotidiano frases como ‘es probable que … representan, según Bruno de Finetti el grado de creencia en la ocurrencia de un suceso, percibido por un sujeto en el momento que lo expresa. Este grado de creencia corresponde a la probabilidad del suceso y es necesariamente subjetiva, en Bernardo (1997, 4).
De Finetti considera que el propósito de la probabilidad subjetiva es caracterizar al conjunto de las opiniones lógicamente admisibles, es decir aquellas opiniones que tienen cierto grado de posibilidad de ocurrencia.
Sucede que en la credibilidad de previsiones y suposiciones que las personas realizan a diario se está dispuesto a tener un cierto grado de mayor o menor confianza, en su ocurrencia. Al combinar estos juicios se razona conforme al cálculo de probabilidades de manera inconsciente e intuitiva.

Un ejemplo que ilustra este tipo de razonamiento es el de las investigaciones policiales, en las que se procede siempre por indicios e inducción, trabajando siempre y solamente sobre lo probable y no sobre lo cierto, que es precisamente lo que se quiere lograr.
Sobre este ejemplo, De Finetti (1937/2007, p. 174) plantea el caso de un sujeto que ha cometido un delito; algunas evidencias llevan a sospechar de tres individuos, permitiendo elaborar 3 hipótesis al respecto.

El comisario a cargo de la investigación atribuye un cierto grado de credibilidad a cada una de estas hipótesis, con lo que aplica implícitamente el teorema de las probabilidades totales.

Si los sujetos son A, B y C, las hipótesis son:

H1: A es culpable; **H2:** B es culpable y **H3:** C es culpable

Estas tres hipótesis son mutuamente excluyentes por lo que la probabilidad total se expresaría en como:

$$P(A \cup B \cup C) = P_A + P_B + P_C$$

No es necesario adoptar esta simbología para evidenciar que se razona a partir de este teorema, inconscientemente se usa al tomar decisiones en diferentes circunstancia de la vida en las que se ajusta a las probabilidades.

El grado de creencia que mide la probabilidad se podrá establecer indirectamente por una apuesta sobre la ocurrencia de un suceso. Esta probabilidad procede directamente de la intuición y, según Koopman, "es la experiencia la que se interpreta en términos de probabilidad, y no la probabilidad la que se interpreta en términos de experiencia", en Mateos y Morales (1985, p. 131).

La probabilidad subjetiva está sujeta a ciertas leyes, las que permiten determinar un número, que represente el grado de incertidumbre de un sujeto relativo a un juicio dado y a reconocer su naturaleza teórica.

2.2.2 Principios de la probabilidad subjetiva.

De Finetti se basa en tres principios de sentido común, para axiomatizar la probabilidad subjetiva. Estos son el principio de intercambiabilidad, el de coherencia y el de consistencia.

Principio de Intercambiabilidad

De Finetti considera la observación:

> Si un individuo juzga igualmente probables dos eventos, esto es, si se siente ante ellos en el mismo estado de ánimo, con el mismo grado de duda, de incertidumbre, de convencimiento, podría intercambiar indiferentemente los temores y las esperanzas, las ventajas o los inconvenientes que derivan de la realización de uno de ellos con las consecuencias, que se han supuesto idénticas, del otro, (Bertrand J., 1889, p. 27).

para formular el principio de intercambiabilidad, según el cual el orden en que fueron tomadas o asignadas las codificaciones de un conjunto de observaciones futuras $x_1, x_{2,\dots,}x_n,$ no afecta al resultado que puedan arrojar las estimaciones subjetivas.

Así estas observaciones $(x_1, x_{2,\dots,}x_n)$ son intercambiables bajo la(s) condición(es) H, si las probabilidades subjetivas de ocurrencia, asignadas por O se mantiene invariables al cambiar los subíndices de los x_i. Por ejemplo:

$$p(x_1 = 3, \qquad x_2 = 5 \ / \ H) = \ p(x_2 = 3, \qquad x_1 = 5 \ / \ H)$$

Esta formalización de sucesos intercambiables, de Finetti la expresa en lenguaje corriente como:

> Los sucesos intercambiables, son aquellos que ocurren de modo aleatorio en una sucesión de pruebas y tales que el orden en que ocurren

> no afecta a las probabilidades que deseamos calcular. … "Se trata, en substancia, de lo que de ordinario se llama sucesos independientes con probabilidad constante pero desconocida", en "Gli eventi equivalenti e il caso degenere", citado en Gutiérrez del Instituto Nacional de Estadística.

A objeto de clarificar el significado de este concepto, Torretti (2003) plantea el siguiente ejemplo,

> Considere una bolsa que contiene muchas bolas blancas y negras, en una proporción desconocida. Un niño con los ojos vendados extrae bolas de la bolsa, alguien anota su color y luego la devuelve inmediatamente a la bolsa. Cualquiera que fuese las predicciones que en las próximas 100 extracciones, aparezcan 43 bolas blancas, sería normalmente indiferente al orden de aparición de estas. Torretti señala tomando otro ejemplo, que la probabilidad que asigna una persona sobre el porcentaje de varones entre los próximos 100.000 nacidos vivos depende en nada del orden en que se sucedan los nacimientos de uno y otro sexo, (p. 17).

Principio de coherencia.

De Finetti plantea que cuando un sujeto asigna un grado de confianza a un suceso dado, se expresan las condiciones por las que el sujeto estaría dispuesto a apostar por la ocurrencia del suceso.

Lo que requiere que no existan contradicciones en las probabilidades que un individuo realiza a distintos sucesos relacionados entre sí, es decir, requiere la coherencia del individuo, (Mateos y Morales 1978, p. 130). Este principio de coherencia obliga al sujeto O a respetar ciertas restricciones, que corresponden a los teoremas del cálculo de probabilidades a las que, un sujeto O, debe ajustar su evaluación subjetiva de la probabilidad de varios sucesos si no quiere que exista una contradicción fundamental entre ellas con las que pierde seguramente la apuesta***,*** siempre que el adversario sepa explotar su error, en De Finetti (1937/2007, p 178).

A un individuo que no comete tal error, esto es, que evalúa las probabilidades de un modo que no coloca a sus contrincantes en la situación de triunfar con toda seguridad, de Finetti lo llama coherente.

Esta idea se formaliza demostrando que si los sucesos $\{S_1, \ldots, S_k\}$ forman una clase de subconjuntos del espacio muestral $\boldsymbol{E}$, es decir los S_i representan sucesos incompatibles dos a dos, por lo tanto uno solo puede ocurrir y $\{p_1, \ldots, p_k\}$ son los grados de creencia (p_j) en la ocurrencia de cada uno de ellos, asignados por un individuo $\boldsymbol{O}$ en las condiciones $\boldsymbol{H}$, entonces:

$$\boldsymbol{p_j} = \boldsymbol{P_j}(\boldsymbol{S_j} \,|\boldsymbol{H}).$$

En esta expresión, $\boldsymbol{p_j}$ representa grados de creencia subjetivos ($\boldsymbol{S_j}$ representa los sucesos en estudio y H son las condiciones en las que ocurren los $\boldsymbol{S_j}$).

Así la condición necesaria y suficiente para que no sea posible construir un conjunto de apuestas en las que $\boldsymbol{O}$ necesariamente pierda es que las $p_j's$ deben satisfacer las propiedades convencionalmente aceptadas para definir formalmente la probabilidad, es decir que $p_j \geq 0$ y $\sum_{\mathrm{j}} \mathrm{p_j} = 1$; para evitar un comportamiento incoherente, intrínsecamente contradictorio, los grados de creencia deben comportarse como probabilidades (de Finetti, 1931b, 1937) para que consecuentemente, pueda definirse una medida de probabilidad a partir de ellos, Bernardo (1998, p. 5).

Criterio de consistencia.

Este criterio relaciona el grado de confianza en la ocurrencia de un suceso $\boldsymbol{S}$ con la evidencia lógica sobre él. Lo que debería materializarse en asignar el máximo grado de confianza en la ocurrencia de $\boldsymbol{S}$, si hay evidencia lógica de que el suceso ocurra y si la evidencia entraña la negación de $\boldsymbol{S}$, habrá que poner el mínimo grado de confianza en que S ocurra.

2.2.3 Axiomática de De Finetti.

De Finetti propone que es posible definir un suceso que nos plantea duda sobre su ocurrencia o no ocurrencia, esta incertidumbre lo induce a definir dos términos, la comparación entre sucesos y la graduación de la incertidumbre.
Al comparar dos o más sucesos surge la relación “más probable que …” y la graduación de un(os) suceso(s) surge en la valoración cuantitativa y directa del grado de probabilidad atribuida por una persona al suceso definido.

2.2.3.1 Postulados.

Para la relación “más probable que …” De Finetti fórmula 4 postulados:

> I.- Un suceso incierto S es igualmente probable, más probable o menos probable que otro.
>
> II.- Un suceso incierto S siempre se nos presenta más probable que el suceso imposible y menos probable que un suceso seguro.
>
> III.- Si un suceso S se juzga más probable que otro S'; el cual a su vez, se ha juzgado más probable que otro S'' entonces el suceso S es más probable que S''.
>
> IV.- Si S_1 es más probable que S_2 y si S'_1 es más probable que S'_2, puede afirmarse que $S_1 \cup S'_1$ es más probable que $S_2 \cup S'_2$ con tal que S_1 sea incompatible con S'_1 y S_2 sea incompatible con S'_2, (Gutierrez p. 122, 123).

Estos cuatro enunciados son proposiciones evidentes que se constituyen en axiomas de la probabilidad subjetiva, los que junto a los tres principios intuitivos anteriores permitirán fundamentar las leyes de la teoría de la probabilidad subjetiva.

2.2.3.2 Propiedades.

Para demostrar proposiciones en esta teoría, se considera un suceso S el cual es la suma lógica de $S_i, i \in N$. En general una suma lógica se designa por $\bigcup_i^n S_i$ y plantea que los S_i son sucesos incompatibles, es decir uno y sólo uno de ellos puede ocurrir, por lo tanto la intersección de las distintas combinaciones de sucesos S_i, considerados como conjuntos, es vacía.
La negación del suceso S, es el suceso que es verdadero o falso en tanto S sea falso o verdadero respectivamente y se designa por $\sim S$.

De Finetti considera que la opinión de un sujeto $\boldsymbol{O}$, que se encuentra a la espera de la ocurrencia de ciertos sucesos futuros S, se caracteriza por las probabilidades que le asigna y estas no deben ser intrínsecamente contradictorias, de acuerdo al principio de coherencia.

Para obtener la probabilidad subjetiva $P(S)$ de sucesos no repetibles por la experimentación, este autor concibe la metáfora de un sujeto $\boldsymbol{O}$ que acepta apuestas con un jugador que fija posturas $\boldsymbol{A}$, a favor(o en contra) de la ocurrencia de un suceso S, para lo cual un boleto de apuesta que el jugador compra le da derecho a ganar un premio A si S ocurre (o no).
Si $\boldsymbol{p}$ es la probabilidad del suceso $\boldsymbol{S}$ entonces el costo del boleto, de acuerdo a las reglas de la apuesta, se determina por la expresión $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A}$.
Así si $\boldsymbol{S}$ ocurre, el jugador obtendrá una ganancia, designada por $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{S})$, la que corresponde a la diferencia entre el premio A y el costo del boleto $p \cdot A$. Esto es:

$$G(S) = A - p \cdot A$$

$$G(S) = (1 - p) \cdot A \qquad \text{ec. 2}$$

Si se ha apostado a que S no ocurre, es decir a $\sim S$**, y S** ha ocurrido, entonces la ganancia se expresa como:

$$G(\sim S) = -p \cdot A \qquad \text{ec. 3}$$

Considere posturas ***A***$_1$, ***A***$_2$, …, ***A***$_n$, un individuo que se precie de ser coherente asignara probabilidades a ciertos eventos S$_1$, S$_2$,…, S$_n$, aceptando que no es posible que la ganancia G resulte positiva en todo caso.

Es decir que para las ganancias de cada uno de los S_i puede suceder que:

$G(S_i) = (1 - p_{\mathrm{i}}) \cdot A_{\mathrm{i}}$, >0, para algún(os) i, lo que significa que lo que se gana en la apuesta es mayor que la compra del boleto.

$G(S_i) = (1 - p_{\mathrm{i}}) \cdot A_{\mathrm{i}}$, = 0, para algún(os) i, lo que significa que lo que se gana en la apuesta es mayor que la compra del boleto.

$(S_i) = (1 - p_{\mathrm{i}}) \cdot A_{\mathrm{i}}$, <0, para algún(os) i, lo que significa que lo que se gana en la apuesta es menor que la compra del boleto.

Para apuestas sobre un evento único S, de Finetti plantea que una condición necesaria y suficiente para la coherencia es la de atribuir a p(S) un valor único no negativo y no mayor que 1.

Estas formulas, que son de sentido común, permiten plantear las ganancias obtenidas por un jugador, como sigue: Sea S un suceso que es una suma lógica de $S_1, S_2, \ldots . S_n$ sucesos incompatibles y sean $p_1, p_2, \ldots . p_n$ las probabilidades de esos sucesos, quien apueste a tales eventos las posturas $A_1, A_2, \ldots . A_n$ para los S_i, las ganancias de los n casos posibles es la diferencia entre A_i y el costo de los boletos para cada apuesta.

En efecto, considere las ganancias de cada uno de los S_i expresados como:

$$G(S_1) = (1 - p_1) \cdot A_1$$

$$G(S_2) = (1 - p_2) \cdot A_2$$

::::::::::::::::::::::::::::::::::::

$$G(S_n) = (1 - p_n) \cdot A_n$$

Sumando estas expresiones se tiene:

$$G(S_1)+\ G(S_2)+\cdots+\ G(S_n)=(1-\ p_1)\cdot A_1+\ (1-\ p_2)A_2+\cdots+\ (1-\ p_n)\cdot A_n$$
$$=\ A_1+\ A_2+\cdots+\ A_n-\ p_1A_1\text{-}\ p_2A_2-\cdots-\ p_nA_n=\ \sum_{i=1}^{n}A_i-\ \sum_{i=1}^{n}p_i\cdot A_i\ G(S_1)+$$
$$G(S_2)+\cdots+\ G(S_n)=\sum_{i=1}^{n}A_i-\ \sum_{i=1}^{n}p_i\cdot A_i$$

Llámese A a $\sum_{i=1}^{n}A_i$ y $p\cdot A$ a $\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot A_i$, se tiene que:

$$G(S_1)+\ G(S_2)+\cdots+\ G(S_n)=\ A-\ \ p\cdot A$$

Así $$G(S)=\ A-\ \ p\cdot A$$

Donde p es la probabilidad de la ocurrencia de S y A es lo que apuesta un jugador por la ocurrencia de S.

Un teorema fundamental de la teoría de la probabilidad subjetiva es el siguiente:

Teorema 1: S es un suceso seguro si y solo si su probabilidad es 1.

Demostración:⇒)

Como S es seguro entonces $G(S)=(1-p)\cdot A$.

Si $p\neq 1$, existe una apuesta A tal que $G(S)=(1-p)\cdot A$.

Si $p=1$ entonces $G(S)=0$.

Con esto, por una parte se asegura el principio de coherencia y por otra se concluye que S es un suceso seguro.

Teorema 2: S es un suceso imposible si y solo si su probabilidad es 0.

Demostración:⇒)

Si S es un suceso imposible entonces el único suceso posible es $\sim S$. Pero $\sim S$ no ocurrirá luego su ganancia es $G(\sim S)=-p\cdot A$. Así, por el principio de coherencia $p=0$ es una condición necesaria para que $G(\sim S)=0$.

Así la probabilidad para un suceso imposible es cero.

Demostración: ⇐)

Como $p = 0$ esto es suficiente para qe $G(\sim S) = 0$, lo que satisface la restricción impuesta por el principio de coherencia para un suceso seguro $\sim S$, que no ocurrirá. Luego S es un suceso imposible.

Para asegurar la unicidad de la asignación de probabilidad, supongamos que S y $\sim S$ sean efectivamente posibles, entonces sus ganancias se expresan como:
$G(S) = (1 - p) \cdot A$ y $G(\sim S) = -p \cdot A$
Sean p' y p'' las probabilidades asignadas a la ocurrencia del suceso S, $p' \neq p''$. Las ganancias posibles se expresarían por:

$$G(S) = (1 - p') \cdot A' + (1 - p'') \cdot A'' \quad \text{ec. 4}$$
$$G(\sim S) = -p' \cdot A' - p'' \cdot A'' \quad \text{ec. 5}$$

Si consideramos a estas dos ecuaciones como lineales en las incógnitas A' y A'', su determinante es:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - p' & 1 - p'' \\ -p' & -p'' \end{vmatrix} = (1 - p') \cdot (-p'') - (-p') \cdot (1 - p'') = p' - p''$$

Si $\Delta_1 \neq 0$ significa que para cualquier A' y A'' se tendrían que $G(S)$ y $G(\sim S)$ deberían ser ambos mayores que cero, lo que es una contradicción.
Por lo tanto no se puede asignar a un suceso dado más de un único valor, el que debe estar comprendido entre 0 y 1.
En efecto, si $p < 0 \rightarrow -p > 0$ y $1 - p > 1 > 0$. Tomando $A > 0$ se tiene que

$$G(S) = (1 - p) \cdot A > 0 \quad \text{y} \quad G(\sim S) = -p \cdot A > 0,$$

lo que contradice el principio de coherencia.
Si $p > 1 \rightarrow 1 - p < 0$ y si se elige $A < 0$ se tiene que $G(S) = (1 - p) \cdot A > 0$ y $G(\sim S) = -p \cdot A > 0$, lo que contradice el principio de coherencia.

Teorema 3: La probabilidad de un suceso probable queda determinado por p tal que $0 \leq p \leq 1$.

Demostración:

Sea S un suceso probable, al que un jugador le apuesta A. Se cumple que:

$$G(S) = (1-p) \cdot A \qquad \text{y} \qquad G(\sim S) = -p \cdot A$$

$$p \cdot G(S) = \cdot (1-p) \cdot A \quad \text{y} \qquad (1-p)G(\sim S) = -p \cdot (1-p) \cdot A$$

$$p \cdot G(S) + (1-p)G(\sim S) = p \cdot (1-p) \cdot A - p \cdot (1-p) \cdot A = 0 \qquad \text{ec. 6}$$

Para que se cumpla ec. 6, $p \geq 0$ y $1 - p \geq 0$, lo que significa que eligiendo un A arbitrario, $G(S)$ y $G(\sim S)$ no pueden ser ambas positivas, de lo contrario la igualdad: $p \cdot G(S) + (1-p)G(\sim S) = 0$, no se cumpliría.

Así la probabilidad de todo suceso probable es un número p tal que $0 \leq p \leq 1$.

A continuación se demostrara el teorema de las probabilidades totales.

Teorema 4: Teorema de las probabilidades totales.

Sea S un suceso que es una suma lógica de $S_1, S_2, \ldots . S_n$ sucesos incompatibles, es decir $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots . \cup S_n$ y sean $p_1, p_2, \ldots . p_n$ lasprobabilidades de esos sucesos valoradas por un sujeto dado O. Entonces se cumple que:

a) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

b) $P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$

Demostración:

Sea $S_1, S_2, \ldots . S_n$ una clase completa de sucesos incompatibles, lo cual significa que para algún $i \epsilon \{1, 2, \ldots, n\}, S_i$ ocurrirá. Es decir $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ es un suceso seguro. Así un jugador que apuesta a los S_i obtendrá ganancias G_i expresadas por:

$$G_1 = A_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot A_i$$

$$G_2 = A_2 - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot A_i$$

::

$$G_n = A_n - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot A_i$$

Conocidas estas ganancias, se determina un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas A_i, cuyo determinante es:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-p_1 & -p_2 & \cdots & -p_n \\ -p_1 & 1-p_2 & \cdots & -p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_1 & -p_2 & \cdots & 1-p_n \end{vmatrix} = 1-(p_1+p_2+\ldots\ +p_n)$$

Si $\Delta_2 \neq 0$ se cumple que siempre es posible determinar premios A_i tales que los valores de las ganancias sean todos positivos, lo que contradice el principio de coherencia. Por lo tanto se hace necesario que $\Delta_2 = 0$ y con ello que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$=1, como se quería demostrar.

Esta condición necesaria para la coherencia es también suficiente, puesto que si $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$=1, se satisface la identidad siguiente,

$$G_k = A_k - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot A_i$$

Para cualesquiera A_i.

$$G_k = A_k - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot A_i \quad /\cdot p_k$$

$$p_k \cdot G_k = p_k \cdot A_k - p_k \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot A_i$$

Sumando estos términos en k se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot G_k = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot A_k - \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot A_i$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot G_k = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot A_k - \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot A_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot A_i - \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot A_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot A_i \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$

Pero $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, así $\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot G_k = 0$

Lo que indica que las ganancias G_k no siempre son positivas, como se ha venido sosteniendo.

Para demostrar b) suponga que $S_1, S_2, \dots . S_n$ no constituye una clase completa de sucesos incompatibles entonces agregamos a esta sucesión un suceso que la convierta en una tal clase. Sea S_0 el suceso definido como “ninguno de los S_i anteriores se realiza, entonces ahora $S_0, S_1, S_2, \dots . S_n$ es una clase completa de sucesos incompatibles. Aquí solo hay dos tipos de sucesos S_0 y $(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n)$, considerando cada S_i como conjunto.

De acuerdo a la definición de S_0, el es un suceso imposible, luego $P(S_0) = 0$. Así se cumple que:

$$P(S_0) + P(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n) = 1$$

Y por a) se cumple lo que se quería demostrar:

$$P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

Otros resultados son los siguientes:

Corolario 1: Las probabilidades de dos sucesos contrarios son complementarios.

Demostración:

Sean S y $\sim S$ sucesos contrarios, entonces ellos forman una clase finita y completa de sucesos incompatibles. Así $P(S) + P(\sim S) = 1.$ Lo que demuestra el corolario.

Corolario 2: Si el suceso S implica el suceso S', esto es si S' es una consecuencia necesaria de S. Entonces la probabilidad de S no es mayor que la probabilidad de S'.

Demostración:

Sean S y S' dos sucesos tales que S' depende de la ocurrencia de S. Si consideramos a S y S' como conjuntos tales que $S \subseteq S'$, se tiene que $S - S' = \emptyset$. Es decir $S - S'$ es un suceso imposible.

Por otra parte se cumple que $S' = S + (S' - S)$

Y como S y $S' - S$ son una clase completa de sucesos incompatibles, se cumple el teorema 4 (de las probabilidades totales).

Esto es: $P(S') = P(S) + P(S' - S) \geq P(S)$.

Para finalizar este estudio, De Finetti considera al conjunto $\mathfrak{S}$ de sucesos S cuyas probabilidades P(S) evalúa un sujeto **O**. Por el principio de coherencia es necesario que P(S) cumpla las propiedades siguientes:

a) Para cualquier $S \in \mathfrak{S}$ se cumple que $0 \leq P(S) \leq 1$;

b) Cualesquiera que sean los sucesos incompatibles S y $S' \epsilon \mathfrak{E}$ se cumple que

$$P(S + S') = P(S) + P(S')$$

c) Para todo suceso seguro $S \in \mathfrak{E}$ se cumple que, $P(S) = 1$

d) Para todo suceso imposible, $S \in \mathfrak{E}$ se cumple que $P(S) = 0$

Estas condiciones son también suficientes y una versión de su demostración aparece en De Finetti (1930).

2.3 Análisis del saber Institucional

2.3.1 Las bases curriculares y los programas de estudio.

En el marco de Ley General de Educación Chilena (Nº 20370, 2009), se definen las bases curriculares para la enseñanza básica, las cuales formulan estándares de aprendizaje, decreto Nº 439, (2012, p. 3).

Las bases curriculares para la Educación Básica establecen que:

Los Objetivos de Aprendizaje relacionan en forma más explícita las habilidades, los conocimientos y las actitudes y evidencian en forma clara y precisa cuál es el aprendizaje que el estudiante debe lograr. Se conforma así un currículum centrado en el aprendizaje, que declara explícitamente cuál es el foco del quehacer educativo”.

La organización de las bases curriculares comprende cuatro habilidades del pensamiento matemático: Representar, Modelar, Argumentar, Comunicar y Resolver Problemas, las que se integran con los objetivos de aprendizaje.
Por otra parte los programas de estudio formulados por MINEDUC materializan los objetivos de aprendizaje (OA) propuestos en las bases curriculares, mediante ejemplos de actividades que ayudarían al profesor a planificar la

enseñanza. Estos ejemplos, pueden servir también como sugerencias a los autores de textos escolares.

Los programas de estudio, contienen orientaciones didácticas que especifican y fundamentan la forma de desarrollar las actividades propuestas.

En la educación básica, la matemática escolar considera cinco ejes temáticos, uno de ellos es el eje “Datos y Probabilidades”, el que forma parte de los programas de quinto y sexto básico, al respecto el programa señala:

> “Este eje responde a la necesidad de que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos y que se inicien en temas relacionados con el azar. Estos conocimientos les permitirán reconocer estas representaciones en su vida familiar. Para lograr este aprendizaje, es necesario que conozcan y apliquen encuestas y cuestionarios por medio de la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido”, (MINEDUC 5º básico, p. 34).

La cita anterior se centra solo en el registro, clasificación y lectura de información expresada en tablas y gráficos y no en comprender como se usan estos datos para estimar probabilidades; una de las seis competencias declaradas por Garfield y Ben – Zvi 2007, citado en Estrella (2009), (SOCHE, 2011, p. 14).

Tampoco han sido consideradas las orientaciones para la enseñanza de la probabilidad y la estadística formuladas por la Sociedad Chilena de Estadística (SOCHE) en el año 2011, sostiene que “uno de los objetivos principales de la educación estadística es desarrollar el pensamiento estadístico propio de un ciudadano y consumidor informado, que necesita usar razonamientos estadísticos”, (p. 14).

Por lo que se puede suponer que en el programa oficial de quinto básico la noción de probabilidad está ausente.

En 5° básico el propósito del eje datos y probabilidad es: “Predecir y conjeturar acerca de la ocurrencia de un evento”, y en el de 6º básico el: “Predecir y conjeturar acerca de la posibilidad de ocurrencia de un evento mediante la realización de experimentos con dados y monedas”.

Al respecto se advierte que en quinto básico los eventos pueden estar asociados a sucesos cotidianos, únicos e irrepetibles. Estos podrían incluir experiencias reales de los alumnos y poner en funcionamiento nociones de probabilidad subjetividad. En cambio en sexto básico se advierte un cambio de significado de la probabilidad, puesto que considera juegos de azar convencionales para la enseñanza de la probabilidad, los que recurren a artefactos aleatorios, dados y monedas y ponen en funcionamiento el significado experimental de la probabilidad.

De aquí en adelante se verá que el enfoque predominante es calculatorio y se apoya en las fórmulas para calcular probabilidades.
Hasta el año 2015, para los cursos de 7° y 8° básico existieron los programas de estudio, en los que este eje se denominaba datos y azar.

En el programa de 7° básico, el propósito de la enseñanza de la probabilidad es:

> “… (los estudiantes) continúen su trabajo con el tópico de probabilidades, profundizando en el estudio de situaciones de incerteza y experimentos aleatorios. En este nivel se enfatiza el trabajo con tablas de frecuencia a partir del registro de los resultados de experimentos aleatorios. Será importante la iteración de cada experimento e ir registrando lo que sucede

> con la frecuencia relativa para cada evento, de modo que sea también posible comparar más de un evento. También cobra relevancia el uso de herramientas tecnológicas para simular un gran número de veces un cierto experimento aleatorio; por ejemplo, lanzar dos monedas", programa Mineduc 7º básico (2011, p. 77).

En este nivel, el énfasis está dado en el cálculo de la frecuencia relativa como sustento teórico del significado frecuencial la probabilidad. A su vez se moviliza implícitamente la ley de los grandes números, la que se refiere al principio:

> "la probabilidad que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque tanto como queramos a la probabilidad teórica puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de pruebas", Batanero (2005, p. 254).

Por ejemplo la probabilidad que una persona, en particular, gane la lotería es bastante baja; sin embargo, la probabilidad que alguien gane la lotería es bastante alta, suponiendo que suficientes personas compraron boletos de lotería.

En la educación escolar los experimentos aleatorios son un medio para que la probabilidad cobre significado mediante la estabilización de la frecuencia relativa de un suceso aleatorio, en un valor determinado.

El programa de 8º básico plantea el siguiente propósito:

> … abordar la probabilidad desde un punto de vista teórico con la introducción del modelo de Laplace; …. se espera que los estudiantes sean capaces de comparar resultados experimentales con resultados teóricos,… y contrastar el gráfico experimental con el gráfico teórico. Por último, se busca que comprendan los conceptos de espacio muestral, evento y eventos equiprobable", Programa de estudio 8ª básico (2011, p. 63).

En este caso, al introducir la ley de Laplace se pone énfasis en la probabilidad como razón entre casos favorables y los casos posibles de un suceso aleatorio. Aquí cobra relevancia la noción de espacio muestral, evento y eventos equiprobables, de manera explícita. La noción de espacio muestral requiere en forma implícita movilizar las nociones de principio multiplicativo, el que da origen al diagrama de árbol y formalmente, a las nociones básicas de combinatoria.

En los propósitos de los programas de estudio existe una tendencia evidente a favorecer lo calculatorio, en los significados frecuencial y clásico. La lectura de los propósitos, en ningún caso solicita dar significado a dichos cálculos, ni siquiera frente a situaciones en las que interviene la incertidumbre materializada a través del azar o en situaciones fortuitas. Estos propósitos curriculares limitan el desarrollo de un pensamiento probabilístico que responda a las complejidades de los contextos actuales.

La tabla 2, presenta la progresión de cinco objetivos de aprendizaje que se espera desarrollar desde quinto a octavo básico, en relación a la noción de probabilidad.

Tabla 2. Progresión objetivos de aprendizaje de la noción de Probabilidad

5º básico	6º básico	7º básico	8º básico
Describir la posibilidad ocurrencia de un evento de acuerdo a un experimento aleatorio, empleando los términos seguro –	Conjeturar acerca de las tendencias de resultados obtenidos en repeticiones de un experimento con dados, monedas u otros, de manera	Predecir la probabilidad de ocurrencia de eventos a partir de la frecuencia relativa obtenida en la realización de experimentos	Asignar probabilidades teóricamente a la ocurrencia de eventos, en experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con

posible – poco posible – imposible. Comparar probabilidades sin calcularlas.	manual y/o usando software educativo.	aleatorios simples.	resultados experimentales.

Fuente: Programas de Estudio MINEDUC 2012

A continuación se interpreta lo que está en juego en cada objetivo de aprendizaje.

El programa de quinto básico plantea dos objetivos de aprendizajes cuyas interpretaciones son: "Describir los sucesos aleatorios utilizando los términos seguro – posible – poco posible – imposible" y "Comparar sucesos aleatorios en forma intuitiva".

En el primer caso se pide realizar una descripción sobre la posibilidad de ocurrencia de un suceso asignando las etiquetas seguro – posible – poco posible – imposible. Este objetivo plantea relacionar palabras del lenguaje cotidiano con los significados de la certeza y la incerteza de un suceso.

En la redacción del objetivo, aparece mencionada la noción de experimento aleatorio y evento, las que servirán como herramienta para introducir el lenguaje de la probabilidad en este nivel. Se aprecia además que estas nociones, experimento aleatorio y evento no han sido definidas con anterioridad luego se podría tratar de objetos para matemáticos, en el sentido de Chevallard, es decir funcionan como herramienta que todavía no adquiere estatus de objeto (escolar).

El segundo objetivo de aprendizaje solicita realizar comparaciones cualitativas de la posibilidad de ocurrencia de sucesos aleatorios. La finalidad de este objetivo es realizar estimaciones probabilistas sobre situaciones de incertidumbre y en juegos aleatorios sin realizar cálculos.

El objetivo de aprendizaje para sexto básico plantea “Conjeturar regularidades sobre la frecuencia de aparición de los resultados de un experimento aleatorio”.
Lo que se concreta realizando repeticiones del mismo experimento, registrando los resultados del experimento, la tarea consistiría en determinar la frecuencia absoluta de aparición de los sucesos y compararla con la frecuencia absoluta conjeturada.
En este nivel se desarrollaría la práctica de estimar la ocurrencia de un suceso y comprobarla experimentalmente, es decir se plantea relacionar resultados de sucesos aleatorios experimentales con la frecuencia absoluta de un suceso, una vez que el experimento se ha repetido muchas veces.
Este resultado según Batanero (2005) corresponde a un significado objetivo de concebir la probabilidad y es frecuencial.

En séptimo básico el objetivo de aprendizaje corresponde a: “Predecir la ocurrencia de un suceso aleatorio considerando el valor de la frecuencia relativa, para calcular su probabilidad frecuencial”.
En este nivel el énfasis está dado en la obtención de la frecuencia absoluta y en las regularidades observadas en la frecuencia relativa a medida que aumenta el número de repeticiones del experimento. También propone a los profesores solicitar a los alumnos realizar predicciones sobre la ocurrencia de ciertos sucesos, los que serán verificados mediante la experimentación.
Sin embrago no propone establecer comparaciones sobre el valor al que tiende la frecuencia relativa de un suceso, obtenido por distintos alumnos y tampoco relacionar ese valor con la probabilidad del suceso.
Al respecto Batanero (2005) estima que es necesario transitar de lo intuitivo a lo formal para comprender que el mismo concepto tiene distintos significados y

que la enseñanza debería aprovechar instancias que vinculen la probabilidad con la estabilización de la frecuencia relativa del suceso.

En octavo básico el objetivo de aprendizaje corresponde a: “Calcular probabilidad utilizando la ley de Laplace”.

Las orientaciones didácticas proponen situaciones y experimentos que permitan a los alumnos determinar el espacio muestral y concebirlo como el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio. Además precisar que un evento es un subconjunto del espacio muestral y que ambos tienen una cardinalidad, la que se expresa numéricamente.

De esta manera, cobra relevancia la Ley de Laplace, a partir de la cual los alumnos deberían asociar la cardinalidad de un evento y la del espacio muestral con los casos favorables y posibles de este modelo, orientaciones didácticas (2011, p. 62).

De acuerdo al enfoque sugerido por las orientaciones didácticas, el espacio muestral y los sucesos determinados en los juegos de azar, son de naturaleza conjuntista.

Desde el punto de vista teórico el conjunto potencia del espacio muestral, junto con las operaciones de unión e intersección de conjuntos constituyen un algebra de conjuntos, denominada álgebra de Boole.

En esta álgebra, el conjunto vació es el elemento neutro para la unión y el espacio muestral es el elemento neutro para la intersección.

Se puede interpretar que en la propuesta curricular el conjunto potencia del espacio muestral E, determina subconjuntos de E que representan a los sucesos aleatorios del fenómeno en estudio.

Por ejemplo sea $\boldsymbol{E} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$**,** un algebra de sucesos en el lanzamiento de un tetraedro es el conjunto F = $\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\{1,3\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\boldsymbol{E},\emptyset\}$

con las operaciones de unión e intersección. Aquí los elementos $\{1\},\{2\}$ se refieren al suceso: que aparezca el 1 o el 2, en el lanzamiento del tetraedro

Estas orientaciones, también indican la importancia de contrastar el modelo experimental y el teórico, en sus distintas representaciones, gráfica, algebraica y numérica.

Para los propósitos y orientaciones didácticas de los programas de estudio el experimento aleatorio es fundamental en el proceso de enseñanza de la probabilidad. El suceso equiprobable, que aparece en ciertas situaciones relacionadas con juegos aleatorios se cuantifica mediante de frecuencia absoluta y la frecuencia relativa, lo que restringe la noción de probabilidad al contexto de la probabilidad clásica, frecuencial y sus relaciones.

Por otra parte trabajos en psicología sobre el razonamiento humano, han permitido identificar a personas que actúan de acuerdo a un sistema probabilístico complejo, utilizando heurísticas adquiridas en su relación empírica con lo cotidiano, Pérez Echeverría (1990), citado en Batanero et al. (2001, p. 210). Estas personas podrían ser los alumnos, quienes intuitivamente perciben la incertidumbre, mediante sus experiencias reales, ya que es una condición humana, que la enseñanza debería aprovechar para ampliar el significado de esta noción y considerarla como otro significado que permita al alumno reconocerla en la cultura para poder reaccionar frente a ella.

La revisión de los objetivos de aprendizaje ha permitido encontrar este significado intuitivo, en forma incipiente, en algunas situaciones propuestas en quinto básico.
Se aprecia en la propuesta curricular del programa de estudio de 5° básico que sugiere al profesor que enfrente a los alumnos a conjeturar o predecir tendencias de resultados o probabilidades a partir de la información que proporcionan los experimentos aleatorios. No obstante el desarrollo de las

habilidades de conjetura y predicción, en contextos aleatorio no experimentales, podría originar otros resultados interesantes y complementarios al enfoque curricular. Es en esta perspectiva que hemos concebido la mayoría de las situaciones didácticas en esta investigación.

En lo que sigue se analizan los ejemplos de actividades propuestos en los programas para el logro de cada objetivo de aprendizaje, a la luz de las nociones de contrato didáctico, medio y estructuración del medio.

2.3.2 Análisis curricular de la probabilidad desde quinto a octavo básico.

En este estudio se considera los objetivos de aprendizaje de la unidad de probabilidad de los niveles quinto a octavo básico y los ejemplos de actividades sugeridas por el programa. Para este análisis, en cada actividad, se identifican nociones matemáticas, tareas y las características del medio didáctico.

2.3.2.1 La probabilidad, objeto de enseñanza en el programa de 5º básico.

En este nivel, el programa plantea dos objetivos de aprendizaje.
El primer objetivo: "Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos: seguro – posible - poco posible – imposible", propone cinco ejemplos de actividades.

Actividad Nº 1 (textual del programa). "Usan una ruleta que está dividida en cuatro partes iguales (dos rojas, una azul y una verde) y tiran una bolita. Registran los resultados obtenidos de 100 repeticiones en una tabla. Responden preguntas como:

› ¿cuál es el resultado más seguro que se puede obtener en la ruleta?
› ¿cuál es el resultado poco posible que se dé en la ruleta?"

Esta actividad propone desarrollar dos tareas: registrar resultados de un experimento aleatorio y responder preguntas sobre ellos.

El saber de referencia, son las nociones de suceso seguro y suceso poco posible.

La tarea consiste en observar los datos registrados y decidir el resultado más seguro. Dada la naturaleza concreta del pensamiento de los niños de 10 años los alumnos podrían responder que el resultado más seguro es el color que más les gusta. Por otra parte, las orientaciones didácticas no plantean al profesor que solicite explicaciones a los alumnos sobre sus respuestas, lo que sería una fuente de información para conocer los conocimientos intuitivos de los alumnos y proyectar la enseñanza.

El medio didáctico se compone de una ruleta de cuatro colores dos rojas, una azul y otra verde (que en realidad es un disco con una flecha giratoria); una bolita para lanzar en la ruleta (la que no se utiliza y se deduce que se sustituye por una flecha) y el registro de resultados del juego, el que no se especifica si es una tabla u otro modo de registro

En la primera tarea se realizaría el experimento y recogerían los resultados en un formato no especificado (no se sabe cómo los niños tendrían que organizar los resultados del experimento. Eventualmente los alumnos realizan una lista de resultados). El medio didáctico no resulta ser antagonista ya que se sugiere al profesor dar instrucciones y no desafiar a los alumnos a encontrar el significado a las palabras seguro y poco seguro, es en este sentido que el medio no es antagonista.

En la segunda tarea las preguntas formuladas inducen al alumno a responder rojo. Por otra parte puede suceder que los niños respondan sin necesidad de

realizar el experimento, en especial a la pregunta 1. Aquí la tarea consiste en realizar una inferencia, cualitativa, a partir de los resultados obtenidos.
La tarea misma no desafía al alumno a describir la ocurrencia de un suceso aleatorio en base a las palabras, seguro, posible, poco posible.

Desde el punto de vista teórico, el medio material es una ruleta muy especial, es más bien un disco con flecha giratoria, que habría que construir. La clase entonces obligatoriamente tendrá que organizarse en grupos que dispongan cada uno con una de estas ruletas. Este medio plantea una dificultad para el profesor, ya que necesita de tantas ruletas como grupos se formen en la clase y además que el funcionamiento de las ruletas sea el mismo.

La propia descripción de la ruleta puede presentar una dificultad a los profesores en la lectura y uso de las orientaciones curriculares, las que consideramos necesario clarificar precisando mejor los medios que se propone utilizar.
En general se percibe que esta actividad propone responder cuando un suceso es seguro – posible - poco posible – imposible, lo que no necesariamente se relaciona con describir las características de una situación aleatoria.

Actividad Nº 2 (textual del programa). "Una urna contiene seis dados verdes, cuatro azules y ocho amarillos. Determinan si los siguientes eventos son seguro, posible o imposible:

› Sacar tres dados de distinto color.
› Al sacar seis dados, que todos ellos sean verdes.
› Sacar cuatro dados y que todos sean de distinto color.
› Sacar 16 dados y que algunos de ellos sean de color verde, azul y amarillo.

Comprueban en forma concreta sus predicciones".

El saber de referencia son las nociones: Posibilidad de ocurrencia de un suceso aleatorio. Suceso seguro, posible y suceso imposible.

Se identifican dos tareas: la primera se trata de realizar una inferencia asignando las palabras posible, seguro o inseguro a los sucesos aleatorios formulados y la segunda tarea es comprobar experimentalmente sus predicciones.

En la primera tarea el medio es el enunciado, las palabras seguro, posible y imposible. El medio no es antagónico, ya que las respuestas del alumno están estructuradas por la instrucción del enunciado.

En la segunda tarea el medio es la urna con los dados y las extracciones reales. Aquí el alumno en posición de sujeto objetivo (E_{-3}) podría realizar las extracciones y en posición de alumno que actúa E_{-2}, compara estos resultados con sus predicciones anteriores. Una dificultad en la parte experimental es que la cantidad de extracciones realizadas puede ser insuficiente para apreciar su relación con las predicciones realizadas por los alumnos.

Esta tarea no precisa un número de extracciones y los alumnos podrían realizar pocos ensayos lo que difícilmente concordaría con sus predicciones iniciales.

Actividad Nº 3 (textual del programa).: Predicen la posibilidad de ocurrencia de un evento en el contexto de la resolución de problemas. Por ejemplo, responden las siguientes preguntas, acerca de la posibilidad de ocurrencia de los acontecimientos:

› Ante al resultado de una prueba de Matemática: ¿qué es más posible, que usted obtenga una nota mayor que cinco o una menor que cinco?, ¿en qué fundamenta su respuesta?

› Ante el resultado parcial (primer tiempo) de un partido de fútbol entre dos equipos A y B: ¿qué es más probable, que gane A o B? ¿En qué fundamenta su respuesta?”

El saber de referencia identificado son las nociones de: Suceso aleatorio. Posibilidad de ocurrencia de un suceso aleatorio.

Esta actividad propone analizar situaciones que no provienen de los juegos de azar, asignar una posibilidad de ocurrencia y explicar por qué.

El medio en esta actividad son enunciados de sucesos aleatorios formulados en lenguaje natural y las posibilidades de ocurrencia dadas. Este medio plantea que el alumno asigne una posibilidad de ocurrencia basada en su experiencia frente a las pruebas de matemáticas y a los partidos de futbol que han jugado los equipos ficticios A y B. Estos sucesos se caracterizan por no ser experimentales. En esta actividad el medio desafía al alumno a responder de manera categórica pero no lo desafía a elaborar predicciones sobre otras posibilidades. Por ejemplo ¿Es seguro sacarse una nota 5 en una prueba de matemática? Explica.
En estas preguntas, se podría poner en evidencia el análisis de la trayectoria de éxitos o fracasos obtenidos, sea en las evaluaciones anteriores o en los partidos de la liga jugados, también las preferencias de los alumnos, ante los equipos de futbol, si es que los conocen, con lo que habría una tendencia a apoyarse en los datos y la respuesta podría ser personal. Así una respuesta al primer enunciado podría ser: “Es posible que el resultado de una prueba de matemática sea menos que cinco porque no estudie lo suficiente”. Proposición que corresponde a un razonamiento en el que interviene la incertidumbre, expresado en “es posible que …”.

La pregunta 2 produce una ambigüedad que plantea una pregunta ¿Qué se espera que responda un niño, si no se definen los nombres de los equipos, A y B? es decir en la formulación de la pregunta, los equipos A y B no tienen sentido en el pensamiento concreto de los niños.

Actividad Nº 4 (textual del programa): Esta actividad se descompone en dos tareas. La primera tarea (textual del programa) es:

“Predicen resultados de experimentos realizados con dados o monedas.

› Tiran varias veces una moneda y registran los resultados. Basados en ellos, predicen la posibilidad que, al lanzar una moneda, salga cara.

› Tiran varias veces un dado y registran los resultados. Basados en ellos, predicen la posibilidad de que, al lanzar 6 veces un dado, salga un número par".

El saber de referencia es la predicción de un suceso aleatorio, equiprobable.
El medio material son las monedas y los dados. El medio para registrar los resultados obtenidos no está especificado, ¿será una tabla, una lista?

Los alumnos, se sitúan en la posición de alumno objetivo, E_{-3}, registra los resultados del experimento. Estos datos se convierten en un medio para predecir la posibilidad que salga cara, al lanzar una moneda, o un número par, al lanzar un dado.
Este medio confronta al alumno a revisar y analizar sus registros pero si esto no sucede, las predicciones de los alumnos podrían resultar muy variadas y no se lograría el objetivo de la actividad y en consecuencia los alumnos podrían responder al azar.

Sobre estos experimentos, Fischbein, citado en Cañizarez (1997, p. 24) señala que los niños desarrollan diferentes creencias, una de ellas es establecer patrones dependientes que reduzcan lo incierto, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias. Por ejemplo, si ha salido cara tres veces, existe la creencia que el siguiente lanzamiento debería ser sello, o la creencia animista de que la moneda tiene poder de decisión sobre su resultado futuro y podría salir cara nuevamente. Fischbein hacía notar ya en 1987 que los alumnos podrían mejorar estas "intuiciones primarias" mediante la instrucción en la escuela.

La tarea dos (textual del programa), de esta actividad, específica: “Conjeturan acerca de los futuros resultados de experimentos. Por ejemplo:

› Si al lanzar una moneda sale cara, ¿qué ocurrirá en el próximo lanzamiento de la moneda?,

› ¿Se puede asegurar, al lanzar una moneda, que en 10 lanzamientos van a salir 5 caras y 5 sellos?,

› ¿Qué números son los más posibles que salgan al lanzar un dado? Conjeturen al respecto”.

Esta tarea pone en evidencia los conocimientos intuitivos sobre los juegos de azar descritos en la tarea. Teóricamente se sabe que cada lanzamiento es independiente del anterior, mientras que las creencias de los alumnos, les hacen suponer que existe una relación entre ellos.

En esta tarea el medio son las preguntas sobre los sucesos formulados. Este medio pondrá en evidencia las concepciones intuitivas de los alumnos sobre el comportamiento aleatorio del lanzamiento de dados y monedas. Si se considera el pensamiento concreto de los niños de 10 años, ellos podrían responder de forma categórica y sin incertidumbre. Por lo tanto, el profesor deberá anticiparse a estas respuestas y prever devoluciones, en el sentido de Brousseau, para hacer evolucionar la situación.

El programa debería prevenir al profesor sobre las posibles respuestas de los alumnos y sugerirle que plantee estrategias para abordar esas situaciones en clases. Esto es importante porque muchos profesores básicos no han tenido formación especializada en esta área y sus recursos didácticos, muchas veces son el programa y los textos escolares. Ni el uno ni el otro contienen las orientaciones pertinentes para abordar estas situaciones, emergentes.

En síntesis, los ejemplos de actividades del programa proponen determinar una posibilidad de ocurrencia realizando un experimento aleatorio y también a través de situaciones que evocan experimentos aleatorios en los que se solicita predecir una posibilidad de ocurrencia de un suceso específico de incertidumbre. También se propone elaborar conjeturas acerca de la tendencia que mostrarían los datos del experimento

Las nociones del saber de referencia identificadas corresponden a suceso aleatorio. Experimento aleatorio, posibilidad de ocurrencia de un suceso aleatorio, predicciones de resultados futuros en experimentos aleatorios.
Tres de las cuatro actividades están relacionadas al ámbito de los juegos de azar, que utilizan artefactos aleatorios, lo que puede incidir en que el profesor sólo considere los sucesos equiprobables en su planificación, limitando el campo de problemas.
Por otra parte, la mayoría de los enunciados proponen instrucciones ostensivas sobre lo que el alumno debe realizar, asignar la palabra posible, seguro e imposible a una afirmación sobre un suceso, lo cual no significa que conciban las diferentes características de lo aleatorio. Es decir los medios didácticos involucrados no producen las retroacciones suficientes para que los alumnos utilicen alguna de estas palabras como una característica de la aleatoriedad.

Desde la perspectiva teórica, los ejemplos de actividades corresponderían a situaciones de acción que colocan al alumno en la posición de sujeto que actúa, E_{-2}. En esta posición los alumnos podrían realizar la tarea propuesta en una situación, llamada objetiva (S_{-3}). Sin embargo el medio identificado en estos ejemplos, no produce nuevas retroacciones a los alumnos para producir otras respuestas. Tampoco evoluciona para producir otras situaciones, en las que el alumno identifique la incertidumbre del suceso y lo exprese como seguro, posible o imposible. Estas decisiones curriculares restringen la actividad y

podrían desvirtuar el objetivo de aprendizaje propuesto, produciendo un efecto Topaze.
Por ejemplo, el asignar las etiquetas posible, seguro e imposible a sucesos aleatorios no es suficiente para dar significado a la incertidumbre, esta instrucción no caracteriza a la incertidumbre ni la define, produciendo una sustitución de objetivos lo que obedece nuevamente a un efecto Topaze. Este paradoja didáctica invisibiliza la noción de aleatoriedad y produce dificultades para comprender la noción de probabilidad como el nicho privilegiado para el estudio de situaciones en las que interviene la incertidumbre.

Este análisis también revela la simplicidad en la mayor parte de las tareas propuestas, lo que refleja que las instrucciones sugeridas en los indicadores de evaluación corresponden a un modelo pedagógico que sigue muy de cerca las características del enfoque tradicional de enseñanza de la matemática, en la que el profesor transmite un mensaje que no necesariamente debe tener en cuenta el aprendizaje del alumno, Perrin – Glorian y Hersant (2003, p 223).

En consecuencia, en este nivel el alumno asigna la posibilidad de ocurrencia de un evento literalmente pero su explicación puede ser categórica, pues influyen sus creencias, lo que podría poner en riesgo la evolución del medio para lograr el aprendizaje previsto.

El segundo objetivo de aprendizaje es: “Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas”. Para este objetivo, el programa propone cinco ejemplos de actividades.

Actividad Nº 1 (textual del programa).. “Dicen eventos que son más probables que ocurran que otros eventos sin realizar cálculos. Por ejemplo, responden las preguntas:

a) ¿Qué es más probable si no se ha estudiado: sacarse una buena nota o una nota deficiente?

b) En un día de invierno en el sur de Chile, qué es más probable: ¿que llueva o que no llueva?

c) Al jugar al Kino, ¿qué es más probable: ganarlo o no ganarlo?”

Las nociones del saber de referencia son: Suceso aleatorio. posibilidad de ocurrencia y Comparación dicotómica de probabilidades.

El medio didáctico son enunciados formulados mediante preguntas “¿Qué es más probable …? que ofrecen una comparación dicotómica del suceso.
El medio no es antagónico porque las preguntas tienen una respuesta dicotómica que los alumnos podrían responder fácilmente. Además, el ejemplo no solicita explicar, por lo tanto, la situación no evoluciona para que los alumnos desarrollen la idea de comparación de probabilidades. Surge la pregunta ¿cómo, a partir de este ejemplo, los alumnos comparan la probabilidad de ocurrencia de un suceso?
En este sentido los enunciados debilitan y restringen la comparación a una dicotomía, que claramente no caracteriza a la probabilidad.

Actividad Nº 2 (textual del programa).: “Dan ejemplos de eventos que son más o menos probables que ocurran que otros eventos. Por ejemplo:

a) En situaciones relacionadas con notas en la asignatura de Matemática, dan ejemplos de eventos cuya probabilidad de ocurrencia es mayor que otros eventos.

b) En el contexto de partidos de fútbol de primera división de Chile, dan a conocer eventos que es menos probable que ocurran que otros eventos”.

Las nociones matemáticas identificadas son el concepto de más probable que … y menos probable que …, en el contexto de sucesos aleatorios no experimentales.

El medio son los enunciados de sucesos aleatorios no experimentales y no equiprobables, que en clases el profesor y los alumnos proporcionarán. En este caso el alumno se situaría en la posición E_{-2}, en una situación de referencia anotada E_{-2}, la que es una situación de comunicación.
En el medio de la situación, el alumno como sujeto de la acción E_{-2} da ejemplos que contienen incertidumbre relacionados con sus experiencias reales en los que pueda comparar probabilidades de ocurrencia.

Una imprecisión de estas orientaciones didácticas es que no específica si estos ejemplos se anotaran ni dónde los alumnos los escribirán o si solamente se expresaran oralmente.
El ejemplo coloca a la noción de probabilidad como una herramienta de comparación y a los alumnos asignando probabilidad como nivel de creencia subjetiva, sin embargo, este ámbito de la probabilidad no se considera explícitamente en las orientaciones didácticas del programa.

Actividad Nº 3: "Realizan actividades en las cuales deciden qué eventos son más o menos probables que ocurran sin hacer cálculos para responder preguntas. Por ejemplo, una bolsa contiene los números 1, 2, 4, 6, 7, 8; un alumno saca de ella tres números sin verlos y dos compañeros de él, Juan y Matías, hacen apuestas acerca del número que saca: si es par, gana Juan y si es impar, gana Matías. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?"

Las nociones del saber de referencia identificadas, son: comparación de la probabilidad de sucesos en el contexto de la resolución de problemas y los juegos de azar.

En esta actividad el medio es el problema. La actividad de los alumnos debería ser analítica para tomar decisión sobre la probabilidad de ganar de Juan y Matías.

Un razonamiento analítico como el siguiente: “Como la bolsa tiene 4 números pares de 6 en total, es más probable extraer número par que impar, por lo tanto, Matías tiene más probabilidad de ganar.”
En este caso los alumnos comparan sucesos cuyo espacio muestral es el mismo, 6 números en la bolsa. La actividad le da sentido a la noción de probabilidad como una medida cuan titativa de la incertidumbre, lo que podría allanar el camino hacia el estudio del significado clásico de la probabilidad.
Sin embargo, se advierte la necesidad de complejizar el medio desafiando a los alumnos a dar explicaciones sobre las decisiones que toman, por ejemplo.

Desde el punto de vista teórico, la situación objetiva es el problema, el medio material es evocado, el sujeto objetivo son los personajes del enunciado (Juan y Matías) y las relaciones que entre ellos establece el problema. En el medio objetivo M_{-2}, los alumnos como sujetos que actúan E_{-2}, analizan la información y actúan sobre ella para producir una respuesta (La que no necesariamente resuelve el problema). Idealmente, en el medio de referencia, M_{-1} en posición de alumno aprendiz, E_{-1} resuelven el problema y analizan quien tiene mayor posibilidad de ganar, justificando su solución.

Se observa un error de redacción en el enunciado. Al comienzo se dice que “de la bolsa un alumno saca tres números sin verlos, y posteriormente Juan y Matías, hacen apuestas acerca del número que saca”, ¿no había sacado tres números?
Al parecer debería decir que “el alumno saca un número” y sobre este se hacen apuestas. Estos errores confunden y dificultan la comprensión de los ejemplos que propone el programa.

Actividad Nº 4 (textual del programa).: “Juegan a lanzar dados y a predecir eventos relacionados con estos lanzamientos que son más o menos probables de ocurrir que otros eventos, sin calcular. Por ejemplo, predicen:

a) ¿Qué es más probable al lanzar un dado: que salga un número par o un número impar?

b) ¿Qué es menos probable que ocurra: que salga un número impar menor que 3 o que salga un número par mayor que 1?”

Las nociones del saber de referencia son: Experimento aleatorio. Suceso aleatorio simple. Predecir resultados en juegos de azar simples. Comparación intuitiva de probabilidades.

La situación objetiva es un juego: lanzar dados y la situación de referencia es predecir el resultado más probable. El medio material (M_{-3}) es un dado. En esta situación el alumno adopta dos posiciones, la de sujeto objetivo (E_{-3}) realizando el lanzamiento del dado y en posición de sujeto que actúa, en la situación de referencia, el alumno elabora una conjetura sobre la comparación de sucesos.

El programa curricular no especifica si es necesario registrar los resultados del juego, aspecto que es importante para predecir en juegos aleatorios.

Actividad Nº 5 (textual del programa): Juegan a lanzar monedas y a comparar probabilidades sin realizar cálculos. Por ejemplo, comparan:

a) La probabilidad de que al lanzar dos monedas salgan dos caras, con la probabilidad de que salga una cara y un sello.

b) La probabilidad de que al lanzar dos monedas salgan dos caras, con la probabilidad de que al lanzar tres monedas salgan tres caras.

Las nociones del saber de referencia, identificadas son: Sucesos aleatorios compuestos. Comparación cualitativa de la probabilidad de sucesos compuestos.

Se identifican dos medios, el medio material (M_{-3}) son dos monedas, los alumnos, en posición de alumno objetivo (E_{-3}), realizan lanzamientos con ellas y registran sus resultados. El alumno en posición de sujeto que actúa (E_{-2}), idealmente, observaría y analizarís estos resultados para comparar la probabilidad de sucesos compuestos (lanzara 2 o 3 monedas), en una situación, llamada de referencia (S_{-2}).

Una debilidad del medio (objetivo) es que el experimento puede dar origen a resultados parciales poco confiables, producidos por una muestra de lanzamientos pequeña o por una muestra atípica de resultados. Por ejemplo que en 10 lanzamientos 5 de ellos resulten ser cara – cara. Esta debilidad se puede convertir en fortaleza si los resultados de diferentes grupos de estudiantes se hacen públicos y se discuten, por ejemplo en una puesta en común, tarea que no está planteada en esta actividad. Los alumnos a través de esta tarea podrían comparar la probabilidad de ocurrencia de distintos sucesos.

Recapitulando los ejemplos de actividades 1 y 2 proponen desarrollar tareas de comparación de probabilidad subjetiva frente a enunciados de sucesos aleatorios no experimentales. En el ejemplo 3 la tarea es decidir el resultado de una apuesta que los enfrenta a comparar probabilidades con el mismo espacio muestral y en las actividades 4 y 5, la tarea es predecir resultados de sucesos aleatorios relacionados con el lanzamiento de un dado y dos monedas.

El medio didáctico coloca al alumno en la posición de sujeto objetivo E_{-3}, realizando los experimentos propuestos o en el papel de los sujetos ficticios, como Juan y Matías en el enunciado del ejemplo 3. Como sujeto que actúa E_{-2} el alumno compara y predice resultados en el nivel de la situación de referencia, que es una situación de acción.

No se aprecia la evolución del medio, luego estas actividades no cumpliriaN el rol de producir ,posiblemente, una adecuada comprensión de la comparación de la probabilidad de sucesos y su significado. En general, se observa la ausencia de situaciones de aprendizaje (en el sentido adidáctico) que permitan que los saberes producidos por los alumnos sean institucionalizados por el profesor en la situación didáctica S_0, de acuerdo a lo previsto en el programa de estudio.

Por lo tanto, es recomendable, complejizar el medio, de manera de evitar que los alumnos de antemano respondan lo esperado por el profesor, aplicando solo la lógica natural, y además para producir mayores y mejores esfuerzos cognitivos de los estudiantes por comprender el significado de la comparación probabilística y su importancia para la toma de decisiones.

Análisis Global.

El análisis de los ejemplos de actividades pone en evdiencia la seleccviòn de situaciones cuyos medios podrían permitir a los alumnos anticiparse a la respuesta esperada por el profesor, la que podría sustituir al aprendizaje previsto. Si fuera tal caso, podría se producir la ilusión que los alumnos han sido enfrentados a interactuar con sucesos aleatorios para acceder encontrar significados a las palabras lo seguro, posible e imposible y su relación con la incertidumbre y con la comparación cualitativa de la probabilidad de sucesos aleatorios.

De esta manera, se aprecia que estas actividades son insuficientes para que los alumnos aprecien las características y propiedades de la noción de aleatoriedad.

Es en este sentido es que se afirma que la propuesta curricular tiene debilidades en su estructura.

2.3.2.2 La probabilidad, objeto de enseñanza en el programa de 6º básico.

En sexto básico el objetivo de aprendizaje “Conjeturar acerca de las tendencias de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo” propone tres ejemplos de actividades.

Actividad Nº1 (textual del programa): “Usan un diagrama de árbol para visualizar posibilidades que se pueden dar en un experimento. Por ejemplo:

› Visualizan todas las posibilidades que se pueden dar al lanzar tres monedas, usando un diagrama de árbol, y las registran.

› visualizan todas las posibilidades que se pueden dar al lanzar dos dados, usando un diagrama de árbol, y las registran”.

En esta actividad el saber de referencia, identificado, son las nociones de sucesos aleatorios compuestos y sucesos posibles. El diagrama de árbol, como herramienta conceptual para visualizar los sucesos posibles en ambas situaciones.

No se sabe si el diagrama de árbol se exhibe a los alumnos o si ellos deberían elabora un diagrama de árbol para cada experimento.

Se puede suponer que los alumnos podrán obtener algunos resultados posibles, en los experimentos propuestos, pero también se presentara la dificultad de obtenerlos todos, lo que remite a considerar la aparición de un obstáculo epistemológico.

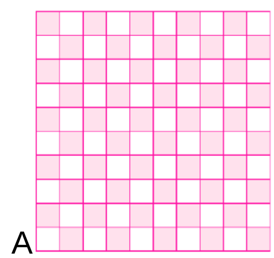
El diagrama de árbol es una herramienta para determinar los casos posibles, sin embargo, este esquema no surge como un conocimiento intuitivo espontáneo, de los alumnos, puesto que la complejidad del este esquema radica en que se trata de descomponer sucesos compuestos posibles de un experimento en sucesos simples, independientes por niveles. Visualizar esta descomposición es compleja para niños de 11 años.

Esta actividad, no proporciona un medio que confronte y anime a los alumnos a representar los casos posibles en los niveles, de ocurrencia, que corresponden al diagrama de árbol.

Por otra parte, uno de los resultados de esta tesis ha puesto en evidencia que los alumnos de este estudio no han desarrollado procedimientos de representación de casos posibles cuando se les ha solicitado en una de las situaciones diseñadas.

Actividad Nº2 (textual del programa): La figura muestra una cuadrícula donde los cuadrados que la forman están pintados de blanco o rosado.

Figura 4 Cuadrícula utilizada en un ejemplo de actividad del curriculo



Fuente: programa de estudio 6° básico, 2013, p. 137.

Los alumnos juegan a adivinar a qué color se llegará de acuerdo a la siguiente regla: “Se tira una moneda: si sale cara (C), se desplaza hacia la derecha; si sale sello (S), se desplaza hacia arriba”. Se empieza en el cuadrado A:

1. ¿A qué color se llega con: C S, C C S, C S C S, S S C S C?
2. Al lanzar dos monedas, ¿qué porcentaje de posibilidades hay de que el cuadrado al que se llegue sea rosado?
3. Al lanzar tres monedas, ¿qué porcentaje de posibilidades hay de que el cuadrado al que se llegue sea rosado?

4. Al lanzar cuatro monedas, ¿qué porcentaje de posibilidades hay de que el cuadrado al que se llegue sea blanco?
5. Al lanzar cinco monedas, ¿qué porcentaje de posibilidades hay de que el cuadrado al que se llegue sea blanco?
6. ¿Es posible hacer una conjetura respecto del color al que se llegará, dependiendo del número de lanzamientos que se haga?

La actividad 2, propone un juego para determinar el porcentaje de sucesos para los cuales el jugador cae en un casillero blanco o rosado, al lanzar dos o más monedas, y generalizar un procedimiento o fórmula para obtener un resultado determinado con n monedas. En consecuencia, se obtiene un enunciado de la forma:
"Si se lanza un número par de monedas entonces se llega a una casilla blanca y si se lanza un número impar de monedas se llega a una casilla rosada".

Este enunciado es de tipo causa efecto.
El medio didáctico es el juego mismo, sus reglas y el tablero cuadriculado. El medio no es antagónico, pues induce al alumno a responder lo esperado, además solo se presentan dos opciones, blanco y rosado, si falla en una de ellas entonces es la otra. Por otra parte, el juego no es de incertidumbre.
En esta actividad, el alumno rápidamente se dará cuenta de que si el número de lanzamientos es par cae en un color y si es impar en el otro. Entonces no hay variabilidad de los datos en el sentido de la incertidumbre.

Las actividades 3, 4, 5, 6 y 7 del programa corresponden a una secuencia didáctica. Para el análisis las hemos descrito como tareas y enumerado de 1 a 5.

La tarea 1 (textual del programa) consiste en “Conjeturar acerca de las veces que saldrá un número al lanzar varias veces un dado. Por ejemplo, conjeturan las veces que saldrá 5 al lanzar:

› 6 veces un dado. › 12 veces un dado. › 60 veces un dado. › 120 veces un dado. › 1 200 veces un dado”.

En esta tarea el saber de referencia es una predicción, expresada como una frecuencia absoluta.

El medio esta formulado como una instrucción.

En la tarea 2 (textual del programa), plantea dos preguntas para que los alumnos respondan.

› ¿qué fracción, se conjetura, corresponde a las veces que sale 5 respecto del total de posibilidades al lanzar 120 veces el dado?

› ¿qué fracción, se conjetura, corresponde a las veces que sale cualquier número distinto a 5 respecto al total de posibilidades al lanzar 120 veces el dado?”

El saber de referencia es la frecuencia relativa, expresada como fracción.

El medio son las preguntas y la frecuencia absoluta con las cuales los alumnos determinan una fracción que represente una cuantificación sobre la posibilidad de ocurrencia de los sucesos. En esta fracción, el numerador indica la estimación del número de veces que se repite un resultado y el denominador indica el número total de lanzamientos especificado en el enunciado.

Se sospecha que en ciertas ocasiones los alumnos podrían obtener esta fracción por una suerte de adivinación y en otras ocasiones podrían establecer una fracción a partir de los datos que se deben relacionar.

En la tarea 3, los alumnos: “Conjeturan acerca de la posibilidad, expresada en fracciones, de que:

› Salga un número par al lanzar un dado. › Salga un número impar al lanzar un dado. › Salgar un número primo al lanzar un dado. › Sean 2 y 12 las sumas de los números que aparecen al lanzar dos dados”.

En esta tarea el saber de referencia es una predicción de la frecuencia relativa, del suceso especificado, expresado como una fracción.

El medio esta formulado como una instrucción

En la tarea 4 (textual del programa), los alumnos. “Conjeturan acerca de las veces que saldrá cara o sello al lanzar varias veces una moneda. Por ejemplo, conjeturan las veces que saldrá sello al lanzar: › 2 veces una moneda. › 10 veces una moneda. .› 100 veces una moneda › 1 000 veces una moneda”.

En esta tarea el saber de referencia es una predicción, expresada como una frecuencia absoluta.

El medio esta formulado como una instrucción

En la tarea 5, los alumnos responden dos preguntas:

› ¿qué fracción se conjetura que tiene una moneda de salir cara al lanzarla al aire? › ¿qué fracción se conjetura que tiene una moneda de salir sello al lanzarla al aire?

Las nociones, del saber de referencia, identificadas son: frecuencia relativa de sucesos favorables simples en un experimento aleatorio (lanzamiento de una moneda u otro), expresada como una fracción.

Esta conjetura podría estar influenciada por una suerte de adivinación y en otros casos por las experiencias reales de los alumnos. Las producciones de los alumnos pueden dar origen a conjeturas válidas o a reflejar obstáculos de comprensión sobre la tendencia de los resultados cuando aumenta en número de lanzamientos.

En las tareas 3 y 5 se percibe el propósito de predecir una frecuencia relativa, expresada como fracción, para diferentes resultados en cada juego. Y entonces aquí la fracción debería cobrar un significado, el que no se explicita en la formulación de la tarea.

La resolución de estas tareas requiere de la experiencia de haber jugado cada uno de estos juegos para tener una noción intuitiva de la frecuencia relativa, como medida de la probabilidad.

Por otra parte, el juego con dados es más complejo que el juego con monedas, por lo que sería interesante que los niños sean conscientes de esta complejidad.

Se aprecia que la finalidad de estas tareas es determinar la frecuencia relativa a un suceso aleatorio y expresarlo en una fracción. Las decisiones del profesor en la gestión de la clase serán vitales para que los alumnos den el sentido, de medida de probabilidad del suceso, a esta fracción.

De este modo, los alumnos podrían formar las fracciones solicitadas, pero no se sabe de qué manera atribuirán significado a este número, ¿será a partir de una fórmula general que relaciona los resultados posibles y totales de la experimentación y que se expresa como una fracción?

El programa propone ejemplos simples con instrucciones formuladas como preguntas, se aprecia que el medio didáctico no se complejiza y no supera los significados sobre probabilidad más que los alcanzados en las situaciones de juego con dados y monedas. Estas actividades colocan a los alumnos en situaciones que consideran espacios muestrales discretos, finitos, equiprobables y experimentales, los que raramente se presentan en la vida real, Bernoulli en Ars Conjectandi (1713), citado en Batanero (2005).

En consecuencia, estas orientaciones contribuyen a que los alumnos adquieran una visión restringida de la probabilidad, enfocándose en la acción de estimar una frecuencia absoluta de un suceso y determinar la frecuencia relativa, expresada como una fracción, cuyo significado debería orientar la probabilidad clásica.

Estas orientaciones didácticas, no favorecen procesos reflexivos o argumentales, los cuales se desarrollarían, según Brousseau (1998), en situaciones de comunicación de resultados (oral o escrita) y en situaciones de validación que permiten pruebas experimentales, en este nivel, (p. 316). Los medios utilizados (dados, monedas, preguntas puntuales) no provocan retroacciones por parte del alumno que le permitan comprender el valor obtenido y atribuirle un sentido probabilístico. Por otra parte, las tareas analizadas no terminan con una institucionalización del saber previsto, por lo que un profesor podría dar finalizada la unidad con la realización de estas cinco tareas.

Se concluye que las actividades propuestas en el programa continúan reforzando el modelo conductista de la enseñanza, en la que el alumno produce respuestas esperadas por el profesor y muchas veces forzadas (efecto Topaze, Brousseau (2004, p. 52), ya que este modelo no considera la gestión de medios antagónicos.

Por ello se considera que los medios didácticos son insuficientes para dar sentido a conjeturar a partir de los datos obtenidos porque las interacciones que producen se limitan a seguir las instrucciones.

2.3.2.3 La probabilidad, objeto de enseñanza en el programa de 7º básico.

En séptimo básico el objetivo de aprendizaje “Predecir la probabilidad de ocurrencia de eventos a partir de la frecuencia relativa obtenida en la realización de experimentos aleatorios simples”, propone 6 ejemplos de actividades.

Se observa que las actividades 1, 2, 3 y 4 corresponden a una secuencia designada como actividad uno. Ella se analiza distinguiendo 4 tareas.

Por otra parte, las actividades 5 y 6 conforman otra secuencia, designada actividad dos. Esta se analiza distinguiendo dos tareas.

La tarea 1, (textual del programa) es: “En grupos de 3 o 4 estudiantes realizan la repetición de un experimento aleatorio y un tercero registra los resultados obtenidos. Por ejemplo: Dos miembros del grupo deben lanzar un dado 50 veces cada uno. Un tercer integrante registra los resultados en el siguiente esquema:

Figura 5 Tabla de resultados en el lanzamiento de dos dados.

Nº de Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dado 1										
Dado 2										

(Fuente: programa de estudio 7° básico, (2001, p.182)

Con esta información, completan una tabla de frecuencias simple, la que incluye la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa, de cada resultados.

En esta tarea, el saber de referencia es la frecuencia relativa y absoluta. El medio didáctico es material y se compone de dos dados y cinco tablas horizontales con dos filas de 10 casillas cada una.

Tarea 2. (textual del programa) “Consideran para el lanzamiento de dos dados como resultados, los relativos a:

› La suma de los puntajes de los dados.
› El producto de los puntajes de los dados.

En esta tarea, el medio son resultados obtenidos al lanzar dos dados. La tarea es imprecsia pues no especifica la cantidad de lanzamientos, puede ser 1, 2, 50, 500, ¿cuántos? Por otra parte, ¡que se hace con esos resultados, ¿donde se registran? Deberían registrarse en una tabla de resultados y luego ¿qué se hace con estos resultados?

Tarea 3 (textual del programa) “Observan la columna de frecuencias relativas y determinan qué resultados tienen mayor y menor probabilidad de ocurrencia”.
El medio de esta tarea es impreciso, se percibe que se trata de una tabla de frecuencias relativas del resultado de las sumas y productos de los números en el lanzamiento de dos dados, la que habría que determinar en la tarea 2 y que no está pedida como tarea, esto posiblemente provocara dificultades ya que el profesor tendrá, en la preparación de su clase, que prever este hecho y completar la redacción de la tarea 3, para la gestión en clases de esta tarea.

Si esta tarea se completa, la actividad del alumno sería determinar, que sucesos tienen mayor o menor probabilidad de ocurrencia, y si no se completará, los alumnos podrían bloquearse o posiblemente el profesor enfrentara preguntas de los alumnos.

Tarea 4. (textual del programa) “Conjeturan acerca de la probabilidad a priori de obtener un determinado resultado”.

En esta tarea el saber de referencia, es la probabilidad a priori de un determinado resultado, la que se apoya en los medios de las tareas anteriores, a saber una tabla de frecuencia relativa sucesos aleatorios compuestos. Estos son objetivos de aprendizaje que se pretenden lograr con la secuencia de tareas señaladas.

En la tarea cuatro el medio es impreciso, ¿En qué experimento los alumnos determinarían la probabilidad a priori? ¿De qué sucesos habla?, ¿qué es la probabilidad a priori, donde se definió este concepto?
Se supone que son enunciados sobre los sucesos aleatorios compuestos obtenidos en la tabla y la tarea del alumno consistiría en determinar, con estos datos, su probabilidad en cada caso.

El medio no es antagonista porque no permite cuestionar las conclusiones obtenidas por los alumnos ya que solo mirado los datos de las tablas los alumnos podrán deducir cual resultado es más posible.
Claramente lo que solicita la tarea 4 no es una conjetura, por lo señalado anteriormente, ya que la respuesta puede ser deducida, mirando la tabla.
Los alumnos podrían obtener otras conclusiones por una suerte de adivinación, preferencia de resultados o simplemente considerando sus experiencia reales en este tipo de juegos (que podría coincidir con el valor de la frecuencia relativa).
No se aprecia, en la formulación de la tarea, la necesidad de dar sentido a este número ni el significado que este tiene.

Actividad Nº 2. Esta actividad propone dos tareas:
Tarea 5. (textual del programa) “Utilizan alguna herramienta tecnológica para simular los resultados del lanzamiento de dos dados y elevar el número de lanzamientos, por ejemplo, a 5 mil o 10 mil. Buscan regularidades”.

En esta tarea el saber de referencia corresponde a la estabilización de la frecuencia relativa en un valor fijo, cuando el experimento e repite muchas veces, lo que corresponde a los teoremas de la ley de los grandes números.

El medio es material y se compone de un software de simulación de experimentos aleatorios, las indicaciones que el profesor propondrá, sobre el número de lanzamientos, por ejemplo, 1000, 3000, etc, lanzamientos y anotar lo que encuentran cada vez.
En este ejemplo, el medio del profesor podría sugerirle incitar a los alumnos a simular, con números más grandes con la finalidad que estos puedan detectar que a medida que aumenta el numero de lanzamientos los resultados se aproximan a un número fijo'.

En la tarea propuesta, no se indica el tipo de software ni si hay computadores disponibles para ellos, para lograr el aprendizaje esperado, por lo tanto el medio del alumno no esta especificado.

Tarea 6. (textual del programa) "Analizan la existencia de tendencias de datos representados en tablas de frecuencias o gráficos de barras. Por ejemplo, con respecto al lanzamiento de dados o monedas con ayuda de la tecnología. Responden preguntas del tipo:

> Si se lanza una moneda, ¿qué resultado es más probable, cara o sello?

>Si se lanzan dos monedas, ¿cómo podrían ser representados los posibles resultados?, ¿A qué resultado apostarían, cara-cara, sello-sello o mezclado?

En esta tarea el saber de referencia es la frecuencial relativa, sucesos equiprobables y no equiprobables, sucesos compuestos y la representación de resultados posibles de un experimento aleatorio.

El medio son los resultados de experimentos aleatorios representados en tablas de frecuencia o en gráficos de barra. El medio del alumno son enunciados formulados como preguntas, a partir de los cuales los alumnos determinarían sucesos equiprobables y no equiprobables, sucesos compuestos y sus posibilidades de ocurrencia, a partir de la frecuencia relativa.

En una primera fase, los alumnos extraen información explícita de estos medios. Al final de la tarea, el medio se torna antagónico, solicitando realizar representaciones de los casos posibles del experimento y tomar decisión, sobre un suceso compuesto. Por tal razón, los alumnos podrían adoptar las posiciones de sujeto objetivo que tiene a su disposición un medio ostensivo material y la de alumno que actúa, extrayendo información del medio para realizar su tarea, en una situación de referencia.
Para que los alumnos alcancen los aprendizajes esperados es necesario que el medio estimule a los alumnos a establecer nuevas relaciones de incertidumbre cada vez más complejas. Por ejemplo en esta misma actividad, un medio desafiante, podría favorecer que el alumno comprendiera la importancia de la repetición del experimento, para constatar que con grandes muestras el comportamiento de un suceso es más homogéneo que con pequeñas muestras, en las que el comportamiento es impredecible. De acerdo al saber de referencia, esto implica que en lo macro se pueden predecir, con menor riesgo, los resultados del fenómeno aleatorio pero en lo micro su comportamiento es impredecible. Esta regularidad caracteriza a los fenómenos aleatorios y en la planificación de las tareas habría que considerar ambos aspectos: muestras pequeñas y muestras grandes, sin embargo la actividad propone elaborar una conjetura solo para tamaños grandes de la muestra.

En los ejemplos de actividades, propuestos, el campo de problemas se restringe a los sucesos aleatorios experimentales, determinados por el lanzamiento de dados y monedas. Estos contextos limitan las concepciones de los alumnos respecto de las aplicaciones de la probabilidad, en la vida ctidiana. Por lo demás existen otros experimentos aleatorios en los que cobra relevancia la frecuencia relativa, los que no son considerados en los ejemplos de actividades. Por ejemplo realizar estimaciones sobre la frecuencia absoluta y relativa de los autos de color blanco que transitan por una calle especifica.

Muchos alumnos tienen habilidad para percibir la tendencia de la frecuencia relativa, sin embrago los medios utilizados para ello y el contrato didáctico que subyace en las diferentes tareas no permite claramente establecer una adecuada relación entre el valor de la frecuencia relativa y la noción de probabilidad. Por ejemplo, primero se pregunta por la frecuencia relativa de un suceso, lo que corresponde a un cuociente, y luego se pregunta cuál suceso es más probable lo que corresponde a señalar un suceso. Estas respuestas no son equivalentes, los medios gestionados son insuficientes para que los alumnos conciban la probabilidad como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso determinado.

Es decir las tareas propuestas no permiten a los alumnos percibir que la frecuencia relativa es la mejor estimación de la probabilidad de un suceso aleatorio, a pesar que se podría observar que la situación y por lo tanto el medio didáctico han evolucionado.

2.3.2.4 La probabilidad, objeto de enseñanza en el programa de 8º básico.

En octavo básico el objetivo de aprendizaje: "Asignar probabilidades teóricamente a la ocurrencia de eventos, en experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con resultados experimentales", propone tres actividades y la última propone 5 tareas.

Actividad Nº 1 (textual del programa). "Escriben por extensión en sus cuadernos los elementos de los espacios muéstrales de distintos experimentos. Por ejemplo: › escribir el espacio muestral de "lanzar dos monedas al aire".

El saber de referencia es la noción de espacio muestral de un experimento aleatorio, lo que implica determinar los sucesos posibles de un experimento compuesto.

El medio didáctico son enunciados que solicitan a los alumnos determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio compuesto.
La actividad está formulada como una instrucción que los alumnos deberían realizar, por lo tanto el medio no es antagónico.

Actividad Nº 2.
“Lanzan un dado 20 veces cada uno, en grupos de 4 o 5 alumnos. Observan y registran en sus cuadernos la frecuencia relativa de cada resultado (equiprobabilidad)”.

En esta actividad el saber de referencia identificado, es la noción de frecuencia relativa de sucesos aleatorios simples.
El medio material es un dado. La actividad del alumno es determinar la frecuencia relativa de cada suceso. La actividad se plantea como una instrucción que los alumnos deben seguir y no pone en evidencia la relación entre los resultados experimentales y los elementos del espacio muestral.
Las actividades 3, 4, 5, 6 y 7 corresponden a una secuencia con 5 tareas.

Actividad Nº 3.
Tarea 1 (textual del programa). “Realizan el lanzamiento de dos dados una gran cantidad de veces y registran los resultados para la suma de los puntajes de las caras. Utilizan apoyo de la tecnología y grafican”.

En esta tarea, si se consideran los dados, el medio es material y si se considera un software de simulación de lanzamientos, el medio es virtual.
Si el experimeno se concreta, el medio supone también una tabla, en el cuaderno del alumno, para organizar los resultados.
Notar que la formulación del ejemplo es imprecisa ya que hay que suponer que lo que se grafica es la frecuencia de aparición de las sumas. Es decir la tarea del alumno es hacer un gráfico de frecuencia absoluta. Por otra parte parece

importante definir una cantidad mínima de lanzamientos para no producir incertidumbre y confusión en la interpretación y lectura de estas orientaciones o solicitar determinar al cabo de cuantos lanzamientos se puede observar una estabilidad en el valor de la frecuencia relativa, de los sucesos identificados.

Tarea 2 (textual del programa). “Determinan las combinaciones posibles para el lanzamiento de dos dados y grafican los resultados “teóricos” para la suma de las caras. Utilizan un gráfico de barras para estos resultados ideales. Responden a la pregunta ¿qué suma tiene más probabilidad de salir?”

El saber de referencia, identificado, son las combinaciones posibles del experimento y la frecuencia absoluta de cada resultado (entre 2 y 12).
El medio del alumno son las combinaciones posibles registradas en la tarea 1 y además la frecuencia, con que aparecen las sumas de las parejas de números.
Luego la gráfica es de frecuencia absoluta. El medio, se supone que es el cuaderno del alumno.
Tanto el gráfico como la tabla de frecuencia absoluta permiten visualizar los sucesos más probables y los menos probables.

En el desarrollo de esta actividad los alumnos podrían considerar que el
suceso (3,1) es igual al suceso (1,3) y contarlo solo una vez, lo que sería beneficioso para un profesor que supiera enfrentar esta contingencia desarrollando procesos de devolución para gestionar situaciones de formulación y validación.

Tarea 3 (textual del programa).. “Comparan el gráfico asociado a las frecuencias relativas (experimental) con el gráfico de barras ideal, respecto del experimento de la suma de los dados. Sacan conclusiones al respecto.”

El saber de referencia, identificado, es la relación entre la frecuencia relativa y la probablidad clásica.

El medio es el grafico de barras, de frecuencias absolutas y el grafico de frecuencias relativas.

En el porgrama, no específica al profesor, donde los alumnos escribirán las conclusiones que encontraran. Se supone que en el cuaderno.
La instrucción formulada en la actividad induce a los alumnos a sacar conclusiones confrontando ambos gráficos.

Tarea 4 (textual del programa). "Calculan probabilidades de eventos asociados al experimento con dados mediante el modelo de Laplace. Por ejemplo, determinan la probabilidad que, al lanzar dos dados, la suma sea menor o igual a 5".
El saber de referencia es la Ley de Laplace, en el contexto de un juego de azar.
El medio son los resultados posibles del experimento y la fórmula de la ley de Laplace.
Para interactuar con este medio, el alumno debe considerar los sucesos posibles, 36 comibinaciones en el lanzamiento de dos dados y aquellos en los que al lanzar dos dados la suma dio menor o igual a 5. En este caso son 10 combinaciones posibles: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3) y (3, 2). Así la probabilidad de este suceso es $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$, lo cual significa que de 18 lanzamientos es posible que en 5 de ellos la suma resulte ser menor o igual a 5.

Tarea 5 (textual del programa).. "Comparan la probabilidad teórica con la frecuencia relativa en el experimento de lanzar 100 veces una moneda. Aumentan el número de lanzamientos, usando recurso tecnológico".
En esta tarea, el saber de referencia es la ley de Laplace y la frecuencia relativa de obtener cara o sello.

El medio son los resultados del experimento, la frecuencia relativa de ellos y el valor teórico de cada resutado.

El medio de la tarea 5 es una tabla, no especificada, de frecuencia absoluta con la cual determinan la frecuencia relativa de cada resultado en el lanzamiento de una moneda, la probabilidad teórica de salir cara o sello en el lanzamiento de una moneda, además un procesador tecnológico que permite aumentar el número de lanzamientos y con ello precisar la tendencia de la frecuencia relativa de cada suceso.

La tarea del alumno es determinar como la probabilidad de salir cara, por ejemplo, lanzando una moneda se aproxima al valor de la probabilidad teórica $\frac{1}{2}$. No se sabe si el profesor que utiliza esta orientación profundizará en estos dos tipos de probabilidad, si establecerá alguna relación entre ellas o si él mismo tomará conciencia de que se enfrenta a dos maneras distintas de calcular la probabilidad y de los contextos en los que el mismo concepto se aplica. Por ejemplo la probabilidad teórica se obtiene mediante la razón entre casos favorables al suceso y casos posibles y la frecuencia relativa se obtiene realizando el cociente entre las veces que apareció el suceso en la experimentación y el total de veces que el experimento se realizó. En la medida en que el profesor tome conciencia de este fenómeno será provechoso para gestionar la enseñanza de esta noción.

En general las actividades propuestas colocan a los alumnos en la posición de alumno objetivo y alumno que actúa, permitiéndoles poner en juego procedimientos algorítmicos para responder a lo solicitado. Ninguna de las actividades solicita argumentar o explicar los procedimientos realizados ni dar significado a los cálculos efectuados, se podría pensar que el currículo propone actividades mnenotécnicas que implican un bajo nivel de razonamiento probabilístico.
El programa privilegia actividades en las que los alumnos deben seguir las instrucciones proporcionadas por los enunciados, trivializando la manera de manejar y analizar datos para tomar decisiones en contextos de incerteza.

Los ejemplos de actividades tampoco evidencian el significado que los alumnos deberían adquirir sobre las nociones de “equiprobabilidad de eventos, principio multiplicativo, espacio muestral, probabilidad teórica, modelo de Laplace y sus condiciones de aplicación: finitud del espacio muestral y equiprobabilidad, contenidos declarados en el programa de 8º básico (2011, p. 59), ni tampoco como “verificar si un experimento aleatorio cumple con las condiciones del modelo de Laplace”, una de las habilidades del programa de 8º básico, a desarrollar en este tema.

Se aprecia que el programa de estudio sugiere que los alumnos asignen probabilidad teórica a los sucesos considerados en las actividades propuestas, a costa de contratos débiles y de medios que no colocan al alumno frente a escenarios didácticos que les permitan comprender que la probabilidad es una medida y el nicho privilegiado para el estudio matemático de la incertidumbre.

2.3.3 . Análisis de los programas de estudio, 7° y 8° básico 2016.

A partir de la vigencia las bases curriculares desde 7° a 2° medio, (2016), se plantean para 7° y 8° básicos Propósitos y Objetivos de Aprendizaje.Para 7° básico el propósito de la enseñanza de la probabilidad es “Comparar y relacionar la probabilidad experimental con la probabilidad teórica, mediante experimentos aleatorios, diagramas de árbol, tablas o gráficos”.

En 8° básico, el propósito señala que:

> “Se busca que estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos; que determinen la probabilidad de ocurrencia de eventos en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias”. Programa Mineduc 7º básico (2016, p. 41).

Los objetivos de aprendizaje considerados para este estudio, desde 5° a 8° básico y reformulados con la adecuación curricular 2016, son los siguientes:

Tabla 3 Progresión objetivos aprendizajes de la noción de probabilidad 2016

5º básico	6º básico	7º básico	8º básico
Describir la posibilidad ocurrencia de un evento de acuerdo a un experimento aleatorio, empleando los términos seguro – posible – poco posible – imposible.	Conjeturar acerca de las tendencias de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.	Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo: • Estimándolas de manera intuitiva • Utilizando frecuencias relativas •Relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje.	Explicar el principio combinatorio multiplicativo: • a partir de situaciones concretas • representándolo con tablas y arboles regulares, de manera manual y/o con software educativo • utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto

Comparar probabilidades sin calcularlas	19. Comparar las frecuencias relativas de un evento al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos.	

Fuente: MINEDUC 2016

En lo que sigue se analizarán los nuevos objetivos de aprendizaje en 7° y 8° básico, los que corresponden a las adecuaciones curriculares.

Se aprecia que para el logro del objetivo 1 en 7° básico, los medios didácticos son los experimentos aleatorios manuales o los realizados por un software educativo, estos últimos permiten aumentar la repetición del experimento, los resultados obtenidos y precisar la estabilización de la frecuencia relativa.

Para el logro del segundo objetivo, el medio serán los resultados obtenidos en experimentos aleatorios para producir las comparaciones entre la probabilidad como estabilización de las frecuencias relativas y la probabilidad teórica de un evento utilizando diagramas de árbol, tablas o gráficos, para visualizar y determinar los casos posibles.

En octavo básico el objetivo pretende que los alumnos utilicen el principio multiplicativo en situaciones concretas, además que realicen representaciones de este principio mediante tablas y diagramas para calcular la probabilidad de un evento compuesto, en el que utilizaran la ley de Laplace.

En lo que sigue se analizan los ejemplos de actividades propuestos en los programas para el logro de cada objetivo de aprendizaje, a la luz de las nociones de contrato didáctico, medio.

2.3.3.1 La probabilidad como objeto de enseñanza, programa de 7º básico. Año 2016.

El programa de séptimo básico propone 6 ejemplos de actividades para el objetivo de aprendizaje: Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo:

>>Estimándolas de manera intuitiva.

>>Utilizando frecuencias relativas.

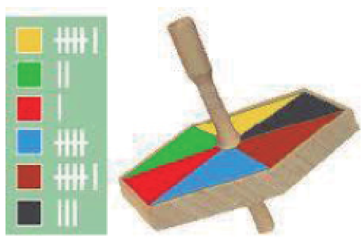
>>Relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje.

La primera actividad el programa sugiere realizar 4 experimentos para los cuales los medios son artefactos aleatorios convencionales, tales como trompo, chinches de colores, bolitas en una urna.

La tarea corresponde a realizar los experimentos y determinar de manera intuitiva la probabilidad de cada suceso.

Por ejemplo una parte de la lámina se presenta en la siguiente imagen.

Figura 6. Lámina que ilustra la actividad 1

DIBUJO DEL EXPERIMENTO	DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO	¿PROBABILIDAD DEL EVENTO?
	Se gira el trompo que tiene la forma de un hexágono regular. En el dibujo se registra el evento "rojo".	

Fuente: programa de estudio de 7° básico,(2016, p. 175)

El programa sugiere al docente, realizar simulaciones disponibles en internet.

La actividad 2 propone hacer girar una flecha giratoria dividida en al menos 4 colores y anotar el color del sector que queda bajo la flecha. Esta actividad se divide en tres tareas.

La primera tarea consiste en conjeturar sobre la ocurrencia de los diferentes colores si se gira el disco muchas veces solicita y que los alumnos clasifiquen estos sucesos en "ocurre muy poco" y "ocurre mucho".
Esta tarea plantea por una parte asignar palabras del lenguaje natural a sucesos de incertidumbre y por otra parte cuantificar de manera cualitativa la posibilidad de ocurrencia del suceso.

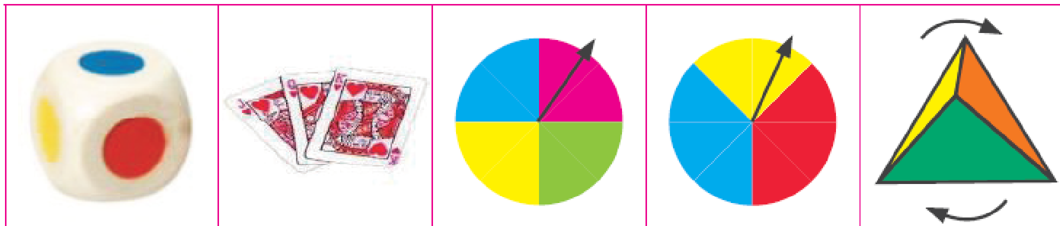
En la segunda tarea se realiza el experimento, girando el disco 50 veces, se anotan los resultados y se determinar la frecuencia absoluta de los colores que aparecieron en forma experimental. La frecuencia absoluta real de la ocurrencia de un color, es un medio para comprobar la validez de la conjetura realizada.

La tercera tarea consiste en calcular las frecuencias relativas de la ocurrencia de los colores.

La actividad 3 es confusa, no se entiende lo que plantea ni tampoco el propósito de ella. El programa presenta una lámina que muestra 5 artefactos aleatorios, bajo los cuales se presentan las reglas de un experimento. La actividad se ilustra en la siguiente imagen:

Figura 7. Lámina con ejemplos de experimentos aleatorios.

3. Responden cuáles de los siguientes experimentos aleatorios coinciden con las probabilidades de sus eventos y explican y comunican sus respuestas.



El dado tiene los mismos colores en las caras opuestas. Se lanza el dado y se registra el color.	Se ponen los naipes cara abajo y se saca uno al azar. Se registra el valor del naipe.	Se gira la rueda de la fortuna y se registra el color de la posición en que para.	Se gira la rueda de la fortuna y se registra el color de la posición en que para.	Se lanza el tetraedro y se registra el color de la base en la cual cae.

Fuente: programa de estudio ,2016, p.176

Observe que la instrucción es poco clara. ¿Cómo se entiende que los experimentos aleatorios coincidan con la probabilidad de sus eventos? ¿A qué se refiere?

Tampoco se especifica cuantas veces se ha de lanzar el artefacto en cada experimento ni como el experimento se vincula a la aleatoriedad.

La actividad 4 se refiere al experimento lanzamiento de 10 chinches. Las tareas de los alumnos deberían ser: registrar en un medio no especificado (un tabla o una lista) si los chinches caen de punta o en su base al lanzarlos 10, 20 …, etc. veces, calcular las frecuencias relativas acumuladas y luego graficar estos datos para los experimentos realizados.

Con este grafico los alumnos deberían reconocer que el experimento no es equiprobable.

La actividad 5 corresponde al experimento de extraer una bolita de un balde, que contiene 1 bolita roja, 2 azules y 3 verdes, con reposición.
En la primera tarea los alumnos realizan una conjetura sobre la frecuencia relativa con la que ocurren los sucesos, extraer bolita verde, azul o roja.

La segunda tarea consiste en realizar el experimento una gran cantidad de veces y graficar la frecuencia relativa de cada color.

La tercera tarea consiste en comparar la frecuencia relativa obtenida con la conjetura, fundamentando su respuesta.

Por ejemplo, el balde contiene una bolita roja, dos azules y tres verdes. Sacan al azar una bolita, anotan el color y la devuelven al balde

Tarea Propuesta

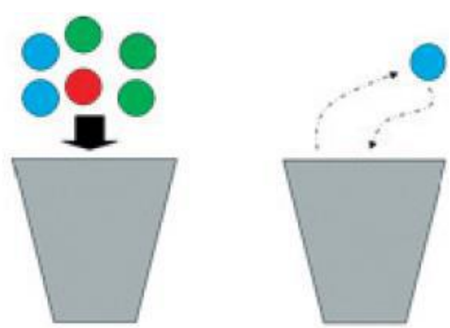


Figura 27

- Conjeturan acerca de las frecuencias relativas de los colores.
- Realizan repetitivamente el experimento y elaboran un gráfico adecuado.
- Comparan las frecuencias relativas con la conjetura.

La actividad 6 consiste en determinar la frecuencia relativa de las letras del alfabeto en un texto escrito.

En la primera tarea los alumnos realizan una conjetura sobre la frecuencia relativa con la que aparecen en un texto alguna consonante o vocal específica.

La segunda tarea consiste en contar las veces que aparece la consonante o vocal, y graficar la frecuencia relativa de cada letra.

La tercera tarea consiste en comparar la frecuencia relativa obtenida con la conjetura, fundamentando su respuesta.
Los ejemplos de actividades se apoyan en los experimentos aleatorios para lograr que los alumnos asignen de manera intuitiva una probabilidad, elaboren conjeturas sobre la posibilidad de ocurrencia de un suceso y la comparen con los resultados reales del experimento, sea en una suerte de análisis frecuencial, absoluto o relativo, sobre la posibilidad de ocurrencia del suceso.

También el experimento aleatorio permitiría clasificar los sucesos como equiprobables o no equiprobables y además asociar palabras del lenguaje cotidiano a las situaciones de incertidumbre que se están aprendiendo.
Se aprecia, además que algunas actividades ya están consideradas en el programa de 5º básico.

El objetivo de aprendizaje “Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos”, propone 6 actividades.
La primera actividad propone elaborar una tabla de posibles resultados para el lanzamiento de dos dados.

Se proponen dos experimentos, el primero corresponde a lanzar los dados por separado y anotar como par ordenado el resultado del primer y segundo lanzamiento. El segundo experimento corresponde a lanzar ambos dados en forma simultánea y anotar los resultados como par ordenado, sin considerar el orden de aparición de los resultados.

El programa sugiere al docente utilizar simulaciones de experimentos disponibles en internet.
En la actividad 2 el foco está puesto en el cálculo de las frecuencias relativas acumuladas obtenidas al lanzar 10 chinches y anotar la cantidad que cayó de punta y los que cayeron de base. Se sugiere al docente repetir el experimento muchas veces, y elaborar un gráfico de líneas sobre frecuencias relativas acumuladas, para cada 10, 20, …, repeticiones del experimento, programa de estudio 7° básico, (MINEDUC,2016).

La actividad 3 propone el experimento: extraer clips de colores de una bolsa, anotar el color y devolverlo a la bolsa para reiterar varias veces el experimento. La composición de la bolsa es 1 clip rojo, 2 verdes y 3 azules.
Existen dos tareas en esta actividad, la primera es conjeturar la frecuencia con la que aparecen los distintos colores cuando el experimento se repite muchas veces y la segunda tarea es comparar estas conjeturas con las frecuencias relativas experimentales, al realizar 50 extracciones.

