UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO CIENCIAS EXACTAS

EXPLORACIÓN DE LOS NIVELES DE VAN HIELE EN TAREAS DE SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS

POR

JOSÉ MANUEL HIDALGO ROSENFELD.

Tesis presentada para optar al grado académico de Magíster en Educación Matemática.

Profesor guía: Dr. Carlos Cabezas.

Profesor co – guía: Dra. Elizabeth Hernández Arredondo.

Osorno, sur de Chile. 10 de Enero de 2020.

Dedico esta tesis a mi esposa y a mi madre, por el apoyo incondicional que me brindaron en esta etapa, sin duda me instaron a ser perseverante y lograr mis objetivos.

AGRADECIMIENTOS.

Gracias en primer lugar a la Universidad de los Lagos por la oportunidad de continuar con un sueño de muchos años, que era obtener el grado académico de Magister.
Gracias a mi familia por su apoyo en este proceso y que sin duda no habría llevado a su fin sin su compromiso, apoyo y cariño.
Gracias a mi señora por su cariño, apoyo incondicional y atención en momentos difíciles donde ella estuvo presente animándome a continuar y lograr mis objetivos.
Gracias, a mi profesor guía y profesora co-guía por darme las herramientas para continuar con este desafío y sus sabios consejos para finalizar esta tarea.

Esta investigación contó con el apoyo financiero de la Universidad de Los Lagos, por medio de la Beca de Finalización de Tesis de Pre y Postgrado, Concurso 2020.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

INDICE DE ILUSTRACIONES

RESUMEN.

La presente investigación explora los niveles de razonamiento viso espacial de los estudiantes de Primer Año Medio, y a su vez resuelven tareas de semejanza de figuras planas con lápiz y papel. El interés por este tema surge al identificar que el Área de la Geometría es desatendida como parte de la disciplina escolar, generando un impacto en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes, y como consecuencia de ello, un bajo rendimiento, tanto en pruebas estandarizadas a nivel nacional e internacional, dentro de este eje temático. Después de realizar una revisión literaria y curricular, identificamos que el modelo de Van Hiele ha sido la base para realizar propuestas al diseño curricular y así explorar los niveles de razonamiento visual.

Por lo cual, basados en una metodología de carácter cualitativo, descriptivo e interpretativo, exploramos las respuestas a las tareas del pre test y post test de 30 estudiantes del sur de Chile. De acuerdo con los resultados preliminares que obtuvimos, podemos plantear que los estudiantes se encuentran dentro del rango, según el pre y post test, dentro del nivel cero al nivel dos del modelo Van Hiele, incluso aún después de haber realizado la intervención didáctica.

Sin embargo, las entrevistas realizadas nos sugieren que los estudiantes poseen un mayor nivel de razonamiento, pero que su escasez de lenguaje teórico matemático no les permite poder demostrarlo en las pruebas escritas.

Palabras Clave: Visualización, razonamiento viso espacial, niveles de Van Hiele, semejanza.

.

ABSTRACT

The following research explores the students' visual-spatial levels of thinking from 9th grade (primero medio) while they work on tasks about flat figures with pen and paper. The interest about this topic arose when it was noticed that Geometry is unattended as part of the school discipline thus having an impact in the development of reasoning processes of students and the low performance in national and international standardized tests in this main topic. After a literary and curricular review, we identified that Van Hiele's model worked for curricular design proposals and for exploring the visual reasoning levels as well.

Supported by a qualitative, descriptive and interpretive methodology, we explored the answers of pre and post tests from 30 students belonging to the south of Chile. From the preliminary results that we already have, we found that students are located between level zero and two in Van Hiele's model even after the didactic intervention.

However, the interviews applied suggested that students have a higher level of reasoning, but their poor mathematical language doesn't allow them to show it in their written tests.

Key words: Visualization, visual-spatial reasoning, Van Hiele's levels, similarity

INTRODUCCIÓN.

La investigación en Geometría es un campo muy amplio de exploración, por la influencia que tiene sobre la forma de presentar la información gráfica; siendo así importante la comprensión y el razonamiento de los estudiantes en los contenidos específicos. La sociedad actual demanda una serie de competencias que le permita a los estudiantes tomar decisiones; por ello las habilidades ligadas a la visualización permiten que su orientación, y reflexión sobre las composiciones de los cuerpos y sus propiedades, desarrollen su argumentación entre otros; en este sentido la visualización es considerada por algunos autores como un elemento de andamiaje esencial para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas más complejas.

La Geometría escolar presenta nuevos desafíos en cuanto al desarrollo de las habilidades en el ámbito viso espacial, dado que debe existir una interrelación con el entorno y las distintas formas que coexisten en él. Es del mismo modo el pilar fundamental en la formación académica, ya que su aplicación en múltiples contextos logra la formación de razonamiento lógico (Gamboa y Ballestero, 2009) y en el currículo chileno (MINEDUC, 2016) es considerado uno de los cuatro ejes temáticos más importante en el desarrollo de las matemáticas y el concepto de semejanza está presente desde Primer Año Medio.

