



UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

**PROCESOS DE APREHENSIÓN VISUAL EN ESTUDIANTES DE SEXTO
BÁSICO CUANDO RESUELVEN TAREAS DE CUADRILÁTEROS**

Tesis presentada para optar al grado académico de Magíster en Educación Matemática

POR

Cristian Iván Scheihing Águila

Director de Tesis: Dr. Carlos Cabezas Manríquez

Profesora co – Guía: Dr. Elizabeth Hernández Arredondo

Osorno, Chile. Enero de 2020

DEDICATORIA

Dedico esta Tesis a todos quienes han sido parte de mi formación primero como persona y luego como profesor. A mis padres, quienes me enseñaron el valor de la vida y de las personas. A mí amada esposa, por su generosa y admirable pasión por nuestra bella familia. A mi querido hijo, pilar fundamental en mí, que me permite ver todos los días lo hermosa que es la vida. A mis hermanos, quienes con su constancia y perseverancia me enseñaron a lograr mis propósitos.

AGRADECIMIENTOS

A mi esposa por su incondicional apoyo en esta empresa.

A mis padres con quienes siempre he contado.

INDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN.....	1
ABSTRACT.....	3
INTRODUCCIÓN	5
CAPITULO 1: Planteamiento del Problema de Investigación.....	7
1.1 Introducción	7
1.2 La Geometría en el Mundo.....	7
1.3 La Geometría en Chile	9
1.3.1 Informes PISA de Chile.....	10
1.4 El Objeto y/o el Fenómeno en Currículo de Chile	13
1.4.1 Extracto de Bases curriculares de Kínder a Sexto Básico.....	13
1.5 Sobre Investigaciones en Geometría	21
1.6 Planteamiento del Problema.....	22
CAPITULO 2: Referentes Teórico	23
2.1 Introducción	23
2.2 Visualización.....	23
2.3 Aprehensión.....	25
2.3.1 Aprehensión Perceptiva.....	27
2.3.2 Aprehensión Discursiva.....	27
2.3.3 Aprehensión Operativa.....	28
2.4 Unidades figurales.....	28
2.5 Categorización Dentro de la Geometría	30
2.5.1 El Botánico.....	31
2.5.2 El Agrimensor Geómetra.....	31
2.5.3 El Constructor.....	32
2.5.4 El Inventor Artesano.	32
2.6 Modelo de Actividad Mental.....	33
2.7 Objetivo de la investigación.....	36
CAPITULO 3: Metodología.....	38
3.1 Tipo de Metodología	38

3.2 Participantes.....	38
3.3 Instrumentos.....	39
3.3.1 Diagnóstico Inicial.....	39
3.3.2 Actividad: Doblado de papel.....	40
3.3.3 Actividad: Construcción de cuadriláteros.....	42
3.3.4 Diagnóstico Final.....	42
3.4 Fases de Aplicación.....	42
3.5 Unidades de análisis.....	43
CAPITULO 4: Análisis de resultados.....	44
4.1 Introducción.....	44
4.2 Análisis del Diagnóstico.....	45
4.3 Análisis Actividad Doblado de Papel.....	48
4.4 Análisis Trabajo Grupal, Cosntrucción y Definición de Conceptos.....	52
4.5 Analisis Diagnóstico Final.....	58
CAPITULO 5: Conclusiones.....	62
5.1 Introducción.....	62
5.2 Conclusión del Objetivo Específico 1.....	63
5.3 Conclusión del Objetivo Especifico 2.....	64
5.4 Conclusión del Objetivo General.....	66
5.5 Aportes y Limitaciones del Estudio.....	68
BIBLIOGRAFÍA.....	69
ANEXO.....	74
Anexo 1 Diagnóstico de cuadriláteros.....	75
Anexo 2 Actividad Doblado de Papel.....	77
Anexo 3 Actividad Construcción de Cuadriláteros.....	79
Anexo 4 Video 1 Niños dialogando sobre construcción de cuadrado y elementos secundarios... 80	80
Anexo 5 Video 2 Niños dialogando sobre construcción de cuadrado y elementos secundarios... 81	81
Anexo 6 Video 3 Niños dialogando sobre construcción de rombo y elementos secundarios..... 82	82
Anexo 7 Video 6 Niños dialogando sobre construcción de romboide y elementos secundarios.. 83	83
Anexo 8 Video 7 Niños dialogando sobre construcción de rombo y elementos secundarios..... 84	84
Anexo 9 Video 8 Niños dialogando sobre construcción de rectángulo y elementos secundarios. 85	85
Anexo 10 Video 10 Niños dialogando sobre construcción de romboide elementos secundarios. 86	86
Anexo 11 Video 11 Niños dialogando sobre construcción de trapecio y elementos secundarios. 87	87
Anexo 12 Video 1 Niños dialogando sobre construcción de romboide y elementos secundarios 87	87

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1 Extracto Objetivos de Aprendizaje: Prebásica-primero-segundo básico ¡Error! Marcador no definido.4	
Tabla 1.2 Extracto Objetivos de Aprendizaje: Tercero, cuarto, quinto y sexto básico	17
Tabla 2.1 Cuatro entradas clásicas a la geometría	31
Tabla 2.2 Modo comprensión y de conocimiento relacionado con cada manera de ver.....	33
Tabla 4.1 Categorización de estudiantes	45
Tabla 4.2 Categorización por aprehensiones	48
Tabla 4.3 Maneras de la geometría	54
Tabla 4.4 Respuestas esperadas	54
Tabla 4.5 Categorización de estudiantes	59
Tabla 5.1 Categorización de actividades según tipo de aprehensión	64
Tabla 5.2 Categorización final de estudiantes	65

ÍNDICE DE FIGURAS E IMÁGENES

Figura 1.1 Tarea Texto educación prebásica (MINEDUC, 2016, P 84)	15
Figura 1.2 Tarea Texto matemáticas de primero básico (MINEDUC, 2016, P 92)	15
Figura 1.3 Tarea Texto matemáticas de segundo básico (MINEDUC, 2016, P 75)	16
Figura 1.4 Tarea Texto matemáticas de tercero básico (MINEDUC, 2016, P 79).....	18
Figura 1.5 Tarea Texto matemáticas de cuarto básico (MINEDUC, 2016, P 105).....	19
Figura 1.6 Tarea Texto matemáticas de quinto básico (MINEDUC, 2016, P 91)	20
Figura 1.7 Tarea Texto matemáticas de sexto básico (MINEDUC, 2016, P 107)	20
Figura 2.1 Dibujos de figuras	26
Figura 2.2 Dibujo aprehensión silla	27
Figura 2.3 Triangulo equilátero.....	27
Figura 2.4 Triángulo equilátero.....	28
Figura 2.5 Interaccion entre definición e imagen.....	34
Figura 2.6 Deducción puramente formal.....	35
Figura 2.7 Deducción según pensamiento intuitivo	35
Figura 2.8 Representacion intuitiva	36
Figura 3.1 Diagnostico cuadriláteros	40
Figura 3.2 Actividad Doblado de papel	41
Figura 3.3 Actividad Construcción de Cuadrilateros	42
Figura 4.1 Estudiante A16.....	46
Figura 4.2 Estudiante A8.....	47
Figura 4.3 Estudiante A20.....	47
Figura 4.4 Estudiante A7.....	49
Figura 4.5 Estudiante A7.....	49
Figura 4.6 Estudiante A5.....	50

Figura 4.7 Estudiante A9.....	51
Figura 4.8 Estudiante A13.....	51
Figura 4.9 Ángulos y tiras de papel.....	52
Figura 4.10 Extracto transcripción video 1.....	53
Figura 4.11 Extracto transcripción video 11.....	55
Figura 4.12 Respuestas grupo 4	56
Figura 4.13 Extracto transcripción video 9 grupo 2	57
Figura 4.14 Extracto transcripción video 7 grupo 3	58
Figura 4.15 Estudiante A31.....	59
Figura 4.16 Estudiante A21.....	60
Figura 4.17 Estudiante A22.....	60
Figura 4.18 Estudiante A25.....	60
Figura 5.1 Extracto transcripción video 9.....	66

ÍNDICE DE ABREVIATURAS

ERCE	: Estudio Regional Comparativo y Explicativo.
ICME	: International Congress on Mathematical Education.
ICMI	: International Commission on Mathematical Instruction.
MINEDUC	: Ministerio de Educación Chileno.
NCTN	: National Council of Teachers of Mathematics.
OCDE	: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.
PISA	: Programme for International Student Assessment.
PSU	: Prueba de Selección Universitaria.
SIMCE	: Sistema de Medición de la Calidad de la Educación.

RESUMEN

El presente proyecto de investigación se inserta dentro de la línea de investigación de didáctica de los diversos marcos matemáticos, en particular se interesa por explorar las capacidades geométricas que presentan estudiantes de sexto básico de una escuela en el sur de Chile, mientras resuelven tareas de cuadriláteros que involucran dos tipos de acercamiento a este objeto matemático como:

- Concepto imagen
- Concepto definición

La exploración de los cuadriláteros desde este doble foco se asume después de una revisión curricular y de literatura, las que confluyen en presentar una problemática interesante a explorar, pues nos presentan las respuestas de los estudiantes, enfocadas desde estos puntos de vista. Apuntalados a la anterior idea, este trabajo se apoya en el modelo de Duval (1998) sobre las formas de aprehender, es decir, de ver la figura matemáticamente.

Por ello, apoyados en un paradigma de investigación cualitativo de carácter descriptivo e interpretativo se explora la coordinación de procesos cognitivos de aprehensión, lo que revela de manera preliminar que los estudiantes priorizan en pruebas de lápiz y papel el uso en una aprehensión discursiva anclada en lo visual, situada como un referente directo de la idea del objeto matemático como un concepto imagen. Mientras el uso de manipulables en el salón de clases les plantea a los estudiantes un desafío, donde movilizan una aprehensión operatoria de reconfiguración, lo que parece indicar que la concepción del objeto matemático se da en los dos focos de la propuesta como: concepto imagen y concepto definición.

Palabras claves: visualización, cuadriláteros, aprehensión

ABSTRACT

This research is inserted within the didactic research line of the various mathematical frameworks. In particular, it is interested in exploring the geometric abilities presented by sixth grade students of a school in southern Chile, while solving quadrilateral tasks that involve two types of approaches to this mathematical object such as:

- Concept image
- Concept definition

The exploration of the quadrilaterals from this double focus is assumed after a curricular and literature review, which converge in providing an interesting problem to explore, as they present the students' responses, focused from these points of view. Underpinned by the previous idea, this work is based on the Duval model (1998) on ways to apprehend, that is, to see the figure mathematically.

Therefore, supported by a descriptive and interpretive qualitative research paradigm, the coordination of cognitive apprehension processes is explored, preliminarily revealing that students prioritize, in pencil and paper tests, the use in a discursive apprehension anchored in the visual, located as a direct reference of the idea of the mathematical object as a concept image. Meanwhile, the use of manipulatives in the classroom poses a challenge to the students, where they mobilize an operative apprehension of reconfiguration, which seems to indicate that the conception of the mathematical object occurs in the two focuses of the proposal as: concept image and concept definition.

Keywords: visualization, quadrilaterals, apprehension

INTRODUCCIÓN

Entre los siglos XVII y parte del XX se produjo un alejamiento del concepto de visualización llamada “desvisualización” (Davis 1993). Visualizar ya no era necesario, por lo tanto, fue dejada de lado y considerada un obstáculo para las matemáticas. Con la llegada del desarrollo en el campo informático y los estudios del funcionamiento de nuestra mente, creció el interés de los investigadores por la relevancia que juega la visualización al momento de aprender matemáticas (Presmeg, 2006). Investigadores a fines del siglo XX afirmaban que la visualización estaba renaciendo (Zimmerman y Cunningham, 1991).

La importancia que se le da a la visualización en la actualidad, es cada vez más relevante, más aún si está ligada a la enseñanza de las matemáticas, adquiere una gran importancia. (Villani, 1998; Arcavi 2003; Duval 2003; Presmeg, 2006)

Duval (1998a, 2003) considera que la visualización presenta matices y diferentes características dependiendo de la representación semiótica que se esté considerando. Se considera a la visualización una actividad cognitiva.

El problema que aborda este estudio está relacionado con la visualización del objeto matemático cuadriláteros, enfocado en alumnos de sexto básico de un colegio de Puerto Montt, Chile.

El marco teórico de esta investigación se apoya en lo planteado por Duval (1998), quién señala la importancia de la visualización, de la aprehensión y como puede aportar en la enseñanza de la geometría y su relación con el mundo que nos rodea. Dentro del mismo marco encontramos a Duval (2016) quién plantea las formas de ver la geometría como: botánica, agrimensor, constructor y artesano. Categorías que permitirán analizar a los estudiantes. Con el objetivo de analizar la actividad mental que presenten los estudiantes al momento de resolver las actividades, se utilizará el modelo de actividad mental de Vinner (1991).

La metodología planteada es de tipo cualitativa descriptiva, para su implementación se seleccionó un sexto básico del colegio Santo Tomás de la ciudad de Puerto Montt. Para este trabajo se diseñaron e implementaron actividades relacionadas con la visualización de los cuadriláteros, que se pueden resolver con lápiz y papel; y una actividad que permite la manipulación de material concreto.

El análisis de las actividades permitirá dar cuenta, a través del desarrollo de estas, como visualizan la imagen concepto y el concepto definición de los cuadriláteros.

CAPITULO 1: Planteamiento del Problema de Investigación

1.1 Introducción

En este capítulo se describen los elementos que dan origen a la problemática de este estudio, el que se sitúa en el eje de la geometría escolar en enseñanza básica y que explora el complejo proceso de enseñanza-aprendizaje de esta. Por ello, se desarrolla una descripción que se enfoca a aspectos de la visualización de los cuadriláteros, donde se exploran las habilidades que exponen los estudiantes para representarlos, transformarlos, generarlos, documentarlos y reflejar la información que den cuenta del pensamiento y el lenguaje del que aprenden. Enseguida se aborda esta problemática haciendo una descripción de las siguientes dimensiones:

- La geometría en el mundo y Chile y su relación con las pruebas estandarizadas
- Currículum chileno en 6to básico y su acercamiento a los cuadriláteros.
- Un recorrido por algunos de los resultados de investigación en los procesos de visualización en geometría

1.2 La Geometría en el Mundo

A través del tiempo se ha considerado a la geometría como uno de los pilares de la formación académica y cultural del hombre, debido a su aplicación en variados contextos. Su estudio y dedicación permite la formación y el desarrollo del razonamiento lógico (Báez e Iglesias, 2007), esto último, contribuye en los estudiantes, a desarrollar habilidades que les permiten visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente, argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración(jones 2002)

Para enfocar la relevancia que tienen la geometría en la educación, enseguida se dialoga del documento “Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI”, elaborado por el International Congress on Mathematical Education (ICME) en los años

noventa, donde aclara la importancia de la geometría en el proceso de formación de los estudiantes, al ser considerada como “una herramienta para comprender, describir e interactuar con el espacio en que vivimos, es quizás la parte más intuitiva, concreta y unida a la realidad de las matemáticas” (International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), 1998, p.337, citado en Blanco y Barrantes, 2003, p.2).

En el año 2003 el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), menciona a la visualización espacial y su importancia en el pensamiento geométrico, haciendo referencia a la geometría como la rama que se preocupa del estudio de las formas y estructuras. La importancia de esta disciplina en la formación básica es que permite desarrollar el pensamiento lógico de los niños y una herramienta fundamental es el aprendizaje de la Geometría, tal como lo plantearon Pierre y Dina Van Hiele (1957), quienes diseñaron un modelo que trata de explicar, ¿cómo evoluciona el razonamiento geométrico de los estudiantes?

Este modelo consta de “*los niveles de razonamiento geométrico*”: reconocimiento, análisis, clasificación, deducción formal y rigor lógico (Van Hiele, 1957, 1959).

Hay que señalar que la construcción de los modelos geométricos y el razonamiento espacial, como un punto relevante del pensamiento geométrico, pues permite describir el entorno que nos rodea. Lo anterior constituye una parte fundamental en el área de la resolución de problemas, no solo geométrico, también matemático o del pensamiento en general. Para Báez e Iglesias (2007) y Paredes, Iglesias y Ortiz (2007), sostienen que la enseñanza de la geometría, está asociada a un sinnúmero de problemas. Pero una limitante que encontramos es que la enseñanza de la geometría se sigue impartiendo de manera magistral, es decir, prima el discurso del profesor, siendo esta práctica, el principal medio didáctico con el cual se cuenta.

En geometría, Hernández y Villalba (2001) sostienen que a los estudiantes solo se les muestra un producto final, por lo tanto, los estudiantes no son parte del desarrollo de su conocimiento matemático, dejando de lado la creatividad y los procesos de visualización. Los estudiantes egresados como docentes de matemáticas, afirman que lo más difícil fue el estudio de la geometría, Barrantes y Blanco (2004).

1.3 La Geometría en Chile

Los estudios realizados por el Estudio Regional Comparativo y Explicativo (ERCE, 2013) ha estudiantes de sexto básico muestran que estos presentan un bajo nivel de desempeño, el cual alcanza a un 16,2% en el área de las matemáticas. Estos estudiantes ven afectado su proyección en el sistema de educación escolar, en los niveles superiores de educación y en el ámbito laboral. Otro estudio con la mirada del Sistema Nacional de Evaluación de Resultados de Aprendizaje (SIMCE, 2013), revela que en 6to básico los resultados en matemáticas se mantienen en equilibrio desde el 2013, es decir, no han revelado ningún avance ni retroceso.

Por otro lado, el currículum chileno, sumado a la experiencia docente, permite ver que los temas esenciales en el aprendizaje de figuras geométricas; se centran en los triángulos, existiendo mucho material y trabajos previos. La elección de los cuadriláteros, como objeto matemático de estudio, reside en la preponderancia que ejerce sobre los demás contenidos en la geometría y los cursos superiores. Su importancia también se sustenta, porque son la base del pensamiento lógico y formal que permite el desarrollo de las habilidades geométricas en nivel de educación media. Se desarrollarán un conjunto de nociones y propiedades que son fundamentales para temas posteriores.

Diversos autores se han enfocado en el estudio de los cuadriláteros, quienes identifican y analizan las dificultades asociadas a la enseñanza de los cuadriláteros, como es el caso de (Renzulli y Scaglia 2006, Morales y Maje 2011). Para los autores, su estudio sobre los cuadriláteros se enfoca en las características relevantes en relación de los esquemas mentales que se forman los estudiantes respecto de figuras prototípicas. Esta realidad no se aleja de las aulas de nuestro país, debido a que las respuestas de los estudiantes están supeditadas a figuras prototípicas.

Los estudios realizados por Morales y Majé (2011) enfocados en desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes, desde la enseñanza de los cuadriláteros y el uso de software GeoGebra, tomaron como marco teórico el modelo de Van Hiele. En este trabajo los autores mencionan que los errores y dificultades más frecuentes de los estudiantes se

relacionan con el uso de figuras estereotípicas y el déficit para realizar clasificaciones inclusivas.

Este trabajo surge como una preocupación por el aprendizaje de la geometría, a partir de la experiencia docente, en particular de los cuadriláteros, debido a que los estudiantes presentan dificultades para conceptualizar conocimientos básicos de geometría tales como: Paralelogramos, Cuadriláteros, Trapecios, Trapezoides, Noción de paralelismo y perpendicularidad, Propiedades de cuadriláteros, Áreas de figuras planas, entre otros.

El sistema escolar en Chile es el producto de diferentes políticas públicas educativas emprendidas por el Estado, todas ellas producto de adoptar diferentes enfoques orientadores, provistos desde las políticas internacionales de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) en su propuesta del 2003, la que hace un llamado especial a desarrollar la alfabetización matemática en los estudiantes (Rico, 2007).

Para dar un enfoque a la alfabetización que plantea Rico, nos referiremos a los informes PISA respecto de la enseñanza de la geometría en nuestro país.

1.3.1 Informes PISA de Chile

La enseñanza de la geometría en Chile presenta una crisis dentro de la formación matemática, mostrando serias deficiencias, lo que queda demostrado en los análisis de los resultados de las pruebas de medición tanto nacionales (SIMCE, 2003, 2006, 2010, 2012 y 2015), como internacionales (PISA, 2000, 2006, 2009, 2012, 2015 y 2018; TIMMS, 2003).

La prueba PISA (2000) revela que un estudiante promedio solo logra las tareas básicas de matemáticas o ciencias. Los conocimientos y las habilidades que tienen los estudiantes en esta categoría indican que son capaces de completar procedimientos de un solo paso, cálculos sencillos o procesos matemáticos básicos. Es decir, los estudiantes son incapaces de manipular modelos matemáticos que les sean entregados o explicitados, tampoco elegir o definir procedimientos que permitan encontrar una solución para un problema de uno o varios pasos. Los estudiantes reconocen información matemática explícita o de un texto que sea familiar, PISA (2000)

Para dar una mirada amplia y que permita comprender como es una evaluación PISA, se describirán los niveles de desempeño de la prueba de matemáticas (OCDE 2006):

- Nivel 6 (más de 668 puntos): Los estudiantes que alcanzan este nivel son capaces de conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y en su elaboración de modelos para resolver problemas complejos.
- Nivel 5 (de 607 a 668 puntos). En este nivel los estudiantes pueden desarrollar y trabajar con modelos para situaciones complejas. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas complejos relacionados con estos modelos.
- Nivel 4 (de 545 a 606 puntos). Los estudiantes son capaces de trabajar efectivamente con modelos explícitos para situaciones complejas concretas. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo símbolos y asociándolos directamente a situaciones del mundo real.
- Nivel 3 (de 483 a 544 puntos). Quienes se sitúan en este nivel son capaces de ejecutar procedimientos descritos claramente, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales y solución de problemas.
- Nivel 2 (de 421 a 482 puntos). Los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren únicamente de inferencias directas. Pueden extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un solo tipo de representación.
- Nivel 1 (de 358 a 420 puntos). Los estudiantes son capaces de contestar preguntas que impliquen contextos familiares donde toda la información relevante esté presente y las preguntas estén claramente definidas.
- Por debajo del nivel 1 (menos de 358 puntos). Se trata de estudiantes que no son capaces de realizar las tareas de matemáticas más elementales que pide PISA.