La actividad 6 plantea el experimento de lanzar un dado y una moneda, registrar los resultados como un par ordenado que contenga un número, del 1 al 6, y una letra, C o S.

Se plantean dos tareas y una pregunta. La tarea 1 consiste en elaborar un diagrama de árbol de sucesos para este experimento y la tarea 2 consiste en determinar el número total de ocurrencias en el lanzamiento de un dado.

La pregunta relacionada con este experimento es ¿Se cambia el número total de las ocurrencias posibles, si se lanza primero la moneda y después el dado?

Esta pregunta corresponde a un desafío del medio didáctico para colocar a los alumnos en la posición de alumno de la acción E_{-2} al explicar esta situación y de alumno que aprende E_{-1}, al fundamentar la respuesta.
Se observa que los ejemplos de actividades se relacionan con el objetivo propuesto. Las actividades propuestas proporcionan medios didácticos para concretar el objetivo.

Las actividades 4 y 5 quedan fuera de este análisis ya que en 4 se plantea un problema estadístico entre dos poblaciones, analizadas a partir de las frecuencias absolutas y relativas y la actividad 5 plantea un problema que trata de comparar el promedio estadístico de dos muestras a partir de un gráfico de barra doble.

2.3.3.2 La probabilidad como objeto de enseñanza, programa de 8º básico.

En 8° básico el objetivo de aprendizaje Explicar el principio combinatorio multiplicativo:

- A partir de situaciones concretas.
- Representándolo con tablas y árboles regulares, de manera manual y/o con software educativo.
- Utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto.

Plantea 6 actividades.
La primera actividad corresponde al experimento de lanzar varias veces un tetraedro de colores verde, amarillo, naranja y celeste y anotar el color de la base sobre la que cae. Al lanzar dos veces el tetraedro, el suceso se anota en un par ordenado que indica los colores del primer y segundo lanzamiento.

Para esta actividad se proponen cuatro tareas, la primera plantea lo siguiente: ¿Por qué se puede determinar sistemáticamente el número de total de los pares mediante una tabla de 4x4? Explican y comunican la respuesta.

Esta pregunta corresponde a un medio antagónico, en el sentido de Brousseau, los alumnos de 13 años deben analizar las condiciones del experimento y deducir que los resultados son parejas de colores, las que se pueden distribuir en una tabla 4x4.

La segunda tarea propone completar una tabla de doble entrada, con los pares ordenados que corresponde al primer y segundo lanzamiento del tetraedro. La tabla es la siguiente:

c				
a		(n,a)		
n				
v				
	v	n	a	c

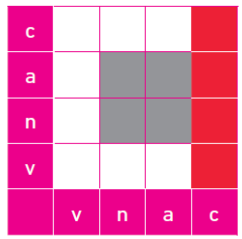
Lo que se obtiene son los casos posibles del experimento, lo que da cuenta del espacio muestral. Es decir la tabla se constituye en un medio para determinar el espacio muestral, su cardinalidad y también los casos favorables de algún suceso.

La tercera tarea se realiza en una nueva tabla vacía y solicita

a) “Marcar en la tabla todos los pares que tienen ambos colores iguales”. y
b) “Marcan en la tabla los pares que no tienen naranjo ni celeste”.

En estas tareas se evidencia un medio antagónico que permitiría identificar casos favorables a determinados sucesos.

La cuarta tarea se realiza en una nueva tabla con una franja vertical roja y un cuadrado gris de lado dos. La tarea plantea la siguiente pregunta: ¿Qué propiedad tienen los eventos marcados en gris y los marcados en rojo, en la tabla?



El propósito es poner en evidencia que los sucesos (n, a) y (a, n) son distintos y que y que el suceso (x, x) solo aparece una vez.
La segunda actividad plantea un problema de predicción y toma de decisiones y sugiere elaborar una tabla de resultados y un diagrama de árbol como estrategia de solución para contabilizar e identificar todos los casos posibles.
El diagrama de árbol esta dibujado en la página 182 y solo hay que completar las terminales de las ramas con la codificación 0, 1 y 2.

La actividad 3 corresponde a un problema que presenta experimentos con 3 instrumentos aleatorios. Los experimentos consisten en lanzar dos o más veces cada artefacto, anotar las n-uplas obtenidas en cada lanzamiento y elaborar un diagrama de árbol para determinar los casos posibles.
En esta actividad se plantea determinar la cardinalidad del espacio muestral de sucesos compuestos utilizando el diagrama de árbol con n niveles.

La actividad 4 plantea un problema combinatorio convencional, que puede ser resuelto por la técnica del principio multiplicativo.

La quinta actividad es un problema que sugiere utilizar diagrama de árbol con 3 niveles para su solución.

La actividad 6 plantea una aplicación del principio multiplicativo o del diagrama de árbol. En este caso el medio es evocado y el rol del alumno es poner en juego los aprendizajes adquiridos en el desarrollo de la unidad, así el alumno debe interpretar el enunciado y si elabora un diagrama de árbol, este debe contener dos niveles. El primer nivel consta de 5 ramas y el segundo tiene 6 ramas por cada rama del primer nivel, es decir el árbol tiene 30 elementos. Si se aplica el principio multiplicativo el alumno debe considera que hay 5 elementos de cada clase y 6 elementos de otra clase por cada una de las 5 primeras, lo que da como resultado la multiplicación $5 \cdot 6 = 30$.

También solicita calcular una probabilidad, para lo que deberá considerar que los sucesos son equiprobables y aplicar la ley de Laplace, considerando 1 caso favorable de 30 casos posibles.

2.4 Análisis de la Noción de Probabilidad en los Textos de 5º a 8º básico.

En este análisis se describe la enseñanza de la probabilidad propuesta en los textos escolares, entregados por el MINEDUC durante los años 2014 – 2015 - 2017.

En estos textos se señala que un grupo editorial, realizó una adaptación para el currículo chileno del método de enseñanza de la matemática, en particular de la probabilidad, diseñado por profesores de distintas universidades de los Estados Unidos, entre los que figuran Richard Askey, profesor emérito de matemática de la Universidad de Wisconsin, Eva Maletsky, coordinadora del proyecto, entre otros más.

Uno de los indicadores de selección, de estos textos, es la adjudicación que esta editorial obtuvo en la licitación de textos de estudio que el ministerio de educación chileno fijo el año 2013 - 2014, por lo que su propuesta debería ajustarse a las orientaciones de las bases curriculares y programas de estudio. Otro indicador de selección fue la distribución masiva de textos escolares, en escuelas municipales y subvencionadas, en particular a los alumnos de 5º, 6°, 7° y 8º básico, que el MINEDUC realizó durante el año 2015, de modo que en la mayor parte de las casas chilenas se encuentra uno de ellos.

En el estudio de la transposición didáctica, interesa identificar, a la luz del marco teórico, el estatus de los saberes de referencia y su evolución durante estos cuatro niveles, analizar los tipos de problemas planteados a los estudiantes y sus medios didácticos. Algunas interrogantes sobre las actividades formuladas son ¿constituyen ellas desafíos para los alumnos o solo dan un conjunto de instrucciones ostensivas a seguir? ¿Las actividades son situaciones problemas o solo ejercicios formulados como problemas?

2.4.1 La enseñanza de la probabilidad en el texto de estudio de 5º básico.

El texto de quinto básico se estructura en 5 partes. La primera es la activación de destrezas importantes para la comprensión de la probabilidad. Estas destrezas son: hacer y usar una tabla de conteo, determinar resultados posibles, comparar partes de un todo y partes de un grupo.

Para hacer y usar una tabla de conteo, se parte de datos consignados en un enunciado y se solicita contestar preguntas sobre datos explícitos en el enunciado y en la tabla. Para la segunda destreza, se solicita enumerar resultados posibles del experimento, evocado, extraer una bolita de una bolsa con tres bolitas.

Para comparar partes de un todo, se pide determinar la fracción que represente un color, de un disco separado en 8 partes iguales, cada parte pintada con uno

color de tres colores. Para comparar partes de un grupo, de $'n'$ elementos se dibuja la parte del grupo, por ejemplo se dibujan tres partes de un grupo de 10, para determinar la fracción $\frac{3}{10}$. Al final de la página 279 del libro, se definen los conceptos de resultado, suceso y predecir como parte del vocabulario a utilizar.
Las siguientes partes del texto son 4 lecciones para la enseñanza de la probabilidad, páginas 278 – 297, cuyos objetivos son: hacer una lista de resultados posibles de un experimento; resolver problemas usando una lista organizada de datos, predecir los resultados de un experimento y expresar la probabilidad como una fracción.

En cada lección se exhibe la estrategia para resolver ejercicios, la que es solicitada en la práctica de los ejercicios propuestos.

En la solución de ejercicios resueltos y propuestos se advierten restricciones explictas para utilizar la estrategia propuesta en el texto,. Esos son de respuesta única, se plantean en el marco de juegos aleatorios utilizando instrumentos aleatorios del tipo: dados, monedas, flecha giratoria, bolsa con bolitas de colores. En general se aprecia que los problemas propuestos en cada lección son repetitivos, conductistas y no requieren que los alumnos interactúen con un medio antagonista y el medio tampoco proporciona retroacciones a los alumnos.

En la primera lección el objeto de enseñanza es resultados posibles de un experimento aleatorio. El texto propone realizar experimentos utilizando un disco giratorio dividido en cuatro partes iguales de distintos colores, tal como lo sugiere el programa de estudio. La tarea consiste en repetir 20 veces el experimento, hacer girar la flecha del disco y registrar el resultado en una lista. Luego plantea 3 preguntas para que los alumnos obtengan conclusiones:

1. ¿Cómo hallar el resultado en cada giro luego de hacer el experimento?
2. ¿Cuántos colores hay en la flecha giratoria? y

3. ¿Cuántos resultados posibles hay para este experimento? Menciona los resultados posibles.

Observe que las preguntas 1 y 2 solo tienen sentido para comprender las reglas del juego, por lo que cualquier alumno podría responderla y la segunda pregunta induce la respuesta de la tercera. El alumno no realiza un esfuerzo cognitivo para mencionar los resultados posibles y solo necesita seguir las instrucciones del texto para terminar la tarea.

La siguiente actividad plantea una tabla con resultados posibles de sucesos compuestos obtenidos de lanzar una moneda y hacer girar una flecha en un disco dividido en 4 colores.

Figura 8. Actividad del texto del estudiante 5º básico.

Moneda	Color			
	Rojo	Azul	Verde	Amarillo
Cara	,	,	,	,
Sello	,	,	,	,

Fuente. Texto del estudiante Matemática 5º básico , p. 281.

El texto propone construir un disco con flecha giratoria de 4 colores y realizar el experimento de lanzar una moneda 20 veces, hacer girar la flecha alrededor del disco y anotar los resultados en una tabla como la anterior. Esta actividad obligaría a aumentar el tamaño de la tabla y a identificar los sucesos posibles del experimento, que son 8.

A continuación el texto plantea la pregunta ¿Cómo cambiaría el número de los resultados posibles si la flecha giratoria tuviera cinco colores? Esta pregunta constituye un medio antagónico cuya finalidad es hacer abstracción del experimento y realizar inferencias apoyadas en la actividad concreta anterior. Este medio permitiría establecer una relación de variación de los casos posibles, al aumentar o disminuir, las condiciones iniciales de al menos uno de los sucesos simples. En este caso los alumnos podrían identificar nuevos casos posibles.

En la página 281, aparecen 8 problemas propuestos, en los cinco primeros se trata de enumerar los resultados posibles de cada experimento. Los problemas 1 y 2 son sucesos simples y en 3, 4 y 5 los sucesos son compuestos,

En los problemas 5, 6 y 7, el medio es una tabla que muestra, codificados, los resultados del experimento lanzar una moneda y un dado. El problema solicita enumerar los resultados posibles, por ejemplo (cara, 1), (cara, 1) (sello, 1) , etc., contar los resultados posibles y además contar cuantas veces ocurrió el suceso (cara, 3), información que se extrae de la tabla, si es que los niños comprenden la simbología utilizada.

Figura 9. Ejercicios propuestos

USA DATOS **Para 5 - 8, usa la tabla.**

5. Enumera todos los resultados posibles del experimento.

6. ¿Cuántos resultados posibles hay?

7. ¿Cuántas veces ocurrió el resultado *Cara*, 3?

8. ESCRIBE **Explica** cómo puedes hallar el número de resultados posibles para un experimento al observar una tabla de resultados.

Experimento de Soledad
Lanzar un cubo numerado y una moneda

	Número					
Moneda	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cara	II		III	I	III	II
Sello	I	II	I	II		IIII

Capítulo 12 281

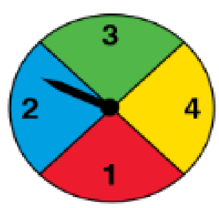
(Fuente: Texto del estudiante 5° básico, 2015, p. 281

El problema 8 solicita “Explicar …” lo que se espera es que el alumno considere cada marca comou suceso compuesto, luego cuente las marcas en cada casilla y las sume. Este último resultado coresponde a los sucesos posibles. El medio es antagonista siempre que el alumno domine la simbología utilizada. En tal caso podría desarrollar la habilidad de identificar número de sucesos con el

número de marcas en cada casilla, argumentar y comunicar en base al análisis de los datos consignados en una tabla.
Si el alumno no entiende la simbología, entonces habría confusión y desmotivación, lo que produciría dificultades de compresión en el alumno.

El propósito de la segunda lección es enseñar a organizar la información de los problemas en listas de datos, exhibiendo diferentes tipos de listas, para distintas situaciones, p. 282. Un tipo de situación es hallar los resultados posibles de un experimento.
A continuación, en la página 283, presenta un desarrollo ostensivo de un problema en cuatro pasos, los que son: lee para entender, planea una estrategia, resuelve y comprueba tu solución. La estrategia que permite la solución es la lista organizada de datos.
Los tipos de problemas orientan a los alumnos a utilizar la lista organizada de datos. Estos problemas son como los siguientes:
"Julia juega a lanzar una moneda y girar la flecha giratoria, de 4 colores. Enumera todos los resultados posibles"

Figura 10. Flecha giratoria



Fuente: Texto del estudiante de 5° Básico

"Roberto juega a girar la flecha y sacar un pato de la bolsa. ¿Cuántos resultados posibles hay?"

Figura 11. Problema de Roberto y Gregorio

Fuente: Texto del estudiante de 5° Básico).

Estos problemas, se percibe que estan formulados de manera ostensiva, pues, los alumnos deben seguir las instrucciones, enumera y determinar un número.

La siguiente formulación,“Para ganar un premio, Gregorio debe obtener un número mayor que tres y sacar el pato verde. Menciona las maneras en que Gregorio puede ganar.”
Podrìa corresponder a un medio antagónico.

En el siguiente problema se solicita organizar los datos en una lista.
“Laura está haciendo boletos para el festival de su colegio. Cada tipo de boleto será de diferente color. Habrá boletos para adultos, niños y personas mayores. Habrá boletos para un día y para dos días. ¿Cuántos colores de boletos habrá?”

Aquí, el saber de referencia, correspondería al principio multiplicativo.

En la tercera lección el objeto de enseñanza es predecir resultados de un experimento aleatorio. Al respecto señala que “Cuando predices, haces una conjetura razonable acerca de lo que podría suceder”.

En esta explicación, la palabra predecir entiende como sinónimo de conjeturar y tal vez estos significados no se encuentren entre los adquiridos por los niños de

10 años. Por lo tanto se podría producir, nuevamente una desmotivación de los alumnos que estudina con este texto.

Luego hay que cuidar el lenguje que se utiliza al relacionar el obejto de enseñanza con las comprensiones que puede lograr los alumnos de un nivel escolar, determinado.

El texto utiliza los resultados posibles como recurso para definir el concepto de suceso como: “Un suceso puede ser un resultado o una combinación de resultados”, p. 286. Además establece una clasificación de sucesos en seguro, posible, poco posible e imposible, ejemplificando cada uno a partir de los sucesos determinados al extraer bolas de una bolsa.
Así un suceso es seguro si siempre ocurrirá, un suceso es poco posible si tiene poca posibilidad de ocurrir, un suceso es posible si tiene gran posibilidad de ocurrir y es imposible si nunca sucederá.

El texto plantea 3 preguntas, las que están relacionadas con las nociones de seguro, posible e imposible
En la página 287 se plantea predecir resultados al extraer una ficha de una bolsa con 6 fichas azules, 3 rojas y 1 amarilla y comprobarlas realizando el experimento 30 veces, para lo cual los alumnos tienen que disponer de una bolsa con la composición de fichas indicada. Los resultados de ambos procesos, se registran en una tabla, la que permitiría establecer comparaciones entre ellos, determinar resultados posibles e identificar los sucesos etiquetándolos como posible, poco posible, seguro e imposible.

Se plantean 17 ejercicios y problemas de práctica. Los 6 primeros relacionados con la clasificación de sucesos en posible, seguro, poco posible o imposible, los cuatro siguientes relacionados con comparar probabilidades sin calcular, lo que da cuenta del objetivo de aprendizaje. Otros ejercicios están dirigidos a elaborar conjeturas y comprobarlas experimentalmente. Los contextos de aplicación son

juegos en los que se utilizan instrumentos aleatorios convencionales. Solo en el manual de ejercitación del estudiante, p. 129 se proponen situaciones de incertidumbre no experimentales, no equiprobables y que utilizan sucesos aleatorios climatológicos entre otros. Por ejemplo escribe si el suceso “correr 1000 metros en 1 segundo” o “lanzar una piedra al agua y que se hunda” es posible, seguro o imposible.
En particular el ejercicio 14, p. 288, del texto de estudio, se trata de sucesos equiprobables, concepto que aún no ha sido abordado por las actividades propuestas en este texto.

Las actividades de predicción presentadas en el texto exceden los propósitos emanados del programa de estudio de 5º básico, lo que significa que el texto de estudio supera los aprendizajes planteados en el currículo y da un paso más en la enseñanza de esta noción.

Hasta aquí la enseñanza de la probabilidad se ha desarrollado en el plano intuitivo, a partir de la idea “la probabilidad mide la posibilidad de los sucesos y es la base para hacer predicciones” expresada al comienzo de este capítulo, p. 279, por ello los problemas propuestos se basan en decidir la posibilidad de ocurrencia de un suceso.

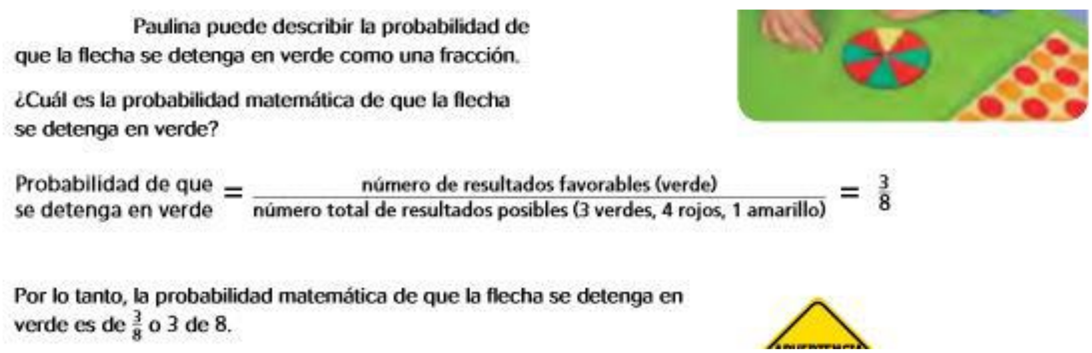
En la lección 4 el texto introduce una definición escolar de probabilidad: “es una comparación entre el número de resultados favorables y el número de resultados posibles de un suceso. La probabilidad de que un suceso ocurra se expresa como 0, 1 o una fracción entre cero y 1”.

Claramente el propósito de esta definición es asociar la probabilidad de ocurrencia de un suceso a un número representado por la comparación entre cantidades. Sin embargo esta definición no específica el criterio de comparación entre resultados favorables y posibles de un suceso. A la edad de 10 años lo más probable es que el criterio de comparación sea la diferencia.

Por otra parte el texto cambia el foco del significado de la probabilidad, Batanero (2005), del intutivo al clásico o al frecuencial, introduciendo una fórmula en la que no aparecen diferencias, sino una fracción cuyo significado escolar recién se esta inuiciando, en este nivel.

La siguiente imagen pone en evidencia la ostensión desplegada por el texto con la finalidad que el alumno utilice la información y la estrategia en la resolución de ejercicios propuestos.

Figura 12. Ejercicio resuelto**.**



Paulina puede describir la probabilidad de que la flecha se detenga en verde como una fracción.

¿Cuál es la probabilidad matemática de que la flecha se detenga en verde?

$$\text{Probabilidad de que se detenga en verde} = \frac{\text{número de resultados favorables (verde)}}{\text{número total de resultados posibles (3 verdes, 4 rojos, 1 amarillo)}} = \frac{3}{8}$$

Por lo tanto, la probabilidad matemática de que la flecha se detenga en verde es de $\frac{3}{8}$ o 3 de 8.

(Fuente: Texto del estudiante 5° básico, 2015, p. 290).

Se observa en el extremo inferior derecho el letrero: “el número de resultados favorables es siempre el numerador y el número de resultados posibles es el denominador”, lo que indica que el texto condiciona los posibles desarrollos de los alumnos.

El saber de referencia, remite a la ley de Laplace, formula que satisface los principios de la teoría axiomática de Kolmogórov, para la cual la probabilidad cuantifica la incertidumbre de un suceso aleatorio con un número real comprendido entre 0 y 1.

En el saber de referencia, la probabilidad es una función P definida sobre una clase de conjuntos A (los sucesos) de E (el espacio muestral de un experimento aleatorio ε), donde A tiene estructura de algebra de conjuntos (algebra de

Boole). Esta función determina que la probabilidad de cualquier elemento de A, es un número real comprendido entre 0 y 1, inclusive.
En el texto de estudio la probabilidad es una comparación, es decir una razón, entre el número de resultados favorables y el número de resultados posibles de un suceso. La probabilidad de que un suceso ocurra se expresa como 0, 1 o como una fracción cuyo valor varía entre cero y uno. Esta definición satisface los axiomas de la teoría de la probabilidad de Kolmogorov en cuanto a su dimensión calculatoria, pero la fórmula por si sola no le atribuye significado al número obtenido con relación al suceso que cuantifica, sino que es la enseñanza la que debería cumplir la función de atribuir los significados pertinentes al nivel de comprensión de los alumnos.

El texto de estudio presenta la forma en que se calcula la probabilidad en ciertos contextos, pero no la define como objeto de estudio.

En consecuencia, el texto escolar presenta dos significados, en el sentido de Batanero (2005), de la noción de probabilidad, uno intuitivo y el otro clásico. El primero se desarrolla en el marco de sucesos aleatorios, los que son caracterizados por palabras del lenguaje natural, tales como seguro, posible e imposible. El segundo significado es calculatorio y se apoya en determinar resultados posibles y favorables, para calcular la probabilidad, expresada como fracción, de sucesos en su mayoría asociados a experimentos aleatorios equiprobables, que necesariamente se apoya en una manera particular de calcular, la ley de Laplace.

Estos medios didácticos se percibe que no son suficientes para promover una concepción de la probabilidad y a la aleatoriedad ligada a las experiencias reales de los alumnos.

La concepción de probabilidad que subyace en la propuesta de este texto, la reduce al contexto de juegos de azar con instrumentos aleatorios que evidencian la equiprobabilidad de sus resultados.
Estos problemas responden a preocupaciones de otra época y no promueven un pensamiento que en el siglo XXI debería contribuir a la alfabetización probabilística de los ciudadanos.

2.4.2 La enseñanza de la probabilidad en el texto de estudio de 6º básico.

El texto de 6º básico, 2014 – 2017 se estructura en 5 partes: Activación de destrezas; Lección uno sobre probabilidad experimental; Lección dos sobre la estimación de probabilidad; Taller que enseña a escribir y argumentar para demostrar y Practica adicional.
La activación de destrezas consta de tres partes. La primera solicita escribir 15 fracciones en la forma irreducible, la segunda parte indica escribir 15 fracciones como decimal y como porcentaje y la tercera parte corresponde a indicar si los sucesos como “que mañana hables con un amigo por teléfono” son seguros, imposibles, probables o improbables.
En este nivel aparece una nueva palabra relacionada con el azar, lo improbable, palabra que podría confundir y producir ambigüedad en los niños de 11 años, porque, ¿qué es lo improbable? ¿Es lo que no es probable?, es decir lo seguro o, ¿lo que es imposible que ocurra, hay una remota posibilidad de ocurrencia el suceso? ¿Cuál es el sentido de esta palabra, en este ejercicio? El texto no lo define ni lo describe y además en quinto no se ha utilizado como etiqueta para clasificar sucesos.
El texto pretende incorporar al vocabulario del alumno las nociones de probabilidad experimental, resultado y probabilidad. Al respecto, se definen las nociones de resultado, espacio muestral y probabilidad como:

Resultado es la consecuencia posible de un experimento de probabilidad. Espacio Muestral es el conjunto de todos los resultados posibles.

Probabilidad es la medida de la posibilidad de que ocurra un suceso, p. 269.

En la lección 1 el objetivo es hallar la probabilidad experimental de un suceso, para ello define:

La probabilidad experimental es: "el número de veces que se da el resultado en comparación con el número total de pruebas, lo que puede expresarse como una razón en forma de fracción", texto escolar 6º básico (2014, p. 270):

$$P(Suceso) = \frac{Número\ resultados\ favorables\ que\ ocurren}{Número\ total\ de\ pruebas} \qquad (12)$$

Fuente texto para el estudiante. Matemática 6°, p.270

En este caso no se especifica el criterio de comparación, de los casos favorables y posibles. Si queda claro de manera ostensiva que la probabilidad se expresa en forma de razón o fracción.

El texto presenta el desarrollo del problema:

Camila tiene un recipiente con fichas cuadradas congruentes que pueden ser rojas, anaranjadas, amarillas o verdes. Camila elige una ficha al azar, anota el color y la vuelve a colocar en el recipiente. Realiza esta actividad 20 veces y anota los resultados en una tabla. ¿Cuál es la probabilidad experimental de elegir al azar cada color?

En cuya solución se usa la tabla:

Color	Rojo	Anaranjado	Amarillo	Verde
Veces que salió	2	11	4	3

En el desarrollo del problema se opera con la fórmula de probabilidad experimental, expresando los resultados en fracción, decimal y porcentajes.

Figura 13. Ejercicio resuelto

$P(\text{rojo}) = \dfrac{\text{favorables} \rightarrow}{\text{pruebas totales} \rightarrow} \dfrac{2}{20} \text{ o } \dfrac{1}{10}; 0{,}1; 10\%$ $\qquad$ $P(\text{anaranjado}) = \dfrac{\text{favorables} \rightarrow}{\text{pruebas totales} \rightarrow} \dfrac{11}{20}; 0{,}55; 55\%$

$P(\text{amarillo}) = \dfrac{\text{favorables} \rightarrow}{\text{pruebas totales} \rightarrow} \dfrac{4}{20} \text{ o } \dfrac{1}{5}; 0{,}2; 20\%$ $\qquad$ $P(\text{verde}) = \dfrac{\text{favorables} \rightarrow}{\text{pruebas totales} \rightarrow} \dfrac{3}{20}; 0{,}15; 15\%$

. Fuente texto para el estudiante. Matemática 6°, p.270.

Este procedimiento explica lo necesario de la relación fracción - decimal - porcentaje en la activación de destrezas, de la página 269 y lo ostensivo de su presentación.

Una dificultad que los niños de 11 años podrían presentar ante este desarrollo es que pese a la ostensión desplegada, no entiendan de donde proviene el 20 en cada cálculo de $P(X),\ X \in \{rojo, verde, anaranjado, amarillo\}$.
Por otra parte frente a la pregunta ¿Cuáles crees que son las fichas más comunes y las menos comunes del recipiente? Explica.
Los niños de 11 años podrían responder que hay menos fichas amarillas que verdes porque P (Amarillo) = 0,2 y P (Verde) = 0,15.
Estas dos dificultades reflejan un vago conocimiento de los autores del texto sobre las dificultades y obstáculos que deben enfrentar los niños a esta edad y el desconocimiento de otras capacidades infantiles para abordar desde las experiencias reales de los niños esta compleja noción.

Este texto propone tres grupos de ejercicios, con enunciado, denominados: práctica con supervisión, práctica independiente con resolución de problemas y comprensión de los aprendizajes.

En práctica con supervisión se proponen dos enunciados en los que se solicita calcular la probabilidad experimental de un suceso, conocidos ciertos datos organizados en tablas. El primero ellos presenta un desarrollo ostensivo, en el cual la tarea del alumno es colocar el suceso favorable en el numerador de la fracción para determinar la probabilidad.

La imagen muestra el desarrollo descrito:

Figura 14. Ejercicio Resuelto.

$P(\text{cara}) = \frac{\square}{40}$ o $\frac{\square}{10}$; 0,7; 70% $P(\text{cruz}) = \frac{\square}{40}$ o $\frac{\square}{10}$; 0,3; 30%

Cara	Sello
28	12

(Fuente texto para el estudiante. Matemática 6°, p.270)

El segundo problema solicita hallar la probabilidad experimental de haber extraído una bolita del color roja, azul, verde o blanca, considerando los datos de la siguiente tabla.

Figura 15. Problema propuesto

Color	Rojo	Azul	Verde	Blanco
Veces que salió	9	18	8	15

2. P(rojo)   **3.** P(azul)   **4.** P(verde)   **5.** P(blanco)

Fuente texto para el estudiante. Matemática 6°, p 270. 271

Para ello el alumno debería hacer uso de la fórmula de probabilidad experimental anotada anteriormente.

En práctica independiente con resolución de problemas se plantean cuatro enunciados relacionados con situaciones aleatorias, cuyos resultados son registrados en tablas. En cada caso se solicita hallar la probabilidad experimental usando los datos tabulados y la formula de la probabilidad experimental.

A continuación, se presentan dos ejemplos.

Figura 16. Problema Propuesto

I. Una bolsa contiene fichas del mismo tamaño numeradas del 1 al 4. Emilia elige al azar una ficha 16 veces, la vuelve a colocar dentro de la bolsa y toma otra cada vez. Del 7 al 10, usa los resultados para hallar la probabilidad experimental.

Número	1	2	3	4
Veces que salió	2	4	6	4

7. P(1) 8. P(2) 9. P(3) 10. P(4) Luisa y Marcos

II. Luisa y Marcos lanzan un cubo numerado cada uno y anotan los resultados. Halla la probabilidad experimental de sacar cada número.

11.

Luisa							
Número	1	2	3	4	5	6	Pruebas totales
Veces que salió	3	4	3	6	5	4	25

12.

Marcos							
Número	1	2	3	4	5	6	Pruebas totales
Veces que salió	9	8	7	10	9	7	50

Fuente: Texto para el estudiante. Matemática 6°, p.270 – 271.

Se observa que la redacción de cada problema no es adecuada para niños de 11 años. En el problema I la tabla debería decir fichas numeradas y solo dice número. Esto es importante para situar la atención de un niño de 11 años. Y luego dice Emilia elige al azar una ficha 16 veces, ¿qué significa esto para un niño de 11 años? Tal vez debería decir “Emilia elige en 16 oportunidades una ficha de la bolsa y cada vez anota su número en la tabla y luego la devuelve a la bolsa” es decir una formulación más concreta.

Por otra parte en el problema II se habla de un cubo numerado cuando en nuestro país a este cubo, se le llama dado.
La presentación de la información de tan ostensiva podría producir obstáculos para la resolución y comprensión de la noción de probabilidad experimental.

El tercer grupo, contiene 4 ejercicios, solo dos de ellos se relacionan con el cálculo de la probabilidad experimental.

La segunda lección del texto plantea: estimar probabilidades de sucesos futuros basándose en los datos obtenidos en la probabilidad experimental y determinar el valor de verdad de afirmaciones relacionadas con la probabilidad experimental.

Para estimar probabilidades desarrolla dos problemas para que los alumnos reproduzcan el modelo en los ejercicios y problemas propuestos.

El primer problema es: Juan encestó 12 tiros en los últimos 30 intentos con la pelota de basquetbol. Basándote en esta marca, estima cuántas veces encestará la pelota en los próximos 40 intentos.
En el desarrollo se calcula la probabilidad experimental de encestar mediante la razón: $\frac{tiros\ encestados}{tiros\ totales} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$. La que se pondera por los tiros futuros a realizar, es decir: $\frac{2}{5} \cdot 40 = 16$.
Así una respuesta a este problema plantearía que se estima que Juan encestaría 16 veces en los próximos 40 tiros.

El segundo problema plantea el mismo cuestionamiento y procedimiento, solo se trata de cambiar los valores.

Desde las páginas 272 a 274 se proponen veintiocho ejercicios, con enunciado, distribuidos en tres grupos denominados: práctica con supervisión, práctica independiente con resolución de problemas y comprensión de los aprendizajes

En práctica con supervisión, se encuentran 7 problemas en los que se solicita estimar las veces en que un determinado suceso aleatorio ocurrirá. Aquí la actividad del alumno consiste en determinar la probabilidad de ocurrencia experimental de un suceso y ponderarla, por un valor explicitado en el enunciado, para obtener lo solicitado. Es decir son problemas que se relacionan con la noción de esperaza matemática, por ejemplo:

Figura 17.. Ejercicios Propuestos.

Una caja contiene botones de colores del mismo tamaño. Maite saca un botón al azar y lo vuelve a colocar dentro de la caja. Repite esto 40 veces. Del 2 al 3, usa la tabla de resultados.

Color	Rojo	Amarillo	Anaranjado	Blanco
Veces que salió	6	4	14	16

2. Estima cuántas veces Maite puede sacar un botón amarillo en los próximos 50 intentos.

3. Estima cuántas veces Maite puede sacar un botón blanco en los próximos 30 intentos.

USA LOS DATOS Del 13 al 15. Amanda tiene una baraja estándar de cartas. Sacó una carta, anotó el palo y la devolvió a la baraja. Repitió este proceso varias veces y anotó sus resultados en la tabla.

Corazón	IIIII II
Diamante	IIIII
Pica	IIIII
Trébol	IIIII III

13. Estima la probabilidad de que una carta elegida de la baraja sea de pica.

14. Estima la probabilidad de que una carta elegida de la baraja sea de diamante.

Fuente: Texto del estudiante de 7° básico.

Estos problemas son relevantes para el desarrollo del pensamiento probabilistico, pues plantean problemáticas análogas a las encontradas en el desarrollo histórico epistemologico de esta noción.

Los programas de estudio deberían sugerir, a los profesores, estos contextos de aplicación, no triviales, para preparar la enseñanza.

En práctica independiente con resolución de problemas, se proponen 16 problemas, numerados del 8 al 23 cuyo procedimiento de resolución es determinar la esperanza matemática de un suceso, cuando el espacio muestral del experimento varía. Por ejemplo el problema 21, requiere determinar la cantidad de tiros libres, que encestaría un jugado, cuya probabilidad de tiros libre, P(tiros libres) es $\frac{57}{76}$, en el caso que el partido tenga 12 tiros libres. Lo que resulta es: $12 \cdot \frac{57}{76}$ = 9. Es decir si en el juego se presentan 12 tiros libres, se estima que este jugador encestara 9 de ellos.

En este desarrollo hay muchas relaciones de significado que la sola formulación del problema es incapaz de transmitir a un niño de 11 años.

En el resto de los problemas se solicita reproducir el mismo procedimiento.
Se aprecia nuevamente un desconocimiento de la capacidad analítica de los niños a esta edad, por parte de los autores del texto.

El tercer grupo de ejercicios, consta de 5 enunciados, solo uno de ellos de probabilidad experimental. Este ejercicio tiene el mismo formato de resolución que los anteriores.

El taller escribir para demostrar o contradecir, propone enseñar a determinar la validez de un enunciado, utilizando datos. Para ello considera una tabla que contiene el resultado de extraer bolitas de una bolsa, (p. 275).

Rojo	Azul	Verde	Amarillo
16	12	10	12

Con los datos de esta tabla, se determina la probabilidad de cada suceso, se expresa en porcentaje, se ordenan lo valores encontrados y se procede a responder, considerando el contexto del problema planteado.

Al final de la página se plantea otro problema en el que claramente el propósito es hacer al alumno reproducir este procedimiento.

En práctica adicional se refuerza la noción de probabilidad experimental planteando ejercicios y problemas que reproducen los protocolos de resolución mostrados.

El análisis realizado pone en evidencia el carácter reproductivo de los problemas propuestos, los medios didácticos, los enunciados y las tablas de datos, son de naturaleza no antagónica muestran ostensivamente la actividad que el alumno debería reproducir para resolver los ejercicios propuestos.

Estos medios, no desafían a los alumnos a resolver problemas escolares reales sobre probabilidad.

La enseñanza proyectada en este texto excede la propuesta curricular, la que sugiere actividades para desarrollar nociones intuitivas de probabilidad experimental, sin llegar a definirla, mientras que el texto de estudio define explícitamente la probabilidad experimental a objeto de exhibir el protocolo de resolución de los problemas planteados. Por otro parte, el programa propone conjeturar tendencias de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento aleatorio mientras que el texto da énfasis al cálculo de la probabilidad experimental y a sus aplicaciones en el contexto de la ponderación y la determinación de la validez de afirmaciones planteadas.
Hay una distancia entre hacer predicciones basadas en los datos y hacer funcionar reglas mnemotécnicas para calcular probabilidad. En el caso de este texto, el mayor énfasis esta puesto en determinar la razón entre resultados posibles de un suceso y los resultados totales del experimento, es decir se hace funcionar reglas mnemotécnicas que permiten caratreizar a la probabilidad con un número y con una formula de claculo.

2.4.3 La enseñanza de la probabilidad en el texto de estudio de 7º básico.

En 7° básico el texto, 2014 – 2015, se centra en el estudio de la probabilidad experimental, la que cobra sentido a partir de la frecuencia relativa de resultados de experimentos aleatorios."

El capítulo se estructura en dos lecciones: frecuencia relativa y la probabilidad experimental. El objetivo de la primera lección es aprender a predecir la ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio simple y calcular su frecuencia relativa.

En la página 258, se definen las nociones:

Experimento: Es cualquier actividad relacionada con la probabilidad.

Prueba: Es la repetición u observación de un experimento y lo que se obtiene del experimento se llama resultado.

Frecuencia absoluta: es el número de veces que se repite un resultado.

A continuación se desarrollan tres ejemplos. En el primero se muestra una tabla de 20 resultados del lanzamiento un dado y se representa, como fracción ostensivamente, la razón entre el número de veces que ocurrió un suceso, consignado en la tabla y el número total de lanzamientos. A esta razón el texto la denomina frecuencia relativa y a su valor decimal lo denomina frecuencia porcentual.

El propósito del segundo problema es ejemplificar la propiedad aditiva de la frecuencia relativa y porcentual, es decir "la suma de las frecuencias relativas de los sucesos del experimento es uno (1)" y que "la suma de las frecuencias porcentuales de los sucesos del experimento es 100%". Para el desarrollo ostensivo de este problema, se utiliza la siguiente figura.

Figura 18. Problema Resuelto: Frecuencia Relativa y Porcentual

Moneda	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
Cara	6	6/10	60%
Sello	4	4/10	40%

Fuente: Matemática 7º texto del estudiante, pág. 259

El tercer problema propone al alumno completar una tabla, para calcular la frecuencia relativa y porcentual, en el contexto de las preferencias de los niños de un curso por las asignaturas de la escuela. Observe que la tabla presenta una grave equivocación, que claramente confundirá al niño y también al profesor, si este no está preparado para aprovechar a favor de la enseñanza este descuido.

Figura 19. Problema Resuelto, Tipos de Frecuencia.

Asignatura	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
Lenguaje y Comunicación	6	6/10	
Matemática	4		
Artes Visuales	8		
Educación Física	3		
Historia y Geografía			16%

Fuente: Matemática 7º texto del estudiante, pág. 259

El error consiste en que la frecuencia porcentual de la asignatura lenguaje y comunicación ya corresponde al 60% por lo tanto la frecuencia de las tres últimas asignaturas no tienen sentido ni frecuencial ni probabilístico.
En la última tarea de este problema el alumno tiene que explicar y argumentar la siguiente situación:

La profesora de este curso considera que al sacar al azar un niño, es más probable que prefiera Artes Visuales y que es menos probable, que sea un estudiante que prefiere Historia y Geografía. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación?

Este medio que es antagónico, permitiría el análisis y argumentación, basado en los datos de la tabla, pero esta actividad pierde todo sentido ante el error cometido en la tabla.

En las páginas 260 y 261, el texto presenta tres grupos de ejercicios, práctica con supervisión, práctica independiente y práctica y resolución de problemas.

Práctica con supervisión contiene tres problemas, en los que la tarea es reproducir los procedimientos mostrados en los ejemplos desarrollados.

Por ejemplo en el siguiente problema, el texto remite al alumno a mirar la resolución del problema 3 para reproducir su solución.

Figura 20. Ejercicio Propuesto.

Ver ejemplo 3

3. Completa la tabla que muestra los deportes favoritos de 60 estudiantes de una escuela.

Deporte	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
Fútbol	25		
Vóleibol		12/60	
Tenis	3		
Básquetbol			25%
Natación	5		

a. Si sacas un estudiante al azar, ¿es más probable que saques un alumno que prefiere fútbol o básquetbol? Y que es menos probable que saques, ¿un estudiante que prefiere tenis o natación? Explica y argumenta tu respuesta.

Fuente: texto del estudiante 7° básico.

La sección práctica independiente propone 3 ejercicios, el mismo texto remite a los alumnos a revisar la resolución ostensiva de los problemas resueltos produciendo claramente un efecto Topaze en el nivel del estudio personal del alumno. Un ejemplo es el siguiente:

Ver ejemplo 1

4. Juan y Pedro están jugando dominó y los colocan todos boca abajo, sin ver la cantidad de pintas que tiene cada carta.

Escribe la **razón** que corresponde a la cantidad de chanchos (que tienen la misma cantidad de puntos en ambos lados de la carta del dominó) y el total de cartas del dominó.

.

Las tareas propuestas en esta sección corresponden a:

- Calcular la frecuencia relativa de un suceso considerando los datos del problema y la realización de experimentos aleatorios.
- Calcular la razón entre el número de veces que ocurrió el suceso y la cantidad de veces que se realizó el experimento.
- Determinar sucesos más probables que otros cuantificando los datos proporcionados en el problema, y
- Determinar la suma de la frecuencia relativa y de la frecuencia relativa porcentual de los sucesos de un experimento particular, sin generalizar estas propiedades.

Estos tipos de ejercicios presentan problemáticas aisladas y desarticuladas entre sí. Por ejemplo la cuarta viñeta se refiere a una importante propiedad de la frecuencia relativa, la que es trabajada en el nivel de una tarea aritmética, la suma, sin analizar su significado en el contexto de los datos y la probabilidad.

Se aprecia que los problemas propuestos, que representan el medio (didáctico) por el cual los alumnos se relacionan con la probabilidad en el estudio personal, no desafían a los estudiantes a poner en juego el significado de la frecuencia relativa ni la influencia que esta tiene en la predicción de resultados futuros, solo se pide calcularla. Los problemas planteados son repetitivos y se observa que la tarea del alumno es reproducir un procedimiento ostensivo que ha sido desarrollado en las diferentes partes de la lección.

La sección práctica y resolución de problemas plantea 3 problemas, el primero propone registrar los resultados al lanzar un dado 50 veces, calcular las frecuencias relativas y porcentuales y realizar una conjetura sobre el resultado del próximo lanzamiento; el segundo propone calcular una probabilidad y el tercero determinar una frecuencia relativa. Estos problemas fueron planteados también en el texto de 6° básico.

La lección dos se titula “Probabilidad Experimental” y su objetivo es “aprender a calcular la probabilidad experimental de un suceso.

En la página 262, se definen los conceptos de: experimento aleatorio, resultado posible, suceso, prueba y probabilidad experimental. Las definiciones son las siguientes:

Un experimento aleatorio es una actividad en la cual no se puede predecir un resultado del experimento y existe la probabilidad de que se produzcan diferentes resultados.

Los diferentes resultados que puede haber se llaman resultados posibles del experimento.

Un suceso es un resultado posible o un grupo de resultados posibles”.
Cada repetición del experimento se llama prueba.

Si un experrimento se repite muchas veces, la probabilidad experimental de un suceso es la razón de la cantidad de veces que ocurre el suceso a la cantidad total de pruebas.

Figura 21. Formula de la probabilidad Experimental.

$$Probabilidad\ Experimental\ \approx \frac{Cantidad\ de\ veces\ que\ ocurre\ el\ suceso}{Cantidad\ total\ de\ Pruebas}$$

Fuente: texto del estudiante 7° básico, (2015, p. 262)

En esta fórmula, que también se introduce en el texto de sexto básico, aparece el símbolo $\approx$, el que no esta considerado en la formulación verbal de la definición anterior.
Al margen de esta página el texto relaciona la probabilidad experimental con la frecuencia relativa de un suceso, al afirmar: “ya que la probabilidad relaciona la frecuencia de un suceso con la cantidad total de resultados posibles”.

Enseguida plantea el desarrollo de 2 problemas, el primero se titula hallar la probabilidad experimental pero el alumno no realiza el experimento sino que este es evocado a partir de una tabla de datos.

Hora	7:00 – 7:04	7:05 – 7:09	7:10 – 7:14
Frecuencia	8	9	3

El problema plantea determinar la probabilidad experimental y para ello utiliza la fórmula: $\frac{Cantidad\ de\ veces\ que\ ocurre\ el\ suceso}{Cantidad\ total\ de\ pruebas}$

El segundo problema plantea comparar probabilidades experimentales de dos sucesos de un experimento aleatorio. Para ello se apoya en una tabla de datos y utiliza la formula para calcular las probabilidades y compararlas.

En relación a los ejercicios de práctica hay cuatro secciones, practica supervisada, practica independiente, practica con resolución de problemas y repaso. Estas solicitan la reproducción de los procedimientos desarrollados, remitiendo a los alumnos a mirar el desarrollo de los problemas resueltos.
Esto se constata en el siguiente ejemplo (pg. 264), que corresponde al segundo grupo.

Figura 22. Ejercicio Propuesto.

Ver ejemplo 2 **Javier tiene una bolsa con bolitas. Sacó una bolita, anotó el color y la devolvió a la bolsa. Repitió el proceso varias veces y anotó sus resultados en la tabla. Usa la tabla para resolver los ejercicios del 6 al 8.**

6. Halla la probabilidad experimental de sacar de la bolsa una bolita roja.

7. Halla la probabilidad experimental de sacar de la bolsa una bolita que no sea negra.

Ver ejemplo 3 **8.** De acuerdo con el experimento de Javier, ¿qué color de bolita es más probable que ella saque de la bolsa?

Color	Frecuencia
Blanca	𝍸
Roja	///
Amarilla	𝍸
Negra	𝍸 𝍸 //

Fuente: Texto del estudiante 7° básico. p.264

Estos ejercicios hacen funcionar de manera directa la fórmula y además recuperar y aplicar nociones estudiadas en niveles y secciones anteriores, como por ejemplo asignar posibilidad cualitativa a ciertos sucesos.
En esta sección se presentan cinco problemas entre los que figura uno de meteorología.

En la organización didáctica del texto, aparece un letrero, denominado “Leer matemáticas”. Este establece la conexión entre la frecuencia relativa de un suceso, la razón entre sucesos favorables y posibles y la definición de probabilidad experimental, mediante la siguiente consigna:

> La probabilidad experimental es una manera de expresar la frecuencia relativa, porque relaciona la frecuencia de un suceso con la cantidad total de resultados posibles", página 263..

Por otra parte se advierte una duplicación de actividades con los de niveles anteriores. En efecto en sexto básico el texto proyecta la enseñanza de la probabilidad experimental con ejercicios, problemas y definiciones similares a las propuestas en el texto de séptimo básico. Esto tiene que ver con las adecuaciones curriculares vigentes a la fecha.

Otro aspecto a señalar es que no existe una definición formal de la probabilidad, incluso se puede apreciar que la probabilidad se utiliza en un principio como una palabra del lenguaje natural.

En este nivel la probabilidad sigue manteniendo un estatus de herramienta para la resolución de los problemas planteados, poniendo en funcionamiento una fórmula, para calcular un número, que representaran la probabilidad.

2.4.4. La enseñanza de la probabilidad en el texto del estudiante de 8° básico.

Este texto propone desarrollar 3 lecciones que plantean actividades sobre métodos de conteo, en primera lección, la probabilidad experimental en la segunda lección y la probabilidad teórica expresada por la Ley de Laplace, en la tercera lección.

En la primera lección, se define espacio muestral de un experimento como “el conjunto de todos los resultados posibles”, texto del estudiante (2015, p.172) y para ello se puede usar llaves de conjunto $\{\ \}$.

El propósito de los métodos de conteo es usarlos como una herramienta para determinar los resultados posibles de un experimento aleatorio, estos métodos corresponden al diagrama de árbol, la lista ordenada de datos y el principio multiplicativo. Para cada método el texto presenta el desarrollo de un ejemplo, el que servirá de modelo para el trabajo individual del alumno.

En el primer ejemplo, los datos se representan en un diagrama de árbol icónico. Cada nivel de este árbol grafica 2 clases de conjuntos, por lo tanto hay dos niveles y en cada nivel se dibujan sus elementos. Finalmente el alumno puede observar y contar las diferentes combinaciones, las que aparecen explícitamente dibujadas en el desarrollo y que constituyen los resultados posibles.

En el segundo ejemplo, el enunciado plantea información escrita, la tarea del alumno consiste en organizar esta información elaborando un listado, presentado como desarrollo del problema en el texto, (ibídem, p. 173).

El tercer ejemplo se relaciona con el principio multiplicativo. Al respecto en el texto se lee: “Para usar el Principio multiplicativo, multiplica la cantidad de opciones de cada clase”, p. 273.

El enunciado del ejemplo, proporciona los elementos de cada clase, 4 en una y 6 en la otra y en el desarrollo concluye lo siguiente:

$4 \cdot 6 = 24.$ Hay 24 combinaciones posibles

Texto del estudiante, 8ª básico, p. 173

En las páginas 174 y 175 el texto propone 4 grupos de problemas ejercicios, los que suman 19.

En los dos primeros grupos (6 ejercicios propuestos), se identifican dos ejercicios sobre diagrama de árbol, otros dos sobre lista organizada de datos y dos ejercicios que utilizan principio multiplicativo para resolver, además se evidencia una intención de reproducción de los procedimientos realizados en el texto, pues en cada uno de ellos se indica a los alumnos ver la solución de los ejemplos resueltos.

El tercer grupo, denominado práctica y resolución de problemas, propone tres problemas, los que son otra versión de lo que se ha resuelto mediante diagrama de árbol, un problema de conteo de resolución heurística y otro dos relacionados con el principio multiplicativo.

El cuarto grupo plantea 7 actividades, dos de ellas son problemas relacionados con métodos de conteo. El primero, relaciona el espacio muestral con las combinaciones posibles y el segundo una resolución por principio multiplicativo.

De los 19 ejercicios propuestos, trece pueden ser resueltos por diagrama de árbol o principio multiplicativo, 3 ejercicios pueden ser resueltos por lista organizada de datos, un ejercicio de resolución heurística y dos ejercicios que corresponden a otras áreas del currículo, vinculadas como herramientas al cálculo de la probabilidad.

El texto destaca que “La probabilidad experimental de un suceso se encuentra al comparar la cantidad de veces que ocurre el suceso con la cantidad total de pruebas. … Cuantas más pruebas tengas, más probable es que la estimación sea exacta”, p. 175.

A continuación desarrolla dos ejemplos que describen la forma de calcular la probabilidad experimental de un suceso: “comparar la cantidad de veces que ocurre el suceso con la cantidad total de pruebas”. El texto no especifica el criterio de comparación, ¿Por diferencia, por cociente, otro criterio?

El texto presenta la resolución de un problema que contextualiza la probabilidad experimental, utilizando la fórmula, que aparece en la figura 19.

Figura 23. Formula de la probabolidad Experimental.

$$\text{probabilidad} \approx \frac{\text{cantidad de veces que ocurre un suceso}}{\text{cantidad total de pruebas}}$$

Fuente: Texto del estudiante, p. 175

La fórmula se va transformando, de acuerdo a los datos presente en el problema. En el desarrollo del problema, la cantidad de veces que ocurre un suceso, ahora corresponde a cantidad de tiros parados y la cantidad total de pruebas, ahora corresponde a la cantidad total de tiro. Se produce entonces un problema de comunicación entre lenguajes, que el alumno por si solo debería decodificar. El lenguaje de la fórmula estándar y el de la fórmula que resuelve el problema particular. Esta actividad, de decodificación, los autores del texto no la consideran en toda su dimensión.

Estas imprecisiones, podrían confundir a los alumnos que, con 13 años, aún tienen un pensamiento concreto.

Por otra parte, en este texto, se pasa por alto el significado del símbolo ≈, el que proviene del hecho que la probabilidad experimental es una estimación de probabilidad, deducción que los alumnos de 13 o 14 años tal vez no podrían realizar ya que realmente, hasta aquí, no están experimentando.
Esta falta de precisión, podría explicar las confusiones sobre la probabilidad experimental y la teórica detectadas por las investigaciones señaladas en los antecedentes de esta tesis.

También se perciben elementos ostensivos en la presentación de esta fórmula, la cantidad de veces que ocurre el suceso en rojo y la cantidad total de pruebas en azul. Estos ostensivos son utilizados en el desarrollo de los dos ejercicios en las páginas 176 y 177. En efecto, los datos de la formulación del primer problema, 15 y 25, son destacados con estos colores. Además, en la formulación del problema estos datos aparecen en este orden, primero el de color rojo y segundo el de color azul, la ostensión es evidente.

El segundo ejemplo presenta una tabla de resultados posibles de un experimento aleatorio y se pide, en base a estos datos determinar la probabilidad experimental de un suceso y la probabilidad del suceso complemento.

Para determinar la probabilidad experimental se utiliza directamente la fórmula, se colocan los datos ostensivos, en la fórmula ostensiva y se determina la fracción $\frac{2}{3}$, escrita en negro. Luego se responde que la probabilidad experimental del suceso es $\frac{2}{3}$ sin agregar algún significado a este número.

Con este procedimiento los alumnos aprenden códigos para calcular probabilidad, con rojo son los sucesos favorables, que siempre son menores que los sucesos totales que aparecen en azul en el texto. El resultado de la probabilidad aparece de color negro. Un claro ejemplo de efecto Topaze.

En la parte b) de este ejemplo se solicita determinar la probabilidad que los datos muestren valores menores a 75 minutos. Por una parte el desarrollo que presenta el texto corresponde a la probabilidad que los datos muestren valores de a lo más 75 minutos, lo que correspondería a la probabilidad del complemento del suceso determinado en a), al que se llamará ‘A’. Por otra parte, para determinar la probabilidad del complemento de A, se propone resolver la ecuación:

$$P(A) + P(A^c) = 1,$$

donde $P(A)$ es conocida $(= \frac{2}{3})$ y $P(A^c)$ es la incógnita.

Así la probabilidad del complemento de un suceso se introduce en el contexto de la resolución de un problema de probabilidad experimental.

La ecuación anterior no se fundamenta, solo aparece como una expresión que se impone, para resolver este problema.

Con relación a este desarrollo, podrían surgir preguntas, las que podría abrir discusiones interesantes en clases, para un profesor que concibiera distintas instancias de aprendizaje para sus alumnos. Un profesor que no se conforma con el deslizamiento ostensivo de una expresión, que no coloca al alumno en posición de cuestionar su significado.

Sobre las actividades de ejercitación En las páginas 178 y 179, se proponen 4 grupos de problemas, práctica con supervisión, práctica independiente, práctica con resolución de problemas y repaso.

En práctica con supervisión y práctica independiente, los ejercicios plantean calcular la probabilidad experimental de sucesos simples y luego la probabilidad del complemento de un suceso. Al costado de cada enunciado, el texto señala "ver ejemplo1 y ver ejemplo 2", respectivamente. Es decir el texto favorece e induce una práctica reproductiva.

Por ejemplo: "En su práctica de tiro con arco, Pía acierta 14 de 20 tiros. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que acierte en su próximo tiro? Escribe tu respuesta como fracción, como decimal y como porcentaje", texto estudiante 8| básico, p. 178. **"ver ejemplo1"**

De acuerdo al ejemplo resuelto, los alumnos podrían plantear un cálculo que decodifica la solución propuesta por el texto en la página 173. Así son **14** tiros de **20,** entonces la probabilidad es $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$. Por otra parte los datos 14 y 20 aparecen en un orden que se puede deducir el lugar que ocupan en la fórmula. Finalmente los enunciados propuestos refieren contextos relacionados que no son propios de las actividades realizadas por el chileno común, por ejemplo jugar beisbol, votar a favor o contra de una enmienda y otros.

En práctica y resolución de problemas se plantean 7 problemas, numerados del 6 al 12. En los problemas 6 y 8, los enunciados presentan datos, ordenados de manera que los alumnos reproduzcan el cálculo de la probabilidad experimental mediante la fórmula utilizada en los ejemplos resueltos. El problema 7 plantea datos (25, 16 y 9) que no aparecen en el orden establecido en la formula, por lo que el alumno debe seleccionar lo que colocará en el numerador y denominador de la fracción probabilidad.

Los ejercicios 10 y 11 se basan en datos y representaciones estadísticas para que los alumnos determinen la probabilidad de un suceso, seleccionando información que deberían saber ubicar en la fórmula de la probabilidad. Particularmente el problema 10 presenta un diagrama de tallo y hoja, que el alumno debe interpretar de acuerdo a un código explicitado al final del diagrama y que casi cuelga de él. La interpretación en este tipo de representación estadística no es fácil y requiere de la supervisión de un profesor que también sepa interpretar y enseñar de manera constructivista este tipo de organización de datos.

En el grupo de problemas de repaso, se proponen 4 ejercicios, dos de ellos relacionados con la probabilidad experimental de un suceso y la del complemento de un suceso. Ambos ejercicios contienen datos que claramente corresponden a la cantidad de veces que ocurre el suceso (un resultado) y la cantidad total de pruebas.

En la página 180, el texto desarrolla la probabilidad teórica de un suceso y junto con ello, se amplía el vocabulario de los alumnos con expresiones propias de esta noción, igualmente probable y justo. Es decir la enseñanza propuesta debería girar en torno a estos conceptos.
El texto introduce descripciones, las que se reproducen a continuación; “Cualquier actividad relacionada con la probabilidad, como lanzar un dado es un experimento. Cada repetición u observación de un experimento se llama prueba y lo que se obtiene del experimento se llama resultado. Un conjunto de uno o más resultados es un suceso” p. 180.

En esta descripción, el texto introduce palabras que podrían confundir al alumno al no aparecer en los enunciados de los problemas. Por ejemplo, la palabra prueba es utilizada para referirse a la repetición del experimento, lo que perfectamente podría ser llamado tal cual “repetición del experimento” y se observa que en los problemas propuestos se habla de “acierta 14 de 20 tiros…” es decir aquí las pruebas son tiros. Se considera innecesaria agregar esta palabra cuando posteriormente el texto no la utiliza para referirse a la probabilidad en lo que resta del capítulo.

Por otra parte, tanto el espacio muestral como los sucesos son concebidos como conjuntos, “el conjunto de todos los resultados que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio”, Texto del estudiante, 8° básico (2014, p. 180) pero ninguno de los problemas se plantea en términos de estos conjuntos, para que los alumnos puedan reconocerlos en los enunciados de los problemas que resuelven y relacionarlos con las definiciones o descripciones proporcionadas.

Estas ideas conjuntistas, que subyacen al cálculo y al significado de la probabilidad, no se operacionalizan en los problemas planteados, puesto que la mayoría de ellos se basan en enunciados, verbales que contienen datos numéricos que sustituyen a la noción conjuntista de suceso y espacio muestral.

Cardinalidad es otra palabra que utiliza el texto, que no es del lenguaje natural de los alumnos, por lo tanto, es un término extraño que representa la cantidad de elementos que componen al conjunto, lo que si puede ser entendido por los alumnos.

Sobre la probabilidad teórica, el libro afirma que “se usa para encontrar la probabilidad de un suceso cuando todos los resultados son igualmente probables. En estos casos se puede usar el modelo de Laplace, el que se introduce mediante la ejemplificación de sucesos obtenidos en la combinación de las 5 letras de la palabra BINGO y los 75 números asociadas a ellas.

El texto plantea el siguiente modelo para la Ley de Lapace:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Si todos los resultados posibles de un experimento son igualmente probables, se dice que el experimento es justo.Texto del estudiante, p. 180

Claramente se aprecian elementos ostensivos en la formula, que jugaran un rol en las elecciones de los alumnos en la resolución de problemas, respondiendo a lo que el texto solicita y limitando la actividad del alumno de producir su propia respuesta.

Este fenómeno ya ha sido descrito por distintas investigaciones en didáctica de la matemática. Ratsimba-Rajohn (1977) fue el primero en identificar con el nombre de introducción ostensiva a todo un conjunto de procedimientos didácticos que se utilizan para introducir nociones donde las decisiones que toma el docente,

- Suponen que el objeto es “conocido” por los alumnos, y entonces presenta un dibujo con la descripción de algunos elementos y su vocabulario específico,

- Pasan por presentar varios ejemplos, seguidos de una designación, y si es posible una fórmula o simbolización que dé generalidad al enunciado, citado en Fregona (2005, p. 335).

También corresponde a una perspectiva ingenua de la enseñanza y el aprendizaje”, ya que muestran el carácter ilusorio de ciertos presupuestos que subyacen a la presentación ostensiva de las nociones, puesto que se presenta al alumno un medio que “concretiza” un conocimiento a enseñar, pero la relación del alumno con ese medio puede ser completamente diferente de la relación que el profesor planifico que se estableciera.

Mediante esta perspectiva, se puede advertir que el conocimiento está en la situación y por lo tanto se puede suponer que el conocimiento a enseñar está al alcance del alumno, pero en la práctica de la enseñanza y de la transferencia a la vida cotidiana se observa que el alumno no ha adquirido un modo de control de este conocimiento, necesario para tomar una decisión.

También Brousseau afirma que la ostensión es el procedimiento privilegiado para la introducción precoz de las nociones matemáticas" Brousseau (1994, p.112). Por ejemplo en la escuela primaria, las figuras geométricas como el triángulo, circulo, el cuadrado, etc., suelen ser ostensiva. El profesor presenta con un solo golpe de imagen todos los elementos constitutivos de estos objetos geométricos. De esta manera los niños rápidamente reconocen, pero cuando necesiten utilizar triángulos cualesquiera, la ostensión fracasará, éxito ilusorio ya que este modo de presentación inhibe la generalización y la abstracción, citado en Chamorro (2011, p. 38). Las características intrínsecas de algunos sistemas convencionales de representación favorecen la profundización de la ilusión de transparencia. Duval (2002), se refiere a las representaciones geométricas, "las figuras geométricas presentan necesariamente características topológicas, afines y métricas, lo que conduce a considerarlas como siendo de la misma naturaleza que lo que ellas representan, profundizando la confusión del objeto con su representación y contradiciendo las condiciones establecidas por Duval para que una representación funcione como tal, cit. en Panizza (2009, p.49).

Según Duval (2004) no todos los objetos matemáticos son accesibles mediante visualización. A partir de estos planteamientos, el autor se pregunta ¿cómo aprender a cambiar de registro? y ¿cómo aprender a no confundir un objeto con la representación que se hace de él? Debido a que la actividad matemática relaciona generalmente tratamientos y conversiones, la diferenciación de registros de representación, lo mismo que la coordinación y conversión entre ellos, constituyen los puntos claves para el aprendizaje, cit. en Prada-Nuñez, R., Hernández-Suarez, C. y James, L. (2017, p. 37).
De regreso al análisis del texto de estudio, este enseña a utilizar la regla de Laplace, a partir de ejemplos, en los que la probabilidad ha de expresarse como fracción, como decimal y como porcentaje.

En el enunciado del ejemplo 1a) “Sacar una de las 15 B de una bolsa de 75 bolas de bingo”, los números 15 y 75 aparecen en el mismo orden en que son utilizados en la fórmula y con colores rojo para los casos favorables y azul para los casos posibles, los mismos que en la fórmula representan los sucesos favorables y posibles, para el cálculo de la probabilidad. Por lo tanto, hay una notable ostensión.

El ejemplo 1b) desarrolla “la probabilidad que salga un número mayor que dos en el lanzamiento de un dado”. En el procedimiento de solución se determinan los sucesos favorables (3, 4, 5, 6), la cardinalidad de este conjunto de números (4), escrita en color rojo, el que se traspasa a la formula junto con el 6 en color

azul, que representa los casos posibles en las caras del dado. Esta fracción determina la probabilidad solicitada.
En este desarrollo no se aprovecha la oportunidad de conjeturar la importante propiedad de la probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes, en efecto al calcular la probabilidad de cada suceso individual, P(3), P(4) , .., P(6) y luego sumar estos valores, conduciría a observar una igualdad en los resultados de estos dos desarrollos.

Esto ocurre por el carácter conductistas del enfoque que han adoptado los autores de este texto, el que llega a miles de hogares en nuestro país.

El ejercicio 2 propone el cálculo de la probabilidad teórica de un suceso y la de su complemento, para lo cual, en la parte b) se resuelve la ecuación:

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

donde $A\ y\ A^c$, son sucesos complementarios, mutuamente excluyentes.

El ejercicio termina con $P(A^c) = 1 - P(A)$

Nuevamente se introduce esta propiedad en la resolución de un problema que pudiera haber sido resulto mediante la ley de Laplace, con lo que se observa por una parte la voluntad de visibilizar esta propiedad al alumno y por otra parte la necesidad de imponer el uso de esta ecuación para, en la parte izquierda de la página 181 colocar el letrero: “La suma de la probabilidad de un suceso y su complemento es 1”, sin ninguna fundamentación, ni intuitiva o de sentido común ni teórica.

En el desarrollo de estos ejemplos, se pone en evidencia un entrenamiento cuya lectura podría inducir a error si el alumno confunde los colores, en su trabajo personal. Además, el desarrollo no asigna significado a este número, ni a las propiedades que se han utilizado para calcular su valor. Sólo se trata la dimensión calculatoria de la probabilidad.

En las páginas 182 y 183, el texto propone cuatro grupos de ejercicios, práctica con supervisión, práctica independiente, práctica y resolución de problemas y repaso.

Práctica con supervisión y práctica independiente, propone 10 ejercicios vinculados explícitamente a los ejercicios resueltos por la frase “ver ejemplo 1 y ver ejemplo2”, ya descritos. Por ejemplo:

Ver Ejemplo 2 **Una baraja incluye 15 cartas amarillas, 10 verdes y 10 azules. Encuentra la probabilidad de cada suceso si se saca una carta al azar:**

3. Amarilla **4.** Verde

Texto del estudiante 8° básico, p. 182

Seis de estos problemas corresponden a sucesos simples como los de la figura anterior, tres problemas corresponden a sucesos mutuamente excluyentes y uno a sucesos independiente. Por ejemplo:

> “Sacar al azar un corazón o un trébol de una baraja de 52 cartas que contiene cuatro grupos de 13 cartas: diamantes, corazones, tréboles y picas, todas mezcladas”.

Claro está que también se puede resolver mediante la regla de Laplace, pero se pierden esfuerzos para lograr además otras aplicaciones, transferencias a las situaciones del mundo real y abstracciones que permitan conjeturar para generalizar.

En práctica y resolución de problemas, se proponen 18 problemas, 6 de ellos se refieren a determinar la probabilidad de sucesos compuestos, los que están incompletamente formulados, pues no se especifica el suceso al que hay que calcular su probabilidad, lo que se ilustra en la figura:

Encuentra la probabilidad de cada suceso si se lanzan dos dados.

11. P(total de 3) **12.** P(total de 7) **13.** P(total de 4)

14. P(total de 2) **15.** P(total de 9) **16.** P(total de 13)

p. 182

Otros seis ejercicios plantean sucesos no especificados:

La rueda de una flecha giratoria está dividida en 10 sectores iguales. Los números del 1 al 5 están ubicados cada uno en dos sectores diferentes. Encuentra la probabilidad de cada suceso:

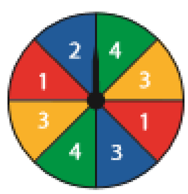
17. P(menor que 3) **18.** P(5) **19.** P(8)

20. P(menor que 6) **21.** P(mayor que o igual a 4) **22.** P(13)

p. 182

Estas deficiencias confunden y desmotivan las iniciativas de alumnos y al profesor, el que también estudia de este texto.

De los 6 problemas restantes, 3 de ellos (24, 25 y 28) podrían ser resueltos aplicando de manera directa la regla de Laplace, el problema 23 propone al alumno explicar la respuesta a:

Dada la flecha giratoria de la figura 

"¿el experimento es justo o injusto, para los siguientes resultados? a) Que caiga en 2 b) Que caiga en azul.

El ejercicio 26 no es de probabilidad, el ejercicio 27 pide explicar que representa el 3 y el 8 en la probabilidad $\frac{3}{8}$.

El cuarto grupo de ejercicios es un repaso que consta de tres ejercicios, el primero es de probabilidad simple en el contexto de extraer bolitas de una bolsa, el segundo sobre probabilidad del complemento de un suceso y un tercer ejercicio de combinatoria.

En concreto el estudio realizado al texto de 8º básico, pone en evidencia que los tipos de problemas y ejercicios proponen un desarrollo ostensivo que implica la reproducción de estos procedimientos y privilegian la dimensión calculatoria de la probabilidad experimental y teórica.

Ninguna de las actividades propuestas coloca al alumno en posición de fundamentar los significados de los valores de la probabilidad, por ejemplo si conviene a no apostar, en términos de probabilidades, a extraer la bola la bola blanca, de una urna cuya composición es 2 bolas rojas, 3 blancas y 4 azules.
Para enseñar a calcular probabilidades, el texto plantea enunciados los que contienen datos numéricos explícitos, 14 y 20 por ejemplo, y en menor proporción los contenidos en tablas (no hay presencia de gráficos), los que son utilizados en la fórmula y que rápidamente podrían ser interpretados por los alumnos para responder lo esperado, por ello lo que caracteriza a este medio es su naturaleza no antagónica, no desafía al alumno a poner en juego sus propias iniciativas sino que delimitan una enseñanza que no da lugar a cuestionamientos por parte del alumno, pero si tal vez muchas dudas. Los medios propuestos no producen retroacciones al alumno, pues lo que el texto solicita es la reproducción de su procedimiento y por lo tanto el alumno no interactúa con el medio.

Las nociones de probabilidad, tales como espacio muestral sucesos favorables o posibles y sucesos totales se introducen, en las tres lecciones, mediante descripciones que se ejemplifican a partir de algunos juegos de azar, estas descripciones substituyen a las definiciones formales.
Entonces, al parecer, estos autores del texto suponen que los alumnos las reconocerán en los problemas planteados.

Por otra parte, la noción de probabilidad experimental en el texto de 8° básico, no se articula con la idea de frecuencia relativa, que se desarrolla en el 7° básico chileno ni tampoco con la idea de una estimación del valor teórico. De hecho, la palabra estimación aparece en el texto al describir: “La probabilidad experimental es una forma de estimar la probabilidad de un suceso”. Sin embargo, no se explica ni ejemplifica cual es el sentido de la palabra estimar.

La estimación se presenta en el texto en forma ostensiva mediante el símbolo ≈ utilizado en la formula, pero sin ninguna explicación al respecto.

También se describe la forma de calcular “la probabilidad experimental de un suceso se encuentra al comparar la cantidad de veces que ocurre el suceso con la cantidad total de pruebas”, pero no se especifica la manera de comparar los tipos de sucesos en cuestión.

Esta desarticulación también se pone en evidencia al calcular la probabilidad ya que el resultado obtenido no tiene un significado relacionado con el contexto del problema ni con los datos que este proporciona, por lo tanto, los alumnos no pueden disponer de estos conocimientos cuando ellos aparecen en sus experiencias reales.

En efecto, como los alumnos no realizan los experimentos, esos números difícilmente van a representar una probabilidad para ellos, además solamente ejercitar la fórmula propuesta no favorece la comprensión del significado de la probabilidad.

La enseñanza de la probabilidad teórica se ejemplifica a partir del juego del Bingo, se describe la noción de suceso y la de espacio muestral, como conjuntos. En particular, “el espacio muestral es el conjunto de todos los resultados que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio”, sin embargo en el lenguaje utilizado en los problemas y ejercicios de probabilidad teórica, los sucesos favorables y el espacio muestral no son expresados como conjuntos sino como números que los representan y sustituyen, entonces no queda claro para que se dan ciertas definiciones si luego no son utilizadas en la formulación de los problemas, tampoco en la presentación de la formula y no se les atribuye significado en el resultado de la probabilidad.

Finalmente, se percibe que en la resolución de ejercicios y problemas resueltos y propuestos lo que importa es identificar en forma aislada los sucesos favorables y los posibles para reemplazarlos en la fórmula.

2.4.5 La enseñanza de la probabilidad, texto de estudio de 7º básico 2016.

El texto 7° básico esta estructurado en 4 partes. La primera se denomina activación de ideas previas, desarrollada entre las páginas 334 a 337 y a continuación tres lecciones, tituladas: ¿Qué es un experimento aleatorio?, ¿Cómo estimar probabilidad mediante la frecuencia relativa?, ¿Cómo determinar la probabilidad teóricamente? Y ¿cómo calcular probabilidades usando diagrama de árbol?

En activación de ideas previas el texto presenta dos ejemplos de probabilidad de un suceso y formula preguntas para que los alumnos establezcan comparaciones entre estos.
También introduce un listado de conceptos a utilizar, tales como experimento aleatorio, experimento determinístico, espacio muestral, evento o suceso, frecuencia relativa y otros.
A partir de la imagen de una tómbola plantea 6 pasos que permitirían a los alumnos abordar el aprendizaje de las nociones propuestas, estos pasos son: describir una situación, establecer relaciones entre la imagen, la probabilidad y

los hechos cotidianos, ventajas de aplicar la probabilidad a los juegos de azar, cuáles son las estrategias de estudio y metas que el alumno se propone alcanzar en esta sección.

La activación de conocimientos plantea 9 ejercicios, 3 de ellos son acerca de la relación entre porcentajes, fracciones y números decimales, proponiendo ejercicios de transformación de fracción a decimal y viceversa, de porcentaje a fracción y a decimal, en forma numérica y en forma de cuadrícula achurada.
También propone dos problemas relacionados con el cálculo de la media aritmética y dos problemas sobre la interpretación de la frecuencia absoluta de las variables en tablas estadísticas.

El ejercicio 8 plantea utilizar las palabras seguro, posible o imposible para clasificar sucesos como: “Elegir una manzana verde de una frutera que contiene 5 manzanas rojas y 3 verdes”.
El ejercicio 9 propone definir los conceptos de experimento, evento y aleatorio.

La lección ¿Qué es un experimento? tiene por objeto describir espacio muestral, evento y casos favorables en experimentos aleatorios”, mediante dos situaciones. La primera es un juego en el que participan tres alumnos. El juego consiste en que cada alumno lanzará una vez un dado pero antes deberá decir que número cree que resultará. Repiten el juego tres veces y anotan los resultados en una tabla como la siguiente.

Lanzamiento	Número que salió	¿Quién ganó?
1° 2° . . 9°		

Desde la perspectiva teórica, el texto plantea una situación en la que el medio material que es un juego. El alumno en posición E_{-3} interactúa con el medio prediciendo el número sorteado antes de lanzar. La comparación entre lo predicho y lo que resulto sería una retroacción del medio que estimula al alumno a volver a jugar.

Luego el texto plantea 4 preguntas que podrían permitir que los alumnos reflexionaran, analizando el juego según los datos registrados en la tabla. Estas preguntas son:

1. ¿Qué números pueden elegir al lanzar un dado?
2. Al elegir el 6 o el 1 ¿es más difícil ganar que al elegir cualquier otro número? Justifiquen sus respuestas.
3. ¿Existe algún número con el que, al elegirlo, haya más posibilidades de ganar? Justifiquen sus respuestas.
4. ¿Se puede saber a priori quién ganará el juego de acuerdo a la elección de sus números? Justifiquen sus respuestas, texto del estudiante, p. 338.

Estas preguntas actúan como medio, el que desafía a los alumnos a confrontar sus creencias sobre el azar y la probabilidad.

La segunda situación plantea el lanzamiento de dos dados, el que corresponde a un medio material evocado, dos dados.

En la tarea 1 el alumno debe completar una tabla de doble entrada que contiene 19 de los 36 resultados, los que corresponde a las parejas de resultados posibles del lanzamiento de dos dados. Por ejemplo un elemento de la tabla puede ser el par $(5, 3)$, donde “5” corresponde al resultado del lanzamiento del primer dado y “3” al resultado del lanzamiento del segundo dado. A los 36 resultados que se obtienen, el texto lo denomina espacio muestral. En este caso $a, b \in \{1, 2, \dots, 6\}$ y el espacio muestral E corresponde al conjunto:

$E = \{1, 2, \dots, 6\} \, X \, \{1, 2, \dots, 6\}$, es decir

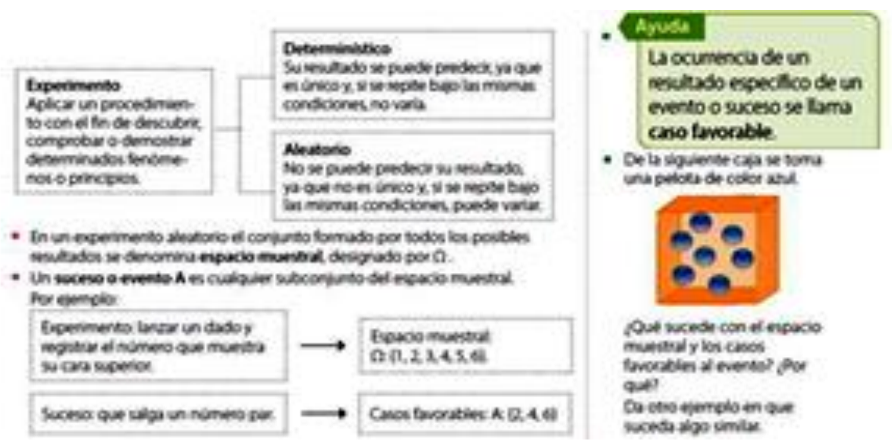
$$E = \{(a, b) \;/\; a, b \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$$

La tarea 2 corresponde a determinar resultados, en los que las caras de ambos dados, muestren el mismo número. Lo que constituye un subconjunto del espacio muestral denominado suceso o evento, el que se escribe como:

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots (6, 6)\}$$

El saber de referencia, son las nociones de experimento y sus tipos, espcio muestral, suceso, suceso favorable. En la figura 20, se consigna el saber escolar:

Figura 24. La matemática Escolar.



Fuente: texto del estudiante 7° básico, p. 339

Para esta lección el texto propone 10 problemas, 2 preguntas para la reflexión y un problema de refuerzo.

Los problemas propuestos son de tres tipos, repaso, práctica guiada y aplica.
En la sección repaso se proponen dos situaciones relacionadas con la concepción que los alumnos se han formado de experimento aleatorio y suceso.

En la sección práctica guiada propone 3 problemas en los que se permite describir las nociones que forman parte de las tareas y son necesarias para resolver el problema.

Por ejemplo en el problema 3 se solicita Clasificar los experimentos en aleatorios o Determinístico, describiendo "*Aleatorio* como aquello en que *se puede ganar, empatar o perder,* en el contexto del *resultado de un partido de futbol antes de que se juegue.* (p. 340).

En el problema 5 también se describe cómo determinar los casos favorables cuando los sucesos son compuestos, diciendo:

Paso 1*: separa los sucesos*. Por ejemplo S1 y S2

Paso 2: Determina cómo se relacionan. Si la conjunción es "o", los sucesos se unen, pues puede cumplir cualquiera de las dos condiciones. Si la conjunción es "y", los sucesos se intersecan, pues debe cumplir con las dos condiciones.

En este caso es "o"; entonces se unen y hay que sumar las cantidades.
Se aprecia un desarrollo ostensivo del ejercicio y de las propiedades de la probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes.

En la sección 'Aplica' se proponen 5 problemas, 4 de ellos corresponden a determinar el espacio muestral y los casos favorables en los experimentos citados. Los problemas están graduados de menor a mayor dificultad.
El problema 10 plantea que el alumno formule un experimento aleatorio y uno determinístico. Por ejemplo en un Juego de naipes, p. 340, 341.

La lección ¿Cómo estimar la probabilidad mediante la frecuencia relativa?, plantea dos situaciones resueltas. La primera denominada Experimentos Equiprobables y la segunda Probabilidad Frecuencial.

En experimentos equiprobables presenta una tabla de resultados del experimento lanzar una moneda para 1000, 2000, …, 5000, 10000, …, 25000 lanzamientos. La tabla contiene 5 columnas, los datos de la primera columna corresponden al número de lanzamientos, la segunda columna es la frecuencia absoluta de caras, la tercera contiene la frecuencia relativa de caras, la cuarta columna corresponde a la frecuencia absoluta de sellos y la quinta a la frecuencia relativa de sellos.

En esta situación el medio es la tabla de datos el que produce retroacciones al alumno mediante la pregunta ¿Cuál de los dos eventos salir cara o salir sello tiene mayor probabilidad de ocurrir?

También presenta un gráfico de puntos cuyas variables son número de lanzamientos y frecuencias relativas de cara. El grafico representa la estabilización de la frecuencia relativa del suceso salir cara en el lanzamiento de una moneda para grandes repeticiones del experimento. En el grafico se observa que a partir de 10000 lanzamientos la frecuencia relativa comienza a estabilizarse alrededor del 0,5.

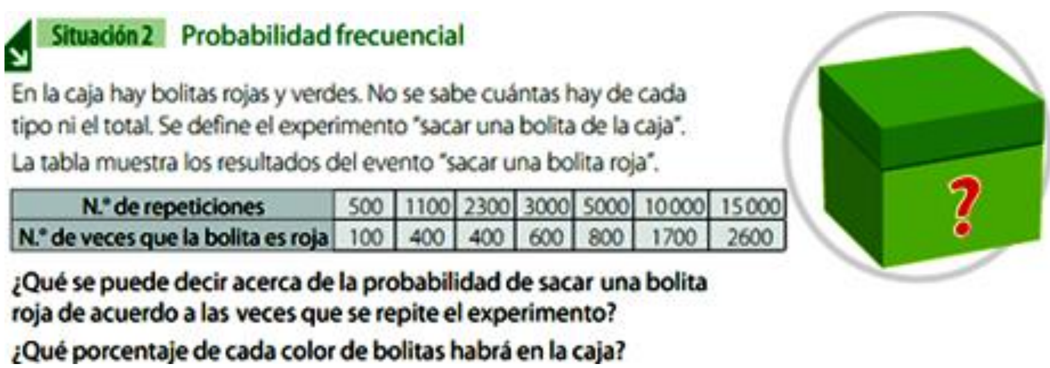
Esta parte de la situación pone en evidencia su evolución, el aprendizaje alcanzado tiene un marco visual, el gráfico el que representa la probabilidad frecuencial de obtener cara en el lanzamiento de una moneda. En este caso el medio es el grafico, el que permitiría al alumno(a) la visualización del suceso cara para deducir que la probabilidad experimental de obtener cara en el lanzamiento de una moneda tiende al valor $\frac{1}{2}$.

La pregunta ¿Por qué en este caso basta con representar solo un evento?, se caracteriza por no interferir en los razonamientos de los alumnos, no da pistas sobre una eventual respuesta, además podría considerarse como una retroacción del medio que incentiva al alumno a analizar los datos de la tabla y elaborar una respuesta.

Para aproximarse a la noción de equiprobabilidad, el texto propone estimar la probabilidad de los dos sucesos en este experimento. El texto expresa que ambos resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir, por lo tanto se dice que el experimento es equiprobable, (ibídem, p. 342).
La pregunta ¿Qué relación observas entre la probabilidad y la frecuencia con que ocurre un evento? Induce al alumno a encontrar una relación entre la frecuencia relativa del suceso y su probabilidad de ocurrencia. En este sentido el medio no es antagónico.

La situación 2, denominada Probabilidad Frecuencial es un problema que. plantea cuatro tareas. La formulación del problema es el siguiente: "

Figura 25 Probabilidad Frecuencial



Situación 2 **Probabilidad frecuencial**

En la caja hay bolitas rojas y verdes. No se sabe cuántas hay de cada tipo ni el total. Se define el experimento "sacar una bolita de la caja". La tabla muestra los resultados del evento "sacar una bolita roja".

N.° de repeticiones	500	1100	2300	3000	5000	10 000	15 000
N.° de veces que la bolita es roja	100	400	400	600	800	1700	2600

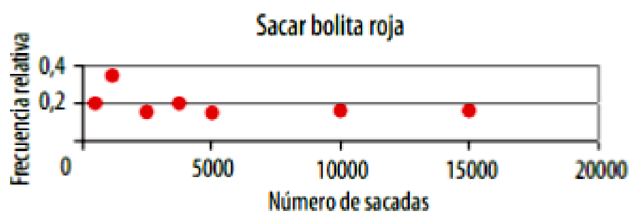
¿Qué se puede decir acerca de la probabilidad de sacar una bolita roja de acuerdo a las veces que se repite el experimento?
¿Qué porcentaje de cada color de bolitas habrá en la caja?

En estas preguntas, se percibe un medio no antagónico, no desafiante, que permitiría al alumno, responder lo esperado.
Se intenta determinar un medio que situe a los alumnos a analizar los datos para estimar probabilidades.

Se define la frecuencia relativa, anotada f_{rel}, como el cociente entre la frecuencia absoluta (número de veces que ocurre un suceso) de un suceso y el total de veces que se repite un experimento.

En la tarea 1 interviene la definición de frecuencia relativa (f_{rel}). Para calcularla, el medio es una tabla de datos anterior la que contiene una tercera columna, incompleta, en la que se colocan las frecuencias relativas calculadas.

La tarea 2 presenta el gráfico de las frecuencias relativas del suceso sacar bolita roja:



El gráfico constituye un medio para analizar la estabilización de la frecuencia relativa, observar su valor y establecer un valor para la probabilidad experimental de este suceso.
También plantea el siguiente análisis: "Si el valor de la probabilidad se relaciona con la frecuencia relativa, ¿cuál será el valor mínimo que puede tomar y cuál el máximo? ¿Por qué?"

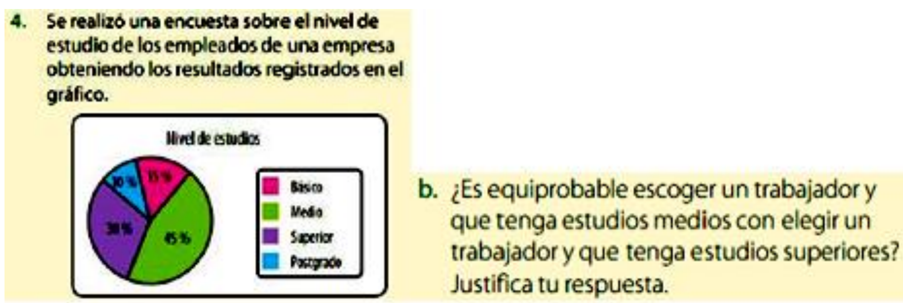
Claramente esta pregunta responde a la necesidad de analizar el dominio de imágenes de la probabilidad, el que es un importante axioma, que establece que la probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1.

La última parte de esta lección concluye que la probabilidad es un número que se asigna a cada suceso y que da información acerca de la frecuencia con que ocurre. Una estimación de dicho número es la probabilidad frecuencial (P_f), que corresponde a la frecuencia relativa del suceso al realizar el experimento.
Un experimento es equiprobable cuando todos sus resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.
Para esta lección el texto propone 14 problemas.

En la sección repaso se presentan una tabla de frecuencia absoluta y se solicita determinar la frecuencia relativa y graficar. No hay iformación sobre el tipo de gráfico, se supone que es de frecuencia relativa.

En práctica guiada, el problema 3 solicita al alumno discriminar entre experimento equiprobable y no equiprobable. Como esta noción no ha sido definida, en el mismo ejercicio se describe, en el contexto particular de un experimento diciendo que si "**los resultados del experimento, tienen la misma posibilidad de ocurrencia, el experimento es equiprobable.**"
A partir de esta descripción, el problema 4 plantea decidir si el suceso "*elegir un trabajador y que tenga estudios superiores*" es equiprobable o no:

Figura 25. Ejemplo Ostensivo de la noción de Equiprobabilidad.



. (Fuente Texto del estudiante. Matemática 7° básico, 2016, p. 344)

La sección 'Aplica', propone 9 problemas, 5 de ellos se relacionan con la probabilidad frecuencial, utilizando para organizar los datos tablas de frecuencia, gráficos y el lenguaje natural. En los problemas 4 y 8, el alumno podría analizar la equiprobabilidad de la situación planteada.
Particularmente el problema 5 plantea estimar probabilidades a partir de dos gráficos cuyas variables son número de lanzamientos y frecuencia relativa. Ambos gráficos muestran la frecuencia relativa para distintos lanzamientos de un suceso pero la instrucción no especifica la cantidad de lanzamientos que se deben considerar para estimar la probabilidad del evento (suceso). Por lo tanto

la instrucción de este problema es incompleta y confundiría a un alumno de 13 años.

El problema 9 corresponde al experimento, lanzar un dado. Este problema plantea realizar conjeturas sobre la frecuencia relativa de cada resultado, elaborar el grafico de la frecuencia relativa de un suceso particular, calcular la frecuencia relativa de la suma de sucesos, por ejemplo hallar la frecuencia relativa del evento “obtener un número mayor que 2” y compararlo con la frecuencia relativa del evento “obtener un número menor o igual que 4”.

Lo problemas 10 y 11 proponen analizar y argumentar problemáticas relacionadas con la frecuencia relativa y los problemas 12 y 13 son desafíos que permiten proyectar la enseñanza de estas nociones, desarrollando habilidades de pensamiento que implican usar los datos para estimar probabilidades” (Garfield y Ben-Zvi, 2007, citado en Estrella 2009), uno de los seis principios que caracterizan el pensamiento estadístico, SOCHE (2011).

Por ejemplo, Un dado de 6 caras numeradas del1 al 6, está trucado de manera que la probabilidad de sacar un número par es 0,71. Si se sabe que la probabilidad de sacar un número impar cualquiera es la misma en cada caso, ¿cuál es la probabilidad de sacar el número 3?, p. 345.

La lección ¿Cómo determinar la probabilidad teóricamente? propone realizar un taller denominado “Probabilidades para experimentos equiprobables” y una situación denominada “”Regla de Laplace”.
Probabilidades para experimentos equiprobable es un taller que se realiza en tríos. Consiste en extraer de una bolsa uno de 10 papelitos, numerados de 1 a 10.

El taller propone 8 tareas, las 5 primeras se refieren a determinar la probabilidad de sucesos simples, por ejemplo*: "Si se saca un papelito del conjunto sin mirar, .cuantas posibilidades hay que salga 5? de 10 posibilidades."*

Las tareas 6 y 7 se refieren a determinar la probabilidad de la unión de sucesos mutuamente excluyentes.

Por ejemplo en este experimento la probabilidad de obtener cualquiera de los números del 1 al 10 en la bolsa es $\frac{1}{10}$ pero la probabilidad de obtener número par es $\frac{1}{2}$ lo que podría rescribirse como: $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}= \frac{1}{2}$.

Es decir $P(n° \, par) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8) + P(10) = \frac{1}{2}$

De esta manera el texto produce aproximaciones a la regla de Laplace, y también abordar la propiedad aditiva de la probabilidad.

En la situación denominada Regla de Laplace, se desarrolla un ejemplo de probabilidad teórica, determinar la probabilidad de extraer una flor verde, de una bolsa que contiene 750 flores de colores, de las cuales 300 son verdes, 250 son naranjas y 150 son rojas.

El desarrollo tiene dos pasos, es ostensivo y recurre a colocar colores para identificar los casos favorables de cada suceso simples, sacar una flor de cada color.

En el paso 2 se cálcula la probabilidad usando la fórmula de la ley de Laplace.

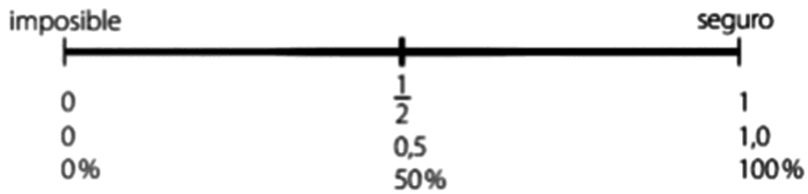
$$P(suceso) = \frac{casos\ favorables}{casos\ ttales}$$

Texto del estudiante 7° básico Ley de Laplace, p. 347

En la parte final de esta lección se presenta una síntesis conceptual de la probabilidad, junto con la notación a utilizar.

Así sostiene que: La probabilidad de un suceso A, se escribe P(A). Este número está entre 0 y 1 y se puede escribir como número decimal, fracción o porcentaje. El siguiente esquema representa el intervalo de medida de la probabilidad.

Figura 26. Intervalo de Medida de la Probabilidad



Además si el experimento es equiprobable y el espacio muestral es finito, para calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso A se puede usar la ley o regla de Laplace.

Para esta lección, el texto propone 13 problemas.

La sección repaso consiste en dos ejercicios que se refieren a identificar conceptos presentes en la fórmula de Laplace, casos favorables y posibles de experimentos aleatorios evocados a partir de enunciados.

La sección práctica guiada pretende modelar el procedimiento de resolución del alumno de manera ostensiva, para ello desarrolla dos problemas.

Por ejemplo, la situación 3 es un caso de probabilidad genética que presenta una tabla con datos del contexto y el cálculo de la probabilidad de ciertos caracteres genéticos. También propone dos tareas que se resuelven mediante el procedimiento exhibido.

Las situaciones 5 al 8 proporcionan la oportunidad de identificar casos favorables, posibles y aplicar la ley de Laplace.

La situación 9 plantea la ponderación de una probabilidad, para obtener los casos favorables.

El problema 10 propone analizar un enunciado y decidir la validez de 4 tareas relacionadas con la probabilidad de dos sucesos simples.

El problema 11 plantea un desarrollo erróneo de una situación de probabilidad, que el alumno debe justificar.
El problema 12 plantea el cálculo de probabilidad de dos sucesos utilizando una tabla de contingencia.
El problema 13 presenta una dificultad en su redacción.

En general se plantean distintos contextos en los que el cálculo de la probabilidad soluciona un problema, sin embargo no se aprecia el significado de este valor, por lo que se trabaja la dimensión calculista en la probabilidad.

La lección 4 denominada "Calcular probabilidades mediante diagramas de árbol", plantea un juego en parejas que consiste en lanzar al mismo tiempo tres monedas cada uno, gana el que obtiene solo dos caras en su lanzamiento. En este juego el medio es el lanzamiento de las monedas y la situación propone 7 tareas, formuladas como preguntas, para analizar el juego.

La primera tarea, "¿Cuantas combinaciones o posibilidades de cara y sello existen al realizar los tres lanzamientos? Muestren con un dibujo, las combinaciones", se relaciona con una representación gráfica, personal, de los casos posibles en este juego. Las 6 tareas siguientes están relacionadas con la probabilidad de ganar o perder el juego y con la comparación entre la aparición de cara al lanzar dos, tres y cuatro monedas. En estas tareas el medio es antagónico y favorece el trabajo autónomo en equipo de los alumnos, la formulación de predicciones y estimaciones al plantear la pregunta: ¿Que sucede con la probabilidad de ganar si se agrega una cuarta moneda?, pag. 350.

En la página 351 se propone determinar la probabilidad de un suceso utilizando diagrama de árbol. El desarrollo tiene 4 pasos y es ostensiva.
Al final de esta página aparece una síntesis que describe:

- Al diagramas de árbol como un procedimiento para representar gráficamente y determinar los espacios muéstrales de experimentos aleatorios formados por varias etapas o que se repiten dos o mas veces y que con su desarrollo se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de cada uno.
- Para calcular la cantidad de elementos del espacio muestral usando diagrama de árbol, se puede multiplicar la cantidad de elementos de cada etapa o fila del árbol.

En la sección “Practiquemos lo aprendido” se proponen 9 problemas que involucran el diagrama de árbol para resolverlos. Particularmente los problemas 3 y 4 presentan un diagrama de árbol y solicitan analizar la información para determinar el experimento aleatorio que representa, el espacio muestral, dos sucesos disjuntos y una probabilidad compuesta.

El problema 9 plantea un medio antagónico: La situación consiste en determinar la probabilidad que tiene un objeto que cayó por un orificio, nombrado como A, de llegar al orificio B, si se sabe que cada vez que el objeto llega a uno de los puntos marcados con verde tiene las mismas probabilidades de seguir por cualquier camino, pero sin retroceder.

2.4.6 La enseñanza de la probabilidad, texto de estudio de 8º básico, 2016.

Este texto presenta en su parte inicial, activación de conocimientos previos y 3 lecciones para la enseñanza de la probabilidad, la primera denominada ¿Qué es el principio multiplicativo?, la segunda “¿Cuál es la cardinalidad de un espacio muestral?” y la tercera lección ¿Cómo calcular probabilidades usando el principio multiplicativo?

Para activar conocimientos, en la p. 334 plantea un problema sobre la ley de la independencia de caracteres de la herencia biológica, la que describe situaciones de probabilidad. A partir de una tabla de contingencia que consigna parejas de caracteres de una planta, como color y textura, propone 3 tareas sobre el cálculo de la probabilidad de la aparición genética de estos, tales como ¿Cuál es la probabilidad de que un ejemplar sea verde?, ¿Por qué un color tiene más probabilidades de perpetuarse en la descendencia que el otro? Justifiquen sus respuestas.

Se aprecia que estas actividades se apoyan en los aprendizajes adquiridos en 7° básico, además una situación similar ha sido propuesta en el texto de 7° básico, luego el formato de situación no debería ser desconocido para los alumnos.

La tercera tarea plantea la validez de esta ley al caso de las características genéticas del ser humano, con preguntas como las siguientes: ¿Saben por qué una persona tiene ojos cafés o verdes? ¿O por qué una persona tiene el pelo claro u oscuro? Investiguen y comenten sus conclusiones.

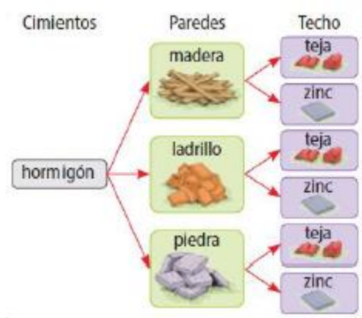
Otras tareas se refieren a determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio y la probabilidad de algunos sucesos a partir de un diagrama de árbol que representa el lanzamiento de dos monedas. En este problema el medio desafía al alumno a interpretar la representación gráfica.

En la lección titulada ¿Qué es el principio multiplicativo? presenta la resolución de un problema que involucra un diagrama de árbol para elegir de 3 objetos. Uno en el primer nivel, uno de 2 objetos en el segundo nivel y uno de tres objetos en el tercer nivel, lo que corresponde al calculo de $C_1^1 \cdot C_1^2 \cdot C_1^3$.

El desarrollo contempla dos pasos, en el primero se indica que: “elabora un diagrama de árbol que represente todas las opciones para la elección de los materiales. En el segundo paso indica que registre las opciones y las anote en una tabla. Estos esquemas aparecen en la página 338 del texto y apoyan la resolución de este problema.

La figura 18 muestra la combinaciòn de ambos procediminetos y la verificación de resultados iguales, 6 en cada caso. Tabla de doble entrada como herramienta en la resolución ostensiva de un problema.

Figura 27. Problema resuelto con diagrama de árbol y tabla de doble entrada.



Opción	Cimientos	Paredes	Techo
1	Hormigón	Madera	Teja
2	Hormigón	Madera	Zinc
3	Hormigón	Ladrillo	Teja
4	Hormigón	Ladrillo	Zinc
5	Hormigón	Piedra	Teja
6	Hormigón	Piedra	Zinc

Fuente: Texto del estudiante 8° básico p. 338.

La resolución es ostensiva y sirve de modelo de procedimiento para que el alumno lo imite en la resolución de los problemas propuestos. En el extremo inferior de esta página se presenta la matemática escolar, el principio multiplicativo, que es el propósito de la lección. Esto se ilustra en la siguiente figura:

Figura 28. Matemática escolar. Principio Multiplicativo.

► **Para concluir**

El **principio multiplicativo** permite realizar un conteo rápido de las maneras en que puede ocurrir un hecho que está dividido en varios pasos. Si el primer paso puede ocurrir de a formas, el segundo de b formas, el tercero de c formas y así sucesivamente, entonces el hecho puede ocurrir de a • b • c • ... formas.

(Fuente: texto del estudiante, 8° básico, 2016, p. 338)

En la página 339 se proponen 4 problemas para poner en práctica el procedimiento del diagrama de árbol y el principio multiplicativo. Los dos primeros problemas ponen en juego el diagrama de árbol, uno de ellos corresponde al lanzamiento de dos monedas y de dos dados y el otro corresponde a situaciones de conteo combinatorio, como el resuelto al comienzo de la lección. Los problemas 3 y 4 plantean situaciones de conteo combinatorio a resolver por el principio multiplicativo.

Por ejemplo, ¿Cuántos tipos de hamburguesa puede elegir un cliente de un local de comida rápida si tiene las opciones que aparecen en la tabla?

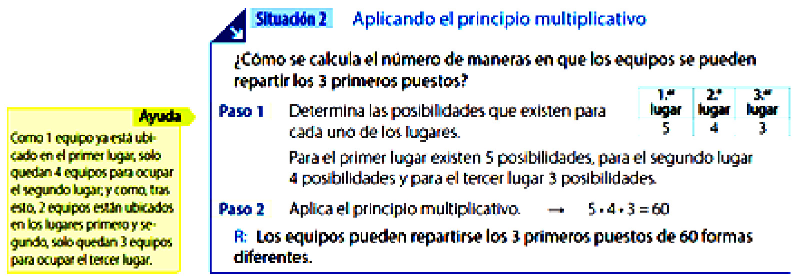
Pan	Blanco	Integral		
Carne	Pollo	Pavo	Soya	Carne
Vegetal	Lechuga	Poroto	Repollo	
Extra	Tomate	Cebolla	Queso	

La lección ¿Cuál es la cardinalidad del espacio muestral?, presenta el desarrollo de un problema de conteo combinatorio, utilizando el diagrama de árbol. El análisis de una de sus ramas, da cuenta de la cantidad de maneras en que se pueden distribuir o presentar los datos.

Las explicaciones asociadas al desarrollo del problema complican la comprensión del mismo, a los entendimientos de los alumnos, además solo presenta el análisis de una rama del árbol completo, dado que la formulación del problema daría origen a un árbol con tres niveles de 5, 4 y 3 elementos respectivamente, de manera que hay 60 maneras de distribuir el tercer lugar y el texto solo muestra, gráficamente, 12 de estas.

En la situación 2 se plantea el desarrollo de un problema que se resuelve utilizando directamente el principio multiplicativo. El desarrollo es el siguiente:

Figura 29. Problema resuelto, Pricipio Multiplicativo.



Situación 2 Aplicando el principio multiplicativo

¿Cómo se calcula el número de maneras en que los equipos se pueden repartir los 3 primeros puestos?

Ayuda

Como 1 equipo ya está ubicado en el primer lugar, solo quedan 4 equipos para ocupar el segundo lugar; y como, tras esto, 2 equipos están ubicados en los lugares primero y segundo, solo quedan 3 equipos para ocupar el tercer lugar.

Paso 1 Determina las posibilidades que existen para cada uno de los lugares.

1.er lugar	2.° lugar	3.er lugar
5	4	3

Para el primer lugar existen 5 posibilidades, para el segundo lugar 4 posibilidades y para el tercer lugar 3 posibilidades.

Paso 2 Aplica el principio multiplicativo. → $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

R: **Los equipos pueden repartirse los 3 primeros puestos de 60 formas diferentes.**

Fuente texto del estudiante 2017, p.

Se aprecia, en el lado izquierdo de esta página, un cartel “ayuda” que explica las posiciones que toma cada dato del problema al utilizar el principio multiplicativo.

Las situaciones 3 y 4 plantean el desarrollo de un mismo problema, utilizando el diagrama de árbol, luego una tabla de doble entrada y el principio multiplicativo como procedimientos distintos de solución. Los autores de este texto han considerado relevante solicitar a los alumnos organizar los datos del diagrama de árbol en tablas de doble entrada, cuando ello sea posible, así el problema 3 presenta además la siguiente tabla:

Figura 30. Problema resuelto con tabla de doble entrada.

	(R1)	(R2)	(A1)	(A2)
(C)	(C, R1)	(C, R2)	(C, A1)	(C, A2)
(S)	(S, R1)	(S, R2)	(S, A1)	(S, A2)

Fuente: MINEDUC, Texto del estudiante 8° básico.

En la sección de ejercicios propuestos, se proponen 9 problemas sobre la determinación del espacio muestral, el problema 1 solo requiere contar los objetos en una urna y las partes en un disco giratorio.

El problema 2 es un enunciado cuya solución involucra el diagrama de árbol o el principio multiplicativo.
En práctica guiada el texto plantea dos problemas en los que se da información explicita para su resolución, por ejemplo, una de las preguntas del problema 3 es ¿Qué multiplicación permite calcular el cardinal con el principio multiplicativo?, texto del estudiante 8° básico, p. 342.

En “aplica” se proponen 5 problemas que plantean el cálculo del espacio muestral o el conteo combinatorio, utilizando diagrama de árbol o principio multiplicativo.

En la lección, ¿Cómo calcular probabilidades usando el principio multiplicativo?, el texto presenta la solución de un problema, por dos procedimientos diferentes. En la pimera solución, se enseña a calcular la probabilidad, usando un diagrama de árbol, con el que se determina la cardinalidad del espacio muestral, que es 18, a continuación en el texto se explica que “Dado que la cantidad de casos favorables es 1, es posible calcular la probabilidad aplicando la regla de Laplace.

R: La probabilidad de que Valeria elija para su blog el diseño señalado en el enunciado es $\frac{1}{18}$.

En la segunda solución se enseña a calcular la probabilidad de sucesos compuestos, determinando la probabilidad de cada suceso simple. Si la ocurrencia del primer suceso no influye en la ocurrencia del segundo suceso entonces se multiplican estos valores. Por lo tanto la situación resuelta corresponde a sucesos independientes. Al finalizar la resolución descrita, los autores del texto presentan una respuesta ostensiva, “El principio multiplicativo se puede aplicar usando las probabilidades como factores. Por lo tanto la probabilidad del experimento comouesrto por los experimentos aleatorios 1 y es $P(1) \cdot P(2) =$

El texto se refiere a experimentos compuestos, como obtener dos caras al lanzar una moneda en dos oportunidades.

La matemática escolar se presenta en el costado de la página 344, en la forma de carteles que describen a los conceptos. Un experimento aleatorio equiprobable es aquel en el cual todos sus resultados posibles tienen igual probabilidad de ocurrencia. El prefijo “equi” significa igual. Sobre la noción de probabilidad se señala que: “Las probabilidades permiten hacer estimaciones referidas a los resultados de una gran variedad de fenómenos tanto científicos como de la vida cotidiana. Pueden usarse para cuantificar situaciones azarosas que ocurren en tu entorno”, lo que corresponde a una descripción y no propiamente a una definición.

También se refiere a la ley de Laplace: “La regla de Laplace indica que para un experimento aleatorio cuyos resultados son equiprobables y finitos, la probabilidad de un evento A se calcula como:

$$P = \frac{Número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ totales}$$

Ayuda: La cardinalidad del espacio muestral corresponde al número de casos totales en la regla de Laplace.

Concluye la lección con la siguiente sistematización

Si $A\ y\ B$ son sucesos independientes, es decir, si el resultado del primer suceso no influye en el del segundo, se puede usar el principio multiplicativo para calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos compuestos.

Por ejemplo, la probabilidad de ocurrencia del evento compuesto formado por los eventos $A\ y\ B,\ P(A\ y\ B),$ es:

$$P(A\ y\ B) = P(A) \bullet P(B),$$

donde $P(A)$ es la probabilidad de ocurrencia de A y P(B) la de B. Texto del estudiante, p. 345.

Los ejercicios propuestos plantean 2 situaciones de probabilidad de sucesos simples para repasar los conceptos adquiridos. En práctica guiada se sugiere utilizar el diagrama de árbol para resolver dos problemas y además utilizar el principio multiplicativo para sucesos independientes. Los ejercicios de práctica propuestos enfatizan el cálculo de probabilidad laplaciana y de sucesos compuestos independientes. Por ejemplo,

“El 4° básico de un colegio realiza un juego con la finalidad de juntar dinero para su paseo de fin de año. Cada jugador debe lanzar 3 monedas de $ 100. Si salen 2 caras y 1 sello en cualquier orden, el jugador gana $ 300, de lo contrario pierde $ 100. ¿Cuál es la probabilidad de ganar $ 300?, p. 347.

En esta sección también se plantea un problema que solicita comparar probabilidades, desarrollando habilidades de análisis y otro problema que solicita inventar un experimento aleatorio compuesto, cuya solución se pueda calcular mediante el siguiente producto $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$, desarrollando la habilidad de plantear situaciones que involucren sucesos independientes y su probabilidad.

En síntesis los textos analizados presentan las nociones matemáticas como descripciones y no como propiedades o leyes que tienen un dominio de validez, estas se ubican en el borde izquierdo o derecho de cada página. Esta descripción contiene las formas de uso de la probabilidad o del diagrama de árbol, principio multiplicativo y otros conceptos o procedimientos, además se señala la relación de complementariedad entre el diagrama de árbol y el principio multiplicativo, como también sus diferencias.

También se aprecia que ambos textos concretan la propuesta curricular de los programas de estudio, la que se basa en la enseñanza de los significados frecuencial y clásico de la probabilidad apoyándose en actividades relacionadas con juegos aleatorios los que son utilizados para la transición de un significado a otro.

En particular el texto de 7° se centra en la aplicación de la probabilidad experimental en situaciones que permiten también determinar la probabilidad clásica utilizando ele diagrama de árbol. En el texto de 8° básico se amplía el estudio de la probabilidad, involucrando conceptos teóricos que están estrechamente relacionados con el cálculo de la probabilidad clásica.

Estos conceptos son principio multiplicativo, espacio muestral, diagrama de árbol, cardinalidad y regla de Laplace. También se especifica la relación entre un diagrama de árbol y principio multiplicativo y sus diferencias. El principio multiplicativo corresponde a una representación visual del resultado que se obtiene al utilizar el principio multiplicativo y este último permite calcular la cantidad de resultados existentes.

La fórmula de la ley de Laplace se introduce en los pasos del desarrollo de un problema que propone calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso.

En los textos de autores chilenos, se aprecia un enfoque de enseñanza que propone mayores instancias de trabajo autónomo del alumno, en 7° más que en 8° básico. Al parecer a medida que se requieren mayores desafíos de comprensión de los alumnos, la tendencia de los autores es a caer en el enfoque conductista, presentando desarrollos ostensivos.

Los problemas propuestos como también los resueltos presentan tareas orientadas a desarrollar habilidades complejas, tales como de análisis y de creación de situaciones, las que corresponden a habilidades cognitivas complejas.

Al comparar los textos 2015 - 2016, se aprecia que el segundo presenta una enseñanza más focalizada en el trabajo autónomo del alumno, mientras que el segundo texto utiliza artificios didácticos ostensivos que alertan a los alumnos a poner en funcionamiento los procedimientos utilizados en el texto para resolver los problemas planteados.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

En el marco teórico de esta investigación se desarrollan algunos conceptos fundamentales de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD).

Nociones Fundamentales de la Teoría de Situaciones Didácticas

La TSD se centra en la relación didáctica que se genera en clases, por ello los conceptos de contrato didáctico y medio son esenciales.

En los fundamentos de esta teoría se distinguen tres pilares: el primero, se refiere a las hipótesis piagetianas de interacción compleja de acomodación y asimilación de los procesos psicogenéticos de aprendizaje. El segundo, alude al enfoque sistémico que describe la relación didáctica, que se establece en la interacción profesor y alumno frente a un saber en el aula; y el tercero, presenta la noción de juego para describir las relaciones entre los subsistemas profesor y alumno.

Considerando la hipótesis piagetiana, la TSD se apoya en los principios de asimilación y adaptación cognitiva del niño, los que consideran sus experiencias en la vida cotidiana. Brousseau con el objetivo de investigar las reacciones de los niños frente a preguntas o problemas que surgen en la clase, concibe que el aprendizaje se produce por adaptación a un *Medio,* tal como las personas se adaptan a las exigencias de la sociedad.

En la TSD el medio es un concepto fundamental que se manifiesta como un medio *antagonista,* debido a que para un sujeto es un factor de dificultades, contradicciones y desequilibrios, de ahí la necesidad de la adaptación. El ideal de esta teoría es permitir al alumno relacionarse con situaciones de la vida cotidiana, por razones epistémicas, de manera que se pongan en juego sus conocimientos personales, condicionando las formas de entender e interpretar estas situaciones para aproximarlos al conocimiento científico, y no solo a la realización de actividades reproductivas o entretenidas.

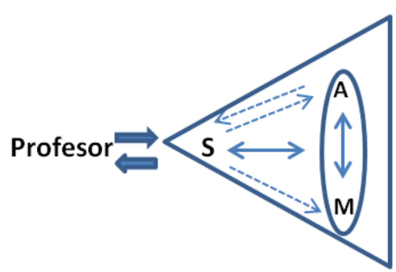
Este tipo de situaciones se denominan adidácticas y se caracterizan por:

- Frente a la tarea o pregunta planteada, el alumno debe producir una respuesta en forma autónoma; el profesor no da pistas ni entrega instrucciones, no sugiere caminos de respuesta y tampoco privilegia una respuesta por sobre otra. El alumno a partir de sus conocimientos intenta responder a la situación. En el éxito de la respuesta está implícito el conocimiento previsto en el diseño y formulación de la situación.
- La respuesta óptima es el conocimiento previsto en el aprendizaje, es decir, la matemática en juego y las propiedades del objeto de estudio.

Brousseau (2004), afirma: “Este saber fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje”, (p. 59).

En relación al enfoque sistémico la TSD considera la interacción entre tres subsistemas: el subsistema alumno, el subsistema profesor y el subsistema medio antagonista. La relación didáctica se desarrolla en las interacciones de estos subsistemas, los que constituyen el sistema didáctico del aula, que Brousseau (1986, 1990, 1998) presenta mediante el siguiente esquema:

Figura 31. Esquema sistémico Profesor – Alumno (A) – Medio (M).



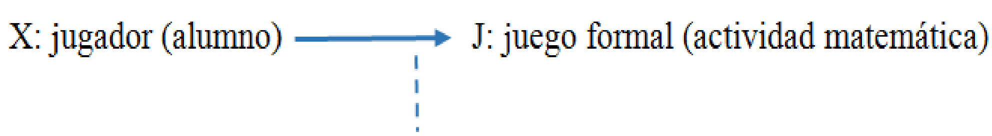
Fuente: Brousseau ,2004, p.93.

S es la situación con la que interactúa el sistema alumno-medio

Esta figura describe interacciones del alumno con el medio adidáctico de la situación. El alumno interactúa con la situación y el medio (elemento esencial de la situación) le ofrece retroacciones. Además describe la interacción principal del profesor con el subsistema alumno – medio. Más tarde Brousseau precisa que este último es el medio del profesor en la situación didáctica.

Con respecto a la noción de juego Brousseau modela el sistema didáctico como un juego formal, concibiéndolo como la relación entre una actividad matemática propuesta al alumno y la búsqueda de estrategias de solución. "En cada etapa del juego, el jugador elige entre los estados permitidos y determina así el estado siguiente", (Brousseau, 1988, p. 313). El esquema que se presenta a continuación, muestra la interacción entre un jugador y un juego formal:

Figura 32. Interacción entre un jugador y un juego formal: I_t



(Fuente: Brousseau, 1988, p 313).

En el juego, el jugador pone en práctica estrategias, cambios de estrategias y medios para ganar o para mejorar sus resultados; estos representan conocimientos que el jugador podría poner en acción o que podría producir.
En todo juego hay reglas que los jugadores ponen en práctica para avanzar en él y dejarlo en otro estado, lo que afecta las decisiones del jugador y de su contrincante (el jugador también adopta otra posición en relación al juego). ,

Así los estados posibles del juego representan las futuras jugadas que podría realizar un jugador, dado que el juego quedó en un estado, ya sea que hubiese finalizado o no. De esta forma los jugadores interactúan con el juego.
Modelizar una situación de enseñanza, consiste en la producción de un juego específico entre los subsistemas, en vista del saber esperado. El jugador

(eventualmente el alumno) se relaciona con el juego, generando estrategias para ganar y el rol del profesor consiste en organizar juegos para que el alumno genere estrategias ganadoras; el juego representa el sistema antagonista, ya que interpela al jugador.

La finalidad de esta modelización es considerar juegos en que el conocimiento de los alumnos aparezca bajo la forma de una decisión, la que puede dar origen a elaborar estrategias óptimas para ganar o encontrar la solución del juego.

Los juegos considerados son de diferente naturaleza: directo o reflexivo y pasivo o activo.

- Los primeros caracterizan juegos en los que ya se sabe jugar, es decir las jugadas futuras son representaciones de conocimientos ya adquiridos. Brousseau llama "*saber*" a estos conocimientos que, cuando han sido utilizados como herramienta de interacción, pueden producir estrategias ganadoras y llegar a ser objeto de estudio para el jugador.
- Un juego activo no finalizado es aquel cuyas estrategias ganadoras aún están en desarrollo, por eso puede llegar a ser un sistema antagonista para el jugador. Este juego presenta las siguientes características:

Las decisiones del jugador determinan las siguientes etapas del juego.

- Las decisiones del jugador están enfrentadas a reglas de acción que no han sido previstas por él, lo que produce incertidumbre en sus decisiones y por lo tanto el juego se comporta como un sistema antagonista.
- Las decisiones del jugador pueden estar determinadas por uno u otros jugadores que regulan sus acciones en cooperación o en oposición con él.

Por otra parte, la noción de juego en la TSD modeliza el funcionamiento de las instituciones o las prácticas de enseñanza, ya sea desde la perspectiva del jugador o de un observador, que puede estar representado por el profesor en la clase o por un didacta. Hay juegos que en sí mismos representan un medio en su funcionamiento respecto de un conocimiento matemático, por ejemplo: “La carrera a 20” es un juego diseñado por Brousseau para hacer funcionar la división euclidiana con niños de 8 a 9 años y además poner en juego las reglas de la demostración. Otro juego es “Quién puede más”, una adaptación elaborada por el equipo de investigadores de Franche Compte de Besançson, que permitió a niños de 8 a 9 años, en Francia, enunciar en lenguaje natural características de la incertidumbre en este juego.

3.1.1 Precisiones sobre el medio didáctico.

Brousseau describe el medio didáctico como un sistema que desafía al alumno a tomar decisiones y a actuar frente a las sanciones producidas por ellas, estas sanciones en la TSD se denominan retroacciones del medio.

Una condición del medio prevista por Brousseau es que debe resistir a la interpretación inmediata del alumno, por ello lo denomina “sistema antagonista”, ya que se opone al sistema alumno, lo desconcierta y lo desafía a actuar para producir otras decisiones y nuevos conocimientos. También lo concibe como un “conjunto de circunstancias exteriores” al alumno, que lo confrontan, provocándole desequilibrios cognitivos o adaptaciones al medio. Además de interpretarlo como “territorio de referencia cultural y de funcionamiento de los saberes que se enseñan”, Brousseau (1988, p. 320).

En relación a la interacción en el aula, Fregona y Orus (2011) señalan que el medio “debe favorecer el cuestionamiento del objeto matemático, recortarlo y vincularlo con otros saberes”, (p. 7).

Perrin-Glorian y Hersant (2003) aseguran que:

> Es el medio el que caracteriza a la situación adidáctica, si el medio cambia la situación cambia. En efecto en el enfoque sistémico de esta teoría el sujeto

puede ser visto como un sistema de conocimientos que interactúa con un medio antagonista; él reacciona a las acciones del sujeto por retroacciones que el sujeto interpreta con sus conocimientos. El aprendizaje se produce mediante la interpretación que el alumno realiza a partir de los efectos de sus acciones sobre el medio y por la adaptación al medio. (p. 219).

Para la relación didáctica entre el profesor y los alumnos, el medio (que puede ser material, social, cultural u otro) “cumple un rol en el aprendizaje de conocimientos, sea solicitado o no en la relación didáctica”. Además, en el aprendizaje su rol es central como “causa de adaptación y en la enseñanza, como referencia y objeto epistemológico”, (Brousseau, 1988, p. 321).

Como “concepto esencial para explicar el funcionamiento de una situación didáctica”, (Brousseau 1988, Margolinas 1995), en la perspectiva del juego y en el enfoque sistémico el medio modifica las etapas del juego (la situación) de manera no prevista por el jugador (el alumno), lo que lo sorprende y lo incita a seguir intentando ganar. El medio, por lo tanto, es un agente provocador que mantiene viva en el alumno la expectación de su retroacción y el interés por continuar el juego. Si el alumno gana se ha producido el aprendizaje.

Modelar una situación didáctica, requiere poner en escena al sistema medio, ya que “al final de la enseñanza, se supone que el alumno podrá hacer frente, con la ayuda del saber aprendido, a sistemas sin intenciones didácticas”, (Brousseau, 2004, p. 93). Algunas formas de modelar estas relaciones futuras, en términos de juegos (conocidos por el alumno) son aquellas en las que el alumno:

- Puede tomar decisiones a partir de sus propios conocimientos y además nestablecer relaciones de significación entre las situaciones antiguas y las nuevas.

- Puede interpretar problemas de la realidad, como situaciones adidácticas bajo la forma de juego, las que requerirían respuestas no conocidas previamente.

Para lograr esos comportamientos en el alumno, la situación didáctica debería poner en escena un medio, real o evocado, que represente estas relaciones futuras. Teóricamente el progreso de los alumnos logrará que "esta representación didáctica y cultural del medio se aproxime a la realidad, por ello las relaciones del sujeto con este medio deberían empobrecerse de intenciones didácticas", como las instrucciones y las indicaciones explícitas del profesor (Brousseau, 2004, p. 93).

En síntesis:

- La relación didáctica se apoya en hipótesis epistemológicas.
- La relación didáctica pone en escena un medio y un jugador (el alumno), que se caracteriza porque él debe producir estrategias ganadoras.
- El saber producido por el alumno en situación adidáctica, aparecerá como el recurso para elaborar estrategias ganadoras frente al juego didáctico definido en esta relación.
- Los comportamientos de los alumnos deben responder a necesidades adidácticas en sus relaciones con el medio y no a obligaciones ligadas al contrato didáctico tradicional.

En consecuencia, se distinguen distintos tipos de medios:

- Un medio en que las situaciones adidácticas son insuficientes – por sí solas – para provocar aprendizajes; en este caso, el profesor debe ser capaz de gestionar rupturas del contrato didáctico y negociaciones que modifiquen el medio y produzcan nuevas retroacciones frente al alumno.
- Otro medio en que las interacciones recíprocas con los alumnos son lo suficientemente robustas para provocar las adaptaciones y los aprendizajes esperados (medio adidáctico).

- Un medio con gran intencionalidad didáctica en el que se conjuga un contrato didáctico y una situación de aprendizaje.

En relación con la investigación, el medio es una modelización del entorno en el cual interactúa el alumno. Además como sistema antagonista, representa una porción del universo que modela el conocimiento en vías de construcción y las interacciones que él determina.

3.1.2 El contrato didáctico.

Otro concepto clave de la TSD en el funcionamiento de la relación didáctica es el contrato didáctico, noción que se centra en los compromisos contraídos por los subsistemas profesor - alumno – medio en torno a un saber.

Brousseau concibe la noción de contrato didáctico al comprobar que la obligación social del profesor frente al aprendizaje de los alumno, es mantener la relación didáctica en clases en torno a un saber (a través de una situación específica al conocimiento matemático previsto), con lo que "se anuda un vínculo que determina, en general implícitamente, las obligaciones del profesor frente a las preguntas y respuestas de los alumnos", (Brousseau, 2004, p. 61). Esto significa que el profesor se hace cargo de las respuestas de los alumnos frente al aprendizaje previsto (mediante el proceso de devolución), dejándoles la responsabilidad para que intenten corregir su respuesta, y evitar el efecto Topaze. Lo que implica que el profesor asume la responsabilidad de gestionar cambios (o rupturas) de contrato, que eventualmente pueden ocasionar la intervención del medio, con el fin de lograr el aprendizaje esperado y no perder la adidacticidad de la situación, es decir, permitir al alumno llegar a la respuesta en forma autónoma.

Recordemos que uno de los roles del medio es permitir la evolución de la situación de aprendizaje mediante la búsqueda de nuevos contratos, este es el medio que se conoce como medio adidáctico, ya que favorece la actividad matemática autónoma del alumno.

Cabe señalar que Brousseau, en sus primeras investigaciones, constató comportamientos del profesor y de los alumnos, que más adelante formarían parte de cláusulas implícitas del contrato didáctico. En clases: “el profesor gestiona una situación didáctica y los alumnos interpretan el problema, las preguntas, la información que se les da así como las restricciones que se le imponen, decodificando la actividad didáctica del profesor”, (Brousseau, 1999, p. 458), la que en su práctica docente puede ser repetitiva, en forma consciente o no, es por eso que los alumnos se anticipan o adivinan lo que el profesor pretende.

De este modo comprueba que muchos profesores confunden esta decodificación con el aprendizaje esperado. A veces, los alumnos memorizan y utilizan reglas (mnemotécnicas) sin cuestionar su validez ni el alcance del resultado. Cuando el alumno tiene éxito en el uso de esta regla, el profesor puede interpretarlo como síntoma de ese aprendizaje, aun cuando el alumno no sea capaz (y tal vez no ha tomado conciencia) de exponer el razonamiento que lo llevó a tal resultado.

Observaciones de este tipo lo inspiraron a describir el Contrato Didáctico como “el conjunto de comportamientos del profesor (específicos al saber a enseñar) interpretados por el alumno y al conjunto de comportamientos del alumno (respuestas) esperadas por el profesor”, (Brousseau, 1999, p. 45).

En 1998 Brousseau reformula esta noción, estableciendo que: “El contrato didáctico es la regla del juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el profesor para poner en escena la situación (didáctica)” (Brousseau (1998, p. 60), Margolinas C. (1998, p. 5)); precisando la responsabilidad del profesor frente a la gestión del contrato didáctico en la organización de la clase y en clases.

Para Perrin-Glorian y Hersant (2003, p. 221) “el contrato didáctico permite al profesor regular las relaciones del alumno con el medio, también constituiría un medio para gestionar procesos de aprendizaje”. Lo que claramente concuerda con el planteamiento de Brousseau cuando afirma: “El profesor crea las condiciones suficientes para la apropiación de conocimientos, y él debe reconocer cuando esta apropiación se produce”, (Brousseau, 2004, p.61).

Así, en el desarrollo de una clase la evolución de la situación ha implicado la modificación del contrato didáctico, lo que permite la concepción de nuevas situaciones, siempre relacionadas con el problema inicial. Por lo tanto, el conocimiento se expresa, respetando las reglas de la situación y mediante las estrategias puestas en juego, lo que permitiría a los alumnos producir nuevos conocimientos y al profesor concebir otras situaciones adidácticas (o didácticas), Brousseau (2004).

El profesor es responsable de establecer un contrato didáctico (implícito) que estimule a los alumnos a entrar en el juego que propone, en función del conocimiento matemático previsto. Para ello, debe reflexionar y prever la capacidad de las situaciones que plantea para permitir a los alumnos trabajar en forma autónoma.

Por otra parte, las investigadoras Perrin-Glorian y Hersant (2003), precisan que:

Los conceptos de medio y contrato didáctico constituyen dos vías complementarias de la situación didáctica, por cuanto ella se compone de una situación adidáctica asociada a un contrato didáctico, y el medio es el que caracteriza en este caso a la situación adidáctica puesto que si el medio cambia la situación también cambia”, corriendo el riesgo de perder adidacticidad, (p. 219)

El concepto teórico de contrato didáctico tiene un rol importante por cuanto en una clase se producen procesos de búsqueda de un contrato ideal y en relación con la investigación “es este proceso el que representa las inquietudes y el que se debe modelar y explicar”, (Brousseau, 2004, p. 62).

3.1.3 Situaciones didácticas.

Se ha señalado que Brousseau distingue entre situaciones didácticas y adidácticas. Las adidácticas constituyen para él un estado ideal de la relación didáctica del alumno con una noción matemática.

Brousseau sugiere al profesor gestionar situaciones de aprendizaje que ayuden al alumno a producir un conocimiento personal, en relación al objetivo previsto; este conocimiento le permitirá reutilizarlo en otros contextos (en clases o fuera de ella). También sugiere plantear situaciones didácticas, cuyas formulaciones no necesiten dar al alumno instrucciones ostensivas como las que hasta ahora se han utilizado en la práctica pedagógica tradicional, de modo de evitar el efecto Topaze.

Al respecto Brousseau (1998) plantea:

> A propósito de una misma noción matemática se puede vislumbrar una familia de situaciones donde esta noción funcione como un conocimiento (situaciones de acción), una familia de situaciones donde ella figure como un saber (por ejemplo situaciones de validación), una familia de situaciones donde aparece una necesidad de conocimientos y la posibilidad de satisfacerla por la *comunicación* del saber correspondiente. Estas diferentes formas de funcionamiento de los conocimientos determinan diferentes niveles de control utilizados por un actor en una situación, (p. 316).

Para la acción se tiene una interacción directa con el medio (efectivo o evocado), para la formulación la interacción necesita intercambios de información entre dos sujetos que cooperan en una tarea común donde aparece un saber y para la validación, ella necesita intercambios de afirmaciones sobre el medio y de los saberes enunciados”, (Perrin-Glorian, Hersant, 2003, p. 220).

3.1.4 Las situaciones didácticas en la perspectiva de juego.

En esta perspectiva las situaciones adidácticas aparecen como un juego donde el alumno produce estados del juego (la evolución de la tarea), que son retroalimentados por el medio que representa el sistema antagonista. Estos estados permiten la construcción de nociones personales en los alumnos, los que además adquieren un significado cultural a través de esta actividad.

En términos del juego, las situaciones adidácticas determinan:

- Los juegos del alumno con el medio adidáctico. Estos juegos precisan la función de los conocimientos durante y después del aprendizaje.
- Los juegos del profesor, como agente organizador de las interacciones del alumno con la actividad matemática. Estos juegos definen y dan sentido a los conocimientos producidos por el alumno.

3.1.5 El rol del profesor en la TSD.

En esta teoría, uno de los roles que se espera que cumpla el profesor es observar la interacción didáctica del alumno con su medio. Esto es, detectar en el lenguaje de los alumnos los significados que van construyendo frente a las situaciones planteadas, la manera en que los construyen, las formas de comunicación y validación que utilizan; en lugar de explicar los conceptos previstos o presentar discursivamente los objetos matemáticos en forma ostensiva en un orden estrictamente definido.

Las principales intervenciones del profesor en esta teoría son los procesos de devolución e institucionalización. Con respecto a la devolución Brousseau (2004) precisa:

> El profesor busca poner al alumno en situación adidáctica o pseudoadidáctica (en la que el profesor interviene, pero no exime al alumno la responsabilidad de encontrar una respuesta), de modo que le provoque la interacción, la más independiente y la más fecunda posible. Para esto, él comunica o no, según el caso, informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje, heurísticas, etc. El maestro entonces está implicado en un juego entre el sistema de interacciones del alumno con el problema que él le ha planteado […], (p. 60).

Por otra parte, cabe señalar que

> "el proceso de devolución pone en juego dos tipos de interacciones, las del alumno con el problema y las del alumno con el profesor respecto al problema. El profesor, a través de preguntas en relación con el conocimiento previsto, lleva el proceso de enseñanza de modo de favorecer los aprendizajes", (Olfos, Guzmán, Estrella, 2014, p. 343).

En relación con el proceso de institucionalización, afirma Brousseau, (2004):

> El profesor tiene que constatar lo que los alumnos tenían que hacer (o rehacer) o no, lo que han aprendido o lo que tenían que aprender. Esta actividad es insoslayable: no se puede reducir la enseñanza a la organización de aprendizajes. La toma de conciencia del objeto de conocimiento "oficial", tanto por parte de los alumnos como del profesor, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento es el objeto de la institucionalización, (p. 311).

Para Brousseau (2004), la institucionalización está ligada al contrato didáctico "como el recurso del profesor para definir las relaciones que pueden tener los comportamientos o producciones libres de los alumnos con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico. El profesor interpreta estas producciones y les da un estatus matemático", (p. 92).

Por su parte Hersant (2014), afirma que la TSD modeliza las interacciones de los actores de la relación didáctica a propósito de un saber, apoyándose particularmente en los procesos de devolución e institucionalización en términos de modificaciones del medio, (p. 11).

3.2 La Noción de Medio como Modelo de la Relación Didáctica.

Brousseau (1988) afirma que el medio es un componente interno esencial de la relación didáctica y tiene un carácter integrador en la TSD, atributos que lo convierten en una noción principal en la modelización de la relación didáctica, Brousseau (1986, 1988, 1990a).

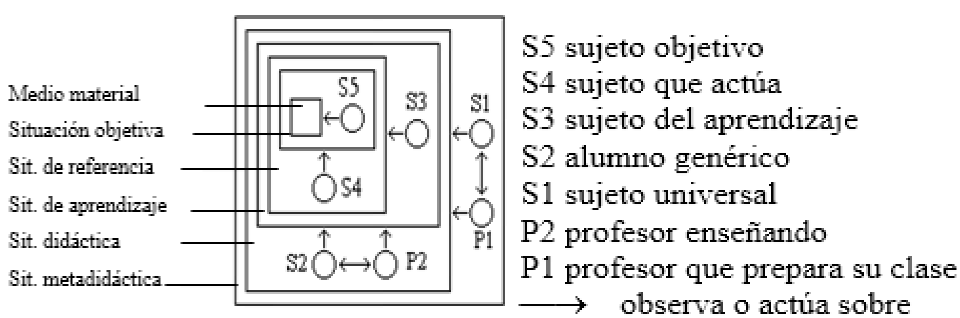
3.2.1 Modelo de la estructuración del medio didáctico.

Brousseau (1986) concibió la Estructuración del Medio Didáctico (EMD) como una herramienta para analizar la interacción didáctica en una clase. Los análisis didácticos realizados mediante esta noción, permiten identificar y describir las distintas posiciones que adoptan los alumnos y el profesor en relación al saber esperado, las posibles interacciones entre ellos con sus respectivos medios y las distintas etapas de la situación (Brousseau 1990, Margolinas 1994, 1995, reportado en Perrin-Glorian y Hersant, 2003, p. 221) en el aprendizaje de un objeto matemático.

En efecto, en el desarrollo de una clase se pueden identificar diferentes tipos de funcionamiento didáctico, los que combinan sistemas interactivos descritos por los roles del profesor y del alumno en sus relaciones recíprocas con respecto al saber. Por ejemplo, se puede observar al profesor haciendo devolución de una situación al alumno; al alumno enfrentando la situación con sus conocimientos personales y estableciendo relaciones con necesidad de comunicarlas a otros o de justificarlas frente a la clase. En cada posición los alumnos se vinculan con medios distintos, que los hacen enfrentar nuevas situaciones adidácticas para aproximarse al aprendizaje esperado. Por su parte, el profesor también adopta posiciones en relación al saber y a su proyecto de clase e interactúa con medios que son propios de su actividad docente.

Brousseau considera para el análisis de una situación didáctica global, niveles en los que se relacionan saberes y conocimientos, del profesor y del alumno. Él sostiene que la evolución de la situación didáctica se describe en términos de interacciones de los alumnos con el medio, Brousseau (1986), citado en Margolinas (1995) y representa esta noción mediante una estructura en capas (en forma de cebolla) en el siguiente esquema:

Figura 33. Esquema del modelo de la Estructuración del Medio.



Fuente: Brousseau, G. 1986.

Este esquema ilustra diferentes niveles de acción y participación – tanto del profesor como del alumno – y la evolución de la situación en la enseñanza –

aprendizaje de una noción matemática. Para Brousseau, en cada nivel el alumno toma distintas posiciones según el tipo de situación que encuentre, situaciones de acción – formulación o validación, las que le permiten interactuar con el medio y por lo tanto modificarlo.

En la figura 38, el esquema de la izquierda y de adentro hacia afuera, Brousseau distingue cinco sujetos distintos, anotados como S_i, con los que el alumno puede identificarse, como: sujeto objetivo (S5), sujeto que actúa (S4), sujeto que aprende (S3), alumno genérico (S2) y sujeto universal (S1). También distingue un medio material y cuatro situaciones en las cuales el alumno puede interactuar con sus medios.

Los roles del profesor y de los alumnos son especificados por Brousseau en los diferentes niveles, (cf. Brousseau 1988, 2004; Margolinas 1995, 2002).

3.2.2 Modificaciones al modelo en capas de Brousseau.

Margolinas propone modificaciones a este modelo que permiten aclarar y precisar – en la evolución del aprendizaje – los roles de los actores de la relación didáctica. En cada nivel Margolinas pone en evidencia la interacción sistémica en relación a la situación; ella designa a los medios como M_n, a las situaciones como S_n, a los alumnos E_n y al profesor como P_n.

Esta investigadora centra su modelo en los sistemas presentes en la situación didáctica (S_0), designando al profesor (P_0), al alumno (E_0) y al medio (M_0). Ella considera en cada nivel situaciones S_n, compuestas por una terna de sistemas de interacción didáctica, (M_n, P_n, E_n), de modo que en cada nivel se cumple que: S_n siempre está contenido en M_{n+1}, puesto que cada S_n evoluciona de un nivel a otro. Así $S_n = M_{n+1}$, esto es, en el nivel -3 se cumple que $S_{-3} = M_{-2}$, Margolinas (1993, p. 252), en concordancia con los niveles del modelo en capas de Brousseau, (Margolinas, Steinbring (1993, p.252); Margolinas (1995).

El modelo de Margolinas se compone de un medio central denominado medio de aprendizaje (M_0), tres medios inferiores, simbolizados por (M_{-3}, M_{-2} y M_{-1}) con los que el alumno interactúa en forma adidáctica y tres medios superiores simbolizados por (M_1, M_2 y M_3) con los que el profesor interactúa. También considera tres fases de interacción: adidáctica, didáctica y sobredidáctica.
La fase adidáctica corresponde a la implementación de la situación didáctica, la que requiere de las interacciones autónomas del alumno con los medios que lo confrontan (en los niveles -3, -2 y -1). La situación se puede modificar según las retroacciones que se produzcan.

La fase didáctica describe la acción del profesor en clases. Se trata de un nivel de institucionalización, que recoge lo esencial del aprendizaje en las interacciones del alumno con los medios y de las acciones (espontáneas) que el profesor pone en juego para hacer frente a las retroacciones de su medio y también aquellas de los alumnos. Esto le permite al profesor reconocer el saber que ha surgido de estas interacciones y por lo tanto institucionalizarlo.

La fase posterior a la situación didáctica – Margolinas – la ha denominado fase sobredidáctica, y corresponde a una instancia de investigación en didáctica de la matemática. En esta fase se concibe la actividad del profesor, los medios, las interacciones y el funcionamiento de las situaciones como objeto de estudio para el didacta.

El modelo plantea la actividad del profesor como una instancia de reflexión sobre la enseñanza, en la que intervienen aspectos ideológicos sobre la enseñanza de la matemática y del sistema educativo, los que influyen en la preparación de su proyecto de enseñanza. La importancia de esta fase radica en la reflexión del profesor, quien toma decisiones en todos los niveles, aprende de su actividad profesional y en consecuencia puede transformar su punto de vista sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

Margolinas se apoya en los trabajos de Brousseau (1990, 1998) y concibe este modelo en forma de matriz, de manera de visualizar el orden de evolución de la situación y las posiciones simétricas de las acciones del profesor y del alumno en relación a la situación didáctica S_0. En este modelo se desarrolla la idea de análisis ascendente y descendente, según se focalice la actividad del profesor o del alumno.

Figura 34. Matriz del modelo de Estructuración del Medio.

Fase sobre didáctica (Reflexión didáctica del profesor)	M_3: M – de construcción	S_3 Situación noosférica		P3: P-noosférico	
	M2: M – de proyecto	S-2 Situación de construcción		P2: P-constructor	
	M1: M – didáctico	S1: Situación de proyecto	E1: E – reflexivo	P1: P-proyector	
Fase didáctica	M0: M - de aprendizaje	S0 Situación didáctica	E0: Alumno	P0: Profesor	
Fase adidáctica: (actividad autónoma del alumno)	M-1: M – de referencia	S-1 Situación aprendizaje	E-1: E – aprendiz	P-1: P-observador	
	M-2: M – objetivo	S-2 Situación de referencia	E-2: E - actuando		
	M-3: M – material	S-3: Situación objetiva	E-3: E – objetivo		

Fuente: Margolinas, M ,1993

En esta matriz se identifican distintos niveles cuyas situaciones S_n relacionan interacciones de los alumnos con sus medios y con el profesor. Así en el nivel -3, la situación objetiva (S_{-3}) se compone de la interacción entre (M_{-3}) y (E_{-3}).
El análisis ascendente del medio caracteriza las interacciones del alumno con el medio adidáctico, partiendo del nivel inferior (-3) hacia la situación didáctica, la flecha azul en la figura 39 indica su sentido.

En este modelo, el análisis de la actividad del alumno se inicia en el nivel de la situación objetiva S_{-3}. Esta situación es planteada por el profesor al alumno mediante la negociación de un contrato didáctico, esperando que el alumno lo acepte como desafío. La situación objetiva S_{-3}, se compone del sujeto objetivo E_{-3} y del medio material M_{-3}, que interactúan a partir de lo que señala el enunciado del problema o la consigna de la situación. En este nivel se produce lo que Brousseau ha denominado "devolución de una situación adidáctica".

En este nivel, el alumno en posición E_{-3} realiza acciones simples, formuladas en el enunciado de la situación y aquellas identificadas y catalogadas como un conocimiento personal, que se caracteriza por tener un valor cultural para una comunidad, (Brousseau, 1988, p. 318). Se supone que el alumno real conoce estas acciones, ya que le son comunicadas en el enunciado de la situación. Se trata, por lo tanto, de procedimientos, de algoritmos, Brousseau (1986), citado en Margolinas (1995, p. 91). También podría ocurrir que los alumnos en posición E_{-3} solo se identifiquen con los sujetos del enunciado, sin necesidad de intervenir en este nivel, Brousseau (2004, p. 327).

En el nivel -2 se presenta la situación llamada de referencia S_{-2}, la que focaliza el conocimiento previsto. Esta situación se compone por el alumno en posición E_{-2}, que actúa sobre M_{-2} el medio objetivo. El alumno en posición E_{-2} toma decisiones sobre cómo poner sus conocimientos al servicio de lo solicitado en la consigna, pero no es capaz de explicitarlos, en particular sus operaciones cognitivas. Generalmente el alumno E_{-2} no ha tomado conciencia de la importancia de sus acciones, pero sí es capaz de mirar la situación objetiva y las relaciones que ella propone a los E_{-3}, a menudo evocados. E_{-2} está en una situación de acción y procede en función de una estrategia no nombrada a menudo personal en el medio objetivo, Brousseau y Centeno (1991), en Margolinas (1995).

El nivel -1 es el de la situación de aprendizaje S_{-1} (en el sentido adidáctico). Esta situación produce relaciones reflexivas del alumno en posición E_{-1}. En sus interacciones con el medio de referencia M_{-1} el alumno E_{-1} se encuentra frente a situaciones de formulación y de prueba.

En 1991 Brousseau y Centeno precisan que la posición de este alumno es la de un sujeto que resuelve un problema en situación adidáctica. El alumno en posición E_{-1} focaliza las acciones de E_{-2} (el mismo si se presenta la ocasión), por ejemplo, para comunicar informaciones sobre la acción o bien para debatir su pertinencia. Él aprende de su acción y mientras está en esta posición es responsable de su aprendizaje, lo que se materializa en las decisiones que toma, en relación al conocimiento, las que no dependen de la intervención del profesor.

En la situación de aprendizaje S_{-1}, el alumno en posición E_{-1} discute sus hallazgos con sus pares, reutilizando las producciones que ha obtenido en posición E_{-2} y también los elementos del medio objetivo.

En este nivel el profesor en posición P_{-1}, interactúa con su medio, compuesto por la interacción del alumno y el medio de referencia $M_{-1.}$ Las intervenciones que P_{-1} realiza en este nivel son las devoluciones.

La situación del nivel cero es la de enseñanza S_0, la que permite la interacción del medio de aprendizaje M_0, el alumno y el profesor en posiciones E_0 y P_0 respectivamente. La situación de enseñanza S_0 es de institucionalización, el medio de aprendizaje M_0 corresponde a los resultados que los alumnos y eventualmente el profesor, produjeron en los niveles anteriores. E_0 consolida su aprendizaje o lo modifica y P_0 institucionaliza, es decir, enseña.

3.2.3 Ejemplo ilustrativo del funcionamiento didáctico del modelo Brousseau – Margolinas.

El funcionamiento didáctico de este modelo permite analizar la estructuración del medio de una de las situaciones adidácticas planteadas en esta investigación.

El objetivo de esta situación es identificar las concepciones sobre aleatoriedad de los alumnos y el lenguaje que utilizan para referirse a ella. Este episodio ocurrió al inicio de nuestro estudio con alumnos de 13 y 14 años (8° básico). Consideraremos una de las cinco situaciones planteadas a los alumnos.

Se proyecta en la pizarra la imagen "La jugada de fútbol".

Figura 35. Imagen, La jugada de Futbol.

Fuente: Elaboración propia.

En los primeros minutos de la clase se pide a los alumnos visualizar la imagen y luego realizar la tarea: "Escribe dos historias que según tú ocurrirán en el instante siguiente. Escribe las historias en el recuadro que aparece en la hoja de respuesta".

En esta tarea se identifica la situación objetiva S_{-3}, que consiste en escribir historias sobre sucesos futuros, relacionados con la jugada de fútbol. El medio material M_{-3} está constituido por la imagen y la hoja de respuesta. El alumno interactúa con el medio a través de los objetos que aparecen en la imagen de acuerdo a las historias que formula (Margolinas y Steinbring 1993; Margolinas 1995, Margolinas 1998).

En este nivel el alumno designado por E_{-3} acepta el problema, el que en este modelo corresponde a la situación objetiva.

Luego se propone la tarea dos, en ella hay un cambio de contrato, la profesora plantea la tarea: "Asigna una posibilidad de ocurrencia a tus historias, según los indicadores dados en la tabla de posibilidades y explica tu decisión".

Tabla 4. Nivel de posibilidades de las historias

Letra	Nivel	Descripción
A	Imposible	La historia nunca sucederá
B	Casi imposible	La historia tiene poca posibilidad de ocurrencia
C	Incierto	No se puede saber con certeza si la historia ocurrirá
D	Muy posible	Es muy posible que ocurra la historia, pero no es absolutamente seguro.
E	Seguro	Seguridad de ocurrencia de la historia.

Esta tarea se sitúa en el nivel -2 y corresponde a la situación S_{-2}, llamada de referencia. El medio objetivo M_{-2} son las historias escritas y los indicadores de la tabla de posibilidades. El alumno está designado por E_{-2}.

E_{-2} interactúa con objetos con los cuales él u otros alumnos, en posición E_{-3} ha(n) logrado una relación de comprensión de la situación objetiva S_{-3}, gracias a sus experiencias en situaciones similares, pero que en términos de incertidumbre no saben especificar ni explicar. En este nivel, el alumno (E_{-2}) está inmerso en una situación de formulación (Perrin-Glorian y Hersant, 2003).

En la tarea siguiente hay un cambio de contrato. Se propone un trabajo en grupo y una tarea, que consiste en que el grupo discuta las diferentes posibilidades de ocurrencia para que perciban la incertidumbre.

A continuación se realiza la puesta en común, la profesora solicita exponer las historias y fundamentar cada una de las posibilidades asignadas.

Las respuestas de los alumnos resultan en términos deterministas o aleatorios, según corresponda a la historia.

Aquí la interacción se sitúa en el nivel -1 y se trata de la situación de aprendizaje (S_{-1}). El medio correspondiente es M_{-1} y está constituido por la terna: (historias – posibilidad de ocurrencia – explicaciones de las producciones).

El aprendizaje esperado consiste en concebir que:

- Se pueden formular muchas y distintas historias y
- Hay incertidumbre en la posibilidad de ocurrencia de ellas.

En este nivel, el profesor colocado en posición P_{-1} observa la actividad matemática del alumno y eventualmente realiza devoluciones para mantener la relación adidáctica del alumno con el medio.

En el nivel (-1) la posición del alumno es de aprendiz (E_{-1}), él busca explicar de manera particular la validez de sus producciones. En la situación de aprendizaje S_{-1}, los alumnos toman decisiones, anticipando los efectos de su acción, pueden obtener conclusiones parciales a partir de sus resultados particulares y describir en forma verbal o escrita los desarrollos de su resolución, lo que les permite una verificación de sus procedimientos, Margolinas (1994, p. 253).
Por su parte, para Perrin-Glorian y Hersant (2003) cuando E_{-1} interpreta las retroacciones del medio, puede prever nuevas acciones en la situación de aprendizaje S_{-1}, y establecer relaciones reflexivas en comparación a las acciones de la situación de referencia S_{-2}, (ibídem). En este nivel E_{-1} participa en una situación de formulación o de validación.

Volviendo al ejemplo, en el nivel (0) el profesor en posición P_0, interpela al alumno E_0 para que reconozca la incertidumbre de las historias formuladas y de las características de los sucesos aleatorios. P_0 pone en juego el proceso de devolución y algunos alumnos explican:

Que en el partido de fútbol hay más probabilidad de que pasen muchas más cosas; en el partido de fútbol puede ser variable (se refiere a las historias): se puede romper la rodilla, se puede tropezar con la pelota, con una champa de pasto". (Méndez y Guzmán, 2016, p. 1157).

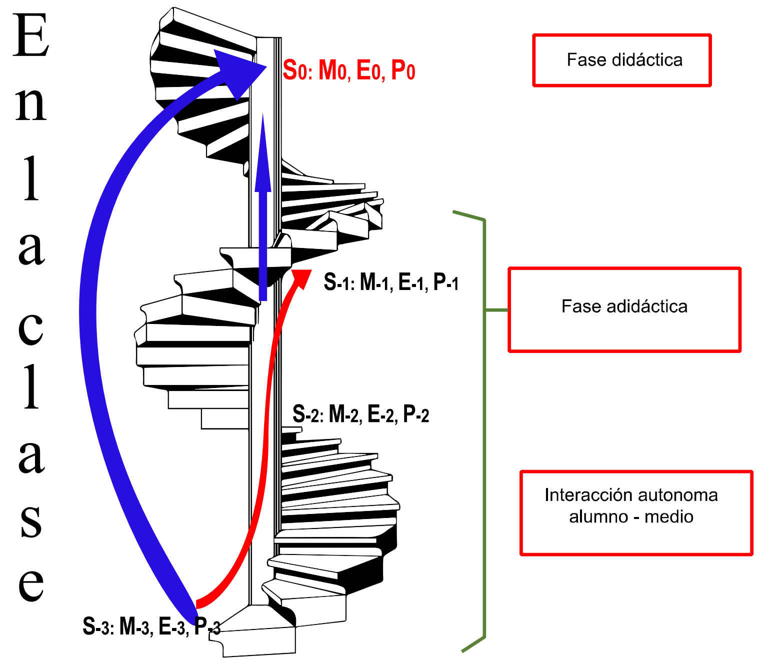
Estas explicaciones, expresadas en el lenguaje de los alumnos, permiten al profesor constatar que reconocen la incertidumbre en la situación y con ello realizar la institucionalización de la clase.

Cuando el alumno enfrenta la situación S_0 está en posición $E_{0.}$ Él explica sus procedimientos de resolución, la forma en que llegó a ellos y las conclusiones que pudo haber obtenido sobre los resultados – ya encontrados en las situaciones anteriores – S_{-3}, S_{-2} y $S_{-1;}$ adaptándose de esta manera al medio. Este nivel requiere que las explicaciones sean matemáticamente aceptables y basadas en los aprendizajes obtenidos en la posición $E_{-1.}$

En síntesis, Margolinas concibe un esquema de tipo matricial que amplía la perspectiva propuesta por Brousseau, sin embargo ninguno de estos esquemas permite apreciar las rupturas de contrato que se producen de un nivel a otro, lo que para esta investigación representa una restricción.

Por esta razón se propone un esquema en espiral, el que representa por una parte la dinámica de la clase y la actividad del profesor enseñando.

Figura 36. Modelo en Espiral de la Estructuración del Medio.



Fuente: Elaboración propia.

En este esquema, la flecha roja curva representa el proceso de aprendizaje del alumno en sus interacciones con el medio. Estas van produciendo rupturas de contrato que afectan el sentido de la situación propuesta de manera natural y espontánea.

La flecha azul curva representa la evolución de la clase y la flecha azul vertical la transición de la fase adidáctica a la didáctica.

En esta espiral, el alumno situado en posición E_{-2}, por ejemplo, puede visualizar lo que ha realizado en posición E_{-3}, pero le sería bastante difícil colocarse en una posición superior, de E_0. Pero cuando adopta la posición E_{-1} se ve reutilizando las acciones que ha realizado en las posiciones anteriores E_{-2} y E_{-3} con el fin de responder a las retroacciones del medio produciendo respuestas. Estas producciones podrían ser consideradas eventualmente por el profesor en la fase didáctica, en los procesos de devolución e institucionalización.

En síntesis, la fase adidáctica está señalada por el corchete rojo y la fase didáctica con letras color rojo. La flecha roja curva del modelo en espiral indica la evolución de la situación, en la fase adidáctica, la flecha azul vertical representa el pasaje de la fase adidáctica a la didáctica y la flecha azul curva, la estructura anidada del modelo de Brousseau, desde la situación objetiva S_{-3} a la situación didáctica S_0.

3.2.4 La actividad del profesor en la estructuración del medio.

En relación a la actividad del profesor, Margolinas sostiene que en cualquiera de las posiciones, el profesor está tensionado por imposiciones que están fuertemente sujetas a lo que estipule la institución escolar, el programa de matemática y las demandas de los alumnos.

Teóricamente en el modelo de Margolinas el análisis de la actividad del profesor es descendente, de modo que parte en el nivel de la situación noosférica (S_{+3}), la que designa las diferentes situaciones que el profesor ha encontrado en la noosfera, es decir en sus estudios y reflexiones, en cursos de perfeccionamiento, en postgrado, en lecturas de artículos de investigación, en programas de estudio, entre otros. De modo que con estos conocimientos, puede construir diferentes medios asociados a ellas.

En este nivel, las situaciones noosféricas, $S+_3$, son aquellas que debieran concebirse para que los alumnos pongan en juego conocimientos intuitivos, no formales, en una actividad matemática personal y también colectiva; los alumnos deberían formular procedimientos, propiedades y comprender el significado del objeto de la enseñanza. No se trata solo de aplicar algoritmos. Estas situaciones están en el repertorio didáctico de expertos, investigadores y eventualmente, algunos profesores disponen de estos conocimientos.

En este nivel (P_{+3}) designa al profesor, quien adopta una concepción personal sobre la enseñanza de la matemática. Piensa, por ejemplo, que enseñar matemáticas no solo consiste en la aplicación de los métodos y reglas sino también que el alumno debe escuchar y ser escuchado, debe expresar y mostrar sus estrategias y comprender lo que aprende, Margolinas y Steinbring (1993). En su interacción con la noosfera el profesor se nutre de las tendencias actuales de la educación matemática, de las orientaciones curriculares, de los acuerdos que se han tomado en reuniones de profesores de matemática y de las expectativas actuales de la sociedad para abordar la enseñanza de esta asignatura.

M_{+3}, el medio de construcción del profesor contempla aquí una propiedad matemática que será objeto de estudio para la enseñanza.

En el nivel +2, $S+_2 = M+_3$, es la situación de construcción que el profesor busca formular para hacer de la interacción didáctica de los alumnos una experiencia de aprendizaje que promueva nuevos comportamientos producto de la interacción del alumno con el medio. Las interacciones con el medio, que el profesor ha concebido, deberían hacer comprender a los alumnos la propiedad o la noción de enseñanza, por ejemplo "los alumnos comprendan que los sucesos aleatorios solo tienen posibilidad de ocurrencia, estos no son sucesos seguros" o que para calcular la probabilidad de un suceso equiprobable es recomendable "tomar en cuenta todas las posibilidades de los diferentes resultados y de entre ellas las posibilidades de los resultados favorables al suceso".

$P+_2$ (P-constructor) debe construir un modo de intervención didáctica apropiado al objeto de enseñanza y a la estrategia didáctica, un juego de aleatoriedad por ejemplo que contenga el significado y las propiedades del objeto de enseñanza. Desde la TSD la actividad del profesor consistiría en la búsqueda de situaciones didácticas o problemas abiertos (designados S_{+2}) para su proyecto de enseñanza; de esta manera el profesor puede bosquejar un pre - diseño de clase.

El medio del profesor $M+_2$ (medio de diseño) incluye los conocimientos del profesor sobre la implementación de la enseñanza. Este medio, al menos está constituido por las situaciones que $P+_2$ conoce en el contexto de la enseñanza planificada.

En el nivel +1 se encuentra el profesor (P_{+1}), preparando el escenario de la clase, en el cual la situación S_{+1} tendrá lugar. Esta es la situación de su proyecto de enseñanza por lo que P_{+1} selecciona y organiza los medios M_{+1} para hacer que los alumnos acepten la consigna de la situación y la validez de las propiedades en juego del objeto de enseñanza.

P_{+1} (P-diseñador) analiza, de antemano (y durante la clase), el impacto de la situación construida, el medio M_{+1} (milieu didactique) con el que interactúa el profesor es aquel de las eventuales reacciones de los alumnos, que prevé para la situación S_{+1} o bien el que ha observado en situaciones que el estima similares,

O aquellas que conoce mediante informes hechos por otros profesores o expertos.

En el nivel cero tiene lugar la clase. P_0 desarrolla la situación didáctica S_0 y puede modificar algunos aspectos no previstos en la planificación, que surgen en la interacción del alumno con el medio adidáctico. Finalmente logrado su objetivo, P_0 institucionaliza el saber construido en clases. La interacción de P_0 con su medio M_0 se caracteriza por la institucionalización de saberes.

Por ejemplo, en la situación “La jugada de fútbol”, los alumnos constatan que ninguna de las historias es segura y que ellas representan resultados que podrían suceder en el futuro. Se ha producido el objetivo del aprendizaje y tanto los alumnos como el profesor toman conciencia de la incertidumbre de la situación planteada. El profesor se encuentra preparado para institucionalizar el saber construido en la clase, el que debería considerar el reconocimiento de la incertidumbre en las historias formuladas; cada historia es un resultado posible entre muchos otros que podrían ocurrir y de aquel que efectivamente ocurriría, pero sobre el cual no tendríamos conocimiento previo.

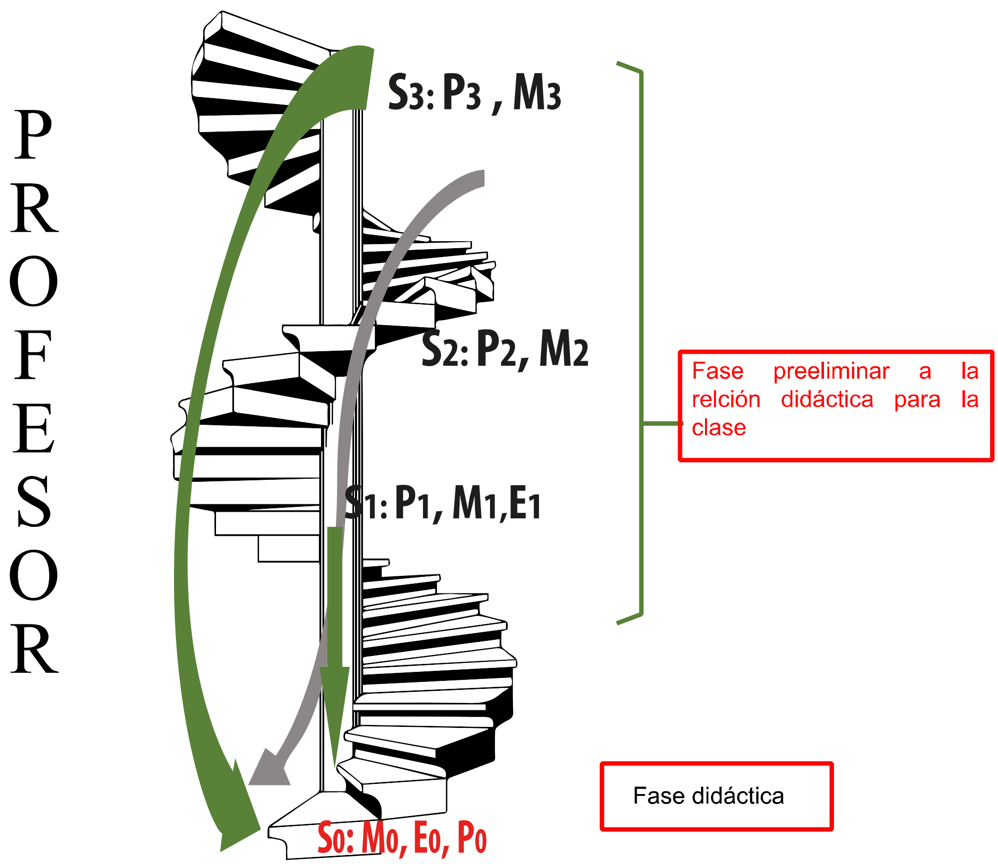
El carácter reflexivo de la actividad del profesor, las tensiones a las que está sometido y la incertidumbre que producen sus decisiones, pueden colocarlo en diferentes posiciones durante el tiempo didáctico de una clase. En efecto, el profesor en posición P_0 toma decisiones en relación a las producciones de los alumnos y si se coloca en posición (P_{+1}) puede modificar parte de la secuencia.

En posición P_{+3} puede transformar su manera de concebir la enseñanza de un objeto matemático, situándose en posición P_{+2}. Estas posiciones le permiten al profesor reflexionar sobre sus proyectos de clases en posición P_{+1}, adaptándose a estas nuevas formas de concebir la enseñanza de la matemática escolar, y a cambiar el tipo de explicaciones que dará en clases, en posición P_0 y su manera de interpretar el trabajo de los alumnos en posición P_{-1}.

Perrin- Glorian y Hersant (2003, p.221, 222) consideran que este modelo es una herramienta que se pone al servicio del análisis a priori y a posteriori de las componentes de una situación, tomando en cuenta la relación que se establece entre el alumno y el medio en el aprendizaje de una noción y examinando la eficacia de la situación de enseñanza (fase didáctica) que es la que interesa en este análisis.

Lo anterior se puede resumir en el siguiente esquema que representa la actividad del profesor previa a la clase:

Figura 37. El Rol del Profesor para una Relación Didáctica



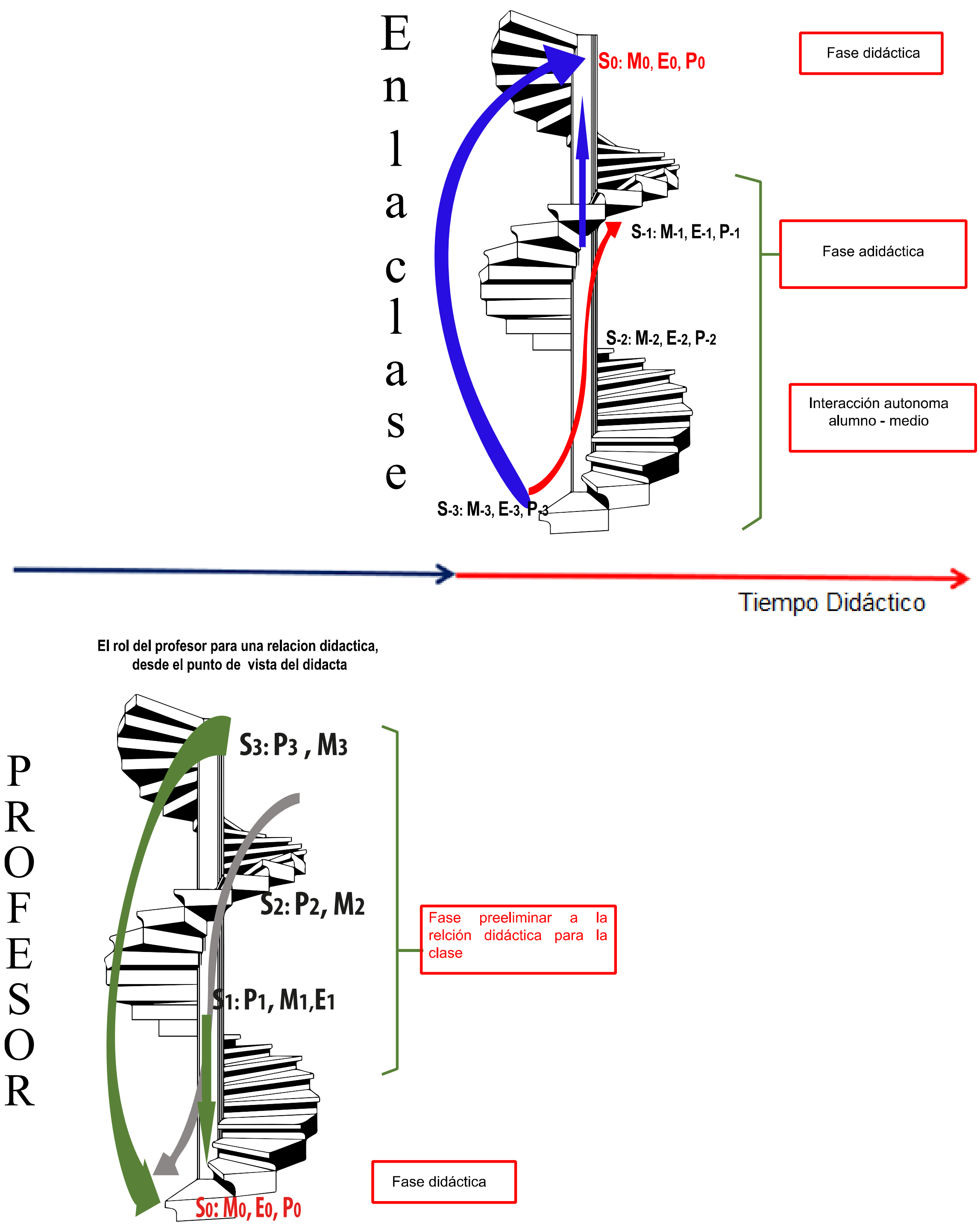
Fuente: Elaboración propia.

En este esquema se indican los distintos niveles de actividad del profesor. La flecha verde curva, representa la actividad descendente desde lo macro – representado por la noosfera – a lo micro caracterizado por la posición del profesor enseñando. Con la línea gris curva se concibe que la reflexión para la enseñanza no es un proceso lineal, de hecho el profesor puede subir y bajar por los niveles para definir la situación y la estrategia óptima al tipo de estudiante y al nivel del curso. La flecha verde, vertical, representa el pasaje de la fase preliminar a la fase didáctica.

En lo macro el profesor está en posición P_{+3}. Al preparar su diseño de enseñanza recurre al saber escolar consignado en el currículo con el fin de tomar decisiones.

Por ejemplo, precisa el tema a enseñar, nivel al que va dirigido, objetivos de aprendizaje a lograr, etc. Luego en posición P_{+2} define una metodología para abordar el tema en cuestión y piensa en los recursos que va a utilizar, con estos elementos y en posición P_{+1} planifica su acción identificando medios y recursos para preparar el escenario; y en lo micro, es decir, en la sala de clases y en posición P_0 presenta, actúa y hace actuar a los alumnos en su diseño didáctico.
Esta estructura ha permitido visualizar la dinámica de los distintos niveles de interacción didáctica, dejando en evidencia las transiciones entre los niveles y posiciones del profesor y los alumnos en estos procesos. A continuación se presenta el modelo de la EMD concebido según un esquema en espiral.

Figura 38. Modelo en espiral de la estructuración del medio



Fuente: Elaboración propia.

La fase adidáctica está separada de la fase preliminar porque trascurren en un tiempo didáctico distinto. En el esquema, la fecha azul horizontal representa el tiempo didáctico de la fase preliminar a la clase y la flecha roja horizontal el tiempo didáctico de la clase.

La fase didáctica está presente en ambos esquemas, ya que responde al propósito de la enseñanza, desde el punto de vista del análisis ascendente y descendente del medio descrito.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

4.1 Generalidades y Método de la Ingeniería Didáctica

La metodología de investigación es la ingeniería didáctica (ID) (Artigue, 1989) inscrita entre las metodologías cualitativas y en el registro del estudio de casos. La validación de la ID es interna, esto es se basa en la confrontación entre lo establecido en el análisis a priori y los resultados obtenidos del análisis a posteriori, (p. 294), Artigue (1995), afirma también que “Desde la misma fase de concepción comienza el proceso de validación de las situaciones elaboradas”, (p. 44), las que se conciben de acuerdo al marco teórico.

Esta metodología se caracterizada por un esquema experimental basado en la realización didáctica de situaciones en clases concebidas para desarrollar la enseñanza de un objeto matemático. Desde este paradigma las fases del modelo son: estudios preliminares, diseño de las situaciones y análisis a priori, experimentación, análisis a posteriori, validación y conclusiones.

Artigue sostiene que el análisis a priori ha de concebirse como un análisis de control de significados. Su objetivo es determinar cómo influye la organización del medio didáctico en el control de los comportamientos de los alumnos y de los significados que estos les atribuyen en las respuestas que elaboran. Esta fase de la metodología pone en evidencia el conjunto de hipótesis concebidas para el estudio.

Esta investigación se ha centrado en la noción de probabilidad en cuanto objeto de enseñanza en la educación básica. El funcionamiento didáctico de este objeto en el sistema escolar ha sido motivo de estudio en investigaciones afines (capítulo 2).

4.2 El Diseño Metodológico de la Ingeniería Didáctica

Para el diseño metodológico se considern las siguientes fases:
La primera fase referida a estudios preliminares considera lo siguiente: análisis epistemológico del objeto matemático, estudio del currículo y de textos escolares desde la perspectiva del marco teórico de apoyo y antecedentes e investigaciones afines.
Estos estudios han orientado el diseño de situaciones didácticas elaboradas para el segundo ciclo básico (5º a 8º, niños entre 10 y 14 años de edad), del curriculum chileno.

La segunda fase es el diseño de la propuesta la que se compone de cuatro situaciones cuyos objetivos son poner en evidencia:
Las interacciones de los alumnos con un medio adidáctico organizado para describir la evolución de las concepciones intuitivas sobre la noción de probabilidad.
La complejidad del aprendizaje de fenómenos aleatorios, mediante un enfoque de aprendizaje autónomo, inscrito en la TSD.
La ampliación del campo de problemas probabilísticos para poner en juego saberes intuitivos y experiencias reales de los alumnos de educación básica.

La tercera fase se refiere al análisis a priori en el que se describen las situaciones concebidas y su relación con el medio, el cual se ha organizado considerando situaciones adidáctias de manera de predecir según la TSD los resultados esperados.

La cuarta fase es la experimentación, que consiste en la realización en clases de las situaciones, las que fueron video grabadas y analizadas posteriormente, previo al diseño de un protocolo descriptivo.

La quinta fase se refiere al análisis a posteriori, que consiste en describir los resultados obtenidos y organizados en protocolos, posterior a la edición de los videos. Este análisis es un análisis independiente del análisis a priori.

La sexta fase se refiere a la validación de la secuencia, que consiste en la confrontación de los análisis a priori y a posteriori.

4.3 Fase 2: Concepción de la Secuencia Didáctica y Análisis a Priori.

La secuencia está estructurada en 4 situaciones, para las cuales en su concepción hemos considerado las siguientes variables didácticas, de acuerdo con la TSD: un medio adidáctico, el cual es una componente de la situación que incorpora recursos didácticos y las eventuales interacciones entre los actores.

El medio de las situaciones contiene un juego ficticio; imágenes fotográficas; vídeos de competencias deportivas y un juego de dados especiales.
La hipótesis de esta investigación supone que estos recursos permitirían poner en evidencia los conocimientos intuitivos de los alumnos y sus experiencias reales sobre la probabilidad.
En esta parte es importante que la gestión de las situaciones en clases permitan interacciones de los alumnos frente a los recursos proporcionados por el medio.
Por otra parte el diseño de las situaciones y el análisis a priori se ha realizado considerando dos niveles, un nivel descriptivo y en un nivel predictivo complementarios entre sí.

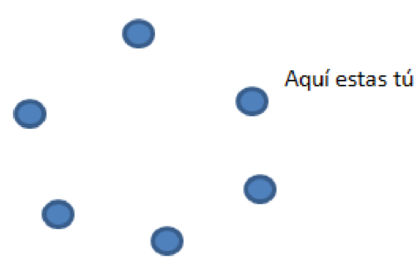
4.4 Fase 3: Análisis A Priori.

4.4.1 Situación uno. El juego Circular.

La primera situación consiste en un juego ficticio en que 6 jugadores se ubican en forma circular, uno de ellos lanza con la mano una pelota a cualquiera de los otros jugadores en forma aleatoria. El juego termina cuando se cae la pelota.
En clases a los alumnos se les propone simular que están jugando, para luego contestar a las tres preguntas que se les presentan en la hoja de respuestas que cada uno recibe.

El juego:
Supón que tú y cinco compañeros juegan a lanzarse la pelota con la mano, ubicados como en el esquema. El juego consiste en mantener la pelota en movimiento, lanzándola de un jugador a otro.

Figura 39. Estructura del juego circular



Fuente: Elaboración propia

Si el juego se ha iniciado:

1. ¿Qué posibilidad hay que el que tiene la pelota te la lance a ti? ¿Por qué? Explica …………………………………………………………………..
2. ¿Crees tú que el que tiene la pelota te la lanzaría a ti?
   Explica …………………………………………………………………..

3. Si la pelota estuviera en juego 13 veces sin caer, ¿cuántas veces crees que te la lanzarían a ti?

   Explica ………………………………………………………………………

El medio en esta situación está constituido por el esquema del juego, sus reglas y la hoja con las preguntas.
El objetivo de la situación es colocar a los alumnos en una situación de incertidumbre de modo que surjan sus experiencias reales y concepciones intuitivas sobre noción de aleatoriedad.

Para ello se propone a los alumnos responder las preguntas en forma individual y se espera que este medio les permita poner en juego significados personales sobre la aleatoriedad.

Lo predictivo para la pegunta 1.

Se espera tener respuestas del tipo:
Hay cinco posibilidades que me la lancen, porque hay 5 jugadores más.
Hay la misma probabilidad que me la lance a mí como a cualquiera de los otros jugadores".
De modo que la aleatoriedad aparezca en ellas y la expresen cuantificando la posibilidad de ocurrencia sea numéricamente o en forma cualitativa.

Además se prevé que en 5º y 6º básico las respuestas contengan menos cuantificaciones que los niveles de 7º y 8º.

A juicio de Azcarate et al. (1998), Moreno, Cardeñoso (2014) "estas expresiones se aproximan a la concepción de equiprobabilidad del suceso porque, según estos autores, ellas evidencian el reconocimiento de la aleatoriedad en el fenómeno". Este reparto equitativo se da solo en un tipo particular de sucesos y pocas veces en fenómenos aleatorios de la vida cotidiana, cuestión observada por Bernoulli en el año 1753.

Otra respuesta prevista:

No sé, porque el juego no tiene un orden establecido y el jugador que tiene la pelota se la puede tirar a cualquiera.

Esta respuesta claramente manifiesta una concepción intuitiva de aleatoriedad.

Para la pregunta dos, se espera tener respuestas del tipo:

Me la puede lanzar a mí porque …, con una explicación que no contiene incertidumbre.

Estas respuestas podrían dar origen a suposiciones relacionadas con la certeza de la ocurrencia del suceso. Por ejemplo: “Sí, me la va a tirar porque le hago señas y me la tira”.

Estas respuestas coinciden con los hallazgos de Kanheman y Tversky sobre la conducta humana, la que tiende a reducir la incertidumbre de un suceso al suponer que su desarrollo depende de variables que no han sido definidas.

Por otro lado estas respuestas tienen la forma del condicional siguiente: “si me mira entonces seguro que me la lanza a mí”; “si está junto a mí no es posible que me la lance a mí”; “si está frente a mí seguro que me la lanza”.

Esta forma de responder ha sido analizada por Azcarate et al. (1998), Moreno, Cardeñoso (2014), quienes sostienen que en estas justificaciones subyacen trazas de pensamiento determinista, por la forma proposicional que ellas adoptan. Estas suposiciones subjetivas son externas al juego y no permiten reconocer la incertidumbre, lo que ratifica que los alumnos dan explicaciones que se podrían situar en el plano determinista.

Otra respuesta prevista:

No lo puedo saber porque … (la explicación contiene incertidumbre).

- el juego no tiene un orden establecido.
- el jugador que tiene la pelota se la puede lanzar a cualquiera.

En este caso se constataría claramente el reconocimiento intuitivo de la incertidumbre.

Como la pregunta 3 tiene datos numéricos, los alumnos podrían dividirlos. Por ejemplo "13: 6 = 2 y sobra 1, y podrán responder;" creo que me la lanzarían 2 o tres veces".

Otra respuesta prevista: "Unas cuatro o cinco veces, porque se la pido…".

Esta respuesta podría estar indicando la creencia de poder controlar el desarrollo del juego, pidiendo la pelota.

En respuestas de este tipo los niños interpretan el juego y suponen reglas que determinan la cantidad de veces que recibirían la pelota. Estos supuestos son subjetivos y no les permite reconocer que el juego es aleatorio por lo tanto los niños no reconocen en este juego la incertidumbre, lo que podría constituir, más adelante, un obstáculo para la comprensión de la probabilidad.

Por el contrario, otras respuestas previstas del tipo:

"El juego es a la suerte"; "pueden ser muchas, pocas o ninguna"

"El juego no tiene orden" o "No se puede saber lo que ocurrirá en el futuro".

Podrían estar relacionadas con una concepción de la influencia de múltiples variables en este juego que no se pueden anticipar y por lo tanto sus resultados no se pueden predecir, lo que caracteriza a los fenómenos aleatorios.

4.4.2 Situación dos. Proyección de Imágenes.

La segunda situación consiste en la presentación de imágenes fotográficas (proyectadas con data; tres de ellas seleccionadas de la web y otras dos son fotografías de la autora de esta tesis).

El objetivo de esta situación es que la noción de incertidumbre surja como algo impredecible, por lo tanto un suceso aleatorio. Además que se utilicen palabras que indiquen posibilidad de ocurrencia de las historias, como: posible, poco posible, muy posible, imposible, y seguro.

El contrato didáctico para los alumnos consiste en elaborar historias o relatos sobre lo que sucederá instantes después de vista la imagen, asignar una posibilidad de ocurrencia a sus respectivas historias y explicar la decisión.

En esta situación el medio es adidáctico ya que permite a los alumnos en forma autónoma atribuir significado a la incertidumbre de acuerdo a las palabras propuestas (en la hoja) lo que aumenta el vocabulario al elegir de estas palabras aquellas que caracterizan a la incertidumbre.

Las imágenes presentadas son las siguientes:

Imagen 1: La jugada de fútbol

Imagen 2: La niña en la ventana

Imagen 3: La plantación de tomates

Imagen 4: La puesta de sol

Imagen 5: La jugada de básquet

Se solicita a los alumnos las tres tareas siguientes.

Escribe en la tabla que aparece en tu hoja de respuesta, dos historias para cada imagen que según tu opinión ocurrirán en el instante siguiente.

Asigna una posibilidad de ocurrencia según los indicadores de la tabla de posibilidades siguiente:

Letra	Nivel	Descripción
A	Imposible	La historia nunca sucederá
B	Casi imposible	La historia tiene poca posibilidad de ocurrencia
C	Incierto	No se puede saber con certeza si la historia ocurrirá
D	Muy posible	Es muy posible que ocurra la historia, pero no es absolutamente seguro.
E	Seguro	Seguridad de ocurrencia de la historia.

Cuadro 2 – Nivel de posibilidades de las historias

Explica tu decisión.

Lo predictivo.

En esta situación, el contrato didáctico solicita a los alumnos escribir historias sobre acontecimientos futuros frente a imágenes que se les presentan, el medio adidáctico son las imágenes. Se prevé que en las producciones de los alumnos, la noción de aleatoriedad aparecería con estatus paramatemático (de herramienta) y expresada en lenguaje cotidiano e informal, Méndez y Guzmán (2016, p. 1161).

En las tres primeras imágenes se espera que las historias den cuenta de distintos sucesos futuros que podrían ocurrir, que asignen posibilidad de incertidumbre B, C o D, lo que podría indicar que no se puede saber con certeza si la historia ocurrirá; que sus explicaciones pongan en evidencia el reconocimiento de la incertidumbre del suceso ya que existen diferentes factores que pueden afectar su desarrollo.

La consigna para “La jugada de futbol” es ¿Qué sucederá en el instante siguiente de lo que muestra la imagen?

Algunas historias previstas que dan cuenta del reconocimiento de la aleatoriedad son:

El partido termina en ese instante.

El jugador que va de espalda cometa un faul al jugador del medio.

El del medio le quita pelota al más chico y termina el partido.

El más chico se cae y se lesiona.

El más chico le quita la pelota al del medio.

Para estas historias, si los alumnos asignan posibilidad de ocurrencia B, C o D y justifican con la incertidumbre de saber que ocurrirá, se interpretará que ellos reconocen la incertidumbre delo suceso. Si asignan posibilidad de ocurrencia E o A y justifican con la seguridad (o imposibilidad) de ocurrencia del suceso, se interpretará como los alumnos no reconocen la incertidumbre del suceso.

Evidentemente la respuesta: Cualquier otra jugada porque no se puede saber porque en el futbol puede pasar cualquier cosa pone en evidencia el reconocimiento dela aleatoriedad del suceso.

La consigna para la imagen “La plantación de tomates” es: ¿Que le sucederá a estas plantas en tres meses más?

Algunas historias previstas son:

Las plantas pueden morir porque las pisotean.

Se quemaron con la helada matinal.

Las regaron mucho y se pudrieron.

En tres meses las plantas crecen y dan tomates.

Para estas historias, si asignan posibilidad de ocurrencia B, C o D y justifican con la incertidumbre se interpretará el reconocimiento de la incertidumbre. Si asignan posibilidad de ocurrencia E o A y justifican con la seguridad (o imposibilidad) de ocurrencias del suceso, se interpretará el no reconocimiento de la incertidumbre.
Para la imagen "la niña en la ventana", la consigna es: ¿Qué está haciendo la niña en la ventana?

Algunas historias previstas son:
A lo mejor está esperando que la llamen para almorzar.
Está mirando hacia afuera el lindo dìa.
Está esperando a alguien u cualquier otra cosa.
No se puede saber.

Para estas historias, si asignan posibilidad de ocurrencia B, C o D y justifican con incertidumbre, se interpretará que los alumnos reconocen la incertidumbre del suceso. Si asignan posibilidad de ocurrencia E o A y justifican con la seguridad (o imposibilidad) de ocurrencias del suceso, se interpretará como el no reconocimiento de la incertidumbre por parte de los alumnos.

Las historias que han sido clasificadas por los alumnos como B, C o D, podrían indicar una tendencia de ellos a reconocer la aleatoriedad en estos sucesos en el nivel de sus creencias intuitivas. Estas obedecerían a un razonamiento analítico del tipo: la causa "lo que se ve en la imagen" puede dar origen a diferentes resultados, que no se podrían predecir y los alumnos pondrían en evidencia la creencia de que el mismo suceso puede dar origen a resultados diferentes.

Así la noción de aleatoriedad emerge desde la incertidumbre del suceso y se podría expresar, en el lenguaje de los alumnos como "No se puede saber que va a pasar".

De estas historias, las que son concebidas como seguras o imposibles de ocurrir, reflejarían una concepción determinista del suceso y el no reconocimiento de la incertidumbre y por lo tanto de la aleatoriedad del suceso.

Por ejemplo si un alumno escribe, “el niño del medio le quita pelota al más chico y termina el partido”; Los tomates crecerán y estarán listos para cortarlos” “La niña está esperando a su novio que llegará en un rato más”; asigna en cada caso posibilidad E porque estoy seguro que eso ocurrirá, reflejaría una concepción predictiva de un suceso, del cual no hay más información que la imagen, sin embargo estas justificaciones categóricas aseguran la ocurrencia de un suceso, que es aleatorio.

Se espera además que los alumnos 5º y 6º tendrán más dificultad para poner en evidencia en sus historias la incertidumbre de estos sucesos, que asignaran posibilidad de ocurrencia seguro, en forma más frecuente que los alumnos de 7º y 8º y que sus explicaciones serán categóricas, lo que reflejara la creencia de predecir el suceso siguiente.

Para la imagen “La puesta de sol”, la consigna es: ¿Qué sucederá en el horizonte en dos horas más?
Las historias previstas son:
En dos horas más estará de noche.
En dos horas más saldrá la luna y las estrellas.

Asignen posibilidad de ocurrencia E y justifiquen, porque siempre que el sol se esconde en el horizonte, después se hace de noche y sale la luna con las estrellas.

Para la imagen “La jugada de básquet” la consigna es: ¿Qué le pasara a la pelota en el instante siguiente?

Las historias previstas son:
La pelota pasa por la malla y anota un punto.
La pelota cae al suelo y anota un punto.
Asignen posibilidad de ocurrencia E y justifiquen, porque la pelota ya está en el aro y a punto de caer.

El propósito de estas dos imágenes es establecer la diferencia entre los sucesos que se han determinado. Las primeras imágenes permiten escribir varias historias distintas por la incertidumbre del suceso mientras que las dos últimas solo permiten escribir una historia que tiene seguridad de ocurrencia.

4.4.3 Situación tres. Apuestas en Etapas

En esta situación se presentan 2 vídeos de competencias deportivas. El primero es una carrera en el hipódromo en la que 4 jinetes compiten junto a sus caballos y el segundo es una carrera internacional de 4 patinadores.
El curso se organiza en parejas y los alumnos son animados a apostar con el objeto de experimentar la incertidumbre y considerar la apuesta como una herramienta para la toma de decisiones.
La apuesta se ha concebido como una situación de incertidumbre en la que los alumnos deben tomar decisión, considerando que no disponen de información sobre el ranking de los competidores en otras careras. Por lo tanto, en el acto de apostar ellos expresan el grado de creencia en la ocurrencia del resultado de su apuesta, De Finetti, citado en Bernardo (1997, p.4) el que se recoge en la explicación de la apuesta, consignada en la sexta columna de la tarjeta de apuestas, que se muestra más adelante.

En esta situación, subyace el significado subjetivo pues el jugador que apuesta está imposibilitado de saber si ganará o no y entonces abordará la cuestión en términos de una suerte de medida de certeza.

En el diseño de esta situación se ha considerado que los alumnos pueden actualizar la apuesta puesto que ellos ven el desarrollo de la carrera, el que proporciona informaciones válidas para formular hipótesis provisorias y nuevas apuestas, para ello los videos se presentan en etapas, las que se designaran como E_i.

La primera etapa es antes de comenzar la carrera, la segunda durante la carrera, y la tercera hacia el final de esta (pero antes del término).
Batanero (2007) afirma que “la probabilidad subjetiva es el grado de creencia que una persona sostiene sobre la base de su propia experiencia, es la que nos guía en la toma de decisiones”, (p. 8), y podría hacer desarrollar un tipo de razonamiento analítico, basado en el cmportamiento de los datos.

Como la carrera no se define no se materializa una ganancia y por lo tanto no hay ganadores ni perdedores, lo que si hay son sujetos, los alumnos, que evaluarán numéricamente cuanto creer en la veracidad de su apuesta, lo que constituye un argumento para justificar su razonamiento y su apuesta.

En este enfoque de la probabilidad sí es posible que un mismo individuo evalúe de manera diferente la probabilidad de una misma proposición si, en momentos diferentes, dispone de informaciones diferentes.
Es esta propiedad de la probabilidad subjetiva la que se quiere relevar en esta situación.

Para realizar la apuesta, cada pareja tiene $4000 ficticios y en cada etapa de la apuesta cuentan con el dinero ficticio asignado ($4000), pues la competencia no ha terminado. Cada pareja acuerda como apostarán, por ejemplo si repartirán el monto de la apuesta entre varios competidores o si apostaran todo a un solo competidor.

El contrato didáctico solicita apostar al lugar en que llegarán los competidores a la meta. El medio didáctico está formado por los vídeos, los $4000 y una tarjeta para consignar las etapas de las apuestas. La tarjeta se muestra a continuación:

Video 1: Nombre de la Carrera.

Etapas de apuesta	Competidor 1	Competidor 2	Competidor 3	Competidor 4	Explicación de la apuesta
E_1					
E_2					
E_3					

Como muestra el esquema la tarjeta se compone de 3 filas y 5 columnas. En las filas se indican las etapas, desde E1 a E3 y en las columnas se anota cuanto se apuesta a cada competidor. En la columna 5, se pide la explicación de las apuestas.

Esta situación corresponde a una situación de formulación, ya que el objetivo es que los alumnos redacten una explicación sobre las apuestas en cada etapa, poniendo en evidencia la existencia de niveles de creencia.

El propósito de esta situación es relevar la importancia que tiene analizar los datos para tomar decisiones y que una vez tomada una decisión esta se puede modificar en virtud de las tendencias que muestran los datos. El medio para lograrlo es colocar a los alumnos ante la decisión de realizar una apuesta, en etapas.

La Noción de Apuesta

Una apuesta es una forma de juego basada en el azar, en el que al menos hay dos jugadores y queda bien especificado quien apuesta contra quien y lo que ambas partes cobraran al ganar.
Al apostar, se espera obtener algún tipo de beneficio si se gana, pero en contraparte los jugadores deben pactar que es lo que perderán, de lo contrario no existirá la obligación de pagar la apuesta.

Para la palabra apuesta, se han encontrado las siguientes acepciones, las que dan cuenta de su significado:
Ponerse dos o más personas que están haciendo algún pronóstico, una recompensa para aquel de los dos que acierte dicho pronóstico.
Según esta acepción una apuesta es acordar un premio para el que acierte al pronóstico.

Acción y resultado de arriesgar cierta cantidad de dinero en un juego, contienda deportiva, etc., de forma que, si se acierta el resultado, se recibe una cantidad de dinero mucho mayor.

Apostar con otra persona que algo es cierto o es falso.

Esta apuesta se da cuando dos personas tienen puntos de vista contrapuestos respecto a los cuales cuentan con mucha confianza. Estos apostadores desearían demostrar a su contendor su certeza sobre el tema en cuestión. En este caso se pacta apostando de palabra, lo cual viene a demostrar el sentido lúdico de la apuesta, por sobre el beneficio económico.

Lo concreto que se apuesta.

Depositar la confianza en una persona, idea o iniciativa que entraña cierto riesgo.

En http://es.thefreedictionary.com/apuesta. Revisado el 31 de Julio del 2017, ‘apuesta’ (aˈpwesta) es un sustantivo femenino, que indica:

1. La acción de apostar.
2. Dinero o capital que se arriesga en un juego de azar
3. Confianza en alguien o algo que implica riesgo.

Como verbo, ‘apostar’ tiene lugar en frases como: “apostaría cualquier cosa a que … (no viene, llueve, gana tal candidato, etc.)”
También en circunstancias en que una persona deposita su confianza en otra o en una actividad o en una iniciativa que supone algún riesgo.

De regreso en la situación de las apuestas, se aprecia que se originan apuestas de alto riesgo, de mediano, bajo y sin riesgo.
Interesa aquí identificar las decisiones que toman los alumnos, frente a las nuevas informaciones del desarrollo de la carrera, considerada como una situación de incertidumbre y poner en evidencia la probabilidad personal, frente al suceso, materializado en las apuestas.
Para ello se clasifica la respuesta de acuerdo al riesgo que toma el que apuesta.

El significado de la noción de probabilidad que se plantea pesquisar en las respuestas de los alumnos es el subjetivo, por lo tanto se estará atento a identificar, cuáles de los axiomas especificados más abajo emergen en sus explicaciones.

Los axiomas son los de la teoría axiomática de probabilidad, es decir:

$(A \cup B) = (A)+(B)$, A y B eventos mutuamente excluyentes

$(A) = 0$, representa la certeza de que el evento A no ocurrirá

$(A) = 1$, representa la certeza de que el evento A si ocurrirá.

$0 < (A) < 1$, representa el grado de certeza de que el evento A ocurrirá.

De Finetti (2002/1931, p. 179),

https://revistafilosofia.uchile.cl/index.php/RDF/issue/view/4455. Visitado 16 de enero 2018.

También se recoge información sobre el comportamiento de los alumnos, su aversión o predilección, frente el riesgo.

Lo predictivo

Se prevé que al apostar los niños se mantendrán en una zona de confort, evitando arriesgar una perdida.
Se espera que las apuestas reflejen decisiones con alto riesgo, mediano riesgo, bajo riesgo y sin riesgo.

Una apuesta es de alto riesgo si se apuesta a un solo competidor, es de mediano riesgo si la apuesta se distribuye en dos competidores, es de bajo riesgo si se apuesta a tres competidores y es sin riesgo si se apuesta a todos los competidores en forma equitativa o con preferencia a algún(os) competidor(es).

Al respecto se prevé que frente a las apuestas realizadas los alumnos den explicaciones del tipo siguiente:

Apuesta de alto riesgo:
Le apostamos todo a este competidor porque nos da confianza.
Porque el traje que usa (o las zapatillas) se ve que es más liviano

Apuesta de mediano riesgo:
Le apostamos a dos competidores porque se ven los mejores
Porque la pista de carrera les favorece.
Porque puede que alguno de ellos gane.

Apuesta de bajo riesgo.
Porque así tenemos más oportunidad de ganar.
Porque uno de ellos va a ganar.

Apuesta sin riesgo equitativa. En relación al riesgo, la apuesta equitativa indicaría la intención de no perder, de no tomar riesgos frente a la incertidumbre ya que generalmente en apuestas relacionadas con el juego en una apuesta de alto riesgo, se pierde.

En este tipo de apuesta, cada competidor tendría la misma posibilidad de ganar (como si fuera un dado de 4 caras), lo que corresponde a un pensamiento probabilístico Laplaciano.
Las explicaciones previstas son:
Porque uno de ellos seguro que gana.
Para no perder todo y seguir apostando.
Apostamos a todos porque no sabemos cuál va a ganar.
Apuesta sin riesgo con preferencia a un(os) competidor(es)
Apostamos más a los competidores C1 y C2 porque pensamos que uno de ellos gana y a los otros le apostamos menos por si los otros no ganan.
Apostamos más a C1 porque nos gusta a los dos y a los otros competidores apostamos menos por si acaso C1 no gana.

Se ha previsto que al actualizar las apuestas E2 y E3, las explicaciones evidencien una toma de decisión que provenga de comparar el estado actual del suceso con relación a sus estados anteriores.

En las actualizaciones de cada tipo de apuesta, se prevén las siguientes explicaciones:

Actualización de puesta de alto riesgo.

Apostamos a un competidor porque va ganando o tomo la delantera o va primero.

Actualización de puesta de mediano riesgo.
Apostamos a dos competidores porque tomaron la delantera y uno de ellos puede o va a ganar.

Actualización de apuesta de bajo riesgo.
Apostamos a tres competidores porque estos son los más seguros que ganen y el otro se quedó muy atrás.
Apostamos a tres competidores porque son los que van más adelante.

Actualización de apuesta sin riesgo equitativa.
Apostamos a todos porque igual no sabemos cuál va a ganar.

Actualización de la apuesta sin riesgo con preferencia a un(os) competidor(es).
Apostamos más a unos competidores porque van más adelante y a los otros menos porque no sabemos qué puede pasar más adelante.

Frente a esta situación, algunos alumnos de 10 y 11 años podrían apostar siguiendo a un fetiche o un amuleto, como el número de la camiseta del competidor o el color del traje, el lugar que ocupa en la pista de competencia u otro aspecto visual. En estos casos el riesgo que toman los alumnos no considera el análisis de la información que aporta el desarrollo de la carrera, en cualquier de sus etapas como tampoco el reconocimiento de la incertidumbre en una situación de apuestas. Luego pondrían en juego un pensamiento determinista en el que la causa es el fetiche y el efecto es que ganará. Estos tipos de respuestas también podrían estar influenciados por la superstición, en concordancia con el tipo de pensamiento que afloro en la etapa previa al inicio del estudio matemático de la probabilidad.

4.4.4 Situación cuatro. Un juego de Dados Espaciales

La situación cuatro se compone de cuatro etapas. Las primeras tres etapas presentan un juego y la cuarta etapa corresponde a un trabajo de análisis y discusión del juego en grupos de cuatro alumnos. Este juego ha sido inspirado en http://leodanp.blogspot.cl/09-2014.

El juego consiste en un partido con cuatro dados diferentes de los ordinarios: uno de color amarillo con todas sus caras marcadas con 3, otro de color rojo con tres caras marcadas con 5 y las otras tres con 1, un dado de color verde con dos caras marcadas con 6 y las cuatro restantes marcadas con 2 y un dado azul con dos caras marcadas con 0 y las otras cuatro caras marcadas con 4.