La bibliografía sobre las pruebas PISA aplicadas en Chile revelan que en eje de espacios y formas los estudiantes no alcanza el umbral del nivel 2; el 22% de los estudiantes supera el nivel 2 y hay un 2% del total que llega al nivel 5 o 6 (PISA 2012).

En la prueba PISA (2006) se reporta que los estudiantes chilenos se encuentran en el nivel 1 o bajo, solo un 25,5% se encuentra en el nivel 2; entre el nivel 3 y 4 hay un 23,8% de los estudiantes chilenos y 1,4% de nuestros estudiantes se encuentra entre el nivel 5 y 6. Los resultados de PISA (2009) colocan a Chile debajo del promedio de la OCDE, otro punto de importancia que preocupa a nuestro país, revela que el 50% de los estudiantes de 15 años de edad no llegan al nivel 2 de competencias matemáticas, de un total de 6 niveles que propone la prueba PISA del año 2015. Nivel que les permite interpretar, reconocer, extraer información relevante de una sola fuente, usar un solo tipo de representación, emplear algoritmos y fórmulas convencionales y procedimientos básicos, interpretar resultados en forma literal.

Los informes de PISA muestran una preocupación por los estudiantes chilenos, identificando una falta de madurez matemática respecto del pensamiento, razonamiento, análisis y reflexión. Todo lo anterior lo limita a situaciones simples que no estén relacionadas con la realidad. Debido a que el currículum chileno está influenciado por programas y organizaciones internacionales, los resultados muestran una falencia dentro del sistema educativo, dejando en duda a la formación docente. (Simce 2012)

En su constante preocupación por los países participantes, la OCDE ha elaborado una serie de políticas educativas, también ha impulsado el desarrollo de competencias adecuadas y necesarias que permitan obtener mejores empleos. Todo lo anterior está enfocado en la mejora de la calidad de vida de las personas.

En el año 2019, fueron entregados a Chile, resultados de las estrategias y competencias que evalúa la OCDE, con el objetivo de desarrollar estas habilidades para que sean usadas de manera efectiva. Las recomendaciones son claves para mejorar el sistema de competencias de nuestro país, siendo las de mayor importancia aquellas que permitan desarrollar habilidades relevantes en la vida. Los estudiantes chilenos presentan varias falencias en el área de las matemáticas, necesitan contar con más herramientas que les permitan desarrollar y solucionar problemas que estén dentro de la contingencia social, apoyados por la comprensión lectora, que es la base para comprender problemas.

Lo señalo hasta aquí, muestra un panorama muy amplio del paradigma educativo inserto dentro de la matemática escolar en nuestro país. Las evaluaciones estandarizadas valorizan elementos como “espacio y forma”, junto con promover las siguientes competencias “*la comprensión de la perspectiva, la elaboración y lectura de mapas, la transformación de las formas con y sin tecnología, la interpretación de vistas de escenas tridimensionales desde distintas perspectivas y la construcción de representaciones de formas*” (PISA, 2017. p.75)

Competencias básicas como resolver, analizar, interpretar, etc. y aplicarlo en los cuadriláteros exigen desarrollar las pruebas estandarizadas internacionales a nuestros alumnos. A continuación, daremos una mirada a los objetivos de aprendizaje de cuadriláteros que persigue el ministerio de educación chileno en sus bases curriculares.

1.4 El Objeto y/o el Fenómeno en Currículo de Chile

Varios estudios en geometría reportan la dificultad que presentan los jóvenes por comprender esta disciplina, además de la frustración que muestran algunos docentes al identificar que los estudiantes no diferencian conceptos o propiedades geométricas. Además de no contar con estrategias que permitan la mejora de lo anterior.

Para dar un mejor enfoque a la investigación realizaremos una revisión del currículum chileno, para esto revisaremos los planes y programas de ministerio de educación y la mirada sobre los cuadriláteros que nos entrega.

1.4.1. Extracto de Bases Curriculares de Kínder y Sexto Básico.

A continuación, se muestra un análisis apoyado en las bases curriculares del MINEDUC (2016) de Chile, desde educación pre-básica hasta sexto básico, relacionado con los cuadriláteros como objeto matemático. El propósito de realizar dicho análisis recae en observar el nivel de exigencia que se les da a la resolución de tareas y la incorporación de elementos matemáticos que emergen para robustecer la concepción que se tienen de los

cuadriláteros. Enseguida se mostrará un análisis apoyado en una serie de tablas, las cuales se han dividido según las exigencias que se han observado en distintos niveles educativos y la importancia que se le otorga a este contenido en estos cursos. En la tabla 1 se presentan los objetivos desde educación pre-básica hasta 2do. Básico; en la tabla 2 exponemos los objetivos de aprendizaje de 3ro a sexto básico.

Tabla 1.1

Extracto Objetivos de aprendizaje: Pre-básica-primero básico- segundo básico

Objeto matemático	Pre-básica	1ro básico	2do básico
Cuadriláteros	<p><u>Aprendizajes esperados:</u></p> <p>Reconocer el nombre de algunos atributos de cuartos figuras geométricas bidimensionales y tres tridimensionales asociados con diversas formas de objetos, dibujos y construcciones del entorno</p>	<p><u>Objetivos de aprendizaje:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificar en el entorno figuras 3D y figuras 2D y relacionarlas, usando material concreto. - Identificar y dibujar líneas rectas y curvas. - Identificar y dibujar líneas rectas y curvas. 	<p><u>Objetivos de Aprendizajes:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Describir, comparar y construir figuras 2D (triángulos, cuadrados, rectángulos y círculos) con material concreto. - Describir, comparar y construir figuras 3D, (cubos, paralelepípedos, esferas y conos) con diversos materiales.

Fuente MINEDUC (2019)

Como puede observarse en la tabla 1, la comprensión de los cuadriláteros se reduce a una situación de forma, donde se les pide *reconocer o identificar* atributos a una serie de figuras bidimensionales. Posterior a ello, el estudiante debe tener la habilidad de describir, lo que es capaz de ver de manera sensoriomotora, pues se le exige ver con la mirada, pero también hacer una reproducción manual a partir de la *construcción*. Enseguida se presentan algunos ejemplos de las tareas que se proponen en los libros de texto. La Figura 1.1 expone un ejemplo de lo solicitado en un libro de educación pre-básica, el tipo de tareas se enfocan en comparar a partir de la aprehensión visual de un cuadrado y un rectángulo, haciendo énfasis en algunos elementos semióticos como son los vértices.

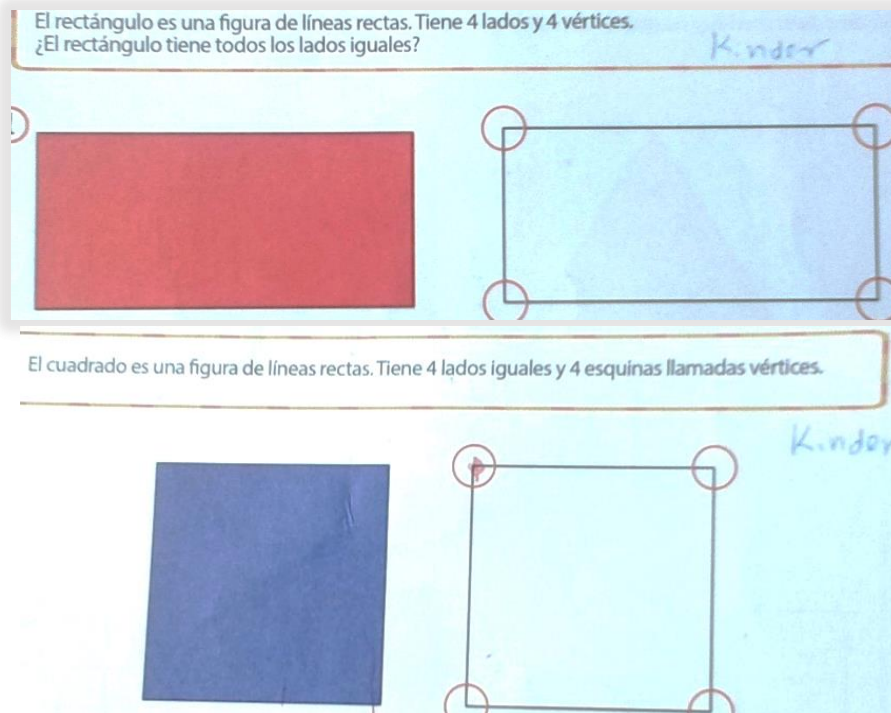


Figura 1.1 Tarea de Texto de educación Prebásica (MINEDUC, 2016, p 84)

En 1° básico los objetivos de aprendizaje de las bases curriculares del ministerio mantienen el acercamiento con los cuadriláteros como figuras 2D y 3D. Desde la visualización el estudiante, a través de la mirada, debe transitar desde la aprehensión perceptiva a la discursiva en figuras que en algunos casos no reconoce su nombre. Este tránsito es apoyado por el texto del estudiante, como muestra la Figura 1.2, donde se asocian definiciones a unidades figurales de figuras bidimensionales.

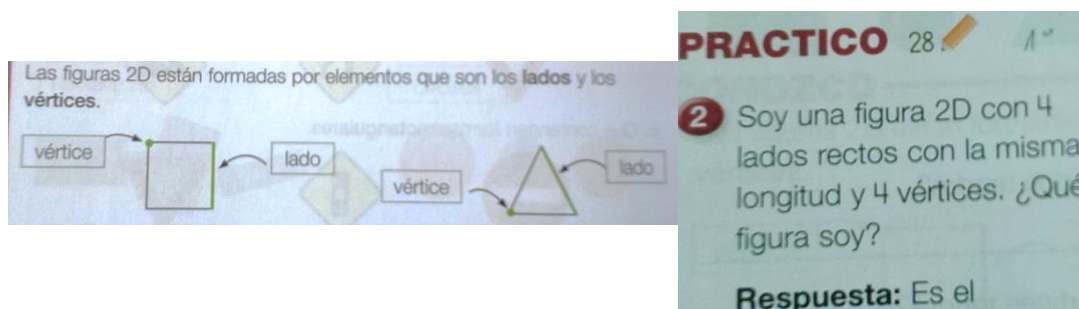


Figura 1.2 Tarea del Texto de matemáticas de primero básico (MINEDUC, 2016, p 92)

Las bases curriculares en segundo básico, llevan al estudiante a construir figuras 2D y 3D. En la Figura 1.3 extraída del texto de matemáticas de segundo básico, el tipo de tareas que se presentan exigen al estudiante establecer diferencias entre una serie de figuras geométricas.

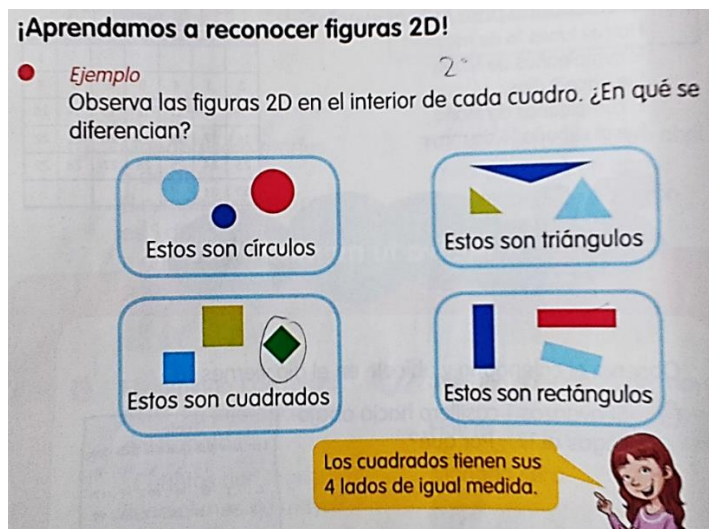


Figura 1.3 Tarea del Texto de matemáticas de segundo básico (MINEDUC, 2016, p 75)

En la tabla 1.2 se resumen los objetivos de aprendizaje que se trabajan en el eje de geometría, se contemplan los cursos desde tercer a sexto básico:

Tabla 1.2

Extracto Objetivos de aprendizaje: Tercero, cuarto, quinto y sexto básico.

3ro básico	4to Básico	5to básico	6to básico
<p><u>Objetivos de aprendizaje:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Demostrar que comprenden la relación que existe entre figuras 3D y figuras 2D: construyendo una figura 3D a partir de una red (plantilla); desplegando la figura 3D. - Describir cubos, paralelepípedos, esferas, conos, cilindros y pirámides de acuerdo a la forma de sus caras y el número de aristas y vértices. - Demostrar que comprenden el perímetro de una figura regular e irregular, midiendo y registrando el perímetro de figuras del entorno en el contexto de la resolución de problemas; determinando el perímetro de un cuadrado y de un rectángulo. 	<p><u>Objetivos de aprendizaje:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Determinar las vistas de figuras 3D, desde el frente, desde el lado y desde arriba. - Demostrar que comprenden una línea de simetría: identificando figuras simétricas 2D; creando figuras simétricas 2D; dibujando una o más líneas de simetría en figuras 2D; usando software geométrico. - Demostrar que comprenden el concepto de área de un rectángulo y de un cuadrado: reconociendo que el área de una superficie se mide en unidades cuadradas; Seleccionando y justificando la elección de la unidad estandarizada (cm^2 y m^2); determinando y registrando el área en cm^2 y m^2 en contextos cercanos; construyendo diferentes rectángulos para un área dada (cm^2 y m^2) para mostrar que distintos rectángulos pueden tener la misma área; usando software geométrico. 	<p><u>Objetivos de aprendizaje:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Describir y dar ejemplos de aristas y caras de figuras 3D y lados de figuras 2D: que son paralelos; que se intersectan; que son perpendiculares. - Diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos, y sacar conclusiones. - Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares aplicando las siguientes estrategias: conteo de cuadrículas; comparación con el área de un rectángulo; completar figuras por traslación. 	<p><u>Objetivos de aprendizaje:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Demostrar que comprenden el concepto de área de una superficie en cubos y paralelepípedos, calculan el área de sus redes (plantillas) asociadas. - Calcular la superficie de cubos y paralelepípedos expresando el resultado en cm^2 y m^2. <p>Calcular el volumen de cubos y paralelepípedos, expresando el resultado en cm^3, m^3 y mm^3.</p>

Fuente: Mineduc (2019)

Para 3° básico las bases curriculares establecen que los estudiantes deben comprender la relación existente entre figuras 2D y 3D. Y es en este nivel donde son acercados al concepto de perímetro de distintos cuadriláteros. Pero, la Figura 1.4 tomada del texto de matemáticas de tercero básico, trabaja sobre la aprehensión discursiva del estudiante quien debe elegir el mejor término para cada definición.

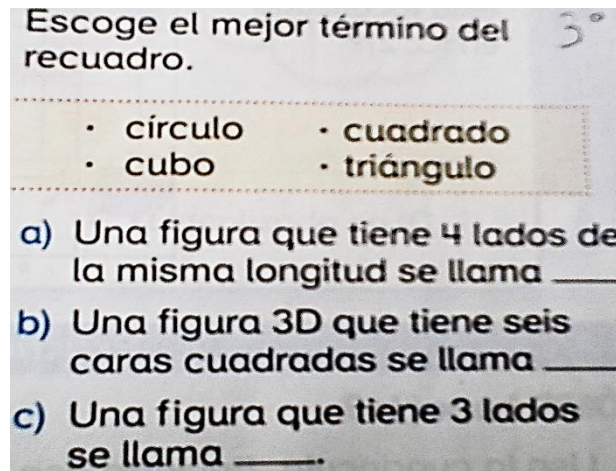


Figura 1.4 Tarea del Texto de matemáticas de tercero básico (MINEDUC, 2016, p 79)

Se puede observar en la tabla 1.2 de las bases curriculares de 4° básico, que los objetivos de aprendizaje respecto de cuadriláteros se enfocan en la comprensión del área y perímetro, poniendo énfasis en medir el contorno de la figura, pero no hay un acercamiento a las propiedades de éstos, que permita al estudiante reconocer los tipos de ángulo que tiene o la medida de sus diagonales. Es a través de la visualización que los estudiantes de este nivel deben aprender a identificar referentes espaciales como paralelismo o perpendicularidad como muestra la Figura 1.5 del texto de matemáticas de cuarto básico.

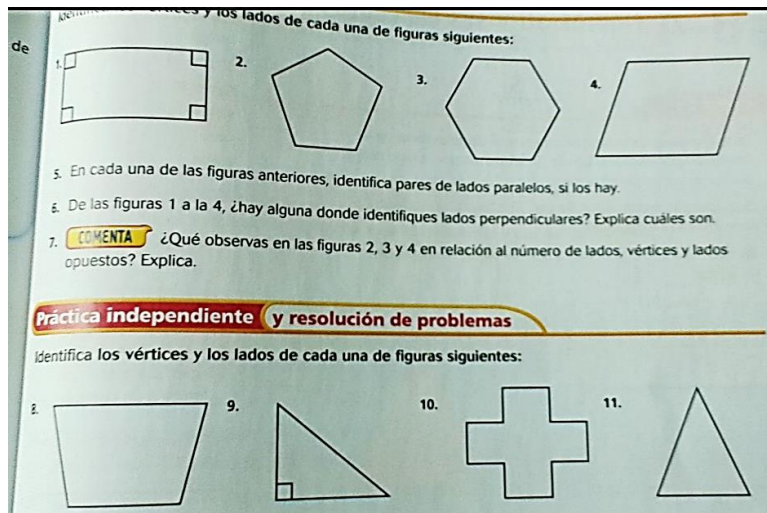


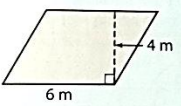
Figura 1.5 Tarea de libro de matemáticas de cuarto básico (MINEDUC, 2016, p 105)

En los niveles de quinto y sexto básico los objetivos que se deben lograr están centrados en cálculo áreas y perímetros de cuadriláteros, la experiencia docente demuestra que en estos niveles, los estudiantes transitan de una figura a otra sin llegar a conocerlas, para luego calcular el área y el perímetro de esta.

En estos cursos, los estándares de aprendizaje evaluables toman en cuenta si el estudiante es capaz de calcular el área y perímetro de cuadrado y rectángulos, pero en los textos de quinto básico entregados por el ministerio, como muestra la Figura 1.6, encontramos cálculos de áreas de rombos y romboides, cuadriláteros que no los han visualizado, por lo tanto, no tienen una aprehensión perceptiva, no pudiendo asociar esa configuración a un nombre como rombo o romboide, pasando por alto la real importancia que tienen los cuadriláteros y sus elementos secundarios.

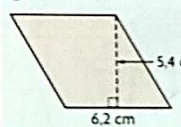
Más ejemplos Halla el área.

A



$A = 6 \cdot 4$
 $A = 24$
El área es de 24 m².

B



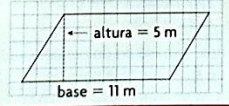
$A = 6,2 \cdot 5,4$
 $A = 33,48$
El área es de 33,48 cm².

DE OTRA MANERA Usa el área de un triángulo.

¿Cuál sería el área del corral para perros si la base fuera de 11 metros y la altura fuera de 5 metros?

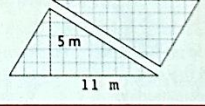
Paso 1

Traza un paralelogramo de 5 m · 11 m en papel cuadrulado y recórtalo.



Paso 2

Corta el paralelogramo por una diagonal para formar dos triángulos congruentes.



Paso 3

Halla el área de un triángulo.

$A = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 5$
 $A = 27,5$
El área de los dos triángulos es $2 \cdot 27,5$ o 55 m².

Por lo tanto, el área del corral para perros sería 55 m².

¿Cómo se relaciona el área de cada triángulo con el área del

Figura 1.6 Tarea de libro de matemáticas 5to básico (MINEDUC, 2016, p. 91)

En el texto de matemáticas de sexto básico como muestra la Figura 1.7, se identifica la clasificación de los cuadriláteros, llamada “Tipos de Cuadriláteros”. Podemos apreciar que la clasificación del trapecio lo hace bajo el nombre de “general”, lo que claramente induce al estudiante a un error de visualización. Duval (1998) lo plantea como una aprehensión discursiva donde el estudiante asocia una afirmación matemática (el concepto general) a la configuración, en este caso trapecio.

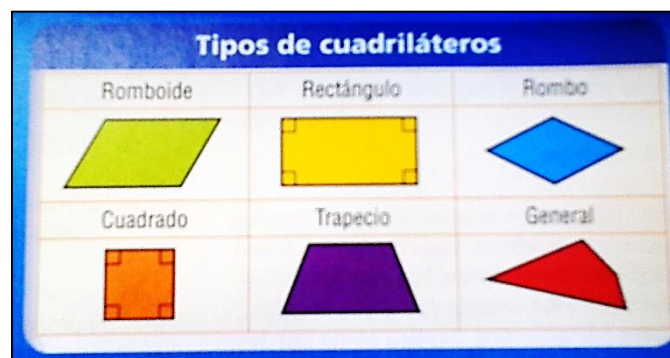


Figura 1.7 Tarea de libro de matemáticas de sexto básico (MINEDUC, 2016, p 107)

La experiencia docente muestra lo necesario que es complementar el trabajo entregado por el ministerio de educación chileno, el cual es deficiente para el manejo de los cuadriláteros. Para esto el docente debe complementar con actividades que le permitan al estudiante reconocer estas figuras geométricas y no confundirlas. El presente informe

permite dar cuenta de actividades desarrolladas por los estudiantes para que reconozcan a los cuadriláteros y sus elementos secundarios.

Para estos autores, Pastor, Aguilera y Gutiérrez (1992) un error muy serio y didáctico que encontramos en esta revisión bibliográfica, son los pocos ejemplos de figuras no estándar o en posición no estándar. En el caso de los libros revisados encontramos desde kínder a octavo básico solo 27 cuadriláteros con los cuales deben interactuar los estudiantes además en este tiempo (8 años) con esa cantidad de figuras (27) deben ser capaces de reconocer todas las propiedades de los cuadriláteros y sus elementos secundarios.