Se juega en parejas, en cada etapa se juega un partido por set (como en el tenis); cada set consta de diez juegos y cada juego de dos lanzamientos, uno por cada jugador; según el número de parejas, en cada mesa hay cuatro dados.

Modalidad del juego.

Cada jugador “A y B” elige un dado (para todo el set), A lanza el dado y anota la jugada en una cartilla, luego lanza B y anota su resultado al lado del de A y así sucesivamente hasta terminar un set. Gana el juego el que tiene el número mayor. Para ganar un set hay que ganar más juegos y gana el partido el que gana más set. Cada vez que se juega un set, se puede convenir cambiar el dado.

El propósito de la situación es aproximarse a la probabilidad clásica a través de significados intuitivos eventuales que emerjan sobre la regla de Laplace.

Esta situación es adidáctica y se espera que quede en evidencia, según el contrato didáctico, las fases de acción, comunicación y validación. El medio en esta situación se compone de los dados, el juego mismo y las cartillas de juego.

En la primera etapa las parejas eligen un dado cada uno(a) y juegan 6 sets. El propósito de esta etapa es que los alumnos aprendan las reglas del juego y a elegir el dado. En la segunda etapa los alumnos juegan 4 sets y el objetivo es que formulen estrategias para ganar. En la tercera etapa utilizan las estrategias encontradas y explican en la puesta en común porque ganaron o perdieron. En la cuarta etapa se propone a los alumnos calcular la probabilidad de ganar con su dado.

Lo predictivo.

En la primera etapa del partido puede suceder que los niños más jóvenes elijan el dado de acuerdo al color preferido, en cambio los alumnos más grandes podrían elegir dados fijándose en los números de las caras. Otra decisión podría ser elegir los dados al azar.

En esta primera etapa podrían emerger las primeras estrategias para ganar.

En la segunda etapa a los alumnos se les propone formular estrategias para ganar. Por ejemplo una estrategia podría ser:

Elegir el dado ganador en el set anterior.

Elegir el dado que tengan al 6 en algunas de sus caras.

Elegir el dado que tiene más veces un número mayor (4, 5 o 6) en sus caras.

En la tercera etapa se espera que los alumnos justifiquen sus posibilidades de ganar o perder.

Se prevén justificaciones con argumentos del tipo:

Me gano porque tiene buena suerte.

Yo gane porque elegí el dado verde y mi compañero eligió el dado azul. Le gane porque el verde me salió el 6 varias veces y después me salió el dos y a él le salía casi siempre el 0.

Yo gane porque elegí el dado verde y mi compañero eligió el dado azul. Le gane porque el 6 tiene 12 posibilidades de ganar y el dos tiene 8podibildades de ganar. En total, con el dado verde, hay 20 posibilidades de ganarle al dado azul. Yo le gane porque elegí el rojo y a él le salió a la suerte el amarillo. A mi me salió más veces el 5 así es que le gane porque e él siempre le salía el 3. Pero también pude haber perdido porque si me salía más veces el 1 yo hubiera perdido.
Así, jugando, los niños se dan cuenta de que un dado tiene más, menos o igual posibilidad de ganarle a otro.

En la etapa cuatro se ha previsto un trabajo en grupos de cuatro alumnos sobre las distintas posibilidades de ganar, según el contrato didáctico se decidirá si se argumenta en forma verbal, escrita o mediante diagramas. El medio es una hoja con tres tareas, en la primera se pide argumentar cuál es el mejor dado para ganar.

Por ejemplo se esperan argumentaciones del tipo:
El mejor dado para ganar es el amarillo. Porque si mi compañero juega con el verde entonces yo tengo más posibilidades de ganarle. Sí, a mí siempre me va a salir tres y él tiene más posibilidades que le salga dos. Entonces yo gano. El que juega con el dado amarillo tiene más posibilidad de ganar al que juega con el dado verde.
El mejor dado para ganar es el verde. Porque si un compañero A elige el dado verde y otro compañero B el dado azul entonces A tiene más posibilidad de ganar porque si en el dado verde sale 6, le gana completamente al dado azul pero además también gana A cuando al verde le sale 2 y al azul le sale el 0".

La segunda tarea es determinar cuántas posibilidades más tiene un dado de ganar frente a otro dado. Se plantea la pregunta: si el mejor dado para ganar es el verde ¿cuantas posibilidades más tiene frente al dado rojo?

Aquí se espera que las respuestas surjan de los resultados obtenidos en las jugadas, de la elaboración de deducciones lógicas para ganar, de esquemas que representen jugadas ganadoras o de los casos posibles del juego.

Por ejemplo:

El dado verde gana 10 al rojo y el rojo gana 5 veces al verde.

Por cada una vez que el dado rojo le gana al verde, el dado verde le gana dos veces.

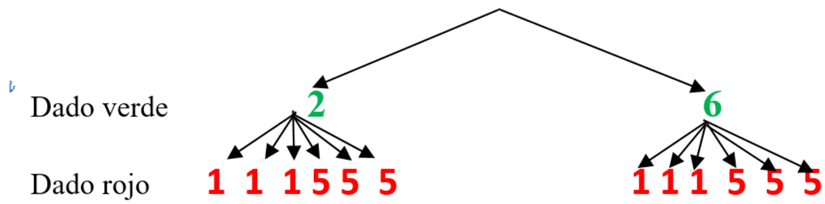
El dado verde tiene el doble de posibilidad de ganar al dado rojo.

En la tercera tarea se solicita a los alumnos inventar una forma de representar todas las jugadas con dos dados, por ejemplo el rojo y el verde. Se espera que los alumnos digan, escriban y o representen argumentaciones en forma de esquemas (diagrama de árbol o en una tabla de doble entrada).

Se preve una argumenación, como la siguiente: “cuando juega el dado verde con el rojo, el primero tiene 24 posibilidades de ganar. Porque con los dos 6 del dado verde hay 12 posibilidades da ganar al dado rojo. Por otra parte las 4 caras marcadas con dos, en el dado verde determinan, por si solas, 12 posibilidades más de ganar al dado rojo, sumando, el dado verde tiene 24 posibilidades de ganar al rojo y el rojo solo 12 posibilidades de ganar al verde. Así la posibilidad de ganar del dado verde es el doble que la del dado rojo.

Esta respuesta, que es posible encontrar de parte de los alumnos, se puede representar en el siguente diagrama de árbol. es la siguiente:

Figura 40. Diagrama de árbol Resultados posibles, al jugar con el dado verde y el dado rojo.



Fuente propia.

Este esquema prepara a los alumnos para la representación en árbol en el estudio de los casos posibles de un evento, como el caso del lanzamiento de dos dados.

Por otra parte, el esquema de tabla, como la siguiente, esquematiza todos los resultados obtenidos con el lanzamiento de los dos dados y ella permite visualizar las posibilidades de ganar de uno de los dados.

En el caso particular, de la actividad, se constata que es el dado verde el ganador.

Tabla 5 Resultados posibles con el dado rojo y el verde

rojo \ verde	2	2	2	2	6	6
1	V	V	V	V	V	V
1	V	V	V	V	V	V
1	V	V	V	V	V	V
5	R	R	R	R	V	V
5	R	R	R	R	V	V
5	R	R	R	R	V	V

Sobre la validación de las situaciones.

Para la validación de las situaciones diseñadas se realizaron los siguientes procedimientos

Las situaciones: “El juego Cicular”, “Proyección de Imágenes” y “Las apuestas” fueron objeto de una experiencia exploratoria, en un 7º y en un 8º básico, de un Liceo Municipal de Molina un año antes de realizar el estudio definitivo.

Con la situación “El juego circular”, también se realizó una experiencia explratoria en 5º y 6º básico, de una escuela municipal, de Curicó.

Ambas experiencias contribuyeron a precisar las consignas, prever posibles respuestas y sondear el pensamiento de los alumnos ante la incertidumbre.

Por otra parte, esta misma, ‘El juego circular’, fue analizada y discutida en una sesión del curso resolución de problemas, del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, Santiago. dirigdo por la Dra. Guzmán a los doctorando cohorte 2014.

Esta misma situación fue presentada como ponencia en XVIII Jonadas Nacionales de Educación Matemática, congreso que realizará SOCHIEM el año 2014, Actas XVIII JNEM (2014, p. 241).

En el caso de la situación dos, los resultados obtenidos con la imagen “La jugada de futbol” , dieron origen a la publcación, titulada: Aproximación Intuitiva a la Aleatoriedad, el caso de Alumnos de 13 y 14 años de un Liceo Municipal. Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol 30 nº 56. *versão On-line* ISSN 1980-4415.

La misma situación fue objeto de una ponencia en XIX Jornada de Educción Matemática, 2015, Actas XIX JNEM (2015, p. 530).

El juego de dados fue explorado con estudiantes de dos universidades, una en Santiago y la otra en Curicó, en cursos de pregrado. Esta experinecia permitio observar en un nivel cognitivo mayor las fases adidácticas de la situación, precisar las instrucciones para cada fase e identificar algunos aspectos a observar en la experimentación definitiva.

4.5 Fase 4: Experimentación.

El diseño de la experimentación se basa la epistemología genética, teoría piagetana del desarrollo del conocimiento en el niño, la que intenta encontrar explicaciones del desarrollo de la inteligencia como un proceso continuo de adaptación al medio, según ciertas fases.
En la experimentación se utiliza este método en el sentido de plantear las situaciones diseñadas en los niveles de enseñanza considerados, a objeto de describir lo que los niños en sus diferentes etapas de desarrollo son capaces de proponer y de hacer al enfrentarse a las situaciones de incertidumbre y probabilidad.

Una condición que impone esta teoría, y que se ha procurado conservar, es que la formulación de las situaciones debe ser suficientemente simple como para ser comprendida por niños en edad escolar y, al mismo tiempo, ser capaz de atrapar el problema epistemológico que encierra la noción de probabilidad e incertidumbre.
Por ejemplo, para indagar problemáticas relacionadas con la incertidumbre en contextos cotidianos, se han propuesto a los alumnos realizar predicciones (historias) sobre lo que sucederá un instante después de lo que muestra una imagen, la que contiene o no incertidumbre.

En la gestión de la clase se han considerado momentos de puesta en común en el desarrollo de las situaciones. Estas instancias pretenden explorar el conocimiento que va emergiendo en la interacción de los alumnos con el medio propuesto, en términos de los objetivos de esta tesis.

4.5.1 Modelo de gestión de la clase.

La gestión de la clase está estructurada en base a la actividad de los alumnos, en relación a ella se ha previsto un trabajo autónomo, luego un trabajo colectivo sin intervención del profesor, la puesta en común animada por el profesor donde tendrá lugar el proceso de devolución.

En este modelo de gestión consideramos relevante que los alumnos pongan en juego su intuición y sus experiencias reales sobre probabilidad para que estas les permitan transitar de lo intuitivo a lo formal. Y de esta manera logren aproximarse y comprender la noción de probabilidad.

En el momento de la puesta en común, surge el modelo del debate (como la metodología del profesor), animado por el profesor y caracterizado por argumentaciones, y contra argumentaciones de los alumnos. El tiempo del debate está previsto por el profesor y con sus intervenciones, se desarrolla el proceso de devolución.

En esta instancia puede haber rupturas de contratos que hagan modificar el medio o cambios en el medio que produzcan cambios en el contrato.

La relación didáctica debe mantenerse, por ello el profesor es responsable de la articulación entre el contrato y el medio didáctico.

4.5.2 La muestra.

La muestra está formada por alumnos de 5º, 6º y 8º básico de una escuela municipal de Curicó y un curso de 7º básico de un liceo municipal de Molina.

Es una muestra intencionada cuya selección responde al criterio de accesibilidad al campo de investigación.

En ambos establecimientos, una escuela municipal de Curicó y un Liceo Bicentenario de Molina, la investigadora había establecido relaciones profesionales con profesores y directivos, los que permiteron acordar con la dirección, de cada establecimiento, el ingreso a las clases de matemática y con los profesores la estrategía de la clase y el propósito de las mismas.

La experiencia se realizó en horarios habituales de 90 minutos en 5 clases de matemática, correspondientes a cada curso.
La investigadora realizo las clases con las autorizaciones oficiales de los establecimientos.

El diseño metodológico de la fase de experimentación de esta tesis rompe con el contexto educativo real en el que se desarrollan habitualmente las clases, las que se caracterizan por obedecer al modelo tradicional en que el contrato didáctico coloca al profesor en la posición de exponer el contenido que el alumno debe aprender y validar los resultados que los alumnos obtienen en las tareas propuestas en la clase. De este modo los alumnos están acostumbrados a recibir instrucciones de su profesor, quien dirá lo que se debe aprender y muchas veces exige respetar formas de resolución de un determinado ejercicio.

El contrato didáctico de la secuencia didáctica que se ha experimentado asigna responsabilidades al profesor y a los alumnos, el profesor propone situaciones de desafío que permiten a los alumnos trabajar de manera autónoma para responder a esos desafíos, con la posibilidad de interactuar entre ellos.

En concreto la secuencia didáctica, se aplicó a cuatro niveles de educación básica con el objeto de identificar los razonamientos emergentes, de los alumnos participantes, sobre la noción de probabilidad y posteriormente estudiar la evolución de los razonamientos en los diferentes niveles involucrados.

Se espera encontrar en los análisis de las interacciones didácticas en clases, que las respuestas relacionen las intuiciones probabilísticas con las experiencias reales de los alumnos, lo que permitiría detectar la evolución del razonamiento de los alumnos.

La tabla 6 consigna las edades de los alumnos, en distintos niveles considerados.

Tabla 6 Nivel de escolaridad de alumnos de 10 a 14 años, en Chile

Rango de edad	Curso	Nª alumnos por curso
10 a 11 años	Quinto básico	23
11 a 12 años	Sexto básico	20
12 a 13 años	Séptimo básico	30
13 a a14 años	Octavo básico	25

El quinto, sexto y octavo básico son cursos de una escuela de solo varones. El quinto básico se compone de 23 alumnos, el sexto básico tiene 20 alumnos pero en algunas clases solo participaron 16 alumnos, el octavo es un curso de 25 alumnos y en algunas clases participaron menos alumnos.

El séptimo básico es un curso de un liceo municipal mixto y tiene 31 alumnos pero en algunas clases participaron 30 alumnos.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y ANÁLISIS A POSTERIORI. CONFRONTACIÓN DE ANÁLISIS A PRIORI Y A POSTERIORI

5.1 Resultados y Análisis a Posteriori

La secuencia didáctica se implementó en los niveles de 5º a 8º básico de dos escuelas municipales de la provincia de Curicó.

La clase 1 consta de dos situaciones.
La situación 1 corresponde a un juego ficticio en la que se solicita a los alumnos elaborar predicciones en relación con la incertidumbre, a través de tres preguntas.

La situación 2 solicita escribir historias sobre acontecimientos futuros frente a imágenes proyectadas en la pizarra.
En la clase dos el profesor retoma la situación 2 y la completa con la institucionalización de la noción de aleatoriedad.

En la clase 3 se desarrolló la situación 3, la que propuso a los alumnos realizar apuestas sobre competencias deportivas proyectadas desde videos (bajados de la web).

La situación 4 propuso un juego de dados especiales para jugar en parejas. Esta situación se desarrolló en las clases 4 y 5, en cada nivel.
En la descripción de las clases utilizaremos P para indicar las intervenciones del profesor investigador y Ai, para las intervenciones de los alumnos.

5.1.1 Experimentación de la situación 1. El juego Circular.

En el inicio de la experimentación la profesora explica las reglas del juego circular, entrega una hoja a cada alumno y lee tres preguntas que les propone responder. Para esta situación el tiempo didáctico fue aproximadamente 12 minutos.

Al final del trabajo de los alumnos, la profesora organiza una puesta en común en la que solamente algunos alumnos leen sus respuestas y P solicita justificarlas. El tiempo didáctico fue de 10 minutos.

Análisis a posteriori

Los resultados obtenidos en la experimentación se han resumido en tablas de datos como la siguiente.

Tabla 7. Respuestas 1 y 2, situación el juego circular

Pregunta	Responde con Incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Otros
Nº 1			
Nº 2			

Para las preguntas 1 y 2, la tabla consta de cuatro columnas, en la primera aparece el número de la pregunta, en la segunda el número de respuestas con incertidumbre, en la tercera las respuestas sin incertidumbre y en la cuarta columna se consignan número de respuestas sin clasificar.

5.1.1.1 El juego circular en 5º básico.

Para las preguntas 1 y 2 se han identificado respuestas con incertidumbre, sin incertidumbre y otras respuestas, consignadas en la tabla 8.

Tabla 8. Clasificación respuestas 1 y 2, juego circular

Preg.	Responde cn Incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Otros
Nº 1	8	11	1
Nº 2	6	12	2

Pregunta Uno: Ejemplos de respuestas con incertidumbre.

A5: "Yo no creo que em lancen la pelota porque soy lento, tengo un dolor en la espalda y quizás me salga un fail al tirar la peota porque la puedo tirar muy fuerte o muy despacio".

A8: "Puede ser que me la tire a mi o puede ser que no porque no se puede saber a quién se lo tira"

A13: "Sería mucha posibilidad porque el jugador esta por lanzarte la pelota pero también podría ser poca, porque puede cambiar de opinión y pueda lanzarla a otro jugador.

Los vocablos "no creo que …", "Puede ser que si (no) …", "mucha posibilidad" indican que este tipo de respuestas contienen incertidumbre, las que reflejarían concepciones intuitivas de aleatoriedad.

Ejemplos de respuestas sin incertidumbre.

A2: “el 25% porque va de un jugador en otro jugador”. A7: “Seguro que me la lanza porque es mi amigo A18: “Si porque le diria que me tire la pelota y que el que tiene la pelota me quisiera quemar y yo pierda. A11: “dos veces porque se está en circulo se cuenta hasta el 13”

Los argumentos categóricos corresponden a respuestas que no contienen incertidumbre y por lo tanto evidencian que no concebirían la aleatoriedad del juego.

Un niño A3, no responde.

Pregunta dos: Ejemplos donde las respuestas contienen incertidumbre.

A8: “No porque talves me la tire talves no”. A13: “No creo demasiado porque otro podría pedírsela y se la lanza al que la pidió y

Los vocablos “tal vez si …”, “no sé … talvez ..”, “… se la puede …” evidencian incertidumbre en las respuestas y el reconocimiento de la aleatoriedad en el juego.

Ejemplos de respuestas sin incertidumbre.

A2: “Si porque va por turno y dando la vuelta”. A19: “Sí, porque no tengo a nadie cerca”. A16: “Si porque soy más o menos bueno atrapando la pelota”.

Estas respuestas categóricas corresponden a concepciones no aleatorias del juego.
Se observa que A2, no entendió las reglas del juego, él cree que la pelota va pasando de un compañero a otro en forma circular.

La respuesta "Sí, porque uno le puede dar el pase a cualquiera" es contradictoria, pues contiene una afirmación categórica y un argumento de incertidumbre.
Dos niños, A3 y A17, no responden.

Para la pregunta 3, se han identificado respuestas con incertidumbre, respuestas en las que se operan los datos, otras en las que se predice un valor y respuestas sin clasificar.

La tabla 9 muestra el número de respuestas para cada caso.

Tabla 9 *Clasificación respuesta 3, juego circular 5º básico*

Preg.	Responde cn Incertidumbre	Opera los datos		Predicen un valor	Otras respuestas
		c/inc	s/inc	s/ incert.	
Nº 1	1	1	9	7	2

Claramente la respuesta de A13: "No se puede saber porque podría ser que el que tiene la pelota podría cambiar de turno y perder la cantidad de veces que me la pasaron", contiene incertidumbre y se podría suponer que concibe la aleatoriedad en este juego.

Ejemplos de respuestas donde se operan los datos.

> Con incertidumbre:
>
> A9 “Yo creo que me la lanzarían 2 o 3 veces”.
>
> Sin incertidumbre:
>
> A3 “A mí me la lanzaría 3 veces a mi porque lo saco de las 13 veces” y
>
> A4: “3 veces porque a otros también se la lanzan no solamente a mi”.
>
> A15: “3 y 2 veces porque son 13 veces sin caer”.

La respuesta de A9 contiene incertidumbre y las de A3, A4 y A15 son categóricas. Además, se aprecia una suerte de equiprobabilidad que podría influir en el significado que los niños le atribuyen a la aleatoriedad. Esta equiprobabilidad, justamente no está presente en este juego.

Ejemplos de respuestas donde se predice un valor.

> A6: “4 porque con las 4 sin caer ya no me darían más oportunidades”.
>
> A8: “5 o 6 por que las demás deben ver con los otros”.
>
> A10: “4 porque no soy bueno para atajar pelota”.
>
> A20: “5 porque estuvo en juego muchas veces”.
>
> A10: “no soy muy bueno para atajar la pelota.
>
> A16: “8 veces masomenos”.
>
> A18: “después de 13 tiros (puede que) a alguien se le caiga la pelota”.

En estas predicciones se observan respuestas subjetivas y categóricas que representan la certeza de no volver a recibir al pelota, fenómeno que está relacionado con no reconocer que cada lanzamiento es un nuevo suceso aleatorio, es decir no conciben la independencia de ellos.

Este fenómeno ha sido reportado por la psicología de la conducta humana y se refiere a que a menudo se piensa que si ya le han lanzado 4 veces la pelota ya no se la volverán a lanzar.
A1 y A17 no responden.

5.1.1.2 El juego circular en 6º básico.

Para las preguntas 1 y 2 se han identificado respuestas con incertidumbre, sin incertidumbre y otras respuestas.

Tabla 10 Clasificación respuestas 1 y 2, juego circular, 6º básico

Pregunta	Responde cn Incertidumbre	Responde sn incertidumbre	Cuantifica	Otras respuestas
Nº 1	14	1	3	
Nº 2	14	1	1	1

Ejemplos de respuestas con incertidumbre

A6 “Posible porque no se sabe a quién se la va a pasar”.
A7: “Porque no se sabe si se la tiran a otro compañero.
A8: “Todos tienen la misma posibilidad de que le pasen la pelota”.
A9: “Es posible porque nunca se sabe a quién se la pasaran”.
A13 “Es casi posible porque no se sabe si te la tiran a ti”.

Los vocablos “posible … no se sabe”, “misma posibilidad …” indican la incertidumbre en las respuestas lo que favorece concebir que el juego es aleatorio.

Ejemplos de respuestas con incertidumbre, que cuantifican la posibilidad.

A4: “Es como un 20% porque no siempre van a dársela por obligación”,
A5: “Es poco posible es como un 50 por ciento, porque si el que la va a tirar es el que está al lado tuyo”.
A12: “Un 50% que te la lance y el otro 50% de que no me la lance porque es al azar”.

A11: “Porque me la quiere tirar a mi o a uno de su equipo”. Responde en forma categórica luego su respuesta es sin incertidumbre.

Pregunta dos: Ejemplos donde las respuestas contienen incertidumbre.

A6: “Posible pero no se sabe si se la va a pasar a alguien más”.
A9: “Si yo se la pido puede que me la tire a mí o a otro compañero”.
A10: “No se sabe si me la va a tirar porque capaz que se la tire a otro”.
A12: “No porque se la puede tirar a cualquiera”
A13: “No sé si me la lanzarían a mí, yo creo que no me la tirarían”.

Los vocablos “no se sabe si …”, “puede que …” y “se la puede …”, evidencian que las respuestas contienen incertidumbre y que estos alumnos concibieron que el juego era aleatorio.
A8 cuantifica el suceso planteado. Él responde: “Un 50% porque todos tienen la misma posibilidad”.

Esta es una respuesta, que desde el pensamiento infantil, concibe la incertidumbre como equiposibilidad, la que asocia al valor de la equiprobabilidad de cara y sello en el lanzamiento de una moneda.

Ejemplo de respuesta sin incertidumbre.

> A15: "Sí, me la lanzaría la pelota porque si a él se le ocurre tirármela a mí me la tira".

La respuesta de A15 no contiene incertidumbre, es categórica.

Para la pregunta 3, se han identificado respuestas con incertidumbre, sin incertidumbre, respuestas en las que los alumnos operan los datos, predicen un valor y otras respuestas.

Tabla 11 Clasificación respuesta 3, juego circuar, 6º básico

Preg.	Responde c/Incertidum	Responde s/ Incertid.	Opera los datos	Predicen un valor		Otras respuesta
			s/ inc	c/inc	s/ incert.	
Nº 3	1	2	8	3	1	1

La respuesta de A10 "No se sabe porque puede llegar a otro compañero", contiene incertidumbre.

Ejemplos de respuestas sin incertidumbre.

> A6 "Seguro porque me la van a pasar a mi",
>
> A15, "2 veces porque esas veces me han tirado la pelota".

Ambas respuestas son categóricas lo que podría significar que no conciben que el juego es aleatorio.

Ejemplos de respuestas en los que los alumnos operan los datos:

A2: "Dos veces porque da dos vueltas porque no puede seguir porque llega hasta13 no más".
A8: "2 veces porque todos le tocarían 2 veces y a uno 3"
A5: "2 veces porque somos seis niños y la tiramos 13 veces sin caerse".

Ocho alumnos operan los datos y sus respuestas son categóricas, luego no contienen incertidumbre lo que podría indicar que los alumnos no conciben un juego aleatorio.

Ejemplos de respuestas donde se predice un valor.

Con incertidumbre:
A9: "Yo creo que 1 porque uno no siempre se la quiere tirar al mismo"
A12: "Unas 1 porque es probable de que no te lo pasen tanto".
A13: "Yo creo que me la lanzarían 3 veces y a los otros más o menos la misma".
Sin incertidumbre:
A7: "3 porque la regla del juego es no tirarle la pelota al mismo que te la tiro a ti".

En estas predicciones, A9 y A12 contienen incertidumbre, en cambio la predicción de A7 es categórica y la de A13 es equiprobable, por lo tanto no conciben la aleatoriedad del juego.

En esta parte de la situación se ha considerado que las concepciones intuitivas de aleatoriedad se encuentran expresadas en respuestas que contienen incertidumbre y en aquellas en las que se predice un valor. Estas son 3. Luego hay 10 niños, de 6º básico (11 o 12 años), cuyas experiencias reales asociadas con la incertidumbre no son reconocidas por ellos como aleatorias.

Por otra parte se constata que, en este nivel, A9, A10 y A12 responden con incertidumbre a todas las preguntas. Esto implica haber desarrollado concepciones intuitivas de aleatoriedad lo que será favorable para el aprendizaje de nociones de probabilidad en la escuela, ya que podrá relacionarlas con sus experiencias reales como con la forma en que concibe que se desarrollan los sucesos aleatorios.

5.1.1.3 El juego circular en 7º básico

Para la primera pregunta se han identificado respuestas con incertidumbre, otras en las que los alumnos asignan una posibilidad de ocurrencia, las que contienen equiprobabilidad, las que predicen un valor y otras respuestas.

La tabla 12 muestra el número de respuestas para cada caso.

Tabla 12 Clasificación respuesta 1, juego circular, 7º básico

Preg.	Responde c/ Incertidumbre	Asignan posibilidad	Respuesta equiprobable		Predicen un valor		Otras respuest.
			c/incert.	s/incert.	c/incert.	s/incert.	
Nº 1	1	7	8	6	1	4	3

A26 (un alumno de treinta) responde “No se sabe porque el juego es aleatorio”. La respuesta de A26 es categórica en reconocer lo aleatorio del juego.

Ejemplos de respuestas que asignan posibilidad de ocurrencia:

A13: “Muchas posibilidades ya que cada jugador puede tirársela o a veces no, pero hay posibilidades”.
A12: “Muchas porque si yo estoy distraída me la puede lanzar”.
A16: “Es pequeña porque somos 5 los que no tenemos la pelota y el que la tiene se la pude lanzar a quien quiera sin importar la distancia”.

Estas respuestas contienen incertidumbre y esto significaría que reconocen la aleatoriedad del juego.

Ejemplos de respuestas que asignan equiprobabilidad.

Con Incertidumbre:
A2: “Yo creo que es una posibilidad de 5 porque hay 6 personas y 5 de ellas no tienen el balón y yo estoy entre ellas”.
A7: “La posibilidad es 1 de 6 porque de 6 jugadores (contándome) 5 me pueden lanzar la pelota”.
A23: “1 de 5 porque son 5 a los que se le puede lanzar el balón y yo soy uno”.

Sin incertidumbre:
A15: “Tengo 5 posibilidades de que me lancen la pelota porque hay 5 jugadores aparte de mi”.
A22: “Tengo una posibilidad de $\frac{1}{5}$ ya que uno está lanzando”.
A24: “La misma que todos porque el juego consiste en pasarla por todos”.

A2, A7 y A23 cuantifican asignando equiprobabilidad, sin embargo argumentan con incertidumbre, lo que podría indicar de conciben el juego como aleatorio.
A15, A22, y A24 también cuantifican equitativamente pero son categóricos en sus argumentaciones. La cuantificación 1 de 5 en las respuestas categóricas se

interpreta como una concepción equiprobable de un juego aleatorio no equiprobable y por lo tanto no aparece el reconocimiento de la aleatoriedad.

En las expresiones de los alumnos, la incertidumbre se cuantifica en términos de: A15: el todo (5), A8 y A 22: como la fracción $(\frac{1}{5})$ y A24 la expresa en lenguaje natural "la misma" y el resto como una parte del todo, 1 de 5, por ejemplo.
Ejemplos de respuestas que predicen un valor.

Con Incertidumbre: A11: "Yo creo que si el uno tiene la pelota, la posibilidad que me la lance es 30%". A27: "Yo creo que un 50% porque el que tiene la pelota decide si me la lanza o no". Sin incertidumbre: A14: "Un 30% porque generalmente siempre va al frente luego a la derecha y después al frente". A17: "Un 50% ya que es un juego rápido y es recibir y lanzarla pelota".

A11 y A27 utilizan las expresiones: "yo creo … posibilidad que" y "el que tiene la pelota decide si me la lanza o no", por lo tanto sus respuestas contienen incertidumbre y podría indicar que conciben que el juego es aleatorio. En estas respuestas no hay equiprobabilidad, sino una predicción que favorecería aproximaciones a la noción de aleatoriedad puesto que hay un trabajo con los datos.

A14 y A17 predicen un valor pero su argumento es categórico, por lo tanto su respuesta no contiene incertidumbre, lo que se manifiesta en "siempre va al frente luego …" concibiendo un patrón en un juego que es aleatorio.
Otras respuestas son las siguientes:

A5: “Yo creo que el que tiene la pelota normalmente le va a lanzar a la persona que tiene en mente”.

A19: “Yo podría estar muy lejos y el que está lejos le tiran más la pelota”.
A25: “Cuatro posibilidades porque hay 4 compañeros jugando”.
Las respuestas de A5 y A19 son subjetivas y claramente no reconocen la aleatoriedad. A25 contiene una equivocación ya que son seis los jugadores y no cuatro; pero sin la equivocación es una respuesta que asigna posibilidad de modo que en la respuesta de A25 hay un reconocimiento intuitivo de la aleatoriedad.

Las concepciones intuitivas de aleatoriedad se expresan en respuestas que contienen incertidumbre, en las que los alumnos asignan una posibilidad de ocurrencia y en las en las que se predice un valor. Estas son 12. Luego hay 12 de 18 alumnos de 7º básico (12 o 13 años), cuyas experiencias reales les permiten reconocer en situaciones de incertidumbre la aleatoriedad.
Para la pregunta dos, la tabla considera respuestas con y sin incertidumbre.
La tabla 13 muestra el número de respuestas para cada caso.

Tabla 13 Clasificación respuesta 2, juego circular 7º básico

Preg.	Responde cn Incertidumbre	Responde sn incertidumbre
Nº 2	25	5

Veinticinco alumnos de treinta responden con incertidumbre. Sus relatos dan cuenta que conciben la aleatoriedad en el suceso “que le lancen la pelota”. E

Ejemplos de respuestas con incertidumbre:

> A7 “podría ser ya que el puede lanzarsela a quién quiera”.
> A13 “hay y no hay posibilidades porque el se la puede tirar a otro jugador” y
> A11: “Depende porque casi siempre uno lanza la pelota a l que esta al frente, asi que yo no creo que me lance la pelota. La posibilidad es 40%”.
> A15: “Puede que si o puede que no porque el es quien decide, el que tiene la pelota”.

El uso de los vocablos: “puede que,…” (A15), “depende… “(A11), “podría ser …” (A7) y “hay y no hay posibilidades… (A13), evidencia que las respuestas contienen incertidumbre y por lo tanto estos alumnos podrían concebir que el juego es aleatorio.
Ejemplos de respuestas sin incertidumbre

> A25: “Si porque viendo la mirada uno pude saber si se la lanzan”.
> A3:” No porque la persona que es más amiga del que la lanza recibe más la pelota, entonces yo tengo menos posibilidades que los otros”.
> A19: Si porque si la persona está al frente tiene la pelota más me la va a tirar a mi pero si yo estoy más lejos y más encima enfrente de él.

En estas respuestas el argumento utilizado es categórico, lo que podría evidenciar que en ellas no se concibe la aleatoriedad del suceso.
Algunas respuestas como las de A1, A2, A6 y A30 podrían tener una doble interpretación, la que describimos luego de sus relatos.

A1: “Si porque se la puede lanzar a cualquiera”.
A2: “Si porque el que tiene la pelota se la puede lanzar a cualquiera”.
A6: “Si porque se la puede tirar al que quiera, incluyéndome”.
A30: “Depende si él quiere lanzármelo porque es mi amigo lo hace; pero si me tiene mala o no le agrado no me la lanza”.

En estas respuesta el “sí, … puede …” de A1, A2 y A6 y el depende, de A30 podrían ser interpretados como posibilidad de ocurrencia, en tal caso los alumnos responderían con incertidumbre y concebirían el juego como aleatorio.

En cambio si el sí, se interpretara como categórico habría una contradicción en las repuestas ya que los argumentos contienen incertidumbre, expresada en la palabra “puede …”.

Lo que evidencia la inestabilidad de las concepciones intuitivas frente a los sucesos aleatorios.
De esta manera se vuelve a constatar la naturaleza compleja de los fenómenos aleatorios.

Para la pregunta tres, la tabla 14 considera respuestas con incertidumbre, sin incertidumbre, donde se opera los datos y donde se predice un valor.

Tabla 14 Clasificación respuesta 3, juego circular, 7º básico

Pregunta	Responde:		Opera los datos		Predice un valor	
	c-inc.	s-inc.	c/incert.	s.incert.	c/ncert.	s/ incert.
Nº 3	4	1	4	13	4	4

Ejemplos de respuestas que contienen incertidumbre.

A12: “No sé, ya que se puede repetir a la misma persona o se puede caer”.
A26: “No sé, a lo mejor me la pasan a lo mejor ni siquiera una vez”.
A3: “No sé, depende de la posición en que este, porque si yo estoy al lado me va a tocar pocas veces “
A21: “Creo que depende de la persona ya que generalmente se tiran entre amigos así que podría decirlo si supiera quien tiene la pelota”.

En estas respuestas, los alumnos expresan la incertidumbre mediante las palabras: “No se … puede que …”, “Creo que depende …” y la interpretación intuitiva que podría surgir es que el juego es aleatorio.

Ejemplos de respuestas donde operan los datos:

Con incertidumbre:
A4 “2 o 3 veces porque cada jugador tiene los mismos turnos para lanzar o tal vez unas cinco”.
A15: “Dos veces porque también hay otros jugadores que pueden tener el turno de lanzar”

Sin incertidumbre:
A7: “Yo creo que me tocaría la pelota 2 veces, ya que si dividimos 13 popr 6 da 2,1666”
A11: “Creo que la lanzarían 7 veces y mis compañeros 6 porque 6 + 7 = 13”
A23: “Si me la lanzarán a mi primero me tocaría 3 veces. Si me la lanzarán de los quintos me tocaría 3 veces. Va variando según la posición”.

Los números 2 y 3 que aparecen en estas respuestas evidencian la operación 13 dividido por 6.

Las respuestas de A4 y A15 evidencian esta operación pero su argumento es de incertidumbre, lo que favorecería reconocer a este juego como aleatorio.

A7, A11 y A23 dan respuestas categóricas que no contienen incertidumbre, lo que no favorecería reconocer que el juego es aleatorio.
Al parecer, A23 se imagina la pelota pasando de uno en uno, en forma circular, lo que concuerda con "Si me la lanzarán a mi primero me tocaría 3 veces …".

Con incertidumbre.
A8: "Pueden ser 7 porque si me la tiran yo se la tengo que devolver a otra".
A9: "Puede ser cualquier número el 1 al 7"
A25: "Yo creo que cuatro porque hay más jugadores y el que tiene la pelota se la lanzaría a otro y a otro y a mí y así"

Sin incertidumbre.
A14: "5 veces porque el juego tiene un patrón".
A16: "5 veces porque al estar más cerca se acelera el juego, pero hay más gente jugando que no piensa como el que está al lado mío".

Ejemplos de respuestas donde predicen un valor:

A8, A9 y A25 usan los vocablos "puede ser …" y "yo creo que …". Estos vocablos indican que sus respuestas contienen incertidumbre y por lo tanto podrían concebir que el juego es aleatorio.

A14 y A16 argumentan en forma categórica, por lo tanto sus respuestas no contiene incertidumbre, lo que no favorece concebir la aleatoriedad en este juego.

El argumento de A10 “65 porque no pararía. La explicación es que se multiplica (*13*) por cinco y da el total de 65 vueltas” en su respuesta categórica, mostraría que no ha entendido las reglas del juego y por lo tanto no reconoce la aleatoriedad del juego.

5.1.1.4 El juego circular en 8º básico.

Para la primera pregunta se han identificado respuestas donde se asigna posibilidad de ocurrencia, equiprobabilidad y respuestas que contienen predicciones.

Tabla 15 Clasificación respuesta 1, juego circular 8º básico

Pregunta	Asignan posibilidad	Respuesta equiprobable		Predicen un valor	
		c/incert.	s/incert.	c/incert.	s/ incert.
Nº 1	5	3	4	6	4

Ejemplos de respuestas que asignan posibilidad de incertidumbre:

A12: “Posiblemente me la tire porque se la puede tirar a otra persona”

A18: “Hay mucha posibilidad porque la pelota tiene que estar en movimiento”.

A19: “Mucha posibilidad porque estoy más cerca de él y puede ser más fácil lanzármela”.

A20: “Hay mucha posibilidad porque no hay muchos jugadores, solo hay 5 aparte de mi”.

A24: “Posible porque el tiene 5 opciones a quien lanzarle la pelota”.

El uso de las palabras “posible y mucha posibilidad” representa la incertidumbre que les suscita la pregunta.

Ejemplos de respuestas que asignan equiprobabilidad.

Con Incertidumbre A2: “Una de 5 porque se pueden repetir a quien la lanza y yo la podría tocar solo un poco, igual puede que me la lancen a mi todo el rato” A6: “17% porque el que tiene la pelota se la puede tirar a cualquiera que juegue.”. A9: “20% porque son seis personas y si fueramos 3 jugando habría más posibilidades que me la lancen a mi”. Sin Incertidumbre A5: “1 en 5 porque él toma la decisión si tirarsela a otro”.

En estas respuestas se observa cálculo, la que podría corresponder a una oncepción de equiprobabilidad.

La respuesta de A6 evidencia equiposibilidad

La respuesta de A2 refleja la complejidad de los sucesos aleatorios caóticos, “se puede repetir a quien se la lanzan; yo la podría tocar solo un poco, pero también puede que me la lancen a mi todo el rato”.

A5 formula respuestas categóricas que podrían indicar que no reconocen que el juego es aleatorio.

Ejemplos de respuestas en las que se predice un valor:

Con Incertidumbre A1: “Un 60% porque hay otros 4 jugadores a los cuales … se les puede tirar” A3: “Un 80% porque se la tiene que a todas las personas”. A7: “50% porque la puede lanzar a otra persona a me la puede lanzar a mi”.

Sin Incertidumbre

A8: “1 de 5 posibilidades porque somos 6 personas”

A21: “15% porque el jugador tiene que quemar al màs dèbil.

En las predicciones de A1, A3 y A7 se observa incertidumbre, expresada en lasu frases: “… también se la pueden tirar”, “… se la tienen que tirar a todas …” y “ …puede lanzarla …”. Se puede interpretar que conciben que el juego es aleatorio.

Sin embargo en las respuestas de A8 y A21 son categóricas, lo que podría interpretarse como una concepción no aleatoria del juego.

Además hay una respuesta confusa: A11: “50% porque hay muchos esperando la pelota y uno no sabe a quién se la tirará”.

El 50% que escribe, podría corresponder a un reparto entre él y el resto de los jugadores como el otro 50%. Habría incertidumbre en la afirmación “no se sabe”.

Para la pregunta dos se han identificado respuestas con incertidumbre, y respuestas sin incertidumbre.

Tabla 16. Clasificación respuesta 2, juego circular 8º básico

Pregunta	Responde c/ Incertidumbr	Responde sn incertidumbre
Nº 2	14	10

Ejemplos de respuestas con incertidumbre:

A24: "No posiblemente puede que me la lance a mí, es decisión del que tiene el balón".
A14: "Es probable porque en el juego se la tiene que lanzar a cualquier compañero y me la podría lanzar".
A12: "Si porque podría ser una opción".

Los vocablos "posiblemente puede ..", "Es probable …" y "podría ser …", reflejan convicciones sobre la incertidumbre, lo que significaría que se percibe que el juego es aleatorio.

Ejemplos de respuestas sin incertidumbre

A10: "Si porque estoy más cerca de él".
A16: "Si porque yo se la daría de nuevo".
A19: "Yo creo, porque estoy cerca y le pediría el balón".
A22: "Si porque sería muy tonto que se la lanzara a los niños y nunca a mí".

Estas respuestas son subjetivas y categóricas, ellas reflejan que no se reconoce que el juego es aleatorio.
Para la pregunta tres se han identificado respuestas con incertidumbre, donde se operan datos y donde se predice un valor.

La tabla 17 muestra el número de respuestas para cada caso.

Pregunta	Responde cn incertidumbre	Opera los datos		Predice un valor	
		c/incert	s/incertid.	c/incertid.	s/ incert.
Nº 3	2	3	6	9	3

Ejemplos de respuestas con incertidumbre.

A13: “No se sabría porque puede llegarle a cualquiera”.
A18: “No se sabría ya que los jugadores pueden tirársela a cualquiera”.

Tabla 17. Clasificación respuesta 3, el juego circular, 8ª básico.

En estos ejemplos, los alumnos consideran que el juego es aleatorio.

Ejemplos de respuestas en que los alumnos operarían datos.

Con Incertidumbre:
A2: “Creo que por lo menos 3 veces porque es un juego circular y por eso creo que me tocaría pasarla”.
A11: “50% porque hay muchos esperando la pelota y uno no sabe a quién se la tirará”.
A5: “Tal vez la tocaría 2 o 3 veces, no se sabe”.
Sin Incertidumbre
A3:m “ 2 o 3 veces porque hay muchos niños y todods la tienen que tener”.
A4: “2 porque sería 2 pasadas de 13 a cada uno”.

En las respuestas de A2 y A5 podría haber realizado una operación de datos (para obtener los números 3 y 2 o 3), además argumentan con incertidumbre. Las respuestas de A3 y A4 son categóricas y en ellas no se percibe la aleatoriedad del juego.

Ejemplos de respuestas donde se predice o estima un valor.

Con Incertidumbre:
7: Tal vez 3 o 4 porque tal vez la otra persona quiere lanzármela porque cree que soy bueno"
A10 "5 veces porque es posible que me la lance a mí".
A14: "Creo que 5 veces máximo porque 13 veces no me debería tocar a mí sino que a cualquiera más". A23: No sé porque puede que me tiren la pelota o que no me la tiren, podría llegarme unas 5 o 6 veces, quién sabe.

Sin Incertidumbre:
A16: "9 veces porque yo creo que tengo más habilidad en las manos".A21: "5 porque tengo un buen cuerpo y fuerza y al que van a querer matar es a mí.
A24: "5 veces porque se la tirarían al que tiene más fuerza".

Las respuestas de A7, A10, A14 y A23 reflejan la incertidumbre, en expresiones como "Tal vez …", "es posible …", "Creo que …" y "puede que …".

En cambio las respuestas de A16, A24 y A21 son subjetivas y categóricas lo que podría indicar que no conciben la incertidumbre y por lo tanto no reconocen la aleatoriedad del juego.

A20 responde: "Unas 5 veces porque la pelota tiene que dar la vuelta".
El 5 veces, de A24 es difícil de interpretar en relación a su argumento, el que parecer indicar que no ha entendido las reglas del juego.

Con Incertidumbre:
A2: "Creo que por lo menos 3 veces porque es un juego circular y por eso creo que me tocaría pasarla".
A11: "50% porque hay muchos esperando la pelota y uno no sabe a quién se la tirará".
A5: "Tal vez la tocaría 2 o 3 veces, no se sabe".

Sin Incertidumbre:

A8: “1 de 5 posibilidades porque somos 6 personas”.

A21: “15% porque el jugador tiene que quemar al más débil”.

5.1.1.5 Análisis global.

La tabla 18 presenta un resumen de respuestas a las preguntas 1, 2 y 3, en las que hay presencia o ausencia de incertidumbre.

Tabla 18. Tipos de respuestas, juego circular

Preg.	Respuesta con incertidumbre				Respuesta sin incertidumbre			
	5º	6º	7º	8º	5º	6º	7º	8º
1	8	14	17	14	11	1	10	9
2	6	13	25	14	12	2	5	10
3	2	4	12	13	16	11	18	10

Para las respuestas a la pregunta 1, ocho de veinte alumnos, de 5º básico, responden con incertidumbre y en 7° y 8° esta relación aumenta a 17 de 30 y 13 de 23 alumnos respectivamente.

Un caso especial es el 6° básico donde casi la totalidad del curso, responde con incertidubre, lo que significa que reconocen la aleatoriedad.

El gráfico 1 permite visualizar la evolución de los conocimientos probabilísticos de 5º a 7º básico, en naranjo, verde y calipso, respectivamente y la disminución en 8º, en azul.

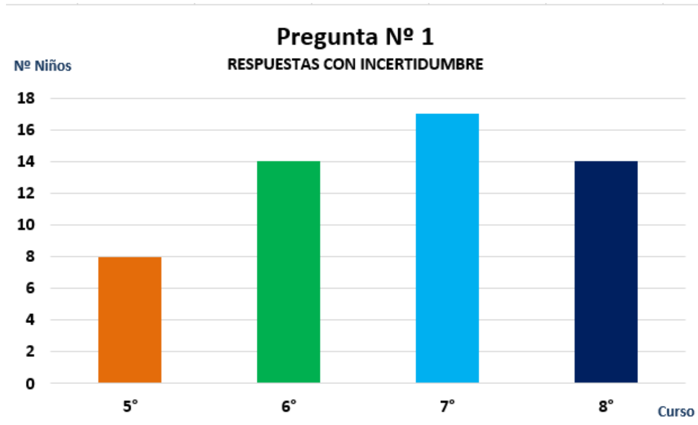


Gráfico 1. Respuestas con incertidumbre: pregunta 1, juego circular

En las respuestas a la pregunta 2, se encontró en 5º y en 6º básico, una disminución del número de alumnos que reconoce la incertuidumbre. En 7° básico, un aumento importante, veinticinco de treinta alumnos reconocen la aleatoriedad y en 8º básico los resultados de las preguntas 1 y 2 son iguales.

El gráfico 2 permite visualizar la evolución de los conocimientos probabilísticos de 5º a 7º básico, en naranjo, verde y calipso, respectivamente y la disminución en 8º, en azul.

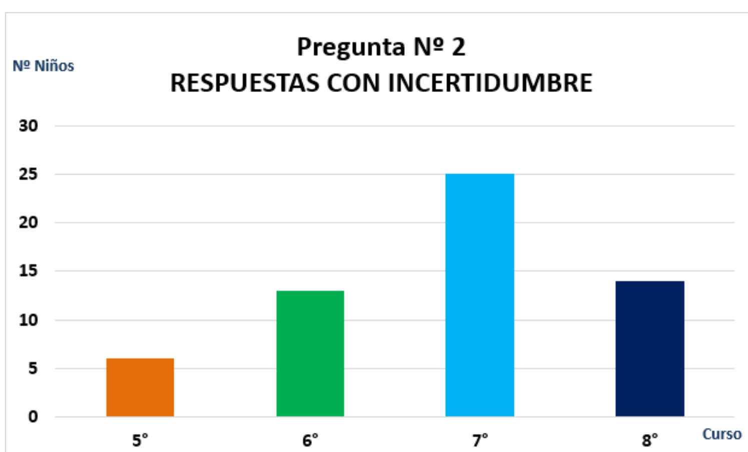


Gráfico 2. Respuestas con incertidumbre, pregunta 2, juego Circular

En las respuestas a la pregunta 3, se encontró evolución de los conocimietos probabilisticos de los alumnos de séptimo y octavo básico, con respecto a los de quinto y sexto, y particularmente en 7º y 8° básico se observa que la evolución no es significativa.

El gráfico 3 permite visualizar la evolución de los conocimientos probabilísticos de 5º a 8º básico, en naranjo, verde, calipso y azul, respectivamente.

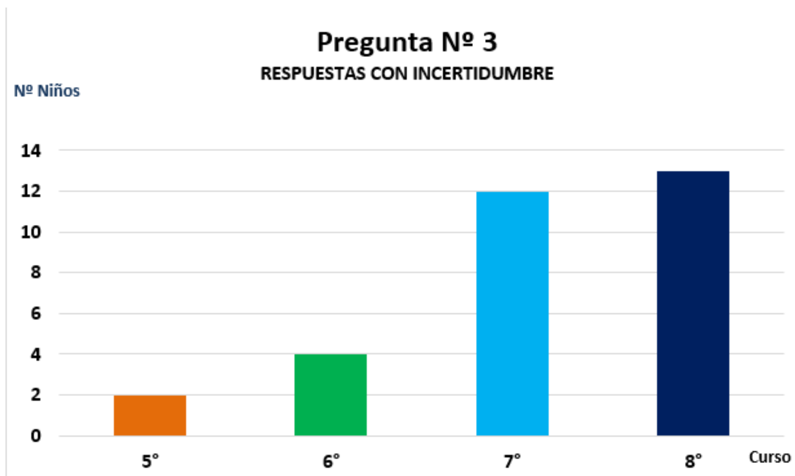


Gráfico 3. Respuestas con incertidumbre: pregunta 3, juego circular

En la comparación de los graficos 1, 2 y 3, los alumnos de 5º y 6º básico, disminuyeron sus respuestas con incertidumbre a medida que desarrollaron las tareas sobre el juego, y en particular al responder la pregunta 3.

La tendencia al aumento de 5º a 7º y la disminución en 8º, observada en el gráfico, podría estar asociado a la complejidad de reconocer la aleatoriedad en los juegos reales de los niños.

Aqui se detecta un fenómeno didáctico, con los alumnos de 8º básico, fenómeno que plantea interrogantes para investigar posteriormente.

En esta situación, los alumnos han sido enfrentados a identificar nociones complejas, poniendo en juego un conjunto de concepciones sobre incertidumbre y aleatoriedad, también argumentaciones sobre sus elecciones y en este proceso, algunos de ellos no han reconocido la incertidumbre. Sus concepciones forman parte del sentido que ellos le atribuyeron a la situación y estas les permitieron reconocer o no la aleatoriedad del juego. Esto concuerda con lo expuesto por Brousseau (2004, p. 118).

No reconocer la incertidumbre, tal vez estuvo relacionado a la necesidad de controlar el juego, prediciendo de manera categórica resultados que podrían ocurrir.
Algunas respuestas categóricas se reproducen aquí: “le pido la pelota para que me la lance”, “seguro que me la tira porque el juego es en círculo” o “seguro que el suceso va a ocurrir”, estas reflejan respuestas sin incertidumbre.

Por otra parte, sus conocimientos intuitivos, se constituyeron en obstáculos al reconocimiento de la aleatoriedad, puesto que a menudo volvieron a aparecer en otras respuestas, por lo tanto fueron persistentes y se resistieron durante el desarrollo de la situación.

De acuerdo a los estudios de Brousseau (2004, p. 124) se trataría de un obstáculos de origen ontológico y epistemológico.

Los obstáculos ontogenéticos provienen de la génesis neuropsicológica del sujeto en su desarrollo, Brousseau (2004, p 118).

Este tipo de obstáculo, explicaría el comportamiento de los alumnos al operar los datos, en la pregunta 3 por ejemplo, sin poder reconocer la incertidumbre del suceso planteado. En este caso el obstáculo proviene de sus vivencias, en general de naturaleza concreta y determinista que les dificulta reconocer la incertidumbre en sucesos cotidianos. Estos niños buscan patrones o un orden para controlar el juego en sucesos que no evolucionan de esta manera.

Este razonamiento es producto del obstáculo ontogenético y se evidencia cuando los alumnos se expresan a partir de suposiciones de carácter predictivo, las que corresponden a sus creencias frente al suceso planteado y que forman parte de su razonamiento determinista.

Otra manifestación de este obstáculo es que asignan equiprobabilidad en un suceso previamente diseñado para concebir la aleatoriedad no equiprobable. Sobre este obstáculo, Lecoutre (1985, 1992), Lecoutre y Durand (1988) y Lecoutre y Cordier (1990) sostienen que los sujetos que conciben la equiprobabilidad consideran que el suceso "depende del azar" y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables”.

Lo que desde el punto de vista de la enseñanza este obstáculo supondría una extensión indebida de los planteamientos de Laplace, entre ellos la regla de Laplace y el principio de indiferencia, el que consiste en que el sujeto no discrimina las distintas posibilidades que un suceso podría tener y lo concibe como equiprobable, sin necesariamente serlo, cit en Batanero 1998.
Los obstáculos epistemológicos inevitablemente aparecen en la génesis del conocimiento. Ellos constituyen un estado en la progresión de consolidación de un conocimiento. Se producen debido a la incapacidad de rechazar el marco conceptual transitorio sobre el cual se sustentan. Es decir los obstáculos epistemológicos se apoyan en un marco conceptual resistente y persistente.

El interés de la didáctica de la matemática en identificar errores recurrentes en la historia de la matemática, “muestra de forma decisiva la importancia de estos fenómenos de ruptura para la comprensión de las dificultades de los alumnos”, Brousseau (2004, p. 143)

En relación a los obstáculos producidos con la noción de probabilidad, Borovcnick (2011) sostiene que durante el período, que abarca desde la antigüedad hasta finales de la edad media, la probabilidad estuvo relacionada a la adivinación del futuro. Este intento de control, pudo ser uno de los factores que produjo retrasos y desconciertos, junto a una concepción del universo basada en la relación causa efecto, desarrollada en el mundo griego.

Este obstáculo se ha manifestado en las respuestas espontaneas de los alumnos en forma de respuestas categóricas sobre una situación de aleatoriedad.

Por otra parte, en relación a las respuestas de los niños que operan los datos, respuesta prevista en el análisis a priori, se constata la tendencia denominada insensibilidad al tamaño de la muestra. Ella ha sido caracterizada por Kanemhan y Tversky (1978) como "esperar que una serie corta de ensayos (13 lanzamientos) tenga la convergencia estadística de la población (5000lanzamientos, por ejemplo), Batanero (1998, p. 9). Lo que se traduce en hacer una extensión indebida de la ley de los grandes números.

Por ejemplo argumentos como el de A15 de 5º básico: "3 y 2 veces porque son 13 veces sin caer", podrían estar relacionados con el obstáculo tendencia a la insensibilidad al tamaño de la muestra, relacionada con ley de los grandes números.

5.1.2 Experimentación de la situación 2. Proyección de Imágenes.

En la experimentación la profesora (P) proyecta en la pizarra imágenes fotográficas, solicita a los alumnos observar atentamente la imagen y escribir dos historias sobre lo que ellos suponen que sucederá en el instante siguiente. Ella entrega una hoja a cada uno para que escriban sus historias. El tiempo didáctico considerado para esta actividad es aproximadamente 12 minutos.

Terminada la actividad la profesora propone otra tarea que consiste en que decidan cual es la posibilidad de que sus historias ocurran y justificar esta decisión, en relación a la historia que han inventado. Para ello reparte otra hoja que contiene una tabla de posibilidades, indicada en la figura 34 y casillas en las que escribir la posibilidad de ocurrencia y su respectiva justificación. El tiempo didáctico considerado es de 12 minutos.

Figura 41. Tabla de posibilidades.

Letra	Nivel	Descripción
A	Imposible	La historia nunca sucederá
B	Casi imposible	La historia tiene poca posibilidad de ocurrencia
C	Incierto	No se puede saber con certeza si la historia ocurrirá
D	Muy posible	Es muy posible que ocurra la historia, pero no es absolutamente seguro.
E	Seguro	Seguridad de ocurrencia de la historia.

Fuente: Elaboraciòn Propia.

La clase continúa con una puesta en común, en la que **P** invita a los alumnos a contar sus historias y explicar la posibilidad de ocurrencia. El tiempo para esta actividad es de 10 minutos aproximadamente.

Con esta modalidad se estudian cuatro imágenes y para la quinta imagen, hay un pequeño cambio, la profesora propone contar oralmente las historias y discutir al mismo tiempo las posibilidades de ocurrencia.

En síntesis los alumnos y la profesora llegan a la conclusión de que entre las historias que se contaron, hay algunas que pueden ocurrir, otras que no ocurrirán y otras que es seguro que ocurrirán. Además, en el caso de las tres primeras hay incertidumbre en la ocurrencia del suceso formulado.

Toda la experimentación de la situación 2 se realizó en una sesión de 50 minutos y otra de 90 minutos.

Análisis a posteriori. La jugada de fútbol.

Cabe recordar que la experimentación se realizó con cuatro cursos, en tres de los cuales se solicitó escribir dos historias a cada alumno y en el 7° básico solo se pidió escribir una historia.

Estos resultados se presentan en dos tablas, las que se muestran en el esquema.

La tabla 19 presenta la cantidad de historias escritas de acuerdo a la posibilidad de ocurrencia asignada a la imagen proyectada.

Tabla 19. Clasificación de las hisorias v/s número de niños

Número de niños	Número de historias	Posibilidades de historias
		A
		B
		C
		D
		E
		Omite
		Total

En esta tabla el número de niños no coincide con el número de historias ya que en tres cursos se pidió a cada niño escribir dos historias. Por ello se considera que las historias son independientes.

La segunda tabla se refiere a las concepciones intuitivas de aleatoriedad contenidas en las historias.

Tabla 20. Concepciones intuitivas de aleatoriedad, en las historias

La jugada de fútbol.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad ocurrencia	Nº de niños	Responde cn incertidumbre	Responde sn incertidumbre	Número historias
A				
B				
C				
D				
E				
Omite				
Total				

En la tabla 20 se consideran respuestas en que aparece la incertidumbre en expresiones tales como, “es posible que …”, “puede ser que …”, “creo que …” Este tipo de respuestas reflejaría el reconocimiento de la aleatoriedad.

También considera respuestas en las que no aparece la incertidumbre, ellas contienen expresiones categóricas sobre la ocurrencia del suceso. En estas respuestas no se reconoce la aleatoriedad y podrían estar asociadas con una visión determinista, del suceso.

En esta tabla las historias también son independientes.

A continuación presentamos los resultados de la imagen de la jugada de futbol, por nivel.

5.1.2.1 La jugada de futbol en 5º básico.

La tabla 21 corresponde a las posiblidades de ocurrencia, asignadas a la hisorias de la imagen “la jugada de futbol”, por veintitrés niños de 10 años.

Tabla 21. Número de historias, jugada de futbol, 5º básico

Número de niños (10 años)	Número de historias	Posibilidad de las historias
1	1	A
1	1	B
9	13	C
6	10	D
9	11	E
1	2	Omite
	38	

La tabla muestra que un niño elabora una historia y le asigna imposibilidad de ocurrencia (A), otro niño asigna poca posibilidad de ocurrencia (B) a la historia que escribió. Hay trece historias que han sido formuladas por nueve niños asignando la posibilidad de ocurrencia C. Seis niños escribieron diez historia con alta posibilidad de ocurrencia (D), nueve niños escriben once historias y les asignando seguridad de ocurrencia (E).

Un niño designado por A23 solamente escribe sus historias y omite la posibilidad de ocurrencia.

A23: “Había un niñito que llego a una cancha y creían que era malo pero era bueno y metió ricos goles” y “Abia un niño que él decía que era bueno pero era malo y no metió un gol”.

No se tiene información sobre el por qué no da justificaciones.

Diez de veintitrés niños asignan seguridad de ocurrencia a sus historias. Lo que podría significar que estos alumnos no conciben la aleatoriedad en la imagen de la jugada de futbol. Para estos diez niños se trataría de un suceso imposible o de un suceso seguro.

La tabla 22 precisa las concepciones intuitivas identificadas de la noción de aleatoriedad para esta imagen.

Tabla 22. Concepciones intutivas de aleatoriedad, 5º básico

La jugada de fútbol.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad			
Posibilidad ocurrencia	Nº de niños	Responde c/ incertidumbre	Responde sn incertidumbre	No se entiende	Número de historias
A	1		1		1
B	1		1		1
C	9	8	5		13
D	6	2	8		10
E	9	2	9		11
Omite	1			1	2
Total		12	24	1	37

Estos resultados muestran 13 historias con posibilidad de ocurrencia C, en ocho de ellas aparece la incertidumbre y en las otras cinco no.

Para la posibilidad de ocurrencia D, seis niños escribieron dos historias donde aparece la incertidumbre y ocho historias en las que no aparece.

Para la posibilidad de ocurrencia E, nueve niños escribieron nueve historias en las que no aparece la incertidumbre y dos historias en las que aparece la incertidumbre.
En general el total de respuestas que contienen incertidumbre están en la razón 12 de 37. En las respuestas restantes los niños de 10 años no conciben en esta

imagen la incertidumbre, lo que es significativo dado el nivel de desarrollo en el que se encuentran.

Este resultado plantea la pregunta: ¿A los diez años, los niños no conciben la incertidumbre? Y también el desafío, para el profesor, de buscar estrategias para lograr que a esta edad, los niños reconozcan la incertidumbre presente en sus experiencias reales y la asocien con los fenómenos aleatorios que se presentan en lo cotidiano y en la escuela.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A3	La defensa (el niño de la izquierda), para la jugada del delantero (niño del medio) y se la quita".	C	La defensa es buena y puede que se la quite.
A4	El jugador del medio caerá y será tiro libre.	D	El jugador de la derecha podría botarlo o el de la izquierda también.
A12	El niño del medio le ba a quitar la pelota y ba a mater el gol y ban aselebrar con ir al campo.	D	Porque él (el niño del medio) puede meter el gol.
A13:	El niño de al medio mete un gol.	C	Porque los de al lado se la pueden quitar, la pelota.

En estos ejemplos, los alumnos conciben que el suceso se puede desarrollar de diferentes maneras, lo que corresponde a una característica de los sucesos aleatorios. Respuestas como estas han sido previstas en el análisis a priori.

Ejemplos de respuestas donde se no concibe la incertidumbre

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A1	El defensa atropella y el delantero ase el gol.	D	Porque los dos equipos son buenos.
A3	El delantero se pasa a la defensa corre y hace el gol	C	Porque el niño es rápido.
A11	El niño del medio se los pasa y va al arco, le va a pegar y el arquero le hace falta y es penal y el jugador del medio le pega y	C	El niño al final se los pasa y hace el gol.

En estos ejemplos las historias no contienen incertidumbre y las explicaciones tampoco, ellas son categóricas, sin embargo la posibilidad de ocurrencia asignada es de incertidumbre.

Lo anterior mostraría existencia de una concepción intuitiva determinista de la situación de la jugada de futbol. La que se opone a la percepción de la incertidumbre y revela una dificultad para reconocer fenómenos aleatorios.

También este tipo de respuesta concuerda con lo previsto en el análisis a priori.

5.1.2.2 La jugada de futbol en 6º básico.

Esta tabla corresponde a las historias escritas por dieciséis niños de 11 años.

Tabla 23. Número de historias "la jugada de fútbol", 6º básico

Número de niños 11 a.	Número de historias	Posibilidades de las historias
		A
5	5	B
12	15	C
7	17	D
		E
1	2	Omite
	29	

La tabla 23, muestra que cinco niños elaboran cinco historias y les asignan poca posibilidad de ocurrencia (B), doce niños escriben quince historias, asignándoles posibilidad de ocurrencia C y siete niños escriben siete historias, asignándoles alta posibilidad de ocurrencia (D).

Uno niño designado por A15, solamente escribe las historias y omite la posibilidad de ocurrencia de sus dos historias.

Las historias son: “El niño se fractura el pie”, “El niño tiene solo al arco pero el compañero estaba al lado”.

La primera historia es una afirmación categórica y la segunda es una historia inconclusa.

En estos resultados los niños solo asignan posibilidad de incertidumbre a todas sus historias, lo que podría ser una señal de que ellos reconocen la incertidumbre pero la tabla 24 precisa las concepciones intuitivas de aleatoriedad que aparecieron.

Tabla 24. Concepciones intutivas de aleatoriedad. 6º básico

		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidades de ocurrencia	Número de niños	Respuesta con incertidumbre	Respuesta sin incertidumbre	Número de historias
A				
B	5	3	2	5
C	12	10	5	15
D	7	5	2	7
E				
Omite	1			2
Totales		18	9	29

Cinco niños asignan posibilidad de ocurrencia B a sus historias, tres de ellos responden con incertidumbre y los otros dos niños sin incertidumbre,

Doce niños asignan posibilidad de ocurrencia C, lo que corresponde a diez historias con incertidumbre y cinco sin incertidumbre.

Siete niños asignaron posibilidad de ocurrencia D, cinco de ellos respondieron con incertidumbre y los dos restantes sin incertidumbre.

Ningún niño asignó seguridad de ocurrencia, E, a sus historias.

El total de respuestas que contienen incertidumbre están en la razón 18 de 29, lo que muestra que los niños de 11 años, en su mayoría reconocen la incertidumbre en las historias que inventaron.

La columna 5, fila 6 refleja la respuesta de A15, descrita anteriormente.

La mayor cantidad de respuestas con incertidumbre de los niños de once años, en una imagen relacionada con sus experiencias reales, constatan que mayoritariamente reconocen la aleatoriedad lo que permitiría a las/los alumna(os) estar más preparada(o)s para reconocer fenómenos aleatorios.

Aun así la tarea del profesor es buscar estrategias para lograr a que el resto de los alumnos logre también aproximaciones similares a las de sus otros compañeros, sobre esta noción.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A4	Los de polera roja le hacen una falta al de naranja para que los pase.	B	No es tan posible porque no es seguro de que le hagan una falta.
A6	El del medio se cae y se fractura la pierna.	B	No es muy posible de que solo se caiga y fracture la pierna.
A2	El del medio fue a hacer un gol pero el arquero se la ataja.	C	Porque puede pasar o no puede pasar.
A3	El del medio hace un gol.	D	Porque algunas veces hacen falta o le quitan la pelota.

Estas explicaciones se interpretan desde la lógica de que lo ocurre en el instante siguiente, puede dar origen a otras y distintas historias (predicciones). Por lo tanto estas respuestas reflejan concepciones intuitivas para el reconocimiento de la aleatoriedad, previstas en el análisis a priori.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A1	El niño del medio le quita la pelota al otro niño.	D	Porque en la mayoría de los partidos pasa eso..
A6	El del medio le hace una falta al de la derecha.	B	Porque el niño que tiene la pelota correría rápido.
A12	Los del equipo del medio se van a hacer un gol al otro equipo.	B	Porque si el arquero es bueno se las va a atajar.
A13	El jugador va a anotar el gol.	C	Porque el niño le pego a la pelota y hizo el gol

En estos ejemplos las historias no contienen incertidumbre y las explicaciones tampoco, ellas son categóricas, sin embargo la posibilidad de ocurrencia asignada es de incertidumbre.

Lo que indica que entre la historia y la explicación hay coherencia que se contradice con la posibilidad asignada, que es de incertidumbre.
Lo anterior, junto a la respuesta de A12, en la que se advierte la estructura de una implicación, mostraría la existencia de una concepción intuitiva determinista de la situación de la jugada de futbol. La que se opone a la percepción de la incertidumbre y revela una dificultad para reconocer fenómenos aleatorios.
Las diferentes formas de concebir la aleatoriedad del suceso, en esta situación, concuerdan con lo previsto en el análisis a priori.

5.1.2.3 La jugada de futbol en 7º básico.

La tabla 25 corresponde a las historias escritas por treinta y un alumnos de 7º básico, cuyas edades fluctúan entre 12 y 13 años.

Tabla 25 Número de historias, la jugada de fútbol, 7º básico

Número de niños (12 a.)	Número de historias	Posibilidad de historias
1	1	A
2	2	B
14	14	C
9	9	D
4	4	E
1	1	Omite
	31	

La tabla refleja que un alumno escribe una historia y le asigna imposibilidad de ocurrencia (A), dos alumnos escriben historias, asignándoles poca posibilidad de ocurrencia (B), catorce alumnos asignan posibilidad C a sus historias, nueve alumnos asignan alta posibilidad de ocurrencia D, cuatro alumnos asignan seguridad de ocurrencia a sus historias y uno omite la posibilidad de ocurrencia. Al respecto, A10 escribe “El del medio quita la pelota y va saltar el arco y mete el gol”. Esta historia refleja una predicción en la que no concibe la aleatoriedad del suceso que ocurrirá.
De acuerdo a esta tabla se puede observar a cinco alumnos que asignan seguridad de ocurrencia a sus historias y veinticinco que asignan posibilidad de incertidumbre a las historias formuladas.

La tabla 26 precisa las concepciones intuitivas de aleatoriedad de los alumnos de 7º básico.

Tabla 26 *Concepciones intuitvas de aleatoriedad*

La jugada de fútbol.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad ocurrencia	Nº niños 12 a.	Responde cn incertidumbre	Responde sn incertidumbre	Número historias
A	1		1	1
B	2	1	1	2
C	14	9	5	14
D	9	2	7	9
E	4		4	4
Omite	1			1
Total		12	18	31

Seis alumnos responden sin incertidumbre, uno de ellos asigna posibilidad de ocurrencia A, otro alumno asigna posibilidad B y cuatro alumnos asignan seguridad de ocurrencia E a su historia. Entre ellos, A14 escribe: “El del medio se pasa a los otros dos y mete el gol” y explica “porque el jugador puede ser muy bueno”. Explicación que contiene incertidumbre en la expresión “el jugador puede…”

Un alumno responde con incertidumbre y asigna posibilidad B.
Catorce alumnos asignan posibilidad C a sus historias, nueve de ellos responden con incertidumbre.
Nueve alumnos asignan posibilidad de ocurrencia D a su historia y dos de ellos responden con incertidumbre. El resto, siete alumnos dan explicaciones sin incertidumbre.

Las contradicciones observadas entre la posibilidad de ocurrencia asignada y las justificaciones formuladas, hablan de la complejidad de la noción en estudio para los alumnos de este segmento de edad.

El total de respuestas que contiene incertidumbre está en la razón 12 de 31, lo que muestra un aumento en las concepciones intuitivas sobre aleatoriedad de los niños de 12 y 13 años, en relación a los niños de 5º y 6º básico (10 y 11 años).
Este resultado vuelve a poner en evidencia la dificultad a la que se enfrentan los alumnos frente al reconocimiento de esta noción, incluso cuando ella forma parte de sus experiencias reales.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre en relación a la imagen de la jugada de fútbol.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A29	El del medio gana la pelota a los otros y estos se caen y se fracturan el pie.	B	Porque es muy difícil que eso pase.
A11	El de la derecha se caerá al tratar de sacar la pelota.	C	Porque se puede caer o no caer.
A15	Los niños se están peleando la pelota y uno de ellos hace el gol.	C	Puede que suceda o puede que no porque en realidad no sabemos que va a pasar.
A16	El jugador de espalda le quita la pelota al de la derecha y hace….	D	Porque es muy posible que puede pasar en el futbol .

Las explicaciones constatan la incertidumbre en la posibilidad de ocurrencia de las historias, en expresiones “es muy difícil que eso pase, puede ser muy bueno, no sabemos qué va a pasar, es muy posible que puede pasar…”.
Estas expresiones fueron previstas en el análisis a priori.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre en relación a la imagen de la jugada de fútbol.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A1	Al trata de quitar la pelota, los tres chocan de cabeza y aparece un jugador zombi que corre y corre y gana el partido".	A	Porque los zombi no existen.
A7	El del medio le pega a la pelota, le da un pase al de la derecha y goool y termina el partido.	D	Porque en todos los partidos, algún jugador hace un gol.
A14	El del medio se pasa a los otros dos y mete el gol.	E	Porque el jugador puede ser muy bueno.
A13	El que está de espalda ataca de cuerpo al del medio derribando al de la derecha, se va solo y mete el gol.	E	Porque es seguro que con el cuerpo vote al jugador y meta el gol.
A19	El de la derecha llevaba la pelota y los otros intentaban quitársela pero no pudrieron y hicieron un gol y ganaron el partido.	C	"Porque en la imagen se muestra algo parecido".

Estos ejemplos constatan que para A1 y A13 hay concordancia entre la historia, la posibilidad de ocurrencia y la explicación sobre ella pero para A7 y A19 la historia y la explicación son afirmaciones categóricas, ellas entran en contradicción con la posibilidad de ocurrencia asignada, que es de incertidumbre. Esta contradicción revela nuevamente la dificultad de los alumnos para reconocer fenómenos aleatorios.

5.1.2.4 La jugada de futbol en 8º básico.

La tabla 27 corresponde al número de historias escritas por veinticinco alumnos de 8º básico, agrupadas por posibilidad de ocurrencia asignada.

Tabla 27 Número de historias, la jugada de fútbol, 8º básico

Número niños.	Número historias	Posibilidad de historias
		A
8	8	B
25	33	C
6	6	D
1	1	E
		Omite
	48	

Ocho alumnos escriben ocho historias con poca posibilidad de ocurrencia (B), todos los alumnos escribieron treintaitrés historias con posibilidad de incertidumbre C, seis alumnos escriben seis historias con posibilidad D y un alumno le asigna seguridad de ocurrencia, E, a su historia.

En esta tabla se aprecia que los veinticinco alumnos asignan posibilidad de incertidumbre a sus historias y solamente un alumno asigna seguridad de ocurrencia E. Esto significa que la mayoría de los alumnos de 13 años formularon predicciones de incertidumbre y que estas serían sucesos aleatorios.

La tabla 28 precisa las concepciones intuitivas de aleatoriedad de los alumnos de 8º básico.

Tabla 28. Concepciones intuitivas de aleatoriedad, 8º básico

La jugada de fútbol.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad ocurrencia	Nº niños 13 a.	Responde cn incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Número historias
A				
B	8	5	3	8
C	25	22	11	33
D	6	1	5	6
E	1		1	1
Total		28	20	48

Ocho alumnos asignaron posibilidad de ocurrencia B, hay cinco respuestas con incertidumbre y tres respuestas sin incertidumbre.

Veinticinco alumnos asignaron posibilidad C a sus historias, de estas veintidós son respuestas con incertidumbre y once son respuestas sin incertidumbre.
Seis alumnos asignan posibilidad de ocurrencia D, uno de ellos responde con incertidumbre y cinco responden sin incertidumbre. Un alumno que asigna posibilidad E, responde sin incertidumbre cuando se le pide justificar su decisión.

El total de las respuestas que contienen incertidumbre están en la razón 28 de 48. Esto corresponde a 18 alumnos y muestra que más niños de 13 años conciben la incertidumbre en la tarea solicitada, lo que significa que para 18 de 30 alumnos las predicciones, en la jugada de futbol, son un suceso aleatorio.

Aquí la tarea del profesor es buscar estrategias para aprovechar las intuiciones de los alumnos, sus experiencias reales y vincularlas a la noción de probabilidad y los contextos en los que ella se puede calcular.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre en relación a la imagen de la jugada de fútbol.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A19	El jugador 2 vuelve a recuperar el balón.	B	No sé si le van a hacer una falta pero puede ser que no.
A1	El chico número uno hace una falta y le muestran tarjeta.	C	Porque la falta puede que no ocurra.
A2	Un niño que le hace cuerpo al número tres y se cae.	C	Porque sucede que se caiga pero si tiene reflejo puede que no.
A15	El jugador 1 empuja al dos pero este lo esquiva y el jugador 1 choca con el 3.	D	Porque lo más probable que a un jugador de futbol es esquivar algún empujón.

En estos ejemplos constatamos que hay incertidumbre en las respuestas de los alumnos, ya que ponen en duda la ocurrencia del suceso y conciben que la jugada se puede desarrollar de diferentes maneras.
Respuestas como estas han sido previstas en el análisis a priori.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A7	El niño número uno no se deja quitársela y da un pase y gana el campeonato.	C	Porque el niño 2 tiene más fuerza que él y se la puede quitar.
A21	El jugador 3 esquiva a 2 y el jugador 1 mete el gol.	C	Porque el jugador 3 se ve bueno jugando y esquiva al 2
A11	El jugador dos la lleva y dispara pero se le va el balón y gana el	B	Porque tiene mucha ventaja de meter el gol.

	otro equipo.		
A18	El jugador 3 le quita el balón al jugador 2.	D	Porque le metió el pie y le quitaba el balón al jugador.

En estos ejemplos las historias no contienen incertidumbre y las explicaciones tampoco, ellas son categóricas. Sin embargo la posibilidad de ocurrencia asignada es de incertidumbre.

Este resultado interpreta la concepción intuitiva determinista que los niños tienen de la situación, ya que entre la historia y la explicación hay coherencia que se contradice con la posibilidad asignada. Lo que es un síntoma de la dificultad de estos alumnos (7) para reconocer fenómenos aleatorios.
Estos resultados concuerdan con lo previsto en el análisis a priori.

5.1.2.5 Análisis global.

La tabla 29 presenta el número de respuestas con y sin incertidumbre, en todos los niveles, en relación a la imagen la jugada de futbol.

Tabla 29. Síntesis global, la jugada de fútbol

Concepciones intuitivas de aleatoriedad								
Posibilidad ocurrencia	Responde con incertidumbre				Responde sin incertidumbre			
	5º	6º	7º	8º	5º	6º	7º	8º
A					1		1	
B		3	1	5	1	2	1	3
C	8	10	9	22	5	5	5	11
D	2	5	2	1	8	2	7	5
E	2				9		4	1
Total	12	18	12	28	24	9	18	20
Total niños	9	12	12	18				

La última fila muestra el número de niños cuyas respuestas contienen incertidumbre. Estas corresponderían a la evolución en las concepciones intuitivas sobre aleatoriedad, a medida que aumenta la edad.

En quinto básico hay doce respuestas con incertidumbre, estas fueron escritas or nueve niños de veintitrés, en sexto básico doce niños de quince escribieron dieciocho respuestas con incertidumbre, en 7º básico doce alumnos de treinta respondieron con incertidumbre y en 8º básico dieciocho alumnos de veinticinco, justificaron con incertidumbre las posibilidades de ocurrencia de sus historias, reconociendo intuitivamente que el suceso representado en esta imagen es aleatorio.

Estos resultados reflejan que a medida que los niños aumentan de edad sus concepciones intuitivas de aleatoriedad les permiten reconocer la incertidumbre en sucesos aleatorios relacionados con sus experiencias reales.

En sexto y octavo básico aproximadamente las tres cuartas partes de los alumnos justifican con incertidumbre en al menos una de las historias solicitadas, lo que podría ser síntoma de una concepción favorable al reconocimiento de la aleatoriedad. Esto permitiría tomar decisiones para gestionar la enseñanza de la noción de probabilidad, considerando situaciones en el ámbito de las experiencias reales de los alumnos.

En quinto y séptimo aproximadamente el 40% de los alumnos reconocen la aleatoriedad en las historias formuladas, lo que constituye una dificultad para la mayor parte de los alumnos para reconocer esta noción en la escuela y un desafío para el profesor.

Desde el punto de vista teórico, el medio adidáctico generado por las historias permitió a los alumnos formular predicciones bajo incertidumbre, con un 75% de logro aproximado en sexto y octavo básico y 40% de logro en quinto y séptimo básico.

Esta diferencia plantea desafíos y cuestionamientos, al respecto se propone determinar modificaciones necesarias que debería sufrir el medio para que permitiera a los alumnos reconocer la incertidumbre en los fenómenos aleatorios.

5.1.3 Análisis a posteriori: La niña en la ventana.

5.1.3.1 La niña en la ventana en 5º básico.

La tabla 30 corresponde al número de historias escritas por veintitrés alumnos de 5º básico, en la imagen “La niña en la ventana”, agrupadas por posibilidad de ocurrencia asignada.

Tabla 30 Número de historias, la niña en la ventana, 5º básico

Número de niños (10 a.)	Número de Historias	Posibilidad de las historias
1	2	A
4	5	B
5	7	C
3	3	D
9	12	E
4	5	Omite
	34	

Diez niños asignaron seguridad de ocurrencia a sus historias. Esto ïcorresponde a catorce historias con posibilidad de ocurrencia A y E, en la tabla.

Por otra parte hay 15 historias, con posibilidad de incertidumbre. Esto corresponde a diez niños que asignaron posibilidad de ocurrencia B, C y D.

Cuatro niños escriben cinco historias pero no les asignan posibilidad de ocurrencia. Ellos son A1, A10, A22 y A23 y sus historias son:
A1: “La niña está sentada en la ventana” y “La niña está sentada viendo el paisaje”.
A10: “La niña está viendo el paisaje”.
A22: “Los padres de la niña le pegaron y se fue a sentar en la ventana” y
A23: “Que la niña quería ver cómo o quería verla crecer de las plantas”.
Estas historias corresponde a afirmaciones categóricas sobe el suceso en estudio.Las concepciones intuitivas de aleatoriedad, se precisan en la tabla 31.

Tabla 31. Concepciones intuitivas e aleatoriedad, la niña en la ventana, 5º básico.

La niña en la ventana.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad ocurrencia	Nº de niños	Responde cn incertidumbre	Responde sn incertidumbre	Número de historias
A	1		2	2
B	4	2	3	5
C	5	4	3	7
D	1		1	1
E	9		12	12
Omite	4			5
No justifica	1			2
Total		6	21	34

En la última fila, se registra el total de respuestas con y sin incertidumbre.

La columna tres muestra seis repuestas cuyas explicaciones contienen incertidumbre. Aquí cuatro niños asignan posibilidad de ocurrencia C y uno asigna posibilidad B, a dos de sus historias. Luego, cinco niños reconocen la aleatoriedad.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A15	La niña está mirando por la ventana porque extraña a su novio".	C	"Podría que extrañe a alguien o que este triste"
A18	La niña está esperando a alguien	B	"porque no sabemos que estará esperando la niña"
A20	"La niña la mamá no la dejo ir y se quedó mirando por la ventana con una flor al lado"	C	"No creo que pase porque capaz que este triste".

La tabla 31, también muestra que veintiuna historias no contienen incertidumbre, lo que corresponde a 18 niños.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A5	"La niña está viendo a la ventana para afuera y el paisaje"	E	"Porque fue realidad que la niña estaba en la ventana".
A3	"Está tomando aire junto a una planta y descansa	E	"Está descansando en la ventana".
A18	"La niña espera a su mamá"	E	"Porque es seguro".

En todos los ejemplos se aprecia concordancia entre las historias, la posibilidad de ocurrencia y la explicación de la posibilidad en relación a la historia.

A21 escribe dos historias, les asigna seguridad de ocurrencia E pero no las justifica. Sus historias son categóricas por lo que se han clasificado entre las repuestas sin incertidumbre.

A13 escribe dos historias “La niña se cae de la ventana” y “Se abre la ventana”. Se observa que las historias son categóricas, lo que explicaría la posibilidad de ocurrencia asignada, poca posibilidad D, las que no justifica.

5.1.3.2 La niña en la ventana 6º básico.

La tabla 32 corresponde al número de historias escritas por quince alumnos de 6º básico, agrupadas por posibilidad de ocurrencia asignada.

Tabla 32. Número de historias, La niña en la ventana, 6º básico

Número de niños (11 a.)	Número de Historias	Posibilidad de las historias
4	4	A
6	6	B
8	8	C
7	8	D
1	1	E
1	1	Omite
	28	

La tabla muestra que cuatro niños de 11 años asignaron seguridad de ocurrencia a sus historias. Estas corresponden a cinco historias con posibilidad de ocurrencia A y E, en la tabla.

Por otra parte hay 22 historias, con posibilidad de incertidumbre, lo que corresponde a catorce niños que asignaron posibilidad de ocurrencia B, C y D.

Un alumno A15, de 13 años, escribe la historia “La niña esperaba y se calló porque iba corriendo a la ventana”, no asigna posibilidad de ocurrencia y por lo tanto no justifica su decisión.

Las concepciones intuitivas de aleatoriedad, se precisan en la tabla 33.

Tabla 33 Concepciones intuitvas de aleatoriedad, la niña en la ventana, 6º básico

La niña en la ventana.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad ocurrencia	Nº de niños	Responde cn incertidumbre	Responde sn incertidumbre	Número d historias
A	4		4	4
B	5	4	1	5
C	8	5	3	8
D	6	2	5	7
E	1		1	1
Omite	1			1
Total		11	14	26

La última fila registra el total de respuestas con y sin incertidumbre.

La columna tres muestra once repuestas con incertidumbre. Estas corresponden a ocho alumnos que formularon historias en las que concibieron la incertidumbre. Así A2 y A10 asignaron posibilidad B y C a las dos historias que cada uno formulo, A1 y A12 asignaron posibilidad B a una de las historias que cada uno formulo, A4 y A7 asignaron posibilidad de ocurrencia C, A9 asigno posibilidad C y D, A6 asigno posibilidad D a una de sus historias. En total fueron ocho niños que reconocen la aleatoriedad en sus historias.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A2	Está mirando el paisaje que está en la ventana. La niña está en la ventana mirando la flor	C B	Si porque la niña puede estar viendo el paisaje o no. Porque la niña esta mirando hacia la ventana y tiene muy poca posibilidad.
A9	Está mirando a una persona que se fue de su casa.	D	Es posible, pero no es seguro.
A7	La niña observa el hermoso paisaje.	C	No se puede saber con certeza.

La importancia de estos resutados, tanto para el alumno como para el profesor, radica en que han puesto en evidencia conocimientos intuitivos de los alumnos, los que han surgido ante una situación sin intencionalidad didáctica.

Para los alumnos estos corresponden a herramientas personales, las que podrían ser utilizadas en una situación de enseñanza, para aproximarse a la noción de probabilidad, en sus diferentes significados y para el profesor, el conocimiento de las intuiciones probabilísticas de los alumnos le permitiría comprender las posibles dificulatades y contradicciones encontradas, en la gama de significados de la probabilidad como objeto de conocimiento y como objeto de enseñanza, favoreciendo el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta noción.

Retomando los resultados, existen 14 explicaciones que no contienen incertidumbre lo que corresponde a diez niños, quienes dan al menos una explicación categórica en relación a la pregunta planteada.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A11	La niña piensa mientras está sentada en la ventana.	D	Porque la niña está en posición pensativa.
A8	La niña espera a su padre con su hermano en la ventana	E	Sí porque yo creo que ella espera a su padre con su hermano.
A16	La niña pensaba que se iba a caer por miedo a la altura pero después bajo y no se calló.	A	Porque nunca podrá suceder

Este resultado pone en evidencia la dificultad de los alumnos de 11 años para percibir la incertidumbre en la posibilidad de ocurrencia de su historia. Por otra parte, esta tarea provoco en cuatro alumnos concepciones de incertidumbre como de certidumbre ya que en una historia asignaron posibilidad de incertidumbre y en la otra seguridad de ocurrencia, lo que refleja decisiones contradictorias con relación a la aleatoriedad a la edad de 11 años.

Por ejemplo:

A12: Historia 1: “La niña mira ese enorme jardín”. Asigna categóricamente la posibilidad de ocurrencia C y explica: “porque la niña está mirando su jardín”.

A12: Historia 2: “Mira ese paisaje enorme que tiene”. Asigna posibilidad de ocurrencia B y explica con incertidumbre “porque no se si es jardín o es una calle con un buen paisaje”.

Esta dificultad, demanda al profesor organizar medios didácticos que consideren las experiencias reales de los alumnos frente a la incertidumbre y que actúen como antagonista frente a las concepciones no aleatorias que los alumnos atribuyen a situaciones de la vida cotidiana en la que esta noción interviene.

5.1.3.3 La niña en la ventana en 7º básico.

La tabla 34 corresponde al número de historias escritas por treinta alumnos de 7º básico, agrupadas por posibilidad de ocurrencia.

Tabla 34. Número de historias, La niña en la ventana, 7ª básico.

Número de niños, 12 a.	Número Historias	Posibilidad de las historias
4	4	A
7	7	B
11	11	C
4	4	D
4	4	E
		Omite
30	30	

Esta tabla muestra que ocho alumnos asignaron seguridad de ocurrencia a su historia, lo que se refleja en las filas que corresponden a las posibilidades A y E, respectivamente.

Veintidós alumnos asignaron posibilidad de incertidumbre a las historias formuladas. Siete asignan poca posibilidad de ocurrencia (B), once alumnos asignaron posibilidad de incertidumbre C y cuatro asignaron D, es decir alta posibilidad de ocurrencia.

A continuación se precisan las concepciones intuitivas de aleatoriedad de los alumnos de 7º básico.

Tabla 35 Concepciones de aleatoriedad, La niña en la ventana, 7º básico

La niña en la ventana		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad ocurrencia	Nº de niños .	Responde cn incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Número historias
A	4		4	4
B	7	3	4	7
C	11	6	5	11
D	4	1	3	4
E	4		4	4
Total	30	10	20	30

La tabla muestra diez respuestas que contienen incertidumbre. Estas corresponden a 10 alumnos que conciben la incertidumbre en las historias que relataron.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A8	Estaba muy triste y necesitaba desahogarse y se fue a la ventana para pensar bien las cosas.	C	Puede que este triste y necesite desahogarse pero puede que no
A9	Miraba la hermosa vista del jardín desde su ventana y luego apareció su gato a jugar con ella.	C	Porque no sé exactamente si tiene un gato.
A15	Puede que este triste y este mirando el paisaje.	C	Puede que suceda o puede que no porque no sabemos si esta triste o no

Para este resultado se puede precisar que para 10 de los 30 alumnos las predicciones que elaboraron frente a la imagen la niña en la ventana, serían un suceso aleatorio.

La tabla 35 también muestra respuestas sin incertidumbre, las que corresponden a 20 alumnos, resultado registrado en la fila 9, columna 4.

Ejemplos de respuestas donde no se considera la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A2	Espera a su amor que la abandono por otra chica y la ilusiono y la engañó.	C	Porque las mujeres sufren por amor y buscan un lugar tranquilo.
A8	Miraba a los dos vehículos que pasaban por la calle	E	Porque había una calle en la que pasan comúnmente vehículos.
A11	Está mirando por la ventana y se queda dormida.	D	Porque alguien al ver tanto algo se aburre y le da sueño

En estas respuestas se aprecia la concordancia entre la historia y la explicación, pero tanto A2 como A11 asignan posibilidad de incertidumbre, lo que claramente es una contradicción.

5.1.3.4 La niña en la ventana en 8º básico.

La tabla 36 corresponde al número de historias escritas por veinticinco alumnos de 8º básico, agrupadas por posibilidad de ocurrencia asignada.

Tabla 36 Número de historias, La niña en la ventana, 8º básico

Número de niños (13 a.)	Número de Historias	Posibilidad de las historias
		A
6	7	B
12	14	C
13	15	D
4	6	E
		Omite
	42	

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Cuatro alumnos asignaron seguridad de ocurrencia a su historia, lo que se refleja en la fila que corresponden a la posibilidad E.

Veintiún alumnos escribieron 36 historias a las que les asignaron posibilidad de incertidumbre.

Seis alumnos asignan poca posibilidad de ocurrencia (B), doce alumnos asignaron posibilidad de incertidumbre C y trece asignaron D, es decir alta posibilidad de ocurrencia.

Para complementar este resultado, se precisan las concepciones intuitivas de aleatoriedad de los alumnos de 8º básico en la tabla 37.

Tabla 37 Concepciones intuitivas, La niña en la ventana, 8º básico

La niña en la ventana		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad ocurrencia	Nº de niños13 a.	Responde cn incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Número historias
A				
B	6	4	3	7
C	12	9	5	14
D	13	4	11	15
E	4		6	6
Omite				
Total		17	25	42

Esta tabla muestra diecisiete explicaciones que contienen incertidumbre, lo que corresponde a 12 alumnos que respondieron con incertidumbre en al menos una de las explicaciones relativas a sus historias. Estos alumnos conciben la incertidumbre en las historias que relataron.

Este conocimiento intuitivo permitiría a estos alumnos aproximaciones a la noción de aleatoriedad y probabilidad más favorables.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A25	Ve a la carretera y a los autos pasar	D	Porque pudo haber estado llamando nada más.
A14	Está reflexionando sobre algo.	C	Puede estar haciendo cualquier cosa".
	"Cree que va a llover y quiere observar la lluvia	D	Porque puede estar esperando a alguien que justo en la ventana afuera

			hay un camino
A15	Observa la calle junto a la maseta luego se escapa por la ventana.	C	Depende si tiene necesidad de ir a fuera o no

Por otra parte se aprecian veinticinco respuestas sin incertidumbre, lo que corresponde a 18 alumnos que respondieron sin incertidumbre en al menos una de las explicaciones relativas a sus historias. Estos alumnos no lograron concebir la incertidumbre en algunas de las historias que relataron.

Este conocimiento intuitivo dificulta o retarda la aproximación formal a la noción de aleatoriedad y probabilidad en la escuela.

Ejemplos de respuestas en que los alumnos no conciben la incertidumbre .

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A13	Mira lo que pasa afuera.	E	Porque mira hacia afuera a ver qué pasa.
A23	La ventana se rompe y se corta.	B	Porque en ese momento no había nadie que golpee la ventana.
A24	Esta aburrida y no sabe qué hacer	C	Si, así es siempre lo que pasa.

Se aprecia que A13 afirma con seguridad de ocurrencia, A23 y A24 dan una explicación causal para que su historia tenga posibilidad de ocurrir.

En los dos últimos ejemplos, las investigaciones realizadas por Azcarate et all., (1998, p. 91, 93) han identificado que la explicación causal, como las de A23 y

A24, “refleja el fuerte poder de la visión determinista a la hora de enfrentarse con situaciones dominadas por la incertidumbre”.

5.1.3.5 Análisis global.

Las respuestas obtenidas en todos los niveles en relación a la imagen la niña en la ventana, se consignan en la tabla siguiente.

Tabla 38 Sintesis global, concepciones intuitivas de aleatoriedad

Concepciones intuitivas de aleatoriedad								
Posibilidad ocurrencia	Responde con incertidumbre				Responde sin incertidumbre			
	5º	6º	7º	8º	5º	6º	7º	8º
A					2	4	4	
B	2	4	3	4	3	1	4	3
C	4	5	6	9	3	3	5	5
D		2	1	4	1	5	3	1
								1
E					12	1	4	6
Total	6	11	10	17	21	14	20	25
Total de niños	5	7	10	12				

En la última fila de esta tabla, se aprecia la evolución en las concepciones intuitivas sobre aleatoriedad, a medida que aumenta la edad.

En 5º básico, de las 34 historia formuladas, 6 contienen incertidumbre.

El análisis de las respuestas, revela que cinco niños de veintitrés, conciben historias con incertidumbre, lo que les permite reconocer la aleatoriedad en el suceso planteado por la imagen.

En 6º básico los niños formularon 28 historias, 11 de ellas contienen incertidumbre.
Las repuestas analizadas reflejan que siete niños de dieciséis, conciben historias con incertidumbre, lo que les permite reconocer la aleatoriedad en el suceso planteado por la imagen. Estas respuestas reflejan concepciones intuitivas de aleatoriedad.

En 7º básico se formularon 30 historias, 10 de ellas son respuestas con incertidumbre. Estas corresponden a diez alumnos de treinta. Estas respuestas reflejan concepciones intuitivas de aleatoriedad en los alumnos de 12 años.

En 8º básico doce de veinticinco alumnos reconocen la aleatoriedad del suceso, lo que se pone en evidencia en las decisiones tomadas para asignar la posibilidad de ocurrencia y en las 17 de 42 historias que se identificaron con explicaciones que reflejan incertidumbre.

Es claro que ha habido un descenso en el número de respuestas con incertidumbre en todos los niveles, en relación a los resultados obtenidos con la imagen la jugada de futbol. Esto podría estar asociado al tipo de suceso aleatorio planteado, a la formulación de la pregunta para este contexto, a la gestión de la clase u otros aspectos.

Sobre estas variables, Eicher y Vogel (2012) consideran que los alumnos alcanzan niveles de cognición determinados por el tipo de tarea a realizar. En este caso el contexto en el que se plantea la tarea pudo haber afectado la percepción de aleatoriedad esperada.

Aunque se ha producido este fenómeno, los resultados reflejan una evolución gradual en las concepciones sobre aleatoriedad, noción clave en la adquisición del concepto de probabilidad.

5.1.4 Análisis a posteriori: La plantación de tomates.

5.1.4.1 La plantación de tomates en 5° básico.

La tabla 39 corresponde al número de historias escritas y las posibilidades de ocurrencia asignadas por veintitrés niños de 10 años con relación a la imagen “La plantación de tomate”.

Tabla 39. Número de historias, La pantación de tomates, 5º básico

Número de niños (11 a.)	Número Historias	Posibilidad de las historias
		A
2	3	B
3	4	C
5	8	D
10	12	E
4	6	Omite
	33	

La tabla 39 indica que diez niños asignaron seguridad de ocurrencia E a doce historias. Diez niños, asignan posibilidad de incertidumbre, B, C y D a 15 historias.

Estos resultados se confrontan con los que se obtienen de precisar las concepciones intuitivas de aleatoriedad, consignados en la tabla 40.

Tabla 40. Concepciones intutivas, la plantación de tomates, 5º básico

La plantación de tomate.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad de ocurrencia	Nº de niños 10 años	Responde c/incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Número historias
A				
B	2	2	1	3
C	3	2	2	4
D	5	2	6	8
E	10		12	12
Omite	4			
Total		6	21	27

La tabla muestra seis respuestas que contienen incertidumbre, lo que corresponde a 4 niños.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	**Historia**	**Posibilidad**	**Explicación.**
A10	Los tomates van a crecer y ella los venderá. Las plantas se van a convertir en tomates	B B	Porque los tomates los quiebran o roban o crecen en tres meses
A14	Después de esos tres meses los tomates van a estar grandes	C	Porque después de tres meses pueden estar grandes.
A15	La planta se va volver en una planta de tomates y dará obviamente tomates	C	Porque se podría quemarse la mata.

Las explicaciones de A10 y A15 reflejan que este suceso puede dar origen a distintos resultados sin que ninguno de ellos sea predicho con seguridad, lo que es una característica del fenómeno aleatorio.

La explicación de A14 evidencia la incertidumbre en la expresión “después de tres meses pueden estar grandes”.