1.5 Sobre Investigaciones en Geometría

Una revisión bibliográfica enfocada en la visualización de cuadriláteros en estudiantes de educación básica, reveló una prevalencia de estudios apoyados en la teoría de Duval sumado a los niveles de Van Hiele y las situaciones didácticas de Brousseau.

En algunas investigaciones identificamos aquellas que se preocupan por explorar las propiedades de los cuadriláteros con el objetivo de enseñarlo a estudiantes con deficiencia visual (Santacruz y Sinisterra, 2011), basada en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau.

El trabajo realizado con material manipulable (Villarroel y Sgreccia, 2011) para estudiantes de primero de secundaria, permitió enseñar con modelos fijos 2D y 3D favoreciendo el desarrollo de habilidades geométricas.

Los trabajos de Bauzá Llabrés (2016), Duval (2016) y Bullido (1994) manifiestan que la manipulación de material concreto y su representación permite que el estudiante desarrolle habilidades geométricas, a través de la visualización.

Investigaciones de Torregrosa (2017) que permiten estudiarla relación entre figuras prototípicas y el conocimiento de geometría durante la resolución de problemas. Enfocado es estudiantes para maestros.

Investigaciones de Marmolejo, G., & González, G. (2008) sobre la visualización en las figuras geométricas en alumnos de cuarto básico, reveló que esta (la visualización) no es una constatación inmediata y simple, sino una cuestión de tratamiento de la información, susceptible de un aprendizaje específico.

El trabajo de Valencia, P. (2018) tiene la finalidad de describir procesos de visualización en niños de 4 y 6 años a través del reconocimiento de figuras geométricas planas. Datos analizados con la teoría de las aprehensiones de Duval. Valencia concluye los estudiantes asocian el nombre de la figura con lo que perciben como ella y que solo se observa la aprehensión perceptiva.

Las distintas investigaciones permiten un acercamiento de los estudiantes con la geometría, aportando al desarrollo de sus habilidades y en el reconocimiento de figuras geométricas, lo cual permite un avance significativo en logro de las competencias de las cuales carecen como lo demuestran los informes proporcionados por PISA.

1.6 Planteamiento del Problema

Como puede apreciarse en los apartados anteriores, la didáctica de la geometría se encuentra rodeada de conceptos tales como: razonamiento visual, habilidades geométricas, capacidades espaciales, entre otras. Generalmente estas propuestas teóricas se dedican a caracterizar procesos cognitivos que se presentan mientras se resuelven tareas con el fin de interpretar interacciones de dichos procesos. Este estudio se interesa por explorar las capacidades geométricas (Torregrosa y Quesada; 2007), que son aquellas capacidades que presenta un estudiante al resolver problemas. A partir de la revisión curricular identificamos un problema potencial, situado el aprendizaje de los cuadriláteros, las actividades propuestas por los libros de texto presentan la construcción de los cuerpos geométricos apoyados básicamente en dos posturas: 1) La construcción conceptual de los cuerpos geométricos como una aprehensión de su forma y 2) La transformación de elementos conceptuales dados a la imagen de la forma geométrica que se está aprehendiendo.

CAPÍTULO 2: Referentes Teóricos

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo dan a conocer los referentes teóricos que permiten dar estudio al fenómeno educativo que observamos. Los aspectos que considera este marco teórico son los que siguen:

- La visualización apoyada en las ideas de Arcavi (2003), Torregrosa y Quezada (2007). Con la finalidad de responder ¿de qué manera visualizan los estudiantes los cuadriláteros?
- La Aprehensión: La aprehensión simple se define como “la que capta las formas de las cosas sin hacer juicios de ellas o sin afirmar ni negar.” Permitirá la observación de los estudiantes apoyados de la categorización.
- La categorización dentro de la geometría: Duval plantea cuatro formas categorizar a los estudiantes según como sean observadas las figuras geométricas. Las que son consideradas como las cuatro entradas diferentes a la visualización de la geometría.

2.2 VISUALIZACIÓN

Para realizar este trabajo nos enfocaremos en el proceso de visualización de Duval. Debido a que a partir de ésta (visualización) se pueden generar conclusiones, comunicar y resolver situaciones, solo con observar una representación. Se entiende por visualización la representación semiótica de un objeto, una organización bidimensional de relaciones entre algunos tipos de unidades. Mediante la visualización cualquier organización puede ser sinópticamente comprendida como una configuración, haciendo visible todo lo que no es accesible a la visión y aportando una aprehensión global de cualquier organización de relaciones (Duval 2002).

Otro aspecto a rescatar, menciona que la visualización a diferencia de la percepción no se desarrolla dentro del espacio real en tercera dimensión (3D), sino que se proyecta sobre una superficie en segunda dimensión (2D). Esta reducción de dimensión (de 3D a 2D) constituye una primera ruptura entre la visión real y la visualización (Duval, 2003).

Hitt en el 2002 señala que: “La visualización matemática tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad”

La bibliografía revisada permitió encontrar problemas relacionados con lo difícil que es explicar la visualización de objetos matemáticos y otra problemática relacionada con el rol de la visualización asociado al aprendizaje de las matemáticas. Ahora bien, estas dos contingencias están relacionadas entre sí, debido a que no se puede dar estudio a una sin la presencia de la otra. El uso de la visualización permite la descripción de las representaciones visuales, lo cual quiere decir, una forma de traducir la actividad cognitiva que presenta una persona al momento de hacer uso de las representaciones visuales. Al momento de representar cualquier objeto matemático, por ejemplo una figura geométrica, la persona debe identificar las características de la figura geométrica, lo que permitirá el análisis de ésta y el correspondiente tratamiento, utilizando el sentido de la vista

Una de las definiciones de visualización, que plantea Arcavi (2003), la define como la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente o sobre el papel con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión.

Por otro lado, Hershkowitz et al (1996) definen visualización de la siguiente forma: *“Entendemos por visualización la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra”* (p. 163).

La definición de visualización que damos en esta investigación corresponde a la transferencia que ocurre entre un dibujo y una figura. La visualización de un dibujo no necesariamente debe ser igual para todos los observadores, debido a que este (el dibujo) está asociado a definiciones, propiedades, etc., que el observador le atribuye.

Torregrosa y Quesada (2007) proponen definiciones de los conceptos de figura y dibujo que permiten aclarar el estudio realizado.

- Figura: Imagen mental de un objeto físico.
- Dibujo: Representación gráfica de una figura en sentido amplio, ya sea sobre un papel, computador o modelo físico.

Duval en el 2001 plantea que dentro de la geometría están involucrados tres procesos cognitivos: visualización, la construcción y el razonamiento. Procesos que se pueden analizar de forma separada. “Sin embargo, estas tres clases de procesos cognitivos están cercanamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria en la geometría” (Duval, 2001).

Torregrosa y Quesada (2007) definen a la visualización enfocada en el estudio de la geometría como: “*el proceso o acción de transferencia de un dibujo o una imagen mental o viceversa.* (pp. 279). Esta definición permitirá enfocar el análisis sobre los alumnos de 6to básico a través de las aprehensiones.

2.3 APREHENSION

Esta investigación se realizara sobre el proceso de visualización sobre el objeto matemático cuadrilátero, por lo que es conviene acotar el significado de visualización: (Balderas, 1998 Presmeg y Balderas, 2001) lo definen como actividad cognitiva basada en representaciones semióticas de un objeto, donde no es suficiente ver, sino comprender lo que se quiere mostrar a través de figura como dibujos, diagramas o esquemas, producidos en papel, medio electrónicos o la mente, eso es imaginados. De esta manera, el resultado de la transferencia realizada produce un efecto en el sujeto que la realiza. A este efecto se le llama aprehensión (Prior y Torregrosa, 2013).

Se destaca que la visualización permite desarrollar habilidades necesarias, básicas para la aprehensión de un objeto matemático. Se aceptará la definición del concepto aprehensión, según de real academia de la lengua española (2019) que dice que es “Captación y aceptación subjetiva de un contenido de consciencia.”, la aprehensión simple

se define como “la que capta las formas de las cosas sin hacer juicios de ellas o sin afirmar ni negar.” Con estas definiciones hacemos funcional la transferencia que describe Hershkowitz et al. (1996) sobre el concepto de visualización, debido a que al introducir características de la transferencia se obtienen formas de aprehender. Como dijo Duval (1998):

“Lo que un dibujo nos deja ver es una o varias figuras 1D/2D (de dimensión 1 representada en 2 dimensiones) o 2D/2D (líneas rectas o curvas, la frontera cerrada de un triángulo, de un cuadrilátero, etc.) o bien figuras 3D/2D (cubos, esferas, etc.). La identificación visual de estas figuras se basa en las leyes organización perceptiva y estas figuras se pueden usar para representar objetos reales u objetos matemáticos. (p39)

Por ejemplo, veamos los siguientes dibujos:

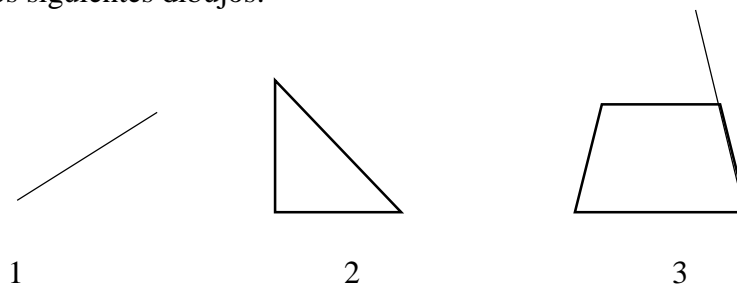


Figura 2.1 Dibujos de figuras

Estos podrían identificarse según las leyes de organización perceptiva como: (1) segmento, (2) triángulo y (3) dibujo de cuatro segmentos. Todos están contruidos por líneas rectas; la figura 1 puede verse como figura 3D/2D, la figura 2 representa una figura 2D/2D y el 3 se puede ver como figura 2D/2D (un trapecio) unida a una figura 1D/2D (segmento prolongado a un lado), también se puede ver como una configuración (la unión de cuatro segmentos de forma imprecisa).

Caracterizar las aprehensiones (perceptiva, discursiva y operativa) facilita el análisis de las respuestas en geometría, además permite mostrar los cambios que manifiesta el estudiante.

Dentro de los escritos que tiene Duval (1998) encontramos que el autor hace referencia a tres tipos de aprehensiones que están asociadas a la visualización:

- **2.3.1 *Aprehensión Perceptiva***

Este concepto es netamente intuitivo y corresponde a la identificación de una configuración. Es la primera en aparecer al momento de desarrollarse cognitivamente el estudiante.



Figura 2.2

Por ejemplo, la figura 2.2 puede ser vista como una silla o tres rayas dibujadas sobre el papel o la representación de una figura geométrica. Respuestas entendidas del resultado de una *aprehensión perceptiva*, debido a que este es un proceso intuitivo.

- **2.3.2 *Aprehensión Discursiva:***

Corresponde a la actividad cognitiva producida entre la asociación de configuraciones con afirmaciones matemáticas, estas definiciones pueden ser axiomas, teoremas etc. Esta asociación se puede dar en ambas direcciones, o sea, de lo visual a lo discursivo o de lo discursivo a lo visual. Lo que se denomina cambio de anclaje:

a) ***Del Anclaje visual al anclaje discursivo:*** Este anclaje ocurre cuando el observador asocia una configuración a una definición. Por ejemplo :

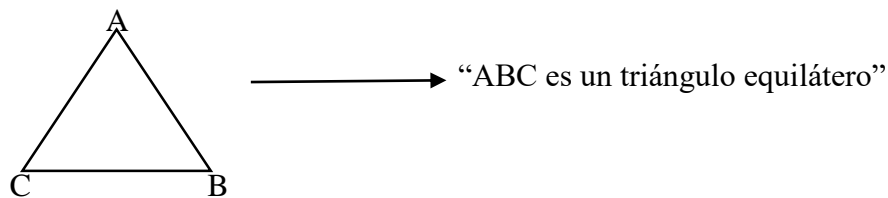


Figura 2.3 Triángulo equilátero

b) ***Del Anclaje Discursivo al anclaje visual:*** Este anclaje ocurre cuando el observador tiene la capacidad de realizar el polígono que cumpla con las características para ser un triángulo equilátero. Por ejemplo:

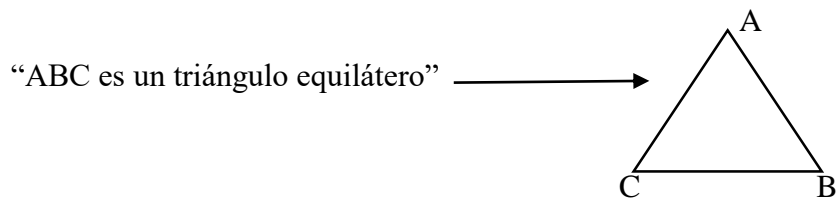


Figura 2.4 Triángulo equilátero

- **2.3.3 *Aprehensión Operativa:***

Esta se refiere a la modificación de la configuración inicial al momento de dar solución a un problema geométrico. Este cambio puede ser figural, donde se agregan o quitan elementos de la configuración inicial, para que se generen nuevas subconfiguraciones.

La aprehensión visual de un objeto es inmediata, menos de una décima de segundo. Pero un objeto matemático debe de requerir al menos dos tipos de aprehensiones: La perceptiva, que permite reconocer las unidades figurales de la figura geométrica y la operatoria, la cual permite las modificaciones iniciales y posibles relaciones que constituyen la representación (Duval 2003)

2.4 Unidades Figurales

Al momento de representar un objeto matemático este se encuentra sujeto a un análisis, sin importar su naturaleza o de los conceptos matemáticos de quién lo enseña o aprende, en el mundo de las matemáticas esto es llamado “ver”, visualización que es realizada por los sentidos, la imaginación o la inteligencia. Esta aprehensión visual es inmediata, así lo plantea Duval (2003), lo que nos lleva a afirmar que “ver” es simplemente reconocer algo a primera vista. Empero, todos los objetos que son reconocidos a simple vista no cuentan con un único aspecto, porque en ese momento la visualización desencadena una serie de procesos automáticos de los cuales una persona no está consciente (Duval 1999), dependiendo de todos los recuerdos que evoque la persona al momento de producirse la visualización del objeto, por lo tanto, se produce que la aprehensión simultanea nunca es

completa. Lo que nos lleva a afirmar, que la visualización de un objeto geométrico necesita de dos tipos de aprehensiones: La perceptiva, en la cual son reconocidas las unidades figurales pertenecientes a la representación geométrica; y la operatoria que permite modificaciones de las relaciones que son constituyentes de la representación (Duval 2003).

Duval (1999) distingue dos tipos de variaciones al momento de visualizar una figura: una variación dimensional enfocada al número de dimensiones: 0 (punto), 1 (línea) o 2 (área); y una variación cualitativa que está enfocada con la forma de la figura (una línea recta o una curva, un contorno abierto o cerrado), tamaño, orientación, color, etcétera. Lo que permiten estas dos categorías es definir las características de una figura como una combinación de valores para cada una de las variaciones visuales ya sean del tipo dimensional o cualitativo, las que dan origen a una unidad figural elemental. Por ejemplo, un cuadrado está formado por la unidad punto y una forma cerrada, es considerada una configuración de cuatro unidades figurales de dimensión uno (los segmentos de los lados), como las relaciones entre las unidades figurales elementales son parte importante de la figura geométrica (paralelismo, simetría, tangente, etc.). También las figuras geométricas están compuestas por varias unidades figurales elementales con valores diferentes (triángulos, puntos, cuadriláteros, etc.)

Por otro lado Phillips et al. (2010) definen tres términos, los cuales son de gran importancia comprender muy bien, para poder aplicar la visualización de forma eficiente dentro del aula.

- Visualización relacionada con objetos físicos vistos e interpretados por una persona con el propósito de entender algo más que el objeto mismo;
- Visualización introspectiva es una construcción imaginativa de una posible experiencia visual en ausencia de un objeto de visualización. Se centra en objetos capturados en la mente, y
- Visualización interpretativa, la cual involucra la interpretación del significado de los objetos de visualización o visualizaciones introspectivas, en función de la red existente en la persona de creencias, experiencias y entendimientos

Dentro de la visualización podemos distinguir objetos físicos y objetos mentales. Los primeros involucran todos los objetos que nos rodean y podemos ver: mesas, sillas, arboles, autos, casas, etc. En cambio los objetos mentales son todas aquellas imágenes, esquemas mentales, construcciones, representaciones que tenemos almacenadas en nuestra memoria.

La definición de la visualización que plantea Duval (1998), junto a las diferentes tipos de aprehensiones, permitirán el análisis de los datos identificando como los estudiantes aprehenden cuadriláteros, a través de la imagen o del concepto.

2.5 Categorización Dentro de la Geometría

En el año 2016, se publica “comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas” escrito por Duval y Sáenz. Aquí, en una de los apartados, Duval indica que existen distintos tipos de operaciones orientados en lo visual o en las propiedades geométricas relacionadas a las operaciones. Al respecto, como son observadas las figuras geométricas y las operaciones que se movilizan sobre las propiedades de las mismas, es que podemos distinguir cuatro formas de ver. Las cuales pueden ser consideradas como cuatro entradas diferentes a la visualización de la geometría.

Para el análisis de la actividad “Construcción de cuadriláteros” se adopta la clasificación de las maneras de ver en función del papel de las figuras en las actividades geométricas propuestas a los estudiantes que plantea Duval (2016), las cuales se transcriben a continuación.

Tabla 2.1: Cuatro entradas clásicas a la geometría.

	BOTÁNICO	AGRIMENSOR GEÓMETRA	CONSTRUCTOR	INVENTOR ARTESANO
1) Tipo de operación sobre las FORMAS VISUALES, requeridas por la actividad propuesta.	Reconocer formas a partir de cualidades visuales de un contorno: se privilegia una forma particular como típica.	Medir los bordes de una superficie: sobre un TERRENO o sobre un DIBUJO (variación de escala de magnitud y por tanto de procedimiento de medición)	Descomponer una forma en trazos construibles con ayuda de un instrumento. Hay que pasar (a menudo) por TRAZADOS AUXILIARES que no pertenecen a la figura “final”.	Transformar unas formas en otras. Hay que agregar TRAZOS REORGANIZADORES en la figura final para inicializar esas transformaciones.
2) Cómo se movilizan las PROPIEDADES GEOMÉTRICAS con respecto al tipo de operación.	No hay relaciones entre las diferentes propiedades (no hay definición matemática posible)	Las propiedades son criterios de selección para las mediciones que se deben hacer. Solo son útiles si remiten a una fórmula que permite un cálculo.	Como restricciones de un orden de construcción. Ciertas propiedades se obtienen mediante una sola operación de trazado, las otras exigen varias operaciones.	Implícitamente mediante remisión a una red más compleja (una trama de rectas para la geometría plana o una trama de intersecciones de plano...) que la figura de partida.

Fuente extraída de: “Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. desarrollando la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos” Duval 2016, p 16.

- **2.5.1 El Botánico:** Es la entrada más evidente e inmediata. Se trata de aprender a reconocer y a nombrar las formas elementales que se utilizan en geometría plana. Los tipos de cuadriláteros, etc. Formas ovaladas, cuadradas. Se debe observar las diferencias entre dos formas que presentan ciertas semejanzas y de notar semejanzas entre dos formas diferentes. Aquí, las propiedades distinguidas son características visuales de contorno. Duval plantea que no son actividades absolutamente geométricas, son geométricas cuando se refieren a formas “euclidianas”.
- **2.5.2 El Agrimensor Geómetra:** Esta es la entrada histórica. Se trata de aprender a medir longitudes en un terreno, del suelo, o las distancias entre dos puntos de referencia, y anotarlas sobre un dibujo que toma estatus de plano. Nos situamos de

entrada en dos escalas de magnitud que se van a poner en correspondencia. Esta puesta en correspondencia no tiene nada de natural o evidente, pues no existe un procedimiento común para medir las distancias reales sobre el terreno y los segmentos trazados en un dibujo. En esta categoría, las tareas consisten en proponer actividades que exijan pasar de una escala a otra. Este nivel exige aspectos como lectura de planos o de un mapa geográfico, seleccionar objetos o puntos de referencia, tomar en cuenta direcciones y orientaciones. Este tipo de actividades las propiedades geométricas se movilizan con fines de medición.

- **2.5.3 El Constructor:** Corresponde a la entrada necesaria. La particularidad de las figuras geométricas, por lo menos de aquellas que corresponden a formas euclidianas elementales y a configuraciones de formas elementales, es ser construibles con ayuda de instrumentos. Las figuras geométricas no se dibujan a mano alzada, se construyen con ayuda de un instrumento que guía el movimiento de la mano, o que la reemplaza. Un instrumento permite producir una forma visual que tiene una propiedad geométrica y esta forma visual constituye la primitiva del instrumento, a causa de la regularidad que impone al movimiento de trazado y, por lo tanto, de la invariancia visual que introduce en el trazado. Sin utilizar instrumentos sería imposible verificar una propiedad sobre una figura. Es mediante la utilización de un instrumento como los estudiantes pueden percatarse realmente de que las propiedades geométricas no son solo características perceptivas o de alguna forma como restrictivas al momento de construir. Se debe tener en consideración que todo cambio de instrumento, necesariamente implica cambios de las propiedades geométricas. Gracias a esta entrada se han producido cambios en la enseñanza de la geometría como plantea Labourde (1994). Las construcciones geométricas no son aceptables sin tomar en cuenta las propiedades geométricas que entregan los instrumentos.
- **2.5.4 El Inventor Artesano:** Se enfoca en la destrucción visual de las formas perceptivas elementales que se imponen a primera vista, para poder obtener la reconfiguración, o la figura, pedida. Estos problemas tocan una capacidad fundamental que es la condición necesaria para toda utilización heurísticas de las figuras: añadir trazados suplementarios a una figura de partida (es decir, la que

acompaña al enunciado de un problema o se puede construir a partir del enunciado de un problema) con el fin de descubrir sobre la figura un procedimiento de solución. Estos son trazados suplementarios que van a permitir una reorganización visual de la figura de partida.

Para comprender la forma de ver que tiene cada entrada clásica se refleja en la siguiente tabla que se denomina: “Modo de comprensión y de conocimiento relacionado con cada manera de ver”

Tabla 2.2 Modo de comprensión y de conocimiento relacionado con cada manera de ver

	Botánico	Constructor
Estatus Epistemológico	Constatación perceptiva inmediata. “Eso se ve sobre...”	Resultado de un procedimiento de construcción
Fuente cognitiva de la certidumbre	Superposición efectuada a ojo o utilizando una plantilla.	Necesidad interna en el encadenamiento de las operaciones del procedimiento de construcción

Fuente extraída de: “Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. desarrollando la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación De sus funcionamiento” Duval 2016, p 19

De las cuatro formas de ver, ninguna es la misma con la otra, tampoco lo son respecto del funcionamiento cognitivo. Para el caso de esta investigación, nos enfocaremos en la forma de ver del tipo botánico y constructor, las cuales han desarrollado distintos tipos de conocimientos según la mirada que cada estudiante esté o no en capacidad de movilizar, estando en presencia del mismo proceso de producción de figuras geométricas, como se reflejará en el capítulo 4.

2.6 Modelos de Actividad Mental

Vinner (1991) sostiene que la mayoría de los docentes creen que sus estudiantes, al verse enfrentados a una determinada tarea, enfocan sus razonamientos en las definiciones

formales de los conceptos aprendidos en forma verbal y las imágenes pasan a un rol secundario. Lo cual no ocurre de esa forma como la plantea el propio Vinner.

Para explicar este fenómeno, diremos que en nuestra estructura cognitiva se almacenan la o las definiciones del concepto y en otra parte se almacenan las imágenes del propio concepto. Ahora bien, ambas podrían no tener definiciones o solo una de ellas contar con algo. También se puede dar una interacción entre ambas conexiones, o ser formadas en forma independiente. Lo que se espera, al momento de la formación de conceptos, resolución de problemas, o cuando realicen una tarea, las dos células, una con el concepto y la otra con la imagen se activen e interactúen entre sí, esta creencia da lugar a tres modelos de actividad mental (Vinner, 1991; recuperado de Moratalla, 2006, p.41-43):

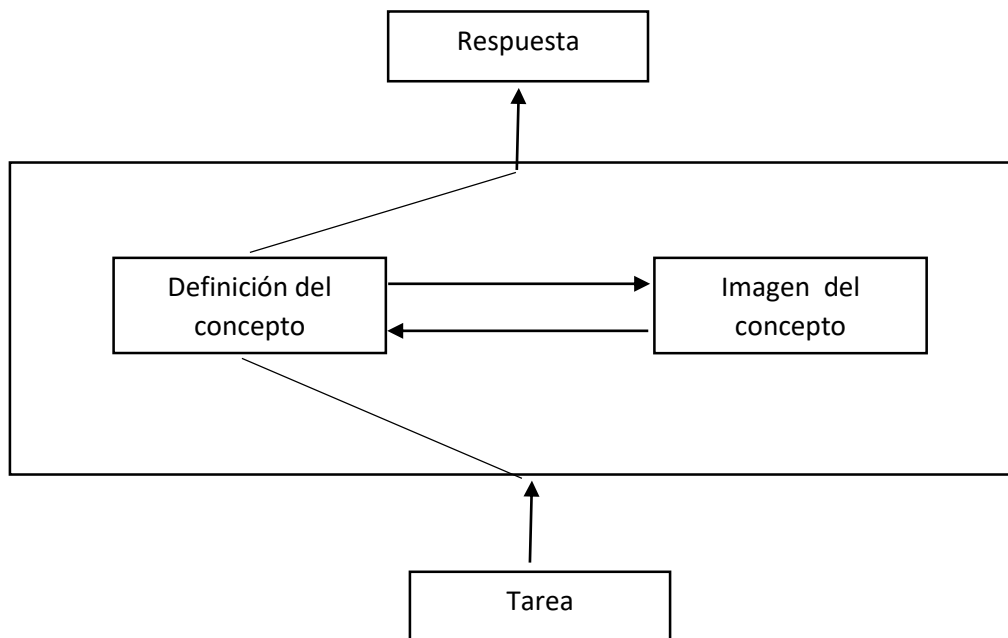


Figura 2.5 Interacción entre la definición y la imagen

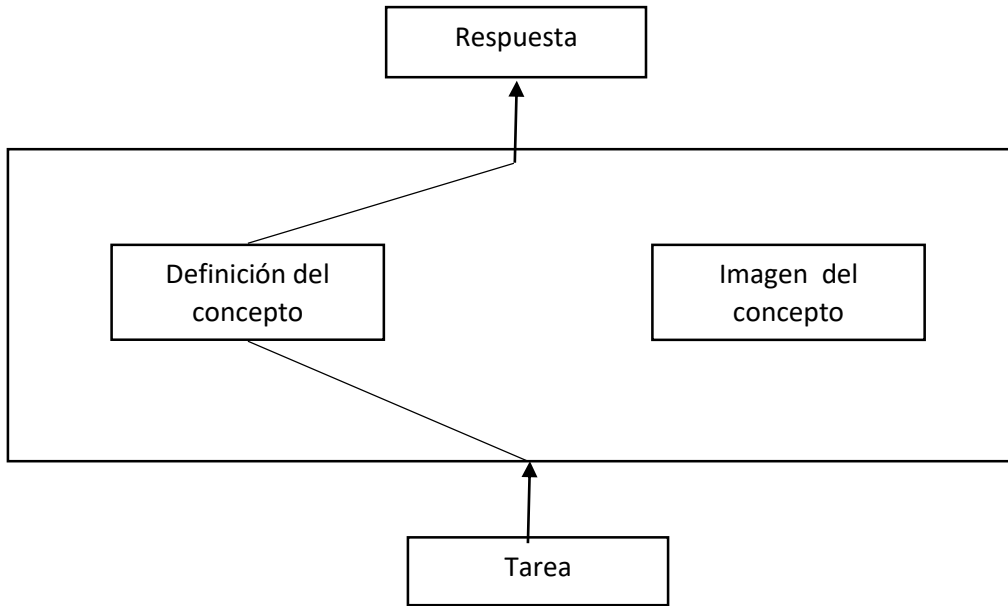


Figura 2.6 Deducción puramente formal

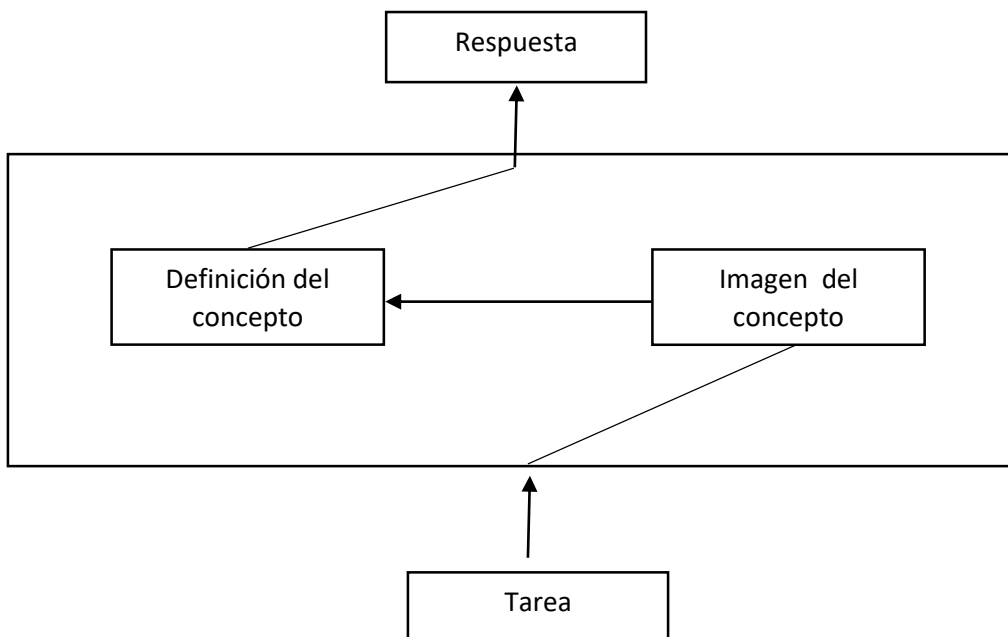


Figura 2.7 Deducción según pensamiento intuitivo

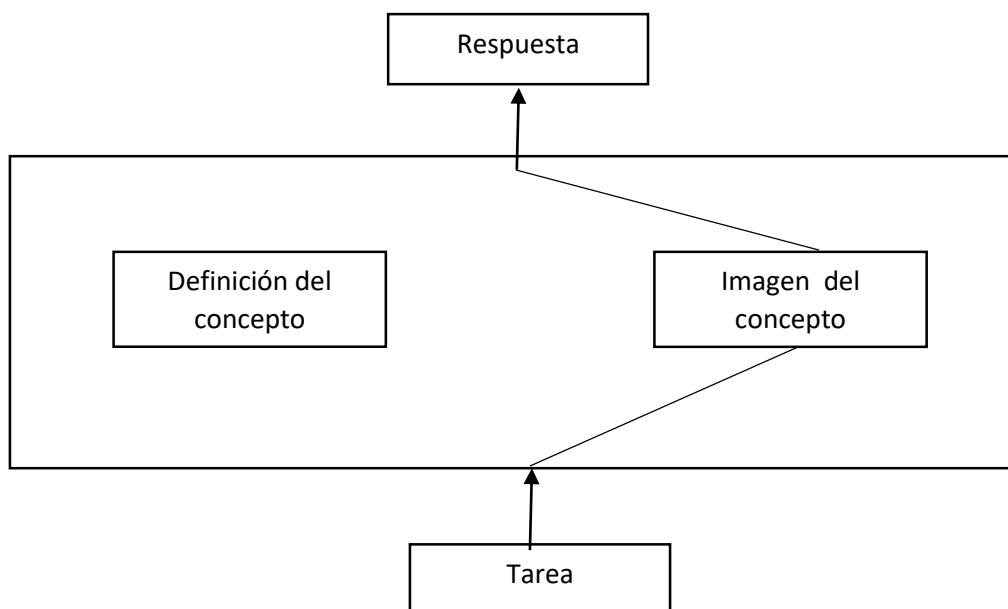


Figura 2.8 Representación intuitiva

El análisis de las actividades desarrolladas en esta investigación sean estos el diagnóstico inicial y final como las actividades desarrolladas, se basan en el modelo de actividad mental que plantea Vinner, tareas que en algunos casos evocan la imagen solicitando al estudiante recordar el concepto, o a través del concepto reconocer la imagen que se solicita.

El marco teórico descrito se enfoca en dar análisis a los estudiantes de sexto básico del colegio Santo Tomás, por ello, resulta interesante plantearnos la siguiente pregunta ingenua, la que orientará en un inicio la siguiente propuesta de investigación. ¿De qué manera visualizan y aprehenden los estudiantes sobre cuadriláteros?

2.7 Objetivos de la Investigación

Considerando la problemática planteada, respecto del aprendizaje de la geometría en nuestro país, las bases curriculares y los textos de estudio, lleva a plantear los siguientes objetivos de la investigación:

Objetivo general: Analizar los procesos de aprehensión visual que realizan los estudiantes de sexto básico cuando se enfrentan a tareas apoyadas en el uso de manipulativos y de lápiz y papel, diseñadas en función de la imagen y el concepto cuadrilátero.

Objetivo Especifico N°1: Identificar el uso que hacen de la figura como concepto imagen o concepto definición, durante la resolución de las tareas de cuadriláteros.

Objetivo Especifico N°2: Categorizar el tipo de aprehensión que presentan los estudiantes cuando resuelven tareas de cuadriláteros

CAPÍTULO 3: Metodología

3.1 Tipo de Metodología

Esta investigación es de tipo cualitativa descriptiva e interpretativa. Una característica primordial de una investigación cualitativa es la interpretación, así lo manifiesta Stake (1998) quien también resalta que cuando un experto observa el desarrollo de un caso, al mismo tiempo lo analiza, describe y da a conocer resultados de esta y puede ser capaz de reorientarla, según la lectura que le aporte la interpretación de esta.

Para la implementación de este método de investigación de estudio, nos apoyamos en lo planteado por Stake (2003), Merten (2005) y Yin (2003) citados en (Hernández, Fernández y Baptista, 2006, p.2) quienes sostienen que la indagación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto en la vida real debe seguir un método. Que se apoye en el adecuado proceso investigativo de las siguientes partes: Planteamiento del problema, proporciones o hipótesis, Unidad de análisis, Fuentes de datos e instrumentos de recolección, Lógica que vincula los datos con preguntas y proposiciones, Criterios para interpretar los datos y por último Reporte del caso (conclusiones de la tesis).

3.2 Los Participantes

La población que utilizará en esta investigación está conformada por 38 estudiantes de sexto básico B, con edades entre los 11 y 12 años, del colegio Santo Tomas de Puerto Montt. El colegio es una Institución particular subvencionada, que alberga a 1275 estudiantes de kínder a cuarto medio. La institución está ubicada en la población Jardín Oriente, junto otros colegios de similares características. El colegio Santo Tomás está orientado en formar y preparar a estudiantes que sean capaces de rendir una Prueba de selección universitaria (PSU) que les permita ingresar a cualquier universidad.

Fuentes de datos e instrumentos de recolección

- Evaluación inicial que determine el nivel en que se encuentran los estudiantes.
 - Implementación y aplicación de la unidad didáctica.
 - Evaluación final que determine en qué nivel terminaron los estudiantes.
 - Entrevista estructurada a los estudiantes participantes.
-
- Por situaciones de confidencialidad y ética investigativa, esta investigación cuenta con los permisos correspondientes (estudiantes, apoderados e institucionales); además de que la identidad de los sujetos participantes se cuida señalándolos con etiquetas A_i , con $i= 1, 2, 3, \dots, 38$. Para el análisis de datos.

3.3 Instrumentos

3.3.1 Diagnóstico Inicial

Para la recogida de datos se realizó un diagnóstico, el cual contó con la validación de expertos, al igual que las actividades propuestas. Fue aplicado a 28 estudiantes que tienen un promedio de edad de 11 años y son del sexto básico del colegio Santo Tomás de Puerto Montt. El instrumento estaba separado en dos ítems, (figura 3.1) el primero se dividió en tres preguntas donde los estudiantes deben identificar cuadriláteros por su apariencia. Este permitió recoger información respecto del conocimiento que tienen los estudiantes sobre el objeto matemático cuadriláteros. En el segundo ítem los estudiantes debían reconocer cuadriláteros y definirlos con sus palabras.

Diagnóstico de cuadriláteros					
Actividad N° 1 : Reconociendo cuadriláteros Nombre: _____ Fecha ____/____/____					
Objetivo: - Identificar cuadriláteros por su apariencia.					
1) Dibuja un cuadrilátero (cualquiera). Explica con tus palabras lo que entiendes por ángulo. Identifica marcándolos, los de la figura que construiste.					
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> </table>				
2) Explica con tus palabras lo que entiendes por cuadrilátero, dibuja uno e identifica sus lados marcándolos.					
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> </table>				
3) Dibuja un cuadrilátero (cualquiera) y sus diagonales y define con tus palabras lo que entiendes por diagonal.					
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> <tr><td style="height: 15px;"> </td></tr> </table>				
4) Define con tus palabras cada uno de los cuadriláteros que se presentan a continuación:					
	Definición: _____ _____ Nombre: _____				
	Definición: _____ _____ Nombre: _____				
	Definición: _____ _____ Nombre: _____				
	Definición: _____ _____ Nombre: _____				

Figura 3.1 Diagnostico cuadriláteros

3.3.2 Actividad: Doblado de papel

Posterior al diagnóstico se desarrolló una actividad que se dividió en 4 partes (figura 3.2), el objetivo que se persigue es visualizar mentalmente los cuadriláteros. La primera actividad consistía en que los estudiantes a través de la visualización deben imaginar el cuadrilátero que resultaría después de realizar un corte triangular con tijera en la esquina de una hoja doblada en dos partes; para apoyar su resultado se solicitó al estudiante dibujar el cuadrilátero resultante y explicar propiedades de importancia de su dibujo. Esta actividad fue fotografiada para tener un mejor registro de las actividades desarrolladas por los estudiantes. (Ver Anexos)

1
Actividad 1

Nombre: _____ Curso: _____ Edad: _____ RUT: _____

Instrucciones: Lee cuidadosamente y responde ampliamente a cada uno de los problemas. El objetivo de esta actividad es explorar tu habilidad argumentativa en geometría, así que siéntete en la libertad de apoyarte en dibujos, aspectos aritméticos, algebraicos o geométricos para resolver los problemas.

Es importante que atiendas a las indicaciones de esta actividad:

- Se entrega la actividad de manera individual. Si te equivocas no borres, tacha levemente (por ejemplo: ~~geometría~~), pues este error nos da información valiosa para generar estrategias en la enseñanza del tema.
- Procura adaptarte al espacio y escribir lo más legible posible, argumentando cada paso que realices.

¡MANOS A LA OBRA!

Parte 1
Imagina que te dan una hoja doblada en cuatro partes y con un corte (de triángulo) como el que se muestra en la *imagen a*

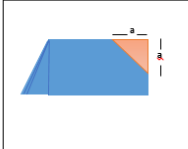


Imagen a

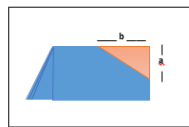
Piensa, ¿Qué pasará en la hoja, cuando la desdobles?

1. Pinta como se verá el corte triangular en la hoja, cuando esta se desdoble.

2. Explica que propiedades son importantes resaltar en tu dibujo del punto 2.

2

Parte 2
Imagina que te dan una hoja doblada en cuatro partes y con un corte (de triángulo) como el que se muestra en la *imagen b*.



3. Pinta como se verá el corte triangular en la hoja, cuando esta se desdoble.

4. Explica que propiedades son importantes resaltar en tu dibujo del punto 4.

Parte 4

1. Reúnete en equipo (de 4 estudiantes) y redacten una carta a un estudiante del salón de clases, donde expliquen claramente la estrategia usada para resolver este tipo de problemas, la carta puede estar acompañada de imágenes, viñetas o cualquier forma de representación que te ayude a explicar el fenómeno.

Integrantes del Equipo:

De: _____

Para: _____

Figura 3.2 Actividad doblado de papel

La segunda parte de este trabajo, deben dibujar el cuadrilátero que se obtendrá después de cortar y desdoblar la hoja, explicar propiedades de importancia, la diferencia respecto de la actividad anterior radica en la medida de los del triángulo que dibujado. (Ver Anexo 3).

3.3.3 Actividad: Construcción de cuadriláteros

La actividad correspondiente a la construcción de cuadriláteros, figura 3.3, se realizó en grupos de 4 estudiantes, esta consistía en manipular material concreto (tiras de papel,

ángulos rectos, de 45°) con el objetivo de construir cuadriláteros con sus respectivos ángulos y elementos secundarios (diagonales); para luego definir el cuadrilátero solicitado. Con el objetivo de ampliar la mirada en el trabajo desarrollado por los estudiantes, estas actividades fueron grabadas y serán analizadas más adelante.

Anexo 3: Actividad de Construcción de Cuadriláteros

Actividad

En grupos de 4 alumnos(as) con ayuda de las barras y ángulo, construye los siguientes cuadriláteros, luego responde las preguntas, utiliza conceptos como lados, paralelas, ángulos y diagonales, etc...

- 1) Construyan un cuadrado, utilicen ángulos y diagonales.
- 2) A partir de la construcción, elaboren una definición de cuadrado:

- 3) Construyan un rombo, utilicen ángulos y diagonales.
- 4) A partir de la construcción elaboren una definición de rombo.

Figura 3.3 Actividad Construcción de cuadriláteros

3.3.4 Diagnóstico final:

El diagnóstico final, validado por triangulación de expertos fue aplicado a 27 estudiantes de sexto básico del colegio Santo Tomas de Puerto Montt, este instrumento es el mismo que el diagnóstico inicial, (ver anexos).

Cabe aclarar que los instrumentos fueron piloteados y validados por triangulación de expertos y triangulación de contenido.

3.4 Fases de la Aplicación

- **FASE 1:** En esta fase se aplicó el diagnóstico de cuadrilátero. Lo cual fue desarrollado en dos horas de clase (90 minutos). El instrumento se dividió en dos partes, una enfocada en la identificación de los cuadriláteros y el segundo ítem enfocada en identificar y

definir cuadriláteros con sus palabras. Se entregaron las indicaciones de cómo debían contestar el diagnóstico. Si cometían algún error debían tacharlo y no borrarlo, para dar análisis al error cometido. La actividad fue desarrollada en forma individual, contestando en forma escrita las preguntas entregadas y dibujando para apoyar su respuesta.

- **FASE 2:** Esta fase fue desarrollada al día siguiente y en dos horas clases (90 minutos). Se entregó a cada estudiante una actividad la cual consta de 2 imágenes de una hoja doblada en cuatro partes y con un corte en forma de triángulo (uno isósceles y el otro escaleno), donde deben dibujar y pintar la figura que se obtendrá al desdoblar la hoja, además de explicar la importancia de las propiedades que puedan resaltar de su dibujo. Finalmente se debían reunir en grupos de 4 estudiantes con el objetivo de redactar una carta a otro estudiante del salón, donde expliquen claramente la estrategia utilizada para resolver este tipo de problema.
- **FASE 3:** Actividad con material concreto. En un tercer día se desarrolló una actividad que consistía en manipular y construir cuadriláteros (cuadrado, rectángulo, rombo y trapecio) con tiras de papel de 10 y 15 centímetros de largo por un centímetro de ancho, pegarlas en una cartulina y luego definirlos con todos los elementos utilizados (ángulos, diagonales etc.)
- **FASE 4:** Esta fase consistía en aplicar un diagnóstico final para ver si los estudiantes comprendieron los conceptos de cuadriláteros y sus elementos secundarios. Este diagnóstico final es el mismo que el inicial.