Por otra parte existen 21 explicaciones que no contienen incertidumbre lo que corresponde a quince niños, quienes dan al menos una explicación categórica en relación a la pregunta planteada.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A3	Va a crecer y van a cosechar y se los van comer.	D	Porque planto para ella comer después.
A6	Había una señora en el campo que estaba plantando tomates y en tres meses más van a estar listos	E	porque los tomates van a estar listos en 3 meses más
A11	Los tomates crecerán y se los comerán.	B	Porque en tres meses crecerán grandes y fuertes Las plantas crecen …
A18	Los tomates crecerán grandes y fuertes		

En cada ejemplo hay respuestas categóricas, las que reflejan concepciones intuitivas sin incertidumbre.

Cuatro alumnos que omiten la posibilidad de ocurrencia de sus historias:

A1: “En tres meses más van a crecer los tomates” y “Esta plantando las plantas para que crezcan”.
A2: “La señora va a sacar tomates” y “No van a salir tomates”,
A22: “Una señora planta tomates y a los 3 meses estaban maduros”.
A23: “Que la Sra. sacará los tomates cuando sean tres meses, estarán muy grandes y la Sra. sacará los tomates”.

Se aprecia que estos relatos podrían dar origen a explicaciones categóricas que reflejarían una concepción determinista del suceso “que pasará con las plantas de la imagen en tres meses más”.

5.1.4.2 La plantación de tomates en Sexto básico.

La tabla 41 corresponde al número de historias y sus posibilidades de ocurrencia, escritas por dieciséis niños de 11 años.

Tabla 41 Número de historias, La plantación de tomates, 6º básico

Número de niños (11 a.)	Número de Historias	Posibilidad de las historias
1	1	A
3	3	B
8	10	C
7	8	D
5	6	E
		Omite
	28	

Esta tabla muestra que hay siete historias a las que cinco niños les asignaron seguridad de ocurrencia E y un niño le asigno posibilidad de ocurrencia A.

Por otra parte se constatan 21 historias, escritas por doce niños, quienes asignan posibilidad de ocurrencia de incertidumbre. Estas corresponden a las letras B, C y D, de la tabla.

Confrontamos este resultado con los que se obtienen al precisar las concepciones intuitivas de aleatoriedad, consignadas en la tabla 42.

Tabla 42 *Concepciones intuitivas de aleatoriedad, La plantación de tomate, 6º básico*

La plantación de tomate.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad de ocurrencia	Nº de niños 11 años	Responde on incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Número historias
A	1		1	1
B	3	1	2	3
C	8	5	5	10
D	7	4	4	8
E	5		6	6
Total		10	18	28

Esta tabla muestra diez respuestas que contienen incertidumbre, lo que corresponde a 7 niños. Estos niños dan al menos una explicación en las que se aprecia la incertidumbre en su respuesta.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A5	Los tomates crecen grandes.	C	Porque puede llegar a pasar que no van a crecer.
	Crecerán y saldrán tomates.		Posible pero puede que no

A9	Se pueden secar y no salen tomates	D	ocurra
A16	La señora en tres meses más tendrá tomates	C	Porque a lo mejor no podría ocurrir

En estos ejemplos, las explicaciones de los alumnos ponen en duda la posibilidad de ocurrencia asignada a sus historias.

Por otra parte existen 18 explicaciones que no contienen incertidumbre lo que corresponde a doce niños, quienes dan al menos una explicación categórica en relación a la pregunta planteada.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A2	Va a ocurrir que las plantas de tomates van a crecer y van a tener tomates.	D	Porque esto puede pasar si los cuidan bien.
A3	Las plantas crecerán y darán tomates.	E	Porque todas las plantas crecen
A6	El tomate lo dejan plantado pero lo van a regar de vez en cuando y después de tres meses crecen.	D	Es muy posible que crezcan bien porque los van a regar.

En cada ejemplo las historias son categóricas y reflejarían concepciones intuitivas que no conciben la aleatoriedad, en este suceso.

5.1.4.3 La plantación de tomates. Séptimo básico.

La tabla 43 corresponde al número de historias y sus posibilidades de ocurrencia, escritas por treintaiún alumnos de 12 años.

Tabla 43 Número de historias, la plantación de tomates, 7º básico

Número de niños (12 a.)	Número de Historias	Posibilidad de las historias
1	1	A
1	1	B
10	10	C
8	8	D
9	9	E
2	2	Omite
31	29	

Diez alumnos asignaron seguridad de ocurrencia a sus historias. Nueve de ellos asignaron seguridad de ocurrencia E y uno imposibilidad de ocurrencia A.

Por otra parte 19 alumnos escribieron al menos una historia asignando posibilidad de ocurrencia de incertidumbre. Estas corresponden a las letras B, C y D, de la tabla.

Confrontamos este resultado con los que se obtienen al precisar las concepciones intuitivas de aleatoriedad, consignadas en la tabla 44.

Tabla 44 Concepciones intutivas de aleatoriedad, La plantación de tomates, 7º básico

La plantación de tomate.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad ocurrencia	Nº de niños 12 años	Responde cn incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Número historias
A	1		1	1
B	1		1	1
C	10	7	3	10
D	8	3	5	8
E	9		9	9
Omite	2			0
Total		10	19	29

Diez alumnos responden con incertidumbre.

Este resultado pone en evidencia que estos alumnos podrían tener concepciones intuitivas de aleatoriedad ante situaciones como la planteada.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	**Historia**	**Posibilidad**	**Explicación.**
A2	La Sra. Elena vende los tomates	C	Porque ella puede venderlos, se los puede comer o se pueden marchitar.
A8	La planta 1 crece más que las otras pero una gallina la picotea.	C	puede pasar que crezca y que la picotee una gallina
A9	Al recoger tomates, la Sra. Elena no se da cuenta y aplasta un par de esas plantas	C	Porque aunque hay muchas probabilidades de que lo tomates crezcan bien, también hay probabilidades de que la plantas se sequen.

En estos ejemplos, la incertidumbre en las historias de A2 y A9 se pone en evidencia en otros sucesos susceptibles de ocurrir. Para A2 “se podrían marchitar” y para A9, “hay probabilidad de que se sequen”.

A8 pone en evidencia la incertidumbre en la expresión “puede que …”.

También hay 19 explicaciones que no contienen incertidumbre lo que corresponde a diecinueve alumnos, quienes dan una explicación categórica en relación a la pregunta planteada.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A13	Crecen los tomates.	E	Es seguro que crezcan
A14	Los tomates crecen y los venden a una fábrica que hizo kétchup con ellos	C	Porque la fábrica compra los mejores tomates para hacer kétchup.
A17	La planta va a crecer y dara tomates para comerlos	D	Porque eso pasa con los tomates.

En A14 y A17, se aprecian historias y explicaciones categóricas, lo que reflejaría que no conciben ni reconocen la incertidumbre en el desarrollo de este suceso. Al mismo tiempo se advierte contradicción con la posibilidad de ocurrencia, que ellos asignan, C y D, ya que estas son de incertidumbre.

En el caso de A13 hay coherencia entre la historia, la explicación y la posibilidad de ocurrencia asignada.

5.1.4.4 La plantación de tomates. Octavo básico.

La tabla 45 corresponde a las historias escritas por veinticinco alumnos de 13 años.

Tabla 45 Número de historias, La plantación de tomates, 8º básico

Número de niños (11 a.)	Número de Historias	Posibilidad de las historias
		A
10	10	B
11	13	C
11	12	D
6	7	E
		Omite
	42	

Seis alumnos de 13 años asignaron seguridad de ocurrencia E a las siete historias que formularon.

Diecinueve alumnos escribieron al menos una historia asignando posibilidad de ocurrencia de incertidumbre. Estas corresponden a las letras B, C y D, de la tabla.

Se confrontan estos resultados con los obtenidos al precisar las concepciones intuitivas de aleatoriedad, consignadas en la tabla 46.

Tabla 46. Concepciones intuitivas de aleatoriedad, la plantación de tomates, 8º básico

La plantación de tomate.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad ocurrencia	Nº de niños 13 años	Responde cn incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Número historias
A				
B	10	6	4	10
C	11	8	5	13
D	11	2	10	12
E	6		7	7
Total		16	26	42

Dieciséis respuestas contienen incertidumbre, lo que corresponde a trece alumnos.

Este resultado pone en evidencia que estos alumnos podrían tener concepciones intuitivas de aleatoriedad en situaciones como la plantead.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A1	Los tomates se desarrollaran.	B	Porque si la Sra. los cuida como se debe puede que se desarrollen
A3	La planta se secara por demasiado sol y agua	C	Ppuede ser por falta de agua
A4	En tres meses los tomates van a estar buenos	B	También pueden llegar pájaros y los echan a perder

En estos ejemplos, las explicaciones de A3 y A4 evidencian factores que pudieran interrumpir el crecimiento esperado de la planta, concibiendo incertidumbre en la historia formulada.

A1 desarrolla una explicación causal “si la Sra. los cuida como se debe …” que contiene incertidumbre en la expresión “… puede que se desarrollen”.

Por otra parte hay 26 explicaciones que no contienen incertidumbre lo que corresponde a diecisiete alumnos, quienes dan al menos una explicación categórica en relación a la pregunta planteada.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre.

Alumno	**Historia**	**Posibilidad**	**Explicación.**
A16	Van a crecer y los comeremos	E	Porque los tomates son para comer.
A18	Arrancaran el tomate y se lo comerán.	C	Porque plantaron tomate para comerlos.
A23	Van a crecer y dar tomates	C	Porque la planta crece y da frutos
A24	La planta crecerá y dará tomates	D	Si puede pasar ya que así es siempre lo que pasa

Las historias y explicaciones de A18, A23 y A24 son categóricas, lo que reflejaría que no conciben ni reconocen la incertidumbre en el desarrollo de este suceso. Al mismo tiempo se advierte contradicción con la posibilidad de ocurrencia, que ellos asignan, ya que estas son de incertidumbre.
En el caso de A16 hay coherencia entre la historia, la explicación y la posibilidad de ocurrencia asignada.

5.1.4.5 Análisis Global.

Respuestas obtenidas con relación a la imagen la plantación de tomate.

Tabla 47. Sintesis Global, Concepciones Intutivas de aleatoriedad

Posibilidad ocurrencia	Responde con incertidumbre				Responde sin incertidumbre			
	5º	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°
A						1	1	
B	2	1		4	1	2	1	3
C	2	5	7	9	2	5	3	5
D	2	4	3	4	6	4	5	11
E					12	6	9	6
Total	6	10	10	17	21	18	19	25
Total niños	4	7	10	12				

La última fila de la tabla 47 presenta la evolución en las concepciones intuitivas sobre aleatoriedad, lo que se constata en el aumento de alumnos que responden con incertidumbre.

En los distintos niveles, los niños formularon historias, las cuales contienen incertidumbe. En quinto básico, cuatro niños de veintitrés formularon 6 historias, en 6º básico siete niños de dieciséis formularon 10 respuestas con incertidumbre, en 7º básico 10 alumnos de treinta respondieron con incertidumbre. Esto es la tercera parte de los alumnos y en 8º básico, doce alumnos formularon 18 respuestas con incertidumbre Lo que reflejaría concepciones intuitivas de aleatoriedad, frente al suceso generado por la imagen y la consigna dada.

Este resultado podría señalar que los alumnos reconocieron la aleatoriedad, en las decisiones tomadas, para asignar la posibilidad de ocurrencia, para esta imagen, evidenciando que a medida que la edad de los alumnos aumenta se produce evolución en las concepciones intuitivas sobre aleatoriedad.

Los datos muestran que en sexto y octavo básico aproximadamente la mitad de los alumnos manifiestan reconocer la incertidumbre en algunas de las historias que formularon.

Para estos alumnos, el contexto de lo que podría suceder con una muestra pequeña, de una gran población (como lo es un huerto), reflejaría que consideran la incertidumbre como noción que intervine en las explicaciones sobre el suceso.

En quinto básico, la octava parte del curso reconoce, intuitivamente, que en el desarrollo del suceso interviene la incertidumbre.

En séptimo básico se aprecia que aproximadamente la tercera , 10 de 30 alumnos reconocen la aleatoriedad, lo que constituye una dificultad para el reconocimiento de esta noción en la escuela y un desafío para el profesor.

5.1.5 Análisis a posteriori: La puesta de sol.

5.1.5.1 La puesta de sol. Quinto básico.

La tabla 48 corresponde al número de historias y sus posibilidades de ocurrencia, escritas por veintitrés alumnos de 10 años considerando la imagen la puesta de sol.

Tabla 48. Número de historias, la puesta de sol, 5º básico.

Número de niños (10a.)	Número de Historias	Posibilidad de las historias
		A
1	1	B
3	4	C
5	6	D
12	14	E
4	5	Omite
	30	

Doce alumnos asignaron seguridad de ocurrencia E a catorce historias relatadas.

Por otra parte ocho alumnos escribieron historias a las que asignaron posibilidad de incertidumbre. Estas corresponden a las letras B, C y D, de la tabla.

Se Confronta este resultado con los que se obtienen al precisar las concepciones intuitivas de aleatoriedad, consignadas en la tabla 49.

Tabla 49 Concepciones intutivas de aleatoriedad, la puesta de sol, 5º básico.

La puesta de sol.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad ocurrencia	Nº de niños 10 años	Responde cincertidumbre	Responde sin incertidumbre	Número historias
A				
B	1		1	1
C	3	1	3	4
D	5		6	6
E	12		14	14
Omite	4		5	5
Total		1	29	30

El alumno A12 explica con incertidumbre la posibilidad de ocurrencia asignada. Su historia es: "después (*de dos horas*) va a volver *(el sol*) en la mañana". Asigna posibilidad de ocurrencia C (posible) y explica "porque va volver o no".

Diecinueve alumnos escribieron 24 explicaciones que no contienen incertidumbre. Estos alumnos plantean explicaciones categóricas en relación a la pregunta planteada.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre.

Alumno	**Historia**	**Posibilidad**	**Explicación.**
A2	Se viene la luna porque ya se fue el sol.	E	Porque ya era tarde
A4	En dos horas más pasa que se fuera a encenderse y fue el fin del mundo	B	Imposible que se vuelva real.
A8	En dos horas más el sol ya se abra escondido	C	Porque el sol siempre se esconde en el mar.

En A2 existe coherencia entre la historia, la explicación y la posibilidad de ocurrencia. A4 y A8 escriben historias y explicaciones categóricas pero asignan posibilidad de ocurrencia con incertidumbre lo que revela una contradicción

En la penúltima fila, cuarta columna, la tabla muestra cinco respuestas, de cuatro alumnos, quienes escribieron historias pero no asignaron posibilidad de ocurrencia. Las historias formuladas son categóricas por lo que las clasificamos como sin incertidumbre.

Dos de estas historias son:A1: "En dos minutos más (*el sol)* va hacer una figura.

A22: "Una tarde en la playa en la puesta de sol fueron unas personas y después volvieron a las dos horas y no estaba la puesta de sol, había un luna".

5.1.5.2 La puesta de sol. Sexto básico.

La tabla 50 corresponde a las historias escritas por dieciséis alumnos de 11 años.

Cabe señalar que en esta situación los alumnos trabajaron en pareja, escribiendo dos historias comunes y asignándoles la posibilidad de ocurrencia. Por ello la tabla contabiliza 17 historias diferentes.

Tabla 50 Número de historias, la puesta de sol, 6º básico

Número de niños (11 a.)	Número de Historias	Posibilidad de las historias
6	4	A
		B
4	2	C
2	2	D
13	9	E
	17	Total

Los 16 alumnos asignaron seguridad de ocurrencia en al menos una de sus historias. Trece alumnos asignaron posibilidad E y seis imposibilidad de ocurrencia A.

Por otra parte seis alumnos escribieron una historia asignando posibilidad de ocurrencia de incertidumbre, las que corresponden a las letras C y D, de la tabla.

Se confronta este resultado con los que se obtienen al precisar las concepciones intuitivas de aleatoriedad, consignadas en la tabla 51.

Tabla 51 Concepciones intuitivas de aleatoriedad, la puesta de sol, 6º básico

La puesta de sol.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad de ocurrencia	Nº de niños 11 años	Responde cn incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Número historias
A	6		4	4
B				
C	4	2		2
D	2		2	2
E	13	1	8	9
Total		3	14	17

Tres parejas de alumnos escribieron tres explicaciones con incertidumbre.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A3 - A4	Se va hacer de noche y va a parecer la luna	C	Porque algunas veces la luna sale.
A15 - A16	Va a estar saliendo la luna.	C	No se sabe si va a salir la luna.

A9 - A10	El mar se está oscureciendo por el sol.	E	Es posible que se oscurezca.

Las historias de A3 - A4 y A15 - A16 son afirmaciones categóricas pero la explicaciones, ponen en duda la ocurrencia de la historia que han formulado, lo que permite percibir contradicción en sus respuestas. Además estos alumnos cambian el suceso planteado “que ocurrirá en el horizonte dos horas más tarde por el suceso “saldrá o no saldrá la luna”, lo que podría significar que agregan suposiciones subjetivas que los inducen a responder de esta manera.
A9 y A10 plantean una historia categórica que es coherente con la seguridad de ocurrencia que les asignaron, pero la explicación que dan es de incertidumbre y por lo tanto no hay coherencia con los aspectos señalados de su respuesta.

Los dieciséis alumnos escribieron al menos una explicación que no contiene incertidumbre. Estos alumnos plantean explicaciones categóricas en relación a la pregunta planteada.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre.

Alumno	**Historia**	**Posibilidad**	**Explicación.**
A1 – A2	Se va hacer de noche.	E	Porque siempre es así.
A5 - A6	Va a salir la luna	E	Porque se ase de noche y la luna sale.
A7 – A8	El rey marino oculta el sol.	A	Porque es imposible que haya un rey marino que oculte el sol

5.1.5.3 La puesta de sol. Séptimo básico.

La tabla 52 corresponde a las historias escritas por treintaiún alumnos de 12 años, los que trabajaron en forma individual.

Tabla 52 Número de historias, la puesta de sol, 7º básico

Número de niños (12 a.)	Número de historias	Posibilidad de las historias
6	6	A
6	6	B
5	5	C
4	4	D
8	8	E
2	2	Omite
31	29	

Catorce alumnos asignaron seguridad de ocurrencia a sus historias. Ocho de ellos asignaron posibilidad E y seis imposibilidad de ocurrencia A.
Por otra parte quince alumnos escribieron una historia asignando posibilidad de ocurrencia con incertidumbre. Estas corresponden a las letras B, C y D, de la tabla.

La tabla 53 precisa las concepciones intuitivas de aleatoriedad.

Tabla 53. Concepciones intuitivas de aleatoriedad, la puesta de sol, 7º básico

La puesta de sol.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad de ocurrencia	Nº de niños 12 años	Responde cn incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Número de historias
A	6	1	5	6
B	6	1	5	6
C	5	2	3	5
D	4		4	4
E	8	1	7	8
Omite	2			2
Total	29	5	24	29

Cinco alumnos escribieron historias con incertidumbre.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	**Historia**	**Posibilidad**	**Explicación.**
A26	Llega una pareja y ve el atardecer hasta que se oculta el sol	C	Porque puede ser que pase otra cosa.
A27	Se pone a llover, también salen nubes y tapan el sol	E	Si puede pasar porque es natural, o sea, que no se puede saber si lloverá
A30	Que dos horas más tarde al oscurecer va a ocurrir un tsunami.	B	Porque no sabemos si hay alerta de tsunami.

La historia de A26 claramente no se relaciona con lo solicitado, ella es categórica, entrando en contradicción con la posibilidad de ocurrencia y con la explicación de incertidumbre que asigna.

A27 escribe una historia categórica a la que asigna seguridad de ocurrencia, sin embargo en su explicación hay incertidumbre, lo que se contradice con su afirmación anterior.

A30 escribe una historia categórica a la que asigna posibilidad de incertidumbre B, en concordancia con su explicación.

Veinticuatro alumnos escribieron 24 explicaciones que no contienen incertidumbre, ellos plantean explicaciones categóricas en relación a lo solicitado.

Ejemplos de respuestas donde no se concibe la incertidumbre

Alumno	**Historia**	**Posibilidad**	**Explicación.**
A28	Salta una ballena tapando el sol y después el sol se oculta	B	Porque es muy difícil que una ballena tape el sol y además no son tan grandes para eso
A31	El sol se termina de esconder en el horizonte. . El sol se sumergirá en el agua y se apagará.	E A	Es seguro porque el sol siempre se va al final del día. Es imposible apagar una bola de fuego tan grande

A28 elabora una historia coherente con la explicación pero asigna posibilidad de ocurrencia B, lo que es una contradicción.

A31 elabora dos historias en las que existe coherencia entre la explicación y la posibilidad de ocurrencia asignada.

Para esta situación, en la mayoría de las historias se aprecian explicaciones categóricas. Este resultado constata que los alumnos conciben la ocurrencia del

suceso en historias como “se hará de noche”, “el sol se ocultara” y otras que reflejan la seguridad de ocurrencia en este suceso.
Estas respuestas fueron previstas en el análisis a priori.

5.1.5.4 La puesta de sol en 8° Básico.

La tabla 54 corresponde a las historias escritas por veinticinco alumnos de 13 años.

Tabla 54. Número de historias, la puesta de sol, 8º básico

Número de niños (13 a.)	Número de Historias	Posibilidad de las historias
2	3	A
2	2	B
4	4	C
3	3	D
22	26	E
	38	Total

Veintitrés alumnos asignaron seguridad de ocurrencia a catorce historias relatadas. Veintidós alumnos asignaron seguridad de ocurrencia E y dos asignaron imposibilidad de ocurrencia A.

Por otra parte tres alumnos escribieron historias a las que asignaron posibilidad de incertidumbre, las que corresponden a las letras B, C y D, de la tabla.
Confrontamos este resultado con los que se obtienen al precisar las concepciones intuitivas de aleatoriedad, consignadas en la tabla 55.

Tabla 55 Concepciones intuitivas de aleatoriedad, la puesa de sol, 8º básico.

La puesta de sol.		Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Posibilidad ocurrencia	Nº de niños, 13 años	Responde cn incertidumbre	Responde sin incertidumbre	Número historias
A	2		3	3
B	2	2		2
C	4	1	3	4
D	3		2	2
E	22		26	26
Sin clasificar	1		1	1
Total		3	35	38

Tres alumnos responden con incertidumbre, lo que se refleja en expresiones como: “hay poca probabilidad…”, “podría pasar” y “puede que ocurra o no”.

Ejemplos de respuestas donde se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A21	Va a estar la luna brillando y se va a ver reflejada en el mar	B	Porque hay poca probabilidad porque la luna no puede brillar todos los días.
A3	Van a salir figuras como una sombra.	B	Porque podría pasar.
A7	La marea puede subir mucho y puede pasar algo muy malo	C	Porque puede que ocurra o no

Los alumnos formularon explicaciones que no contienen incertidumbre y plantean afirmaciones categóricas en relación a la pregunta planteada.

Ejemplos de respuesas donde no se concibe la incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A5	El sol se esconderá y saldrá la luna y la marea subirá. No se podrá observar el fondo	E	Porque es natural eso en nuestro planeta Porque llegara la noche y se hara poco posible
A7	Va a llegar la noche y el sol ya no va a estar.	E	Porque todas las noches se esconde el sol.
A15	El sol se oculta y nacen tortugas y llegan al mar sanas y salvas	A	ya que las tortugas nacen durante el día o en el atardecer y no en la noche.

En A5 y A15, existe coherencia entre la historia, la explicación y la posibilidad de ocurrencia, sin embargo A7 asigna posibilidad de ocurrencia de incertidumbre (B), la que no es coherente con lo categórico de la historia y su explicación.

La tabla muestra, en la penúltima fila, a un alumno que escribe una historia que no pudo ser clasificada.

A18 escribe: “Va a salir la luna”. Asigna posibilidad de ocurrencia D y explica: “en la playa en la noche hace mucho frio”.

La historia formulada es categórica pero la explicación no es coherente con lo solicitado.

5.1.5.5 Análisis Global.

La tabla 56 presenta el número de respuestas con y sin incertidumbre, en todos los niveles con relación a la imagen la puesta de sol.

Tabla 56. Sintesis global, concepciones intuitvas de aleatoriedad

Concepciones intuitivas de aleatoriedad								
Posibilidad ocurrencia	Responde con incertidumbre				Responde sin incertidumbre			
	5º	6º	7º	8º	5º	6º	7º	8º
A			1			4	5	3
B			1	2	1		5	
C	1	2	2	1	3		3	3
D					6	2	4	2
E		1	1		14	8	7	26
Total	1	3	5	3	24	14	24	35
Total niños					19	14	24	22

Las cuatro columnas de la derecha, muestran la cantidad de repuestas sin incertidumbre y que los alumnos concibieron la certeza del suceso propuesto.

En 5º básico 19 de veintitrés alumnos asignaron seguridad de ocurrencia a sus historias. En 6º básico diez alumnos de dieciséis asignaron seguridad de ocurrencia y otros cuatro asignan posibilidad de incertidumbre C o D pero sus explicaciones reflejan que conciben que anochecerá. En 7º básico, veinticuatro alumnos de treinta y en 8º veintidós alumnos de veinticinco asignaron seguridad de ocurrencia a sus historias.
Por otra parte, la tabla muestra resultados en los que las respuestas contienen incertidumbre.

De acuerdo al análisis realizado, se constata que los alumnos cambian el foco de lo solicitado y las predicciones las realizan en relación a un supuesto no considerado en la consigna. Por lo tanto la explicación carece de sentido.

Por ejemplo A12 escribe “El señor está viendo el sol y en dos horas más seba ir al otro lado del planeta y después va a volver en la mañana”. Asigna posibilidad C y justifica con incertidumbre “porque va a volver o no”.

5.1.5.6 La jugada de básquet. Respuestas en la puesta en común.

Esta imagen corresponde a un tiro de básquetbol que va entrando a la canasta para marcar un punto. La profesora la proyecta y llama la atención de los alumnos para que la observen. Luego les pregunta ¿qué sucederá con la pelota en el instante siguiente?

Las respuestas de los niños son recogidas de la puesta en común, registrada en la videograbación (solo los alumnos de 7º dejan registros escritos).

El análisis por nivel es el siguiente:

La jugada de básquet, puesta en común en 5º básico.

En la puesta en común, algunos alumnos relatan historias como las siguientes:

A2 “se va a caer”

A7 “yo creo que va a caer”

A12 “va a pasar por el cesto y anotar un punto”

A9 “se va a sacar la mugre” (en el sentido de que va a caer)

P dirigiéndose a A7 ¿qué posibilidad le asignas a tu respuesta?

A7. Una E (seguridad de ocurrencia)

P. Al curso ¿Qué tipo de historias podríamos formular con esta imagen?

A20 “Que ganan, porque está metiendo un gol ..”

P. ¿Con qué nivel de posibilidad la pelota va caer?

A7 y otros Seguro (posibilidad E)

A16 y otros dicen Posible, es posible.

Esta diferencia produce discusiones entre los alumnos,

A16 dice *“*o sea yo creo que es posible, seguro no podría ser porque si no la pelota no estaría en el aro, estaría cerca pero no en el aro”*.*

A15, confirmando la explicación de A16 *“*y está dentro de la malla”.

P solicita a A15 que asigne posibilidad de ocurrencia.

A15 responde D (Muy posible)

A17 dice “podría ser posible porque la pelota está dentro de la malla y puede meter un gol”.

En esta respuesta se evidencia una contradicción. A17 utiliza vocablos de incertidumbre: podría ser posible …; y puede… pero también afirma de manera categórica que la pelota está dentro de la malla, lo que indica una certeza de ocurrencia. En este sentido, para estos alumnos el suceso es seguro.

P, pregunta ¿qué posibilidad le asignarían a estas historias? Algunos responden es seguro y otros es posible.

Se produce un instante de discusión entre los alumnos en torno a la posibilidad de ocurrencia del suceso.

P: entonces esa historia es segura o es posible?

A10 y A7: “es seguro”.

Al parecer A16, A15 y A17 conciben lo posible como lo seguro. Si se interpreta la explicación de A16 se tiene que lo seguro es lo que podría suceder y lo posible es lo que estaría sucediendo

P y, ¿podría ocurrir otra cosa?

A7: Que la pelota se quede atrapada en la maya.

P: Eso puede pasar?

Algunos: ¿¿Nooo!!

A17 Baja por el peso.

Los alumnos no aceptan la historia de A7 y A17 da una explicación coherente ante este hecho.
Se observa que los niños conciben este suceso como predecible y que algunos de ellos, en particular A15, A16 y A170 confunden el significado cotidiano de lo seguro con lo posible, lo que podría ser un obstáculo para la adquisición de la incertidumbre, la aleatoriedad y la probabilidad.

En la puesta en común, los alumnos formulan historias de certeza y asignan sus posibilidades de ocurrencia. La discusión por la diferencia de opiniones, deja en evidencia que para algunos alumnos de 10 años las palabras seguro y posible no tienen el mismo significado que para los diseñadores del currículo y los profesores. La organización del medio didáctico por parte de estos dos actores deberían tener en consideración los significados que los alumnos atribuyen a las palabras del lenguaje natural, relacionadas en particular con la incertidumbre y la noción de aleatoriedad para aunar criterios de significado de estas palabras y corregir las concepciones que se desvían de lo socialmente establecido.

La jugada de básquet, puesta en común en 6º básico.

En la puesta en común, los alumnos relatan historias como las siguientes:

A7 Va a anotar un gol.
A9 Va anotar un punto.
A6 puede ser que él antes de tirar la pelota para abajo otra persona del otro equipo, salte y la saque por debajo"
P: ¿Qué posibilidad le das a tu historia?
A7 A; A5 E
A15: Ya entro en el aro, ya es gol.
A6 Pero tiene que entrar toda

A15: No po ya entro. No es posible, después que vaya corriendo alguien y sacar la pelota antes de que caiga, no ¿cómo? Se ve ahí está la imagen. “

A12 No, la pelota ya está dentro del aro, ya se marcó el gol. El jugador no la puede sacar.

P ¿Qué posibilidad le das a tu historia?

A12 Una E

A15 yo también estoy de acuerdo con él.

A12 anota el punto, con posibilidad E

A8 el basquetbolista va a anotar el punto, con posibilidad E

P ¿Hay muchas historias que formular.

Algunos Nooo.

P ¿Cuál sería la única historia?

A15 y otros que (la pelota) va a caer.

La jugada de básquet, puesta en común en 7º básico.

En la imagen la jugada de básquet, doce alumnos formulan historias relacionadas con que “la pelota cae al piso y anota un punto”, asignan seguridad de ocurrencia E y explican “porque se ve que la pelota está en el aro”.

Ejemplo de respuestas con seguridad de ocurrencia.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A12	La pelota va a caer, y entro y ¡punto!	E	Porque ya está dentro del aro
A22	Encestó y al final ganaron el partido	E	Porque le encesto al aro.
A26	Va a entrar en el aro	E	Porque se ve en la imagen que está entrando al aro.
A30	Que la pelota caerá y rebotara	A	Imposible porque al caer la

	y le tocara al aliado del jugador y meterá un gol		pelota después del punto vuelve a comenzar el juego.

Se observa coherencia entre la historia formulada, la posibilidad de ocurrencia elegida y las explicaciones.

Cinco alumnos escriben historias categóricas y asignan posibilidad de ocurrencia, con explicaciones que contienen incertidumbre.

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A25	El jugador encesta la pelota dando puntos a su equipo y la pelota cae "vencedora".	D	Es seguro pero no al 100%porque pueden haber faltas
A20	La pelota reboto después de que la encestaran y así prosiguió el juego.	C	Yo creo que es posible ya que en el básquet puede pasar eso
A16	Encesta en la cesta y ganan el partido.	C	Muy probable porque en la imagen sale que está a punto de entrar.
A8	La pelota cae y rebotara hasta que otro jugador la tome y enceste	E	Ya que es muy probable que la pelota al caer quede en las manos de otro jugador.
A15	La pelota entra al aro rebota y le pega a un niño	D	Porque le puede pegar a una persona adulta o niño.

En cada caso las historias dan cuenta de lo previsto en el análisis a priori, el suceso es seguro, pero existe inconsistencia con la posibilidad de ocurrencia elegida y con las explicaciones formuladas, puesto que estas reflejan incertidumbre.

Doce alumnos escriben historias cambiando el foco de la consigna y agregando suposiciones no consideradas en la consigna.
Ejemplo de respuestas en las que los alumnos agregan suposiciones no consideradas en la consigna:

Alumno	Historia	Posibilidad	Explicación.
A14	El balón se cae después del punto y cae en un charco	B	Porque pasan barriendo la cancha y se darían cuenta.
A13	Se va a quedar atrapada en la maya y el juego se suspenderá	D	Porque algunas mayas son angostas y puede que se quede atrapada.
A11	La pelota se revienta en el aire	C	Porque se puede reventar como un globo.

Se aprecia en este último grupo que sus suposiciones les hicieron formular historias centradas en aspectos no considerados en la consigna, les hicieron dudar, asignando posibilidad de ocurrencia de incertidumbre y explicaciones no previstas en el análisis a priori.

La jugada de básquet, puesta en común en 8º básico.

En la puesta en común, algunos alumnos relatan historias como las siguientes:

A7: Va a caer y a rebotar en el piso.
A15: Baja por la malla.
A5: cae por la mala y hace el punto.
P: ¡Qué posibilidad le asignan?
A24 y otros: 100% de seguridad.
A17: si 100% que hace el punto.
A12: E seguro que cae.

En la interacción de la clase los alumnos consideran que las historias formuladas:

A8 “pueden pasar o no”,.

A24 “son dudosas”

A22 “son unas hipótesis, o sea unas creaciones de lo que uno cree que puede pasar”.

En esta interacción fue posible valorizar numéricamente las posibilidades de ocurrencia consignadas en la tabla de posibilidades. A una seguridad de ocurrencia los alumnos asignan:

A5 “99%”; A9 “100%”.

A16 dice “yo le daría 80% porque uno no sabe qué puede pasar en el tiempo”, A15 responde a A16 y dice “no, pero 80% sería muy probable y no un sí o sí”. Aún hay alumnos que asignan 99% de ocurrencia a un suceso seguro, como A3, A13 y A18. La investigadora pregunta, ¿Por qué 99%, qué ocurre con el 1%, qué representa este 1%? Algunos alumnos acuerdan que:

A19 y A15 “el 1% es de no ocurrir” y luego los alumnos acuerdan que un suceso seguro tiene 100% posibilidad de ocurrencia, el suceso imposible 0% de posibilidad de ocurrencia, el suceso poco posible el 20% o 25% de posibilidad de ocurrencia, el suceso posible un 30, 40 y 50% de posibilidad de ocurrencia y el muy posible un 75 u 80% de posibilidad de ocurrencia.

Se evidencia que los alumnos en los distintos niveles perciben la seguridad de ocurrencia del suceso. Algunos alumnos más pequeños (10 años) han adquirido, al parecer en sus experiencias reales, concepciones no convencionales sobre el significado de las palabras posible y seguro, las que caracterizan a la aleatoriedad. Estas confusiones, que en un modelo tradicional de enseñanza son obstáculo para el aprendizaje de la probabilidad, en este modelo de clase pueden ser superadas tanto por las discusiones entre pares generadas en la interacción en la puesta en común, como por los proceso de devolución e institucionalización a cargo de la profesora/profesor.

5.1.6 Síntesis global en relación a las imágenes.

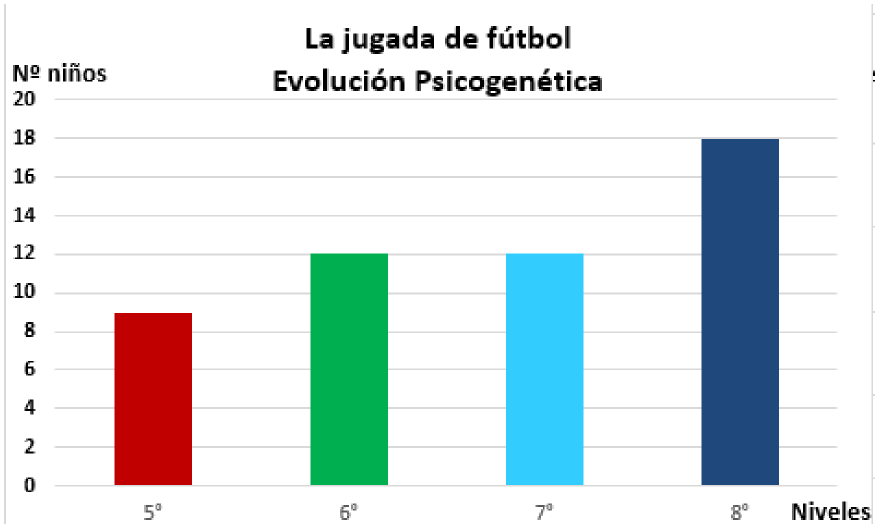
La tabla 57 presenta una síntesis sobre la cantidad de alumnos que pusieron en juego concepciones intuitivas de aleatoriedad al elaborar predicciones frente a sucesos aleatorios proporcionados por las tres primeras imágenes.

Tabla 57: Sintesis global, concepciones intuitvas de aleatoriedad

	Concepciones intuitivas de aleatoriedad		
Curso	Jugada futbol	Niña ventan	Plantación tomates
5º	9	5	4
6º	12	7	7
7º	12	10	10
8º	18	12	12

El gráfico 4 evidencia, la evolución psicogenética del reconocimiento de la aleatoriedad, ante la imagen “La jugada de fútbol”.

Gráfico 4. La jugada de fútbol. Evolución psicogenética



El gráfico 4, muestra que no hubo evolución psicogenética entre 6º y 7º, se esperaba encontrar un mayor número de alumnos en 7º básico, reconociendo la aleatoriedad del suceso, sin embargo, estos resultados, se estabilizaron.

Este fenómeno didáctico, podría estar relacionado con las suposiciones subjetivas encontradas en las explicaciones de los alumnos de 7° básico, estas pudieron actuar como obstáculos para que ellos analizaran la situación en términos de las distintas posibilidades que podrían ocurrir.

Los gráficos 5 y 6 son coherentes con la evolución psicogenética esperada, ante las imagenes “La niña en la vetana” y “La plantación de Tomates”. Los jóvenes de mayor edad reconocen más que los pequeños la aleatoriedad del suceso.

Gráfico 5. La niña en la ventana, evolución psicogenética

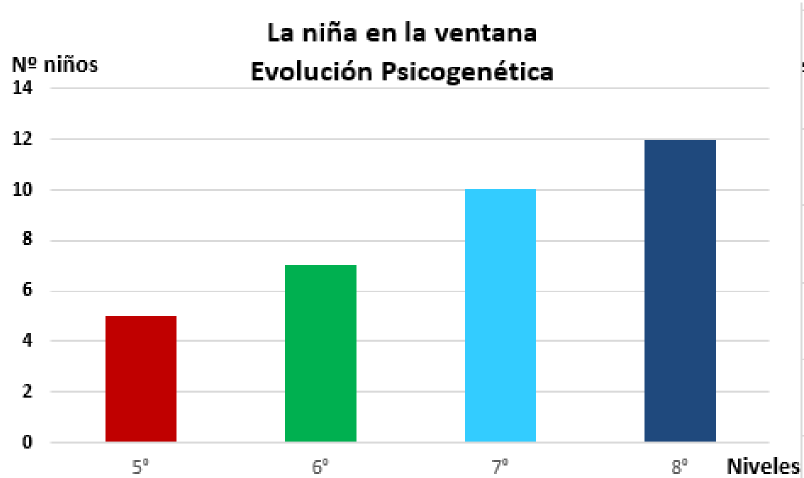
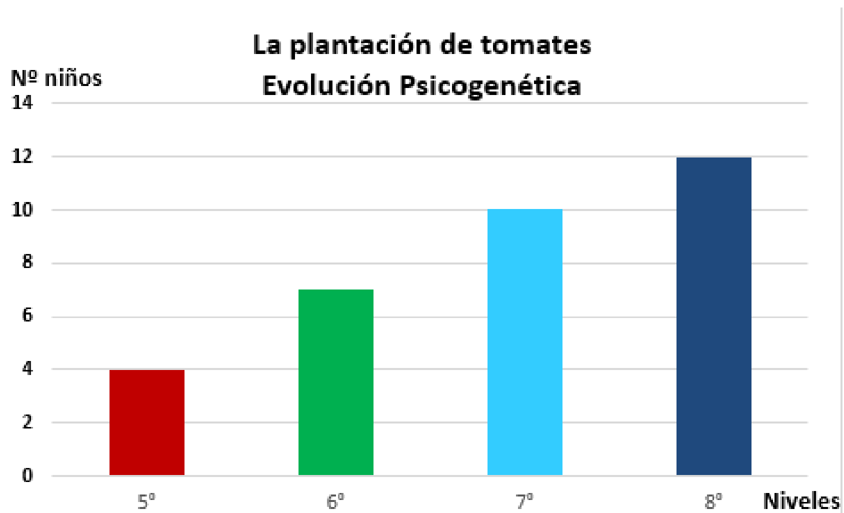


Gráfico 6: La plantación de tomates, Evolución Psicogenética



Estos resultados muestran que los alumnos hicieron menos predicciones con incertidumbre en las imágenes “La niña en la ventana” y “La plantación de tomate”, lo que indicaría que estos contextos son más complejos para reconocer la aleatoriedad y proporcionan desafíos didácticos que implican intervenir el medio, de modo de producir retroacciones a los alumnos para analizar sucesos en los que al parecer la aleatoriedad no es tan evidente.

Es recomendable por lo tanto realizar análisis didácticos a este tipo de situación de manera que permitan elaborar un lenguaje para aproximarse a la noción de probabilidad, en estos contextos.

Existe variabilidad de una situación a otra, lo que hace suponer que el reconocimiento de la aleatoriedad está influenciado por el tipo de contexto involucrado en la imagen y por la formulación de la consigna de la tarea.

5.1.7 Experimentación de la Situación 3. Las Apuestas

Los resultados de las apuestas los consignaremos en tablas como las siguientes.

Tabla 58. Tarjeta para consignar las apuestas

Apuestas	Apuesta	Apuesta a	Apuesta a 2	Apuesta a 3	Apuesta a 4
Etapas (Ei)	equitativa	1competidor	competidores	competidores	Competidores
E1					
E2					
E3					

La tabla 58 se compone de seis columnas, la primera contiene tres filas que indican las etapas (E_i) de las apuestas y en las filas de las cinco columnas restantes se distribuye lo apostado, de acuerdo al tipo de apuesta acordada. Por otro lado la tabla se completa con números los que representan parejas de alumnos.

Para el análisis se considera que la apuesta equitativa y la apuesta a cuatro competidores son decisiones sin riesgo ya que aunque se pierde, el jugador recupera parte de lo apostado, lo que le permite seguir jugando. La apuesta a

un competidor es una decisión de alto riesgo, la apuesta a dos competidores es de mediano riesgo y a tres competidores es una decisión de bajo riesgo.
El primer video es una carrera de 4 caballos, con sus jinetes, se denomina “La Carrera en el Hipódromo”, el segundo vídeo se denomina “Carrera Internacional en Patines”.

La carrera en el hipódromo.

5.1.7.1 Las apuestas en Quinto Básico.

En quinto básico se formaron 9 parejas (que anotaremos P_i). La tabla 59 muestra el número de parejas que en cada etapa realizo una apuesta determinada.

Tabla 59. Apuestas en etapas, carrera en el hipódromo, 5º básico

Apuestas / Etapas (Ei)	Apuesta equiprobable	Apuesta a un caballo	Apuesta a dos caballos	Apuesta a tres caballos	Apuesta a 4 Caballos
E1	1	2	4	2	
E2		4	4		
E3		1	1	1	

En esta etapa (E1) una pareja coloca el mismo dinero a todos los caballos, en una suerte de apuesta equitativa, dos parejas realizaron una apuesta de alto riesgo, apostando a un caballo, cuatro parejas decidieron la apuesta de mediano riesgo, apostando a dos caballos y 2 parejas apostaron con bajo riesgo a tres caballos.

En la etapa dos (E2), cuatro parejas decidieron la apuesta de alto riesgo y apostaron a un caballo, otras cuatro decidieron la apuesta de mediano riesgo, y dos parejas no apostaron.

En la etapa 3 (E3), una pareja decidió la apuesta de alto riesgo, otra la apuesta de mediano riesgo y otra pareja decidió la apuesta de bajo riesgo, apostando a tres caballos, en esta etapa 7 parejas no apostaron.

En la primera etapa, las justificaciones de los alumnos son las siguientes:

Pareja	Tipo de apuesta	Justificación de la apuesta
P3	Equitativa.	“Porque así perdimos y ganamos”.
P2 y P5	A un caballo	P2: “porque creemos que va a ganar”. P5: “porque puede ganar o perder”.
P4, P6, P8 y P9	A dos caballos en forma equitativa	P4: “porque se ve que van más rápido” P6: “se ven que los dos van rápido” P8: “porque va más adelante” P9 no justifica
P1 y P7	apuestan a tres caballos, marcan una preferencia	No justifican.

P3 realiza una apuesta equitativa en la que sabe que pierde, “Porque así perdimos…” pero no arriesga todo el capital, algo recupera y para ellos posiblemente eso es una ganancia (“… y ganamos”).

Para este tipo de apuesta su razonamiento juzga igualmente probable que gane cualquiera de los 4 caballos, es decir se sienten con el mismo grado de duda, de incertidumbre o de convencimiento frente a esta decisión. Si bien es cierto pierden en tres de sus posturas, lo que le hace decidir la apuestas equitativa es el hecho de que gana en la postura ganadora y quedan con dinero (ficticio) para seguir jugando. Por otra parte la falta de información sobre el comportamiento de los caballos en carreras anteriores podría producir en los alumnos una percepción de simetría lo que les sugeriría posiblemente una sensación de 'equiprobabilidad', asignándole la misma posibilidad de triunfo a cada uno de ellos.

P2 y P5 deciden apostar con alto riesgo y con incertidumbre, lo que se refleja en: P2 "… creemos que …"; P5: "… puede …".
P4, P6 y P8 apuestan con mediano riesgo. Sus justificaciones causan extrañeza porque esta apuesta se realiza antes de iniciar la carrera luego los alumnos no tienen como saber cuál de los caballos es el más rápido o va primero.
P9 no justifica
P1, y P7 apuestan con bajo riesgo, marcando preferencia y no justifican.

Etapa 2 (E2).

Siete de nueve parejas modifican sus apuestas. La tabla da cuenta de los resultados:

Pareja	**Tipo de apuesta**	**Justificación de la apuesta**
P1, P2, P5 y P7	A un caballo	P1: "porque creemos que va a ganar". P2: "porque va a ganar". P5: "porque puede ganar la carrera". P7 no justifica.
P4, P6, y P9	A dos caballos	P4 y P6: porque llevan o van en la delantera", P9 no justifican.

P1, P2, P5 y P7 deciden apostar con alto riesgo. P1 y P5 apuestan con incertidumbre lo que se constata en las expresiones P1 "creemos …" y P5: " … puede …" y la justificación de P2 refleja una certidumbre, puesto que usa el vocablo calificativo “va” del lenguaje natural, afirmando categóricamente su decisión. P7 no justifica.

P4 y P6 deciden modificar su apuesta observando las posiciones de los caballos en la carrera, lo que ha sido previsto en el análisis a priori. P4 y P6 deciden la apuesta de mediano riesgo.

P9 que también apuesta a dos caballos pero no justifica.

En la tercera apuesta, solo tres parejas actualizan sus apuestas, P1, P4 y P5. La tabla siguiente da cuenta de los resultados:

Pareja	**Tipo de apuesta**	**Justificación de la apuesta**
P5	A un caballo	No justifica
P4	A dos caballos	“Son los más rápidos”.
P1,	A tres caballos.	“Porque creemos que van a ganar”

P5 decide el riesgo de apostar a un caballo pero no justifica, P1 apuesta con bajo riesgo y su justificación refleja la incertidumbre en el vocablo “creemos que van a ganar”. P4 apuesta con mediano riesgo, repartiendo equitativamente.

5.1.7.2 Las apuestas en Sexto Básico.

En este curso se formaron 10 parejas (alumnos de 11 años). La tabla 60 muestra los resultados de las apuestas en “carrera en el hipódromo” y sus tres etapas.

Tabla 60. Apuesta en etapas, carrera en el hipódromo, 6º básico

Apuestas / Etapas Ei	Apuesta equitativ	Apuesta a un caballo	Apuesta a 2 caballos	Apuesta a 3 caballos	Apuesta a 4 caballos
E1		3		3	4
E2	1	4	2	2	1
E3	2	2	2	1	1

En la etapa 1 (E1) cuatro parejas realizaron la apuesta sin riesgo con preferencia a un caballo o más, tres parejas apostaron con alto riesgo a un caballo, otras tres apostaron con bajo riesgo a tres caballos.

En la etapa dos (E2) se producen ambos tipos de apuesta sin riesgo, apuesta equitativa y con preferencia. Cuatro parejas apostaron con alto riesgo, dos parejas apuestan con mediano riesgo, otras dos parejas apuestan con bajo riesgo.

En la etapa tres (E3) hay tres apuesta sin riesgo, dos equitativas y la otra no. Dos parejas apostaron con alto riesgo, dos parejas deciden el riesgo medio y una pareja decide apostar con bajo riesgo a tres caballos.

Apuestas y justificaciones de los alumnos en la primera etapa (E1).

Pareja	Tipo de apuesta	Justificación de la apuesta
P1, P2, y P6	A un caballo	P1: "Porque el 7 es mi número favorito y él está en el puesto allí. P2: "Porque creo que va a ganar… es muy rápido" P6: "Porque se ve confiable".
P3, P5 y P10	A tres caballos	P3 "Porque va o no va a ganar". P5: "Porque creemos que va a ganar". P10 "Porque creemos que (esos a) los que apostamos van a ganar".
P7, P8 y P9. P4	A cuatro caballos.	P7: "Porque creemos que la (que va por el carril) dos va a ganar y los demás van a llegar más tarde" P8 y P9: "porque creemos que el 2 va a ganar". P4 no justifica.

En la decisión de alto riesgo, la apuesta de P1 obedece a una superstición en que el 7 actúa como un fetiche. Lo que se ha previsto en el análisis a priori.

La suposición “es muy rápido” de P2 les permiten decidir su apuesta en la que se aprecia la incertidumbre expresada en “creemos que va …” La justificación de P6 refleja que ellos depositan su confianza en el caballo elegido, aunque esto suponga algún riesgo. Probablemente, esta confianza se basa en la comparación visual de los caballos que compiten y contiene incertidumbre.

En la decisión de bajo riesgo P3, P5 y P10 justifican con incertidumbre, expresada en la ambigüedad “va o no va …” y en “creemos que”.

En la decisión sin riesgo, P7, P8 y P9 apuestan con incertidumbre, expresada en el vocablo “creemos que …” con la seguridad de perder pero recuperar lo más que se pueda en la preferencia al caballo dos. P4 no justifica.

Etapa 2 (E2).

Pareja	Tipo de apuesta	Justificación de la apuesta
P3	Apuesta equitativa	Puede que gane o no-
P1, P2, P6 y P10	A un caballo	P1 “porque le tengo fe”. P2 “porque viene muy rápido” . P6 “porque va primero”. P10 “porque este va a ganar”
P5 y P7	A dos caballos	P5 y P7: “porque tomaron la delantera”.
P8 y P9.	A tres caballos	P8: “lo vimos que va a ganar” P9: “creemos que va a ganar”
P4	A cuatro caballos	No justifica.

La explicación de P3 no tiene coherencia pues expresa duda, lo que es contradictorio con la decisión sin riesgo que tomó puesto que se sabe que uno de los caballos ganará.

P1 depositan su confianza en la apuesta de alto riesgo que han realizado. P2, P6, P5 y P7 toman decisión apoyándose en la evidencia de la carrera (los datos) que están mirando, sus explicaciones se apoyan en la velocidad de los caballos y en la posición que alcanzaron en la carrera.

P8 y P10 realizan apuestas de diferente tipo pero sus explicaciones son categóricas, lo que pudiera favorecer la aparición de obstáculos para la toma de decisiones. También cabe la posibilidad que sus decisiones, expresadas en la justificación de la apuesta, provengan de las informaciones que aporta el desarrollo de la carrera.
En estas apuestas los alumnos ponen en evidencia, sus incertidumbres frente al suceso que estudian, sea que tomen una decisión de alto riesgo como sin riesgo.
P4 apuesta a cuatro competidores pero no justifica.

Etapa 3 (E3).

Pareja	Tipo de apuesta	Justificación de la apuesta
P3, P2	Apuesta equitativa	P3: “Puede que gane o no”. P2: “Porque uno de esos va a ganar”
P1, y P6	A un caballo	P1 “Porque va primero”. P6 “Porque es confiable”.
P5 y P7	A dos caballos	P5: “Porque el 2 y el 1 son los que van más adelante” P7: “Porque tomaron ventaja”.
P8 y P9.	A tres caballos	P8: “Porque lleva la delantera” P9: “Porque va a ganar”
P4	A cuatro caballos	No justifica.

Existe contradicción entre la apuesta sin riesgo y la explicación de P3, puesto que esta última muestra incertidumbre, la que se expresa en el vocablo "*puede que…*". P2 deciden la apuesta sin riesgo, lo que reflejaría la incertidumbre del que apuesta y su aversión al riesgo.

En la apuesta de alto riesgo, P1 se apoya en la evidencia de la carrera que están mirando para modificar su apuesta, su explicación es categórica, P6 depositan su confianza en su apuesta, aunque esto suponga algún riesgo.

En la apuesta de mediano riesgo, P5 y P7 se apoyan en las posiciones de los caballos en el video que están mirando. Claramente estas parejas se apoyan en los datos para modificar sus apuestas.

P8 y P9 marcan preferencia, ellas justifican: P8 "porque lleva la delantera" y P9 "porque va a gana".

En la apuesta de bajo riesgo P8 apuesta basándose en las posiciones de los caballos en la carrera y P9 basándose en las informaciones de la carrera, afirma en forma categórica la seguridad del suceso.

P4 apuesta a cuatro caballos, marcando preferencia pero no justifica.

5.1.7.3 Las apuestas en Séptimo básico.

En este curso participan catorce parejas (Pi) de alumnos de 12 años. Los resultados obtenidos están consignados en la tabla 61.

Tabla 61: Apuestas en etapas, carrera en el hipódromo, 7º básico

Apuesta	Apuesta equitativa	Apuesta a 1competidor	Apuesta a 2 competidores	Apuesta a 3 competidores	Apuesta a 4 competidores
Nº 1	2	4	4	3	1
Nº 2	2	3	5	3	1
Nº 3	1	2	7	4	0

Desde el comienzo se produce la apuesta sin riesgo, dos parejas realizan una apuesta equitativa y una pareja apuesta a cuatro caballos. Cuatro parejas deciden la apuesta de alto riesgo, otras cuatro la apuesta de mediano riesgo y tres parejas deciden apostar con bajo riesgo.

En la segunda etapa se produce de nuevo la apuesta sin riesgo en la forma de reparto equitativo y no equitativo, tres parejas decidieron apostar con alto riesgo a un caballo, cinco parejas deciden apostar con mediano riesgo y otras tres parejas apuestan con bajo riesgo.

En la etapa tres hay una apuesta sin riesgo, que es equitativa. Dos parejas decidieron apostar con alto riesgo, siete parejas deciden el riesgo medio y cuatro parejas apuestan con bajo riesgo a tres caballos.
En la primera apuesta, las justificaciones de los alumnos están consignadas en el cuadro siguiente:

Pareja	**Tipo de apuesta**	**Justificación de la apuesta**
P3 y P8	Apuesta equitativa	P3 “porque hay que asegurarse”. P8 “porque tenemos más posibilidades de ganar”.
P5, P6, P7 y P9	A un caballo	P5: “porque es un número par (la posición del caballo en la partida)”. P6 “porque pensamos que vamos a ganar con este caballo”. P7 “porque nos gusta el nº 3 (el caballo en el tercer carril)”. P9 “porque es el caballo más grande y puede correr más rápido”.
P1 P4, P10 y P11	A dos caballos	P1 “porque están más cerca del carril” P4 “Porque tenemos confianza en esos números (carriles 7 y 4 en el video)”. P10 explica “porque son los números favoritos y día

		de mi cumpleaños". P11 "porque mi compañera eligió el 3 y a mí me gusta el 1".
P12, P13 y P14	A tres caballos	Porque creemos que son los mejores caballos.
P2	A cuatro caballos.	"Porque creemos que él va a ganar y a los otros les apostamos poquito".

En la etapa 1 ante la incertidumbre de quién ganará, P2, P3 y P8 deciden la apuesta sin riesgo. P2 marca preferencia a un caballo y en su justificación pone en evidencia la incertidumbre expresada como "creemos que …". P3 y P8 justifican, considerando sus posibilidades de no perder todo.

P5, P6, P7 y P9 deciden apostar con alto riesgo a un caballo y en sus justificaciones se identifican los criterios fetiche e incertidumbre.

Para P5 y P7, claramente su apuesta está basada en considerar al número par y al 3 como fetiches. P6 y P9 apuestan con incertidumbre, ellos suponen que: P6: "… pensamos que …" y P9 visualiza la contextura del caballo para suponer que ganará, "… es el caballo más grande y puede …".

P1, P4, P10 y P11 deciden la apuesta de mediano riesgo:

Al parecer P1 ve que los caballos de su apuesta están más cerca de la línea de partida, lo que podría suponer una ventaja sobre los otros dos caballos.

P4, P10 y P11, deciden su apuesta en base al número de carril que ocupan los caballos en la partida o en relación al número favorito indicado en la parte superior de la partida, es decir apuestan a un fetiche.

P12, P13 y P14 realizan una apuesta de bajo riesgo con incertidumbre expresada en "… creemos que …".

Etapa 2 (E2).

En la segunda apuesta se obtienen los resultados siguientes.

Pareja	Tipo de apuesta	Justificación de la apuesta
P3 y P8	Apuesta equitativa	P3 “Porque no vamos a estar seguros de elegir uno” P8 “Porque tenemos más posibilidades de ganar”.
P5, P6 y P9	A un caballo	P5: “Porque es uno de los más rápidos” P6: “Porque creo que vamos a ganar”. “ P9 “Porque va más adelante”.
P1, P4, P7, P10 y P11	A dos caballos	P4 “Porque se ve velocidad”. P7: “nos gusta el 3 y el 4 partió bien”. P10: “cosa de suerte”. P11: “creemos que el 4 tiene más posibilidad”. P1: “Porque están más cerca del carril
P12, P13 y P14	A tres caballos	P12, P13 y P14 “Porque el caballo 4 va más adelante”.
P2	A cuatro caballos.	“Porque creemos que el 4 es el mejor”.

P5, P6 y P9 deciden la apuesta con alto riesgo. Ellos han visto el desarrollo de la carrera y se apoyan en el desempeño (la rapidez y la posición) de los caballos para justificar la actualización de su apuesta. Estas respuestas son categóricas por lo que ellas evidencian la certidumbre de la apuesta en ese momento.

P6 justifica con incertidumbre, expresada en “… creo que …”.

Cinco parejas deciden la apuesta de mediano riesgo, reparten en forma equitativa el monto de la apuesta a dos caballos y justifican:

Para P4, P7 y P11 la actualización de su apuesta está basada en la observación de la competencia en el video. Particularmente P4 y P7 realizan una afirmación categórica, lo que indica la confianza en su apuesta, sin embargo la apuesta de P11 refleja incertidumbre "creemos que …". P10 reconoce la influencia del azar y P1 apuesta en forma equitativa a los caballos de los carriles 1 y 4 pero su justificación no refleja algún grado de análisis de los datos observados en la carrera. P1 repite la justificación de la apuesta inicial, por lo tanto no se entiende.

P12, P13 y P14 realizan apuestas de bajo riesgo, marcando preferencia al cuarto caballo. Ellos justifican, "porque llevaba la delantera". Claramente ellos se apoyan en las posiciones de los caballos en la carrera, que muestra el video. Estas posiciones son evidencias que les permiten decidir para actualizar su apuesta.

P2, P3 y P8 apuestan sin riesgo, P2 marcando preferencia al caballo de la posición 4 apuesta con incertidumbre y P3 y P8 reparten en forma equitativa el monto de la apuesta. P3 apuesta con incertidumbre y P8 considera que esta forma de apostar le da más posibilidades de ganar y no perder todo.

Etapa 3 (E3).

En la tercera apuesta los resultados son:

Pareja	**Tipo de apuesta**	**Justificación de la apuesta**
P8	Apuesta equitativa	P8 "porque tenemos más posibilidades de ganar".
P2, y P9	A un caballo	P2 "estamos casi seguros de que va a ganar". P9 "porque va ganando".
P1, P4, P5,	A dos caballos	P1: "Porque están más cerca del carril" P4 "porque son unos de los más rápidos" P5: "vemos velocidad"

P6, P7, P10 y P11		P6: “porque uno de los dos gana” P7: “Seguimos como al comienzo (les gusta el caballo del tercer carril)” P10 “Por los caballos que son más rápidos” P11 no justifica.
P3, P12, P13 y P14	A tres caballos	P3 “apostamos al 4 porque va ganando” P13 “porque el caballo 4 es el más rápido”. P14 “porque el caballo 4 lleva la ventaja”. P12, no justifica

P8 mantiene la apuesta equiprobable como también su explicación “porque tenemos más posibilidades de ganar”.

P2, P3 y P9 deciden la apuesta de alto riesgo. P2 y P3 apuestan con incertidumbre y P9 se apoya en los datos del video y declara una certeza de ganar.

Siete parejas deciden la apuesta de mediano riesgo. Para P4, P5, P6 y P10 las informaciones que el video les proporciona en relación a la rapidez y posición de los caballos, les permiten actualizar su apuesta y justificarla categóricamente.

P1 repite su justificación y la actualización de la apuesta de P7 consiste en reafirmar su apuesta inicial.

P12, P13 y P14 deciden la apuesta de bajo riesgo, marcando preferencia al caballo del carril 4. P12 no justifica. P13 y P14 justifican de manera categórica, apoyando su decisión en la posición del caballo 4 en el desarrollo de la carrera.

En esta etapa solo P8 mantiene su apuesta inicial, suponemos que el desarrollo de la carrera les produce incertidumbre y la equiprobabilidad es la mejor manera recuperar parte de la apuesta y seguir apostando.

Los resultados obtenidos nos hacen suponer que al inicio de la carrera y en ausencia de información sobre el suceso, la equiprobabilidad no es el primer recurso al que recurren los alumnos para decidir su primera apuesta y las siguientes actualizaciones. Lo cual no fue previsto en análisis a priori.

Las concepciones aleatorias de los alumnos frente al suceso de las apuestas les generan incertidumbre respecto del ganador de la carrera. Las creencias subjetivas de los alumnos les permiten realizar apuestas con explicaciones categóricas sobre la ocurrencia del suceso.

Los alumnos que apuestan en forma equiprobable, conciben la aleatoriedad del suceso en el sentido que saben que uno de los caballos ganará, pero cual de ellos, no particularmente.

Las posiciones de los caballos durante el desarrollo de la carrera, les permiten modificar sus apuestas y nos indican que los alumnos se apoyan en los datos para actualizar sus niveles de certeza, con respecto a este suceso.

5.1.7.4 Las apuestas en Octavo básico.

En este curso participan doce parejas (P_i) de alumnos de 13 años aproximadamente. Los resultados obtenidos están consignados en la tabla 62:

Tabla 62. Apuestas en etapas, carreras en el pipódromo, 8º básico

Apuesta	Apuesta equitativa	Apuesta a 1competidor	Apuesta a 2 competidores	Apuesta 3 competidores	Apuesta a 4 competidores
Nº 1	1	4	5		2
Nº 2		6	4	1	1
Nº 3	1	4	3	3	1

En la etapa 1, tres parejas apostaron sin riesgo, una en forma equitativa y las otras dos marcando preferencia. Cuatro parejas apostaron con alto riesgo, a un caballo y cinco parejas apostaron con mediano riesgo.

En la etapa dos, seis parejas apostaron con alto riesgo, cuatro parejas apostaron con mediano riesgo, una pareja aposto con riesgo bajo y una pareja aposto sin riesgo y sin equitatividad.

En la etapa tres, dos parejas realiza una apuesta sin riesgo, una con equitatividad y la otra marcando preferencia, cuatro parejas apuestan con alto riesgo, tres parejas apuestan con mediano riesgo, tres parejas apostaron con bajo riesgo.
En la primera etapa los resultados son:

Pareja	**Tipo de apuesta**	**Justificación de la apuesta**
P10	Apuesta equitativa	P8 “Para no empezar mal la apuesta”.
P1, P2 P6 y P9	A un caballo	P1 “Se ve que es rápido”. P2: “Porque es el más rápidos”. P6 “El circuito está a su favor”. P9 “Creo que va a ganar”.
P3, P4, P5, P7, P8	A dos caballos	P3 “Le teníamos fe” P4 “Al 4, sé que va a ganar”, P5 “Porque el caballo (del carril) dos se veía más rápido". P7 “Por la forma en cómo se para cada uno (en la partida)”. P8: “Porque no queríamos apostar por otros”.
P11 y P12	A cuatro caballos.	P11: “Le llevaba fe al caballo 3” P12: “Dividí el dinero para seguir apostando”.

Las justificaciones de los alumnos son las siguientes:

En la apuesta inicial P10, P11 y P12 deciden la apuesta sin riesgo. P10 realiza una apuesta equitativa. P10 explican que apostaron “para no empezar mal la apuesta” (y no arriesgar perder todo de inmediato). P11 y P12 han decidido el reparto no equitativo, P11 depositando su confianza en el caballo 3, aunque esto suponga algún riesgo P12 apuesta con preferencia al caballo 3. Para P10, P11 y P12, esta decisión les permite recuperar una parte del monto de la apuesta y seguir jugando en un eventual nuevo juego.

P1, P2, P6 y P9 deciden la apuesta de alto riesgo. Para P1 su apuesta se basa en la comparación de la prestancia de los caballos en competencia, es decir el aspecto visual es un criterio de decisión para ellos. P2 basa su apuesta en un supuesto subjetivo. Su afirmación es categórica, lo que podría representar un pensamiento determinista. La apuesta de P6 se basa en la observación del carril por el que correrá el caballo de su apuesta y P9 realiza una apuesta con incertidumbre, la que expresa en el vocablo “creo que …”.

P3 decide que deposita su confianza en su apuesta, aunque esto suponga algún riesgo. P4 decide su apuesta en base a una suposición mediante la cual afirma la seguridad de su apuesta. P5 y P7 observan la apariencia de los caballos para decidir se apuesta. La justificación de P8 no se puede interpretar en términos de probabilidad.

Etapa 2 (E2).

Los resultados de esta apuesta se consignan en el cuadro siguiente:

Pareja	Tipo de apuesta	Justificación de la apuesta
P1, P2, P3,	A un caballo	P1:Va con mucha velocidad” P2 “Porque es el más rápido” P3:“Porque iba ganando”

P6, P9 y P12		P6: “Es el más rápido” P9: “Porque va a ganar” P12: “Porque el caballo es el más rápido y le tengo fe”
P4, P5, P8 y P10	A dos caballos	P4 :“Porque le tuve más fe” P5: “No justifica” P8: “Porque no queríamos apostar por otros”. P10: “Porque llevaba más ventaja”.
P7	A tres caballos	P7: “por la forma en que corren”.
P11	A cuatro caballos	P11: “porque iba ganando el caballo (del carril) 3”.

Seis parejas realizan una apuesta de alto riesgo. Claramente sus justificaciones evidencian que la actualización de la apuesta se basa en el desarrollo de la carrera. Además luego de ver el desarrollo de la carrera, P12 decide depositar su confianza en ese ese caballo.

La explicación de P9 es categórica y evidencia una decisión en la que se concibe la certeza para actualizar su apuesta.

Cuatro parejas apuestan con mediano riesgo, marcando preferencias a uno de los caballos. P4 actualiza su apuesta considerando la confianza que le provoca el caballo favorito de su apuesta. P10 observa el desarrollo de la carrera, se apoya en los datos de la carrera y toma decisión por el caballo que llevaba más ventaja para actualizar su apuesta. P8 decide actualizar su apuesta reafirmando su apuesta inicial, por lo tanto no se puede interpretar en términos de probabilidad esta respuesta.

P7 apuesta con bajo riesgo y con preferencia a los caballos que van por los carriles 2 y 3. Para actualizar su apuesta ellos se basan en las informaciones que recogen del video de la carrera.

P11 apuesta sin riesgo, a todos los caballos marcando preferencia al del tercer carril "*porque iba ganando el caballo* (del carril) 3". Su actualización de apuesta se basa en las informaciones que recogen del video de la carrera.

Una pareja de alumnos actualiza su apuesta concibiendo la certeza del suceso, una vez observado el desarrollo de la carrera, 8 parejas modifican sus apuestas basándose en las nuevas posiciones que muestra el video y en la visualización de la técnica de carrera de un caballo en particular. Una pareja apuesta con incertidumbre, depositando su confianza en su apuesta y otra pareja actualiza su apuesta pero no la justifica.

Etapa 3 (E3).

En la tercera apuesta los resultados son:

Pareja	**Tipo de apuesta**	**Justificación de la apuesta**
P9	Apuesta equitativa	No justifica
P1, P2, P6 y P12	A un caballo	P1: "Porque tomo la delantera" P2: "Tiene más resistencia y velocidad". P6: " Es el más rápido" P12: "Le tengo fe",
P4, P5, P8 y P10	A dos caballos	P4 : "ahora les tenemos fe" P10: "son los más agiles" P8: "no queríamos apostar por otros".
P3, P5 y P7	A tres caballos	P3: "Porque iban empatados" P5 No justifica P7 "Por la forma en que corre".
P1 1	A cuatro caballos	P11: "Porque el caballo del carril 3 estaba ganado pero se le acercaba el que iba en el 4° carril".

Dos parejas, P9 y P11 realizan una apuesta sin riesgo. La apuesta de P9 es equitativa y no la justifica. P11 se apoya en los datos de la carrera y decide no arriesgar todo pues ve que el caballo que iba ganando en la segunda apuesta está siendo alcanzado por un contendor. Esta decisión es provocada por la incertidumbre de perderlo todo.

Cuatro parejas deciden la apuesta de alto riesgo. Para P1, P2 y P6 las informaciones que le aportan el desarrollo de la carrera les permiten actualizar su apuesta. P12 actualiza su apuesta en base a la confianza que le sugiere el caballo de su apuesta.

P4, P8 y P10 apuestan con mediano riesgo. En la actualización de la apuesta P4 deposita su confianza en el caballo de su apuesta. P10 se apoya en los datos proporcionados por el video y P8 reafirmar su apuesta inicial.

P3, P5 y P7 apuestan con bajo riesgo. P3 y P7 se apoyan en los datos proporcionados por el video para actualizar su apuesta. P5 no justifica.
En esta etapa dos parejas actualizan sus apuestas depositando su confianza en los caballos de su apuesta. Siete parejas actualizan sus apuestas considerando las informaciones que el video proporciona sobre la carrera, dos parejas no justifican y solo una pareja reafirma su apuesta inicial.

5.1.7.5 Análisis global.

En todos los niveles hay parejas que deciden la apuesta sin riesgo, sea en forma de reparto equitativo o de distribución no equitativa del monto de la apuesta. Desde la perspectiva de la noción de espacio muestral de un espacio de probabilidad, esta apuesta podría representar la probabilidad del espacio muestral.

En efecto, considere el espacio muestral Ω constituido por los sucesos:

$C1$: Gana el caballo 1; $C2$: gana el caballo 2; $C3$: gana el caballo 3; $C4$: gana el caballo 4. Así: $\Omega = \{C1, C2, C3, C4\}$.

Intuitivamente el razonamiento de los alumnos que deciden la apuesta sin riesgo, adopta la forma siguiente:

$$P(\Omega) = P(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4) = 1$$
$$P(\Omega) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4) = 1$$

Este razonamiento conduce a la probabilidad del espacio muestral.

Observación: No se pretende que los alumnos de estos niveles lleguen a establecer estas relaciones, pero sí comprender la lógica de la decisión que han tomado. Estas relaciones, podrían ser el fruto de interacciones específicas de situaciones didácticas pertinentes que escapan a las finalidades de esta investigación.

Para la apuesta sin riesgo se producen dos variantes:

Variante 1: $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = P(C_4)$
Variante 2: $P(C_1) \neq P(C_2) \neq P(C_3) \neq P(C_4)$

En la variante 1, esta apuesta se concreta apostando $1000 a cada competidor y en la variante 2 los alumnos podrían apostar a todos los competidores con algunas preferencias de unos sobre otros.

Con esta apuesta los alumnos saben que ganarán, pero solo una parte, por lo tanto obtendrá la ganancia más el monto apostado al caballo ganador.

En todos los niveles se produjo la apuesta sin riesgo. El análisis de las justificaciones aclara que esta fue la mejor opción para ellos y permite interpretar un modo de razonar frente a la toma de una decisión de incertidumbre: “la apuesta sin riesgo si bien no permite aumentar el capital, asegura que uno de los caballos ganara, se recupera parte de la apuesta y podrían seguir jugando”.

Por otra parte desde una perspectiva teórica, el medio de las apuestas es un agente provocador que mantiene viva en el alumno la expectación de su retroacción y el interés por continuar el juego, volviendo a apostar.

La tabla 63, sintetiza los resultadosen la etapa 1.

Tabla 63. Síntesis Carrera en el hipódromo, etapa 1

Etapa 1	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de mediano riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				total
	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	
Se apoya en datos			1	1				2									4
Suposición				2	3		1	1									7
Fetiche		1	2				3										6
Incertidumbre	2	1	1	1						3	3		1e	3	2e 1	1e 1	20
Por confianza		1						2								1	4
No justifica					1				2					1			4
Sin interpretación																	
Total (1)	2	3	4	4	4	0	4	5	2	3	3	0	1	4	3	3	45
Total (2)	13				13				8				11				

26 Apuestas con riesgo 11 Apuestas sin riesgo

Esta tabla se compone de 11 filas y 6 columnas. Las columnas corresponden al tipo de apuesta: sin riesgo, alto riesgo, mediano riesgo y bajo riesgo.

Las filas: La segunda fila específica los niveles de 5º a 8º.

Desde la tercera a la séptima fila se consignan criterios de decisión de la apuesta: se apoya en los datos, suposición subjetiva, apuesta a un fetiche, incertidumbre y otras.

En la octava fila se consignan las apuestas sin justificar, en la novena las respuestas que no se pueden interpretar, en la décima fila se resumen los totales. En la fila 11 se consignan los totales por tipo de apuesta.

Para la primera etapa la tabla muestra que la razón más frecuente para justificar las apuestas es la incertidumbre, 20 de 45 parejas apuestan considerando este criterio. Por ejemplo en 5º básico 3 parejas apuestan con incertidumbre, (P5) explica: "*porque puede ganar o perder".* Interpretamos que P5 considera el riesgo de la apuesta, por lo tanto percibiría la incertidumbre.

En 6º, 9 parejas apuestan con incertidumbre; en 7º, seis y en 8º dos parejas.

Seis parejas, una de 6º y cinco en7º apuestan a un fetiche. El cual corresponde a un número favorito, el número del carril por el que corría el caballo.

Trece parejas en total, apostaron con alto riesgo, considerando mayoritariamente la incertidumbre como criterio de selección, también el fetiche y la suposición subjetiva.

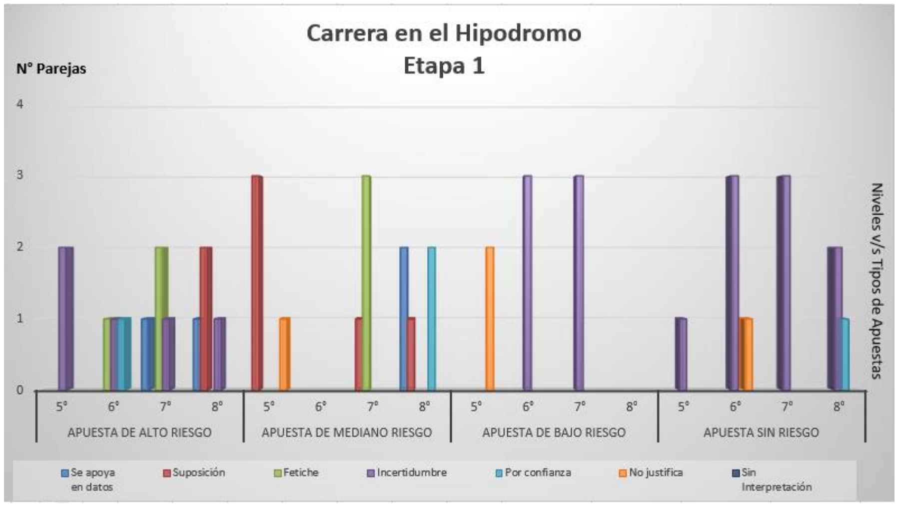
Trece parejas apostaron al mediano riesgo, el criterio de decisión más frecuente fue la suposición subjetiva y luego el fetiche.

Ocho parejas apostaron con bajo riesgo y con incertidumbre y once parejas realizaron la apuesta sin riesgo pero con incertidumbre.

En general, 24 parejas de los cuatro niveles, apuestan con incertidumbre (20 parejas) y por confianza (4 parejas), en la que también se corre riesgo. Luego apuestan basados en suposiciones subjetivas (7 parejas) y luego a un fetiche, 6 parejas. Estas últimas son un obstáculo para reconocer la incertidumbre y para tomar decisiones informadas.

Esta descripción, se visualiza en el gráfico 7.

Gráfico 7. Carrera en el Hipódromo, Etapa 1



El gráfico 7, muestra la distribución de las apuestas en esta etapa, se aprecia mayor concentración de datos en la zona de apuesta con riesgo, la que se constituye de alto y mediano riesgo y también que un importante número de parejas apuesta sin riesgo. Por otra parte se observa que el criterio de apuesta fue la incertidumbre (color lila y calipso).

La etapa 2 se sintetiza en la tabla 64.

Tabla 64. Síntesis Carrera en el hipódromo, Etapa 2.

Etapa 2	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de mediano riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				Total
	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	
Se apoya en datos		2	2	5	2	2	1	1			3	1				1	20
Suposición	1	1		1						1							4
Fetiche							1										1
Incertidumbre	2		1				2			1				1e	2e 1		10
Por confianza		1						2									3
No justifica	1				1			1						1			4
Sin interpretación							1										1
Total (1)	4	4	3	6	3	2	5	4		2	3	1		2	3	1	43
Total (2)	17				14				6				6				43

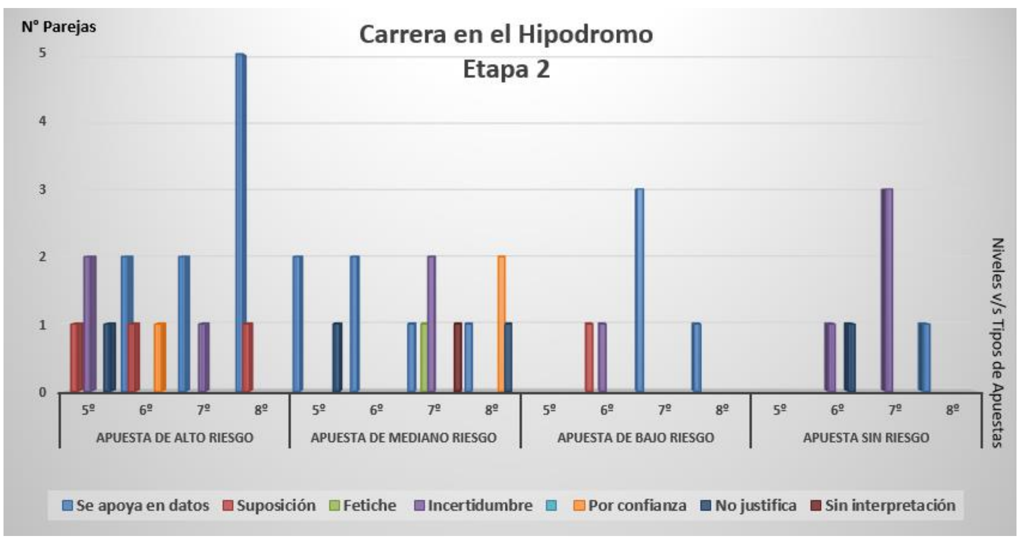
31 Apuestas con riesgo **6 Apuestas sin riesgo**

En la segunda etapa se observa que el criterio de decisión por incertidumbre desplaza hacia el criterio se apoya en los datos.

Veinte parejas consideran los datos para justificar su apuesta, trece parejas apuestan con incertidumbre, entre ellas 3 utilizan el criterio por confianza. Cinco parejas justifican apoyados en suposiciones subjetivas, entre ellas a un fetiche. Cuatro parejas no justifican y una pareja, de 7º básico presenta una justificación no interpretable desde el punto de vista de los objetivos de esta tesis.

La descripción anterior se visualiza en el gráfico 8.

Gráfico 8. Carrera en el Hipódromo, Etapa 2.



En el que 'Se apoya en los datos' (celeste) fue el criterio más frecuente, para decidir la apuesta y que los alumnos tomaon decisiones con riesgo. Al respecto, diecisiete parejas en total, apostaron con alto riesgo, principalmente apoyándose en el desarrollo de la carrera como criterio de selección, también la suposición subjetiva y la incertidumbre influyeron en las decisiones.

Catorce parejas apostaron al mediano riesgo, 6 parejas basándose en los datos, cuatro parejas apuestan con incertidumbre, de ellas dos por confianza. Una pareja de 7° apuesta a un fetiche, una pareja de 5° y otra de 8° no justifican.

Dos parejas de 7º apuestan con incertidumbre, ellos escriben "*cosa de suerte";* otra pareja escribe una justificación que no se puede interpretar.

Seis parejas apostaron con bajo riesgo, cuatro de ellas apoyándose en los datos, una pareja de 6° apuesta en forma categórica suponiendo que su elegido ganara y otra pareja apuesta con incertidumbre.

Seis parejas realizaron la apuesta sin riesgo pero con incertidumbre mayoritariamente. Dos parejas de 6º, tres de 7° y una de 8°, decidieron la apuesta sin riesgo, tal vez debido a lo estrecho de la competencia.

En la etapa 3, una pareja de 6º, 7º y de 8º vuelven a apostar equitativamente. P8 de 7º explica "porque así tenemos más posibilidad de ganar", es decir apuesta sin riesgo. P9 de 8º no justifica.

Una síntesis de estos resultados se encuentra en la tabla 65.

Tabla 65. Síntesis, carrera en el hipódromo, etapa 3

Etapa 3	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de medio riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				Total
Curso	**5°**	**6**	**7**	**8**	**5°**	**6**	**7**	**8**	**5**	**6**	**7**	**8**	**5**	**6°**	**7**	**8**	
Se apoya en datos		**1**	**1**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**		**1**	**3**	**2**				**1**	**19**
Suposición							**1**			**1**							**2**
Fetiche																	
Incertidumbre			**1**				**1**		**1**					**2 e**	**1**		**6**
Por confianza		**1**		**1**				**1**									**3**
No justifica	**1**						**1**				**1**	**1**		**1**		**1**	**6**
Sin interpretación							**1**	**1**									**2**
Total (1)	**1**	**2**	**2**	**4**	**1**	**2**	**7**	**3**	**1**	**2**	**4**	**3**	**0**	**3**	**1**	**2**	**38**
Total (2)	**9**				**13**				**10**				**6**				**38**

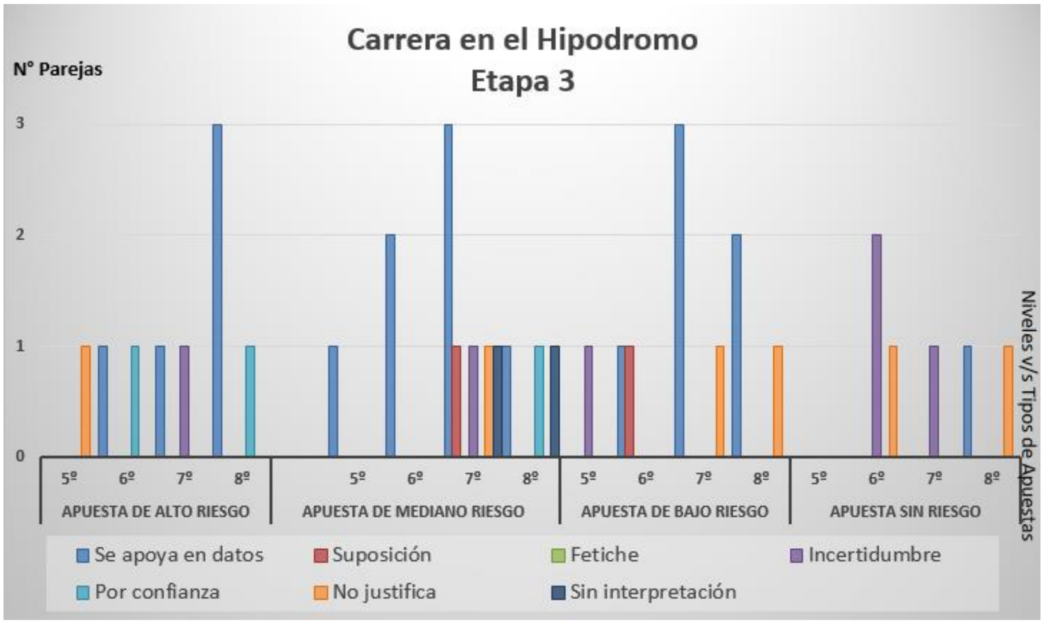
22 Apuestas con riesgo **6 Apuestas sin riesgo**

En la tercera apuesta 19 parejas consideran los datos para justificar su apuesta, 9 parejas apuestan con incertidumbre, de estas 3 apuestan por confianza y 6 parejas realizan apuestas pero no justifican.

Por otra parte nueve parejas apuestan con alto riesgo, apoyándose, principalmente en los datos, trece parejas apuestan con mediano riesgo, diez parejas con bajo riesgo y 6 parejas no se arriesgan. Seis parejas no justifican su apuesta.

En el grafico se visualiza que los alumnos tomaron decisiones, de manera informada, pues estas estuvieron influenciadas por el criterio ‘Se apoya en los datos’.

Gráfico 9. Carrera en el hipóromo, Etapa 3



En el gráfico se aprecia que más parejas de alumnos deciden la apuesta con riesgo, en que el mayor criterio fue se apoya en los datos. Por otra parte, se observa que las apuestas sin riesgo, contienen incertidumbre (color lila).

Cinco de nueve parejas apuesta con alto riesgo, según el criterio 'Se apoya en los datos', tres apuestan con incertidumbre y una pareja no justifica.

En la apuesta de mediano riesgo, siete parejas actualizan sus apuestas apoyándose en las posiciones de los caballos en la carrera y dos parejas evidencian incertidumbre, entre ellas una parejas de 8°apuesta por confianza.

En la apuesta de bajo riesgo, seis parejas se apoyan en los datos, tres parejas no justifican y una pareja de 6° explica de manera categórica su decisión.

En la apuesta sin riesgo una pareja de 8º se apoya en los datos y tres parejas apuestan con incertidumbre, dos de estas parejas, de 6°, realizan el reparto equitativo. Dos parejas, una de 6° y otra de 8° no justifican.

5.1.8 Carrera internacional en patines.

El segundo video se refiere al desarrollo de una carrera en patines en la que participan cuatro patinadores internacionales, desconocidos para los alumnos.

En esta carrera se produjeron dos incidentes que podrían haber afectado las decisiones de los alumnos en su apuesta.

Por una parte la carrera comienza con una partida fallida, en la que alguien se adelanta y hay que volver a iniciar la señal de partida. Por otra parte, en el desarrollo de la carrera y luego de la etapa 2, uno de los patinadores se cae en la competencia lo que produce nuevas informaciones y nuevas decisiones. Las parejas de alumnos se ponen de acuerdo para realizar apuestas al ganador de esta carrera.

5.1.8.1 Las apuestas en Quinto Básico.

La tabla 66 muestra las apuestas de alumnos de 5º básico en la carrera en patines.

Tabla 66 Apuesta en etapas, carrera en patines, 5º básico

Apuestas	Apuesta equitativa	Apuesta 1 patinador	Apuesta a 2 patinadores	Apuesta a 3 patinadores	Apuesta a 4 patinadores
A1	1	6	3	0	0
A2	0	5	4	1	0
A3	0	6	2	0	0

En la primera etapa una pareja decide la apuesta sin riesgo, ellos realizan una apuesta equitativa, seis parejas deciden la apuesta de alto riesgo y tres parejas la apuesta de mediano riesgo.

En la segunda etapa cinco parejas decidieron apostar con alto riesgo, cuatro parejas deciden apostar con mediano riesgo y una pareja apuesta con bajo riesgo.

En la tercera etapa, seis parejas decidieron apostar con alto riesgo y dos parejas apuestan con riesgo medio.

En la primera etapa, las justificaciones de los alumnos están consignadas en el cuadro siguiente.

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta
P6	Apuesta equitativa	P6: "Todos se ven rápidos".
P1, P2, P3, P5, P8 y P10	Apuesta a un patinador	P2: "porque va a ganar". P3 "Porque en la partida falsa era primero el 3". P1 y P5 "Porque es más rápido el que va en la segunda pista. P8 "Porque en la partida falsa iba primero.". P10 no justifica.
P4, P7 y P9	Apuesta a dos patinadores	P4 "son los más preparados" P7: "Porque son más rápidos el 2º y el 4º P9 "Porque el que está en la pista tres es el más rápido.

La justificación de P6, pone en evidencia que el criterio de decisión es la observación de los patinadores en la partida, como se mueven para precalentar, para ubicarse en su pista de competencia u otro. Ante la incertidumbre sobre el desempeño de los competidores, deciden la apuesta equitativa.

P1, P2, P3, P5, P8 y P10 deciden la apuesta de alto riesgo. Cinco justificaciones son categóricas y se basan en las posiciones que lograron alcanzar los cuatro patinadores en los breves instantes de una partida falsa. Particularmente las justificaciones de P1, P2 y P5 son categóricas "… va a ganar …”, “… es más rápido …”, las que referirían a una suposición subjetiva, que pueden poner en evidencia una certeza. P10 no justifica.

P4, P7 y P9 deciden la apuesta de mediano riesgo. Las explicaciones muestran la percepción que estos alumnos han adquirido sobre los patinadores en competencia. Posiblemente la partida fallida proporciona estas percepciones e influye en lo categórico de las explicaciones, poniendo en evidencia una certeza.

Etapa 2 (E2).

Resultados obtenidos en la segunda etapa:

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta
P1, P2, P3, P5 y P8	Apuesta a un patinadores	P2: “porque el que partió en la pista 3, va a ganar” P1 y P5 “Porque es más rápido (el patinador que partió en la pista tres). P8: No justifica. P3 “Porque es rápido el de la pista 1”.
P4, P6, P7 y P9	Apuesta a dos patinadores	P4 “porque los que partieron en las pistas 1 y 3, llevan la delantera”. P6: “porque los que partieron en las pistas 3 y 4 van en la delantera” P7: “Porque el de la pista 4 se cayo P9 “Porque el que está en la pista tres va a ganar”.
P10	Apuesta a tres patinadores	No justifica

Claramente se aprecia que las justificaciones de los niños de 10 años son categóricas y se basan en una suposición subjetiva (P2) y en las informaciones que muestra el desarrollo de la carrera (P1, P3 y P5).. P8 no justifica.

Cuatro parejas apuestan a dos patinadores y sus justificaciones son las siguientes:

Se observa que P4, P6 y P7 se apoyan en los datos y realizan una apesta de bajo riesgo. Las posiciones de los patinadores en la carrera son utilizadas para fundamentar su apuesta. P9 declara categóricamente que el patinador al que marca su preferencia va a ganar, lo que podría poner en evidencia una certeza.
P10 apuesta a tres patinadores, con preferencia al 3º patinador pero no la justifica.

Etapa3 (E3).
Resultados obtenidos en la segunda apuesta:

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta
P1, P2, P3, P5, P8 y P9	Apuesta a un patinadores	P1: "porque es más rápido" P2: "porque el que partió en la pista 3, va a ganar" P3: "Porque va ganando"; P5 y P8 no justifican. P9: porque (el que partió en la pista 3) es el más rápido.
P6 y P7	Apuesta a dos patinadores	P6: "van en la delantera". P7, apostando a los patinadores que partieron en las pistas 1 y 3 escriben: "porque el (patinador 4) se cayó".

Seis parejas apuesta con alto riesgo. Es claro que P1, P3 y P9 actualizan sus apuestas apoyándose en las posiciones de los patinadores en la carrera y P2 justifica en forma categórica que el patinador de su apuesta, va a ganar. Se interpreta a esta justificación como una certeza. P5 y P8 no dan explicaciones.
Las parejas P6 y P7 se apoyan en los datos del desarrollo de la carrera para decidir su apuesta, que ahora es de bajo riesgo.

5.1.8.2 Las apuestas en sexto básico.

La tabla 67 muestra las apuestas de alumnos de 6º básico en la carrera en patines.

Tabla 67. Apuestas en etapas, carrera en patines, 6º básico

Apuestas EtapasEi	Apuesta Equitativa	Apuesta 1 patinador	Apuesta a 2 patinadores	Apuesta a 3 patinadores	Apuesta a 4 patinadores
E1	2	2	3	0	3
E2	1	3	3	1	0
E3	1	3	2	2	0

En la primera apuesta cinco parejas deciden la apuesta sin riesgo, dos de ellas realizan una apuesta equitativa y otras tres parejas realizan un reparto no equitativo del monto de la apuesta. Dos parejas deciden la apuesta de alto riesgo y tres parejas la apuesta de mediano riesgo.

En la segunda apuesta, solo una pareja apuesta sin riesgo, en forma equitativa, tres parejas decidieron apostar con alto riesgo, otras tres deciden apostar con mediano riesgo y una pareja apuesta con bajo riesgo.

En la apuesta 3, nuevamente hay apuesta equitativa, tres parejas decidieron apostar con alto riesgo, dos parejas apuestan con riesgo medio y otras dos deciden la apuestan de bajo riesgo.

En la primera apuesta, las justificaciones de los alumnos están consignadas en el cuadro:

Pareja	**Tipo de apuesta**	**Explicación de la apuesta**
P3 y	Apuesta	P3: “Capaz que pierda”.

P8	equitativa	P8: “Porque la carrera está peleada por la delantera”
P1, P6	Apuesta a un patinador	P1: “Porque me gusta el azul” P6: “Porque me da confianza”
P2, P9 y P10	Apuesta a dos patinadores	P9: “Porque pensamos que ganan”. P10: “no sabemos”. P2 no justifica
P4, P5 y P7	Apuesta a cuatro patinadores	P5 y P7 apuestan “yo creo que va a ganar uno de los dos (marcan preferencia a dos de los 4 caballos a los que apostaron)”. P4 No justifica pero marca preferencia.

P3 y P8 apuestan si riesgo. Sus justificaciones ponen en evidencia la incertidumbre frente a esta toma de decisiones.

P1 y P6 deciden la apuesta de alto riesgo. P1 apuesta a un fetiche, el color del traje y P6 deposita su confianza en el caballo al que apuesta, aunque su decisión suponga arriesgarse a perder todo.

P2, P9 y P10 deciden la apuesta de mediano riesgo, P9 se basa en una suposición subjetiva, la que representaría un razonamiento determinista y la justificación de P10 claramente se revela la incertidumbre de su decisión.

P4, P5 y P7 apuestan sin riesgo. P5 y P7 se basan en una suposición subjetiva para repartir el monto de la apuesta a los cuatro caballos, con preferencia a dos de ellos.

Etapa 2 E2.

En la segunda apuesta, ocurre lo siguiente:

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta
P3	Apuesta equitativa	P3: “Estoy seguro que gane”

P1, P6 y P9	Apuesta a un patinador	P1: “porque va el primero”; P6: “porque se ve confiable” P9: “Porque creo que va a ganar”.
P5, P7 y P8	Apuesta a dos patinadores	P5: “porque creemos que el (que partió por el carril) dos y (por el carril) tres van a ganar”. P7: “porque el (que partió por el carril) 3 va a ganar” P8 “porque va a ganar”
P4	Apuesta a tres patinadores	No justifica

P3 apuesta sin riesgo. Su respuesta se interpreta como “Con esta apuesta estoy seguro de ganar pues cualquiera sea el ganador yo habré apostado a él. Esta interpretación refleja incertidumbre en la decisión y como alternativa ganadora, eligen la equitatividad del reparto de lo que se apuesta. En esta etapa P3 reafirmar sus niveles de certeza.

P1, P6 y P9 deciden la apuesta de alto riesgo. Se aprecia que todos actualizan su apuesta a partir de lo que ven en el video, pero para P1 la posición del caballo que lleva la delantera en el video es relevante; P6 deposita su confianza en el caballo de su apuesta y P9 se basa en una suposición subjetiva que no reflejaría el análisis de los datos para actualizar su probabilidad de ganar, en función de las nuevas posiciones que han adquirido los caballos, Batanero (2013).

P5, P7 y P8 deciden la apuesta de mediano riesgo, marcando preferencia. P5 apuesta con incertidumbre, expresada como “porque creemos que …”, P7 y P8 explican de forma categórica, lo que se interpreta como una certeza del suceso de la apuesta.

P4 apuesta a 3 patinadores pero no justifica.
P2 y P10 no realizan apuestas.

Etapa 3 (E3).

En la tercera apuesta sucede lo siguiente:

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta
P3	Apuesta equitativa	P3: ""creo que va a ganar".
P1, P4 y P6	Apuesta a un patinador	P1: "porque va el primero" P4: No justifica. P6: "porque va primero y confió en él"
P5 y P8	Apuesta a dos patinadores	P5: "porque puede que ganen" P8: "porque lleva la cabeza"
P7 y P9	Apuesta a cuatro patinadores	P7: "Porque el (que partió en el carril) uno va a ganar" P9: "Porque creemos que gana".

P3, P7 y P9 apuestan sin riesgo, P3 en forma equitativa y con incertidumbre, P9 apuesta con preferencia y con incertidumbre, lo que parece contradictorio; P7 se basa en una suposición subjetiva y es categórico en su afirmación, lo que podría dejar en evidencia un razonamiento determinista. P3, reafirma sus niveles de certeza.

P1, P4 y P6 deciden la apuesta de alto riesgo. P1 y P6 actualizan su apuesta a partir de las posiciones que los patinadores han tomado en la carrera. Además P6 deposita su confianza en la decisión que tomo.

P5 y P8 deciden la apuesta de mediano riesgo. P5 actualizan su apuesta apoyándose en la incertidumbre y P8 se apoya en las posiciones de los patinadores en la carrera para actualizar sus probabilidades de ganar.

5.1.8.3 Las apuestas en 7º básico.

La tabla 68 muestra las apuestas de alumnos de 7º básico en la carrera en patines.

Tabla 68. Apuestas en etapas, carrera en patines, 7º básico

Apuestas	Apuesta equitativa	Apuesta 1 patinador	Apuesta 2 patinadores	Apuesta 3 patinadores	Apuesta 4 patinadores
A1	1	1	7	4	1
A2	1	3	6	2	2
A3	0	4	6	4	0

En la primera etapa dos parejas apuestan sin riesgo, una realizan una apuesta equitativa y la otra una apuesta con preferencia. Una pareja deciden la apuesta de alto riesgo, siete parejas la apuesta de mediano riesgo y cuatro parejas la apuesta de bajo riesgo.

En la segunda etapa tres parejas apuestan sin riesgo, una en forma de reparto equitativo y otras dos apuesta con preferencia, tres parejas decidieron apostar con alto riesgo, seis deciden apostar con mediano riesgo y dos parejas apuesta con bajo riesgo.

En la tercera etapa, nuevamente hay apuesta equitativa, cuatro parejas apostan con alto riesgo, seis parejas apuestan con riesgo medio y cuatro deciden la apuestan de bajo riesgo.

En la etapa 1, las justificaciones de los alumnos están consignadas en el cuadro:

Pareja	**Tipo de apuesta**	**Explicación de la apuesta**
P3	Apuesta equitativa	Hay que asegurarse
P9	A un patinadores	P9: Porque es nuestro color favorito
P1, P4, P5, P6,	A dos patinadores	P1: Están más cerca de la partida. P4: Se ven más profesionales. P5: Porque es nuestro color favorito. P6: Porque pensamos que uno de los dos va a ganar.

P7, P10, P11		P7: Se nota que son rápidos. En referencia a los patinadores 2 y 3. P10: por el color y por como salió, en la partida falsa P11: Porque nos gusta el amarillo
P8, P12, P13, P14	A tres patinadores	P8: Nos gusta el color de sus uniformes P12: porque nos gustan los colores de las camisetas del 2 y el 4 P13 Porque pensábamos que el nº 2 era el más rápido. Por cómo se para. P14: Porque me gustan los números. Apuesta con preferencia al segundo patinador
P2	A 4 patinadores	P2: el segundo es el más probable.

Para P3, la apuesta equitativa le da seguridad de ganar algo y seguir jugando. P2 tampoco se arriesga y apuesta con preferencia al patinador que va por el segundo carril.

P9 apuesta con alto riesgo. Su decisión refleja que apuesta a un fetiche.

Siete parejas apostaron con mediano riesgo, tres parejas apuestan basándose en una suposición subjetiva que puede reflejar un razonamiento determinista. Otras tres parejas apuestan a un fetiche representado por el color del traje de competición y una pareja apuesta con incertidumbre, expresada en la palabra "… pensamos que …".

Cuatro parejas realizan la apuesta de bajo riesgo. Tres parejas apuestan a un fetiche, representado por el color del traje de competición o algún detalle de este y una pareja apuesta con incertidumbre expresada en la palabra "… pensamos que …".

Etapa 2 (E2).

En la segunda apuesta ocurre lo siguiente:

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta
P12	Apuesta equitativa	P12 no justifica
P5, P6, P9	A un patinadores	P5: Porque es más rápido. P6: Porque pensamos que es mejor P9: Porque va en segundo lugar.
P1, P4, P7, P10, P11, P14	A dos patinadores	P1: Tienen más fuerza en los pies. P4: Porque van adelante. P7: No queremos cambiar. P10: Por como van corriendo. P11: Porque iban ganando. Se refiere a los patinadores 1 y 2. P14: Porque son los que llevan la delantera, apuesta con preferencia al 2.
P3, P13	A tres patinadores	P3: Porque el dos lleva la delantera. P13: Porque pensábamos que el número 3 era el más veloz
P2, P8	A cuatro patinadores	P2: El 3 es el mejor. P8: porque el 4 va más adelante

Tres parejas apuestan sin riesgo. Una apuesta equitativa no justificada y dos parejas apuestan sin reparto equitativo, la explicación de P2 es una suposición categórica y P8 se basa en las posiciones de los patinadores en la carrera.
Tres parejas realizan una apuesta de alto riesgo. Dos de ellas se apoyan en los datos, lo que se representa en las expresiones: “ es más rápido” y “… va en 2º lugar”. P6 se apoya en los datos para actualizar su apuesta.

Seis parejas realizan la apuesta de mediano riesgo. P7 reafirma su apuesta y las otras cinco parejas actualizan su apuesta en base a lo que ven en el video, es decir las posiciones de los patinadores en la carrera. Las expresiones “van adelante; iban ganando, fuerza en los pies, …" evidencian las motivaciones para actualizar la apuesta.

Dos parejas deciden la apuesta de bajo riesgo, P3 se basa en el desarrollo de la carrera y P13 apuesta de acuerdo a sus creencias y con incertidumbre.

Etapa 3 (E3).

En la tercera etapa los alumnos dieron las explicaciones siguientes

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta
P2, P3, P6, P9	A un patinadores	P2: Estamos casi seguros. P3: porque creemos que va a ganar. P6: Porque esperamos que gane P9: Porque va ganando
P1, P4, P5, P7, P10, P11	A dos patinadores	P1: Tienen más fuerza en los pies. P4: Tenemos confianza en ellos. P5: Porque son unos de los más rápidos. P7: Porque el dos se cayó y el 4 va último. P10: Porque se lastimo (uno de los patinadores se cayó durante la competencia y P10 apuestan al 2º y 4º patinador) P11: No justifica.
P8, P12, P13, P14	A tres patinadores Apuesta sin riesgo	P8: no justifica P12, con preferencia al primer patinador, no justifica P13: Porque lo encontramos rápido. Con referencia al patinador 4 P14: Porque van todos parejos y el 3 se cayó.

Cuatro parejas realizan la apuesta de alto riesgo. P2, P3 y P6 apuestan con incertidumbre y P9 se apoya en los datos de la carrera.

Seis parejas apuesta con mediano riesgo. Cinco parejas se apoyan en los datos de la carrera para actualizar su apuesta y P4 deposita su confianza en los caballos de su apuesta, lo que refleja incertidumbre.

Cuatro parejas realizan la apuesta de bajo riesgo. P13 y P14 se apoyan en los datos de la carrera.

5.1.8.4 Las apuestas en 8º básico.

Los tipos de apuestas que han realizado los alumnos de 8º básico en la carrera en patines son las siguientes:

Tabla 69. Apuestas en Etapas, Carrera en Patines, 8º Básico

Apuesta / Etapas E_i	Apuesta equitativa	Apuesta 1 patinador	Apuesta a 2 patinadores	Apuesta a 3 patinadores	Apuesta 4 patinadores
E1		5	5	2	
E2	1	5	5		0
E3	1	3	5	1	0

La tabla 69 muestra que en la etapa 1 (E_1) cinco parejas realizan apuestas de alto riesgo, otras cinco apuestan con mediano riesgo y otras dos parejas realizan apuestas de bajo riesgo.

En la etapa 2, una pareja decide apostar sin riesgo, mediante un reparto equitativo. Cinco parejas realizan apuestas de alto riesgo, otras cinco apuestan con mediano riesgo.

En la etapa 3, una pareja apuesta sin riesgo, con un reparto equitativo. Tres parejas realizan apuestas de alto riesgo, otras cinco apuestan con mediano riesgo y una pareja apuesta con bajo riesgo.

Etapa 1 (E_1).

En la primera puesta ocurre lo siguiente:

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta
P1, P2, P6, P7, P12	A un patinadores	P1: Comenzó muy veloz. Se refiere a la partida falsa de la carrera.. P2: Por confianza. P6: Se ve más ágil. P7: Partió rápido P12: Porque le tengo fe que ganará
P3, P4, P8, P9, P11	A dos patinadores	P3: Porque puede que gane (se refiere al tercer patinador). P4: Se ve bien parado. P8: Porque creímos que ellos van a ganar . P9: Porque creemos que son buenos. Apuesta con preferencia al 2º patinador. P11: Porque son los más adelantados
P5, P10	A tres patinadores	P5: apuesta con preferencia al tercer patinador pero no justifica. P10: Porque nos dijo la intuición.

En la apuesta de alto riesgo, dos parejas deciden su apuesta en base a lo que observaron en la partida falsa, por lo tanto se apoyan en los datos. P2 y P12 depositan su confianza en su apuesta aunque esto signifique riesgo, de perder.

P6 se basa en la percepción de agilidad que le sugiere el patinador de su apuesta y se apoya en una suposición subjetiva.

En la apuesta de mediano riesgo tres parejas apuestan con incertidumbre, lo que se manifiesta en expresiones "… puede que .." y "creemos que ..". P4 y P11 observan la partida y deciden en base a las informaciones que muestra el video, en esta etapa.

En la apuesta de bajo riesgo una pareja no justifica y P10 apuestan según una confianza de incertidumbre.

Etapa 2 (E2).

En la segunda apuesta ocurre lo siguiente:

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta
P9	Apuesta equitativa	Porque no se cual
P1, P2, P3, P6, P7	A un patinadores	P1: Va en la delantera. P2: Por confianza. P3: Porque va ganando. P6: Porque tiene mejores patines. P7: Es más rápido
P4, P5, P8, P10, P11	A dos patinadores	P4: Porque va de los primeros, se ve que va a ganar. P5: Apuesta con preferencia al primer patinador pero no justicia. P8: Porque el cuatro quedo atrás. P10: Porque sacaron más ventaja. P11: Porque los números 3 y 4 se quedan atrás.

Una pareja realiza la apuesta segura con reparto equitativo. La apuesta de P9 refleja que el desarrollo de la carrera le hace tomar una decisión con incertidumbre. Las diferencias son tan estrechas que no se arriesga a apostar por uno en particular.

En la apuesta de alto riesgo las justificaciones de los alumnos están basadas en los datos. Claramente P1, P3 y P7 apuestan de acuerdo a lo que han observado de la carrera. P2 observa el video y deposita su confianza en el patinador de su apuesta aunque esto signifique riesgo de perder. La respuesta de P6 es categórica y se basa en una suposición, “tiene mejores patines”.

En la apuesta de bajo riesgo P4, P8, P10 y P11 apuestan de acuerdo a las posiciones de los patinadores en la carrera, es decir se apoyan en los datos.

Etapa 3 (E3).

En la etapa 3 ocurre lo siguiente:

Pareja	**Tipo de apuesta**	**Explicación de la apuesta**
P9	Apuesta equitativa	P9: Porque van empatados
P1. P2, P7	A un patinadores	P1: Saco ventaja. P2: Por confianza. P7: Es más rápido.
P3, P4, P8, P10, P11	A dos patinadores	P3: Porque van empatados. P4: Porque se mantiene. P8: Porque el 4 quedo atrás. P10: ya empezaron a alejarse. P11: Porque creo que alguno de los dos ganará. Refiriéndose a los patinadores 1 y 2.
P5	A tres patinadores	P5: Porque el número cuatro fue el ganador anterior.

Una pareja realiza la apuesta sin riesgo, con reparto equitativo. Al parecer, en el desarrollo de la carrera, P9 observa que las diferencias son tan estrechas que no se arriesgaría a apostar por uno en particular. Así su apuesta reflejaría una decisión con incertidumbre.

En la apuesta de alto riesgo las justificaciones de los alumnos están basadas en los datos. Claramente P1 y P7 apuestan de acuerdo a lo que han observado de la carrera. P2 observa el video y deposita su confianza en el patinador de su apuesta aunque esto signifique riesgo de perder, en su apuesta hay incertidumbre.

En la apuesta de bajo riesgo P4, P8 y P10 apuestan de acuerdo a las posiciones de los patinadores en la carrera, es decir se apoyan en los datos. P11 apuesta con incertidumbre.
La apuesta de P5 tiene poca coherencia.

5.1.8.5 Análisis Global: Carrera en Patines.

La tabla 70 consigna el resultado de la primera etapa en la carrera en patines, participaron 46 parejas.

Tabla 70. Síntesis, carrera en patines, etapa 1

Etapa 1	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de mediano riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				total
	5°	6°	7°	8	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	
Se apoya en datos	3			3				2									8
Suposición	2				3	1	3						1e	2			12
Fetiche		1	1				3				3						8
Incertidumbre						1	1	3			1			2e	1e 1		10
Por confianza		1		2								1					4
Reparte $																	
No justifica	1					1						1		1			4
Sin interpretación																	
Total (1)	6	2	1	5	3	3	7	5			4	2	1e	5	2		46
Total (2)	14				18				6				8				

32 apuestas con riesgo 8 apuestas sin riesgo

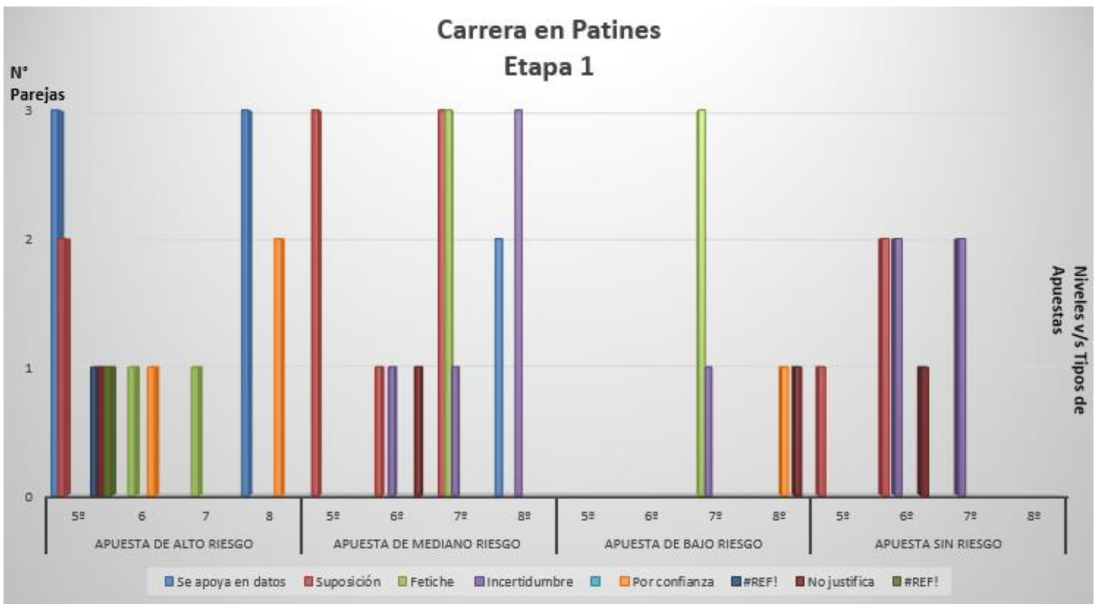
La tabla muestra que la partida fallida mostrada en el video favoreció apuestas basadas en los datos, ocho de 46 parejas apuestan según este criterio.
En ausencia de información sobre el desempeño de los competidores, los alumnos aprovechan informaciones visuales que les permiten analizar el escenario y tomar decisiones.

La mayor concentración de justificaciones de la apuesta es la incertidumbre, luego suposición (subjetiva, un pensamiento que es de naturaleza determinista) y apostar a un fetiche. En la apuesta por confianza también prevalece la incertidumbre en la forma del riesgo, estas suman 14 parejas que utilizaron el criterio incertidumbre para apostar.

Nueve parejas de 7° apuestan a un fetiche. Estos alumnos son en su mayoría de sectores rurales, lo que podría influir en estas decisiones.

Estos resultados se observan en el gráfico 10,

Gráfico 10. Carrera en patines, etapa 1



Este gráfico muestra que, treinta y dos parejas apostaron con riesgo. Ocho parejas se basaron en los datos de la paerida, dos parejas de 5° usaron el criterio suposición subjetiva, dos parejas, una de 6° y otra de 7°, apostaron por un fetiche; diez parejas apostaron con incertidumbre (utilizando también el criterio por confianza) y dos parejas, una de 5° y otra de 6º, no justificaron.
Seis parejas apostaron con bajo riesgo, cuatro de 7° y dos de 8°. Tres parejas de 7° apostaron por un fetiche y otra con incertidumbre; una pareja de 8° aposto con el criterio por confianza y otra no justificó.

Ocho parejas apostaron sin riesgo. La mayor frecuencia se presentó en 6°, 5 de 8 parejas. En 7° dos parejas y en 5° una pareja apostó sin riesgo. Los criterios de apuesta más frecuentes fueron la incertidumbre (en lila) y suposición subjetiva (en café claro), las que dieron origen a respuestas categóricas.

Los resultados de la etapa 2 se consignan en la tabla 71.

Tabla 71. Síntesis Carrera en Patines, Etapa 2

Etapa 2	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de mediano riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				total
Grado del curso	**5**	**6**	**7**	**8**	**5**	**6**	**7**	**8**	**5**	**6**	**7**	**8**	**5**	**6**	**7**	**8°**	
Se apoya en datos	4	2	2	5	3		4	1			1	1			1	1	**25**
Suposición				1	1	2	1							1	1		**7**
Fetiche																	
Incertidumbre			1			1					1						**3**
Por confianza		1		1				1									**3**
No justifica	1							1	1					1	1 e		**5**
Sin interpretación							1	1									**2**
Total (1)	5	3	3	7	4	3	6	4	1		2	1		2	3	1	**45**
Total (2)	18				17				4				6				

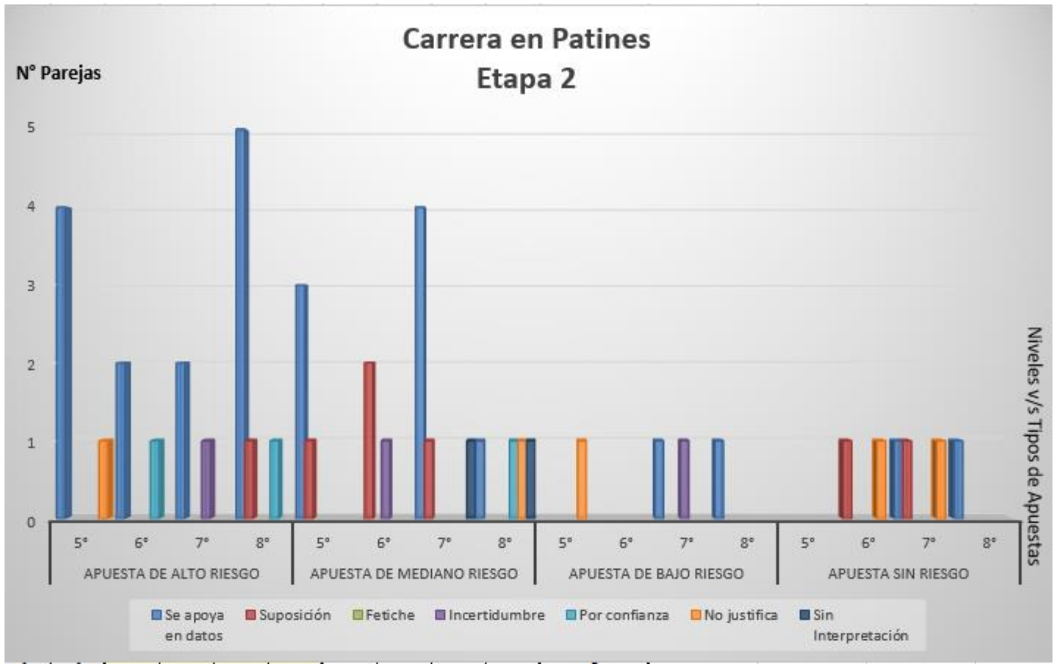
35 Apuesta con riesgo 6 Apuesta sin riesgo

En la etapa 2 participaron 45 parejas de los niveles en estudio.

La tabla muestra el desplazamiento de los datos desde las justificaciones con incertidumbre, apostar por un fetiche y con suposiciones subjetivas, al criterio de apuesta "se apoya en los datos", producido por las informaciones que el desarrollo de la carrera proporción y que permitió a los alumnos analizar el escenario y tomar nuevas decisiones apoyados en las posibilidades de ganar.

En el gráfico 11,

Gráfico 11. Carrera en patines, etapa 2



claramente se aprecia que los alumnos toman decisiones según el critero 'Se apoya en los datos' (barras de color azul) y que mayoritariamente apuestan con riesgo.

La datos de la tabla 71, son corrobarados por el grafico 11, ambos muestran que 18 parejas realizaron apuestas de alto riesgo, 17 de mediano riesgo, 4 parejas de riesgo bajo y 6 parejas apostaron sin riesgo.

En la apuesta de alto riesgo, 13 parejas apostaron considerando el desarrollo de la carrera, en los distintos niveles. Una pareja de 8° realizó una apuesta categórica, una pareja de 7° apostó con incertidumbre, dos parejas (una de 6° y otra de 8°) depositando su confianza en la apuesta y una pareja de 5° no justificó.

En la apuesta de mediano riesgo, ocho parejas se apoyaron en los datos para apostar, cuatro apostaron de manera categórica, dos parejas apostaron con incertidumbre, una pareja aposto pero no se tiene información de su explicación y dos parejas explican de manera no coherente su apuesta.

En la apuesta de bajo riesgo, una pareja de 7° y otra de 8° apuestan apoyados en el desarrollo de la carrera, una pareja de 7° apuesta con incertidumbre y una pareja de 5° básico no justifica.

En la apuesta sin riesgo, dos parejas apuestan en base al desarrollo de la carrera (una de 7° y otra de 8°), una pareja de 6° y otra de 7° apuestan en base a suposiciones subjetivas y una pareja de 6° apuestan pero no justifican.

Para la etapa tres, E3, participaron 40 parejas. La tabla 72 sintetiza los resultados.

Tabla 72. Sintesis, carrera en patines, etapa 3

Etapa 3	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de mediano riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				total
	5º	**6**	**7**	**8**	**5º**	**6**	**7**	**8**	**5**	**6**	**7**	**8**	**5**	**6º**	**7**	**8º**	
Se apoya en datos	3	2		2	2	1	3	4							2	1e	**20**
Suposición	1		1				1							1			**4**
Fetiche																1	**1**
Incertidumbre			3			1		1						1e 1			**7**
Por confianza				1			1										**2**
No justifica	2	1					1								2		**6**
Sin interpretación																	
Total (1)	6	3	4	3	2	2	6	5						3	4	2	**40**
Total (2)	**16**				**15**								**9**				

31 Apuesta con riesgo 9 Apuesta sin riesgo

La tabla 72 muestra la reducción del criterio “se apoya en los datos” y el aumento del criterio “con incertidumbre”. Esto podría estar influenciado por la caída de uno de los patinadores, que lo dejo fuera de la carrera, produciendo alguna incertidumbre en los alumnos que se cambiaron de criterio de apuesta.

Según este análisis los alumnos deciden su apuesta considerando intuitivamente algún riesgo (grados de incertidumbre).

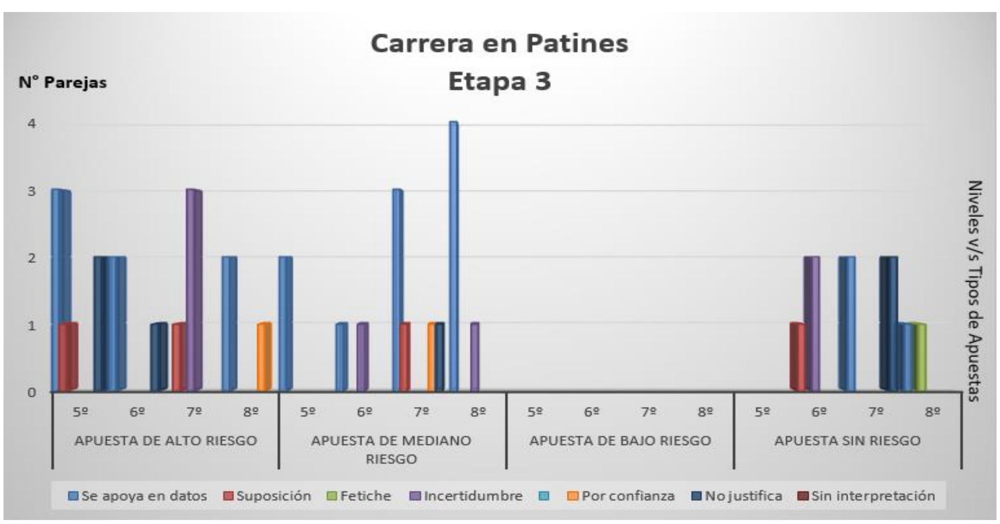
Las apuestas de alto riesgo se basan principalmente en las informaciones que ven en el vídeo, 7 de 16 parejas consideran este criterio para explicar su apuesta. Una pareja de 5° y otra de 7°, apuestan en forma categórica, 3 alumnos de 7° apuestan con incertidumbre y una de 8° por confianza. Dos parejas de 5° y una de 6° no explican su apuesta.

En la apuesta de mediano riesgo 10 parejas de 15 se apoyan en las informaciones obtenidas al ver el video, una pareja de 7° explica en forma categórica su apuesta, una pareja de 6° y otra de 8° explican con incertidumbre. Una pareja de 7° deposita su confianza en su apuesta y otra no justifica.

En la apuesta sin riesgo, tres parejas apuestan basándose en los datos, dos de 7° y una de 8°. Una pareja de 6° apuesta por suposición subjetiva, otra pareja de 8° apuesta por un fetiche, dos parejas de 6° apuestan con incertidumbre (una de ellas realiza el reparto equitativo) y dos de 7° no justifican.

El gráfico 12, presenta una tendencia sobre las decisiones de los alumnos, ante la acualización de la apuesta.

Gráfico 12. Carrera en patines, etapa 3



En el que se visualiza que los alumnos muestran tendencia a apostar al riesgo y que el criterio ‘apoyarse en los datos’, fue el de mayor frecuencia.

En esta etapa, se aprecia que 31 parejas apostaron con riesgo, 16 de ellas con alto riesgo. Los cursos con la mayor frecuencia fueron el 7° y el 8°, con 10 y 8 parejas respectivamente.

5.1.9 Experimentación de la Situación 4. Un Juego de Dados Especiales.

Análisis a Posteriori, Situación Juego de dados.

La profesora, designada como P, hace devolución de la situación adidáctica “el juego de dados”, en los cuatro cursos de este estudio, y juega un set con la finalidad que los alumnos utilicen las reglas del juego, observen como se elige el dado y consulten sus dudas antes de comenzar a trabajar en parejas.

Recordemos que el juego consiste en jugar con 4 dados diferentes y se trata de determinar el dado con más probabilidad de ganar. Se juega en parejas, cada integrante elige uno de los dados, de los cuatro que hay en cada mesa, en cada uno de los sets.

5.1.9.1 Las cuatro etapas del juego en 5º Año Básico.

Primera etapa se elige el dado y el juego es a 6 sets.
En la puesta en común, los alumnos explican sus decisiones frente a la elección del dado. Algunas de sus respuestas son:A19 “lo hicimos asi y el que sale, con ese jugamos.

Figura 42. Eligiendo un dado al azar

Fuente: Video grabación de clase

A19 muestra como revuelve los dados para elegir al azar. A23 “yo elegi el dado al cachipún”. A12 “ elegí el verde porque da buena suerte”. A 7 “el azul porque tiene más caras con 4”.

Desde El punto de vista teórico la situación objetiva S_{-3}, de esta etapa, esta centrada en la elección del dado. Los alumnos interactúan con el medio material (M_{-3}, pg 225), eligiendo el dado. Los respuestas de los alumnos concuerda con lo previsto en el analsis a priori, es decir eligieron el dado al azar, por el color o de acuerdo al número de la cara del dado.

Segunda etapa, se formularon estrategias ganadoras, del tipo:

A3 “tirar el dado arrastrándolo”.
Esta estrategia no fue prevista ya que el dado tiene que rodar, según las reglas del juego.
A14 “elegir el dado verde… porque da buena suerte”.
A8 “elegir el dado verde porque tiene los números más grandes”.
A7 “elegir el azul porque tiene más cuatros y le gana al dos del dado verde”.
Los alumnos se encuentran en una situación llamada de referencia S_{-2}, la que se ha centrado en explicar la elección del mejor En esta situación el medio ha evolucionado, permitiendo a los alumnos comunicar sus estrategias de selección.

Para A14 su estrategia tiene que ver con la superstición, el color del dado, los números que tiene ‘dan buena suerte’. Para A8, dada las reglas del juego, su estrategia es simple y A7 realiza un análisis de las caras de los dados azul y verde. A7 tiene un pensamiento analítico e identifica variables del juego más complejas que las señaladas por sus compañeros de nivel.

Tercera etapa, se pedía utilizar alguna de las estrategias encontradas para ganar y explicar porque se gano o perdio. Despues de jugar 4 sets se obtiene las siguientes respuestas:

A9: “yo jugue con el dado verde y le gane a A10, que jugo con el dado rojo.
A15 : “jugué con el verde y A16 con el amarillo y el me gano”.
Algunos alumnos; Si, si el amarillo le gana al verde.

A21 dice “pero yo jugue con el amarillo y mi compañero con el verde y perdí.”

P pregunta a A9 y a A16 ¿Por qué perdieron? Ellos responde:

A9 porque casi siempre me salio el dos y a mi contrincante el 5.

A15 “porque me salio mas veces el dos y a A16 siempre le salio el 3”

P entonces ¿como es el juego?

A5 dice “el juego es de fortuna”.

A16 “es de suerte y mala suerte.

En esta etapa los alumnos nuevamente se encuentran en una situación de referencia, que se anota $S_{-2,}$ puesto que sus respuestas solo reflejan resultados concretos que han obtenido jugando, solo con un par de dados cada vez, y por lo tanto se trata de una situación de formulación.

Etapa cuatro, los esudiantes formaron grupos de cuatro alumnos y resolvieron tres tareas.

T1) Determinar cual es el mejor dado para ganar y explicar porqué

T2) Si el mejor dado para ganar es el verde ¿cuantas posibilidades más tiene de ganar que el dado rojo?

T3) Inventar un método que muestre las posibilidades de ganar que tiene el dado verde frente al dado rojo.

En relación a la tarea 1, la profesora solicito a los alumnos, escribir en los cuadernos un cartel con la respuesta de T1.

La respuesta de la mayoria de los alumnos fue: “el dado de color verde”, “porque el verde tiene el 6, que es el número mayor”.

A20: El verde tiene el 6 y el 2 y con tal que lo tires bien, puedes sacar 6.

A21: “Yo creí que era el rojo. … porque el rojo tiene el 5 más veces que el dado verde tiene el 6. Pero ahora no, ahora creo que es el verde.

Un representante del grupo 1, G1, dice “el 2 sale en pocas veces, por eso el verde tiene mayor posibilidad”, Los representanes de los grupos G2, G3, G4, G5 y G7 coinciden en señalar que “el dado verde porque tiene números más grandes”.

Un representante de G6 dice “te sale el 6 (en el dado verde) y en los demas (dados) no”.

Para la tarea dos**, T2,** no se produjeron respuestas en este nivel.

Con relación a **T3,** representar las posibilidades de ganar que tiene el dado verde frente al dado rojo, los grupos escriben expicaciones del tipo:

G3 “es decir el juego es de suerte y de mala suerte”.

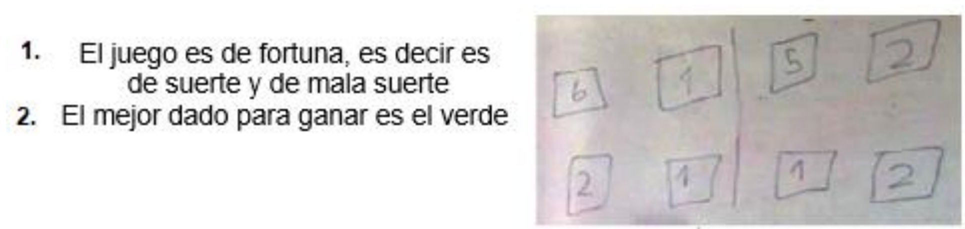
G4 “cuando lo tiran se darán cuenta que sale más veces el 6”.

G5 “porque (el dado verde) tiene números mayores”.

Las que no corresponden a lo solicitado en T3.

Solo un alumno se aproxima a lo solictado. A25 representa algunas jugadas de un set, lo que se muestra en la siguiente imagen.

Figura 43. Resultados parciales en un juego de dados



Fuente: Imagen propia.

Mientras A25 esta en la pizarra, algunos alumnos se dan cuenta que otro resultado posible es que salga 6 y 5 y se lo dicen de manera insistente. No obstante A25 no representa esta jugada en su esquema, se puede suponer que en sus ensayos no le salio dicha jugada o tal vez no acepta lo que dicen sus compañeros porque para el estarían todas las jugadas, lo que reflejaría lo concreto de su pensamiento.

G1, G2 y G7 no responden.

En esta última etapa las retroacciones del medio han permitido a los alumnos responder solo algunos aspectos de las tareas solicitadas.

Se podría decir que los alumnos se encuentran en la fase de formulación y no en la fase de validación que es el objetivo de la tarea 3.

Estos resultados muestran que las representaciones de casos posibles de sucesos aleatorios no hacen parte del repertorio de estrategias disponibles de los alumnos de 10 años. Lo que es un obstáculo para avanzar de la etapa tres a la cuatro, en la que se esperaba una comprensión intuitiva de la probabilidad Laplaciana.

5.1.9.2 Las cuatro etapas del juego en 6º Año Básico.

Primera etapa, los alumnos de 11 años eligen un dado cada uno y juegan 6 sets. Algunas de las respuestas obtenidas sobre la elección del dado son las siguientes:

A8 dice "el que salio salio nomás"

Su respuesta indica que eligio al azar

A13 dice que su compañero A12 "vio el numero más grande que habia en el dado".

P les pregunta ¿Esa seria una estrategia para ganar?

A12: Si

A3: "es trampa, esa seria una trampa"

A2 dice que: "A13 se enoja con él"

A9 "Yo tambien elegi el que tenia los mismos numeros, (dado amarillo). Lo elegi porque tenia la posibilidad de quedar empate, ganar o perder".

En esta etapa los alumnos se fijan en los números de las caras de los dados y eligen al que tiene el 6 en dos de sus caras. Esta estrategia concuerda con lo previsto en el analsis a priori. Desde el punto de vista teórico el juego constituye

una situación objetiva y los alumnos interactuan con el medio (material M_{-3}) de ella.
Se había previsto que los niños elegirían el dado por el color que considerara favorito, pero esa elección no apareció.

Segunda etapa los alumnos vuelven a jugar 4 sets, la consigna es “elegir el mejor dado para ganar”. Al final del partido la profesora solicita ir a la pizarra a escribir sus estrategias ganadoras.

Se han obtenido las siguientes:

A12: “Que el dado tenga los números mayores”.

P pregunta: Y ¿es seguro que se gana con ese dado?

Algunos alumnos dicen: Noo

A7: “porque el dado tiene también números más pequeños”

A7: “Elegir un dado que tenga los números más grandes, más veces”. Lo que puede interpretarse como, elegir un dado que tenga números mayores, como 4, 5 y 6 repetido más veces. Por ejemplo el dado que tiene tres caras con cinco y tres con uno en vez del dado que tiene cuatro caras con 2 y dos caras con 6.

A5: “elegir el dado que tiene los mismos números en todas sus caras, el dado amarillo que solo tiene el 3”.

A3 dice “elegir el dado al azar, es como lo más justo”.

P pregunta a A3 ¿con esa regla tienes más posibilidades de ganar?

Algunos alumnos responde a coro: Síii

Otros alumnos: Noo

A10 dice: “a veces no y a veces sí”.

Se observan tres tipos de estrategias, para elegir el dado. La primera relacionada con el azar, la segunda elegir el dado con el número más alto y la tercera, más analítica, es elegir el dado en el que los números grandes aparezca más veces. Por ejemplo el dado rojo porque aparece el 5 que es un número grande tres veces

Por otra parte, las respuestas evidencian al menos dos visiones sobre la naturaleza del juego. Para unos está relacionado con la suerte y para los otros esta elección depende de un pequeño análisis sobre las caras de los dados.

Teóricamente en este etapa el juego ha evolucionado desde una situación objetiva a una situación de referencia S_{-2}, en este sentido el medio ha cambiado a (M_{-2}) (p.269).

Es decir la consigna, elegir el mejor dado para ganar produce la evolución del medio y sitúa a los alumnos en la situación llamada de referencia anotada $S_{-2.}$ La posición de los alumnos evoluciono a una situación de formulación y por ello en esta etapa los alumnos comunican sus estrategias de selección. La posición de los alumnos se anota E_{-2}.

Tercera etapa: Los alumnos utilizan las estrategias formuladas. Despues de jugar 4 sets, P solicta a los alumnos justificar verbalmente sus posibilidades para ganar o perder. Se obtiene las siguientes respuestas:

A12 Yo jugué con el dado rojo porque tiene tres veces el 5, o sea más veces que el verde que tiene el 6 solo dos veces. En el dado azul el 4 aparece más veces que el 5 pero el 5 le gana al 4 por eso elegí el rojo.

Se evidencia el análisis en función de la configuración numérica de las caras de cada dado.

A7 dice “yo y mi compañero elegimos al azar”

P: pregunta “el que gano, con qué dado jugo”

A7: “con el azul y yo jugué con el rojo”

A8: Si a mí me salió más veces el 4 y a A7 le salía y le salía el 1 y no me pudo ganar.

A7 “síi, tuvo mucha suerte”.

A15 Yo le gane a A14 con el dado verde. El jugó con el dado rojo. Le gane porque a mí me salió más veces el dos y a A14 le salía casi siempre el 1”.

A14 si a mí me salió pocas veces el 6 y por eso no le pude ganar.

P pregunta ¿alguien gano con el dado amarillo?”. 2 alumnos levantan la mano.

A5 dice: “A6 me gano con el dado amarillo. Yo jugué con el dado verde y casi siempre me salió el 2. El 6 sale pocas veces pero cuando sale le gana a todos”.

A6 dice “si yo gane porque mi dado tiene un número que es mayor que el número que aparece más veces en el verde o sea que el 2”.

P pregunta a A6, y ¿por qué elegiste el dado amarillo?

A6 “Porque A5 saco el verde primero”.

P pregunta a A5 ¿Por qué elegiste el dado verde?

A5 “Porque tiene el 6 y el 6 le gana a todos”

P pregunta al curso “niños ¿Cómo es el juego?”

Varios alumnos responden es de suerte.

En el análisis a priori se han previsto explicaciones analíticas del juego y estas se han apoyado fuertemente en la acción, es decir en resultados particulares de los partidos que han jugado.

Los alumnos han jugado y teóricamente la situación de referencia S_{-2} evolucionó a una situación de aprendizaje, designada S_{-1}, no obstante algunas concepciones relacionadas con el azar han prevalecido sobre el análísis que depende de los números en las caras de los dados. Estas concepciones no permite a estos alumnos darse cuenta que hay dados con más posibabilidad de ganar que otros.

Si se puede decir que el medio ha permitido a los alumnos explicar las oportunidades de ganar, entre las que emerge la explicación analítica de A12, quien describe las oportunidades de ganar del dado rojo frente al dado verde y al azul, colocándose en posición de alumno que aprende, anotado como E_{-1}. En este caso A12 se encuentra en una situación de validación.

Cuarta etapa, trabajo en grupos. La profesora pide ponerse de acuerdo y escribir una respuesta, a la tarea l: ¿cuál es el mejor dado para ganar?,
Se han obtenido las siguientes respuestas:

G1. Todos tienen la misma posibilidad de ganar, porque nunca se sabe quién va a ganar.

G2. El dado verde porque tiene más posibilidad que caiga el dos, pero el 6 igual cae.

G3. El dado rojo porque tiene más posibilidades de salir 5 porque se repite más veces.

G4. Cualquiera porque todos tienen la misma posibilidad, también (depende de) como lo lancen o como lo escojan porque todos los dados pueden ganar depende de la suerte o la probabilidad o también si lo tira rápido o lento.

G5 no responde.

En la puesta en común los grupos exponen sus respuestas y estas son las siguientes:

G2. Con el dado verde y el rojo se puede ganar más veces porque tienen los números más altos.

G3. Que depende del dado que elija la persona porque si ella elije rojo yo elegiría amarillo porque es el que tiene mayor cantidad de caras con 3, porque el dado rojo tiene tres caras con uno.

G1. Hasta ahora va ganando el verde (el grupo juega nuevos sets para determinar el mejor dado para ganar).

G4. El celeste lo encontramos el mejor dado con el 40% de ganar, después el amarillo con el 30% después el verde con el 20% y el rojo con el 10%.

T2 es determinar cuál es la probabilidad de ganar que tiene el dado verde cuando juega con el dado rojo. Las respuestas escritas de los grupos son:

G1: Los dos dados tienen la misma posibilidad.

G2 y G5 no responde.

G3: “porque el verde tiene solo dos 6 y el rojo tiene más 5, por eso es poco probable ganar con el verde”.

G4 “La posibilidad de ganar es la misma porque como lo lanzo o como lo tiro, porque aunque usted lo tire rápido o lento va a salir igual un número inesperado porque es simple lógica o física”.

Estas respuestas concuerdan con las concepciones que han emergido en las etapas anteriores.

En esta tarea, G1 y G4 no han apreciado que un dado tiene mayor probabilidad de ganar que otro. Los conocimientos intuitivos derivados del juego no les han permitido analizar las jugadas en términos de las caras de los dados y estas respuestas parecieran señalar que los niños piensan que los dados son corrientes.

La respuesta de G3 evidencia que vuelve a responder la tarea 1, es decir, buscan el mejor dado para ganar.

El juego no es equiprobable, lo cual no es suficiente para que los alumnos conciban que un dado tiene mayor probabilidad que otro. Esto significa que la probabilidad de ocurrencia de una cara de un dado, por ejemplo el dado verde, no es suficiente para calcular su probabilidad de ganar en la competencia con otro dado. La tarea que propone este juego es calcular la probabilidad de sucesos independientes, compuestos y no equiprobables, lo que presenta un desafío que involucra intervenir el medio, sin perder la adidacticidad, para aproximarse al significado del cálculo de esta probabilidad.

T3: la consigna es “inventar una forma de representar todas las posibilidades que existen al jugar con el dado rojo y el verde”.

Las respuestas encontradas son:

G1: “jugando 2 veces y en el segundo juego cambiar los dados”. En la puesta en común explican: jugamos 2 sets. … el mejor dado es el verde porque gano todas las partidas y tiene mayor porcentaje de ganar contra el rojo, el verde le gana. Porque si al verde le sale el 6 y al rojo le sale el 1 o el 5, gana el verde. Y si le sale el 2, al rojo le puede salir el 1”. También hay que saber lanzar bien, si uno lanza bien gana y si no pierde.

G3: “el verde porque es el número mayor que es el 6”.

Las respuestas los grupos G1 y G3 no corresponden a lo solicitado. Al parecer no han entendido la consigna

G5. Miramos los números de los dados y el mejor dado es el rojo.

P: “G1 dice que el verde es el mejor dado”.

G5: “nooo porque si al rojo le sale el 5 y al verde le sale el 2 obviamente gana el rojo”. “Otro dado que es mejor es el amarillo porque cuando juega con el verde casi nunca sale el 6 y gana el amarillo que tiene 3 en todas sus caras”. Hay poca probabilidad de que salga el 6 porque solo hay dos 6 y cuatro 2, en cambio en el rojo es más probable que salga el 5. En el verde es más probable que salga el 2. Entonces el mejor dado para ganar es el rojo.

G4. Comprobamos que el azul era mejor en base a los resutaddos (de los sets anteriroes) y porque tenia muchos 4. Si un compañero elige dado verde nosotros eligiriamos el azul para ganar.

A12 de G2 agrega “depende de la suerte”

A16 de G4 “ si y de como lance. Tambien el amarillo siempre le gana al verde porque tiene solo 3 y el verde tiene varias veces 2”.

G5. En todo caso el amarillo le gana al celeste porque el celeste tiene 0, … pero es poco probable que le salga el cero y el amarillo tiene 3”

A12 “El amarillo es el mejor dado, le gana al verde porque tiene el 6 y hay mas posibilidad de que salga el 2”.

A9 “En el amarillo siempre sale el 3 y en el verde aparece más el 2 por eso gana el amarillo.

A21 “Es como aleatoria la cantidad, o sea puede salir distinto”.

A18 “Sí porque si juega el rojo con el azul puede salir 5 (en el rojo) y en el otro 4, entonces gana el rojo”.

A12 “También depende de la probabilidad de que salga “

P pregunta: y ¿cómo calculas esa probabilidad?

A12 “No hay forma, se calcula lanzando”.

A8 “Es aleatorio, o sea que puede salir cualquier cosa”.

A2 de G1 dice “jugando dos veces y cambiando los dados entre ellos cada vez”

A15 de G4: “el rojo entre 45% y 50% y el verde entre 60% y 65%. También el rojo el 50% y el verde el 50%.”.

G5. Nosotros escogimos el rojo y el verde porque tienen los números más grandes pero también el amarillo le gana al rojo y al verde porque nunca se sabe si va a salir 2 o 6. Si sale 1 (en el dado rojo), en el amarillo siempre sale 3 y le gana.

Los alumnos consideran que el juego es aleatorio porque “nunca se sabe lo que va a salir, excepto en el dado amarillo”. Los alumnos que cuantifican en porcentaje lo hacen a partir de estimaciones, que no tiene un sustento analítico, por lo que se desestima su validez.

Las herramientas disponibles de los alumnos para determinar los resultados posibles son los juegos mismos y ellos explican y argumentan en relación con los sets que han jugado, lo que no les permite generalizar sus resultados.

Teóricamente, los alumnos las han elaborado estas producciones situados en la situación de aprendizaje, anotada S_{-1} y tiene una posición E_{-1} que les permte interactuar con el medio M_{-1} (medio de referencia teóricamene). Los alumnos se encuentran en una situación didáctica de formulación.

Los alumnos han jugado en parejas y trabajado en grupo, han interactuado entre ellos y las estrategias del juego los han situado en una situación de formulación a partir de las jugadas concretas. Ellos no han podido generalizar estrategias ganadoras tampoco representar ni determinar todos los resultados posibles al jugar con dos dados, lo que no les permitió determinar la probabilidad de Laplace y por eso no pudieron evolucionar a una situación de validación.

La situación de validación hubiera requerido determinar los casos posibles y comparar la cantidad de veces que gana uno y otro dado.

A partir de estos resultados es posible establecer una analogía con el desarrollo histórico de la probabilidad. Durante la época antigua también se lanzaban instrumentos aleatorios y sus resultados no eran analizados en términos del calculo de sus probabilidades por la ley de Laplace. Lo que caracteriza a este conocimiento como un obstaculo epistemológico.

5.1.9.3 Las cuatro etapas del juego en 7º Año Básico.

Primera etapa, los alumnos eligen un dado cada uno y juegan un partido de 6 sets. Algunas de las respuestas obtenidas en el juego, relacionadas con la elección del dado son:

A12 "Lo elegí porque me gusta el verde".

A17 "Yo elegí el verde porque me gusta el color".

A3 "Elegí el dado que tenía más probabilidad de ganar que el otro y después es a la suerte".

A7 "al azar".

P pregunta ¿cómo es el juego?

A16 responde "es de estrategia"

Algunos niños dicen nooo

P hace devolución ¿cuál sería tu estrategia para ganar?

A12 el dado que tenga mayor altura de números y… saber tirarlos.

A3 “¡de la pura suerte ganamos!”.

A9 “Es un juego de suerte. Como caiga el dado es de suerte no más”

Estas estrategias quedan registradas en la pizarra, esas son:

Estrategia 1: El juego es de estrategia, o sea se puede hacer un plan para ganar.3

Estrategia 2: El juego es de suerte o sea no sabe si va a ganar o no (cualquiera puede ganar).

Estrategia 3: El juego es de probabilidad, como el juego de la ruleta, en el Monticello.

En esta etapa el juego ha evolucionado, el medio ha permitido que algunos alumnos perciban la aleatoriedad relacionada con la incertidumbre de ganar, perder o empatar y otros, a partir de una estrategia que lleva implícita la incertidumbre. Por otra parte las explicaciones de sus propios compañeros se convierten en un medio de aprendizaje para los alumnos que aún no han logrado apreciar la variabilidad de los resultados porque aún se encuentran en una situación de acción, llamada situación objetiva, S_{-3}.

Segunda etapa, los alumnos juegan dos sets. Durante la puesta en común surge la pregunta: ¿hay alguna estrategia para ganar el juego?, algunos responden

A9 “da lo mismo con que dado jugar, menos con el 3 (dado amarillo) que es más complicado”.

A7 “El juego es de suerte”

A18 o sea “no hay estrategia para ganar”

A25 la estrategia es elegir el dado con probabilidad de ganar y cuando se juega es a la suerte.

P escribe esta estrategia en la pizarra.

A18 “la cosa no es sacar el que tenga el mayor número, porque por ejemplo el verde tiene más 2 que 6 entonces es menos la probabilidad de que salga 6.

Entonces escoger los que tengan más números mayores … Por ejemplo el dado amarillo, (solo tiene 3 en todas sus caras) gana contra el 6 y el 2 (dado verde) porque tiene menos probabilidad de que salga el 6. Entonces la estrategia sería que eee… no hay que guiarse por el mayor sino que por el que tenga más (veces) números grandes en el dado".

P pregunta, por ejemplo el verde ¿lo elegirías?
A18 "No, porque yo jugué con el verde y A14 con el rojo y a mí siempre me salió el 2 entonces es menos probable que llegue a salir 6. Solo el 2.
Las estrategias se escriben en la pizarra.

En esta etapa, la intervención de A18 refleja un razonamiento analítico, el que es necesario para tomar decisiones en las siguientes etapas. El resto del curso escucha las explicaciones de A18 y algunos alumnos obtienen información relevante que eventualmente podrían utilizar o no, en las siguientes etapas.
En el análisis a priori no se previó, para esta etapa, un análisis tan profundo como el realizado por A18 y se ve que este alumno se ha anticipado a develar parte importante de la estrategia general para ganar. En este caso A18 se encuentra en una situación de formulación.
Como los alumnos han jugado varios sets, están en condiciones de formular estrategias ganadoras por lo que se sitúan en el nivel -2. En este nivel, la situación, llamada de referencia S_{-2} focaliza el conocimiento previsto y el medio ha evolucionado, M_{-2}, permitiendo a los alumnos formular estrategias ganadoras y a A18 a anticiparse al análisis del juego.

Tercera etapa, los alumnos juegan un set de 15 lanzamientos por contrincante. La consigna es elegir el mejor dado para ganar y utilizar alguna de las estrategias formuladas.
Frente a la pregunta ¿Creen que eligieron el mejor dado para jugar?, se produce la siguiente interacción:

A7 “Sí, jugué todos con el verde”

A8 “A7 me ganó cuatro veces esa es la prueba”.

P pregunta: ¿Qué significa que sea el mejor dado para ganar?

A7 “que tenga más probabilidad de ganar porque tiene más 2 que 6”

A9 “mi mejor dado es el rojo porque tiene tres 1 y tres 5 y el azul tiene más 4, pero este (el dado rojo) tiene al 5 que es mayor y tiene la misma probabilidad de salir que el 1 entonces al tirar el dado como los números son más pequeños 6 entonces va a ganar el rojo.

A21 el rojo es el mejor dado porque tiene 3 (uno) y 3 (cinco) y cada uno tiene la misma probabilidad y son los números más grandes que todos los otros dados.

A23 “el mejor dado es el amarillo porque (el 3) es mayor que los números menores de los otros dados”

A30 “Es que depende del dado que elija el contendor”.

A25 “yo gane con el rojo al azul”.

A24 (que es el contendor) “me gano porque tiene suerte”

A18 “yo jugué con el amarillo y le gane al verde, porque el verde tiene más probabilidad de salir 2 que 6. … Elegí el amarillo porque a cada rato le gane con el amarillo”

A14 “yo jugué con el azul porque tengo más probabilidad de que me salga 4”

P pregunta: Y el dado azul, ¿le gana a todos los demás?

A14 “Depende porque los otros tienen más números más bajos que este (el 4), así es que puede ganarle a los demás.

A12 “yo no lo elegí por los números, lo elegí porque me gusta el verde.

P: “Tú crees que el color te da más posibilidades de ganar?

A12 “yo creo porque igual el verde tenía el 6, porque si en el rojo me sale 1, el verde igual va a ganar. Así que igual me fije en los números.

---

[6] Se refiere a que los números menores en las caras de los dados verde, amarillo y azul so menores que 5.

A17 “yo elegí el verde porque me gusta el color, además tiene el 6 y a veces sale más el 6 que el 2 porque el juego es de azar”.

A12 y A17 eligen dado por una preferencia visual, el color del dado y no por un análisis de sus caras.

En esta etapa las respuestas evidencian una comprensión del juego y la emergencia del lenguaje de la probabilidad en las explicaciones de los alumnos. La forma que tienen los alumnos de validar sus explicaciones es apoyándose en los resultados de los juegos

realizados y elaborando deducciones. Es decir la fase de validación se apoya fuertemente en la acción.

Las devoluciones de la profesora permiten que los alumnos profundicen en sus respuestas y emerjan sus concepciones sobre la naturaleza del juego: es al azar pero también hay estrategias para aumentar la probabilidad de ganar.

Los alumnos se encuentran en una situación de validación, S_{-1}, en posición E_{-1}.

Cuarta etapa los alumnos trabajan en grupos. El propósito de esta etapa es colocar a los alumnos en una fase de validación.

T1, La profesora solicita a cada grupo “escribir cual es el dado (el verde o el azul) que tiene más posibilidad de ganar en un partido y justificar esta afirmación”.

Los resultados frente a esta consigna se registraron en una hoja de respuestas. Esta son las siguientes:

G1: nosotros creemos que el dado ganador es el azul porque el dado azul tiene mayor cantidad de números altos.

G2: Gana el dado verde al azul porque tiene números más grandes.

G3: va a ganar el dado azul porque el dado azul tiene 4 caras de 4 y 2 de 0 y el verde 2 de 6 y 4 de 2

G4: El azul porque tiene cuatro lados de 4 y el verde tiene dos lados de 6.

G5: El azul porque tiene mejores números y porque tiene números más grandes.

G6: Para nosotros el mejor dado es el verde porque creemos que es el mejor dado para ganar.

G6, no explica sus creencias.

G7: Gana el dado azul porque en el dado azul se repite más el número mayor.

Las explicaciones de los alumnos evidencian que el mejor dado para ganar es el que tiene mayor cantidad de caras con números relativamente grandes, como el azul. Este dado tiene en cuatro de sus caras al 4 y en dos al 0. Por otra parte el dado que tiene al 6 también es el mejor dado.

En estas respuestas se identifica un razonamiento analítico de los alumnos ya que podría ser que estuvieran percibiendo que el mejor dado para ganar no solo debería tener el número más grande sino que este número debería repetirse más veces en las caras del dado.

Por otro lado, ellos no han considerado que en el dado verde, el 6 simpre tiene 12 posibiidades de ganar y las posibildaes de ganar del 2, van desde 0 a 12.

T2: “Inventar un método que muestre las posibilidades de ganar que tiene el dado verde frente al dado azul”, la profesora decide desarrollar una tabla de doble entrada de los resultados posibles para estos dados. Esta decisión se ha tomado luego de observar que los alumnos de otros niveles no han podido realizar ni completar esta tarea espontáneamente.

El análisis previo plantea que los alumnos construyan representaciones gráficas de los resultados posibles de dos dados que se enfrentan, como tablas de doble entrada o diagramas de árbol. Dado que esto no ocurre, se pone en evidencia que los alumnos 12 (o 13) no tienen disponible conocimientos para representar los casos posibles de este juego. Lo que es un obstáculo para avanzar de la etapa tres a la cuatro, en la que se espera que estas representaciones ayuden a aproximarse e interpretar de manera intuitiva la probabilidad Laplaciana.

En este sentido se debería intervenir el medio para lograr estos desempeños en los alumnos.

5.1.9.4 Las cuatro etapas del juego en 8º Año Básico.

Primera etapa, cada integrante de la pareja, eligen un dado cada uno y juegan un partido de seis sets. Luego de esto la profesora, anotada como P, organiza una puesta en común.

P: quienes ganaron, levanten la mano los que ganaron

Varios alumnos levantan la mano

P: los ¿qué ganaron que dado eligieron?

Algunos alumnos: El verde, otros alumnos: el rojo

P: alguien gano con el dado amarillo? Y con al dado azul?

Yo, Yo

P: El joven que ganó con el dado rojo, porque lo eligió.

A 9: lo elegí a la suerte.

P: ¡Ah!, y el que jugó con el dado verde porque lo eligió.

A6: Porque tenía el número más grande.

P: Quien más eligió el dado rojo y por qué.

A15 Yo lo elegí. Si, lo elegí porque sabía que iba a ganar.

P: Los que ganaron, había alguna estrategia para ganar?

Algunos nooo

Otros sí

P ¿Cuál es la estrategia?

A La suerte

P: ¡la suerte!, ¿es una estrategia para ganar?

Algunos: nooo

Otros siii

A18 elegir el dado con el número mayor

P: ¿Se gana siempre con el verde?

Algunos nooo

P: ¿Quién eligió el verde y perdió?

Algunos alumnos yoo

P ¿Por qué, también se pierde con el verde?

A18 porque tiene un número menor, tiene al 6 que es un número grande y al 2 que es un número menor.

P: ¿Cómo es el juego?

6546e6cbnmA6 Es de suerte

Algunos Es de estrategia

P Dirigiéndose a A6, ¿Por qué tú dices que es de suerte?

A6 Porque se puede perder o ganar

A15 No, porque es de estrategia. Porque uno puede elegir el dado después que eligió el compañero.

A14 Porque depende del dado que eligió el otro compañero uno tiene que elegir el otro dado entonces ahí uno se va dando cuenta que números tiene y mmm el primer dado que escoge el compañero es el importante.

P Y eso te permite predecir si ganarás

A14. Síii. Yo elegí el amarillo y gane con el amarillo.

P Ah Chicos, ¿hay un dado con el que se pueda más veces?

Algunos siii, con el verde, con el amarillo.

En esta etapa algunos alumnos han logrado identificar la estrategia del juego, elegir el dado de acuerdo a lo que eligió el compañero, pero como estos no disponen de un mecanismo para representar las combinaciones posibles del juego, no han logrado relacionar las oportunidades de ganar de un dado frente al otro con la composición numérica de cada uno de ellos. Solo saben que han ganado con un dado particular a su contrincante. Al parecer los registros de los sets jugados no son utilizados para analizar el juego. Por lo tanto, en una eventtual situaión de enseñanza, el medio debería considerar retroacciones que permitieran a los alumnos analizar sus resultados para describir o representar las combinaciones posibles.

Segunda etapa, frente a la consigna “Cada uno va a pensar que dado elegir para poder ganar”, los alumnos jugaron durante 10 minutos aproximadamente, 4 sets.

P: ¿Quienes ganaron y porque ganaron?

Algunos por suerte

P: pregunta a A3 que me quieres explicar

A3 que con el dado verde a veces se puede perder. Mi compañero jugo con el dado verde y yo tome el amarillo y a él le empezaron a salir casi puros dos, así que perdió. Después él tomo el amarillo y yo tome el azul.

P porque?

A3: Porque tiene cuatro 4 y dos 0. Y le gane de nuevo.

P: porque crees que le ganaste nuevamente.

A3: Porque a él siempre le salía el 3 y a mí me salía más veces el 4 que el 0.

Claramente A3 realiza un análisis del juego en relación a sus resultados y a la composición numérica de los dos dados. Para este análisis se apoya en la cantidad de veces que un número relativamente grande aparece en el dado que él eligió. En este sentido A3 no dispone de una representación o descripción de los casos posibles.

P: Jóvenes, ¿hay algún dado con el que se pueda ganar más veces?

Algunos Noooo…

A 14 con el amarillo

P ¿De qué depende ganar un juego?

A3 Hay que saber escoger el dado

P ¿En qué te fijas para saber escoger el dado?

A3 En el que tomo el otro.

P Ah depende del dado que eligió el compañero, es el que eligiras tu. Y si tu compañero eligio el amarillo, ¿Cuál elegirías tú?

A3: El azul

P: ¿Por qué?

A3 porque tiene solo 2 ceros y en el juego puede aparecer más veces el 4 que le gana al 3 del amarillo.

P: ¿Hay alguna estrategia para ganar entonces?

Algunos nooo

Algunos siii

A15 La estrategia es escoger el dado que tiene al 2 y al 6. El dado verde.

A3: elegir el dado que le pueda ganar al otro.

P: ¿Pero cómo lo elegimos?

A21 Saber tirar el dado.

A3 elegir el dado que tenga el número mayor que el que eligió el compañero. Y si el compañero eligió el dado con mayor número entonces elegir otro dado que tenga el número más grande de los que quedan.

Tercera etapa: P: Como hay dos estrategias escritas en la pizarra, la de A15 y A3, vamos a jugar para ganar, ocupando alguna de estas dos reglas.

Evaluación del juego

P ¿Quién aplico la regla de A15 y gano?

A9 y A20 yo

A10 yo la aplique pero perdí.

P: ¿Quiénes jugaron con la regla de A3 y ganaron?

Algunos yo

P: Siempre se gana con la regla de A3

A7: No, yo perdí con esa regla.

A3 es que no siempre se gana porque el juego es al azar pero si hay más posibilidad de ganar con esa regla.

A9 pero yo gane con el dado verde

A3 puede haber sido

P y que otra explicación se podria dar.

A14 que el dado verde tenia más posibilidad de ganar que el dado de A9.

A9 yo jugue con el dado azul.

Cuarta etapa, frente a la Tarea 1: ¿cuál es el mejor dado para ganar?, P interactúa con los grupos de trabajo

G1 el dado que tiene más posibilidades para ganar es el dado azul porque basta que haya más 4 y dos 0 y con ese dado hay más posibilidades.

P: basta con que haya más 4 que 0 para que haya más posibilidades de ganarle al dado verde? Solamente basta esa explicación para que el gane al dado verde?

G1 si profesora.

G2: profesora no entiendo lo que hay que hacer en toda esta hoja.

P en T1 tienen que decidir cuál es el mejor dado para ganar

G2 si ya lo decidimos es el verde, porque tiene el número mayor y el número menor no es tan grande ni tan pequeño.

P: dirigiendo se a G3. ¿Cómo va el trabajo?

G3: Va mal. El mejor dado para ganar es el amarillo porque tiene las mismas posibilidades de ganar y perder.

G4: Es más fácil ganar con el verde así se le puede ganar al rojo.

G5. El dado rojo porque tiene al 5 y hay más posibilidades de ganar con el 5.

T2, los alumnos compararon las posibilidades de ganar del dado verde en relación al dado azul, se recogieron las respuestas siguientes:

G1: “El dado verde pero solo cuando sale el número 6 y no el 2”

G2: “el dado azul porque en hartas posibilidades si te sale el 2 pierdes pero si te sale el 6 ganas pero casi siempre sale el 2”.

G4, escribe jugadas de un set 6662626666 (dado verde) - 0044000444 (dado azul), en el cual en 9 de 10 lanzamientos gana el dado verde.

Al parecer G4 plantea que el mejor dado es el verde, considerando los resultados de jugar un set con el dado verde y el azul.

G3: “El azul gana por tener más veces el 4 y pierde por tener el 1”.

G5 no responde.

T3, planteaba inventar un esquema que represente todas las jugadas posibles entre los dados azul y verde.

Frente a esta tarea, los alumnos se muestran confusos y manifiestan no saber cómo responder.

Por ejemplo A15 de G3 dice “No entiendo lo que hay que hacer en toda la hoja”.

Las respuestas encontradas en las hojas de trabajo, de los grupos G1, G3 y G4 sobre este punto, son las siguientes:

G1: “Que cada vez que tire salga un número alto”.

G3: “Solo es cuestión de suerte”

G4: Representa en una tabla, los 10 resultados al jugar con el dado verde y el azul.

Azul	Verde
4 - 0	6 – 2
0 - 4	6 – 2
4 – 0	2 - 6
4 – 0	6 – 2
0 - 4	6 – 2

Para esta tarea los grupos de trabajo no elaboraron las representaciones esperadas, tales como diagrama de árbol, tabla de doble entrada, tampoco profundizan en sus explicaciones sobre el juego. Durante la clase, la profesora recorre los grupos de trabajo animando a los alumnos a realizar lo solicitado pero no obtiene resultados. Los alumnos se muestran confusos y algunos manifiestan no saber cómo responder. Esta reacción hace pensar que los alumnos no disponen de herramientas para representar las distintas posibilidades del juego.

Por ejemplo A15 de G3 dice “No entiendo lo que hay que hacer en toda la hoja”.

Las respuestas encontradas en las hojas de trabajo, de los grupos G1, G3 y G4 sobre este punto, son las siguientes:

G1: “Que cada vez que tire salga un número alto”.

G3: “Solo es cuestión de suerte”.

Claramente estas respuestas no responden a lo solicitado. Lo más parecido a una representación de resultados es lo realizado por G4.

G4: Representa en una tabla las caras del dado verde y el azul.

Lo que tampoco corresponde a lo solicitado.

La interacción producida por las respuestas de los alumnos y las intervenciones – devoluciones de P, han permitido la evolución de la situación y las posiciones del alumno.

Los alumnos han transitado por las fases de una situación adidáctica, situándose en las posiciones E_{-3} y E_{-2}, sin embargo no han podido elaborar estrategias gráficas para representar las posibles jugadas en este juego, lo que no les ha permitido adoptar la posición E_{-1} en una situación de validación.

Al parecer sus concepciones intuitivas dificultan que puedan emerger las representaciones gráficas previstas, con las que pudieran aproximarse, con sentido, a la regla de Laplace para calcular las probabilidades compuestas presentes en esta situación.

Si se ha observado que algunos alumnos elaboran argumentaciones sobre los resultados posibles de una partida, las que formarían parte de los conocimientos intuitivos de estos alumnos, frente al juego y la problemática propuesta.

5.1.9.5 Análisis global Juego de dados especiales.

La primera etapa del juego coloca en funcionamiento una situación de acción. Los alumnos en posición de E-3, en la situación objetiva, elaboran criterios de selección comunes para elegir los dados con los que jugar: elegir al azar y elegir el dado que tiene el número más alto. Principalmente en 5º básico, un grupo de niños elige el dado por el color favorito, este tipo de elección también aparece en las decisiones de algunos alumnos de 7º básico.

Durante la segunda etapa del juego, se presentaron episodios de interacciones de alumnos carcterizados por poner en funcionamiento un pensamiento analítico, el que oriento los aprendizajes de los compañeros que escuchaban. Estas interacciones se presentaron en forma aislada en todos los niveles.

En la tercera etapa los alumnos se encuentran en una situación de formulación, ellos se sitúan en la posición de E_{-2} e interactúan con el medio M_{-2} llamado medio objetivo de la situación de referencia al aprendizaje S_{-2}.

Lo que diferencia a los distintos niveles son los tipos de argumentaciones utilizados para explicar sus estrategias. En 5º básico estas argumentaciones solo se basan en las partidas jugadas y en este sentido son concretas. En 6º básico, mayoritariamente las explicaciones se basan en resultados particulares de los partidos que han jugado.

En 7º básico se aprecia la emergencia de un pensamiento analítico que permite explicar las estrategias puestas en juego y a los alumnos situarse en posición de E-2, en una situación de formulación denominada de referencia S-2.

En 8º básico este tipo de pensamiento permitió a dos alumnos develar la naturaleza mixta del juego, por una parte la elección del dado depende de quien elige primero y por otra parte los resultados de los lanzamientos son un fenómeno aleatorio cuya probabilidad es Laplaciana de sucesos independientes.

En la cuarta etapa claramente hay una ruptura de contrato didáctico. El análisis a priori prevée la representación del juego en algún tipo de esquema, como diagrama de árbol, tabla de doble entrada o parejas de resultados entre dos dados. La representación más cercana fue realizada por A25 de 5º básico, quién anota 4 posibles resultados de un juego particular. La relación didáctica se ha roto y hay que restituirla a como dé lugar.

Lo que ha quedado en evidencia es la dificultad espontanea de producir alguno de los esquemas solicitados, es decir en los conocimientos intuitivos de los alumnos no emergen representaciones figúrales de los casos posibles del juego, sea porque no se ha entendido la consigna sea porque los alumnos no tienen disponible este conocimiento. La profesora decide restituir la relación didáctica con una situación de enseñanza centrada en uso de una tabla de doble entrada. Luego de esta actividad los alumnos de. 6º, 7º y 8º construyen el resto de las tablas de casos posibles y determinan probabilidades de ganancia de un dado frente a otro, comparando casos posibles con casos favorables.

La tabla 73 sintetiza resultados obtenidos en las diferentes etapas del juego.

Tabla 73. Etapas del juego de dados: Resultados por niveles.

Curso	Etapa 1: Elección del dado.	Etapa 2: Estrategias para ganar.	Etapa 3: Explicar por qué ganaron o perdieron.	Observaciones investigadora.
5º	Eligen el dado verde porque tiene al 6. Eligen el dado por azar. El dado verde porque da buena suerte Composición numérica del dado azul, tiene más veces el 4.	La superstición (da buena suerte) Forma de lanzar los dados, arrastrándolo Relacionan la composición numérica del dado verde y del azul en forma independiente. El verde tiene los números más grandes	Las explicaciones se basan en los resultados concretos de sus juegos.	Los niños de 10 años, consideran principalmente el dado de color verde y el argumento: tiene el número más grande.
6º	Se fijan en la configuración numérica del dado verde, particularmente y del dado amarillo, en un caso. Elección al azar.	El dado que tiene números grandes más veces. Elegir el dado al azar. Composición numérica de un dado. Lanzarlo en forma arrastrada.	Explicaciones analíticas, en función de la composición numérica de ambos dados.	Consideran la composición numérica de ambos dados en juego y aparecen explicaciones analíticas.
7º	A la suerte. El dado con más posibilidad de ganar.	No hay estrategia, porque el juego es de suerte. Da lo mismo con	Algunos alumnos, analizan la composición	Consideran la composición numérica de los dados.

	El dado que tiene números más grandes. Por el color.	que dado jugar. El dado que tenga más veces números más grandes. Elegir el dado con probabilidad de ganar.	numérica de dos dados y además comparan la posibilidad de ocurrencia de cada número.	Aparecen expresiones de incertidumbre: posibilidad de … el que tiene mas probabilidad de…
8º	El dado que tiene números más grande. Al azar. Por confianza.	La suerte. El dado que tiene el número más grande. Composición numérica de dos dados, a partir de resultados obtenidos en juegos. Algunos alumnos han logrado identificar que, la estrategia del juego, elegir el dado de acuerdo a lo que eligió el compañero.	El dado verde tiene más posibilidad de ganar que el dado azul. El juego es al azar pero si hay más posibilidad de ganar con esa regla.	Algunos alumnos han logrado identificar que, la estrategia del juego, elegir el dado de acuerdo a lo que eligió el compañero.
Obs. de la	El criterio de selección común, es elegir al azar, en 5º básico, los alumnos eligen el	Lo común, el azar. El dado que tenga números más grandes; números más grandes más	Por resultados de juegos concretos, por composición numérica de un	Se aprecia evolución psicocognitiva, los niños de 10 años se basan

inv.	dado con el 6, en los siguientes niveles aparecen criterios más analíticos relacionados con la composición numérica de un dado y de dos dados..	veces. Composición numérica de un dado; composición numérica de dos dados. Depende de lo que eligió el contrincante.	dado, de dos dados, se advierte que hay dados con más posibilidad de ganar.	en los resultados concretos de sus juegos. De 11 a 13 años los argumentos son más complejos
Etapa 4, tareas 1, 2 y 3				
Curso	Etapa 4, T1, ¿Cuál dado es mejor para ganar? Explica	Etapa 4, T2 ¿Cuántas posibilidades más tiene de ganar que el dado rojo?	Etapa 4, tarea3: Representación de casos posibles.	Observaciones de la investigadora
5º	Las explicaciones se basan en señalar que "el dado verde, porque tiene al 6 y al dos".	No participaron de esta actividad.	Descripciones sobre el juego en base a la composición numérica del dado verde.	Analizan el juego en base al dado verde, porque tiene al 6.
6º	Posibilidad de ocurrencia de las caras de cada dado. Depende de la forma de lanzar el dado. Equiprobabilidad,	Equiprobabilidad, debido a la incertidumbre. Analizan la posibilidad de ganar de las caras más altas de ambos dados,	Los alumnos no responden a lo solicitado, pero en la puesta en común se producen análisis, más precisos, sobre	Las respuestas son más analíticas que las de los niños de 10 años, lo que se constata en: el dado se elige, de

	debido a la incertidumbre. Se elige, de acuerdo a lo que eligió el contrincante y a la composición numérica de los dados. Surge la clasificación, estimando porcentajes, para determinar el mejor dado Los que tienen los números más grandes.	concluyendo en forma incompleta.	el juego. Sus explicaciones sobre resultados posibles, se apoyan en los sets jugados, lo que no les permite generalizar sus resultados.	acuerdo a lo que eligió el contrincante y a la composición numérica de los dados.
7º	Los alumnos, analizan la composición numérica de 2 dados, los alumnos presentan un razonamiento analítico y podrían percibir que el mejor dado para ganar no solo debería tener el	Esta actividad no se realizó debido a que las respuestas de los alumnos, en etapas anteriores del juego, dan cuenta de ella. El dado azul porque tiene mayor cantidad de números altos, tiene 4 caras de 4 y 2 de 0 y el verde	La profesora – investigadora, decide desarrollar una tabla de doble entrada de los resultados posibles para estos dados.	Los alumnos analizan la composición numérica de ambos dados y descubren propiedades del juego: un número mayor, debería repetirse más veces en las caras del dado.

	número más grande, sino que este número debería repetirse más veces en las caras del dado.	2 de 6 y 4 de 2. El dado verde porque tiene números más grandes.		
8º	En sus justificaciones, los alumnos describen verbalmente, combinaciones de resultados posibles. El mejor dado es el que tenga más posibilidades de ganar; el dado azul porque basta que haya más 4 y dos 0 Con el verde, con el amarillo. El verde, porque tiene el número mayor y el número menor no es tan grande ni tan pequeño. El dado con números más	El dado verde pero solo cuando te sale el 6. El dado azul porque en hartas posibilidades si te sales el 2 pierde el verde y casi siempre sale el 2,	Las concepciones intuitivas dificultan que puedan emerger las representaciones gráficas previstas, con las que pudieran aproximarse, con sentido, a la regla de Laplace.	Se presentan respuestas analíticas desde el inicio del juego.

	grandes, o sea, el rojo y el verde.			
Obs. de la inv.	Hay evolución psicogenética, los niños de 10 años explican el juego en relación al 6 del dado verde y los resultados obtenidos con este dado. Los niños más grandes consideran los números en un dado, en dos dados y los resultados obtenidos, jugando con ellos, también hay otros argumentos más analíticos que reflejan juegos mentales y predicciones expresadas como combinaciones, en lenguaje verbal o escrito.	Se encontraron algunas combinaciones particulares, obtenidas en los juegos realizados, en 6º básico; en 7º y 8º básico se encontraron, además algunas combinaciones que corresponden a predicciones.	No surgieron desarrollos al respecto.	

5.2 Fase 5: Confrontación de los Análisis A Priori y A Posteriori

La confrontación de los análisis a priori y a posteriori se presenta en una tabla como la siguiente:

Situación.

Pregunta o tarea:		
Análisis a priori	Análisis a posteriori	Confrontación de análisis

Una fila que corresponde a la tarea propuesta y bajo ella tres columnas, en las que se describe lo previsto en el análisis a priori, los resultados obtenidos, es decir lo que sucedió y la confrontación de análisis.

5.2.1 Situación uno: El juego circular.

Se propone a los alumnos un juego ficticio en el que seis niños ubicados como en la figura juegan a lanzarse una pelota con la mano a cualquiera de los otros jugadores en forma aleatoria. El juego termina cuando se cae la pelota.

A los alumnos se les propone simular que están jugando, para luego contestar a tres preguntas que se les presentan en una hoja de respuestas que cada uno recibe.

Para cada pregunta, se presentan respuestas previstas y algunos ejemplos de respuestas reales.

Pregunta 1: Si el juego se ha iniciado: ¿Qué posibilidad hay que el que tiene la pelota te la lance a ti? ¿Por qué? Explica.		
Análisis a priori	Análisis a posteriori	Confrontación
Se prevén respuestas del tipo: 1. Hay la misma posibilidad que me la lance a mí como a otros". 2. Hay cinco posibilidades que me la lancen a mi, porque hay otros 5 jugando. 3. Poca porque somos varios. Es posible que en 7º y en 8º aparezcan respuestas similares a la segunda, donde aparece la cuantificación para justificar.	Se encontraron respuestas con incertidumbre y sin incertidumbre. Por ejemplo, en 5ª básico hay respuestas con incertidumbre del tipo: 1. Sería mucha posibilidad porque el jugador está por lanzarte la pelota pero también podría ser poca porque puede cambiar de opinión y puede lanzarla a otro. Las respuestas sin incertidumbre 2. Seguro que me la lanza porque es mi amigo.	Se aprecian respuestas como las previstas en el análisis a priori, en las que la aleatoriedad aparece expresada, a veces como posibilidad y otras como estimaciones. En algunas respuestas han aparecido estimaciones, las que se han expresado en forma de porcentajes pero estos no tiene el significado matemático correcto, por ejemplo el 30% es casi la tercera parte. Lamentablemente no se cuenta con entrevistas a los niños para conocer sus interpretaciones. Otras estimaciones se presentan en forma de razón, tales
	Respuestas con incertidumbre en 6° básico. 3. Es posible porque nunca se sabe a quién se la pasaran. Respuestas sin incertidumbre	

<table>
<tr>
<td rowspan="2"></td>
<td>4. Porque me la quiere tirar a mi o a uno de su equipo.</td>
<td rowspan="2">como las respuestas 7, 9, 15 y 16.

En la tabla de síntesis, siguiente:

<table><tr><td>Preg.</td><td colspan="4">Respuesta con incertidumbre</td><td colspan="4">Respuesta sin incertidumbre</td></tr><tr><td></td><td>5º</td><td>6º</td><td>7º</td><td>8º</td><td>5º</td><td>6º</td><td>7º</td><td>8º</td></tr><tr><td>1</td><td>8</td><td>14</td><td>17</td><td>14</td><td>11</td><td>1</td><td>10</td><td>4</td></tr></table>
se aprecia que más de la mitad de los alumnos de 6º, 7º y 8º básico responden con incertidumbre, mientras que en 5º básico este tipo de repuestas son 8 de 20, es decir, menos de la mitad.

Se puede hablar que existe una evolución en las nociones intuitivas de aleatoriedad, la que es reconocida como posibilidad de ocurrencia.

Cabe hacer notar que los alumnos de 6º básico han alcanzado mayor grado de</td>
</tr>
<tr>
<td>En 7º Respuestas con incertidumbre

5. No se sabe porque el juego es aleatorio.

6. Hay muchas posibilidades ya que a cada jugador pueden tirársela o a veces no.

7- Hay una de 5 porque son 5 a los que se le puede lanzar el balón, y yo soy uno.

8. Yo creo que si un niño tiene la pelota, la posibilidad que me la lance es 30%”.

Respuestas sin incertidumbre

9. Tengo 5 posibilidades de que me lancen la pelota porque hay 5 jugadores aparte de mi.

10. Un 30% porque generalmente siempre va al frente luego a la derecha y después al frente.</td>
</tr>
</table>

	En 8º respuestas con incertidumbre 11. Posiblemente me la tire a mí porque también se la puede tirar a otra persona. 12. 17% porque el que tiene la pelota se la puede tirar a cualquiera que esta jugando. 13, Un 60% porque hay otros 4 jugadores a los cuales también se la pueden tirar. Respuestas sin incertidumbre 14. 20% porque son seis personas y si fuéramos 3 personas jugando habría más posibilidades … 15. 1 en 5 porque el toma la decisión si tirársela …. 16. 1 de 5 posibilidades porque somos 6 personas	reconocimiento de la aleatoriedad. Se aprecia también que la evolución de los conocimietos de probabilidad se produce entre los niveles de 5ª a 7º básico y que en 8º, los casos disminuyeron, lo que podrá estar influenciado por el pensamiento concreto (determinista) que persiste aún en estos niveles.

Pregunta 2: ¿Crees tú que el que tiene la pelota te la lanzaría a ti? Explica		
Análisis a priori	Análisis a posteriori	Confrontación de Análisis
Se han previsto respuestas del tipo: 1. No lo puedo saber porque … (la explicación contiene incertidumbre). 2. Si me la puede lanzar a mi porque … , con una explicación que es categórica. y no contiene incertidumbre	En 5ª básico, se ha observado el reconocimiento de la incertidumbre en respuestas del tipo: 1. No porque tal vez me la tire tal vez no. Respuestas sin incertidumbre. 2. Si porque soy más o menos bueno atrapando la pelota	Las respuestas previstas en el análisis a priori corresponden a los resultados obtenidos. La incertidumbre ha aparecido en expresiones del tipo "*tal vez..., puede que.., no posiblemente…* " Han aparecido estimaciones expresadas en forma de porcentajes, las que no corresponden al significado

<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td>En 6º se encontraron respuestas con incertidumbre del tipo:
3. Posible pero no se sabe si se la va …
4. Un 50% porque todos tienen la misma posibilidad.

Respuestas sin incertidumbre del tipo:
5. Si me la lanzaría la pelota porque si a ….</td>
<td rowspan="3">matemático, por ejemplo el 50% es concebido como posibilidad equitativa.
Otros alumnos se han expresado categóricamente, respondido sin incertidumbre, como fue previsto en el análisis a priori.

En la tabla de síntesis se aprecia
<table>
<tr><td>Preg.</td><td colspan="4">Respuesta con incertidumbre</td><td colspan="4">Respuesta sin incertidumbre</td></tr>
<tr><td></td><td>5º</td><td>6º</td><td>7º</td><td>8º</td><td>5º</td><td>6º</td><td>7º</td><td>8º</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td>13</td><td>25</td><td>14</td><td>12</td><td>2</td><td>5</td><td>10</td></tr>
</table>
que más de la mitad de los alumnos de 6º, 7º y 8º básico responden con incertidumbre, mientras que en 5º básico este tipo de repuestas se reduce a casi la cuarta parte, son 6 de 20 niños.
La tabla de síntesis también muestra una evolución en las nociones intuitivas de aleatoriedad, entre los niveles de 5° a 7° básico, la que es</td>
</tr>
<tr>
<td>En 7ª se encontraron respuestas con incertidumbre, del tipo:
6. Podría ser, ya que el puede…

Respuestas sin incertidumbre, del tipo:
7. Si porque viendo la mirada …</td>
</tr>
<tr>
<td>En 8º hay respuestas con incertidumbre del tipo:
8. No posiblemente puede que me la</td>
</tr>
</table>

	lance a mi, es decisión del que tiene el balón. Respuestas sin incertidumbre: 9. Si porque ….	reconocida con expresiones del lenguaje natural: "Tal vez …", "no posiblemente …" y otras. Para esta situación, los alumnos de 7º básico han alcanzado el mayor grado de reconocimiento de la aleatoriedad y los de octavo básico, se han encontrado una disminución, la que se interpreta como pesamiento concreto.

Pregunta 3. Si la pelota estuviera en juego 13 veces sin caer, ¿cuántas veces crees que te la lanzarían a ti?, Explica		
Análisis a priori	**Análisis a posteriori**	**Confrontación de Análisis**
Se prevé que los alumnos operen los datos del enunciado: - 13: 6 = 2 y sobra 1, y podrán responder; con incertidumbre: "creo que me la lanzarían 2 o 3 veces" y sin incertidumbre: Me la lanzaran 2 o 3 veces porque eso sale al dividir 13 en 6. Cabe 2 y sobra 1. También se espera que estimen una cantidad, con o sin	Los alumnos de 5° respondieron con incertidumbre, lo siguiente: 1. No se puede saber porque… 2. Yo creo que me la lanzarían 2 o 3 veces. Y respondieron sin incertidumbre, lo siguiente: 3. A mí me la lanzaría 3 veces a mi porque lo saco de las 13 veces. 4. Cuatro porque con las 4 sin caer ya no me darían más oportunidades.	En todos los niveles se han identificado respuestas con incertidumbre, sea que los alumnos han operado los datos, realizado estimaciones o concebido la incertidumbre del suceso, las que fueron previstas en el análisis a priori. La incertidumbre aparece en expresiones del tipo: "*no se puede saber, no se sabe porque…*" Algunos alumnos han asignado porcentaje a su creencia, en algunos

<table>
<tr>
<td rowspan="2">incertidumbre:
- “Unas cuatro o cinco veces, porque se la pido todas esas veces”.

Que reconozcan un juego aleatorio y lo expresen en el lenguaje del azar: - - “El juego es a la suerte”;
- “pueden ser muchas, pocas o ninguna”;
- “El juego no tiene orden” o
- “No se puede saber lo que ocurrirá en el futuro”</td>
<td>En 6° las respuestas con incertidumbre son del tipo:
5. No se sabe porque le puede…
6. Unas 1 porque es probable de que…

Y las respuestas sin incertidumbre
7. 2 veces porque esas veces me han tirado la pelota.
8. 2 veces porque todos le tocarían 2 veces y a uno le toca 3.
9. 3 porque la regla del juego es no tirarle la pelota al mismo que te la tiro a ti.</td>
<td rowspan="2">casos esta cuantificación no ha sido representativa. Por ejemplo, en 8ª básico, el 50% no corresponde al significado matemático relacionado con el contexto del juego.

Las respuestas sin incertidumbre, ponen en evidencia que los datos numéricos que intencionalmente aparecen en el enunciado son utilizados desde una racionalidad determinista que les incentiva a realizar una división y responder de manera categórica. Este tipo de respuestas se ha previsto en el análisis a priori.
La tabla
<table>
<tr><td>Preg.</td><td colspan="4">Respuesta con incertidumbre</td><td colspan="4">Respuesta sin incertidumbre</td></tr>
<tr><td></td><td>5º</td><td>6º</td><td>7º</td><td>8º</td><td>5º</td><td>6º</td><td>7º</td><td>8º</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>12</td><td>13</td><td>16</td><td>11</td><td>18</td><td>10</td></tr>
</table>
muestra evolución en el</td>
</tr>
<tr>
<td>En 7° las respuestas con incertidumbre son del tipo:
1. No se, ya que se puede repetir…
2. 2 o 3 veces porque puede que …
3. Pueden ser 7 porque…

Respuestas sin incertidumbre
4. Si me la lanzaran a mi primero me tocaría 3 veces. Si me la lanzaran de</td>
</tr>
</table>

	los quintos me tocaría 2 veces. 5. Va variando según la posición. 6. 5 veces porque al estar más …	pensamiento intuitivo sobre aleatoriedad pero además que la consigna de esta tarea produjo un descenso en las intuiciones de probabilidad de los alumnos. Los que obtienen un mayor grado de reconocimiento de la aleatoriedad son los alumnos de 8º, los que solo superan, en poco, la mitad de respuestas con incertidumbre.
	Las respuestas con incertidumbre en 8° son del tipo: 1. No se sabría porque puede que (explicación con incertidumbre). 2. 50% porque hay muchos esperando la pelota y uno no sabe. 3. 5 veces porque es posible … Respuestas sin incertidumbre. 4. 2 porque sería 2 pasadas de 13 a cada uno. 5. 9 veces porque yo creo que tengo más habilidad en las manos.	

5.2.2 Situación dos: Proyección de 5 imágenes

En las primeras tres imágenes está previsto que las historias den cuenta de distintos sucesos que podrían ocurrir. Se les ha pedido que elijan una posibilidad de ocurrencia de entre las propuestas en la presentación del problema, se espera que elijan una de ellas, B o C o D (no se puede saber con certeza si la historia ocurrirá).

Se espera que las explicaciones de su elección dejen en evidencia el reconocimiento de la incertidumbre del suceso, además los alumnos de 5º y 6º básico podrían tener dificultades en concebir la incertidumbre de estos sucesos y asignen posibilidad de ocurrencia seguro o den una respuesta categórica.

En las siguientes dos imágenes, denominadas “La puesta de sol” y “La jugada de básquet”, se presentan sucesos seguros y los alumnos deberían asignar posibilidad E o A, dependiendo de la historia que formulen, lo que indicaría que los alumnos conciben que este suceso tiene un único resultado.

Para cada imagen, se presentan respuestas previstas y algunos ejemplos de respuestas reales.

La jugada de futbol

La tarea: Escribir historias sobre lo que ocurrirá en el instante siguiente

Análisis a Priori	Análisis a posteriori	Confrontación
Se ha previsto que respondan historias como las siguientes. - El partido termina. - El jugador que va de espalda comete un faul al jugador del medio. – El del medio se cae o también haga cualquier otra jugada.	Se encontraron historias con explicaciones que contienen incertidumbre, por ejemplo en 5° básico una respuesta de este tipo es la siguiente: 1. “La defensa (niño de espalda), para la jugada de la delantera (niño del medio) y le quita la pelota”. A esta historia se le ha asignado posibilidad C con la siguiente explicación: “la defensa es buena y puede que quite la pelota”.	En las respuestas con incertidumbre, los niños escriben historias categóricas pero al elegir la posibilidad de ocurrencia aparece en sus explicaciones la incertidumbre. Por otra parte, existen niños que han elaborado historias categóricas, les han asignado posibilidad de incertidumbre: B, C o D pero su justificación es de certidumbre. Por ejemplo las historias sin incertidumbre 4, 6 y 8 en la columna análisis a posteriori. La tabla de síntesis, a continuación, muestra

Frente a estas historias los alumnos deberían asignar posibilidad B o C o D y dar una explicación como la siguiente: “no se puede saber porque en el futbol puede pasar cualquier cosa”.

Estas respuestas presentan incertidumbre

Otras respuestas que se prevén son, por ejemplo:

- El del medio le quita pelota al más chico y termina el partido”
- El más chico empuja al del medio.
- el más chico se pica y se pone a llorar.

También se encontraron historia sin incertidumbre del tipo siguiente:

2. “El defensa atropella y el delantero mete un gol.

A esta historia se le ha signado posibilidad C con la siguiente explicación: “porque los dos equipos son buenos”.

En 6º básico se encontraron historias con explicaciones que contienen incertidumbre, por ejemplo:

3. “El (jugador) del medio fue a hacer un gol pero el arquero se la ataja”.

A esta historia se le ha asignado posibilidad C, con la siguiente explicación: porque puede pasar o no.

Otras historia son del tipo siguiente:

4. El jugador va a anotar el gol.

A esta historia se le ha asignado posibilidad C, con la siguiente explicación: Porque el niño le pego a la pelota e hizo el

que más de la mitad de los alumnos de 6º y 8º básico responden con incertidumbre, mientras que en 5º y 7ª básico este tipo de repuestas son 9 de 20 y 12 de 30, respectivamente, es decir, menos de la mitad.

Concepciones intuitivas de aleatoriedad

Posibilidad ocurrencia	Responde con incertidumbre				Responde sin incertidumbre			
	5º	6º	7º	8º	5º	6º	7º	8º
A					1		1	
B		3	1	5	1	2	1	3
C	8	10	9	22	5	5	5	11
D	2	5	2	1	8	2	7	5
E	2				9		4	1
Total	12	18	12	28	24	9	18	20
Total niños	9	12	12	18				

Tabla que sintetiza resultados en la jugada de futbol.

Se aprecia que existe una evolución en las nociones intuitivas de aleatoriedad, la que se pone en evidencia al justificar la posibilidad de ocurrencia elegida.

Cabe hacer notar que los alumnos de 6º

En estos casos los alumnos deberían asignar posibilidad E y dar explicaciones como: 1. Porque eso ocurrirá o 2, Porque en los partidos pasa eso".	gol". Estas son historias sin incertidumbre	básico han alcanzado mayor grado de reconocimiento de la aleatoriedad, tres de cada cuatro alumnos, responde con incertidumbre.
	En 7º básico se encontraron historias con explicaciones que contienen incertidumbre, por ejemplo: 5. Los niños se están peleando la pelota y uno de ellos hace el gol". Se le ha asignado posibilidad C con la explicación: "Puede que suceda o puede que no porque en realidad no sabemos qué va a pasar". Otras historia son del tipo siguiente: 6. "El que está de espalda ataca de cuerpo al del medio derribando al de la derecha, se va solo y mete el gol" Se le ha asignado posibilidad E, con la explicación: "Porque es seguro que con el cuerpo vote al jugador y meta el gol. "	

	En 8º básico se encontraron historias con explicaciones que contienen incertidumbre, por ejemplo: 7. “El chico número uno (de espalda) hace una falta y le muestran tarjeta. “. Asigna posibilidad C y explica: Porque la falta puede que no ocurra”. Otras historias encontradas son: 8. **“**El jugador 3 esquiva a 2 y el jugador 1 mete el gol”. Se le asigna posibilidad C con explicación: “Porque el 3 se ve bueno jugando ..	

La niña en la ventana

La tarea: escribir historias sobre los qué está haciendo esta niña en la ventana

Análisis a Priori	Análisis a posteriori	Confrontación
Se ha previsto que escriban historias del tipo siguiente: - A lo mejor está esperando que la llamen para almorzar. - Esta mitrando hacia afuera, - Está esperando a alguien. - Puede estar haciendo cualquier cosa. Se ha previsto que escriban historias	Se encontraron historias con explicaciones que contienen incertidumbre, por ejemplo una respuesta de este tipo en 5° es la siguiente: 1. “La niña está esperando a alguien. A esta historia se le ha asignado posibilidad B con la siguiente explicación: “la defensa es buena y puede que quite la pelota”. También se encontraron historia sin	Como en la tarea anterior, los niños escriben historias categóricas pero al elegir la posibilidad de ocurrencia aparece la incertidumbre en sus explicaciones. También se observa que algunos niños han elaborado historias categóricas, les han asignado posibilidad de incertidumbre: B, C o D pero su justificación es de certidumbre. Por ejemplo los niños de 6ª, 7º y 8ª en las historias sin incertidumbre, de la columna an{alisi a posteriori.

del tipo siguiente:

- A lo mejor está esperando que la llamen para almorzar.
- Esta mitrando hacia afuera,
- Está esperando a alguien.

Con relación a estas historias, los alumnos deberían asignar posibilidad B o C o D porque “no se sabe que está haciendo en ese lugar”.

Estas respuestas presentan incertidumbre.

Otras respuestas que se prevén son, por ejemplo:

“La niña está esperando a su novio que llegará en un rato más”;

Los alumnos deberían asignar posibilidad E y dar explicaciones como:

1. “se ve que la niña está esperando a su novio”.

2. “porque siempre que las niñas se arreglan es para esperar a su novio”.

incertidumbre del tipo siguiente:

2. “La niña está viendo a la ventana para afuera y el paisaje”.

A esta historia se le ha asignado posibilidad E con la siguiente explicación:

Porque fue realidad que la niña estaba en la ventana.

En 6º básico se encontraron historias con explicaciones que contienen incertidumbre, por ejemplo:

3. “Está mirando a una persona que se fue de su casa”.

Se la ha asignado posibilidad D con la: “es posible pero no seguro”.

También se encontraron historia sin incertidumbre del tipo siguiente:

4. “La niña piensa mientras está sentada en la ventana”

Se le ha asignado D con la explicación:

5. “Porque la niña está en posición

La tabla de síntesis muestra que existe una evolución en las nociones intuitivas de aleatoriedad, la que se pone en evidencia al justificar la posibilidad de ocurrencia elegida

Concepciones intuitivas de aleatoriedad

Posibilidad ocurrencia	Responde con incertidumbre				Responde sin incertidumbre			
	5º	6º	7º	8º	5º	6º	7º	8º
A					2	4	4	
B	2	4	3	4	3	1	4	3
C	4	5	6	9	3	3	5	5
D		2	1	4	1	5	3	11
E					12	1	4	6
Total	6	11	10	17	21	14	20	25
Total de niños	**5**	**7**	**10**	**12**				

También que frente a esta tarea, ninguno de los niveles logra superar la mitad de alumnos que reconocen la aleatoriedad del suceso, lo que se asocia al tiempo verbal, presente (… lo que está haciendo…), en la formulación de la tarea y a la imagen utilizada.

	pensativa".	
Otras respuestas que se prevén son, por ejemplo: "La niña está esperando a su novio que llegará en un rato más";	En 7º básico se encontraron historias con explicaciones que contienen incertidumbre, por ejemplo: 6. "Estaba muy triste y necesitaba desahogarse y se fue a la ventana para pensar". Se le asignó C con la explicación: "Puede que este triste y necesite desahogarse pero puede que no". También se encontraron historia sin incertidumbre del tipo siguiente: 7. "Está mirando por la ventana y se queda dormida" Se le ha asignado D con la explicación "Porque alguien al ver tanto algo se aburre y le da sueño".	
	En 8º se encontraron historias con explicaciones que contienen incertidumbre, por ejemplo: 8. "Está reflexionando sobre algo".	

	Se le ha asignado C con la explicación: “Puede estar haciendo cualquier cosa”. Historias sin incertidumbre, del tipo: 9. “Esta aburrida y no sabe qué hacer”. Se le ha asignado C con la explicación “si porque así es siempre lo que pasa”.	

La Plantación de Tomates

La tarea: escribir historias sobre lo qué le sucederá a estas plantas en tres meses más.

Análisis a Priori	**Análisis a posteriori**	**Confrontación**
Se ha previsto que escriban historias del tipo siguiente: - Las plantas pueden morir porque la pisotean. - Las plantas se quemaron con la helada matinal - Las regaron mucho y se pudrieron - Puede suceder que en tres meses las plantas crezcan y den tomates.	Se encontraron historias con explicaciones que contienen incertidumbre, por ejemplo en 5° una respuesta de este tipo es la siguiente 1. **“**Las plantas se van a convertir en tomates. Se le ha asignado B con la explicación: “Poco posible porque los tomates los quiebran, los roban o crecen en tres meses”.	La incertidumbre, se manifiesta en explicaciones, sobre la posibilidad de otros sucesos que podrían ocurrir. Esto queda reflejado en los ejemplos 1 y 5 en la columna anterior. También la incertidumbre aparece en la forma de posibilidad de ocurrencia expresada con la palabra “puede que …”, particularmente los ejemplos de 6° y 8° tienen esta forma.
Con relación a estas historias, los alumnos deberían asignar posibilidad B o C o D porque “puede o no pasar que	2. También se encontraron historia sin incertidumbre del tipo siguiente: “Los tomates crecerán y se los	Las respuestas sin incertidumbre se presentan en forma de historias y explicaciones categóricas sobre el suceso,

crezcan o se mueran”. Estas corresponderían a historias con incertidumbre. También se esperan respuestas del tipo: - Los tomates crecerán y estarán listos para cortarlos”. - Las plantas estarán grandes y con muchos tomates Se espera que los alumnos asignen posibilidad E y den explicaciones como la siguiente: “porque eso pasa con las plantas de tomates en tres meses más”	comerán”. Le ha asignado posibilidad B con la explicación: “Porque en tres meses crecerán grandes y fuertes los tomates para comerlos”.	como en los ejemplos 2, 4 y 8, y en el ejemplo 6, se expresa mediante la palabra “seguro que …”. Además en los ejemplos 2 y 6, las explicaciones son sin incertidumbre pero los alumnos asignan posibilidad de incertidumbre a un suceso que conciben como seguro. Se interpreta este hallazgo como una dificultad o confusión o falta de un razonamiento analítico en la toma de decisiones, lo que implica un desafío para el profesor que debe abordar la compresión del azar representado en la incertidumbre de los fenómenos aleatorios. La tabla de síntesis muestra evolución en las concepciones intuitivas de aleatoriedad pero también que menos de la mitad de los
	En 6º básico se encontraron historias que contienen incertidumbre, por ejemplo: 3. “Se pueden secar y no salen tomates”. Le ha asignado posibilidad D con la explicación: “Posible pero puede que no ocurra”. También se encontraron historia sin incertidumbre del tipo siguiente: 4. “Las plantas crecerán y darán tomates”. Asigna posibilidad E y explica “Porque todas las plantas crecen”.	