3.5 Unidades de Análisis

Los datos utilizados se componen de las respuestas escritas de los estudiantes, vídeos de las sesiones de trabajo. Como unidades de análisis de esta información se recuperan inscripciones, trazos (por ejemplo, figuras), respuestas escritas de las actividades desarrolladas, transcripciones de algunas de las acciones representativas presentes en la sala de Clases.

CAPÍTULO 4: Análisis de Resultados

4.1 Introducción

La visualización es considerada como una etapa que se encuentra más allá del ver, podemos decir que se enfoca en una reflexión profunda por sobre lo que se ve, los elementos las representaciones de los objetos matemáticos. Relacionando lo anterior con las actividades desarrolladas y los participantes de esta experiencia, observamos que algunos estudiantes desarrollan competencias que les permiten llevar a cabo las construcciones señaladas, respecto de los cuadriláteros. En algunos casos reconocen conceptos de paralelas o perpendiculares que son intencionados por ellos mismos asociándolos a la construcción de cuadrado o rectángulo.

El análisis de los resultados de las actividades se encuentra bajo el alero del marco teórico planteado. Desde el punto de vista de la visualización y las aprehensiones que plantea Duval se analizó el diagnóstico, actividad de doblado de papel y el diagnóstico final. El trabajo grupal de construcción y definición de conceptos se analizó a través de la categorización de dentro de la geometría.

Por otra parte, este trabajo enfoca una mirada en la formación de los conceptos (cuadriláteros) o la imagen del concepto que presentan los alumnos en estudio según las actividades desarrolladas, lo cual se basará en el modelo de actividad mental de Vinner (1991). Esto permite aportar una mirada más amplia respecto de las concepciones que presenta un estudiante al momento de evocar una definición a través de una imagen o viceversa.

4.2 Análisis del Diagnóstico

Para clasificar a los estudiantes se confeccionó una tabla que permitiera categorizarlos en aprehensión perceptiva, aprehensión discursiva de anclaje discursivo-visual y aprehensión discursiva de anclaje visual-discursivo, definido en el marco teórico.

Tabla 4.1 Categorización de estudiantes

Aprehensión Perceptiva	Aprehensión Discursiva	
	Anclaje Discursivo- visual	Anclaje Visual-Discursivo
A3-A4-A10-A16-A25-A30-A31-A32	A5-A8	A1- A2- A7-A9-A11- A12-A14-A15-A17-A19- A20-A21-A22-A23-A26- A28-A29-A35
8	2	18

Fuente: Creación propia

El diagnóstico (ver anexos) contó dos ítems el primero se dividió en tres preguntas donde los estudiantes deben identificar cuadriláteros por su apariencia. El segundo ítem se enfoca en reconocer a cuatro cuadriláteros para posteriormente definirlos.

La respuesta que debe dar el estudiante en ítem uno, enfocado en el modelo de actividad mental que plantea Vinner, está relacionada con el diagrama de deducción según el pensamiento intuitivo, el cual permite al estudiante evocar la imagen del concepto, incluso la dibuja, para luego redactar la definición. En cambio en ítem dos, se produce una interacción entre la definición y la imagen y viceversa.

Según lo observado durante la aplicación de la prueba de diagnóstico y las respuestas obtenidas en el primer ítem, se puede concluir que los estudiantes no tenían apropiación ni reconocían los elementos secundarios de los cuadriláteros (ángulos, diagonales). El 93% de ellos reconoce a un cuadrilátero como una figura de cuatro lados. El restante 7% no logró la asociación del concepto con la imagen de un cuadrilátero como se solicitaba.

Un total de 8 estudiantes fueron clasificados dentro de la aprehensión perceptiva equivalente al 28,6%. No se produce transito entra las distintas aprehensiones que permitan la comprensión completa de la definición. En esta primera etapa, este grupo de estudiantes fue capaz de visualizar el concepto de cuadrilátero y dibujarlo, incluso identifican partes de éste, aunque no sean las solicitadas, además no logran las competencias necesarias que les permitieran definir el concepto, esto también se asocia a la edad de los estudiantes (11 años) debido a que no cuentan con al vocabulario matemático pertinente para poder escribir la definición. En la figura 4.1 se muestra al estudiante A16 que deja sin completar la definición y visualizando de forma errónea el concepto de lado.

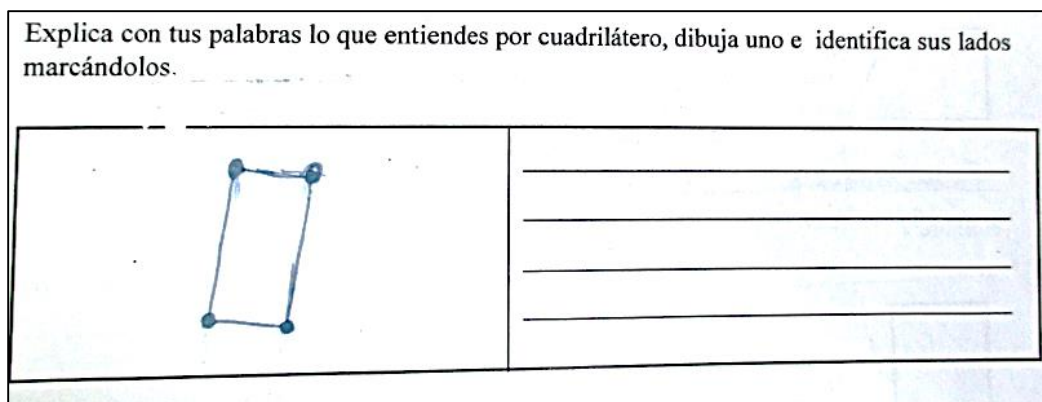


Figura 4.1 Estudiante A16

Dentro de la clasificación que corresponde a la aprehensión discursiva con anclaje discursivo visual, encontramos a dos estudiantes que corresponde al 7,1% quienes no completan la actividad y solo definen el concepto. Como se muestra en la figura 4.2. Estos estudiantes no transitan desde de aprehensión discursiva visual a la visual discursiva. Demostrando poco interés por responder correctamente lo cual queda manifestado en conversación informal con el estudiante A8, al momento de preguntarle

¿Por qué no realizó el dibujo?, Este dice que ¿para qué? Si ya lo había escrito y los cuadri...esos tienen cuatro lados.

Explica con tus palabras lo que entiendes por cuadrilátero, dibuja uno e identifica sus lados marcándolos.


	<p>Tiene 4 lados y 4 lados</p> 
--	--

Figura 4.2 estudiante A8

Respecto de los 18 estudiantes, correspondientes al 64,3%, que son clasificados dentro la categoría aprehensión discursiva con anclaje visual discursivo, podemos mencionar que reconocen la figura mentalmente. Los estudiantes transitan entre ambas aprehensiones logrando visualizar del objeto matemático solicitado, luego son capaces de definirla, permitiendo el anclaje producido desde lo visual a lo discursivo, como se muestra en a figura 4.3. Algunos casos presentan errores gramaticales, al momento de redactar, pero dando a conocer que reconocen el objeto matemático cuadrilátero.

2) Explica con tus palabras lo que entiendes por cuadrilátero, dibuja uno e identifica sus lados marcándolos.

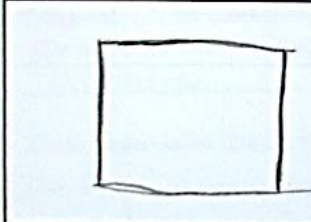
	<p>Tiene cuatro lados y solo es cuadrilátero si tiene cuatro lados</p>
---	--

Figura 4.3 Estudiante A20

En síntesis, en esta primera etapa de diagnóstico 28,6% de los estudiantes es clasificado dentro de la aprehensión perceptiva. El 7,1% es clasificado dentro de la aprehensión discursiva anclaje discursivo – visual y un 64,3% es categorizado dentro de la aprehensión discursiva con anclaje visual discursivo.

4.3 Análisis Actividad Doblado de Papel

La actividad correspondiente al doblado de una hoja, fue aplicada en el mismo grupo curso, esta vez a 29 estudiantes. Esta constaba de dos ítems, el primer ejercicio consistía en analizar un dibujo de una hoja de papel dobla en cuatro partes formando un rectángulo al cual se le corta una esquina con forma de triángulo isósceles rectángulo (ver anexos). Del cual los estudiantes deben determinar que figura queda en el corte cuando la hoja desdoble.

La actividad mental que deben desarrollar los estudiantes (Vinner 1991) al momento de resolver la tarea, está enmarcada dentro de la deducción según el pensamiento intuitivo, debido a que el estudiante debe de leer el enunciado y evocar la imagen del concepto y para luego definirla.

Tabla 4.2: Categorización por aprehensiones doblado de papel.

Aprehensión Perceptiva	Aprehensión Discursiva		Aprehensión Operativa
	Anclaje Discursivo-visual	Anclaje Visual-Discursivo	
A1-A3-A4-A5-A8-A12-A18-A19-A21-A25-A28-A30-A34	A9-A24	A11-A13-A14-A15-A16-A20-A33-A35	A2-A7-A17-A23-A36-A31
13	2	8	6

Fuente: Creación propia.

Para comprender esta actividad los estudiantes requerían visualizar la hoja doblada y transitar de la dimensión 3D a la 2D y viceversa, lo cual implicaba desdoblar y doblar mentalmente el papel para poder dibujar lo que resulta del corte realizado; en este caso se visualiza un rombo en la hoja.

Muchos de los alumnos doblaron la hoja que tenían para comprender lo que ocurriría, visualizando los dobles y el corte, lo que les permitió reconocer la configuración y luego poder definirla. En algunos casos, junto con doblar la hoja realizaron dibujos que les permitió modificar la configuración inicial, respecto de la que obtendrían al desdoblar la hoja.

Esta forma de trabajar (doblar y desdoblar la hoja) se reflejó en el 20,7% de los estudiantes quienes lograron transitar entre la aprehensión discursiva a la operatoria y viceversa, visualizando la configuración inicial y la final. Este grupo de estudiantes se clasificó dentro de la aprehensión operatoria. La figura 4.4 correspondiente al estudiante A7, quién dobla y pinta la hoja en la que está trabajando, permitiéndole visualizar cual será el resultado de la pregunta, figura 4.5.

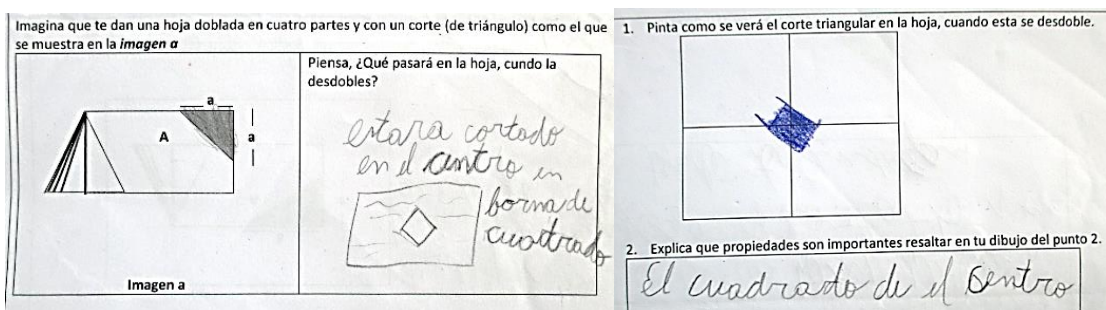


Figura 4.4 Estudiante A7

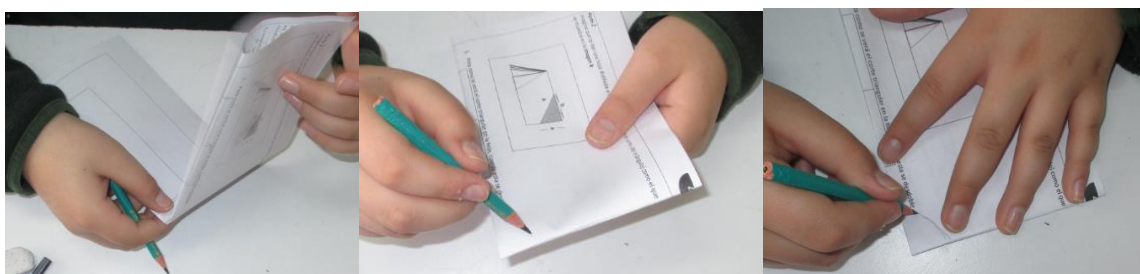


Figura 4.5 Estudiante A7

Los estudiantes clasificados dentro de aprehensión perceptiva, fueron aquellos que respondieron en forma intuitivamente, dibujando un triángulo en la esquina la hoja, sin más explicaciones o con argumentos claramente inconsistentes que no revisten mayor análisis.

La aprehensión perceptiva que presentan los estudiantes, va la mano con lo que son capaces de visualizar de la imagen presentada, no reconocen que está doblada en cuatro partes, pese a que se informa al comienzo del ejercicio. No se produce una reconfiguración, que permita al estudiante pasar de 2D a 3D, solo visualizan el doblado en 2D, para luego

responder también en 2D. Otro enfoque va de la mano con los informes PISA expuestos en el capítulo uno revelarían que los estudiantes carecen de comprensión lectora que les permita reconocer y comprender el problema. La figura 4.6 muestra las repuestas del estudiante A5 clasificado dentro de la aprehensión perceptiva.

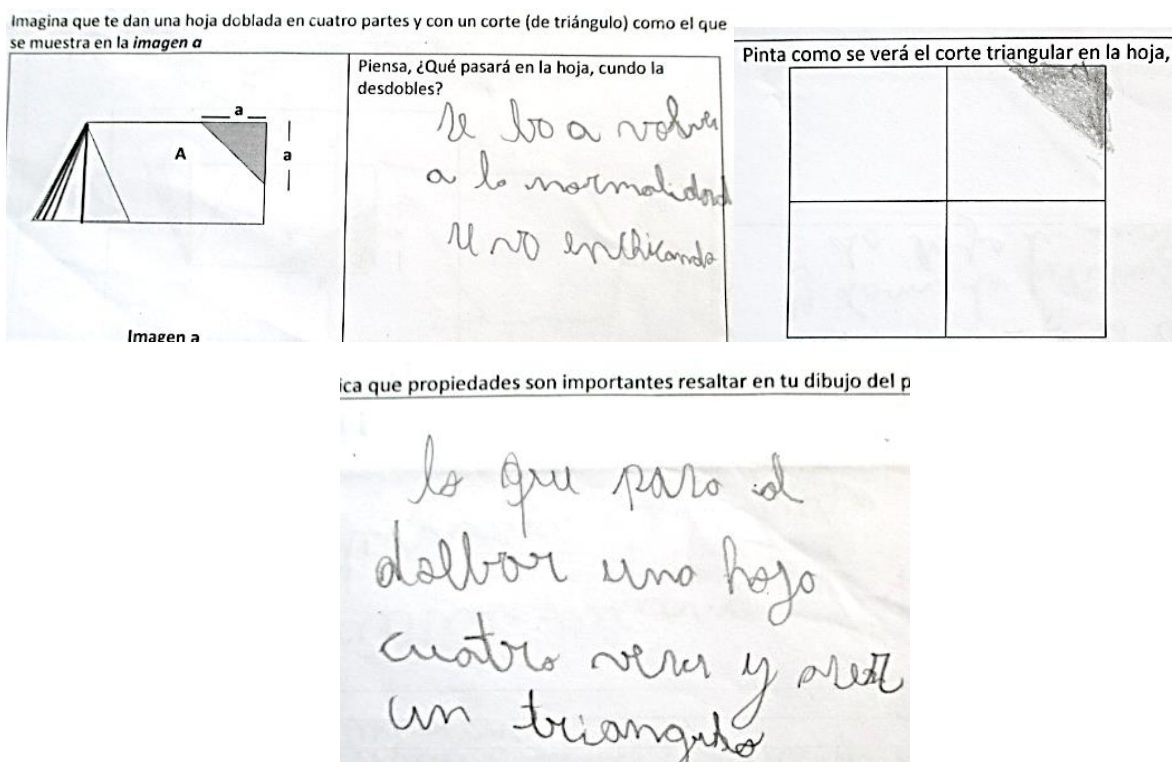


Figura 4.6 Estudiante A5

Dentro de la clasificación de la aprehensión Discursiva de anclaje discursivo a lo visual, encontramos al 6,9% los estudiantes, quienes no logran visualizar de forma completa el dibujo resultante o visualizan solo una parte. Tampoco logran el tránsito entre las diferentes aprehensiones, que permitan completar la tarea. En la figura 4.7 se muestra al estudiante A9 quién se enfoca en la descripción visual de la actividad, pero no visualiza correctamente el desdoblado del papel, generando un dibujo que no corresponde al resultado del problema. Como se muestra en la figura 4.9.

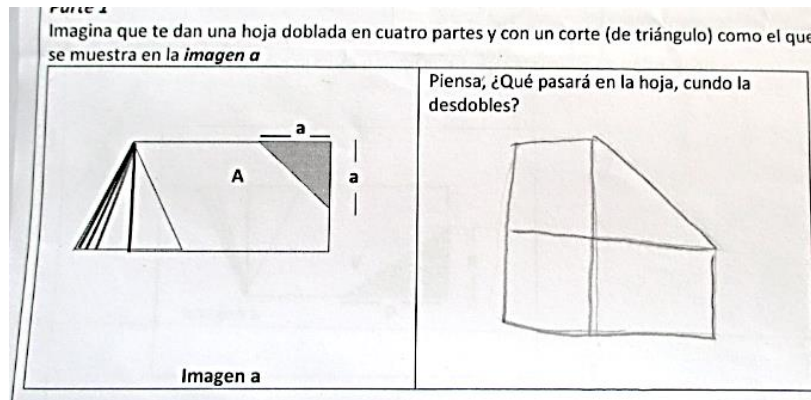


Figura 4.7 Estudiante A9

Los estudiantes clasificados en Anclaje Visual Discursivo se enfocan en describir la situación que ocurrirá después de desdoblar la hoja, acción que no realizan (doblar la hoja). Finalizada la actividad y de manera informal se consultó a algunos estudiantes, *¿por qué no habían doblado la hoja para ver lo que ocurría?*, estas fueron sus respuestas:

Estudiante A13: “No se había ocurrido”.

Estudiante A15: “¿Y se podía doblar la guía?”

Otro aspecto a resaltar es que no se apoyan de dibujos. Tampoco se produce el tránsito entre las diferentes tipos de aprehensiones, la respuesta del estudiante va de 2D a 2D, no infiere la visualización 3D. Esta descripción puede ser correcta o no como se muestra en figura 4.8. El estudiante E13 evoca una visualización en dos dimensiones sobre la imagen a, llevándolo a inferir triángulos arriba y abajo.

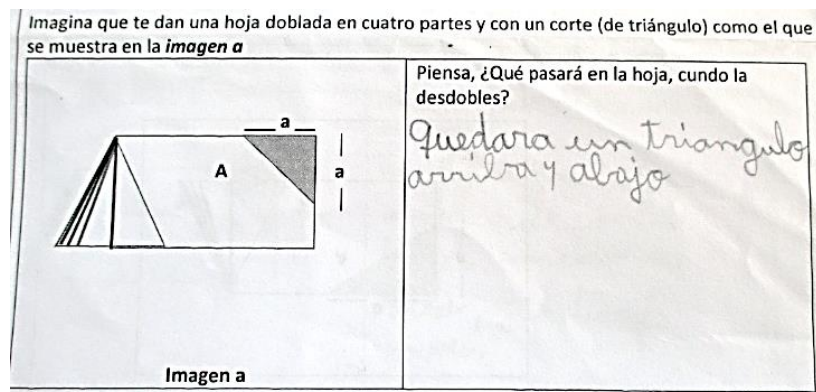


Figura 4.8 Estudiante A13

4.4 Análisis del Trabajo Grupal, Construcción y Definición de Conceptos

Para llevar a cabo esta actividad, se conformaron grupos con cuatro integrantes, quienes cortaron tiras de papel de 15 y 10 centímetros, ángulos de 45° , 90° y de 135° grados. Como se muestra en la imagen 4.9

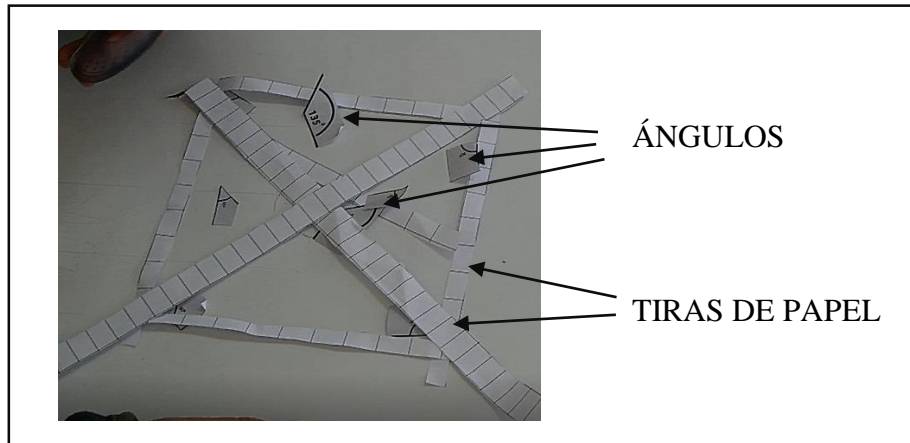


Imagen 4.9 Ángulos y tiras de papel

Con las tiras de papel y los ángulos, los grupos debían construir un cuadrado, un rectángulo, un rombo, un romboide y un trapecio isósceles, también se les solicitaba incorporar las correspondientes diagonales. Terminada la construcción de cada cuadrilátero, los estudiantes debían confeccionar una definición de cada uno de ellos. El desarrollo de esta actividad fue documentado a través de videos, (ver transcripción en anexos) correspondiente al trabajo que fueron realizando los integrantes de cada grupo. Los estudiantes relataban mientras el profesor preguntaba que estaban haciendo el momento de ir construyendo las figuras geométricas.