En 7º básico se encontraron historias que contienen incertidumbre, por ejemplo:

5. "La Sra. Elena vende los tomates".

Le asigna posibilidad C con explicación: "Porque ella puede venderlos, se los puede comer o se pueden marchitar".

También se encontraron historia sin incertidumbre del tipo siguiente:

6. "Crecen los tomates".

Le asigna posibilidad B con la explicación "Es seguro que crezcan".

En 8° básico se encontraron historias que contienen incertidumbre, por ejemplo:

7. "Los tomates se desarrollaran".

Le asigna posibilidad B con explicación E y justifica: "Porque si la Sra. los cuida como se debe puede que se desarrollen".

alumnos, en todos los cursos reconoce la aleatoriedad del suceso.

Concepciones intuitivas de aleatoriedad								
Posibilidad ocurrencia	Responde con incertidumbre				Responde sin incertidumbre			
	5º	6º	7º	8º	5º	6º	7º	8º
A						1	1	
B	2	1		4	1	2	1	3
C	2	5	7	9	2	5	3	5
D	2	4	3	4	6	4	5	11
E					12	6	9	6
Total	6	10	10	17	21	18	19	25
Total niños	**4**	**7**	**10**	**12**				

Estos resultados se asocian a la naturaleza del fenómeno y a las creencias subjetivas de los alumnos en relación a un suceso en el que intervienen múltiples factores en su desarrollo.

Se parecía coherencia en la confrontación de análisis a priori y a posteriori.

	También se encontraron historia sin incertidumbre del tipo siguiente: 8. “Van a crecer y los comeremos” Le asigna posibilidad E con la explicación “Porque los tomates son para comer”.	

La Puesta de Sol

La tarea: Escribir historias sobre cómo estará el horizonte en dos horas más.

Análisis a Priori	Análisis a posteriori	Confrontación de Anlisis
Se ha previsto que escriban historias del tipo siguiente: - En dos horas más estará de noche. - En dos horas más saldrá la luna y las estrellas. Frente a estas historias, los alumnos deberían asignar posibilidad E y explicar - "porque es seguro que eso ocurre". - porque siempre que el sol se	Se encontraron historias y explicaciones que contienen incertidumbre y otras sin incertidumbre: En 5° básico un ejemplos de respuestas con incertidumbre es el siguiente: 1. "Después va a volver (el sol) en la mañana". Le asigna posibilidad C (posible) y explica "porque va a volver o no". Un ejemplo de respuestas sin	Se encontraron historias y explicaciones que contienen incertidumbre y otras sin incertidumbre: En 5° básico un ejemplos de respuestas con incertidumbre es el siguiente: 1. "Después va a volver (el sol) en la mañana". Le asigna posibilidad de ocurrencia C (posible) y explica "porque va a volver o no". Un ejemplo de respuestas sin incertidumbre es la siguiente: 2. "Se viene la luna porque ya se fue el sol". Le asigna posibilidad E y explica, "porque ya era tarde".

esconde, después se hace de noche

- porque después de dos horas sale la luna con las estrellas.

incertidumbre es la siguiente:

2. “Se viene la luna porque el sol se fue”.

Le asigna posibilidad E y explica, “porque ya era tarde”.

En 6º básico se encontraron historias sin incertidumbre, todas categóricas, la mayor parte de ellas con posibilidad de ocurrencia E. Solo se encontró una respuestas categóricas con posibilidad de incertidumbre C y explicaciones con incertidumbre, que es la siguiente:

3. “Va a estar saliendo la luna”

Le ha asignado posibilidad C con la explicación: “no se sabe si va a salir la luna”.

Los ejemplos de respuestas sin incertidumbre son del tipo:

4 “El mar se está oscureciendo por el sol”. Asigna E y explica: porque a

La tabla siguiente muestra la coherencia entre los análisia priori y a posteriori, puesto que la mayoría de los alumnos, en los distintos niveles responde con certidumbre, a un suceso seguro.

Concepciones intuitivas de aleatoriedad								
Posibilidad ocurrencia	Responde con incertidumbre				Responde sin incertidumbre			
	5º	6º	7º	8º	5º	6º	7º	8º
A			1			4	5	3
B			1	2	1		5	
C	1	2	2	1	3		3	3
D					6	2	4	2
E		1	1		14	8	7	26
Total	1	3	5	3	24	14	24	35
Total niños					**19**	**14**	**24**	**22**

	veces aparece la luna. Se va hacer de noche. Asigna E y justifica porque siempre es así.	
	En 7º básico se encontraron historias con incertidumbre, un ejemplo es el siguiente. 5. "Llega una pareja y ve el atardecer hasta que se oculta el sol". Le asigna posibilidad C y explica "porque puede que pase otra cosa". Los ejemplos de respuestas sin incertidumbre son del tipo: 6. "El sol se termina de esconder en el horizonte. Le asigna posibilidad E y explica, "porque el sol siempre se va al final del día".	
	En 8º básico se encontraron historias con incertidumbre, un	

	ejemplo es el siguiente. **7. "**La marea puede subir mucho y puede pasar algo muy malo. Le asigna posibilidad C y explica "porque puede que suceda o no". Los ejemplos de respuestas sin incertidumbre son del tipo: 8. "Va a llegar la noche y el sol ya no va a estar". Le asigna posibilidad E y explica "porque todas las noches se esconde el sol".	

La jugada de basquet

La tarea: Escribir historias sobre ¿Qué le pasara a la pelota en el instante siguiente?

Análisis a Priori	**Análisis a posteriori**	**Confrontación de análisis**
Para esta imagen se ha planteado que la profesora gestione una puesta en común, interactuando con los alumnos a partir de la tarea. Esta dinámica se desarrolla en 5°, 6° y 8°. En 7° los alumnos escriben historias en una hoja de respuesta. Las respuestas que se	En la puesta en común se obtuvieron respuestas del tipo: 5º básico: Yo creo que va a caer. 1.A20: Que ganan, porque está metiendo un gol P. ¿Con qué nivel de posibilidad la pelota va caer? 2. A7 y otros Seguro (posibilidad E) 3. A16 y otros dicen Posible, es posible 4. A16: “o sea yo creo que es posible, seguro no podría ser porque si no la pelota no estaría en el aro, estaría	Para esta imagen, la puesta en común permite constatar que los niños de todos los niveles conciben este suceso como seguro. En 6° y 8° básico se observa que los alumnos conciben que este suceso es seguro, solamente se escribe una historia común y cualquier otra historia ficticia o inverosímil es considerada como imposible de ocurrir, es decir también es un suceso seguro. En 7ª básico la tabla sintética muestra el tipo de historias y explicaciones que los alumnos formularon:

han previsto son del tipo:

. La pelota pasa por la malla y anota un punto.

. La pelota cae al suelo y anota un punto.

Frente a estas historias se ha previsto que asignen posibilidad E y sus explicaciones sean como las siguientes:

. Porque la pelota ya está en el aro y a punto de caer.

- Porque la pelota ya está pasando por la malla.

Es decir se espera que los alumnos reconozcan el suceso seguro.

cerca pero no en el aro.

5. A15, confirmando la explicación de A16 “y está dentro de la malla”.

6. A17: “podría ser posible porque la pelota está dentro de la malla y puede meter un gol”.

6º básico:

7. A4: “Va a anotar un gol”.

8. A9 “Va anotar un punto”.

9. A6 “Puede ser que él antes de tirar la pelota para abajo otra persona del otro equipo, salte y la saque por debajo”

P: ¿Qué posibilidad le das a tu historia?

10. A7 A;

11. A5 E

12. A15: “Ya entro en el aro, ya es gol”.

13. A6 “Pero tiene que entrar toda”

14. A15: “No po ya entro. No es posible, después que vaya corriendo

Seguridad de ocurrencia	Con incertidumbre	Agrega suposiciones no consideradas en la consigna
12	5	12

Se aprecia que 12 de 29 alumnos escribe historias categóricas que reflejan la seguridad de ocurrencia del suceso.

Se han encontrado resultados que se consideran emergentes porque no han sido previstos en el análisis a priori, estos son:

2. Tres niños de veinte, de 5ª básico confunden el significado cotidiano de lo seguro y lo posible, lo que podría ser un obstáculo para la adquisición de la incertidumbre, la aleatoriedad y la probabilidad.
3. Poco más de la tercera parte de 7ª básico escribe historias que reflejan suposiciones no consideradas en la consigna de la tarea, lo que les hace asignar posibilidad de incertidumbre y explicar el suceso desde esta perspectiva.

   Este tipo de respuesta no fue conisderado en el análisis a priori.

	alguien y sacar la pelota antes de que caiga, no ¿cómo? Se ve ahí está la imagen". 15. A12 "No, la pelota ya está dentro del aro, ya se marcó el gol. El jugador no la puede sacar". **P** ¿Qué posibilidad le das a tu historia? 16. A12 y A8: "Una E, anota el punto, con posibilidad E" 17. A15 "yo también estoy de acuerdo". **P** ¿Hay muchas historias que formular. 18. Algunos Nooo. **P** ¿Qué número de historias? Algunos nuños: Una sola. **P** ¿Cuál sería la única historia? 19. A15 y otros más "que va a caer".	3. La sexta parte de los alumnos de 7° escribe historias categóricas pero su elección y explicación es de incertidumbre. 4. Los alumnos de 8ª básico cuantifican las posibilidades de ocurrencia definidas en la tabla mediante porcentaje, para los distintos niveles presentados, lo que no fue previsto en el análisis a priori.
	Algunas respuestas coherentes de los alumnos de 7° básico: A12: La pelota va a caer, y entro y	

	¡punto!; es seguro que ocurra porque ya está dentro del aro. A26: Va a entrar en el aro; es seguro que ocurra porque se ve en la imagen que está entrando al aro. Algunas respuestas que presentan incoherencia: A25: El jugador encesta la pelota dando puntos a su equipo y la pelota cae "vencedora". Es seguro pero no al 100%porque puede haber faltas. Ejemplo de respuestas en las que los alumnos agregan suposiciones no consideradas en la consigna: A14: El balón se cae después del punto y cae en un charco; poco posible porque pasan barriendo la cancha y se darían cuenta.	
	En la puesta en común de 8ª básico se obtienen lo siguiente:	

	A15 “Va a caer y a rebotar en el piso”. A7 “Baja por la malla”. P: ¿Qué posibilidad le asignan? A24 y otros: 100% de seguridad. A17: si 100% que hace el punto. A12: E seguro que cae. Los alumnos asignan porcentaje a la posibilidad de ocurrencia consignada en la tabla. Ellos acuerdan que un suceso seguro tiene 100% posibilidad de ocurrencia, el suceso imposible 0%, el suceso poco posible el 20% o 25% de posibilidad de ocurrencia, el suceso posible un 30, 40 y 50% de posibilidad de ocurrencia y el muy posible un 75 u 80% de posibilidad de ocurrencia.	

5.2.3 Situación tres: Apuestas a competencias deportivas.

Se presentan dos videos de carreras deportivas en las que participan 4 competidores, en cada una. En cada curso se forman parejas de alumnos, con la finalidad que apuesten al ganador de la carrera, en tres etapas, denominadas E_1, E_2 y E_3, respectivamente. Está previsto que apuesten al inicio de la carrera, durante ella y antes del final.

Los resultados se presentan en tablas de tres columnas que consignan las parejas formadas, designadas como P_i, $i \in \{1, 2, \dots, 15\}$, el tipo de apuesta y la explicación de la decisión tomada al apostar.

Se espera que las explicaciones puedan interpretarse según los axiomas de la probabilidad, pongan en evidencia el tipo de riesgo tomado en cada etapa y que sus decisiones se basen en las posiciones de los actuales de los competidores en relación a la posición inicial.

Para cada competencia, en cada nivel, se presentan respuestas previstas y en las tablas las respuestas.

Video 1: Carrera en el hipódromo.

Apuesta Inicial E_1.

<table>
<tr><th>Análisis a Priori</th><th>Análisis a Posteriori</th><th>Confrontación de Análisis</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">Se ha previsto que los alumnos realicen apuestas de alto riesgo, mediano, bajo y sin riesgo y den explicaciones del tipo siguiente:

Apuesta de alto riesgo:
1. Le apostamos todo a este competidor porque nos da confianza.
2. Porque el traje que usa (o las zapatillas) se ve que es más liviano</td>
<td>Los alumnos de 5ª básico han realizado apuestas sin riesgo, con alto, mediano y bajo riesgo y se han encontrado los siguientes explicaciones:

<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo de apuesta</th><th>Explicación de la apuesta.</th></tr>
<tr><td>P3</td><td>Equitativa.</td><td>“Porque así perdimos y ganamos”.</td></tr>
<tr><td>P2 y P5</td><td>A un caballo</td><td>P2: “porque creemos que va a ganar”.
P5: “porque puede ganar o perder”.</td></tr>
<tr><td>P4, P6, P8 y P9</td><td>A dos caballos en forma equitativa</td><td>P4: “porque se ve que van más rápido”
P6: “se ven que los dos van rápido”
P8: “porque va más adelante”
P9 no justifica</td></tr>
<tr><td>P1 y P7</td><td>Apuestan a tres caballos.</td><td>No justifican. Marcaron una preferencia.</td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="2">En todos los niveles se evidencian explicaciones previstas en el análisis a priori.

Nueve parejas de alumnos, 1 de 5°, 3 de 6ª, 3 de 7° y 3 de 8°, juzgan igualmente probable que gane cualquiera de los 4 caballos, es decir se sienten con el mismo grado de duda, de incertidumbre o de convencimiento frente a esta decisión. Si bien es cierto pierden en tres de sus posturas, lo que les hace decidir la apuesta sin riesgo</td>
</tr>
<tr><td>En 6ª básico se han realizado apuestas sin riego, con alto y bajo riesgo y se han encontrado los siguientes explicaciones:</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">3. Le apostamos a todos porque no sabemos cuál va a ganar.

Apuesta de mediano riesgo:
4. Le apostamos a dos competidores porque se ven los mejores
5. Porque la pista de carrera les favorece.
6. Porque puede que alguno de ellos gane.

Apuesta de bajo riesgo.
7. Porque así tenemos más</td>
<td>
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo de apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P1, P2, y P6</td><td>A un caballo

Sin riesgo</td><td>P1: “Porque el 7 es mi número favorito y él está en el puesto (carril 7)”.
P2: “Porque creo que va a ganar… es muy rápido”
P6: “Porque se ve confiable”.</td></tr>
<tr><td>P3, P5 y P10</td><td>A tres caballo Bajo riesgo</td><td>P3 “Porque va o no va a ganar”.
P5: “Porque creemos que va a ganar”.
P10 “Porque creemos que (esos a) los que apostamos van a ganar”.</td></tr>
<tr><td>P7, P8 y P9. P7</td><td>A cuatro caballos.

Sin riesgo</td><td>P7: “Porque creemos que la (que va por el carril)
dos va a ganar y los demás van a llegar más tarde”
P8 y P9: “porque creemos que el 2 va a ganar”.
P4 no justifica.</td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="2">es la seguridad de ganar en una postura y quedar con dinero (ficticio) para seguir jugando. Por otra parte la falta de información sobre el comportamiento de los caballos en carreras anteriores podría producir en los alumnos una percepción de equitatividad, asignándoles la misma posibilidad de triunfo a cada uno de ellos.
Esta falta de información les podría producir incertidumbre, lo que explicarìa las apuestas con preferencia.
Se observa que en ausencia de información sobre el desempeño de los competidores:</td>
</tr>
<tr>
<td>En 7ª básico se han realizado apuestas sin riego, con alto mediano y bajo riesgo y se han encontrado las siguientes explicaciones:</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>oportunidad de ganar.
8. Porque uno de ellos va a ganar.

Apuestas equitativa
9. Porque uno de ellos seguro que gana.
10. Para no perder todo y seguir apostando.

Apuesta sin riesgo con preferencia a un(os) competidor(es)
11. Le apostamos más a los competidores C1 y C2 porque pensamos que uno de ellos gana y a los otros le</td>
<td>
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo de apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P3 y P8</td><td>Apuesta equitativa</td><td>P3 “porque hay que asegurarse”.
P8 “porque tenemos más posibilidades de ganar”.</td></tr>
<tr><td>P5, P6, P7 y P9</td><td>A un caballo</td><td>P5: “porque es un número par (la posición del caballo en la partida)”.
P6 “porque pensamos que vamos a ganar con este caballo”.
P7 “porque nos gusta el nº 3 (el caballo en el tercer carril)”.
P9 “porque es el caballo más grande y puede correr más rápido”.</td></tr>
<tr><td>P1 P4, P10 y P11</td><td>A dos caballos</td><td>P1 “porque están más cerca del carril”
P4 “Porque tenemos confianza en esos números (carriles 7 y 4 en el video)”.
P10 “porque son los números favoritos y día de mi cumpleaños”.
P11 “porque mi compañera eligió el 3 y a mí me gusta el 1”.</td></tr>
<tr><td>P12, P13 y P14</td><td>A tres caballos</td><td>Porque creemos que son los mejores caballos.</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>A cuatro caballos.</td><td>“Porque creemos que él va a ganar y a los otros les apostamos poquito”.</td></tr>
</table>
</td>
<td>13 parejas apuestan con alto riesgo (dos en 5º, tres en 6º, cuatro en 7º y en 8º también), 6 parejas explican con incertidumbre, otras 2 explican a partir de suposiciones subjetivas, 3 parejas apuestan a un fetiche y 2 pareja se apoyan en los datos de la partida.
13 parejas apuestan con mediano riesgo, 5 parejas agregan suposiciones subjetivas (tres de 5º, una de 7º y una de 8º), 3 parejas de 7ª apuestan a un fetiche, 2 parejas de 8ª visualizan aspectos físicos para apostar, lo que para ellos constituyen datos para decidir la apuesta, 2 pareja de 8ª depositan su</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>apostamos menos por si los otros no ganan.
12. Le apostamos más a C1 porque nos gusta a los dos y a los otros le apostamos menos por si los otros no ganan.</td>
<td>

Los alumnos de 8ª realizan apuestas sin riesgo, de alto riesgo y mediano riesgo. Sus explicaciones son las siguientes:
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo de apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P10</td><td>Apuesta equitativa</td><td>P8 “Para no empezar mal la apuesta”.</td></tr>
<tr><td>P1, P2, P6, P9</td><td>A un caballo</td><td>P1 “Se ve que es rápido”.
P2: “Porque es el más rápidos”.
P6 “El circuito está a su favor”.
P9 “Creo que va a ganar”.</td></tr>
<tr><td>P3, P4, P5, P7, P8</td><td>A dos caballos</td><td>P3 “Le teníamos fe”
P4 “Al le apostamos al 4, sé que va a ganar”,
P5 “Porque el caballo (del carril) dos se veía más rápido".
P7 “Por la forma en cómo se para cada uno (en la partida)”.
P8: “Porque no queríamos apostar por otros”.</td></tr>
<tr><td>P11</td><td>A</td><td>P11: “Le llevaba fe al caballo 3”</td></tr>
</table>
</td>
<td>confianza en su apuesta y una pareja de 5ª no justifica
8 parejas apostaron con bajo riesgo, 6 de ellas, con incertidumbre (3 de 6ª y 3 de 7ª) y 2 parejas (en 5°) no justifican.
Once parejas apuestan sin riesgo, , 9 de ellas con incertidumbre y 4 realizan el reparto equitativo de la apuesta. Una pareja de 8° apuesta por confianza y una de 6° no justifica.</td>
</tr>
</table>

y P12	cuatro caballos	P12: “Dividí los $4000 para seguir apostando”.

La síntesis de resultados de la primera etapa, E_1, se consigna en la tabla 63, recuperada de la página 441

Etapa 1	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de mediano riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				total
	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	
Se apoya en datos			1	1				2									4
Suposición				2	3		1	1									7
Fetiche		1	2				3										6
Incertidumbre	2	1	1	1						3	3		1e	3	2e 1	1e 1	20
Por confianza		1						2								1	4
No justifica					1				2					1			4
Sin interpretación																	
Total (1)	2	3	4	4	4	0	4	5	2	3	3	0	1	4	3	3	45
Total (2)	13				13				8				11				

26 Apuestas con riesgo

11 Apuestas sin riesgo

La tabla muestra que, en la etapa 1, poco más de la mitad de las parejas en estudio (26 de

En la apuesta inicial 20 parejas de alumnos (de los cuatro niveles) apuestan con incertidumbre. Se observa además que alrededor de un tercio de las parejas en estudio (13 de 45) realizan apuestas con suposiciones subjetivas y de tipo fetiche, lo que constituye un obstáculo al reconocimiento de la incertidumbre y a la toma de decisiones informadas.

Cuatro parejas (1 de 6° y 3 de 8°) apuestan por confianza en la ocurrencia del suceso, criterio que

45) decide la apuesta con riesgo y que la cuarta parte (11de 45) deciden la apuesta sin riesgo.	corresponde a uno de los usos de la apuesta; 4 parejas (3 de 8° y 1 de 7°) se apoyan en aspectos visuales sobre las características físicas de los competidores; 4 parejas no justifican (3 de 5° y 1 de 6°).

Actualización de la Apuesta E2.

<table>
<tr><th>Análisis a Priori</th><th>Análisis a Posteriori</th><th>Confrontación de Análisis</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">En la segunda etapa,
se prevé las siguientes explicaciones:
Actualización de puesta de alto riesgo
13. Le apostamos a un competidor porque va ganando o tomo la delantera o va primero.

Actualización de puesta de mediano riesgo.
14. Le apostamos a dos competidores porque tomaron la delantera y uno de</td>
<td>Siete de nueve parejas de 5ª básico han actualizado sus apuestas. La tabla contiene las explicaciones frente a sus decisiones:
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P1, P2, P5 y P7</td><td>A un caballo</td><td>P1: “Porque creemos que va a ganar”
P2: “Porque va a ganar”.
P5: “Porque puede ganar la carrera”.
P7 No justifica.</td></tr>
<tr><td>P4, P6 y P9</td><td>A dos caballos</td><td>P4 y P6: Porque llevan o van en la delantera”,
P9 No justifica</td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="2">Se encontraron explicaciones de los alumnos según lo previsto en el análisis a priori.
Los resultados muestran que 6 parejas, de los distintos niveles realizan la apuesta sin riesgo y en este tipo de apuesta la incertidumbre ha disminuido de 9 a 4 parejas, 1 pareja se apoya en los datos y otra de 6° no explica.
Las apuestas de tipo sin riesgo, disminuyeron casi a la mitad 4 ahora y 9 en la etapa anterior. Ver el desarrollo de la carrera, permito a los alumnos considerar las posiciones de los caballos para tomar nuevas decisiones, las que corresponderían a hipótesis provisorias elaboradas por el</td>
</tr>
<tr>
<td>En 6° básico se encontró lo siguiente, para E_2.
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo apuesta</th><th>Explicación de la apuesta.</th></tr>
<tr><td>P3</td><td>Apuesta equitativa</td><td>P3 “puede que gane o no”</td></tr>
<tr><td>P1, P2, P6 y P10</td><td>A un caballo</td><td>P1 “porque le tengo fe”.
P2 “porque viene muy rápido”
P6 “porque va primero”.
P10 “porque este va a ganar”</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

ellos puede o va a ganar.

Actualización de apuesta de bajo riesgo.

15. Le apostamos a tres competidores porque estos son los más seguros que ganen y el otro se quedó muy atrás.

16. Le apostamos a tres competidores porque son los que van más adelante

Actualización de apuesta sin riesgo equitativa.

17. Le apostamos a todos porque igual

P5 y P7	A dos caballos	P5 y P7: "porque tomaron la delantera".
P8 y P9.	A tres caballos	P8: "lo vimos que va a ganar" P9: "creemos que va a ganar"
P4	A cuatro caballos	No justifica.

En 7° básico se encontraron las siguientes respuestas:

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta.
P3 y P8	Apuesta equitativa	P3 "porque no vamos a estar seguros de elegir uno" P8 "porque tenemos más posibilidades de ganar".
P5, P6 y P9	A un caballo	P5: "porque es uno de los más rápidos" P6: "porque creo que vamos a ganar". " P9 "porque va más adelante".
P1, P4, P7, P10 y P11	A dos caballos	P4 "porque se ve velocidad". P7: "nos gusta el 3 y el 4 partió bien". P10: "cosa de suerte". P11: "creemos que el 4 tiene más posibilidad".

sujeto para afinar la estimación de probabilidades subjetivas, de Finetti.

Se observa que en 5° básico se produjo ruptura de contrato didáctico, dado que tres parejas no realizaron E_2.

Se aprecia además que ver el desarrollo de la carrera produjo una confianza en que la apuesta se materializará, lo que se pone en evidencia en explicaciones como: *"porque este va a ganar", "lo vimos que va a ganar", "porque le tengo fe ", "porque iba ganando"*, en distintos niveles y con mayor frecuencia en 6° básico. Este fenómeno se interpreta desde la óptica del pensamiento concreto de los niños de 10 a 13 años, el que les hace suponer

<table>
<tr>
<td>
no sabemos cuál va a ganar.

Actualización de la apuesta sin riesgo con preferencia a un(os) competidor(es)

18. Le apostamos más a unos competidores porque van más adelante y a los otros menos porque no sabemos qué puede pasar más adelante.
</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td>P1: “porque están más cerca del carril”</td></tr>
<tr><td>P12, P13 y P14</td><td>A tres caballos</td><td>P12, P13 y P14 “porque el caballo 4 va más adelante”.</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>A cuatro caballos.</td><td>“porque creemos que el 4 es el mejor”.</td></tr>
</table>

En 8° básico se encontraron las siguientes respuestas:

<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P1, P2, P3, P6, P9 y P12</td><td>A un caballo</td><td>P1:Va con mucha velocidad”
P2 “Porque es el más rápido”
P3:“Porque iba ganando”
P6: “Es el más rápido”
P9: “Porque va a ganar”
P12: “Porque el caballo es el más rápido y le tengo fe”.</td></tr>
<tr><td>P4 , P5, P8 y P10</td><td>A dos caballos</td><td>P4 :“Porque le tuve más fe”
P5: “No justifica”
P8: “Porque no queríamos apostar por otros”.
P10: “Porque llevaba más ventaja”.</td></tr>
<tr><td>P7</td><td>A tres caballos</td><td>P7: “por la forma en que corren”.</td></tr>
</table>
</td>
<td>
que con muestras pequeñas van a tener una percepción global del fenómeno. Es el atajo cognitivo de la representatividad de la muestra, Kahneman y Tversky.

En 5° básico se encontraron 2 explicaciones con incertidumbre, expresadas como: *“porque creemos que va a ganar” y “porque puede ganar la carrera”*.

Una explicación no prevista en el análisis a priori es mantener la apuesta inicial sin apoyarse en las informaciones que informa el desarrollo de la carrera. Si esta correspondiera a una actitud caprichosa de los alumnos, desde el punto de vista teórico el apostador seria no coherente y daría ventaja a
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td><table><tr><td>P11</td><td>A cuatro caballos con preferencia.</td><td>P11: "porque iba ganando el caballo (del carril) 3".</td></tr></table></td>
<td>su contrincante en una eventual apuesta real. Si la decisión se apoya en los datos del desarrollo de la carrera porque precisamente su competidor va en la delantera, sería una decisión conforme al criterio de coherencia en las apuestas.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">La síntesis de resultados de la primera actualización de la apuesta, E_2, se consigna en la tabla 64, recuperada de la página 443</td>
<td>La tabla muestra que en E_2, el criterio "se apoya en los datos", del desarrollo de la carrera, alcanzo la mayor frecuencia en la toma de decisiones de los alumnos, el segundo criterio es la concepción de incertidumbre y la suposición subjetiva y el tercer criterio es depositar la confianza en un suceso que supone algún riesgo. Solo una pareja de 7° apuesta a un fetiche. Esto refleja la influencia</td>
</tr>
</table>

Etapa 2	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de mediano riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				Total
	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	
Se apoya en datos		2	2	5	2	2	1	1			3	1				1	20
Suposición	1	1		1						1							4
Fetiche							1										1
Incertidumbre	2		1				2			1				1e	2e 1		10
Por confianza		1						2									3
No justifica	1				1			1						1			4
Sin interpretación							1										1
Total (1)	4	4	3	6	3	2	5	4		2	3	1		2	3	1	43
Total (2)	17				14				6				6				43

31 apuestas con riesgo **6 apuestas sin riesgo**

Los resultados de E_2, muestran que casi las tres cuartas partes de las parejas deciden, en forma informada, la apuesta con riesgo y que casi de un séptimo deciden la apuesta sin riesgo.

de la información en la toma de decisiones.

Actualización de la Apuesta E3.

<table>
<tr><th>Análisis a Priori</th><th>Análisis a Posteriori</th><th>Confrontación de Análisis</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">En la tercera etapa, se prevé las siguientes explicaciones:
Actualización de puesta de alto riesgo
13. Le apostamos a un competidor porque va ganando o tomo la delantera o va primero.

Actualización de puesta de mediano riesgo.
14. Le apostamos a dos</td>
<td>En 5° básico se han encontrado solo 3 actualizaciones de apuestas, son las siguientes:
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo de apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P5</td><td>A un caballo</td><td>No justifica</td></tr>
<tr><td>P4</td><td>A dos caballos</td><td>“Son los más rápidos”.</td></tr>
<tr><td>P1,</td><td>A tres caballos, marcando preferencia</td><td>“Porque creemos que van a ganar”</td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="2">El análisis de las explicaciones pone en evidencia una ruptura de contrato didáctico en 5° básico. La relación didáctica no ha sido restituida y no ha sido posible constatar las concepciones intuitivas sobre los niveles de creencia de los niños de 10 años.
Por otra parte, se observa, en todos los niveles que las apuestas sin riesgo evidencian incertidumbre.
Las apuestas de alto riesgo se basan principalmente en las informaciones que ven en el vídeo, 5 de 9 parejas aplican este criterio para explicar su apuesta. Otras dos parejas confían en la ocurrencia del suceso, una pareja explica con incertidumbre y otra pareja de 5° no</td>
</tr>
<tr>
<td>En 6° básico se han encontrado las siguientes explicaciones para E_3:
<table>
<tr><th>P_i</th><th>Tipo apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P3, P2</td><td>Apuesta equitativa</td><td>P3: “puede que gane o no”.
P2: “Porque uno de esos va a ganar”</td></tr>
<tr><td>P1, y P6</td><td>A un caballo</td><td>P1 “porque va primero”.
P6 “porque es confiable”.</td></tr>
<tr><td>P5 y P7</td><td>A dos caballos</td><td>P5:“porque el 2 y el 1 son los que van más adelante”
P7: “porque tomaron ventaja”.</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

competidores porque tomaron la delantera y uno de ellos puede o va a ganar.

Actualización de apuesta de bajo riesgo.

15. Le apostamos a tres competidores porque estos son los más seguros que ganen y el otro se quedó muy atrás.

16. Le apostamos a tres competidores porque son los que van más adelante

P8 y P 9.	A tres caballos	P8: "porque lleva la delantera" P9: "porque va a ganar"
P4	A cuatro caballos	No justifica.

En 7° básico se encontró lo siguiente:

P_i	Tipo apuesta	Explicación de la apuesta
P8	Apuesta equitativa	P8 "porque tenemos más posibilidades de ganar".
P2, y P9	A un caballo	P2 "estamos casi seguros de que va a ganar". P9 "porque va ganando".
P1, P4, P5, P6, P7, P10 y P11	A dos caballos	P1: "Porque están más cerca del carril" P4 "porque son unos de los más rápidos" P5: "porque vemos velocidad en esos caballos" P6: "porque uno de los dos gana" P7: "Seguimos como al comienzo (apuestan por el caballo del tercer carril)" P10 "Por los caballos que son más rápidos" P11 no justifica.

explica su decisión.

Trece parejas apostaron con mediano riesgo, 7 parejas se apoyan en las informaciones obtenidas al ver el video.

Una pareja de 7° apuesta con incertidumbre y otra no justifica y una pareja de 8° deposita su confianza en su apuesta, aunque se arriesgue a perder, contradiiendo el principio de coherencia que rige las apuestas .

En la apuesta de bajo riesgo, 6 parejas se apoyaron en los datos para actualizar su apuesta. Dos parejas apuestan con incertidumbre y una pareja de 6° explica su apuesta de manera categórica, lo que evidencia una racionalidad determinista. 2 parejas, una de 7° y otra de 8° no justifican,

Un resultado no previsto en el

<table>
<tr>
<td>Actualización de apuesta sin riesgo equitativa.
17. Le apostamos a todos porque igual no sabemos cuál va a ganar.

Actualización de la apuesta sin riesgo con preferencia a un(os) competidor(es)
18. Le apostamos más a unos competidores porque van más adelante y a los otros menos porque no sabemos qué</td>
<td>
<table>
<tr><td>P3, P12, P13 y P14</td><td>A tres caballos</td><td>P3 “apostamos al 4 porque va ganando”
P13 “porque el caballo 4 es el más rápido”.
P14 “porque el caballo 4 lleva la ventaja”.
P12, no justifica</td></tr>
</table>

En 8° básico se encontró lo siguiente:
<table>
<tr><th>P_i</th><th>Tipo apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P9</td><td>Apuesta equitativa</td><td>No justifica</td></tr>
<tr><td>P1, P2, P6 y P12</td><td>A un caballo</td><td>P1: “Porque tomo la delantera”
P2: “Tiene más resistencia y velocidad”.
P6: “ Es el más rápido”
P12: “Le tengo fe”,</td></tr>
<tr><td>P4, P8 y P10</td><td>A dos caballos</td><td>P4 : “ahora les tenemos fe”
P10: “son los más adelantados”
P8: “no queríamos apostar por otros”.</td></tr>
<tr><td>P3, P5 y P7</td><td>A tres caballos</td><td>P3: “Porque iban empatados”
P5 No justifica
P7 “Por la forma en que corre”.</td></tr>
</table>
</td>
<td>análisis a priori fue la ruptura de contrato didáctico sea porque no realizan las apuestas como ha ocurrido en 5° básico como por las explicaciones que contradicen el principio de coherencia de las apuestas, De Finetti y les conducen, al parecer en forma caprichosa, a apostar en todas las etapas al mismo competidor o dar respuestas del tipo “no queremos apostar por otro(s)”.</td>
</tr>
</table>

puede pasar más adelante.

P1	A cuatro caballos	P11: “Porque el caballo del carril 3 estaba ganando pero se le acercaba el que iba en el 4º carril”.

La síntesis de resultados de la segunda actualización de la apuesta, E_3, se consigna en la tabla 65, recuperada de la página 446.

Etapa 3	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de medio riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				Total
Curso	**5°**	**6**	**7**	**8**	**5°**	**6**	**7**	**8**	**5**	**6**	**7**	**8**	**5**	**6°**	**7**	**8**	
Se apoya en datos		**1**	**1**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**		**1**	**3**	**2**				**1**	**19**
Suposición							**1**			**1**							**2**
Fetiche																	
Incertidumbre			**1**				**1**		**1**					**2** e	**1**		**6**
Por confianza		**1**		**1**				**1**									**3**
No justifica	**1**						**1**				**1**	**1**		**1**		**1**	**6**
Sin interpretación							**1**	**1**									**2**
Total (1)	**1**	**2**	**2**	**4**	**1**	**2**	**7**	**3**	**1**	**2**	**4**	**3**	**0**	**3**	**1**	**2**	**38**
Total (2)	**9**				**13**				**10**				**6**				**38**

22 Apuestas con riesgo **6 Apuestas sin riesgo**

La tabla muestra que en E_3, los alumnos apuestan de acuerdo al criterio “se apoya en los datos”, también apuestan con incertidumbre, materializada principalmente en la apuesta sin riesgo y en el criterio depositar la confianza en un suceso que supone algún riesgo, como explicación para decidir la apuesta.

En esta etapa se observa una disminución en las suposiciones subjetivas y la anulación de apostar a un fetiche, lo que refleja la influencia de la información en la toma de decisiones.

En esta etapa E_{3}, los alumnos tienen información sobre la carrera y sus apuestas evidencian que casi las tres quintas partes de las parejas deciden, apoyándose en los datos, la apuesta con riesgo y que cerca de un sexto deciden la apuesto sin riesgo.	

Video 2: Carrera en Patines Apuesta Inicial E_1.

<table>
<tr><th>Análisis a Priori</th><th>Análisis a Posteriori</th><th>Confrontación de Análisis</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">Se ha previsto que los alumnos realicen apuestas de alto riesgo, mediano, bajo y sin riesgo y den explicaciones del tipo siguiente:

Apuesta de alto riesgo:
1. Le apostamos todo a este competidor porque nos da confianza.
2. Porque el traje que usa (o las zapatillas) se ve que es más liviano
3. Le apostamos</td>
<td>Los alumnos de 5ª básico han realizado apuestas sin riego, con alto, mediano y bajo riesgo y se han encontrado los siguientes explicaciones:
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo de apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P6</td><td>Equitativa.</td><td>P6: “Todos se ven rápidos”.</td></tr>
<tr><td>P1, P2, P3, P5, P8 y P10</td><td>Apuesta a un patinador</td><td>P2: “porque va a ganar”.
P3 “Porque en la partida falsa era primera el 3”.
P1 y P5 “Porque es más rápido el que va en la segunda pista.
P8 “Porque en la partida falsa iba primero.”.
P10 no justifica.</td></tr>
<tr><td>P4, P7 y P9</td><td>Apuesta a dos patinadores</td><td>P4 “son los más preparados”
P7: “Porque son más rápidos el 2º y el 4º
P9 “Porque el que está en la pista tres es el más rápido.</td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="2">En todos los niveles se evidencian explicaciones previstas en el análisis a priori.
Se observa que en ausencia de información sobre el desempeño de los patinadores en otras competencias, 8 parejas en total realizan apuestas sin riesgo, es decir se sienten con el mismo grado de duda, de incertidumbre o de convencimiento frente a esta apuesta, lo que también podría producir en los alumnos una percepción de equitatividad y por lo tanto les asignan la misma o diferente posibilidad de triunfo a cada uno de ellos.
Así en ausencia de información, la apuesta sin riesgo es la mejor elección para estos alumnos.</td>
</tr>
<tr><td>En 6ª básico se han realizado apuestas sin riego, con alto y bajo riesgo y se han encontrado los siguientes explicaciones:</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">a todos porque no sabemos cuál va a ganar.

Apuesta de mediano riesgo:
4. Le apostamos a dos competidores porque se ven los mejores
5. Porque la pista de carrera le favorece.
6. Porque puede que alguno de ellos gane.

Apuesta de bajo riesgo.
7. Porque así tenemos más</td>
<td>
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo de apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P3 y P8</td><td>Apuesta equitativa</td><td>P3: “Capaz que pierda”.
P8: “Porque la carrera está peleada por la delantera”</td></tr>
<tr><td>P1, P6</td><td>Apuesta a un patinador</td><td>P1: “Porque me gusta el azul”
P6: “Porque me da confianza”</td></tr>
<tr><td>P2, P9 y P10</td><td>Apuesta a dos patinadores</td><td>P9: “Porque pensamos que ganan”.
P10: “no sabemos”.
P2 no justifica</td></tr>
<tr><td>P4, P5 y P7</td><td>Apuesta a cuatro patinadores</td><td>P5 y P7 apuestan “yo creo que va a ganar un
o de los dos (marcan preferencia a dos de los 4 patinadores)”.
P4 No justifica pero marca preferencia.</td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="2">14 parejas realizaron apuestas de alto riesgo, al parecer, en 6 de ellas influyo la partida fallida en sus decisiones. 2 parejas de 5° se apoyaron en suposiciones subjetivas sobre el ganador de la carrera, una pareja de 6° y otra de 7° apuestan a un fetiche, una pareja de 6° y dos de 8°, depositan su confianza en su apuesta aunque exista riesgo en ella. Una pareja de 5° no justifica su apuesta.

18 parejas apostaron con mediano riesgo, 7 parejas apostaron basándose en suposiciones subjetivas, 3 parejas de 7° apuestan a un fetiche, 5 parejas apuestan con incertidumbre y una pareja de 6° no explica su decisión.</td>
</tr>
<tr>
<td>En 7° básico se realizaron apuestas sin riego, con alto mediano y bajo riesgo y se encontraron explicaiones del tipo siguiente:</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>oportunidad de ganar.
8. Porque uno de ellos va a ganar.

Apuestas equitativa
9. Porque uno de ellos seguro que gana.
10. Para no perder todo y seguir apostando.

Apuesta sin riesgo con preferencia a un(os) competidor(es)
11. Le apostamos más a los competidores C1 y C2 porque</td>
<td>
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo de apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P3</td><td>Apuesta equitativa</td><td>Hay que asegurarse</td></tr>
<tr><td>P9</td><td>A un patinadores</td><td>P9: Porque es nuestro color favorito</td></tr>
<tr><td>P1, P4, P5, P6, P7, P10, P11</td><td>A dos patinadores</td><td>P1: Están más cerca de la partida.
P4: Se ven más profesionales.
P5: Porque es nuestro color favorito.
P6: Porque pensamos que uno de los dos va a ganar.
P7: Se nota que son rápidos. En referencia a los patinadores 2 y 3.
P10: por el color y por como salió, en la partida falsa
P11: Porque nos gusta el amarillo</td></tr>
<tr><td>P8, P12, P13, P14</td><td>A tres patinadores</td><td>P8: Nos gusta el color de sus uniformes
P12: porque nos gustan los colores de las camisetas del 2 y el 4
P13 Porque pensábamos que el nº 2 era el más rápido. Por cómo se para.
P14: Porque me gustan los</td></tr>
</table>
</td>
<td>Para la apuesta de bajo riesgo se observa que 3 parejas de 7° apuestan a un fetiche y otra pareja explica su apuesta con incertidumbre. Una pareja de 8° apuesta depositando su confianza en su apuesta y otra no explica su decisión.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">pensamos que uno de ellos gana y a los otros le apostamos menos por si los otros no ganan.
12. Le apostamos más a C1 porque nos gusta a los dos y a los otros le apostamos menos por si los otros no ganan.</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td>números. Apuesta con preferencia al segundo patinador</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>A cuatro patinadores</td><td>P2: el segundo es el más probable.</td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="2"></td>
</tr>
<tr>
<td>Los alumnos de 8ª realizan apuestas sin riesgo, de alto riesgo y mediano riesgo. Sus explicaciones son las siguientes:</td>
</tr>
</table>

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta
P1, P2, P6, P7, P12	A un patinadores	P1: Comenzó muy veloz (en la partida falsa). P2: Por confianza. P6: Se ve más ágil. P7: Partió rápido P12: Porque le tengo fe que ganará
P3, P4, P8, P9, P11	A dos patinadores	P3: Porque puede que gane (se refiere al tercer patinador). P4: Se ve bien parado. P8: Porque creímos que ellos van a ganar. P9: Porque creemos que son buenos. Apuesta con preferencia al 2º patinador. P11: Porque son los más adelantados
P5, P10	A tres patinadores	P5: apuesta con preferencia al tercer patinador pero no justifica. P10: Porque nos dijo la intuición.

La síntesis de resultados de la primera etapa, E_1, se consigna en la siguiente tabla 70, recuparada de la página 464.

En la apuesta inicial E_1, el criterio más frecuente para realizar y explicar la apuesta son las suposiciones subjetivas, las que corresponden a

Etapa 1	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de mediano riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				total
	5°	6°	7°	8	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	5°	6°	7°	8°	
Se apoya en datos	3			3				2									**8**
Suposición	2				3	1	3						1e	2			**12**
Fetiche		1	1				3				3						**8**
Incertidumbre						1	1	3			1			2e	1e 1		**10**
Por confianza		1		2								1					**4**
Reparte $																	
No justifica	1					1						1		1			**4**
Sin interpretación																	
Total (1)	6	2	1	5	3	3	7	5			4	2	1e	5	2		**46**
Total (2)	**14**				**18**				**6**				**8**				

32 apuestas con riesgo 8 apuestas sin riesgo

Como síntesis de resultados de la apuesta inicial, E_{1}, esta tabla muestra casi 32 de 46 parejas deciden la apuesta con riesgo y 8 de 46 parejas deciden la apuesta sin riesgo.

creencias personales sobre el suceso. También la incertidumbre es utilizada como explicación para decidir la apuesta. Dado que esta carrera tuvo una partida fallida se observa que 8 parejas de alumnos apuestan, al parecer la partida falsa y alguna característica visual del patinador que haya llamado la atención de los alumnos. Finalmente hay 4 parejas que apuestan pero no justifican.

Actualización de la Apuesta E_2.

<table>
<tr><th>Análisis a Priori</th><th>Análisis a Posteriori</th><th>Confrontación de Análisis</th></tr>
<tr>
<td>En la segunda etapa, se prevé las siguientes explicaciones:

Actualización de puesta de alto riesgo
13. Le apostamos a un competidor porque va ganando o tomo la delantera o va primero.

Actualización de puesta de mediano riesgo.
14. Le apostamos a dos competidores porque tomaron la delantera y uno de ellos puede o va a ganar.

Actualización de apuesta de bajo riesgo.</td>
<td>Diez parejas de 5ª básico han actualizado sus apuestas.
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo de apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
<tr><td>P1, P2, P3, P5 y P8</td><td>Apuesta a un patinador</td><td>P2: “porque el que partió en la pista 3, va a ganar”
P1 y P5 “Porque es más rápido (el que partió en la pista tres).
P8: No justifica.
P3 “Porque es rápido el de la pista 1”.</td></tr>
<tr><td>P4, P6, P7 y P9</td><td>Apuesta a dos patinadores</td><td>P4 “porque los que partieron en las pistas 1 y 3, llevan la delantera”.
P6: “porque los que partieron en las pistas 3 y 4 van en la delantera”
P7: “Porque el de la pista 4 se cayo
P9 “Porque el que está en la pista tres va a ganar”.</td></tr>
<tr><td>P10</td><td>Apuesta a tres patinadores</td><td>No justifica</td></tr>
</table>
La tabla contiene las explicaciones frente a sus decisiones:</td>
<td>Se encontraron explicaciones de los alumnos según lo previsto en el análisis a priori.
6 parejas, de los distintos niveles realizan la apuesta sin riesgo y sin incertidumbre, de estas 2 parejas se apoyan en los datos del desarrollo de la carrera para actualizar su apuesta, otras dos elaboraron suposiciones subjetivas y las dos restantes no explican su apuesta.

El desarrollo de la carrera influyo en el aumento de la apuesta con riesgo. En general, 25 de 45 parejas realizaron la apuesta con rieshgo, en las que debían considerar la información del desarrollo de la carrera para</td>
</tr>
</table>

15. Le apostamos a tres competidores porque estos son los más seguros que ganen y el otro se quedó muy atrás.

16. Le apostamos a tres competidores porque son los que van más adelante

Actualización de apuesta sin riesgo equitativa.

17. Le apostamos a todos porque igual no sabemos cuál va a ganar.

Actualización de la apuesta sin riesgo con preferencia a un(os) competidor(es)

18. Le apostamos más a unos competidores

En 6° básico se encontró lo siguiente, para E_2.

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta
P3	Apuesta equitativa	P3: "Estamos seguros que ganamos"
P1, P6 y P9	Apuesta a un patinador	P1: "porque va el primero"; P6: "porque se ve confiable" P9: "Porque creo que va a ganar".
P5, P7 y P8	Apuesta a dos patinadores	P5: "porque creemos que el (que partió por la pista) dos y (por la pista) tres van a ganar". P7: "porque el (que partió por la pista) 3 va a ganar" P8 "porque va a ganar"
P4	Apuesta a cuatro patinadores	No justifica.

Para E_2, en 7° básico se encontraron las explicaciones siguientes:

Pareja	Tipo apuesta	Explicación de la apuesta
P12	Apuesta	P12 no justifica

tomar nuevas decisiones. Desde el punto de vista teórico, estas decisiones corresponderían a hipótesis provisorias elaboradas por el sujeto para afinar la estimación de probabilidad subjetiva.

Se observa que en 5° básico se restituyo la relación didáctica, ya que estos alumnos realizaron las apuestas solicitadas.

En general, ver el desarrollo de la carrera produjo una confianza en que la apuesta se materializaría, lo que se pone en evidencia en explicaciones como: *"porque este va a ganar", "estamos seguros que ganamos", "el 3 es el mejor"* y otros. Este fenómeno se interpreta desde la óptica del porque van más adelante y a los otros menos porque no sabemos qué puede pasar más adelante.

	equitativa	
P5, P6, P9	A un patinadores	P5: Porque es más rápido. P6: Porque pensamos que es mejor P9: Porque va en segundo lugar.
P1, P4, P7, P10, P11, P14	A dos patinadores	P1: Tienen más fuerza en los pies. P4: Porque van adelante. P7: No queremos cambiar. P10: Por como van corriendo. P11: Porque iban ganando. Se refiere a los patinadores 1 y 2. P14: Porque son los que llevan la delantera, apuesta con preferencia al 2.
P3, P13	A tres patinadores	P3: Porque el dos lleva la delantera. P13: Porque pensábamos que el número 3 era el más veloz
P2, P8	A cuatro patinadore	P2: El 3 es el mejor. P8: Porque el 4 va más adelante.

pensamiento concreto de los niños de 10 a 13 años, el que les haría suponer que un estado parcial del fenómeno representaría los estados futuros del mismo.

La explicación "Apostamos a dos patinadores porque no queríamos apostar por otros" de P8 en 8° básico, reproduce una actitud que transgrede el principio de coherencia de las apuestas y obstaculiza analizar las informaciones del desarrollo de la carrera para decidir la actualización de la apuesta. Si esta correspondiera a una actitud caprichosa de los alumnos, desde el punto de vista teórico el apostador seria no coherente y daría ventaja a su contrincante en una eventual

	Para E_2, en 8° básico se encontró los siguiente:	apuesta real.

Pareja	Tipo de apuesta	Explicación de la apuesta	
P9	Apuesta equitativ	Porque no se cual	
P1, P2, P3, P6, P7	A un patinadores	P1: Va en la delantera. P2: Por confianza. P3: Porque va ganando. P6: Porque tiene mejores patines. P7: Es más rápido	
P4, P5, P8, P10, P11	A dos patinadores	P4: Porque va de los primeros, se ve que va a ganar. P5: Apuesta con preferencia al primer patinador pero no justicia. P8: Porque el cuatro quedo atrás. P10: Porque sacaron más ventaja. P11: Porque los números 3 y 4 se quedan atrás.	

La síntesis de resultados de la primera actualización de la apuesta, E_2, se consigna en la tabla 71, recuparada de la página 466.	En E_2, el criterio “se apoya en los datos”, alcanzo la mayor frecuencia en la toma de decisiones de los alumnos, 25 de 45, el segundo criterio son las suposiciones subjetivas, el tercer criterio es la incertidumbre

Etapa 2	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de mediano riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				total
Grado del curso	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8º	
Se apoya en datos	4	2	2	5	3		4	1			1	1			1	1	25
Suposición				1	1	2	1							1	1		7
Fetiche																	
Incertidumbre			1			1					1						3
Por confianza		1		1				1									3
No justifica	1							1	1					1	1 e		5
Sin interpretación							1	1									2
Total (1)	5	3	3	7	4	3	6	4	1		2	1		2	3	1	45
Total (2)	18				17				4				6				

35 Apuesta con riesgo 6 Apuesta sin riesgo

Los resultados de esta etapa $E_{2,}$ muestran que 35 de 45 de las parejas deciden, en forma informada, la apuesta con riesgo y que cerca de trece decimos deciden la apuesto sin riesgo.

junto con el criterio depositar la confianza en un suceso que supone algún riesgo. También se observa la influencia de la información en la toma de decisiones y en la obstrucción del criterio apostar a un fetiche que se había presentado en etapas avanzadas en el video carrera en el hipódromo.

Actualización de la Apuesta E3.

<table>
<tr><th>Análisis a Priori</th><th>Análisis a Posteriori</th><th>Confrontación de Análisis</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">En la tercera etapa, se prevé las siguientes explicaciones:
Actualización de puesta de alto riesgo
13. Le apostamos a un competidor porque va ganando o tomo la delantera o va primero.

Actualización de puesta de mediano riesgo.
14. Le apostamos a dos competidores porque tomaron la delantera y uno de ellos puede o va a ganar.

Actualización de apuesta de bajo riesgo.</td>
<td>En 5° básico se encontraron las actualizaciones y explicaciones siguientes:
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo apuesta</th><th>Explicación de la apuesta.</th></tr>
<tr><td>P1, P2, P3, P5, P8 y P9</td><td>Apuesta a un patinador</td><td>P1: “porque es más rápido”
P2: “porque el que partió en la pista 3, va a ganar”
P3: “Porque va ganando”;
P5 y P8 no justifican.
P9: porque (el que partió en la pista 3) es el más rápido.</td></tr>
<tr><td>P6 y P7</td><td>Apuesta a 2 patinadores</td><td>P6: “van en la delantera”.
P7, apostando a los patinadores que partieron en las pistas 1 y 3 escriben: “porque el (patinador 4) se cayó”.</td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="2">Las informaciones proporcionadas por el video produjeron disminución en la apuesta sin riesgo. En este tipo de apuesta, dos de nueve parejas apuestan con incertidumbre, dos parejas de 7° no explican su apuesta, una pareja de 6° explica de forma categórica y 3 parejas (2 de 7° y 1 de 8°) se basan en el desarrollo de la carrera para apostar.
Las apuestas de alto riesgo se basan principalmente en las informaciones que ven en el vídeo, 7 de 16 parejas consideran este criterio para</td>
</tr>
<tr>
<td>En 6° se actualizaron las apuestas y se encontaron las explicaciones siguientes:
<table>
<tr><th>Pareja</th><th>Tipo de apuesta</th><th>Explicación de la apuesta</th></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

15. Le apostamos a tres competidores porque estos son los más seguros que ganen y el otro se quedó muy atrás.

16. Le apostamos a tres competidores porque son los que van más adelante

Actualización de apuesta sin riesgo equitativa.

17. Le apostamos a todos porque igual no sabemos cuál va a ganar.

Actualización de la apuesta sin riesgo con preferencia a un(os) competidor(es)

18. Le apostamos más a unos competidores porque van más adelante y a los otros menos porque no

P3	Apuesta equitativa	P3: “creo que va a ganar”.
P1, P4 y P6	Apuesta a un patinador	P1: “porque va el primero” P4: No justifica. P6: “porque va primero y confió en él”
P5 y P8	Apuesta a dos patinadores	P5: “porque puede que ganen” P8: “porque lleva la cabeza”
P7 y P9	Apuesta a cuatro patinadores	P7: “Porque el (que partió en el carril) uno va a ganar” P9: “Porque creemos que gana”.

En 7° básico se actualizaron las apuestas y se encontraron las explicaiones siguientes:

Pareja	**Tipo de apuesta**	**Explicación de la apuesta**
P2, P3, P6, P9	A un patinadores	P2: Estamos casi seguros. P3: porque creemos que va a ganar. P6: Porque esperamos que gane P9: Porque va ganando
P1, P4, P5,	A dos patinadores	P1: Tienen más fuerza en los pies. P4: Tenemos confianza en ellos. P5: Porque son unos de los más

explicar su apuesta. Una pareja de 5° y otra de 7°, apuestan en forma categórica, 3 alumnos de 7° apuestan con incertidumbre y una de 8° por confianza. Dos parejas de 5° y una de 6° no explican su apuesta.

En la apuesta de mediano riesgo 10 parejas de 15 se apoyan en las informaciones obtenidas al ver el video, una pareja de 7° explica en forma categórica su apuesta, una pareja de 6° y otra de 8° explican con incertidumbre. Una pareja de 7° deposita su confianza en su apuesta y otra no justifica.

En la apuesta sin riesgo 3 de 9 parejas apuestan sabemos qué puede pasar más adelante.

P7, P10, P11		rápidos. P7: Porque el dos se cayó y el 4 va último. P10: Porque se lastimo (uno de los patinadores se cayó durante la competencia y P10 apuestan al 2º y 4º patinador) P11: No justifica.
P8, P12, P13, P14	A tres patinadores Apuesta sin riesgo	P8: no justifica P12, con preferencia al primer patinador, no justifica P13: Porque lo encontramos rápido. Con referencia al patinador 4 P14: Porque van todos parejos y el 3 se cayó.

En 8° se encontraron las explicaciones siguientes:

Pareja	**Tipo de apuesta**	**Explicación de la apuesta**
P9	Apuesta equitativa	P9: Porque van empatados
P1. P2, P7	A un patinadores	P1: Saco ventaja. P2: Por confianza. P7: Es más rápido.
P3, P4,	A dos patinadore	P3: Porque van empatados. P4: Porque se mantiene.

considerando el desarrollo de la carrera (2 en 7° y 1 en 8°). Una pareja de 6° explica en forma categórica su apuesta, dos parejas de 6° explican con incertidumbre y otras dos parejas de 7° no explican su apuesta.

P8, P10, P11	s	P8: Porque el 4 quedo atrás. P10: ya empezaron a alejarse. P11: Porque creo que alguno de los dos ganará. Refiriéndose a los patinadores 1 y 2.
P5	A tres patinadores	P5: Porque el número cuatro fue el ganador anterior.

La síntesis de resultados de la segunda actualización de la apuesta, E_3, se consigna en la tabla 72, recperada de la página 468.

Etapa 3	Apuesta de alto riesgo				Apuesta de mediano riesgo				Apuesta de bajo riesgo				Apuesta sin riesgo				total
	5º	**6**	**7**	**8**	**5º**	**6**	**7**	**8**	**5**	**6**	**7**	**8**	**5**	**6º**	**7**	**8º**	
Se apoya en datos	**3**	**2**		**2**	**2**	**1**	**3**	**4**							**2**	**1e**	**20**
Suposición	**1**		**1**				**1**							**1**			**4**
Fetiche																**1**	**1**
Incertidumbre			**3**			**1**		**1**						**1e** **1**			**7**
Por confianza				**1**			**1**										**2**
No justifica	**2**	**1**					**1**								**2**		**6**
Sin interpretación																	
Total (1)	**6**	**3**	**4**	**3**	**2**	**2**	**6**	**5**						**3**	**4**	**2**	**40**
Total (2)	**16**				**15**								**9**				

31 Apuesta con riesgo 9 Apuesta sin riesgo

Esta tabla muestra que en E_3, los alumnos apuestan de acuerdo al criterio “se apoya en los datos”, también apuestan con incertidumbre, materializada principalmente en la apuesta sin riesgo y en el criterio depositar la confianza en un suceso que supone algún riesgo, como explicación para decidir la apuesta.

En esta etapa se observa una disminución en las suposiciones subjetivas y la

Los resultados de esta etapa E_3, muestran que tres cuartos de las parejas deciden, en forma informada, la apuesta con riesgo y un cuarto deciden la apuesto sin riesgo.	anulación de apostar a un fetiche, lo que refleja la influencia de la información en la toma de decisiones.

5.2.4 Situación cuatro: Un juego especial de dados.

Se propone a los alumnos un juego de dados en las primeras tres etapas y un trabajo en grupos de cuatro alumnos y discusión en la etapa cuatro.

La situación es adidáctica, el juego es en parejas y se ponen en juego las etapas de acción, formulación y validación.

Para cada etapa, se presentan respuestas previstas, desarrollos y expresiones reales de los alumnos, consignadas en una tabla de tres columnas. En la columna ‘análisis a posteriori’ se han colocado números árabicos para identificar las respuestas de los alumnos al momento de analizarlas, comenzando en 1 en adelante, en cada etapa del juego.

Etapa 1: Elección del dado.

Análisis a priori	Análisis a posteriori	Confrontación
Se prevé que los más pequeños elijan el dado de acuerdo al color preferido, en cambio los más grandes podrían elegir dados fijándose en los números de las caras. Otra decisión podría ser elegir los dados al azar. En esta primera etapa podrían emerger las primeras estrategias para ganar. - Elegir el dado al azar - Elegir el dado más bonito. - El que tiene números de buena suerte - El que tiene números más grandes.	En 5ª bàsico se encontraron las siguientes estrategias de elecciòn: 1. Lo hicimos asi, (muestra con sus manos juntas como revuelve los dados para elegir al azar), y el que sale, con ese jugamos 2. Yo elegi el dado al cachipun. 3. Elegí el verde porque da buena suerte. 4, El azul porque tiene 4 más veces. En 6ª básico se encontro lo siguiente: 5. El que salio salio nomás. 6. Vi el numero más grande que habia en el dado y ese eligio. P ¿Esa seria una estrategia para ganar? 7. Si 8. “es trampa, esa seria una trampa” 9. Yo tambien elegi el que tenia los mismos numeros, (dado amarillo). Lo elegi porque tenia la posibilidad de quedar empate, ganar o perder.	En esta etapa la situación objetiva S_{-3} esta centrada en la elección del dado. Los alumnos interactúan con el medio material (M_{-3}, p. 275), que son los dados y las cartillas de juego. En todos los niveles las estrategias para elegir el dado son: Elige al azar o el dado que contiene al 6 en dos de sus caras. Estas decisiones concuerdan con lo previsto en el analsis a priori, También lo eligen por el color (10) y por supersticiòn, da buena suerte, en 7º básico. Por otra parte algunos alumnos de 7°, han advertido que el juego es de estrategia y otros que es de

	En 7ª básico se encontro: 10. A12 y A17 "Lo elegí porque me gusta el verde". 11. A3 "Elegí el dado que tenía más probabilidad de ganar que el otro y después es a la suerte". 12. A7 "al azar". P ¿cómo es el juego? 13. A16 "es de estrategia" Algunos niños dicen nooo P ¿cuál sería tu estrategia para ganar? 14. A12 el dado que tenga mayor altura de números y… saber tirarlos. 15. A3 "¡de la pura suerte ganamos!". 16. A9 "Es un juego de suerte. Como caiga el dado es de suerte no más" Las estrategias: I. El juego es de estrategia, o sea se puede hacer un plan para ganar. II, El juego es de suerte o sea no sabe si va a ganar o no (cualquiera puede ganar)	azar, lo que se consigna en las respuestas 13, 15 y 16. Desde el punto de vista teórico el juego constituye una situación objetiva (S_{-3}) y los alumnos interactuan con un medio material (M_{-3}). En esta etapa, algunos alumnos han realizado un pequeño análisis sobre el juego, evidencia de ello son las repuestas 4, 9 y 14, alumnos de 5°, 6° y 7º básico respectivamente.

	III. El juego es de probabilidad, como el juego de la ruleta, en el Monticcello.	
	En 8ª básico se encontraron las siguientes elecciones: 17. Saco un dado cualquiera. 18. Elegí el que tenía el número mayor. 19. A9 Elegí el rojo porque sabía que iba a ganar.	

Etapa 2: Formular estrategias para elegir el mejor dado para ganar.

Análisis a priori	**Análisis a posteriori**	**Confrontación**
Se prevén las siguientes estrategias: - Elegir el dado ganador en el set anterior. - Elegir el dado que tengan al 6 en algunas de sus caras. - Elegir el dado que tiene más veces un número mayor (4, 5 o 6) en sus caras.	En 5ª bàsico se han encontardo las estrategias siguientes: 1. Tirar el dado arrastrandolo 2. Elegir el dado verde" Porque da buena suerte". 3. Elegir el dado verde porque tiene los números más grandes". 4. Elegir el azul porque tiene más cuatros y le	La estrategia 1, no fue prevista ya que el dado tiene que rodar, según las reglas dadas. Los alumnos se encuentran en una situación llamada de referencia S_{-2}, la que se ha centrado en explicar la elección

	gana al dos del dado verde”.	del dado. En esta situación el medio ha evolucionado, permitiendo a los alumnos comunicar sus estrategias de selección. Las estrategias formuladas fueron previstas en el análisis a priori. Para unos alumnos esta elección está relacionada con la suerte y para otros depende de un pequeño análisis sobre las caras de los dados. El razonamiento de A18 (de 7°) es analítico y le ha permitido tomar decisiones prematuramente en relación al resto de sus compañeros. El curso escucha las explicaciones de A18 y algunos alumnos obtienen información relevante que eventualmente podrían utilizar o no, en las
	Las estrategias en 6° básico son: 5. Que el dado tenga los números mayores. P Y ¿es seguro que se gana así? Algunos alumnos: Noo 6. Porque el dado tiene también números más pequeños” 7. Elegir un dado que tenga los números más grandes, más veces”. 8. Elegir el dado amarillo. 9. Elegir el dado al azar, es como lo más justo”. P, ¿con esa regla tienes más posibilidades de ganar? Algunos alumnos: Síii Otros alumnos: Noo 10. A veces no y a veces si.	
	7° básico: ¿hay alguna estrategia para ganar el juego?, algunos responden 12. A9 “da lo mismo con que dado jugar, menos	

	con el 3 (dado amarillo) que es más complicado". 13. A7 "El juego es de suerte" 14. A18 o sea "no hay estrategia para ganar" 15. A25 la estrategia es elegir el dado con probabilidad de ganar y después es a la suerte. 16. A18 "la cosa no es sacar el que tenga el mayor número, porque por ejemplo el verde tiene más 2 que 6 entonces es menos la probabilidad de que salga 6. Entonces escoger los que tengan más números mayores …entonces la estrategia sería queee no hay que guiarse por el mayor sino que por el que tenga más (veces) números grandes en el dado" P ¿Elegirías el dado verde? 17. A18 "No, porque yo jugué con el verde y A14 con el rojo y a mí siempre me salió el 2 entonces es menos probable que llegue a salir 6.	siguientes etapas. En el análisis a priori no se previo, para esta etapa, un análisis tan profundo y se ve que este alumno se ha anticipado a develar parte importante de la estrategia general para ganar. En este caso A18 se encuentra en una situación de validaciòn. Los alumnos se situan en el nivel -2 en la situación, llamada de referencia S_{-2}, la que focaliza el conocimiento previsto. El medio M_{-2} ha evolucionado, permitiendo a los alumnos formular estrategias ganadoras y a A18 a anticiparse al análisis del juego.
	En 8ª básico aparecieron las estrategias siguientes. P: ¿Hay alguna estrategia para ganar?, son: 18. A21 y A15: la suerte. 19. A14 y ocho compañeros más: elegir el dado	Los niños de 10 y 11 años también realizan análisis sobre la composición numérica de los dados, lo que se constata en las

	con el número más alto. 20. A1 y cinco compañeros más: Escoger el dado que tiene el dos y el seis Estas estrategias se escriben en la pizarra. I. A15 "Elegir el que tiene el 2 y el 6 (dado verde). II. A2 "elegir el dado con el que le gane a mi compañero". A7 "elegir el dado que tiene números mayores que el dado que eligió el otro compañero.	respuestas 4 y 7, expresadas en un lenguaje más sencillo, directo y categórico.

Etapa 3: Explicar las posibilidades de ganar o perder, frente a su contrincante.

Análisis a priori	Análisis a posteriori	Confrontación
Se prevén justificaciones con argumentos del tipo: - Me gano porque tiene buena suerte. - yo gane porque elegí el dado verde y él el dado azul. Le gane porque el verde me salió el 6 varias veces y después me salió el dos y a él le salía casi siempre el 0.	En 5ª básico se encontraron las explicaciones siguientes: 1. Yo jugue con el dado verde y le gane a A10, que jugo con el dado rojo. 2. Jugué con el dado verde y A16 con el amarillo y el me gano". 3. Allunos alumnos; Si, si el amarillo le gana al verde. 4. Pero yo jugue con el amarillo y mi	Estas explicacones provienen de los resultados generales obtenidos en los sets jugados, lo que concuerdan con lo previsto en el análisis a priori, En 5ª básico Las explicaciones son concretas y se basan en los resultados obtenidos.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">- Yo le gane porque elegí el rojo y a él le salió a la suerte el amarillo. A mí me salió más veces el 5 así es que le gane porque e él siempre le salía el 3. Pero también pude haber perdido porque si me salía más veces el 1 yo hubiera perdido.
Así, jugando, los niños se dan cuenta de que un dado tiene más, menos o igual posibilidad de ganarle a otro.</td>
<td>compañero con el verde y perdí.”
P pregunta a A9 y a A16 ¿Por qué perdieron? Ellos responde:
5. A9 porque casi siempre me salio el dos y a A10 el 5.
6. A15 “porque me salio mas veces el dos y a A16 siempre le salio el 3”
P ¿como es el juego?
7. El juego es de fortuna.
8. Es de suerte y mala suerte.</td>
<td rowspan="2">En 6ª bàsico se aprecian análisis basados en las caras de los dados que eilgen para jugar y se aprecia que la argumentación es más precisa que en 5º básico, sin embargo existe un cierto nivel de concretitud en las respuestas.
En las explicaciones de los alumnos de 7º básico aparece la palabra probabilidad como argumento para explicar los juegos ganados o las oprtunidades de ganar, en más oprtunidades que en 6º básico.
Esta palabra aparece aquí en el contexto de posibilidad u oportunidad, de ganar el juego. Es decir tiene un sentido semántico y no calculatorio.
La explicaciòn 25, al parecer reflejaría un intento de generalización en este nivel. Las</td>
</tr>
<tr>
<td>En 6ª básico se encontraron las explicaciones siguientes:
9. A12 Yo jugué con el dado rojo porque tiene tres veces el 5, o sea más veces que el verde que tiene el 6 solo dos veces. En el dado azul el 4 aparece más veces que el 5 pero el 5 le gana al 4 por eso elegí el rojo.
10. A8 Yo jugué con el rojo y A7 con el azul. Si, a mí me salió más veces el 4 y a A7 le salía y le salía el 1 y no me pudo ganar.
11. A7 “síi, tuvo mucha suerte”.</td>
</tr>
</table>

	12. A15 Yo gane porque mi dado tiene un número que es mayor que el número que aparece más veces en el verde o sea que el 2”. 13. A14 si a mí me salió pocas veces el 6 y por eso no le pude ganar. P ¿alguien gano con el dado amarillo?”. 2 alumnos levantan la mano. 14. A5 dice: “A6 me gano con el dado amarillo. Yo jugué con el dado verde y casi siempre me salió el 2. El 6 sale pocas veces pero cuando sale le gana a todos”. 15. A6 dice “si yo gane porque mi dado tiene un número que es mayor que el número que aparece más veces en el verde o sea que el 2”. P pregunta a A6, y ¿por qué elegiste el dado amarillo? 16. A6 “Porque A5 saco el verde primero”. P pregunta a A5 ¿Por qué elegiste el dado verde? 17. A5 “Porque tiene el 6 y el 6 le gana a todos” P pregunta al curso “niños ¿Cómo es el juego?” 18. Varios alumnos responden es de suerte.	expliaciones 32 y 33 reflejan que un alumno elige un fetiche, con la creencia que podrian ganar. La respuesta 34 también se relaciona con un fetiche pero además realiza un análisis de las caras de los dados mediante el cual concluye que el juego es al azar. En esta etapa se encontró evolución en los conocimientos intutivos de los alumnos, lo que se evidencia en los tipos de argumentaciones ofrecidos para responder a esta tarea. Desde explicaciones concretas apoyadas en los resultados de los juegos realizados (en 5° y 6° básico) hasta explicaciones que dan cuenta del analisis que considera la constitución numérica de los dados. Es decir cuantos números mayores y menores hay en cada

		dado y la probabilidad (en términos de posibilidad) de ocurrencia de cada uno de ellos. Los alumnos se encuentran en una situación de aprendizaje, que se anota S_{-1}, se han dado cuenta que hay dados que tienen más probabilidad de ganar que otros y que el juego es de azar. En la fase de validación, los alumnos se apoyan fundamentalmente en la acción. Las devoluciones de la profesora permiten que los alumnos profundicen en sus respuestas sobre la naturaleza del juego: es al azar pero también hay estrategias para aumentar la probabilidad de ganar. Observación: Se toma la decisión
	En 7ª básico se obtuvieron las siguientes explicaciones en la puesta en común: P ¿Creen que eligieron el mejor dado para jugar?, se produce la siguiente interacción: 19. A7 "Sí, jugué todos con el verde" 20. A8 "A7 me ganó cuatro veces esa es la prueba". P ¿Qué significa que sea el mejor dado para ganar? 21. A7 "que tenga más probabilidad de ganar porque tiene más 2 que 6" 22. A9 "mi mejor dado es el rojo porque tiene tres 1 y tres 5 y el azul tiene más 4, pero este (dado rojo) tiene al 5 que es mayor y tiene la misma probabilidad de salir que el 1 entonces al tirar el dado como los números son más pequeños [7] entonces va a ganar el rojo. 23. A21 el rojo es el mejor dado porque tiene 3 (unos) y 3 (cincos) y cada uno tiene la misma	

[7]Se refiere a que los números menores en las caras de los dados verde, amarillo y azul son menores que 5.

	probabilidad y son los números más grandes que todos los otros dados. 24. A23 “el mejor dado es el amarillo porque (el 3) es mayor que los números menores de los otros dados” 25. A30 “Es que depende del dado que elija el contendor”. 26. A25 “yo gane con el rojo al azul”. 27. A24 (que es el contendor) “me gano porque tiene suerte” 28. A18 “yo jugué con el amarillo y le gane al verde, porque en el verde tiene más probabilidad de salir 2 que 6. … 29. Elegí el amarillo porque a cada rato le gane con el amarillo” 30. A14 “yo jugué con el azul porque tengo más probabilidad de que me salga 4” P pregunta: Y el dado azul, ¿le gana a todos los demás? 31. A14 “depende porque los otros tienen más números más bajos que este (el 4), así es que puede ganarle a los demás.	didáctica de no realizar esta actividad en 8° básico porque se la considerara en una etapa posterior, como parte de las tareas del análisis del juego, en la etapa 4.

	32. A12 “yo no lo elegí por los números, lo elegí porque me gusta el verde. P “Tú crees que el color te da más posibilidades de ganar? 33. A12 “yo creo porque igual el verde tenía el 6, porque si en el rojo me sale 1, el verde igual va a ganar. Así que igual me fije en los números. 34. A17 “yo elegí el verde porque me gusta el color, además tiene el 6 y a veces sale más el 6 que el 2 porque el juego es de azar”.	
	8ª básico Esta etapa no se realizó en este nivel.	

Etapa 4: Elaborar un procedimiento para calcular la probabilidad de ganar de dos dados que compiten.

Para esta etapa se proponen 3 tareas.

Análisis a priori	Análisis a posteriori	Confrontación
T1: ¿Cuál es el mejor dado para ganar? Se prevé argumentaciones del tipo: El mejor dado para ganar es el	En la puesta en común se encontraron de 5ª básico aparecieron las siguientes respuesta para T1. La respuesta de la mayoria de los alumnos fue:	Para los alumnos de 5° basico el mejor dado para ganar es el verde. El argumento principal es la experiencia que han tenido

<table>
<tr>
<td rowspan="2">amarillo. Porque si mi compañero juega con el verde entonces yo tengo más posibilidades de ganarle. Sí, a mí siempre me va a salir tres y él tiene más posibilidades que le salga dos. Entonces yo gano. El que juega con el dado amarillo tiene más posibilidad de ganar al que juega con el dado verde.

En términos más generales:
El mejor dado para ganar es el verde. Porque si un compañero A elige el dado verde y otro compañero B el dado azul entonces A tiene más posibilidad de ganar porque si en el dado verde sale 6, le gana completamente al dado azul pero además también gana A cuando al verde le sale 2 y al azul le sale el 0”.
Así ‘A’ podría ganar 12 veces cuando sale el 6 y podría ganar 8 veces cuando le sale el 2.</td>
<td>“el dado de color verde”, “porque el verde tiene el 6, que es el máximo número”.
Algunos alumnos declaran sus conclusiones:
1. A20: El verde tiene el 6 y el 2 y con tal que lo tires bien, puedes sacar 6.
2. A21: “yo creí que era el rojo. … porque el rojo tiene el 5 más veces que el dado verde tiene el 6. Pero ahora no, ahora creo que es el verde.
En la puesta en común, G1 y G6 declaran:
3. G1: “el 2 sale en pocas veces por eso el verde tiene mayor posibilidad”,
4. G6 Te sale el 6 (en el dado verde) y en los demas (dados) no”.
Los grupos G2, G3, G4, G5 y G7 coinciden en señalar que “el dado verde porque tiene números más grandes.</td>
<td rowspan="2">jugando con él.
Claramente este argumento es concreto y les hace suponer que el dado verde tiene más posibilidad de ganar, porque en su juego el 2 ha salido pocas veces, G1 en (3), y además conciben que se puede controlar la forma de lanzar el dado “con tal que lo tires bien, puedes sacar 6”, A20 en (1).
G2 y G3, en las respuestas 6 y 7, han apreciado que algunos dados tienen mayor probabilidad de ganar que otros. Ellos realizan un análisis considerando las posibilidades de ocurrencia de las dos caras distintas de cada dado y además que el dado tenga los dígitos mayores.
Para G3, 6° básico, en la respuesta 7, aparece la idea que el mejor dado para ganar depende</td>
</tr>
<tr>
<td>En la puesta en común de 6ª básico aparecieron las siguientes respuesta T1:
5. G1: Todos tienen la misma posibilidad de ganar, porque nunca se sabe quién va a ganar. Hasta ahora va ganando el verde (el grupo juega</td>
</tr>
</table>

	nuevos sets para determinar el mejor dado para ganar). 6. G2: El dado verde porque tiene más posibilidad que caiga el dos pero el 6 igual cae. Con el dado verde y el rojo se puede ganar más veces porque tienen los números más altos. 7. G3: El dado rojo porque tiene más posibilidades de salir 5 porque se repite más veces. Además depende del dado que elija la persona porque "*si ella elije rojo yo elegiría amarillo porque es el que tiene mayor cantidad de caras con 3, porque el dado rojo tiene tres caras con uno*". 8. G4: Cualquiera porque todos tienen la misma posibilidad, también como lo lancen o como lo escojan porque todos los dados pueden ganar depende de la suerte o la probabilidad o también si lo tira rápido o lento. El celeste lo encontramos el mejor dado con el 40% de ganar, después el amarillo con el 30% después el verde con el 20% y el rojo con el 10%.	de la elección del contrincante, lo que es la clave del juego. G1 y G4, en las respuestas 5 y 8 respectivamente, no han apreciado que hay dados con mayor probabilidad de ganar que otros. Para los alumnos de estos grupos el juego es de equiposibilidad. Sus respuestas hacen suponer que los niños piensan que los dados de este juego son corrientes. G4 identifica diferentes factores, los que atribuye a la equiposibilidad. Como se lance el dado, como se escoja el azar. Al parecer la distribución porcentual declarada por G4, está más bien centrada en los resultados de los juegos realizados, evidenciando una falta de análisis de la distribución de los

	7° básico: 9. G1: el azul porque tiene mayor cantidad de números altos. 10. G2: Gana el dado verde al azul porque tiene números más grandes. 11. G3: va a ganar el dado azul porque el dado azul tiene 4 caras de 4 y 2 de 0 y el verde 2 de 6 y 4 de 2 12. G4: El azul porque tiene cuatro lados de 4 y el verde tiene dos lados de 6. 13. G5: El azul porque tiene mejores números y porque tiene números más grandes. 14. G6: Para nosotros el mejor dado es el verde porque creemos que es el mejor dado para ganar. 15. G7: Gana el dado azul porque en el dado azul se repite más el número mayor.	números en las caras en los dados. En 7° y 8° se aprecia que la mayor parte de las respuestas están basadas en el análisis de las caras de los dados. Particularmente la respuesta de A3, en 20, “hay que elegir el dado de acuerdo a lo que el contrincante eligió”, refleja otro nivel análisis, el que se relaciona con eventuales juegos futuros y por lo tanto estas argumentaciones tienen carácter de probabilísticas. Las explicaciones son analíticas y en algunos grupos emerge de manera incipiente la probabilidad como una posibilidad de ganar.
	8ª básico: 16. A3 “yo gane con el celeste” 17. A5: “yo jugué con el amarillo. Lo elegí porque el celeste tiene cuatro 4 y dos 0. 18. A7 y A8 “no siempre se ganará en el dado	

	verde con el amarillo”. 19. A11 “el amarillo es el mejor dado para ganar”. 20. A3 “hay que saber escoger el dado, fijándose en el dado que tomó el otro”. **P:** ¿cuál dado tiene más posibilidades de ganar y por qué?, los grupos responden: 21. G1. Hay más posibilidades con el dado azul porque hay más 4 y dos ceros. 22. G2. Es más fácil ganar con el verde así se le puede ganar al rojo. 23. G3. El dado de número rojo porque tiene al 5 y hay más posibilidades de ganar. 24. G4. El verde porque tiene el número mayor y el número menor no es tan grande ni tan pequeño. 25. G5. El mejor dado es el amarillo porque tiene la misma posibilidad de ganar y perder.	
Análisis a priori	**Análisis a posteriori**	**Confrontación**
Segunda tarea **T2:** si el mejor dado para ganar es el verde ¿cuantas	En 5ª básico no se encontraron respuestas para **T2.**	En general, se observan respuestas que se fundamentan

<table>
<tr>
<td rowspan="3">posibilidades más tiene frente al dado rojo?
Se esperan respuestas obtenidas de las jugadas realizadas, de la elaboración de deducciones lógicas, de esquemas que representen jugadas ganadoras o de los casos posibles del juego.
Por ejemplo:
- El dado verde gana 10 al rojo y el rojo gana 5 veces al verde.
- Por cada una vez que el dado rojo le gana al verde, el dado verde le gana dos veces.
- El dado verde tiene el doble de posibilidad de ganar al dado rojo.</td>
<td>En 6ª básico se obtuvieron las siguientes explicaciones:
1. G1: Los dos dados tienen la misma posibilidad.
2. G2 y G5 no responde
3. G3: El rojo tiene más posibilidad de ganar. Porque el verde tiene solo dos 6 y el rojo tiene más 5, por eso es poco probable ganar con el verde.
4. G4 La posibilidad de ganar es la misma porque como lo lanzo o como lo tiro, porque aunque usted lo tire rápido o lento va a salir igual un número inesperado porque es simple lógica o física.
5. G5 No responde</td>
<td rowspan="3">en los resultados obtenidos, en las representaciones de un juego y también algunas respuestas que son analíticas.
Para algunos alumnos de 6° básico todos los dados tienen la misma posibilidad de ganar, respuestas 1 y 4, incluso esto dependería de la forma en que se lanza el dado. Esta es una explicación que concibe la aleatoriedad del juego, en forma deductiva y experimental, puesto que controlar el lanzamiento del dado da cuenta de una racionalidad determinista.
En 3, G3 realiza un análisis comparativo de la cantidad de caras mayores en ambos dados, el que es insuficiente para justificar que el dado verde tiene ventaja frente al dado rojo, pues solo</td>
</tr>
<tr>
<td>Esta tarea no fue propuesta a los alumnos de 7° básico. En su lugar se la profesora realiza una tabla de doble entrada, con la participación de los alumnos, que da cuenta de las jugadas posibles de dos dados.</td>
</tr>
<tr>
<td>En 8ª básico los alumnos compararon las</td>
</tr>
</table>

	posibilidades de ganar del dado verde en relación al dado azul y se obtuvieron la siguientes explicaciones: 6. G1: "El dado verde pero solo cuando sale el número 6 y no el 2" 7. G2: "el dado rojo porque en hartas posibilidades si te sale el 2 pierdes pero si te sale el 6 ganas pero casi siempre sale el 2". 8. G4, escribe jugadas del set 6662626666 (verde) - 0044000444 (azul), en el que en 9 de 10 lanzamientos gana el dado verde. Al parecer G4 plantea que el mejor dado es el verde, considerando los resultados de jugar un set con el dado verde y el azul. 9. G3: "El azul ganar por tener más el 4 y pierde por tener el 1". 10. G5 no responde.	advierten la cantidad de veces en que aparece el número mayor pero no se los imagina jugando. Ellos no han considerado que cuando en ambos dados aparece el número mayor, el que gana es el dado verde. Tampoco consideran que cuando en ambos dados aparece el número menor el que gana es el dado verde. Si bien es cierto que las explicaciones encontradas consideran el análisis de las caras de los dados, ellas son insuficientes en relación a la solución del problema.

Análisis a priori	Análisis a posteriori	Confrontación
Tercera tarea **T3**: Inventar un esquema que represente todas las jugadas posibles con dos dados, por ejemplo el rojo y el verde. Se espera que los alumnos digan, escriban y representen argumentaciones en forma de esquemas (diagrama de árbol o en una tabla de doble entrada). Formas de representación de resultados posibles: Respuestas previstas: Argumenaciones: “Cuando juega el dado verde con el rojo, el primero tiene 24 posibilidades de ganar. Porque con los dos 6 del dado verde hay 12 posibilidades da ganar al dado rojo. Por otra parte las 4 caras marcadas con dos, en el dado verde determinan, por si solas, 12 posibilidades más de ganar al	5ª básico 1. G3 “es decir el juego es de suerte y de mala suerte”. 2. G4 “cuando lo tiran se darán cuenta que sale más veces el 6”. 3. G5 “porque (el dado verde) tiene números mayores”. 4. En la puesta en común, A25 escribe en la pizarra 4 jugadas de un set (6-1, 2-1, 5-2, 1-2) y algunos alumnos se dan cuenta que otro resultado posible es 6 y 5. No obstante A25 no representa esta jugada en su esquema. 6° Básico. Algunos episodios de la puesta en común. 5. G1: Jugamos 2 sets. … el mejor dado es el verde tiene mayor porcentaje de ganar contra el rojo, el verde le gana. Gana el verde,porque si le sale el 6 y al rojo le sale el 1 o el 5, gana el verde. Y si le sale el 2, al rojo le puede salir el 1”. También hay que saber lanzar bien, si uno lanza bien gana y si no pierde.	El análisis previo plantea que los alumnos construyan representaciones gráficas de los resultados posibles de dos dados que se enfrentan, como tablas de doble entrada o diagramas de árbol. Dado que esto no ocurre, se pone en evidencia que las representaciones de casos posibles de sucesos aleatorios no hacen parte del repertorio de estrategias disponibles de los alumnos de 12 y 13 años, sea porque no las tienen naturalizadas en la enseñanza o porque no las conocen. Lo que es un obstáculo para avanzar de la etapa tres a la cuatro, en la que se espera que estas representaciones ayuden a aproximarse e interpretar de manera intuitiva la probabilidad

dado rojo, sumando, el dado verde tiene 24 posibilidades de ganar al rojo y el rojo solo 12 posibilidades de ganar al verde. Así la posibilidad de ganar del dado verde es el doble que la del dado rojo.

Diagrama de árbol:

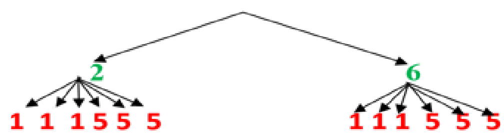


Tabla de doble entrada:

rojo \ verde	2	2	2	2	6	6
1	V	V	V	V	V	V
1	V	V	V	V	V	V
1	V	V	V	V	V	V
5	R	R	R	R	V	V
5	R	R	R	R	V	V
5	R	R	R	R	V	V

6. G3: “el verde porque tiene el número mayor que es el 6”.

7. G5. Miramos los números de los dados y el mejor dado es el rojo.

P: “G1 dice que el verde es el mejor dado”.

A8. : “nooo porque si al rojo le sale el 5 y al verde le sale el 2 obviamente gana el rojo”. “Otro dado que es mejor es el amarillo porque cuando juega con el verde casi nunca sale el 6 y gana el amarillo que tiene 3 en todas sus caras”. Hay poca probabilidad de que salga el 6 porque solo hay dos 6 y cuatro 2, en cambio en el rojo es más probable que salga el 5. En el verde es más probable que salga el 2. Entonces el mejor dado para ganar es el rojo.

8. G4. Comprobamos que el azul era mejor en base a los resutaddos (de los sets anteriroes) y porque tenia muchos 4. Si un compañero elige dado verde nosotros eligiriamos el azul para ganar.

9. A12 “También depende de la probabilidad de que salga “

Laplaciana.

En su lugar, los alumnos han vuelto a dar explicaciones que se apoyan en los juegos realizados y en el análisis de la composición numérica de los dados y estas formarían parte de los conocimientos intuitivos de estos alumnos, frente a la tarea propuesta.

Por otra parte, en esta tarea se observa que los alumnos han profundizado sus análisis, en el tiempo didáctico de la clase.

Frente a la descripción de la representación de A25, de 5° básico en 4., se puede suponer que en sus ensayos no le salió dicha jugada o tal vez no acepta lo que dicen sus compañeros porque para el estarían todas las jugadas.

G1, G2 y G7 no responden.

	P pregunta: y ¿cómo calculas esa probabilidad? 10. A12 “No hay forma, se calcula lanzando”. 11. A8 “Es aleatorio, o sea que puede salir cualquier cosa”.	En 6° básico aparece una concepción frecuentista de la probabilidad. La respuesta 10 da cuenta de este hallazgo. En 7° básico los alumnos reproducen resultados posibles del juego de dos dados, en tablas de doble entrada, procedimiento planteado previamente por la profesora, al constatar que, en otros niveles, este procedimiento no emergió espontáneamente. En 8°, claramente estas respuestas no responden a lo solicitado. Lo más parecido a una representación de resultados es una tabla de caras del dado azul y verde, realizada por G4, la que no corresponde a los solicitado.G4: Representa en una tabla las caras del dado verde y el azul.
	7ª básico. 12. En relación a la tarea: “Inventar un método que muestre las posibilidades de ganar que tiene el dado verde frente al dado azul”, la profesora decide desarrollar una tabla de doble entrada de los resultados posibles para estos dados. Esto considerando que en los otros niveles esta tarea no ha sido desarrollada ni completada espontáneamente.	
	En 8ª básico, frente a esta tarea los alumnos se muestran confusos y manifiestan no saber cómo responder. 13. Por ejemplo A15 de G3 dice “No entiendo lo que hay que hacer en toda la hoja”. Las respuestas encontradas en las hojas de trabajo, de los grupos G1, G3 y G4 sobre este	

punto, son las siguientes:

14. G1: “Que cada vez que tire salga un número alto”.

15. G3: “Solo es cuestión de suerte”

16. G4: Representa en una tabla las caras del dado verde y el azul.

Azul	Verde
4 - 0	6 – 2
0 - 4	6 – 2
4 – 0	2 - 6
4 – 0	6 – 2
0 - 4	6 – 2

CAPITULO 6: CONCLUSIONES Y PROLONGACIONES

6.1 Conclusiones

El propósito de esta tesis ha sido identificar los conocimientos intuitivos sobre probabilidad que emergen en los alumnos de 10 a 14 años, las características de la probabilidad que pueden reconocer en las clases de matemática y la evolución del razonamiento probabilístico cuando ellos son enfrentados a las situaciones de incertidumbre propuestas.

Se trata de un estudio psicogenético que intenta pesquisar lo que estos alumnos pueden percibir y realizar, en relación a la noción de probabilidad, en los niveles de 5° a 8°, con la finalidad de proyectar los resultados obtenidos en adecuaciones curriculares que consideren los conocimientos y experiencias reales de los niños para la enseñanza de esta noción en este segmento de edad.

A objeto de conocer e identificar la evolución de los conocimientos intuitivos de incertidumbre y probabilidad de los alumnos, se han diseñado 4 situaciones con un medio pertinente, cada una.

Las preguntas de investigación y los objetivos de la tesis, se abordan desde la perspectiva descriptiva interpretativa, de acuerdo a las nociones de la TSD y otros estudios afines, como los psicogenéticos en términos Piaget y los epistemológicos entre otros.

Durante la ejecución de la secuencia didáctica, se presentaron dos hechos didácticos, uno relacionado con la situación de las apuestas y el otro con el juego de dados. Al respecto, solo 3 parejas de alumnos de 10 años, realizaron apuestas en la tercera etapa de la “Carrera en el hipódromo”. Al parecer influyó la rapidez con que se desarrolló esta situación y los alumnos no tuvieron tiempo de organizarse para volver a apostar. Este factor no fue previsto en el análisis a priori. Afortunadamente la relación didáctica se restituyó en el desarrollo de una nueva apuesta y en la gestión de la clase se consideró el tiempo de organización de los alumnos. Además la investigadora animó a los niños a realizar nuevas apuestas, dada la importancia que tenía para esta tesis, como para restituir el contrato didáctico.

La situación cuatro, proponía “Un juego especial de dados” (dados originales de colores, no convencionales), que se desarrolló en cuatro etapas. Particularmente, en la etapa 4 la tarea propuesta era elaborar un procedimiento para visualizar los casos posibles en los juegos. En el análisis a priori se esperaba que los alumnos realizaran una tabla de doble entrada o a un diagrama de árbol, pero estas representaciones no emergieron en la experiencia, en ninguno de los niveles.

Por lo tanto se manifestó una ruptura de contrato que puso en evidencia que los alumnos no tenían las herramientas para realizar esta tarea y pedían a la profesora - investigadora que explicará cómo resolver el problema.

En consecuencia este hallazgo es un obstáculo epistemológico, puesto que en el S XV aparecía este fenómeno en los juegos de dados y actualmente vuelve a aparecer en las actividades propuestas, en este estudio y también en la enseñanza de la probabilidad (programas y textos escolares).

Se sugiere entonces que en la escuela se propongan situaciones con el objeto de practicar experimentos y actividades que conduzcan a representar gráficamente los casos posibles en un contexto aleatorio.

Un ejemplo de situación, la cual permitiría el conteo de casos posibles, es el siguiente problema, combinatorio.

Javiera tiene en su clóset 2 blusas, una amarilla y otra roja y además 3 faldas, una verde, una negra y otra gris. Si elige una blusa y una falda,

Explica la formación de las tenidas, con palabras o dibujos.

¿Cuántas tenidas diferentes puede elegir?

Por otra parte, algunos alumnos emplearon la manera de resolver ya utilizada en las etapas 1 y 2, de este juego. Por lo tanto se encontró el fenómeno, llamado, “la edad del capitán”, reportado ya en la literatura, Chamorro (2003).

En el desarrollo de la investigación se encontraron dificultades en relación con la forma de organizar la información recogida. Estas fueron resueltas codificando la información, en respuestas con incertidumbre y respuestas sin incertidumbre, proporcionando elementos: de análisis de las producciones de los alumnos y de profundización de las preguntas de investigación y los objetivos planteados en la tesis.

Los resultados del análisis a posteriori, en general, resultaron ser coherentes con lo esperado en el análisis a priori, la confrontación de estos análisis, ha dejado en evidencia la presencia de conocimientos intuitivos de los alumnos sobre la probabilidad, los que se expresaron en argumentaciones que contenían incertidumbre y una evolución psicogenética de los conocimientos, con algunas excepciones (8º básico), que plantearon un fenómeno didáctico para investigar a futuro.

En este capítulo se presentan cuatro apartados. El primero relacionado con el análisis del currículo, el segundo con el análisis de los textos escolares, el tercero relacionado con las preguntas de investigación y el cuarto conclusiones generales de la tesis.

6.1.1 Los programas de estudio.

El análisis realizado al currículo escolar pone en evidencia una práctica de naturaleza ostensiva, pues las orientaciones didácticas sugieren a los profesores actividades formuladas en términos de instrucciones que develan características del enfoque conductista. Por tal razón las actividades propuestas no colocan al alumno en posición de poner en juego procedimientos personales de resolución.

Así se observa que la propuesta curricular, propone medios didácticos, los cuales permitirían a los alumnos anticiparse a la respuesta esperada.

El programa de estudio de 5° básico, sugiere que las expresiones: seguro, posible e imposible caractericen a la incertidumbre, pero en el lenguaje de los niños pueden existir otras palabras, tales como a la chuña, a la suerte, que ellos utilizan ante situaciones de incerteza. Estas palabras, no han sido consideradas en el currículo.

La simplificación de las preguntas planteadas, en algunos ejemplos de actividades, sugeridos por los programas de estudio han logrado crear, por una parte una reducción de la actividad del alumno, la que se pone en evidencia en, una respuesta inmediata que no necesita el análisis de los datos para responderlas. Por otra parte, el programa de 6º básico, sugiere al profesor planificar la enseñanza con actividades que podrían exceder los conocimientos que los alumnos tienen para resolverla, como es el caso representar en diagrama de árbol los resultados posibles en el lanzamiento de dos dados.

De este modo las actividades propuestas comprenden medios insuficientes para que los alumnos aprecien las características y propiedades de las nociones de aleatoriedad y de probabilidad. Particularmente la noción de aleatoriedad se la describe mediante la incertidumbre de los sucesos, adquiriendo un estatus de conocimiento herramienta es decir es una noción paramatemática.

En cuanto a la noción de probabilidad, se produce una confusión en la relación entre la probabilidad clásica y la probabilidad experimental puesto que los medios gestionados en las actividades sugeridas, experimentos de lanzamientos de dados y monedas, son insuficientes para que los alumnos alcancen a percibir la relación entre la frecuencia relativa y la probabilidad de uno de los sucesos, lo que concuerda con lo encontrado por por Henry y Henry (1996) con relación a la descripción de los programas de estudio franceses de la etapa licée.

Por otra parte, las actividades propuestas, bien podrían ser resueltas por la probabilidad experimental como por la probabilidad clásica, lo que produce aún más confusión puesto que los programas no orientan de manera precisa sobre esta doble dimensión.

En este sentido se aprecia que los curriculistas han diseñado esta parte del programa con el supuesto que todos los profesores de enseñanza básica han tenido formación disciplinar en esta área, lo que se aleja de la realidad.

Desde un punto de vista teórico, las actividades propuestas, en los programas de estudio, ponen en juego procedimientos algorítmicos, mnemotécnicos para responder a lo solicitado más que otras fases del aprendizaje cuya riqueza está en el proceso reflexivo y argumental que desencadenan las fases de formulación y validación, de la TSD.

En cuanto a los currículos internacionales descritos, se aprecia una homogeneización, en la forma de enseñar la probabilidad, dado que más temprano o más tarde, los enfoques frecuencial, clásico y axiomático son los presentan mayor relevancia en los trayectos curriculares analizados, además los contextos de enseñanza son analogos, juegos de dados, monedas u otros tipos de artefactos convencionales para enseñar la probabilidad, en la escuela.

6.1.2 Los textos de estudio.

En el análisis de los textos de estudio (2015), se encontró la descripción de conceptos tales como experimento, resultado, frecuencia, frecuencia relativa, espacio muestral, entre otros, relacionados con un cálculo numérico, que aparece asociado a la probabilidad de un suceso. Lo que caracteriza al enfoque conductista, al enseñanzar de la probabilidad.

Sobre estas descripciones se puede señalar que no es suficiente que aparezcan escritas en el texto para que los alumnos les atribuyan el significado escolar que se pretende alcanzar.

También se observa la ostensión en los problemas resueltos, cuyo propósito es ejemplificar el uso de la formula y a la vez constituir un modelo para que los alumnos reproduzcan el procedimiento en los problemas que ellos deben resolver. En estos problemas la utilización de colores, rojo y azul, para representar los casos favorables y los casos posibles en la fórmula, constituye un artificio didáctico que induce el procedimiento y la respuesta del alumno, produciendo un efecto Topaze.

Los problemas propuestos solo favorecen la reproducción del procedimiento presentado en el texto, por lo que la respuesta podría ser decodificada rápidamente por la(o)s alumna(o)s de 10 a 14 años inhibiendo la aparición de procedimientos personales de respuesta. Lo que constata que los medios proporcionados no son desafiantes para el alumno. En términos de Brousseau, el medio no es antagónico.

Por otra parte, el lenguaje utilizado por el texto no se adecua al lenguaje que los niños utilizan, lo que abre una brecha que puede desmotivar seguir estudiando con el texto. Por ejemplo:

> Puedes predecir la posibilidad de los sucesos. Cuando **predices**,
> haces una conjetura razonable acerca de lo que podría suceder.

Texto del estudiante 5°básico, p.286.

Para explicar lo que es predecir a niños de 10 años, se utiliza otra palabra que es aún más difícil de entender a esa edad y el texto propone al alumno que “conjeture….”.

Con respecto a la probabilidad teórica, esta noción es parte de las actividades de quinto y octavo básico.

En ambos niveles se la define a partir de sucesos equiprobables, en 5° utilizando un disco con flecha giratoria, seccionado en partes iguales y en 8° argumentando explícitamente que su uso se restringe a la probabilidad de sucesos equiprobables. En cada nivel la probabilidad teórica, aparece expresada mediante una fórmula como la siguiente:

Modelo de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Esta ostensión se refuerza con letreros que señalan: “El número de resultados favorableses siempre el nuimerdor.el número total de resultados posibles es siempre el denominador”

Al parecer, en estos niveles las nociones relacionadas con la probabilidad adquieren el carácter de herramienta y el uso de estas, se restringe principalmente a problemas en los que se utilizan artefactos aleatorios como dados, monedas, flechas giratorias y bolsas con bolas.

Por otra parte, la enseñanza no plantea generalizar propiedades de la probabilidad, que alumnos de 7º y 8º, estarían en condiciones de efectuar, en paralelo al desarrollo algebraico propuesto en el curriculo. En este sentido el texto carece de la articulación entre las áreas de álgebra y probabilidad, la que debería enriquecer los conceptos básicos de la probabilidad en estos niveles.

Al analizar los experimentos propuestos, considerados como medios didácticos, nuevamente se aprecia el enfoque conductista, dado que en relación a ellos, los textos presnetan una serie de instrucciones que los alumnos deberían seguir: colocar las fichas en la bolsa, copiar la tabla, extraer una bola y anotar su color, etc. y responder preguntas que no proponen al alumno justificar su respuesta, dada la naturaleza de este modelo de enseñanza.

Los experimentos propuestos, plantean la predicción de los resultados motivando al alumno a registrar sus predicciones para compararlas con los resultados experimentales, los que se repiten al menos 30 veces. ¿Será suficiente 30 veces? ¿se producirá sesgo con una muestra de este tamaño?

Las preguntas formuladas en relación a la experimentación pueden dar origen a interpretaciones triviales del experimento, por ejemplo ante la pregunta "¿Cómo se comparan tus resultados reales con tus predicciones? El alumno podría responder que se compara realizando las extracciones, por otra parte se produce un problema de lenguaje en el que algunas expresiones utilizadas en el texto de estudio, no están al alcance de los entendimientos de los alumnos. Por ejemplo ante la tarea Enumera todos los resultados posibles, ¿entiende el alumno de 10 años lo mismo que el autor del texto sobre lo que es enumerar?, ¿no sería mejor plantear que cuenten todos los resultados posibles?

Para algunos alumnos de 10 años las expresiones utilizadas por el texto e incluso las que utiliza el profesor en la clase tienen significados personales diferentes.

Bajo este enfoque, el alumno decodifica la respuesta esperada por el texto, lo que se concibe como el aprendizaje logrado pero en la relación cotidiana del alumno con la probabilidad y la incertidumbre vuelven a aflorar sus creencias personales, las que dan cuenta de razonamientos que pretenden por una parte controlar la incertidumbre y por otra parte no tomar en cuenta los datos estadísticos para calcular probabilidades y tomar decisiones frente a la incertidumbre. Concepciones deterministas que este enfoque, tradicional, no alcanza a modificar, produciendo una ilusión respecto del aprendizaje de estas nociones.

En síntesis se aprecia que los textos analizados, proporcionan medios que no desafían a los alumnos a interactuar con la probabilidad, los que obstaculizan la adquisición de una noción de probabilidad e incertidumbre adecuada al nivel de desarrollo psicocognitivo del alumno, estos medios didácticos no movilizan procesos cognitivos en aprendizajes relevantes para el estudio de esta noción.

También se analizaron los textos de 7° y 8° básico, entregados por el MINEDUC el año 2016, al respecto se puede señalar que estos textos, presentan un enfoque de enseñanza que hace mayor énfasis en el trabajo autónomo de los alumnos en estos niveles, pero a medida que se requieren mayores desafíos de comprensión de los alumnos, la tendencia de los autores es a caer en el enfoque conductista, presentando desarrollos ostensivos.

Los problemas propuestos como también los resueltos se perciben orientados a desarrollar el pensamiento complejo de los alumnos. Por ejemplo, algunos problemas propuestos están clasificados como de análisis y de creación de situaciones, las que corresponden a habilidades cognitivas complejas.

Este último texto, presenta una enseñanza más focalizada en el trabajo autónomo del alumno, mientras que el anterior, utiliza artificios didácticos ostensivos que alertan a los alumnos a poner en funcionamiento los procedimientos considerados en el texto para resolver los problemas planteados y a responder a los solicitado.

Sin embargo, a medida que se requieren mayores desafíos de comprensión de los alumnos, se manifiesta la tendencia de los autores a caer en el enfoque conductista, presentando desarrollos cada vez más y más ostensivos.

En los textos analizados, se han observado enfoques y aproximaciones a la probabilidad comunes, privilegiando el enfoque experimental, el que da origen a la probabilidad frecuentista y el enfoque teórico, operacionalizado en la ley de Laplace.

Por lo tanto, las representaciones que cobran mayor importancia para el currículo y los autores de textos escolares, son las relacionadas con los significados frecuencial y clásico de la probabilidad, en estos niveles.

6.1.3 Preguntas de investigación.

En relación a la pregunta de investigación 1, cada situación, planteó un medio adidáctico pertinente, que permitió observar e identificar la evolución del pensamiento probabilístico intuitivo de los alumnos, de este estudio, configurándose la evolución psicogenética de las concepciones de incertidumbre y probabilidad.

Estos medios desafiaron e interpelaron a los alumnos a responder de algún modo, por ejemplo, en base a sus experiencias reales, así en todas las situaciones los alumnos interactúan con el medio, no solo el de la situación sino también el de sus pares y el de la profesora. Un medio con estas características, Brousseau lo denomina antagónico.

Por otra parte, las diferentes fases gestionadas en las clases produjeron la evolución de la situación y con ello la del medio, el que se identificó con el medio material o evocado, M_{-3}, el medio objetivo M_{-2} y medio de aprendizaje M_{-1}, del modelo de la estructuración del medio..

La situación 1 consideró un medio evocado, denominado El Juego Circular, las preguntas son parte del medio, los alumnos de 5º a 7º básico, identificaron en forma progresiva la naturaleza aleatoria de los sucesos propuestos, a través de frases como “no se puede saber porque …”, “no sabría porque …” o “porque puede pasar cualquier otra cosa”.

El medio de la situación dos (imágenes, historias formuladas, tabla de posibilidades), resultó apropiado, para identificar los conocimientos intuitivos sobre probabilidad y también los conocimientos deterministas de alumnos que interactuaron con sucesos aleatorios, utilizando expresiones categóricas y suposiciones subjetivas, para explicar la posibilidad de ocurrencia.

En esta situación, las consignas determinaron un medio objetivo (M_{-2}) y colocaron a los alumnos en las posiciones de alumno objetivo y alumno de la acción respectivamente, en el sentido de Margolinas (1993), formulando historia de incertidumbre y asignando una posibilidad de ocurrencia a cada una de ellas.

Particularmente, el diseño de las situaciones 3 y 4 determinaron un medio material (M_{-3}). En estas situaciones, la actividad del alumno fue concreta, realizar una apuesta en etapas y jugar a lanzar dados reales. Los cambios de contrato previstos para cada situación, actualización de las apuestas y las fases del juego de dados, y las puestas en común determinaron el medio objetivo M_{-2} y el medio de aprendizaje M_{-1}, respectivamente.

En la situación 3 el medio fueron dos videos de competencias deportivas, $4000 ficticios para apostar y una cartilla de apuestas, en etapas.

Para esta situación el medio adidáctico, apuestas en etapas, fue el motor de la toma de decisiones de los alumnos y el desarrollo de las carreras constituyeron el análisis de sus estados para actualizar los niveles de creencia de los alumnos en relación a sus apuestas iniciales.

Este medio, resultó apropiado, para identificar las decisiones de los alumnos frente a sucesos aleatorios no experimentales y no equiprobable y también la propensión al riesgo de los alumnos, ya que en su mayoría realizaron apuestas de alto riesgo, sea con incertidumbre u otro de los criterios identificados.

En la situación 4 el medio es material y consistió en un juego de dados especiales con sus cartillas de juego. Esta situación, puso en funcionamiento las fases de una situación adidáctica. En este juego los alumnos se dieron cuenta que hay dados con los que hay más posibilidad de ganar que otros y analizaron el juego jugando y también argumentando. Luego realizaron descripciones para explicar cuál es el mejor dado para ganar, relacionadas con los resultados de sus partidos jugados.

La interacción de los alumnos con el medio de cada situación, proporcionó la descripción de los conocimientos intuitivos de los alumnos, en los que han influido los medios de sus pares en las puestas en común y las devoluciones de la investigadora durante el desarrollo de la actividad matemática de los alumnos.

Por otra parte, el modelo de gestión de clases, permitió observar que algunos alumnos produjeron repuestas analíticas ante los datos presentados, mientras que otros respondieron en base a creencias, sin considerar los datos del contexto.

Durante las clases, los alumnos hacían público sus resultados e inferencias a las que habían llegado, reflexionando analíticamente, desde una perspectiva intuitiva, la solución de los desafíos planteados.

En relación a la pregunta de investigación 2, la evolución del conocimiento probabilístico de los alumnos, se manifestó por estados de pensamiento concreto de los alumnos a estados diferentes de pensamiento analítico.

En la situación 1, el conocimiento intuitivo sobre probabilidad, se manifestó en la forma de pensamiento analítico, que algunos alumnos pusieron en juego, al considerar que las reglas del juego eran aleatorias y que por lo tanto 'el juego no tiene orden'.

En particular la naturaleza concreta del pensamiento de los niños de 10 años, se puso en evidencia en la situación "el juego circular", puesto que en sus respuestas se observó un razonamiento determinista ante una situación de incertidumbre.

Por otra parte, ante la presencia de datos numéricos en la formulación de “Si la pelota estuviera en juego 13 veces sin caer, ¿cuántas veces crees que te la lanzarían a ti?, surgieron, en todos los niveles, procedimientos operatorios, irrelevantes para el sentido de la tarea. No obstante, desde el punto de vista del profesor son relevantes pues le indican que es necesario reorganizar el medio didáctico de modo que las eventuales retroacciones previstas, invaliden estos procedimientos.

En las respuestas a la pregunta 3, se ha encontrado evolución en los conocimientos intuitivos sobre aleatoriedad, ya que los alumnos más pequeños, de 10 y 11 años, tuvieron diferencias notables con los más grandes, lo que se constata en el gráfico 3 (p 343.).

En la situación dos, el conocimiento intuitivo sobre probabilidad, se manifestó en la forma de argumentos, en los cuales, los alumnos consideraron diferentes resultados del suceso y elaboraron predicciones sobre sucesos futuros.

Pocos alumnos, 4 y 5 de 20 de 5° básico y 7 de 16 en 6° básico, pusieron en obra un razonamiento de esta naturaleza, esta proceso no es lineal, tiene períodos de avances y retrocesos y, en esta situación, fueron más los alumnos de 7° y 8°, los que presentaron este tipo de razonamiento, el que les permitió examinar la situación en términos de la incertidumbre en cada suceso.

Por ejemplo, “Los tomates van a crecer y ella los venderá” es poco posible porque los tomates los quiebran o roban o crecen en tres meses”, A10, 10 años.

P ¿Elegirías el dado verde para ganar? “No, porque yo jugué con el verde y A14 con el rojo y a mí siempre me salió el 2 entonces es menos probable que llegué a salir 6”. A18, 12 años.

El pensamiento concreto aparece bajo la forma de suposiciones subjetivas que los alumnos agregan como condiciones del desarrollo del suceso, por ejemplo: "*la niña está sentada en una ventana en el campo mirando el paisaje", es seguro que suceda porque esa niña vive en el campo,* A6, de 10 años. La información "… *en el campo mirando el paisaje"* no es parte de la consigna, sino que A6 agrega este dato para explicar su posibilidad de ocurrencia.

También puede manifestarse como predicciones, desde una racionalidad determinista, por ejemplo, apostar a un fetiche.

Algunos alumnos formularon explicaciones categóricas acerca de la posibilidad de su historia, aun cuando asignaron una posibilidad de incertidumbre. Al parecer, estos alumnos, no consideraron que el contexto de la imagen y sus datos, sean numéricos o descriptivos, era aleatorio, lo que los llevó a contradicción al decidir una posibilidad de incertidumbre, frente a una respuesta categórica. Si tal es el caso, se presenta al profesor una oportunidad de intervenir el medio, por ejemplo, modificando las consignas de modo de lograr que estas situaciones sean interpretadas por los alumnos como una experiencia aleatoria entre sus experiencias reales más próximas.

Para la imagen la puesta de sol y la jugada de básquet las respuestas de los alumnos evidencian el reconocimiento de un suceso seguro.

En las respuestas a la imagen "La jugada de básquet", se han encontrado resultados que se consideran emergentes, los que aparecieron en una puesta en común, estos son los siguientes:

1. Para tres niños de 5° básico, el significado de suceso seguro y suceso posible, no corresponde al sentido común que se atribuye a estas palabras. Para ellos el suceso posible tiene el sentido del suceso seguro y el suceso seguro tiene el sentido del suceso posible.

Una transcripción de sus creencias, con relación a la jugada de basquet, se reproduce aquí: A16: “o sea, yo creo que es posible, seguro no podría ser porque si no la pelota no estaría en el aro, estaría cerca pero no en el aro.
A17: “podría ser posible porque la pelota está dentro de la malla y puede meter un gol”.

Estas concepciones podrían ser un obstáculo para que estos niños adquieran las nociones de incertidumbre, aleatoriedad y probabilidad.

2. Once alumnos de treinta de 7° básico (poco más de la tercera parte), escriben historias, sobre la jugada de básquet, que contienen suposiciones no consideradas en la consigna de la tarea, lo que les hace asignar posibilidad de incertidumbre y explicar el suceso desde esta perspectiva.

3. Cinco de treinta alumnos de 7° escriben historias categóricas, pero describen la posibilidad de ocurrencia y dan explicaciones en términos de incertidumbre.

4. Los alumnos de 8ª básico cuantificaron las posibilidades de ocurrencia utilizando porcentaje para los distintos niveles definidos en la tabla de posibilidades.

Estos conocimientos quedaron en evidencia en una puesta en común gestionada por la profesora -investigadora, como estrategia metodológica de la clase y son interpretados como conocimientos intuitivos de los alumnos que surgen en su interacción con el medio adidáctico.

En la situación tres, ‘Apuestas en etapas’, los conocimientos intuitivos sobre probabilidad surgieron de los criterios implícitos, que los alumnos usaron para explicar la apuesta, en cada etapa. Estos criterios son: Se apoya en los datos, suposición subjetiva, fetiche, incertidumbre, por confianza.

Las expresiones que usaron los alumnos al explicar sus apuestas se consideraron conocimientos intuitivos. Estas expresiones se relacionan con los criterios de apuesta que corresponderían a suposiciones subjetivas, incertidumbre, amuletos o fetiches y apoyarse en los datos.

Las decisiones tomadas por los alumnos, se clasificaron en: decisiones de alto riesgo, de mediano, de bajo y sin riesgo y al expresarlas en una apuesta, estas concordaron con los principios de coherencia y consistencia de la probabilidad subjetiva, lo que se aprecia en las actualizaciones de apuestas.

En la primera etapa E_1 y en ambos videos, los alumnos de todos los niveles realizaron apuestas con incertidumbre, apuestas basadas en suposiciones subjetivas de tipo fetiche o amuleto o depositaron su confianza en la apuesta a un(os) competidor(es), la que también corresponde a una incertidumbre.

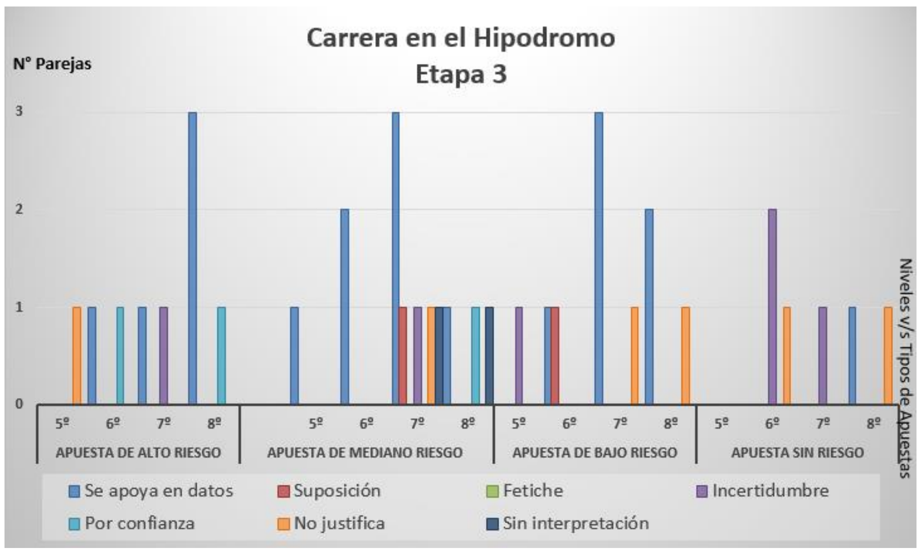
Otras apuestas estuvieron basadas en los datos o en informaciones del contexto, por ejemplo, la percepción de fortaleza corporal de los competidores, la forma en que se ubican los competidores en la partida y el fallo en la partida del segundo video, el que constituyo una información que los alumnos consideraron para realiza la apuesta inicial, $E_{1.}$

En la segunda y tercera etapa las decisiones para apostar consideraron el criterio basado en los datos, coexistiendo además los otros criterios de apuesta: con incertidumbre pura, con incertidumbre por confianza, la suposición subjetiva y en menor grado apostaron a un fetiche, criterio que desaparece en la etapa 3.

Considerando la etapa 2, E_2, en ambos videos, los alumnos deciden, informadamente, la apuesta con riesgo, lo que se aprecia en las tablas 64 y 71, en las páginas 440 y 463 respectivamente y sus gráficos correspondientes, páginas 441 y 464.

De manera similar, en la etapa E3, los alumnos tienen más información sobre las carreras y sus apuestas muestran la influencia de los datos y la tendencia hacia un tipo de apuesta u otra.

Para esta etapa, E3, el gráfico 5, Carrera en el hipódromo,



mostró que el desarrollo de la carrera motivo a los alumnos a apostar, considerando las posiciones de los competidores en las carreras, 6 de 38 parejas apuestan con incertidumbre y por confianza 3 de 38.

Estos resultados muestran que los alumnos toman decisiones con riesgo, considerando las informaciones que provienen de evaluar, subjetiva e implícitamente, la probabilidad de un estado del suceso en relación al estado inicial o anterior.

Claramente los alumnos que deciden la apuesta sin riesgo reparten la apuesta a todos los competidores y desde el punto de vista teórico, ellos ajustan sus decisiones de acuerdo con el axioma de la probabilidad total.

Por su parte los alumnos que apuestan con riesgo ajustan sus decisiones asignando el máximo grado de confianza en la ocurrencia de un suceso ‘S’, si hay evidencia lógica de que este ocurra, lo que se materializa al ver el video, y poniendo en ‘*S’* el mínimo grado de confianza si la evidencia entraña su negación, en este sentido evitan caer en contradicciones y dar ventaja a un eventual contrincante.

Entre los razonamientos emergentes las decisiones de dos parejas de alumnos podrían haber puesto en riesgo su oportunidad de ganar y con esto dar ventaja a un eventual oponente, De Finetti (1937/2007). Ellos asignaron el mismo grado de confianza en la ocurrencia de su apuesta inicial, en todas las etapas y en sus explicaciones, se observa que han desestimado las informaciones del desarrollo de las carreras, por lo tanto, no se aprecia una coherencia entre el grado de confianza expresado y la evidencia lógica de la ocurrencia del suceso. Esta actitud frente al riesgo hay que modificarla en la enseñanza de esta noción.

En la situación 4, los conocimientos intuitivos probabilísticos de los alumnos, se caracterizaron por el tipo de explicaciones encontradas en las diferentes etapas del juego. En cada una de estas etapas las explicaciones de los alumnos de 5° y 6° básico, y también algunos niños de cursos superiores (7° y 8°) revelaron argumentaciones relacionadas con los juegos jugados y ganados (o bien perdidos) por ellos, es decir consideran los sucesos pasados y presentes, lo que es síntoma de un razonamiento concreto ante un suceso aleatorio.

Por ejemplo en 5° básico los alumnos explican que el dado verde le gana al rojo porque en sus juegos gano el dado verde, en esta dupla de dados. Y su evidencia es la tabla de juegos.

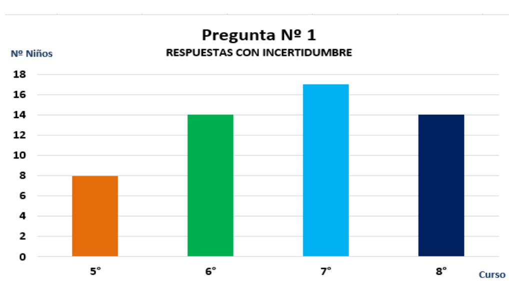
En los cursos superiores los conocimientos intuitivos sobre probabilidad, exhibieron elementos argumentativos relacionados con la predicción de resultados posibles en el juego, lo que al parecer significa que los alumnos jugaban mentalmente y en sus explicaciones han considerado combinaciones de resultados, expresadas en lenguaje natural.

Por ejemplo, en 8°, un alumno (A3) jugo con el dado azul y su compañero (A4) con el dado amarillo. A3 explica, "elegí el dado azul porque tenía cuatro 4 y dos 0. Le gane porque a él siempre le salía el 3 y a mí me salía más veces el 4 que el 0". Estas explicaciones contienen las combinaciones (4, 3) y (0, 3) y se constata que (4, 3) tiene más posibilidad de ocurrir que (0, 3).

Ante la pregunta de investigación 3, en general se encontró evolución psicogenética de los conocimientos probabilísticos, hubo coherencia entre los resultados esperados y los obtenidos, salvo ciertas excepciones, las que abren nuevas interrogantes para futuras investigaciones.

En la situación 1, se encontró evolución psicogenética, los alumnos de 5º a 7º básico reconocieron en forma creciente que el juego era aleatorio, sin embargo, en 8º en vez de aumentar el reconocimiento de la incertidumbre, que era lo esperado, disminuyó o se produjo poca diferencia.

Los gráficos, 1, 2 y 3, recuperados de la página 342, 343, ponen en evidencian este fenómeno.



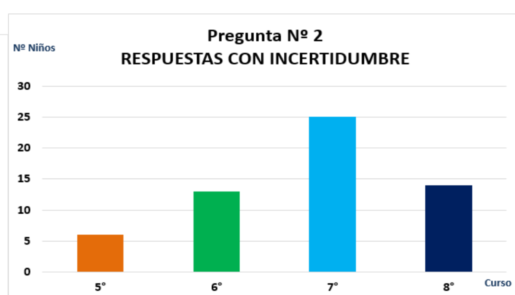


Gráfico 1 Gráfico 2

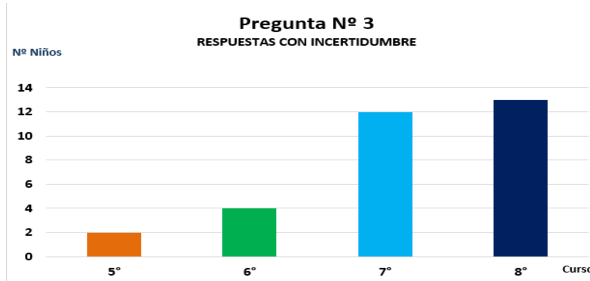


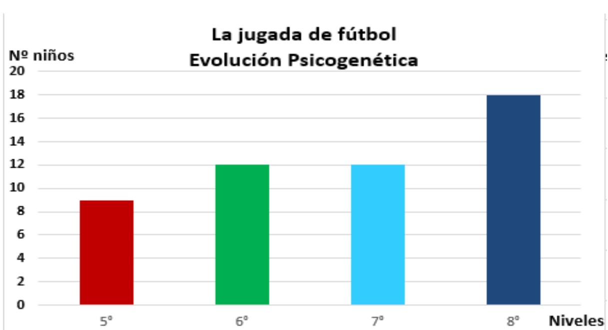
Gráfico 3:

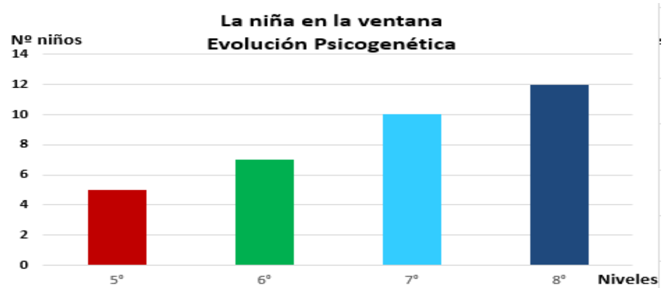
El gráfico 3, podría señalar que la naturaleza numérica de esta pregunta puso en funcionamiento una racionalidad determinista de los alumnos, la que se manifestó en el cálculo equitativo de una posibilidad de puro azar.

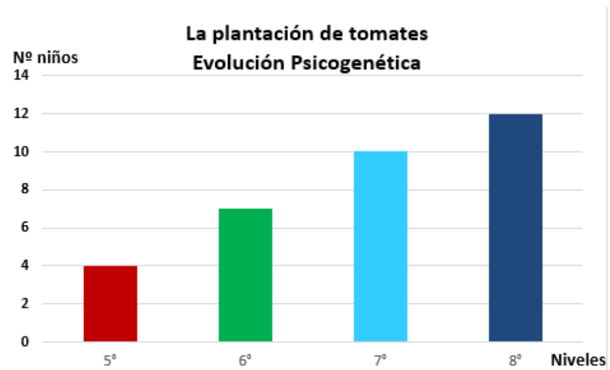
El conocimiento intuitivo queda caracterizando, en este caso, por el reparto equitativo (13 : 6) y por respuestas categóricas, del tipo “me lanzaran la pelota 2 veces porque somos 6 y son 13 los lanzamientos”.

En la situación dos, los resultados obtenidos, muestran que los alumnos de 13 años presentaron mayores niveles de reconocimiento de la aleatoriedad.

Los gráficos 4, 5 y 6 muestran la evolución psicogenética de los conocimientos probabilísticos de alumnos de los diferentes niveles, ante las primeras tres imágenes proyectadas.







El gráfico 4, muestra que no hubo evolución psicogenética entre 6º y 7º, se esperaba encontrar un mayor número de alumnos en 7º básico, reconociendo la aleatoriedad del suceso, sin embargo, estos resultados, se estabilizaron.

Este fenómeno didáctico, podría estar relacionado con las suposiciones subjetivas encontradas en las explicaciones de los alumnos de 7° básico, estas pudieron actuar como obstáculos para que ellos analizaran la situación en términos de las distintas posibilidades que podrían ocurrir.

Los gráficos 5 y 6, son coherentes con la evolución psicogenética esperada, los jóvenes de mayor edad reconocen más que los pequeños la aleatoriedad del suceso.

En la situación 4, la evolución del pensamiento probabilístico de los alumnos, se pone en evidencia en los tipos de argumentaciones, a medida que se avanza en edad los alumnos exhiben elementos argumentativos relacionados con juegos futuros o ficticios, mientras que en los niveles inferiores los alumnos presentan elementos argumentativos relacionados con la constitución numérica del dado con que ellos ganaron algunos juegos o el dado que ellos creen que es el mejor para jugar. Por lo tanto los argumentos son más concretos.

Estos últimos razonamientos se encontraron principalmente en 5º básico, mayoritariamente los alumnos, eligen el dado que tiene al 6, sin considerar la información que entrega la constitución numérica de los todos los dados o al menos una pareja de ellos. Otros alumnos eligen el dado al azar.

En 6º básico, más niños analizan la configuración numérica del dado elegido. Además, aparece la palabra posibilidad, en sus explicaciones, en el sentido de alternativas de ocurrencia de un suceso de ganar, empatar o perder el juego.

En 7° básico, algunos alumnos evidencian un pensamiento más analítico pues consideran la configuración numérica del dado que eligen y analizan el juego en términos predictivos.

Una pareja utiliza la palabra probabilidad para referirse a la posibilidad de ganar de un dado y a la naturaleza del juego. Para algunos alumnos, el juego es de estrategia y para otros es de azar. En este nivel, los alumnos formulan las primeras estrategias para ganar el juego.

Algunos alumnos de 8° básico también evidencian un pensamiento más analítico, sin embargo una parte de curso evidencia un razonamiento concreto, al elegir el dado al azar, otra parte elige el dado con el número mayor, y también hay alumnos que manifiestan una gran confianza en sus creencias y afirman "*elegí el dado verde porque sabía que iba a ganar",* A15.

Sobre la naturaleza del juego, algunos alumnos consideran que es un juego de azar y otros que es de estrategia.

Otros alumnos han formulado la estrategia de elegir el dado considerando lo que eligió el compañero. Por ejemplo, si un contrincante eligió el dado verde, el segundo contrincante elegiría el dado amarillo, porque en el dado verde hay más facilidad que aparezca el número 2 que el 6 y cuando esto ocurre el dado amarillo siempre gana. Luego el dado amarillo tiene más oportunidades de ganar al dado verde.

Este argumento contiene implícitamente, en lenguaje natural, combinaciones de los dados en juego. En efecto que en el dado verde aparezca el 2 y en el amarillo el tres corresponde a la combinación (2, 3).

Por otra parte, este argumento constituye una evidencia de la evolución del razonamiento analítico, basado en los datos, de los niños más grandes.

Si bien es cierto que los alumnos de 13 años no disponen de una representación convencional de las combinaciones posibles del juego, sus explicaciones ponen en evidencia algunas de las combinaciones solicitadas, seguramente las que han consignado en sus tablas de juego.

En la etapa dos, los alumnos de 5º básico, en general, formulan estrategias concretas, basadas en la superstición, "da buena suerte", en la forma de lanzar los dados, "lo lanzo arrastrando" y además se observa que más niños analizan la composición numérica del dado con el que juega, "… tiene los números más grandes", "… el azul porque tiene más cuatros y le gana al dos del dado verde".

En 6° básico, se encontró que los niños consideran en sus estrategias para ganar la composición numérica de los dados, así eligen el dado rojo, por ejemplo, porque el 5 (que es un número grande) aparece más veces que el 6 en el dado verde. De esta manera se aprecia un razonamiento más analítico, que el encontrado en 5º básico.

En 7° básico los alumnos formulan estrategias que se basan en la composición numérica de los dados. Sus análisis parecieran evidenciar generalizaciones que, por la necesidad de comunicarse con la clase, ejemplifican con resultados de juegos mentales. Aparece además la concepción que da lo mismo con que dado jugar, lo que se atribuye a la relación que existe entre la incertidumbre y la equiprobabilidad, en los juegos de azar, constatada en otras investigaciones.

Los alumnos de 8º, han considerado combinaciones de resultados, expresadas en lenguaje natural, las que se apoyan en la cantidad de veces que un número relativamente grande o pequeño aparece en los dados en juego. Por ejemplo, A3 eligió el dado azul y su contrincante el dado amarillo. A3 explica que eligio este dado "porque tiene cuatro 4 y dos 0 y le gane porque a él siempre le salía el 3 y a mí me salía más veces el 4 que el 0". Estas explicaciones corresponden a las combinaciones (4,3) y (0,3) y se constata que (4,3) tiene más posibilidades de aparecer que (0,3).

En la etapa 3, los alumnos de 5° básico explicaron sus ganancias o pérdidas, en sus juegos, a partir de los resultados concretos de los juegos realizados con el par de dados. Sus explicaciones por lo tanto son las más concretas.

En 6° básico los alumnos analizan resultados de sus juegos, considerando la composición numérica de ambos dados. Algunos alumnos tomaron conciencia que si el número pequeño aparece muchas veces en su dado puede perder la partida, lo que es una propiedad del juego que emerge en esta etapa como un conocimiento no formal y representa un aprendizaje para el alumno. Esto es importante porque los niños de 10 años no han alcanzado este nivel de análisis. Los alumnos de 6° que establecieron estas relaciones, se sitúan en la posición de alumno que aprende E_{-1}. Algunos alumnos expresan verbalmente las combinaciones que han aparecido en sus juegos, por ejemplo "…Le gane porque a mí me salió más veces el dos y a A14 le salía casi siempre el uno”. Lo que corresponde a la combinación (2, 1)

En 7° básico los alumnos realizan predicciones respecto del juego a partir de los resultados obtenidos, por ejemplo A25: ‘La estrategia es elegir el dado con más probabilidad de ganar’; A18 ‘no hay que guiarse por el que tenga el número mayor, sino por el que tenga más veces, números grandes’.

Los alumnos de este nivel han utilizado la palabra probabilidad de ganar con el significado de posibilidad en el juego. Además conciben que para ganar el juego hay que elegir un dado que “depende del dado que eligió el contrincante” y de la suerte.

En 8° básico, las argumentaciones de esta etapa del juego, se presentaron en la etapa 1, lo que muestra que algunos alumnos de 13 y 14 años se anticiparon a analizar el juego, lo que corresponde a un estado en la evolución del pensamiento probabilístico, que lo diferencia de los otros niveles.

En la cuarta etapa los alumnos trabajaron en grupos de 4 y desarrollaron 3 tareas. La tarea 1 solicitaba decidir cuál es el mejor dado para ganar.

La evolución psicogenética del pensamiento probabilístico, ante esta tarea, se presenta en la forma de análisis caracterizados por:

Los alumnos de 5° básico, no modificaron su creencia que el dado verde era el mejor dado, durante el juego solo analizaron este dado, ‘porque tiene al número más grande’, el 6. Además, para algunos niños, ganar depende de la forma en que se lanza el dado, “con tal que lo tires bien…”, lo que expresa una racionalidad determinista de controlar el juego. En el desarrollo de esta etapa, surge el lenguaje de la probabilidad expresada como posibilidad de ganar.

En 6° básico 8 de 16 alumnos identifican factores que inciden en el éxito del juego, estos son las posibilidades de ocurrencia de las distintas caras de cada dado (como frecuencia absoluta), que el dado tenga los dígitos mayores y otro factor es la elección que realice el contrincante, lo que refleja un pensamiento analítico. Una segunda parte del curso concibe que los dados elegidos tienen la misma posibilidad de ganar, esta concepción podría estar relacionada a la incertidumbre del juego, la que sitúa a los niños en la equiprobabilidad. La tercera parte del curso, 4 de 16 afirma que ganar depende de cómo se lanzan los dados, lo que coincide con el pensamiento probabilístico de los niños de 5°básico y podría reflejar una racionalidad determinista de la incertidumbre y del juego.

En 7° básico, los argumentos se basaron en la composición numérica de dos dados, el dado verde y el dado rojo y en la relación de números grandes y pequeños que ellos tienen. Algunos alumnos compararon las veces que un número grande y uno pequeño aparece en su dado, para decidir si el dado es bueno o no para elegirlo. Este análisis reflejaría que algunos alumnos se abstraen del juego, determinando propiedades favorables para ganar.

En 8° básico los análisis están basados principalmente en la relación que existen entre los números que componen el dado que consideran que es el mejor, por ejemplo: “El dado rojo, es el mejor, porque tiene al 5 y hay más posibilidades de ganar con el 5”; ‘el dado azul (es el mejor que el dado verde) porque en hartas posibilidades, si te sale el dos pierdes, pero si te sale el 6 gas, pero casi siempre sale el 2’.

Frente a la tarea 2, ¿cuántas posibilidades más tiene de ganar el dado verde contra el dado rojo?

Esta tarea fue abordada en forma incompleta por los alumnos de 6° y 8° básico, al respecto una parte de los alumnos de 6° básico establecieron relaciones de equiposibilidad de los dados como una consecuencia de la incertidumbre de este juego. Otra parte del curso realiza un análisis de los valores en las caras de ambos dados, pero en forma independiente, lo que les lleva a concluir que el dado verde tiene poca probabilidad, en el sentido de posibilidad de ganar, porque el 2 se repite más veces que el 6. En este análisis los alumnos solo han considerado las combinaciones entre el 5 y el 2 pero se han olvidado que cuando en el dado verde aparece el 6 le gana absolutamente al dado rojo.

En 8° básico algunos alumnos proponen, en lenguaje natural, combinaciones relacionadas con las caras de los dados, las que corresponderían a algunas posibilidades, pero no las han podido representar gráficamente, por ejemplo 6 – 4, y esto no les ha permitido determinar cuántas posibilidades tiene el dado verde y el azul, respectivamente, para ganar.

En sus análisis, tampoco han considerado que las posibilidades que el dado verde gane con el 6 son 12 y que gane con el 2 son 8 lo que da un total de 20 posibilidades de ganar para el dado verde y solo 16 oportunidades de ganar con el dado azul.

Esto se puede interpretar de la siguiente manera: los alumnos de 8° básico no consideran, en sus análisis, las distintas combinaciones de números en las caras de cada dado en el juego, sus respuestas podrían apoyarse solamente en la descripción de jugadas particulares que han aparecido en sus resultados, en juegos mentales incompletos y en la composición numérica de ambos dados, pero en forma independiente, lo que los conduce a concluir en forma incompleta y errónea.

Las respuestas previstas para la tarea 3 no se materializaron, en ninguno de los niveles. Las representaciones de los casos posibles de una pareja de dados no han aflorado espontáneamente en el desarrollo del juego, pero si se han presentado algunas argumentaciones analíticas que podrían funcionar para acercarse al lenguaje de la probabilidad y ahora se sabe que los alumnos de este segmento las utilizan para referirse a los casos posibles del juego.

En esta tarea la evolución psicogenética presenta el siguiente desarrollo:

En 5° básico los alumnos realizan descripciones sobre el juego y de las caras del dado verde, el que tiene al número 6 en dos de sus caras.

En 6° básico, gran parte del curso analiza el juego considerando sea la configuración numérica de dos dados en forma independiente y la posibilidad de ocurrencia de algunas combinaciones del juego. Las devoluciones de la profesora permiten profundizar en las explicaciones de los alumnos y se logra que ellos comparen las veces que aparece el número mayor en cada uno de los dados. Lo que resulta de esta interacción es que los alumnos cuantifican como poca o mucha la probabilidad de ganar con los dados en juego. En este caso el análisis concluye con una deducción y una cuantificación cualitativa, lo que forma parte de los conocimientos probabilísticos obtenidos.

También estos alumnos concluyen las posibilidades de ganar de un dado, jugando nuevas partidas y afirmando que también depende de la probabilidad, cuyo valor no hay forma de calcularla, “se calcula jugando”. Claramente este grupo de alumnos se sitúa en el significado frecuencial de la probabilidad, Batanero (2005) y el juego de dados le ha llevado a concebir que la probabilidad es experimental.

En 8° básico solo un grupo presenta una representación que consigna resultados de un set, sin ninguna explicación. Otros alumnos presentan explicaciones de cómo se gana, irrelevantes para esta tarea y otros alumnos manifiestan claramente no entender como representar las jugadas posibles entre dos dados.

Estos resultados plantean, por una parte que los alumnos no tienen herramientas para representar las posibilidades de ocurrencia y por otra parte, la necesidad de analizar las características del medio propuesto para esta parte de la situación, pues ante esta tarea, se vuelven a encontrar respuestas de los alumnos, que en mayor o menor medida, corresponde a las tareas ya resueltas, en general, en las etapas anteriores de esta situación

Observando las producciones de los alumnos y las características del medio para esta tarea, una intervención del medio didáctico podría surgir, a partir de la siguiente consigna:

"Si A y B juegan a 60 lanzamientos, A con el dado verde y B con el dado azul, ¿Quién tiene más posibilidad de ganar y porque?, ¿en cuántos lanzamientos es más probable que A le gane a B?

6.1.4 Conclusiones generales.

En definitiva, se ha encontrado una evolución de tipo genético, ha sido más fácil para los alumnos de mayor edad el análisis de los datos y mostrar un razonamiento que considere de manera coherente resultados futuros de una situación de incertidumbre, lo que caracteriza al razonamiento probabilístico.

El diseño de las situaciones permitió poner en funcionamiento los conocimientos intuitivos de la probabilidad en los alumnos de 5° a 8° básico y describir la evolución psicogenética, la que se sintetiza como:

En 5º básico se ha observado un pensamiento más concreto que dificulta que los alumnos conciban el suceso presentado como aleatorio, en las primeras dos situaciones. Su pensamiento concreto se manifiesta también en el hecho de considerar que hay un único mejor dado para ganar y es el que tiene al 6 en dos de sus caras.

Por otra parte, sus conocimientos intuitivos sobre probabilidad, corresponden a descripciones que se expresan mediante las palabras poco y muy posible o las que se propusieron en la tabla de posibilidades del suceso en estudio, pero no a cuantificaciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de un suceso, como lo determinan los estudios relacionados con la regla de Laplace, la ley de los grandes números y la teoría axiomática de la probabilidad.

Este fenómeno coincidiría con la dimensión filosófica que se desarrolló en paralelo al estudio formal de la probabilidad como también al significado que se adoptó en la antigüedad.

También se observó que, en la toma de decisiones, ante las apuestas, al menos 6 parejas de 9 que se constituyeron, apostaron con riesgo, considerando criterios de decisión tales como las suposiciones subjetivas y la incertidumbre en la primera apuesta y posteriormente considerando el desarrollo de la carrera, la incertidumbre y las apuestas categóricas en las siguientes etapas. Por lo tanto, los niños de 10 años tomaron decisiones con riesgo frente a la incertidumbre de los fenómenos propuestos.

En 6° básico se observó que los alumnos reconocen intuitivamente características de los fenómenos aleatorios asociadas a la incertidumbre de los resultados lo que se puso en evidencia principalmente en las situaciones, “El juego circular y la proyección de imágenes”, aunque en menor grado en esta última. Y que lograron establecer cuantificaciones, en el marco de las posibilidades de ocurrencia de los sucesos estudiados, aunque en muchos casos la interpretación matemática distaba de ser exacta y aun aproximada.

Por otra parte, se observó que, en la toma de decisiones, 3 parejas de 10, apostaron con riesgo, considerando criterios de decisión basados en la incertidumbre, a un fetiche y por confianza en la apuesta inicial y luego considerando el desarrollo del fenómeno, la incertidumbre en las siguientes instancias.

Por lo tanto, las decisiones tomadas por estos alumnos, ante la incertidumbre de una apuesta, fueron de bajo riesgo.

En el juego de dados algunos alumnos presentaron razonamientos analíticos basados en la constitución numérica de ambos dados y expresaron combinaciones de casos posibles que aparecieron en sus juegos. También observaron que el número con mayor frecuencia en cada dado aparecía más veces en sus lanzamientos. A pesar de estas consideraciones algunos alumnos de 11 años concebían la equiprobabilidad en los lanzamientos, que el dado verde era el mejor para ganar y a la experimentación como procedimiento para determinar que dado tenía mayor probabilidad de ganar, ya que la probabilidad a priori no se puede calcular, sino que "se calcula jugando".

En 7° básico se ha observado que los alumnos reconocen intuitivamente características de los fenómenos aleatorios asociadas a la incertidumbre de los resultados lo que se puso en evidencia principalmente en la situación 1 y en menor grado en la situación 2. También lograron establecer algunas cuantificaciones, utilizando distintas representaciones numéricas, fracciones, porcentaje y comparaciones.

Por otra parte, más de la mitad del curso ha tomado decisiones de riesgo considerando criterios como la superstición, las suposiciones subjetivas y la incertidumbre en la primera apuesta y luego considerando el desarrollo de la carrera y la incertidumbre en las otras instancias de apuestas.

También se han observado, en algunos alumnos, razonamientos analíticos que les permitieron argumentar en el juego de dados. Algunos de estos razonamientos dieron cuenta que la estrategia del juego consiste en elegir el dado dependiendo de lo que eligió el contrincante y que el dado con el número mayor no siempre gana porque este número tiene menos posibilidades de aparecer en los lanzamientos.

En 8° básico los alumnos han reconocido intuitivamente las características de los fenómenos aleatorios propuestos en las situaciones 1 y 2 y particularmente establecieron criterios de cuantificación, utilizando porcentaje, para las posibilidades de ocurrencia de las historias que formularon, en la situación 2.

Al menos 9 de 12 parejas de alumnos tomaron decisiones de riesgo considerando criterios de decisión tales como Suposiciones subjetivas, la incertidumbre y la percepción que les producía el competidor en la salida, en una primera instancia y luego considerando el desarrollo del fenómeno, la incertidumbre que les producía la carrera no finalizada y apuestas categóricas en relación al ganador.

Se observó, además, en algunos alumnos de 13 y 14 años, razonamientos analíticos que les permitieron argumentar, que la estrategia del juego de dados consiste en elegir el dado dependiendo de lo que eligió el contrincante, que se gana por suerte y además por jugar con dados con mayor posibilidad de ganar, ya que el dado con el número mayor no siempre gana porque este número tiene menos posibilidades de aparecer en los lanzamientos. En estos razonamientos, aparecen las primeras combinaciones en lenguaje natural, expresadas en una tabla de resultados de un set.

Los argumentos citados corresponden desde el punto de visto teórico a las confrontaciones que el medio les planteo en el juego de dados.

En esta misma situación, los alumnos no pusieron en juego representaciones intuitivas que les permitan identificar y describir las combinaciones posibles en el lanzamiento de dos dados y es que en general este fue uno de los obstáculos epistemológicos en el surgimiento teórico de la probabilidad, como se puede revisar en el primer capítulo de esta tesis.

En términos generales se concluye que los alumnos presentan un razonamiento analítico sobre las situaciones de aleatoriedad y probabilidad propuestas. También ellos realizaron inferencias cualitativas sobre sucesos aleatorios y les asignaron posibilidad de ocurrencia, basadas en sus experiencias reales.

Particularmente en el juego de dados, se observó que emergieron conocimientos analíticos intuitivos de los alumnos que se presentaron en la construcción y evolución epistemológica de esta noción. En estos análisis algunos alumnos de 11, 12 y 13 años, consideran juegos ficticios futuros que les ayudaron a explicar las relaciones que han encontrado en las distintas etapas de la situación e identifican algunas combinaciones concretas que no lograron contabilizar.

También se observó que la ausencia de un método para determinar los casos posibles en el juego de dados podría estar fundada en la falta de elementos teóricos (en el sentido escolar) que constarán los resultados que los alumnos obtenían y utilizaban para ejemplificar sus teorías argumentativas. Lo que también ocurrió en la evolución epistemológica de la probabilidad que por mucho tiempo se atribuyó al principio de incalculabilidad.

6.2 Prolongaciones

Los resultados obtenidos sugieren plantear nuevas preguntas de investigación, las que ameritan explorar otros ámbitos no considerados esta tesis.

Algunas preguntas que pudireran identificar fenómenos didácticos y orientar otros estudios, son las siguientes:

¿Qué relaciones concretas se establecen entre los obstáculos históricos epistemológicos y la evolución psicogenética de los conocimientos probabilísticos de los alumnos, encontrada con las situaciones propuestas?

¿Qué resultados se obtendrían al plantear situaciones de enseñanza que proponga desarrollos vinculados a la esperanza matemática?

Las oportunidades de enseñanza temprana de la probabilidad que puedan relacionar al conocimiento intuitivo de la incertidumbre y la probabilidad presente en las experiencias reales de los alumnos, como base para aprender y comprender los aspectos formales de la probabilidad, abren otras interrogantes del tipo, ¿Cuál sería el marco metodológico propuesto adecuado a este nivel educativo?

Por otra parte, se obtuvo información sobre las preferencias o aversión, de los alumnos hacia el riesgo, el que puede comenzar a desarrollarse también a temprana edad. En este sentido se ha colocado al riesgo, que se corre en una apuesta, como uno de los aspectos que debería abordar la enseñanza de la probabilidad, el cual desde el punto de vista didáctico amerita un estudio específico que precise, las mejores elecciones didácticas para proporcionar aprendizajes que ayuden a los alumnos a estimar probabilidades, desde un enfoque subjetivo hacia la comprensión de otros significados de la probabilidad.

Ante los aspectos que abrieron otras cuestiones, el diseño de situaciones tendría que considerar: lo que los alumnos puedan reconocer de la probabilidad, de acuerdo a su desarrollo evolutivo; no solo la experimentación y organización de datos, sino también la representación y análisis de resultados, con el fin de motivar el cálculo de probabilidades. Poner en juego diferentes representaciones, funcionales, para los distintos significados de la probabilidad y plantear tareas, que constituyan verdaderos problemas, relacionados, especialmente con la predicción de sucesos futuros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVARADO, H., ESTRELLA, S., GALINDO, M., RETAMAL, L. 2018. Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. Relime vol.21 no.2 México jul. 2018.

ARANEDA, A., DEL PINO, G., ESTRELLA, S. ICAZA, G., SAN MARTIN, E. 2011. Recomendaciones para el Currículo Esdolar de Datos y Probabilidad. Sociedad Chiena de Estadística SOCHE. Sección Educación Estadística.

ARTIGUE, M. 1990 Épistémologie et didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2.3) pp. 241–286.

ARTIGUE, M. El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Volumen 11. julio-diciembre 2018. Cinvestav-IPN © Ciudad de México. ISSN 2007-4107. P.p. 1 – 31

ARTIGUE, M. 1990. Ingénierie didactique. ISSN 0246 - 9367 - RDM Vol. 9/3.

AZCÁRATE P., CARDEÑOSO J.M., PORLÁN, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. Enseñanza de las Ciencias 16 (1), p. 85 – 97.

BACHELLARD, G. 2000. La Formación del Espíritu Científico. Contribución a un Psicoanálisis del Conocimiento Objetivo. Siglo XXI Editores.

BATANERO, C.; SERRANO, L. La aleatoriedad, sus significados e implicaciones Educativas. Revista UNO,Barcelona, nº 5, p. 15 – 28, jul., 1995.

BATANERO, C. (2005) Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8 (3), 247–263.

BATANERO, C., HENRY, B., PARZYSZ, B. (2006). The nature of Chance and Probability. Graham A. Jones (ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning, 16—42. © 2006 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

BATANERO, C., DÌAZ, C. 2007. Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. Ponencia Invitada en las XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada, Julio, 2007. Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.

BELLOS, A. (2011). Alex en el país de los Números: Un viaje al maravilloso mundo de las matemáticas, Ed. Grijalbo

BERNARDO, J. 1997. Bruno de Finetti en la Estadística Contemporánea. Revista de la Academia de Ciencias de Madrid. Investigación financiada con el Proyecto PB93-1204 de la DGICYT, Madrid.

BIEHLER • PRATT 2012, Research on the reasoning, teaching and learning of probability and uncertainty, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 819 – 923

BOERO P., CONSOGNO V., GUALA E.,GAZZOLO T. 2009. Reasearch for innivation: A teaching Sequence on the argumentative approach to probabilistic thinking in grades I – V and some related Basic research results. Recherches en Didactiques des Mathematiques. vol 29, nº 1, 59 – 96.

BOROVČNIK, M., Y KAPADIA, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. J. Chernoff, y B. Sriraman, (Eds.), Probabilistic thinking: presenting plural perspectives (pp. 7-34). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

BOYER, K. (2003). Historia de la Matemática. Alianza editorial.

BROUSSEAU, G. 1988. El caso de Gaël: estudio de un niño con dificultades matemáticas. The Journal of Mathematical Behavior Vol. 18 n° 1, 1999.

BROUSSEAU, G. 1988. Le contrat didactique: Le milieu. Recherches en Didactique des mathématiques, vol 9, nº 3 pp. 309 – 336.

BROUSSEAU, G. 1995. L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In: Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J, (eds). Actes de la VIII Ecole de été de didactiques des mathematiques (p. 3 – 46). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

BROUSSEAU, G. 2004. Théorie des situations Didactiques. Recherches en Didactique des mathématiques. La Pensé Sauvage éditiores.

BURRILL, G., BIEHLER, R. Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), Teaching statistics in school mathematics—challenges for teaching and teacher education—A joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI study p. 57–69. 2011. Dordrecht: Springer.

CARRANZA, P., FUENTEALBA, J. (2010). Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística. Revsita Iberoamericana de Educación Matemática, N°m 24, páginas 57-68 ISSN: 1815-0640

CHAMORRO, M. C. (2003). Didáctica de las Matemáticas Madrid: Pearson Educación.

CHEVALLARD, Y. (1998). La transposición Didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado. Editorial AIQUE.

DE MORA, CH. (1981). La teoría de la Probabilidad: los primeros cálculos.Una propuesta de traducción y comentario a Cardano.Llull, vol 4 – 123 – 141.

DÍAZ GODINO, J. BATANERO, C. CAÑIZARES, M. (1996). Azar y Probabilidad. Fundamentos Didácticos y Propuestas Curriculares. Editorial Sintesis, Madrid.

EICHER, A.; VOGEL, M. Basic modelling of uncertainty: young students' mental models. ZDM Mathematics Education, Hamburgo, v. 44, p. 841 – 854, 2012

FERNANDEZ, S. 2006. El azar y sus problemas. Suma 51.

FREGONA, D., ORÚS (2011), La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas: Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática.

GARCIA, J. (2000). Historia de un problema: El reparto de la apuesta. . Revista SUMA 33, pp. 25 – 36.

GARCÍA, M. 2002. Antecedentes de la concepción subjetivista de la probabilidad. Historia de la probabilidad y la estadística (iii). A.h.e.p.e. ed. Ac.

GUTIERREZ, S. (2013). Jacob Bernouilli y el cálculo de probabilidades. Revista SUMA 72, pp. 83 – 90.

HENRY, A., HENRY, M.(1996). Enfoque frecuentativo de Probabiidades en los programasfrancese dirgidos a alumnos entre 16 y 18 años. Ferreras-Soto, P., Topiques ed. La enseñanza de las matemáticas : puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica. Pont-à-Mousson. Libro impreso en España (spa).

HERSANT M., PERRIN-GLORIAN J. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. Recherches en didactique des mathematiques. Vol 23, n° 2, pp. 217 – 276, 2003.

HERSANT M. (2014). Facette épistemologique et facette sociale du contrat didactique: une distinction pour mieux caractériser la relation contrat milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. Recherches en didactique des mathematiques, vol. 34, n° 1 pp. 9 – 31, 2014.

HUGENII, C. Libellus de Ratiociniis in Ludo Aleae or The value of all chances medskip in Games of Fortune; cards, dice, wagers, lotteries, &c. mathemat cally demonstrated. London: printed by s. keimer for t. woodward, near the Inner-Temple-Gate in Fleetstreet.

KONOLD, C., MADDEN, S., POLLATSET, A., PFANNKUCH, M., WILD, C., ZIEDINS, I., et al. 2011. Conceptual challenges in coordinating theorical and data-centered estimates of probability. Mathematical thinking and learning, v. 13, n° 1 & 2, p. 68 – 86.

LLAGOSTERA, E. 2011. El Ocio en la Antigüedad. Juegos del Mundo. Espacio, Tiempo y Forma, Serie II, Historia Antigua, T. 24, pgs. 305 – 330.

MARGOLINAS, C., STEINBRING, 1993. Double analyse d'un episoed: cercle pistémologie et structuration du milieu, en Vingts ans de didactiques des mathematiques en France. La pensée sauvage, Grenoble, P 250 – 257

MARGOLINAS C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Les debats de didactique des math_ematiques, La pensée sauvage, pp.89-102, 1995, Recherches en didactique des mathematiques.

MARGOLINAS C.(1998). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. Noirfalise Robert. Universit_e d'_et_e de La Rochelle, 1998, La Rochelle, France. I.R.E.M. de Clermont-Ferrand, pp.3-16. <halshs-00421845>. Consultado noviembre 2015.

MARGOLINAS C, (2002). Situations, milieux, connaissances: analyse de l'activit´e du professeur. J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris. Actes de la 11`eme Ecole d'Et´e de Didactique des Math´ematiques, La pensée sauvage, Grenoble, p.141-156. <halshs-00421848>. Consultado Marzo 2016.

MARTIN, F. (2002). Los probabilistas españoles de los S. XVII a XIX. Historia de la Probabilidad y de la Estadística. A.H.E.P.E.

MATEOS, G. MORALES, A. (1985). Teoría Subjetiva de la Probabilidad: Fundamentos, evolución y determinación de probabilidades. Tesis Doctoral.

MÉNDEZ, T. GUZMÁN, I. 2016. Aproximación Intuitiva a la Aleatoriedad, el caso de Alumnos de 13 y 14 años de un Liceo Municipal. Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol 30 nº 56. versão On-line ISSN 1980-4415.

MEYER, P. Probabilidad y aplicaciones estadísticas. Mexico: Addison-Wesley Iberoamérica 1986.

MORENO, A. CARDEÑOSO, J. GONZÁLEZ F. (2014). La aleatoriedad en profesores de biología y de matemática en formación: análisis y contraste de significados. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias 11(2), 198-215.

OLFOS, R., GUZMÁN, I., ESTRELLA S. 2014. Gestión Didáctica en Clases y su Relación con las Decisiones del Profesor: el caso del Teorema de Pitágoras en séptimo grado. Bolema: Boletim de Educação Matemática, vol 28 nº 48. versão On-line ISSN 1980-4415. Recuperado Julio 2016.

ORTIZ, BATANERO, CONTRERAS 2012, Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15, Vol. 1, 63 – 91

PANIZZA, M. (2009). Enseñar matemática en el Nivel inicial y el primer ciclo de la EGB: Análisis y Propuestas. Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. Enseñar,

PIAGET, J. INHELDER, B. 1969. La psicología del niño. Versión Española de Luis Hernández. Morata – Madrid.

PFANNKUCH, M., CHRIS J. W., PARSONAGE. R. 2012. A conceptual pathway to confidence intervals. ZDM Mathematics Education (p. 899 – 911).

PRADA-NUÑEZ, R., HERNÁNDEZ-SUAREZ, C. Y JAIMES, L. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del Colegio a la Universidad. Panorama, 11(20), 34 - 44.

PRIGOGINE, I. (1995). El fin de las certidumbres. Ed. Andrés Bello Stgo. 1997

SÁNCHEZ, E. VALDEZ, J. 2013. La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y combinatoria (pp. 39-46). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

SÁNCHEZ, E. VALDEZ, J. 2017. Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática. - 2017, Nº 711, 127 – 143.

SANTOS, J. 2002. Probabilismo moral y probabilidad Historia de la Probabilidad y la Estadística (III). A.H.E.P.E. Ed. AC.

SANTOS, J. CAMÚÑEZ, R. (2002). El problema de los dados con partidas no jugadas. Revista Suma 39.

SANTOS, J. (2006). El Ars Conjectandi: un nuevo cálculo junto a un viejo concepto. Historia de la Probabilidad y la Estadística (III). A.H.E.P.E.

SANTOS, J. CAMÚÑEZ, R. (2007). El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII. Revista Suma 43 – 54.

TORRETTI, R. 2002. Sobre el Significado Subjetivo de la Probabilidad. Bruno de Finetti. Revista de Filosofía n° 58.

TORRETTI, R. 2003. El Concepto de Probabilidad. Revista Dialogos 81.

TORRETTI, R. 2012. Inventar para entender: Reflexiones Filosóficas sobre la Física. Salesiamos Impresores.

VÁSQUEZ, C., PARRAGUEZ, M. (2011), Construcción del concepto Probabilidad: Una mirada perspectivadesde la teoría APOE, 25 Acta Latinoamérica de Matemática Educativa p. 573 – 581

VÁSQUEZ, C., ALSINA, A., 2017. Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. Boletin de Educación Matemática, Bolema, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 454 - 478, abr. 2017

VÁSQUEZ, C. 2018. Surgimiento del Lenguaje Probabilístico en el Aula de Educación Primaria. REnCiMa, v.9, n.2, p. 374-389, 2018.

PÁGINAS WEB

http://www.mineduc.cl

MINEDUC. 2012. Bases Curriculares de Educación Básica.

http://www.mineduc.cl

MINEDUC. 2012. Matemática Programas de Estudio para Quinto y Sexto Año Básico. Unidad de Currículo y Evaluación.

MINEDUC. 2011. Matemática Programa de Estudio para Séptimo Año Básico. Unidad de Currículo y Evaluación

MINEDUC. 2012. Matemática Programa de Estudio para Octavo Año Básico. Unidad de Currículo y Evaluación

MINEDUC. 2016. Matemática Programa de Estudio para Séptimo y Octavo Año Básico. Unidad de Currículo y Evaluación

ASKEY, R. et al. 2014. Texto para el Estudiante 5° Básico.

ASKEY, R. 2014. Texto para el Estudiante 7° Básico..

BENNETT, J. BURGER, E et al. 2014. Texto para el Estudiante 7° Básico

BENNETT, J. BURGER, E et al. 2014. Texto para el Estudiante 8° Básico

ANEP. 2009. Programa de Educación Inicial y Primaria. Montevideo: Rosgal.S.A.

http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/1447/1/images/sistemaedumex09_01.pdf. 21/01/2018. México.

http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/1447/1/images/sistemaedumex09_01.pdf. 21/01/2018

Programas de estudio 2011 / Guía para el Maestro Secundaria / Matemáticas. México

Lineamientos curriculares colombianos, Ministerio de Educación de Colombia 1998. https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-339975.html. Visitado en mayo 2016

http://www.atlantico.gov.co/images/stories/adjuntos/educacion/medellinmatematicas.pd. Recuperado 18 de febrero, 2018. MEN, 1998, p. 47. Colombia.

http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL003226.pdf, 18 de febrero 2018. Educación Secundaria - Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. Argentina.

http://www.me.gov.ar/curriform/publica/nap/nap3matem.pdf. Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Tercer Ciclo EGB/Nivel Medio. Argentina.

Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Tercer Ciclo EGB/Nivel Medio, http://www.me.gov.ar/curriform/publica/nap/nap3matem.pdf. Argentina.

Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Educación Secundaria - Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL003226.pdf, 18 – 02 - 2018.

http://www.atlantico.gov.co/images/stories/adjuntos/educacion/medellinmatematicas.pd 18 de febrero, 2018. Colombia.

Ministerio de educación nacional república de Colombia" La revolución educativa: estándares básicos de matemáticas y lenguaje educación básica y media, 2003.

http://es.thefreedictionary.com/apuesta. Revisado el 31 de Julio del 2017,

DE LA HORRA, J. Espacios de Probabilidad.

https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/horra/Probabilidad-I-Apuntes/1-espacios%20de%20probabilidad.pdf. Visitado en mayo 2018.

Espacio Muestral, Eventos y Medidas de Probabilidad http://www.cimat.mx/~pepe/cursos/probabilidad_2011/material/material_111109.pdf. Visitado mayo 2018.

RAMAL, P. (2014). Intuiciones Probabilísticas en el Tercer Ciclo de Educación Primaria. Tesis de Fin de Grado en Educación Primaria, Universidad de Granada. Recuperado 23/06/019 http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/36310/Ramal%20Martin_%20Pablo.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Topología de la Recta.

http://www.cimat.mx/~jortega/MaterialDidactico/Analisis/Cap2v4.pdf. Visitado mayo en 2018.

https://revistafilosofia.uchile.cl/index.php/RDF/issue/view/4455. Visitado 16 de enero 2018.

1714.http://www.stat.ucla.edu/history/huygens.pdf. recuperado noviembre 2018.

JIMÉNEZ, N. 2000. La axiomática de Kolmogorov: Fundamento de la teoría de la probabilidad. Números. 43-44. Pp- 185, 190.

ANEXOS

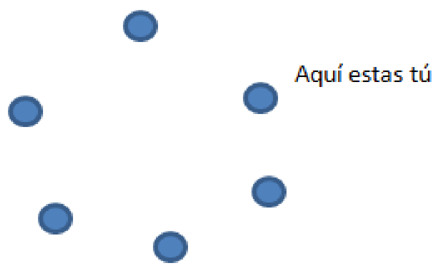
Anexo 1. Situaciones de la secuencia didáctica.

Situación 1:

Hoja de respuesta:

Nombre: ____

Juego circular: Tú y cinco amigos juegan a lanzarse la pelota con la mano, ubicados como en el esquema. El juego consiste en mantener la pelota en movimiento lanzándola de un jugador a otro.



Si el juego ya se inició:

1. ¿Qué posibilidad hay de que el que tiene la pelota te la lance a ti? explica por qué.

   ____

2. ¿Crees tú que el que tiene la pelota te la lanzaría a ti? Explica.

   ____

3. Si la pelota estuviera en juego 13 veces sin caer, ¿cuántas veces crees tú que te la lanzarían a ti? Explica.

____

Situación 2:

Hoja de respuesta:

Nombre: ____

Observa las imágenes

I. Imagen 1**.:** La jugada de fútbol. Escribe dos historias sobre

1.

II. Imagen 2.: La plantación de tomates. Escribe dos historia sobre

1.

III. Imagen 3.: La niña en la ventana. Escribe una historia sobre

Imagen 4.: La puesta de sol. Escribe una historia sobre

Imagen 5.: La jugada de básquet. Escribe historias sobre

Tabla de posibilidades de ocurrencia.

Completa el cuadro de posibilidad de ocurrencia de tus historias, de acuerdo a de tabla siguiente y explica tu decisión.

Tabla 1 de posibilidades de las historias.

Letra	Nivel	Descripción
A	Imposible	La historia nunca sucederá
B	Casi imposible	La historia tiene poca posibilidad de ocurrencia
C	Incierto	No se puede saber con certeza si la historia ocurrirá
D	Muy posible	Es muy posible que ocurra la historia, pero no es absolutamente seguro.
E	Seguro	Seguridad de ocurrencia de la historia.

Cuadro de posibilidades

Imagen	**Posibilidad**	**Explicaciones**
La jugada de futbol		
Plantación tomates		
Niña en la ventana		

La puesta de sol		
La jugada de basket		

Situación 3:

Hoja de respuesta:

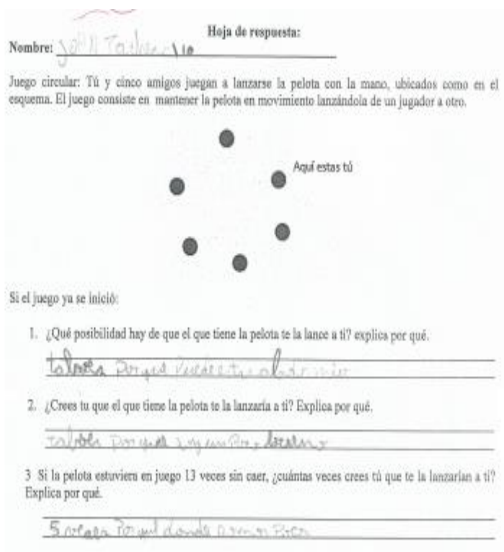
Nombres: ____Curso: ______

Video 1: Apostar a ¿Cuál es el orden de llegada de los competidores a la meta?

Apuesta Etapas	Deportista 1	Deportista 2	Deportista 3	Deportista 4	Explicación de la apuesta
E_1					
E_2					
E_3					

Anexo 2: Respuestas de los Alumnos, ejemplos

Situación 1:


Hoja de respuesta:

Nombre:

Juego circular: Tú y cinco amigos juegan a lanzarse la pelota con la mano, ubicados como en el esquema. El juego consiste en mantener la pelota en movimiento lanzándola de un jugador a otro.

Aquí estas tú

Si el juego ya se inició:

1. ¿Qué posibilidad hay de que el que tiene la pelota te la lance a ti? explica por qué.

2. ¿Crees tu que el que tiene la pelota te la lanzaría a ti? Explica por qué.

3. Si la pelota estuviera en juego 13 veces sin caer, ¿cuántas veces crees tú que te la lanzarían a ti? Explica por qué.


Hoja de respuesta:

Nombre:

Juego circular: Tú y cinco amigos juegan a lanzarse la pelota con la mano, ubicados como en el esquema. El juego consiste en mantener la pelota en movimiento lanzándola de un jugador a otro.

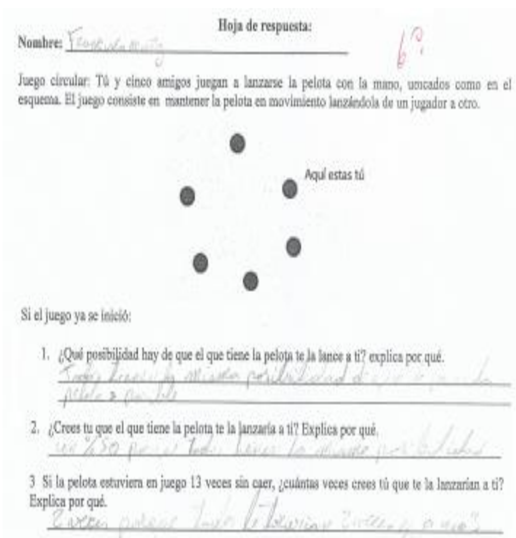
Aquí estas tú

Si el juego ya se inició:

1. ¿Qué posibilidad hay de que el que tiene la pelota te la lance a ti? explica por qué.

2. ¿Crees tu que el que tiene la pelota te la lanzaría a ti? Explica por qué.

3. Si la pelota estuviera en juego 13 veces sin caer, ¿cuántas veces crees tú que te la lanzarían a ti? Explica por qué.


Hoja de respuesta:

Nombre:

Juego circular: Tú y cinco amigos juegan a lanzarse la pelota con la mano, ubicados como en el esquema. El juego consiste en mantener la pelota en movimiento lanzándola de un jugador a otro.

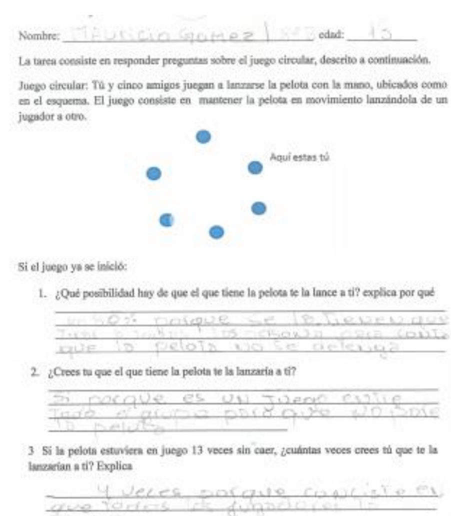
Aquí estas tú

Si el juego ya se inició:

1. ¿Qué posibilidad hay de que el que tiene la pelota te la lance a ti? explica por qué.

2. ¿Crees tu que el que tiene la pelota te la lanzaría a ti? Explica por qué.

3. Si la pelota estuviera en juego 13 veces sin caer, ¿cuántas veces crees tú que te la lanzarían a ti? Explica por qué.


Nombre: edad:

La tarea consiste en responder preguntas sobre el juego circular, descrito a continuación.

Juego circular: Tú y cinco amigos juegan a lanzarse la pelota con la mano, ubicados como en el esquema. El juego consiste en mantener la pelota en movimiento lanzándola de un jugador a otro.

Aquí estas tú

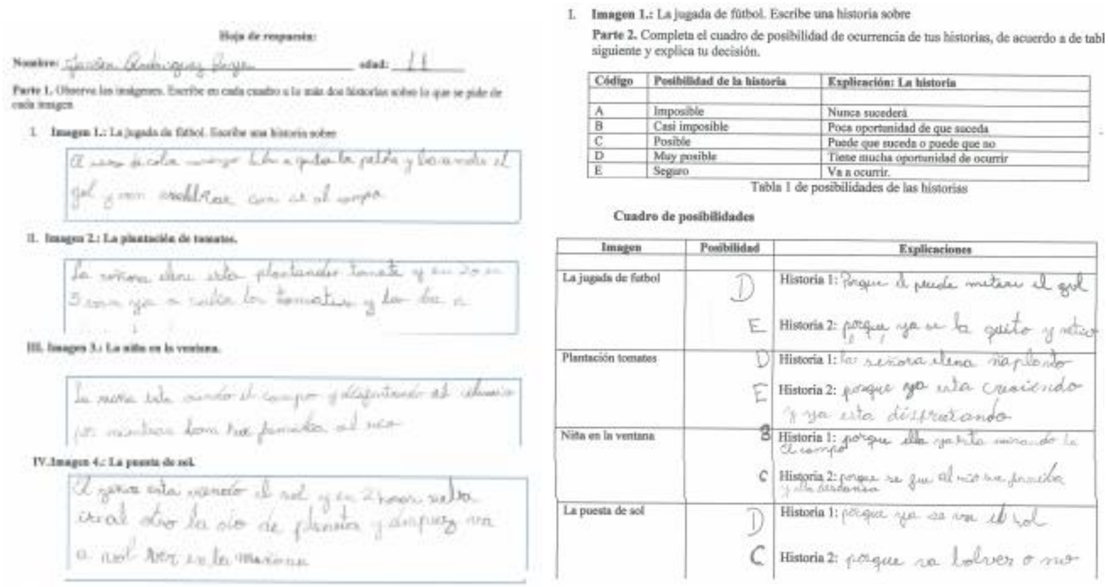
Si el juego ya se inició:

1. ¿Qué posibilidad hay de que el que tiene la pelota te la lance a ti? explica por qué

2. ¿Crees tu que el que tiene la pelota te la lanzaría a ti?

3. Si la pelota estuviera en juego 13 veces sin caer, ¿cuántas veces crees tú que te la lanzarían a ti? Explica

Situación 2:


Hoja de respuesta:

Nombre: Jarsen Rodriguez Reyes edad: 11

Parte 1. Observe las imágenes. Escribe en cada cuadro a lo más dos historias sobre lo que se pide de cada imagen

I. Imagen 1.: La jugada de fútbol. Escribe una historia sobre

el jugador de color rojo le da a [illegible] la pelota y [illegible] el gol y [illegible] con [illegible] el campo

II. Imagen 2.: La plantación de tomates.

la señora [illegible] esta plantando tomate y en 2 o 3 [illegible] ya a [illegible] los tomates y [illegible]

III. Imagen 3.: La niña en la ventana.

la niña esta viendo el campo y disfrutando del [illegible]

IV. Imagen 4.: La puesta de sol.

el señor esta viendo el sol y en 2 horas [illegible] [illegible] otro la [illegible] de planta y después [illegible]

I. Imagen 1.: La jugada de fútbol. Escribe una historia sobre

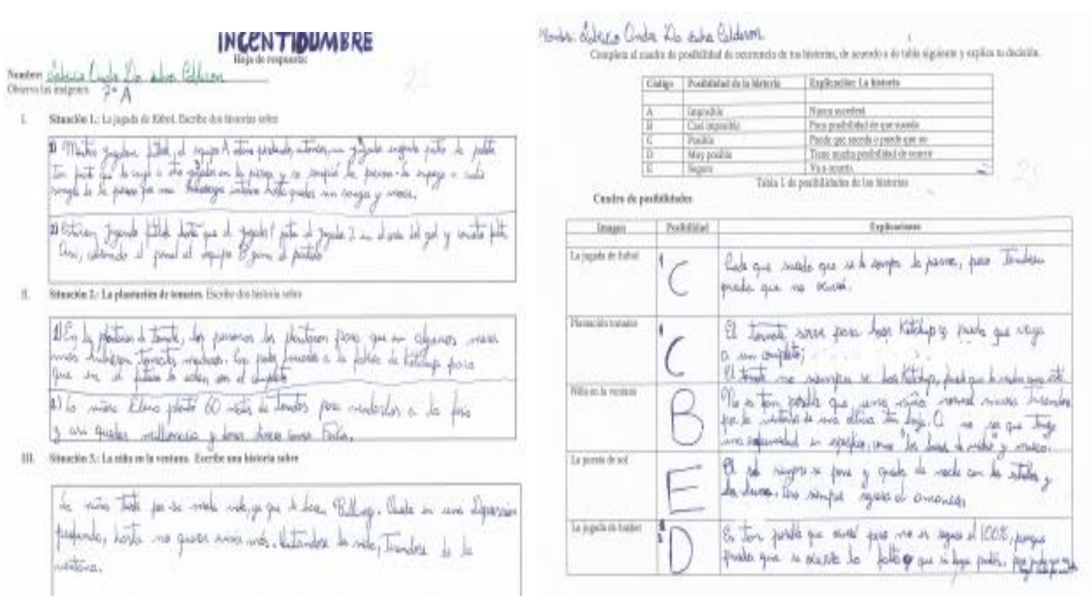
Parte 2. Completa el cuadro de posibilidad de ocurrencia de tus historias, de acuerdo a de tabl siguiente y explica tu decisión.

Código	Posibilidad de la historia	Explicación: La historia
A	Imposible	Nunca sucederá
B	Casi imposible	Poca oportunidad de que suceda
C	Posible	Puede que suceda o puede que no
D	Muy posible	Tiene mucha oportunidad de ocurrir
E	Seguro	Va a ocurrir.

Tabla 1 de posibilidades de las historias

Cuadro de posibilidades

Imagen	Posibilidad	Explicaciones
La jugada de futbol	D	Historia 1: Porque él puede meter el gol
	E	Historia 2: porque ya se le gusto y [illegible]
Plantación tomates	D	Historia 1: la señora llena [illegible]
	E	Historia 2: porque ya esta creciendo y ya esta disfrutando
Niña en la ventana	B	Historia 1: porque ella ya esta mirando el campo
	C	Historia 2: porque se fue al [illegible]
La puesta de sol	D	Historia 1: porque ya se va el sol
	C	Historia 2: porque va volver o no


INCENTIDUMBRE

Hoja de respuesta:

Nombre: [illegible]

Observa las imágenes: 7° A

I. Situación 1.: La jugada de fútbol. Escribe dos historias sobre

1) [illegible]

2) [illegible]

II. Situación 2.: La plantación de tomates. Escribe dos historia sobre

1) [illegible]

2) [illegible]

III. Situación 3.: La niña en la ventana. Escribe una historia sobre

[illegible]

Nombre: [illegible]

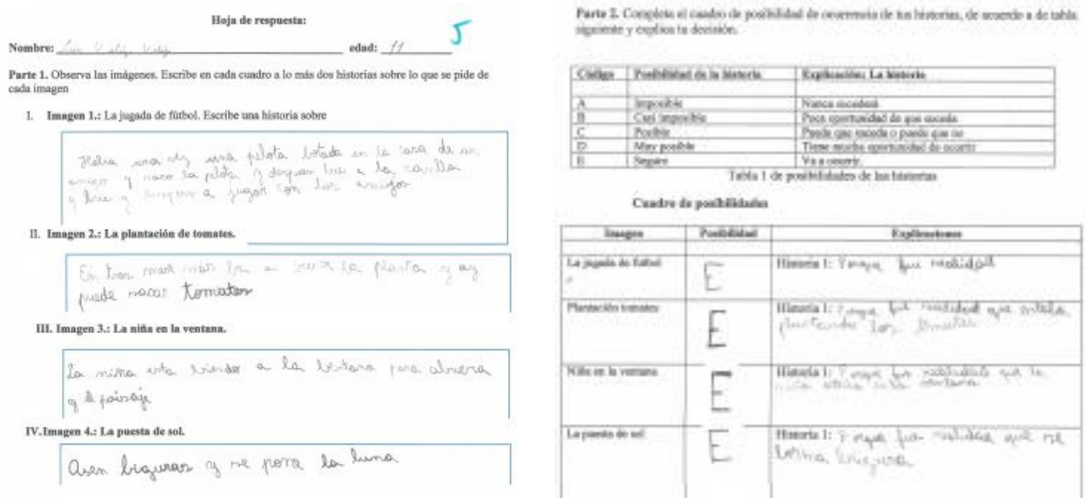
Completa el cuadro de posibilidad de ocurrencia de tus historias, de acuerdo a de tabla siguiente y explica tu decisión.

Código	Posibilidad de la historia	Explicación: La historia
A	Imposible	Nunca sucederá
B	Casi imposible	Poca posibilidad de que suceda
C	Posible	Puede que suceda o puede que no
D	Muy posible	Tiene mucha posibilidad de ocurrir
E	Seguro	Va a ocurrir.

Tabla 1 de posibilidades de las historias

Cuadro de posibilidades

Imagen	Posibilidad	Explicaciones
La jugada de futbol	C	[illegible]
Plantación tomates	C	[illegible]
Niña en la ventana	B	[illegible]
La puesta de sol	E	[illegible]
La jugada de futbol	D	[illegible]



Hoja de respuesta:

Nombre: [illegible] **edad:** 11

5

Parte 1. Observa las imágenes. Escribe en cada cuadro a lo más dos historias sobre lo que se pide de cada imagen

I. **Imagen 1.:** La jugada de fútbol. Escribe una historia sobre

[illegible]

II. **Imagen 2.: La plantación de tomates.**

[illegible] puede sacar tomates

III. **Imagen 3.: La niña en la ventana.**

La niña esta [illegible] a la ventana para [illegible] el paisaje

IV. **Imagen 4.: La puesta de sol.**

[illegible] y se pone la luna

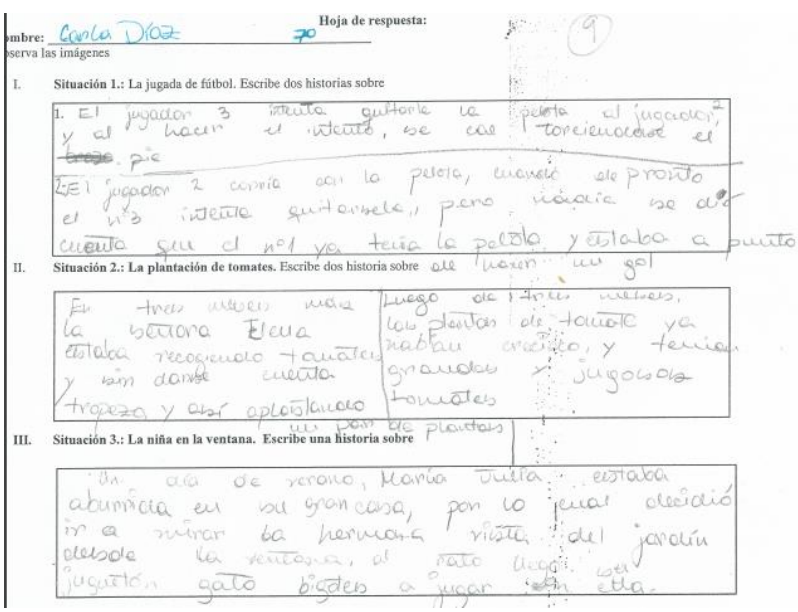
Parte 2. Completa el cuadro de posibilidad de ocurrencia de tus historias, de acuerdo a de tabla siguiente y explica tu decisión.

Código	Posibilidad de la historia	Explicación: La historia
A	Imposible	Nunca sucederá
B	Casi imposible	Poca oportunidad de que suceda
C	Posible	Puede que suceda o puede que no
D	Muy posible	Tiene mucha oportunidad de ocurrir
E	Seguro	Va a ocurrir.

Tabla 1 de posibilidades de las historias

Cuadro de posibilidades

Imagen	Posibilidad	Explicaciones
La jugada de fútbol	E	Historia 1: [illegible]
Plantación tomates	E	Historia 1: [illegible]
Niña en la ventana	E	Historia 1: [illegible]
La puesta de sol	E	Historia 1: [illegible]



Nombre: Carla Díaz 70 **Hoja de respuesta:** (9)

Observa las imágenes

I. **Situación 1.:** La jugada de fútbol. Escribe dos historias sobre

1. El jugador 3 intenta quitarle la pelota al jugador 2 y al hacer el intento, se cae torciendose el ~~brazo~~ pie

2. El jugador 2 corría con la pelota, cuando de pronto el nº3 intenta quitarsela, pero nadie se dio cuenta que el nº1 ya tenía la pelota y estaba a punto de hacer un gol

II. **Situación 2.: La plantación de tomates.** Escribe dos historia sobre

En tres meses más la señora Elena estaba recogiendo tomates y sin darse cuenta tropeza y así aplastando un par de plantas

Luego de tres meses, las plantas de tomate ya habían crecido, y tenían grandes y jugosos tomates

III. **Situación 3.: La niña en la ventana. Escribe una historia sobre**

Un día de verano, María Julia estaba aburrida en su gran casa, por lo cual decidió ir a mirar la hermosa vista del jardín desde la ventana, al rato llegó su juguetón gato bigotes a jugar con ella.

Carla Díaz

Completa el cuadro de posibilidad de ocurrencia de tus historias, de acuerdo a de tabla siguiente y explica tu decisión.

9

Código	Posibilidad de la historia	Explicación: La historia
A	Imposible	Nunca sucederá
B	Casi imposible	Poca posibilidad de que suceda
C	Posible	Puede que suceda o puede que no
D	Muy posible	Tiene mucha posibilidad de ocurrir
E	Seguro	Va a ocurrir.

Tabla 1 de posibilidades de las historias

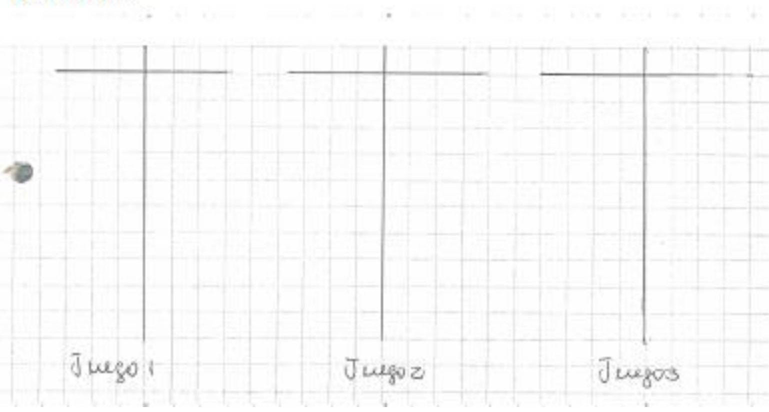
Cuadro de posibilidades

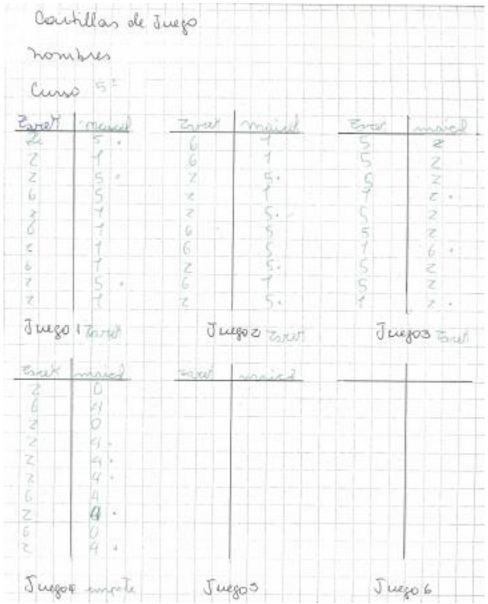
Imagen	Posibilidad	Explicaciones
La jugada de futbol	C	Porque en un partido de futbol, ~~[illegible]~~ nunca se sabe exactamente lo que va a pasar
Plantación tomates	C	Porque aunque hay muchas probabilidades de que los tomates crezcan bien, también hay posibilidades de que las plantas se sequen
Niña en la ventana	C	Porque no se exactamente si María Julia tiene un gato.
La puesta de sol	~~E~~ E	Es seguro que pase eso luego de la puesta del sol.
La jugada de basket	C	Es bastante seguro que pase, porque el equipo contrario siempre trataría de obtener el balón.

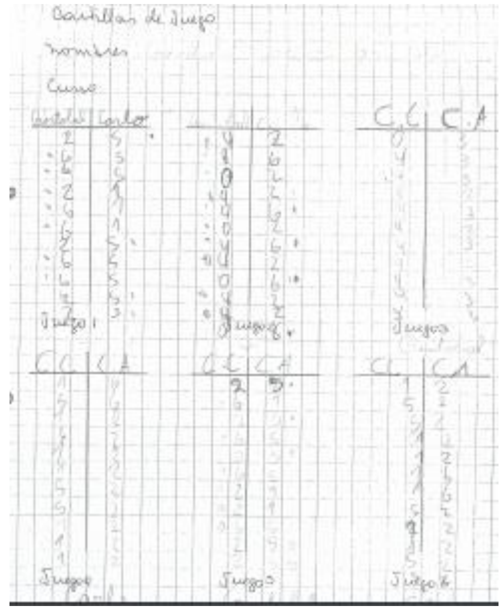
Situación 4:

Cartilla de juego: el juego de dados.

Nombres:




Cartillas de Juego
nombres
Curso 5°
Juego 1
Juego 2
Juego 3
Juego 4
Juego 5
Juego 6


Cartillas de Juego
nombres
Curso
Juego 1
Juego 3
Juego 5
Juego 6

Anexo 3: Sintesis sobre Curriculos Internacionales.

Propósitos, Orientaciones y Aprendizajes Esperados sobre la enseñanza de la probabilidad, en los currículos de 5 países latinoaméricanos.

Tabla 74 La probabilidad en 5 países latinoamericanos: decisiones curriculares

País / Nivel / Edad.	**APRENDIZAJE ESPERADO**	
Argentina	**Conocimiento**	**Habilidad**
PROPÓSITO: Los alumnos sean capaces de recurrir a nociones de probabilidad para cuantificar la incertidumbre.		
Primer Nivel, Primer grado 12 o 13 años	Nociones de: Suceso, suceso seguro, posible, imposible. Espacios muéstrales finitos.	Comparar probabilidades Cuantificar
Segundo Nivel, Segundo Grado 13 o 14 años	Frecuencia relativa. Probabilidad Teórica Métodos de conteo: Principio multiplicativo.	Comparación de probabilidad frecuencial y teórica.
Tercer Nivel, Tercer Grado 14 o 15 años.	Fórmulas de combinatoria	Explorar fórmulas, producirlas y utilizarlas.
PROPÓSITOS[8]**:** Vincularse con la toma de decisiones, analizando situaciones extra matemáticas como las vinculadas a los juegos de azar. Interpretar y aplicar conceptos y procedimientos básicos de la estadística y la probabilidad, reconociendo los alcances y limitaciones de sus usos en la toma de		

[8] Los grados corresponden al ciclo orientado de la Enseñanza Secundaria.

decisiones de acuerdo a la situación planteada.		
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS: Ponen en juego actividades de “análisis de situaciones de probabilidad y el conveniente uso de fórmulas”.		
Cuarto Nivel Primer Grado 15 o 16 años	Fórmula de Laplace. Probabilidad Experimental. Casos Favorables y Posibles. Equiprobabilidad. Métodos de Conteo.	Analizan la posibilidad de utilizar la ley de Laplace o el enfoque experimental. Calcular probabilidad aplicando fórmulas.

País / Nivel / Edad.	APRENDIZAJE ESPERADO	
Colombia	**Conocimiento**	**Habilidad**
PROPÓSITOS: Este eje hace énfasis en el desarrollo del pensamiento aleatorio, presente en las ciencias, en la cultura y en las formas de pensar cotidiano.		
ORIENTACIÓN DIDÁCTICA: • Los conceptos y las técnicas deben introducirse dentro de un contexto práctico. • No es necesario desarrollar completamente las técnicas en el momento en que se presentan por primera vez. • No es necesario ni deseable una justificación teórica completa de todos los temas, algunos de ellos se tratarán en un problema particular, otros se considerarán mediante experiencias.		
Primer Nivel: Tercer Grado. 8 o 9 años	Posibilidad de ocurrencia de sucesos aleatorios. Resultado de experimentos aleatorios; proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.	Explicar el nivel de posibilidad de ocurrencia de sucesos aleatorios. Predecir posibilidades de ocurrencia.
Segundo Nivel.	Posibilidad de ocurrencia de sucesos aleatorios.	Conjeturar y poner a prueba las predicciones

Quinto Grado. 10 u 11 años.		
Tercer Nivel. séptimo grado 12 o 13 años.	Diagrama de árbol, tabla de doble entrada. Resultado de experimentos aleatorios; proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.	Modelar situaciones de incertidumbre, discutir y predecir posibilidad de ocurrencia. Conjeturar resultados
Cuarto Nivel. Noveno grado 14 o 15 años	Probabilidad Clásica Listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo. Espacio Muestral, Evento, independencia...	Comparar resultados experimentales Calcular probabilidad de eventos simples Usar conceptos básicos de probabilidad.

País / Nivel / Edad.	**APRENDIZAJE ESPERADO**	
México	**Conocimiento**	**Habilidad**
PROPÓSITO: Los alumnos calculen la probabilidad de experimentos aleatorios simple, mutuamente excluyentes e independientes.		
ORIENTACIÓN DIDÁCTICA: Los conocimientos de este grado corresponderían a un primer contacto con el estudio de la noción de probabilidad; el registro de resultados de los juegos de azar permite caracterizarlos como juegos en los que las posibilidades de ganar no depende de la habilidad del jugador.		
Primer nivel. 13 – 14 años.	Suceso Simple Resultados Posibles. Frecuencia absoluta y relativa. Probabilidad experimental. Principio Multiplicativo.	Identificar y jugar juegos de azar. Registrar Resultados Estimación de resultados. Elaborar procedimientos de

	Diagrama de Árbol, Tabla de Doble Entrada.	verificación.
ORIENTACIÓN DIDÁCTICA: Los contenidos de este nivel se relacionan con los significados de la probabilidad: intuitivo, frecuencial y clásico.		
Segundo Nivel. 14 – 15 años	Relación: es más (o menos) probable que … Gráficas de distribuciones de probabilidad frecuencial y teórica Probabilidad Frecuencial.	Comparar en forma intuitiva. Representar la probabilidad en distintos registros y significados.

Uruguay

País / Nivel / Edad.	**APRENDIZAJE ESPERADO**		
Uruguay	**Nivel / Edad**	**Conocimiento**	**Habilidad**
PROPÓSITO: Desarrollo del pensamiento no determinista mediante la enseñanza de la probabilidad.			
Nivel 0 5 años	Sucesos simples.		Exploración de situaciones de azar.
Nivel 1 6 años	Experimentos aleatorios.		
Nivel 2 7 años	El espacio muestral, suceso seguro, posible e imposible.		Diferenciación de sucesos.
Nivel 3 8 años	Los sucesos simples y compuestos. El diagrama de árbol.		Representación de sucesos.
Nivel 4 9 años	Frecuencia Relativa. Probabilidad de un suceso.		Comparación de Frecuencias Relativas.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Suceso no probable, poco probable, con alto grado de probabilidad o seguro.</td><td>Clasificación de sucesos</td></tr>
<tr><td>Nivel 5
10 años</td><td colspan="2">Conjeturas sobre sucesos aleatorios.
Equiprobabilidad, tablas de frecuencia, combinatoria.</td><td>Formulación de conjeturas.
Resolución de problemas.
Organización de datos en tablas de frecuencia.</td></tr>
<tr><td>Nivel 6
11 años</td><td colspan="2">Probabilidad Experimental</td><td>Predicen y calcular probabilidad de sucesos experimentales</td></tr>
<tr><td colspan="4">ORIENTACIÓN DIDÁCTICA: El concepto de probabilidad teórica se presentará como la tendencia de la probabilidad experimental al aumentar el número de experimentos. Se sugiere comprobar experimentalmente la ley de los grandes números. Resolver problemas de aplicaciones en diversos contextos</td></tr>
<tr><td>Primer ciclo básico secundaria</td><td>Nivel 7
13 años</td><td>Ley de Laplace</td><td>Resolver problemas elementales de probabilidad.</td></tr>
<tr><td>Segundo ciclo básico secundaria</td><td>Nivel 8
15 años</td><td>Probabilidad de un suceso, Sucesos Equiprobables, Definición de Laplace, Frecuencia Relativa y Probabilidad y la Ley de los Grandes Números</td><td>Resolver problemas de probabilidad.</td></tr>
</table>

Chile

País / Nivel / Edad.	APRENDIZAJE ESPERADO		
Chile	**Nivel / Edad**	**Conocimiento**	**Habilidad**
PROPÓSITOS[9]: Los alumnos se inicien en temas relacionados con el azar. Estos conocimientos les permitirán reconocer estas representaciones en su vida familiar. Para lograr este aprendizaje será necesario formular preguntas relevantes, basadas en las experiencias e intereses de los alumnos para que luego registren lo obtenido.			
5º básico 10 años	Posibilidad de ocurrencia de un suceso: seguro – posible - poco posible – imposible.		Describir la Posibilidad de ocurrencia de un suceso. Comparar probabilidades.
6º básico 11 años	Probabilidad experimental		
7° básico 12 años.	Frecuencia Relativa		Predecir posibilidad de ocurrencia.
8° básico 13 años	Equiprobabilidad Probabilidad Teórica		Calculan probabilidad teórica y verifican con experimentos.
PROPÓSITOS[10] (7° básico): Comparar y relacionar la probabilidad experimental con la probabilidad teórica, mediante experimentos aleatorios, diagramas de árbol, tablas o gráficos			
7ª básico 12 años	Probabilidad Experimental Probabilidad Teórica Diagramas de árbol. Tablas de Frecuencia y gráficos		Comparan Probabilidad Experimental con la Probabilidad Teórica

[9] Currículo 2011
[10] Ajuste Curricular 2016

PROPÓSITOS[11] (8° básico): Estimen intuitivamente y calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos; determinen probabilidad experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias		
8ª básico 13 años	Probabilidad experimental y teórica. Modelos de probabilidad	Estimaciones intuitivas de probabilidad. Calculo de probabilidad. Construcción de modelos de probabilidad

[11] Ajuste Curricular 2016