Desde el modelo de actividad mental planteado por Vinner (1991) esta actividad permitió a los estudiantes evocar imágenes del objeto matemático y de sus elementos secundarios, o sea, para concretar la construcción completa de la figura geométrica debían transitar entre la imagen y el concepto como se muestra en la imagen 4.10, instantes 4), 6) y 8). El modelo que permite la activación mental de los estudiantes corresponde a la interacción entre definición e imagen, figura 2.1.

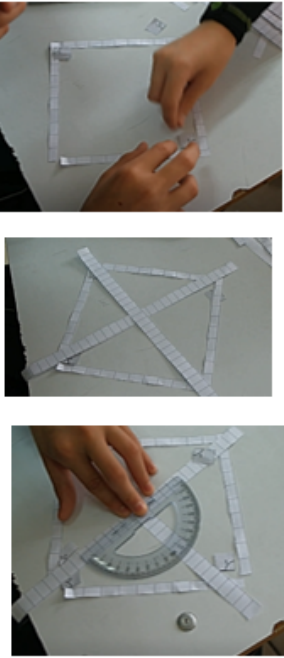
Imagen y Tiempo (5:58 al 7:30)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Profesor: ¿Qué están construyendo acá? 2. A21: Un Cuadrado y estamos colocando los ángulos. 3. Profesor: Ya... ¿Y dónde van los ángulos? 4. A21: En las aberturas de aquí y acá.(indicando los vértices) 5. Profesor: ¿Qué otros elementos se pueden identificar? 6. A21: Diagonales. 7. Profesor: ¿Qué se forman entremedio? (indicando al centro de diagonales) 8. A21: Ángulos perpendiculares. 9. Profesor: ¿y cómo demuestran que son perpendiculares? 10. A21: ¡Midiendo! (entregando transportador a 	<p>La construcción del cuadrado del grupo 2 es llevada a cabo en forma satisfactoria, reconociendo los ángulo rectos de la figura, instante 4) incluyen las diagonales , instante 6), las que miden con transportador para determinar si son o no perpendiculares, instante 10), Se puede observar que en esta actividad, solo participa el estudiante A21</p>

Imagen 4.10 Extracto transcripción video 1

Del marco teórico: “Las Maneras de ver en la Geometría” (Duval 2016) los grupos de estudiantes fueron clasificados como botánicos o constructores. Las categorías agrimensor geómetra e inventor artesano no fueron consideradas, debido a que en primer caso los estudiantes no deben tomar medidas de longitudes, ni trabajar con escalas etc. lo cual no contemplaba esta actividad. En el caso del inventor artesano, como los estudiantes son muy jóvenes (11 años) no cuentan con las competencias necesarias que les permita completar este nivel de problemas o para poder obtener la reconfiguración solicitada, no son capaces de modelar las figuras y tienen conocimientos muy básicos.

Tabla 4.3: Maneras de ver la geometría

BOTÁNICO	CONSTRUCTOR
Grupo 4 (A2-A19-A25-A28)	Grupo 1 (A3-A23-A26-A27)
Grupo 5 (A6-A8-A36)	Grupo 2 (A12-A18-A21-A30)
Grupo 6 (A7-A17-A31-A35)	Grupo 3 (A1-A14-A15-A34)
3 grupos = 11 estudiantes	3 grupos = 12 estudiantes

Fuente: Creación propia.

Las respuestas esperadas de los estudiantes que permitieron su clasificación ya sea botánico o constructor se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 4.4: Respuestas esperadas:

	Botánico	Constructor
Respuestas Esperadas	Reconocen: cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, diagonales, vértices, ángulos.	Construyen cuadriláteros , establecen y determinan medida de ángulos, Manipulan ángulos y diagonales, uso de la herramienta transportador

Fuente: Creación propia

Los grupos clasificados como botánicos, se enfocaron en la manipulación de las tiras de papel formando los cuadriláteros, reconocen las figuras que deben construir, identifican lados y diagonales; perciben de forma inmediata y nombran algunas formas elementales. No complementan la elaboración del cuadrilátero con ayuda del transportador, tampoco se apoyan de los ángulos entregados como se muestra en la figura 4.11 instantes 4) y 6).

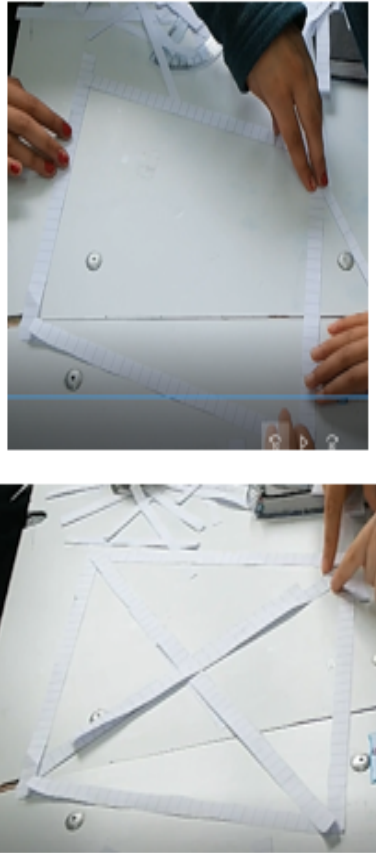
Imagen y Tiempo (10:04 al 11:55)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Profesor: ¡Muy bien! ¿Qué están construyendo? 2. A25: Un romboide. 3. Profesor: ¿y Dónde están los ángulos? 4. Ningún estudiante responde. 5. ¿Cómo lo van a construir? 6. Ningún estudiante responde 7. Prof.: ¿Qué van a construir? 8. A25: un romboide. 9. Prof.: Y ¿qué característica tiene un romboide? 10. A25: es como un cuadrado que lo empujaron. 	<p>El grupo 4 construyen un romboide, del cual no reconocen elementos secundarios como ángulos, momento 3 y 4, tampoco utilizan ángulos entregados para la construcción. Ubican las diagonales, pero desconocen cómo llamarlas. Finalmente solo reconocen la figura que están construyendo.</p>

Imagen 4.11 Extracto transcripción video 11

Duval en el año 2016 plantea que quienes ven la geometría como botánicos reconocen nombran formas elementales. El grupo 4 formado por los estudiantes A2, A19, A25 y A28 quienes reconocen la forma elemental de rombo como un cuadrado dado vuelta siendo incapaces de evocar más propiedades. Como muestra la figura 4.12

En grupo de 4 alumnos(as) con ayuda de las barras y ángulos construye los siguientes cuadriláteros, luego responde las preguntas, utilizando conceptos como lados, paralelas, ángulos, diagonales, etc.

1) Construyan un cuadrado, utilicen ángulos y diagonales.

2) A partir de la construcción, elaboren una definición de cuadrado:

El cuadrado tiene 4 \angle de 90° y tiene 2 diagonales.

3) Construyan un rombo, utilicen ángulos y diagonales.

4) A partir de la construcción, elaboren una definición de Rombo:

Es parecido a un cuadrado, solo como que la dan vuelta.

Figura 4.12 Respuestas del grupo 4

Los grupos clasificados como constructor, cuentan con las competencias para construir los cuadriláteros solicitados: cuadrado, rombo, romboide etc. Duval menciona que mediante el uso de instrumentos los estudiantes pueden percatarse realmente de las propiedades de geométricas con que cuenta un cuadrilátero. Los estudiantes se apoyaron del transportador para corroborar las medidas de ángulos que se forman los vértices y el ángulo que forman las diagonales. Esta acción le permitió a los estudiantes identificar que las diagonales de un cuadrado y de un rombo son perpendiculares y que las diagonales de un romboide no son perpendiculares como se muestra al grupo 2 en la imagen 4.13, instante 18). Este grupo también reconoce a los tipos de ángulos que están formados los cuadriláteros imagen 4.13 instante 10).


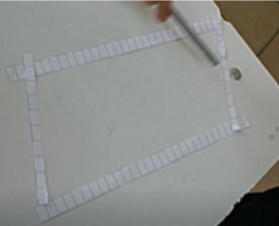
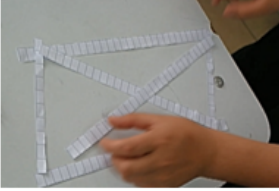
	<p>7. Profesor: Perfecto. ¿Cuánto mide cada ángulo?</p> <p>8. A21: Ahora lo vamos a medir.</p> <p>9. A12: (Midiendo con el transportador) 125°</p> <p>10. A21: Creo que son dos agudos y dos obtusos</p> <p>11. Profesor: Muy bien, ¿Qué otra cosa más podemos ver en el romboide?</p> <p>12. A21: Tiene dos sus lados que son el ancho, son más cortos, por eso son el ancho. (los indica con el lápiz)</p> <p>13. Profesor: ¿Amaro qué estas poniendo?</p> <p>14. A21 y A12: Las diagonales.</p> <p>15. Profesor: ¿Qué pasa con las diagonales?</p> <p>16. A21: Una es más larga que la otra.</p> <p>17. Profesor: ¿Qué pasa en el centro con los ángulos?</p> <p>18. A21: Hay que medirlos. Hay medirlos... ¿Dónde está el transportador?</p> <p>19. A12: (Midiendo) mide como 58°.</p> <p>20. A21: (indicando el ángulo) es agudo y los otros dos obtusos.</p>	<p>En este video el grupo dos construye un romboide, y van determinando paso a paso las características de este. En primer lugar reconocen que en los vértices no se forman ángulos rectos, instante 4). Utilizan el transportador para medir los ángulos, instante 9). Además de reconocer que tiene dos ángulos agudos y dos obtusos, instante 10). Reconocen la diagonal mayor y menor como una más larga que la otra, instante 16). Y nuevamente hacen uso del transportador para medir los ángulos que forman las diagonales, instante 18).</p>
		
		

Imagen 4.13 extracto transcripción video 9 Grupo 2

En la figura 4.14 se muestra como los estudiantes hacen uso de todos los recursos posibles. Asocian al concepto de rombo manifestando que los lados son paralelos, instante 4). La visualización mental de la figura más la visualización física de la misma les permite reconocer las medidas de los ángulos, instante 6). A medida que los estudiantes evocan el concepto rombo y lo construyen, van aprendiendo, porque lo que imaginaba, lo están construyendo de forma manipulativa con las tiras de papel y los ángulos, experiencia muy válida.

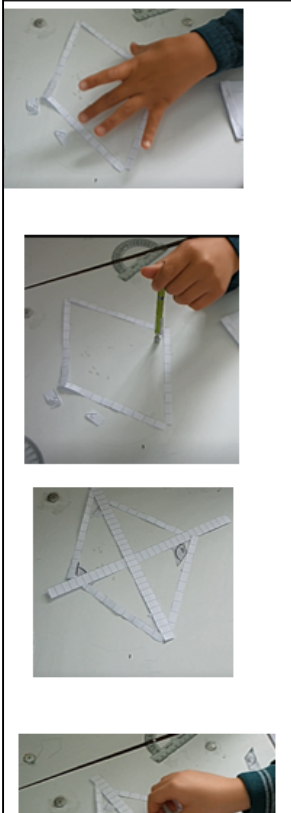
Imagen y Tiempo (0:02 al 2:04)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Profesor: ¿Qué figura tienen allí? 2. A15 y A14: Un rombo! 3. Profesor: ¿Por qué dicen que es un rombo? 4. A15: (Indicando lados paralelos) porque estas son paralelas y estas son paralelas y de una forma que no es un cuadrado. Así!! 5. Profesor: ¿Es una forma que no es un cuadrado?.. 6. A15: Exacto. Y aparte este mide 45° este 45° (indicando los ángulos agudos) 135° y 135° (indicando los ángulos obtusos) 7. Profesor: Demuestra que miden 45°. 8. A34: (Pone un ángulo de 45°) 9. A14: (Pone ángulos de 135°) 10. A34: Dan en total 360° 11. Profesor: Perfecto, algo más que le puedan agregar al rombo. 12. A34: Las Diagonales. 13. Profesor: ¿Qué pasa con las diagonales? 14. A15 y A34: (Ponen las diagonales) 15. Profesor: ¿Qué pasa con las diagonales?, ¿Qué pueden deducir de las diagonales? <p>A15: Que en los cuadriláteros las diagonales están a 90°</p>	<p>El grupo 3 presenta una interacción entre sus participantes quienes se muestran activos al momento de trabajar con el profesor. Reconocer que tienen lados paralelos, y que no es un cuadrado momento 4). Son capaces de identificar los ángulos agudos y obtusos del rombo. También deducen que las diagonales se intersectan en 90°</p>

Imagen 4.14 Extracto transcripción video 7 grupo 3

En síntesis, las construcciones realizadas con los estudiantes y con ayuda de los manipulativos, les ha permitido plasmar sus conocimientos de forma tangible, donde reconocen y visualizan: los lados, ángulos, diagonales etc. de los distintos cuadriláteros. Tanto los estudiantes clasificados como botánicos o constructores han visto sus imágenes mentales reflejadas o construidas, lo que permitió corregir errores del concepto de cuadrilátero.

4.6 Análisis Diagnóstico Final

Este diagnóstico se apoya en los esquemas mentales que plantea Vinner, los estudiantes deben evocar la imagen a través del concepto, respondiendo a una deducción puramente formal, como se muestra en la figura 2.6. Pero en el ítem dos los estudiantes deben evocar el concepto desde la imagen, lo cual responde a una representación intuitiva, lo que se refleja en la figura 2.8

El análisis del diagnóstico final y después del desarrollo de las actividades se puede observar que 96% de los estudiantes presenta un anclaje visual discursivo, el restante 4% se ubicó dentro de la aprehensión perceptiva. Siendo capaces los estudiantes de asociar la configuración con la definición que le corresponde. En este diagnóstico final no encontramos estudiantes dentro de la aprehensión discursiva con anclaje de lo discursivo a lo visual.

La clasificación se realizó en una tabla que permita categorizar a los estudiantes dentro de la aprehensión perceptiva, la aprehensión discursiva con anclaje de lo visual a lo discursivo y la aprehensión discursiva con anclaje de lo discursivo a lo visual.

Tabla 4.5 Categorización de estudiantes

Aprehensión Perceptiva	Aprehensión Discursiva	
	Anclaje Discursivo- visual	Anclaje Visual-Discursivo
A31		A1-A2-A3-A4-A5-A7-A8-A9-A10-A12-A14-A15-A16-A17-A19-A20-A21-A22-A23-A25-A26-A28-A29-A30-A32-A35
1	0	26

El estudiante que se categorizan dentro del anclaje discursivo visual, no entregó definiciones formales de los cuadriláteros solicitados, pero de forma intuitiva identifica los lados del cuadrado, como se muestra en la figura 4.15.

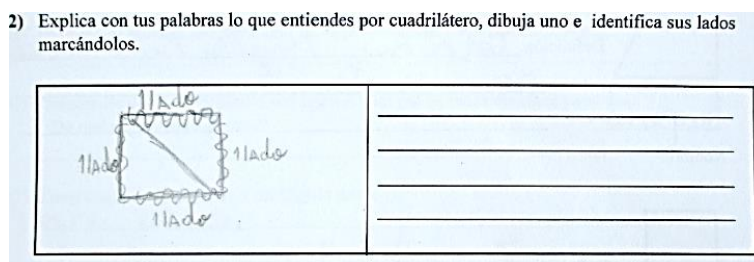


Figura 4.15 Estudiante A31

Respecto del anclaje visual a lo discursivo, los estudiantes muestran claramente que asocian la configuración a una definición, en algunos casos errores gramaticales, pero que permiten entender las definiciones como se muestran Figuras 4.16, 4.17 y 4.18

-) Dibuja un cuadrilátero (cualquiera). Explica con tus palabras lo que entiendes por ángulo. Identifica marcándolos, los de la figura que construiste.

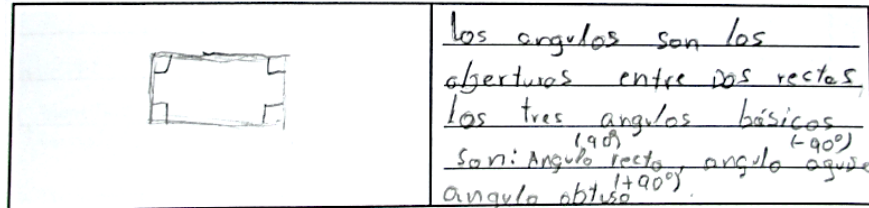


Figura 4.16 Estudiante A21

-) Explica con tus palabras lo que entiendes por cuadrilátero, dibuja uno e identifica sus lados marcándolos.

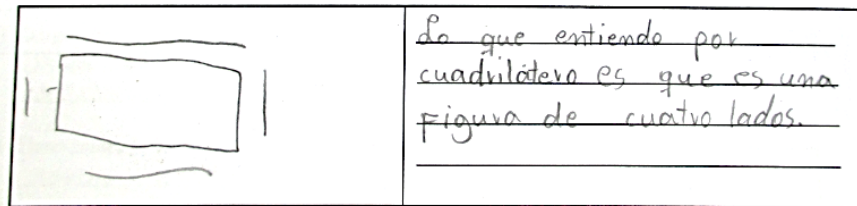


Figura 4.17 Estudiante A22

- 3) Dibuja un cuadrilátero (cualquiera) y sus diagonales y define con tus palabras lo que entiendes por diagonal.

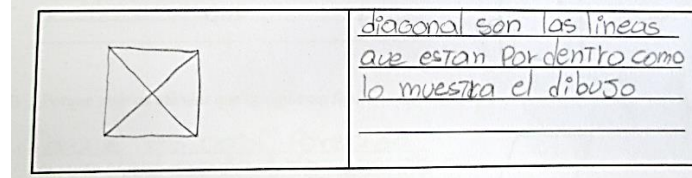


Figura 4.18 Estudiante A25

En síntesis, luego de resolver diversas actividades que llevaron a los estudiantes a visualizar imágenes de cuadriláteros y sus definiciones, estos presentaron un mayor acercamiento a las aprehensiones discursiva visual y visual discursiva, dejando ver un alto grado de comprensión de los conceptos trabajados. Lo cual se refleja en los diagnósticos inicial y final.

CAPÍTULO 5: Conclusiones

5.1 Introducción

Se plantean en este capítulo las conclusiones de la investigación, permitiendo de esta forma establecer el alcance del objetivo general, a partir de los objetivos específicos de la investigación. También, se establecerán aportes que puedan brindar el alcance de este marco teórico, metodológico y las recomendaciones en futuras investigaciones respecto de la enseñanza de cuadriláteros a estudiantes de sexto básico.

En el diagnóstico inicial se plantearon dos tipos de preguntas que fueron analizadas. En la primera el estudiante, a través de la observación de una figura, debía construir el concepto y la segunda pregunta, a través del concepto debían evocar la figura. Después del análisis del diagnóstico se diseñaron dos tipos de tareas, una que permitiera a los estudiantes apropiarse del concepto cuadrilátero, a través de la manipulación de material concreto que le permita construir las figuras solicitadas, llevando al estudiante a reconocer el cuadrilátero y de esta forma lo pueda asociar al concepto. A esta edad (11 años) el tránsito de la figura al concepto y del concepto a la figura genera grandes problemas a los estudiantes, en especial en el manejo de cuadriláteros, esto puede ser en parte atribuible a la constante modificación que presentan las bases curriculares, asociado al trabajo con los textos escolares facilitados por el ministerio de educación, el cual como revisamos anteriormente (ver página 14) no cumplen con el tipo de ejercicios ni actividades que permitan a los estudiantes apropiarse de conceptos como cuadrado, rectángulo, rombo etc. mostrando solo figuras prototípicas las cuales conducen a errores. Otro aspecto a señalar de los textos revisados, es que estos no se involucran con los elementos secundarios de los cuadriláteros, por ejemplo, dejando de lado el concepto de diagonal de una figura geométrica, el cual es definido por los estudiantes como una línea que no es ni vertical ni horizontal, es la línea chueca que cruza a la figura de vértice a vértice.

Para atender a esta problemática generada a continuación analizaremos los objetivos planteados en el capítulo dos.

5.2 Conclusiones del Objetivo Específico 1

“Identificar el uso que hacen de la figura como concepto imagen o concepto definición, durante la resolución de las tareas de cuadriláteros”:

Después del análisis del diagnóstico inicial se pudo establecer la siguiente clasificación: Aprehensión perceptiva 28,6%, aprehensión discursiva visual 7,1% y visual discursiva 64,3%. Se puede concluir que la mayoría identificó el concepto definición y las propiedades (lados, ángulos), con la salvedad de contar con muy pocos recursos gramaticales al momento de definir. Y solo un 35,7 % de los estudiantes identifica el concepto imagen.

En la actividad de doblado de papel presentaba una dificultad de cambio de dimensión, de 3D (la hoja doblada), a 2D (dibujo que debían realizar). En esta actividad se dan a conocer dos tipos de estudiantes, aquellos que deben doblar la hoja para poder construir la imagen mental, transitando desde aprehensión discursiva visual a la visual discursiva, esto les permitía visualizar la imagen resultante; y aquellos estudiantes capaces de visualizar el doblado y desdoblado de la hoja construyendo mentalmente la figura. Lo que lleva a concluir que en esta actividad un 44,8 % de los estudiantes identifican el concepto imagen y un 55,2% de los estudiantes identifican el concepto definición.

En la actividad donde debían construir cuadriláteros con tiras de papel, no había cambio dimensional era de 2D (la tira de papel) a 2D (la cartulina donde construían). En esta actividad solo el estudiante A21 logra transitar por la aprehensión operativa, quien es capaz de modificar la construcción para poder configurarla con los elementos secundarios de los cuadriláteros. Finalizada el trabajo grupal de la construcción de cuadriláteros, se identifica que el 100% de los estudiantes identifican los cuadriláteros como concepto imagen.

La clasificación de los estudiantes, (aprehensiones) depende del tipo de actividad que estos realicen, en la actividad desarrolla solo con lápiz y papel no permite a los estudiantes transitar por la aprehensión operativa, a diferencia del trabajo realizado con manipulativos, donde los estudiantes deben movilizar objetos lo cual permite la movilización mental generando la comprensión y apropiación del concepto trabajado.

La evaluación diagnóstica establece que un 96,3% de los estudiantes transita en la aprehensión discursiva lo que se traduce en que la mayoría de los alumnos y alumnas identifican el concepto imagen y luego el concepto definición de los cuadriláteros.

5.3 Conclusiones del objetivo específico 2

“Categorizar el tipo de aprehensión que presentan los estudiantes cuando resuelven tareas de cuadriláteros”:

Las actividades que se consideraron en esta categorización son: Diagnóstico inicial, el doblado de papel y diagnostico final.

Tabla 5.1: Categorización de actividades según tipo de aprehensión.

	Aprehensión Perceptiva	Aprehensión Discursiva visual	Aprehensión Visual discursiva	Aprehensión Operativa
Diagnóstico Inicial	8	2	18	0
	28,6%	7,1%	64,3%	0%
Doblado papel	13	2	8	6
	44,8%	6,9%	27,6%	20,7%
Diagnostico final	1	0	26	0
	3,7%	0%	96,3%	0%

Fuente: Creación propia

La categorización de los estudiantes respecto de las aprehensiones que se observaron, son lo siguiente:

Tabla 5.2: Categorización final de estudiantes.

Aprehensión Perceptiva	Aprehensión Discursiva visual	Aprehensión Visual discursiva	Aprehensión Operativa
26,2 %	4,8 %	61,9 %	7,14 %

Fuente: Creación propia.

Las actividades desarrolladas permitieron que la mayoría de los estudiantes transitaran entre la aprehensión perceptiva y la visual discursiva, lo que lleva a concluir que en un primer momento visualizan la imagen perceptivamente, luego logran la aprehensión visual discursiva durante el proceso del desarrollo de la actividad, como se muestra en la imagen 5.1 de la transcripción del video 9.

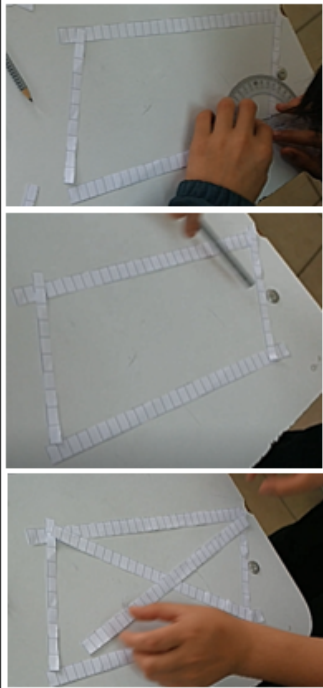
	<p>7. Profesor: Perfecto. ¿Cuánto mide cada ángulo?</p> <p>8. A21: Ahora lo vamos a medir.</p> <p>9. A12: (Midiendo con el transportador) 125°</p> <p>10. A21: Creo que son dos agudos y dos obtusos</p> <p>11. Profesor: Muy bien, ¿Qué otra cosa más podemos ver en el romboide?</p> <p>12. A21: Tiene dos sus lados que son el ancho, son más cortos, por eso son el ancho. (los indica con el lápiz)</p> <p>13. Profesor: ¿Amaro qué estas poniendo?</p> <p>14. A21 y A12: Las diagonales.</p> <p>15. Profesor: ¿Qué pasa con las diagonales?</p> <p>16. A21: Una es más larga que la otra.</p> <p>17. Profesor: ¿Qué pasa en el centro con los ángulos?</p> <p>18. A21: Hay que medirlos. Hay medirlos... ¿Dónde está el transportador?</p> <p>19. A12: (Midiendo) mide como 58°.</p> <p>20. A21: (indicando el ángulo) es agudo y los otros dos obtusos.</p>	<p>En este video el grupo dos construye un romboide, y van determinando paso a paso las características de este. En primer lugar reconocen que en los vértices no se forman ángulos rectos, instante 4). Utilizan el transportador para medir los ángulos, instante 9). Además de reconocer que tiene dos ángulos agudos y dos obtusos, instante 10). Reconocen la diagonal mayor y menor como una más larga que la otra, instante 16). Y nuevamente hacen uso del transportador para medir los ángulos que forman las diagonales, instante 18).</p>
---	--	--

Imagen 5.1 Extracto transcripción video 9

El trabajo con manipulativos permite una aprehensión de los conceptos de cuadriláteros en los estudiantes, a diferencia del lápiz y el papel, en este caso una de las limitantes es la corta edad de los participantes quienes no cuentan el vocabulario suficiente para redactar una respuesta acorde con lo solicitado.

5.4 Conclusiones del Objetivo General:

“Analizar los procesos de aprehensión visual que realizan los estudiantes de sexto básico cuando se enfrentan a tareas apoyadas en el uso de manipulativos y de lápiz y papel, diseñadas en función de la imagen y el concepto cuadrilátero.

El análisis de las aprehensiones visuales de los estudiantes al momento de aplicar el diagnóstico, muestran un desconocimiento respecto de los cuadriláteros, no son capaces de definirlos, tampoco de identificar los elementos secundarios como diagonales, el concepto de ángulo es confundido con vértice. Al momento de resolver el diagnóstico los estudiantes se ven enfrentado a un documento que los hace transitar por las tres tipos de aprehensiones que plantea Duval, resaltando la aprehensión discursiva con anclaje en lo visual, lo cual deja de manifiesto que la mayoría de los estudiantes primero evoca la imagen del cuadrilátero, la dibuja y luego la define.

Luego del desarrollo de las tareas que llevadas a cabo, se aplicó el diagnóstico final, el cual reveló la comprensión por partes de los estudiantes de los conceptos: cuadrado, rectángulo, rombo, ángulos, lados, diagonales. Otro aspecto a resaltar son las conjeturas que obtuvieron los estudiantes al momento de resolver la tarea de construcción cuadriláteros, referido a los ángulos rectos que forman la intersección de las diagonales dentro de un cuadrado y un rombo. Esta conclusión obtenida por ellos, les sorprendió favorablemente, anclando un aprendizaje en todos quienes lograron ésta construcción.

El lenguaje que presentan los estudiantes a esta edad, es una limitante cuando reportan sus observaciones, esto queda reflejado en los videos. Al momento de realizar la grabación, el profesor es quién los guía con preguntas que les permitieran inferir sobre el trabajo que están desarrollando.

La vinculación que se logró establecer entre la imagen concepto que los estudiantes debían desarrollar en los diagnósticos con ayuda de lápiz y papel muestra una clara desventaja sobre la actividad desarrollada con manipulativos donde van desde la construcción al concepto, logrando la concepción de éste.

En los casos que no se logró con el aprendizaje del concepto, se concluye que los estudiantes son capaces de visualizar, pero no con los conceptos que puedan definir lo que están viendo.

5.5 Aportes y Limitaciones del estudio

Dentro de los aportes que entrega esta investigación está la articulación que se logró entre las actividades y el marco teórico trabajado, permitiendo dar sentido a este último mediante el análisis de las actividades desarrolladas, cabe mencionar que este trabajo está sujeto a modificaciones, para la implementar el marco teórico en futuras investigaciones.

La actividad que permitió la construcción de cuadriláteros con tiras de papel fue muy atractivo para los estudiantes quienes participaron activamente en el desarrollo de ésta.

De las limitaciones, se establece que como esta es una tesis de carácter cualitativa, no se puede generalizar los resultados de la investigación.

El vocabulario básico de los estudiantes es una limitante, con el cual definían los conceptos, por ejemplo diagonal: Una línea que no es horizontal ni vertical, sino que es chueca.

Una de las limitaciones que se observó en la investigación, es la falta de apoyo con la que se contó para el desarrollo de esta. Hubo datos que se perdieron, debido a que el docente era el investigador y no filmó el trabajo de todos los grupos. Para desarrollar su trabajo los estudiantes dependían del profesor, el cual no podía cubrir todo el salón.

Esta investigación se realizó para contribuir, en la medida de lo posible, al reencuentro que puedan tener con la geometría dentro y fuera de las aulas tanto docentes como estudiantes, además de promover experiencias significativas que motiven, estimulen y fortalezcan la enseñanza de la matemática.

BIBLIOGRAFÍA

- Aravena , M., & Caamaño , C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule: Talca, Chile. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(2), 179-211.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 52(3), 215-241.
- Báez, R. & Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL “El Mácaro”. Enseñanza de la Matemática. Vols. 12 al 16. Número extraordinario. pp. 67-87.
- Bauzá, G. (2016). La base del conocimiento geométrico en la etapa de Educación Primaria: Materiales para desarrollarla. *Publicaciones Didácticas*, 76(1), 369-411.
- Bullido, F. V. (1994). El empleo de materiales en la enseñanza de la Geometría. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, (21), 95-104.
- Bustamante, C. X., & Giraldo, W. A. (2015). Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: análisis de un texto escolar.
- Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 333-344.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V. Villani (Eds), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1999a). Representation, vision and visualisation: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME, Cuernavaca, México* (pp. 3-26). Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.
- Duval, R. (1999b). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. *La lettre de la Preuve*, noviembre/diciembre 1999. Obtenido en marzo 30, 2007, de <http://www.Lettredelapreuve.it/index.html>.
- Duval, R. (2001). La geometría desde un punto de vista cognitivo. Recuperado 14 de abril de 2014, de <http://fractus.usonumx/Papers/ICMI/LaGeometría.htm>

- Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Mexico, 41-76.
- Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos.
- Duval, R. y Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (M. Acosta, P. Perry. trad.). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas
- Hershkowitz, R; Parzysz, B. & Van Dermolen, J.(1996). Space and shape. In Bishop & Others (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Part 1, pp.161-204). Dordrecht Netherlands; Kluwer Academic Publishers.
- Hernández, F., & Fernández, C. (2006). Baptista. *Metodología de la Investigación. Cuarta edición*. Mac Graw Hill editores. México DF México, 103, 205.
- Hernández, V., & Villalba, M. (2001). Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI. *Recuperado de: <http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm>*.
- Hitt, F. (2002). Working Group on Representations and Mathematics Visualization (PME-NA XX North Carolina, 1998).
- Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*. London: Routledge Falmer. Pp. 121-139.
- Marmolejo, G., & González, G. (2008). Algunos elementos a tener en cuenta en la enseñanza de las figuras geométricas en la educación básica.
- Mertens, D. (2005). *Research and evaluation in Education and Psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*. Thousand Oaks: Sage.
- Mineduc. (2016). *Bases curriculares de la educación parvularia* Santiago, Chile: Editorial Valente.
- Mineduc. (2016). *Programa de Estudio para primero Año Básico Unidad de Curriculum y Evaluación*. Santiago de Chile.
- Mineduc. (2016). *Programa de Estudio para segundo Año Básico Unidad de Curriculum y Evaluación*. Santiago de Chile.

- Mineduc. (2016). Programa de Estudio para tercer Año Básico Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile.
- Mineduc. (2016). Programa de Estudio para cuarto Año Básico Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile.
- Mineduc. (2016). Programa de Estudio para quinto Año Básico Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile.
- Mineduc. (2016). Programa de Estudio para sexto Año Básico Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile.
- Morales, C. & Majé, R. (2011). *Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros*. (Tesis de maestría), Universidad de la Amazonia, Colombia.
- Moratalla, P. T. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, (21), 35-50.
- OCDE (2017), Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias, Versión preliminar, OECD Publishing, Paris.
- OCDE, P. (2006). El programa PISA de la OCDE qué es y para qué sirve. *Santillana. OCDE, PISA.(2009). Marco de la evaluación: Conocimientos y habilidades en ciencias, Matemáticas y Lectura. Paris: OCDE.*
- Paredes, Z., Iglesias, M., & Ortiz, J. (2007). Sistemas de cálculo simbólico y resolución de problemas en la formación inicial de docentes de matemática. *Enseñanza de la Matemática*, 12, 89-105.
- Pastor, A. J., Aguilera, F. C., & Rodríguez, A. G. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de EGB. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, (23), 49-62.
- PISA (2009). *Resumen de resultados*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación. Ministerio de Educación de Chile. Recuperado de http://www.educacion2020.cl/sites/default/files/resumen_resultados_pisa_2009_chile.pdf
- PISA (2012). Informe Nacional resultados Chile PISA. Santiago. Ministerio de educación de Chile.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics:

- Emergence from psychology. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Brill Sense.
- Prior M, & Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), 339-368.
- Phillips, L.M., Norris, S.P., & Macnab, J.S. (2010). Visualization in mathematics, Reading and science education. New York: Springer. 5, 19-34. ISBN 978-90-481-8816-1
- Renzulli, F. & Scaglia, S. (2006). *Clasificación de cuadriláteros en estudiantes de egb3 y futuros profesores de nivel inicial*. Educación matemática. Recuperado de <http://www.famaf.unc.edu.ar/>
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1(2), 47-66.
- Real Academia Española (2019) . *Diccionario de la lengua española*. Madrid. España: Espasa Calpe.
- Santacruz, L. X., & Sinisterra, L. P. (2011). Una secuencia didáctica alrededor de las propiedades de algunos cuadriláteros para estudiantes invidentes de grado 1° de educación básica.
- SIMCE. (2012). Informe Técnico Simce 2011.
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.
- Stake, R. (2003). Responsive evaluation. In *International handbook of educational evaluation* (pp. 63-68). Springer, Dordrecht.
- Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(2), 275-300.
- Van Hiele, P. M. (1957). *De problematiek van het inzicht*. Meulenhoff.
- Valencia, P. (2018). Visualización geométrica en niños de enseñanza elemental.
- Villani, V. (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century (Discussion Document for an ICMI Study). En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 337-346.
- Villarroel, S., & Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer

- año de Secundaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, 73-94.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and the learning of mathematics. En D.Tall (Ed): *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81. Dordrech: Kluwer Academic Publishers.
- Yin, R. K. (2003). Case study research: design and methods (ed.). *Thousand Oaks*.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. *Visualization in teaching and learning mathematics*, 1-7.

ANEXOS

Anexo N°1 : Diagnóstico de cuadriláteros

Diagnóstico de cuadriláteros

Actividad N° 1 : Reconociendo cuadriláteros

Nombre: _____ Fecha ____ / ____ / ____

Objetivo:

- Identificar cuadriláteros por su apariencia.

1) Dibuja un cuadrilátero (cualquiera). Explica con tus palabras lo que entiendes por ángulo. Identifica marcándolos, los de la figura que construiste.

2) Explica con tus palabras lo que entiendes por cuadrilátero, dibuja uno e identifica sus lados marcándolos.

3) Dibuja un cuadrilátero (cualquiera) y sus diagonales y define con tus palabras lo que entiendes por diagonal.

4) Define con tus palabras cada uno de los cuadriláteros que se presentan a continuación:



Definición: _____

Nombre:



Definición: _____

Nombre:



Definición: _____

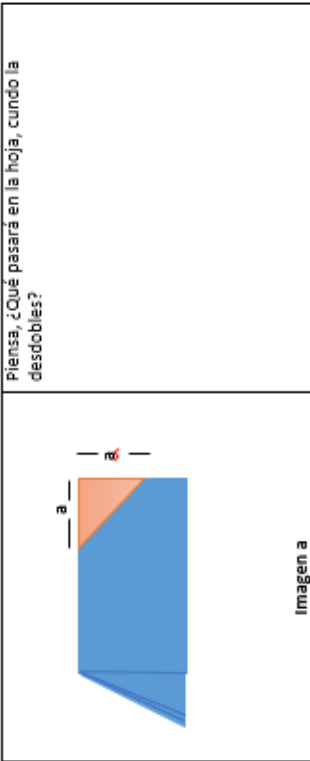
Nombre:



Definición: _____

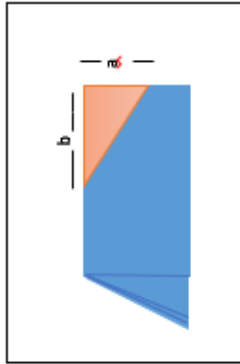
Nombre:

Anexo 2 : Actividad de Doblado de Papel

1			
Actividad 1			
Nombre: _____	Edad: _____		
Curso: _____	RUT: _____		
<p>Instrucciones: Lee cuidadosamente y responde ampliamente a cada uno de los problemas. El objetivo de esta actividad es explorar tu habilidad argumentativa en geometría, así que siéntete en la libertad de apoyarte en dibujos, aspectos aritméticos, algebraicos o geométricos para resolver los problemas.</p> <p>Es importante que atiendas a las indicaciones de esta actividad:</p> <ul style="list-style-type: none">❖ Se entrega la actividad de manera individual. Si te equivocas no borres, tacha levemente (por ejemplo: <i>geométrica</i>), pues este error nos da información valiosa para generar estrategias en la enseñanza del tema.❖ Procura adaptarte al espacio y escribir lo más legible posible, argumentando cada paso que realices. <p>¡MANOS A LA OBRA!</p>	<p>1. Pinta como se verá el corte triangular en la hoja, cuando esta se desdoble.</p> <table border="1" style="margin: 10px auto;"><tr><td style="width: 50px; height: 50px;"></td><td style="width: 50px; height: 50px;"></td></tr></table>		
<p>Parte 1</p> <p>Imagina que te dan una hoja doblada en cuatro partes y con un corte (de triángulo) como el que se muestra en la <i>Imagen a</i></p> <div style="text-align: center;"><p>Imagen a</p></div> <p>Piensa, ¿Qué pasará en la hoja, cuando la desdobles?</p>	<p>2. Explica que propiedades son importantes resaltar en tu dibujo del punto 2.</p> <div style="border: 1px solid black; height: 150px; width: 100%;"></div>		

Parte 2

Imagina que te dan una hoja doblada en cuatro partes y con un corte (de triángulo) como el que se muestra en la *imagen b*.



3. Pinta como se verá el corte triangular en la hoja, cuando esta se desdoble.



4. Explica que propiedades son importantes resaltar en tu dibujo del punto 4.

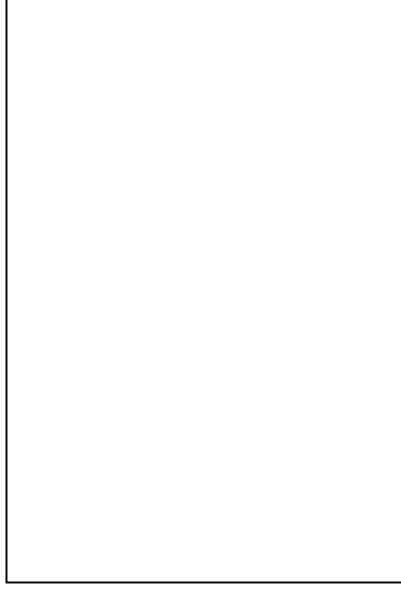


Parte 4

1. Reúnete en equipo (de 4 estudiantes) y redacten una carta a un estudiante del salón de clases, donde expliquen claramente la estrategia usada para resolver este tipo de problemas, la carta puede estar acompañada de imágenes, viñetas o cualquier forma de representación que te ayude a explicar el fenómeno.

Integrantes del Equipo:

De:
Para



Anexo 3: Actividad de Construcción de Cuadriláteros

Actividad

En grupos de 4 alumnos(as) con ayuda de las barras y ángulo, construye los siguientes cuadriláteros, luego responde las preguntas, utiliza conceptos como lados, paralelas, ángulos y diagonales, etc...

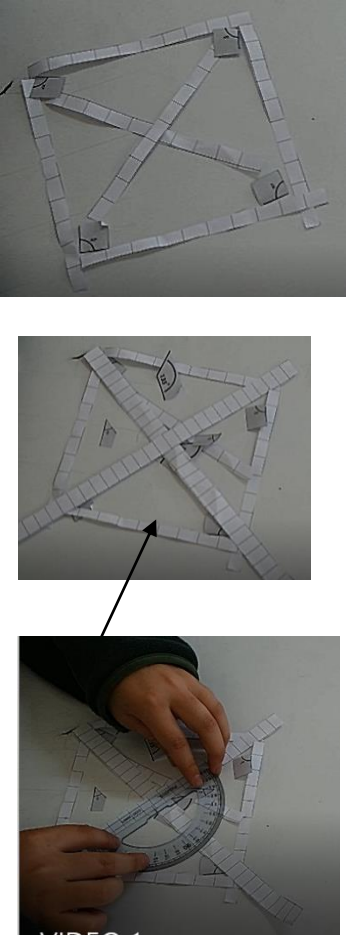
- 1) Construyan un cuadrado, utilicen ángulos y diagonales.
- 2) A partir de la construcción, elaboren una definición de cuadrado:

- 3) Construyan un rombo, utilicen ángulos y diagonales.
- 4) A partir de la construcción elaboren una definición de rombo.

Videos de actividad construcción de cuadriláteros

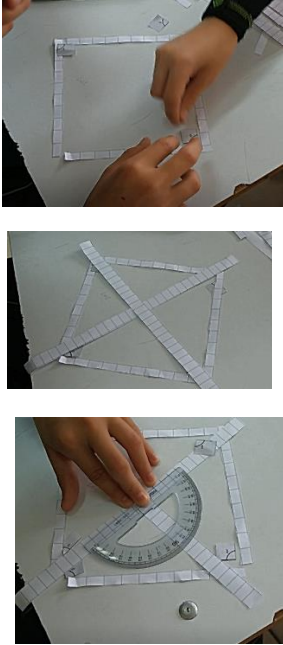
Anexo 4: Video 1 Niños dialogando sobre construcción de cuadrado y elementos secundarios (3:58 al 5:50)

1. Pauta de observación de vídeos: Estudiantes A23-A27-A26-A3 GRUPO 1

Imagen y Tiempo (3:58 al 5:50)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Profesor: Haber, ¿qué están haciendo chiquillos? 2. A27: Estamos haciendo cuadrados. 3. Profesor: ¿Con qué? 4. A23: Para hacer la definición de cuadrado con los ángulos 5. Profesor: Y pueden poner ángulos en otra parte. 6. A27 y A23: No 7. A26: Acá (indicando al centro) 8. A23: Todos estos son iguales (indicando el centro del cuadrado) 9. A26: No son iguales... No sí son iguales, son opuestos por el vértice. 10. Profesor: ¿Qué ángulo se forma aquí en el medio? 11. A23: Ángulo de 90° 12. A26: Si son de 90° 13. Profesor: ¿Cómo lo pueden determinar? 14. A26: Con transportador: 15. Profesor: Pero... ¿cómo? 16. A27: Midiendo (pasando transportador a Rafael) 17. A26: (Midiendo con transportador) mide 90°. 18. Profesor: Muy bien ahora respondan las preguntas. 	<p>En esta actividad los estudiantes construyen correctamente el cuadrado solicitado. Son capaces de reconocer y utilizar los ángulos rectos del cuadrado.</p> <p>Reconocen los ángulos rectos que se forman entre las diagonales, instante 7), el estudiante A26 reconoce que los ángulos son opuestos por el vértice.</p> <p>El grupo es capaz de determinar que la medida de un ángulo se puede obtener con ayuda de un transportador, lo cual desarrollan de forma correcta.</p> <p>Se puede observar que participan todos los estudiantes es activa frente a las interrogantes del profesor.</p>

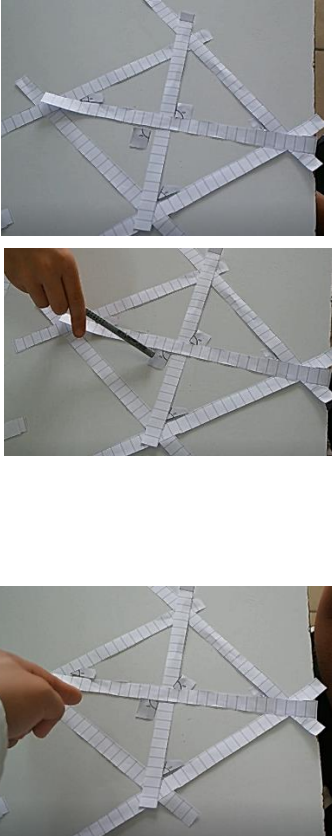
Anexo 5: Video 2. Niños dialogando sobre construcción de cuadrado y elementos secundarios (5:58 al 7:30)

Pauta de observación de vídeos: A21 – A18 – A12 – A30 GRUPO 2

Imagen y Tiempo (5:58 al 7:30)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Profesor: ¿Qué están construyendo acá? 2. A21: Un Cuadrado y estamos colocando los ángulos. 3. Profesor: Ya... ¿Y dónde van los ángulos? 4. A21: En las aberturas de aquí y acá.(indicando los vértices) 5. Profesor: ¿Qué otros elementos se pueden identificar? 6. A21: Diagonales. 7. Profesor: ¿Qué se forman entremedio? (indicando al centro de diagonales) 8. A21: Ángulos perpendiculares. 9. Profesor: ¿y cómo demuestran que son perpendiculares? 10. A21: ¡Midiendo! (entregando transportador a A12) 11. A12: Mide 90° 12. Profesor: Muy bien. Ahora definan el cuadrado con los elementos que tienen. 	<p>La construcción del cuadrado del grupo 2 es llevada a cabo en forma satisfactoria, reconociendo los ángulo rectos de la figura, instante 4) incluyen las diagonales , instante 6), las que miden con transportador para determinar si son o no perpendiculares, instante 10), Se puede observar que en esta actividad, solo participa el estudiante A21</p>

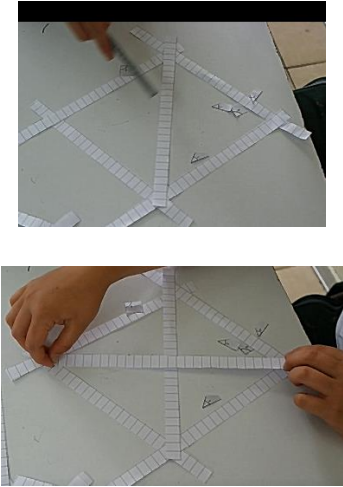
Anexo 6: Video 3. Niños dialogando sobre construcción de un rombo y elementos secundarios (0:00 al 1:30).

Pauta de observación de vídeos: A21 – A18 – A12 – A30 GRUPO 2

Imagen y Tiempo (0:00 al 1:30)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Profesor: ¿En qué están ahora?? 2. A21: Dividimos las figuras. Por ejemplo, ahora tenemos que crear la definición de rombo. 3. Profesor: ¿Éste es un? 4. A21, A18: Rombo. 5. Profesor: ¿Cómo saben que es un rombo? 6. A21: Para empezar es como un cuadrado rotado. 7. Profesor: ¿Qué más? 8. A21: Se midió sus ángulos.(indicándolos) 9. Profesor: ¿Qué ángulos estas indicando aquí? 10. A21: Estas líneas son perpendiculares, forman ángulos de 90° 11. A12: Y en las puntas 45°. 12. Profesor: Ya. Pero este ángulo del rombo. ¿Cuándo debería medir? (indicando) 13. A21: Este 45° 14. Profesor: Muy bien, enseguida vuelvo. 	<p>El grupo 3 muestra un excelente trabajo en equipo dividiendo el trabajo que están desarrollando. Al momento de solicitar el reconocimiento del rombo el estudiante A21 comunica que es un cuadrado rotado, instante 6). El estudiante A21 reconoce que las diagonales se intersectan en 90° grados, instante 10), no reconocen la diagonal mayor ni menor.</p> <p>Se puede observar que en esta actividad, solo participa el estudiante A21</p>

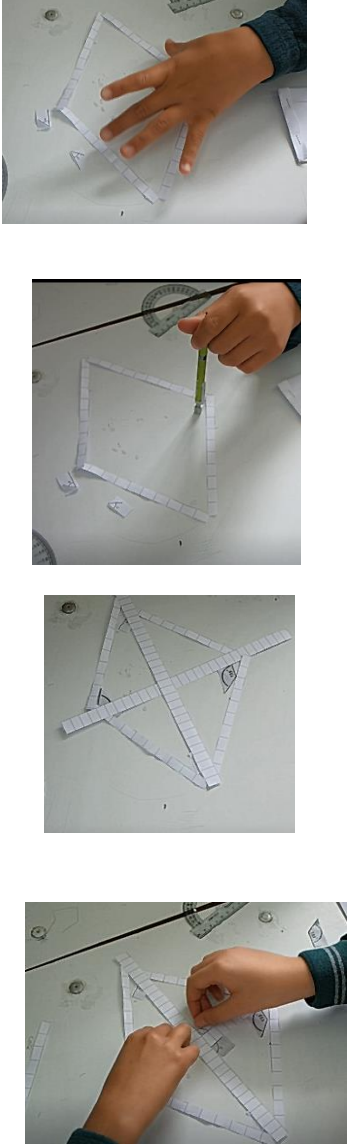
Anexo 7: Video 6: Niños dialogando sobre construcción de un romboide y elementos secundarios (0:02 al 1:46)

Pauta de observación de vídeos: A21 – A18 – A12 – A30 GRUPO 2

Imagen y Tiempo (0:02 al 1:46)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<p>Profesor: ¿Qué están construyendo acá?</p> <p>A18: Un romboide.</p> <p>Profesor: ¿Qué características tiene un romboide?</p> <p>A21: Usa paralelas. (indica a ambos lados de forma paralela)</p> <p>Profesor: ¿Cuáles son las paralelas?</p> <p>A21: (indicando) estas dos, pero que no son iguales a estas otras dos (indicando).</p> <p>Profesor: ¡Perfecto! ¿Qué estás poniendo allí A18?</p> <p>A21y A18: Las diagonales.</p> <p>Profesor: (Al ver que A18 usa el transportador para medir diagonales del centro) ¿Qué pasa con ese ángulo?</p> <p>A18 y A30: Mide 90°</p> <p>A21: (indicando las diagonales) Estas diagonales son perpendiculares.</p> <p>Profesor: Si son Perpendiculares, ¿pertencen al romboide?</p>	<p>En esta construcción el grupo 2 demuestra que los estudiantes no reconocen el romboide, construyendo un rombo, identifican diagonales y la perpendicularidad de estas al momento intersectarse al centro.</p>

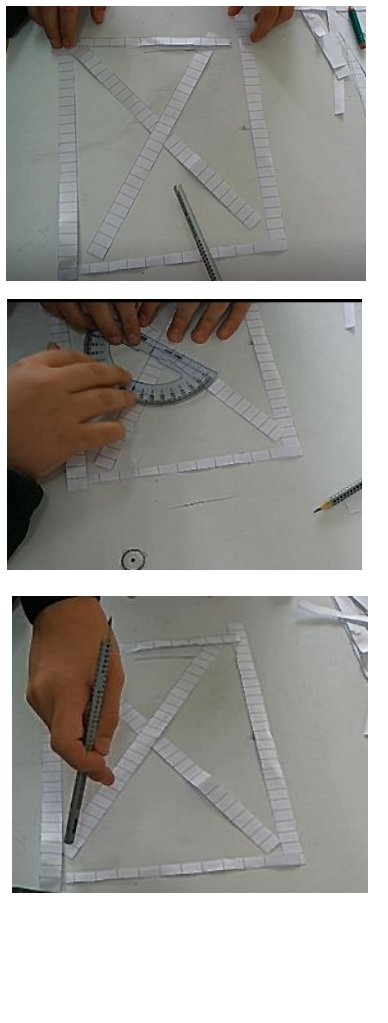
Anexo 8: Video 7. Niños dialogando sobre construcción de un rombo y elementos secundarios (0:02 al 2:04),

Pauta de observación de vídeos: A1 – A14 – A15 – A34 GRUPO 3

Imagen y Tiempo (0:02 al 2:04)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Profesor: ¿Qué figura tienen allí? 2. A15 y A14: ¡ Un rombo! 3. Profesor: ¿Por qué dicen que es un rombo? 4. A15: (Indicando lados paralelos) porque estas son paralelas y estas son paralelas y de una forma que no es un cuadrado. Así!! 5. Profesor: ¿Es una forma que no es un cuadrado?. 6. A15: Exacto. Y aparte este mide 45° este 45° (indicando los ángulos agudos) 135° y 135° (indicando los ángulos obtusos) 7. Profesor: Demuestra que miden 45°. 8. A34: (Pone un ángulos de 45°) 9. A14: (Pone ángulos de 135) 10. A34: Dan en total 360° 11. Profesor: Perfecto, algo más que le puedan agregar al rombo. 12. A34: Las Diagonales. 13. Profesor: ¿Qué pasa con las diagonales? 14. A15 y A34: (Ponen las diagonales) 15. Profesor: ¿Qué pasa con las diagonales?, ¿Qué pueden deducir de las diagonales? A15: Que en los cuadriláteros las diagonales están a 90° 16. Profesor: ¿En todos los cuadriláteros? 17. A34: No, en algunos cuadriláteros. 18. Profesor: Ya, y como pueden demostrar que están a 90° 19. A15, A1 y A34: (Ponen ángulos de 90°) 20. Profesor: Muy bien, Ahora definan el concepto de rombo 	<p>El grupo 3 presenta una interacción entre sus participantes quienes se muestran activos al momento de trabajar con el profesor. Reconocer que tienen lados paralelos, y que no es un cuadrado momento 4). Son capaces de identificar los ángulos agudos y obtusos del rombo. También deducen que las diagonales se intersectan en 90°</p>

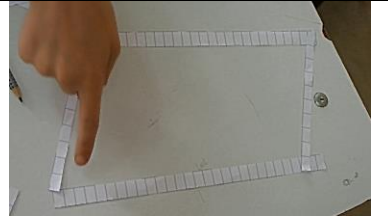
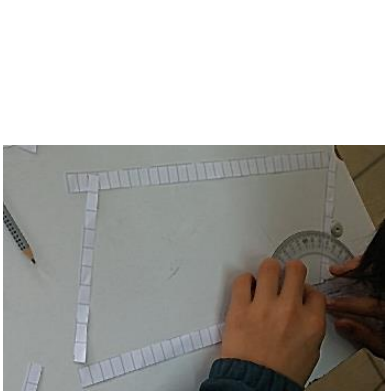
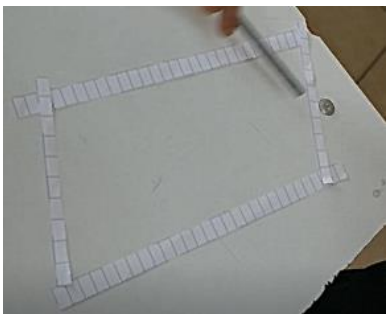
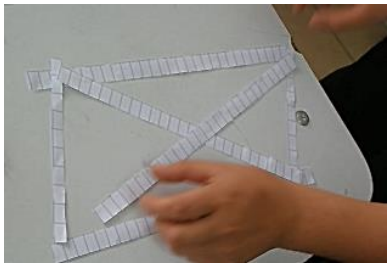
Anexo 9: Video 8. Niños dialogando sobre construcción de un rectángulo y elementos secundarios (0:02 al 1:05)

Pauta de observación de vídeos: A21 – A18 – A12 – A30 GRUPO 2

Imagen y Tiempo (0:02 al 2:04)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Profesor: ¿Qué tenemos hay? 2. A21: Un rectángulo. 3. Profesor: ¿y qué características tiene un rectángulo? 4. A30: Tiene dos lados distintos y dos lados iguales. 5. A21: Dos de sus lados son más cortos que los otros dos, entonces... 6. A30: En estos dos tienen 70° (indicando con el lápiz los ángulos). Ya los medimos. 7. Profesor: Los midieron. ¿Con que los midieron? 8. A30 Y A21: Con transportador. 9. A21: (indicando los ángulos) entonces estos dos miden 110° 10. Profesor: 110°, Perfecto! 11. A21 y A30: (Toman transportador y miden el ángulo) 12. Profesor: 110°, ¿Qué otra cosa más descubrieron del rectángulo? 13. A21: Todos sus ángulos forman 90° (indicando los vértices del rectángulo) 14. Profesor: Muy bien. 	<p>El grupo construye un rectángulo, reconociendo que tiene lados dos lados y dos iguales, pero más cortos, momentos 4) y 5). También identifican que las diagonales no forman ángulo recto, sino que 70° y 110° momentos 6) y 9). Reconocen que los ángulos de los vértices son rectos. Momento 13)</p>

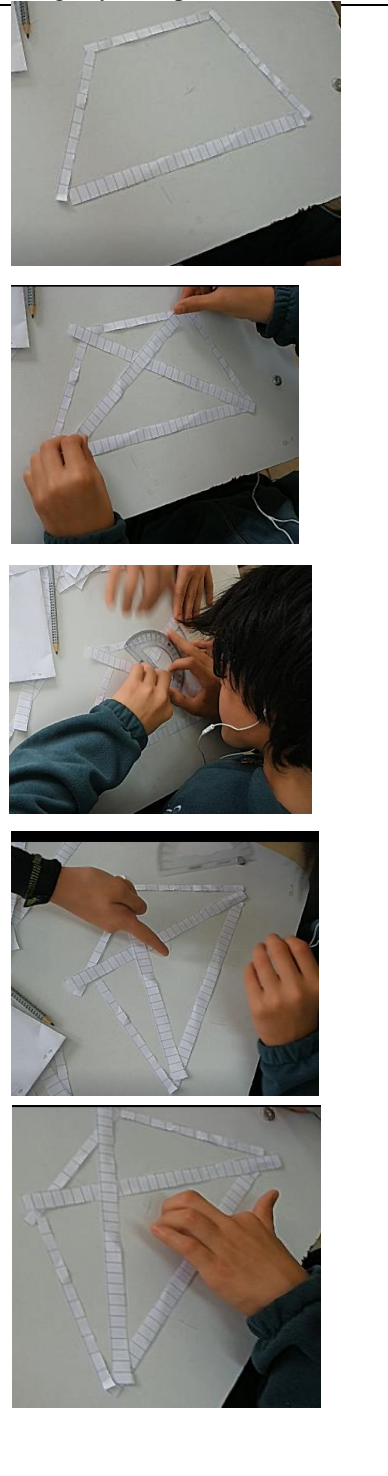
Anexo 10: Video 9. Niños dialogando sobre construcción de un romboide y elementos secundarios (0:03 al 2:01),

Pauta de observación de vídeos: A21 – A18 – A12 – A30 GRUPO 2

Imagen y Tiempo (0:03 al 2:01)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<p>1. Profesor: ¡Muy bien!. ¿Qué tiene allí? 2. A21: Un romboide. 3. Profesor: ¿Qué características tiene un romboide? 4. A21: No pueden formar 90° Profesor: ¿Dónde? 5. A21: (indicando los vértices) En ninguno de estos lados. 5. Profesor: En ninguno de sus án...</p>	
	<p>6. A21 y A30: ¡Ángulos!. 7. Profesor: Perfecto. ¿Cuánto mide cada ángulo? 8. A21: Ahora lo vamos a medir. 9. A12: (Midiendo con el transportador) 125° 10. A21: Creo que son dos agudos y dos obtusos 11. Profesor: Muy bien, ¿Qué otra cosa más podemos ver en el romboide?</p>	<p>En este video el grupo dos construye un romboide, y van determinando paso a paso las características de este. En primer lugar reconocen que en los vértices no se forman ángulos rectos, instante 4). Utilizan el transportador para medir los ángulos, instante 9). Además de reconocer que tiene dos ángulos agudos y dos obtusos, instante 10). Reconocen la diagonal mayor y menor como una más larga que la otra, instante 16). Y nuevamente hacen uso del transportador para medir los ángulos que forman las diagonales, instante 18).</p>
	<p>12. A21: Tiene dos sus lados que son el ancho, son más cortos, por eso son el ancho. (los indica con el lápiz) 13. Profesor: ¿Amaro qué estas poniendo? 14. A21 y A12: Las diagonales. 15. Profesor: ¿Qué pasa con las diagonales?</p>	
	<p>16. A21: Una es más larga que la otra. 17. Profesor: ¿Qué pasa en el centro con los ángulos? 18. A21: Hay que medirlos. Hay medirlos... ¿Dónde está el transportador? 19. A12: (Midiendo) mide como 58°.</p>	
	<p>20. A21: (indicando el ángulo) es agudo y los otros dos obtusos. 21. Profesor: con esa información definan el romboide.</p>	

Anexo 11: Video 10. Niños dialogando sobre construcción de un Trapecio isósceles y elementos secundarios (0:01 al 2:07)

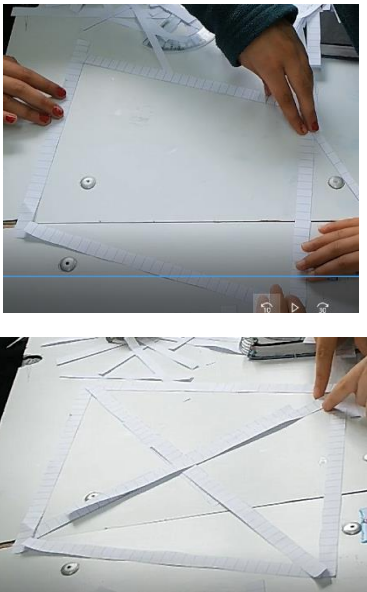
Pauta de observación de vídeos: A21 – A18 – A12 – A30 GRUPO 2

Imagen y Tiempo (0:01 al 2:07)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Profesor: ¡Muy bien! ¿Qué tenemos acá en este caso? 2. A21 y A12: Un trapecio isósceles. 3. Profesor: ¿Qué características tiene un trapecio isósceles? 4. A12: que tiene dos lados iguales. (indicándolos) 5. A21 y A12: Y los otros dos son paralelos. 6. Profesor: ¿Qué otra cosa podemos determinar del trapecio isósceles? 7. A21: No tiene ángulos rectos. 8. Profesor: Bien. No tiene ángulos rectos. Algún elemento secundario que le podamos agregar. 9. A21: Las diagonales. 10. Profesor: como son las diagonales. 11. A21: Mídelas A12 (pasando el transportador a A12) mídelas bien, mídelas bien.. (no corrige bien el transportador de A12) no, no en la línea, perpendiculares. 12. Profesor: ¿Son Perpendiculares? 13. A21: No lo sé, déjame mirar 14. Profesor: ¿Miden 90°? ¿A12 son perpendiculares? ¿Miden 90°? 15. A12: No 16. Profesor: Perfecto. ¿Y cómo son las diagonales iguales, distintas? 17. A21: (indicando los ángulos del centro) una aguda. 18. Profesor: Ya, un ángulo agudo. 19. A21: (pasando transportador a A12) Mide aquí... 20. Profesor: ¿Pero cómo de largo? 21. A21: Son iguales. 22. A12: (indicando los ángulos agudos) este mide 72°, este 72°, este mucho más (indicando los ángulos obtusos del centro). 	<p>El grupo 2 construye un trapecio isósceles, en este caso identifican dos lados iguales, momento 4) además de manifestar que los otros dos lados son paralelos, momento 5). Identifican que no presenta ángulos rectos. Se equivocan al medir las diagonales en el uso del transportador, pero luego corrigen este error. Finalmente miden los ángulos que forman las diagonales y deducen el otro, momento 22).</p>

	<p>23. Profesor: ¿Qué tipo de ángulo sería ese?</p> <p>24. A21: Un obtuso y un agudo para formar 180°</p> <p>25. Profesor: Muy bien. Ahora escriban la definición de trapecio isósceles</p>	
--	---	--

Anexo 12: Video 1. Niños dialogando sobre construcción de un Romboide y elementos secundarios (10:04 a 11:55)

Pauta de observación de vídeos: A2 – A19 – A25 – A28 GRUPO 4

Imagen y Tiempo (10:04 al 11:55)	Transcripción del dialogo	Análisis del episodio
	<p>1. Profesor: ¡Muy bien! ¿Qué están construyendo?</p> <p>2. A25: Un romboide.</p> <p>3. Profesor: ¿y Dónde están los ángulos?</p> <p>4. Ningún estudiante responde.</p> <p>5. ¿Cómo lo van a construir?</p> <p>6. Ningún estudiante responde</p> <p>7. Prof.: ¿Qué van a construir?</p> <p>8. A25: un romboide.</p> <p>9. Prof.: Y ¿qué característica tiene un romboide?</p> <p>10. A25: es como un cuadrado que lo empujaron.</p>	<p>El grupo 4 construyen un romboide, del cual no reconocen elementos secundarios como ángulos, momento 3 y 4, tampoco utilizan ángulos entregados para la construcción. Ubican las diagonales, pero desconocen cómo llamarlas. Finalmente solo reconocen la figura que están construyendo.</p>