En esta investigación estudiaremos el cambio de razonamiento geométrico cuando el estudiante tiene una intervención didáctica que demanda el uso de habilidades viso espacial relacionado con el objeto matemático ‘semejanza’. Por ello, las respuestas entregadas por los estudiantes se observarán desde dos agendas de investigación:

1. Habilidades de visualización espacial.
2. Niveles de Van Hiele.

Por lo que, la estructura de este trabajo de tesis quedará organizada de la siguiente manera:

En el primer capítulo se plantea la problemática de estudio, en este se desarrollan aspectos generales del papel de la visualización en la Geometría, además se realiza una revisión curricular y el resultado que reportan las pruebas nacionales e internacionales. Se explora el objeto de estudio de semejanza en el currículo y se hace un breve estado del arte sobre los niveles de razonamiento de Van Hiele, y las habilidades viso espacial según distintos autores.

El segundo capítulo contiene los referentes teóricos en los que se basa este estudio, se dan a conocer los niveles de razonamiento viso espacial de los estudiantes, donde nos apoyaremos en los niveles de Van Hiele, sus fases y propiedades y algunas definiciones sobre las habilidades visuales.

En el tercer capítulo, se plantean los elementos presentes para el desarrollo de tareas, apoyados en una metodología cualitativa de carácter descriptivo e interpretativo.

El cuarto capítulo presenta un análisis de los resultados apoyados en las respuestas de los estudiantes en relación con el modelo de Van Hiele y una breve entrevista, semi - estructurada, de algunos casos de interés.

El quinto capítulo refiere a un cierre basado en resolver las premisas apuntadas hacia los objetivos de investigación, conclusiones generales, limitaciones del estudio y líneas de trabajo futuros.

CAPITULO 1: Planteamiento del problema de investigación.

1.1 Introducción.

En este Capítulo, se desarrolla una breve descripción sobre los elementos que permitirán el planteamiento del problema, el cual se encuentra situado en el aprendizaje de la Geometría, particularmente en el fenómeno didáctico de la *Visualización Espacial* de estudiantes de Educación Media en las tareas de *Semejanza*. Por ello, es necesario desarrollar un diálogo reflexivo y crítico, para situar la problemática de estudio; lo que se presenta en las siguientes temáticas:

a. Aspectos del currículo de Matemáticas en Chile.
b. Las pruebas estandarizadas y la valorización de la visualización.
c. Un análisis curricular del estudio de la Semejanza en Educación Media y su transversalidad.
d. La investigación del razonamiento geométrico desde la Didáctica de las Matemáticas y el uso de jerarquías o taxonomías que apoyen su desarrollo.

1.2 Sobre el currículo y las Matemáticas escolares en Chile una mirada desde el entorno Internacional.

El sistema escolar en Chile es el producto de diferentes políticas públicas educativas emprendidas por el Estado, todas ellas desarrolladas con el fin de adoptar enfoques orientadores provistos desde las políticas internacionales de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) en su propuesta del 2003, la que hace un llamado especial a desarrollar la alfabetización matemática en los estudiantes (Rico, 2007).

Para Steen y Turner (2007) la alfabetización en las Matemáticas ha recibido mucha atención en los últimos años debido a las preocupaciones de los empleadores, ya que identifican que los estudiantes presentan falencias a la hora de abordar desafíos de la vida moderna y en especial dentro del ambiente laboral. Ello ha motivado el impulso de evaluaciones estandarizadas en todo el mundo y que países como Chile adopta en la implementación de pruebas como Sistema de Medición de Calidad de la Educación (SIMCE) y Prueba de Selección Universitaria (PSU).

En pruebas internacionales como Trends in International Mathematics and Science Study TIMSS (2003) se evalúa de forma estandarizada las diversas áreas de conocimiento, entre ellas Matemáticas (con subáreas como: Números, Álgebra, Geometría y Medición; las áreas que aparecen con mayor debilidad son Álgebra y Geometría, donde Chile ha arrojado un nivel muy bajo en comparación de otros países de la OCDE.

Esta prueba en particular en el área de Geometría solicita desarrollar las siguientes habilidades:

> Incluye las *propiedades y características* de una variedad de figuras geométricas, como líneas, ángulos y formas de dos y tres dimensiones. *Dar explicaciones basadas en relaciones* geométricas, así como *la comprensión* de representaciones coordinadas y el uso de *habilidades de visualización espacial* para manejar formas de dos y tres dimensiones y sus *representaciones* (TIMSS, 2003, p. 23).

Con referencia a la Ilustración 1, el nivel de logro del 85% de los estudiantes chilenos en la evaluación del año 2003, se concentra en un nivel inferior y bajo. Estos niveles no evocan habilidades propias de la Geometría.

Nivel de logro	¿Qué saben o son capaces de hacer los estudiantes del nivel?
Avanzado	Son capaces de organizar información, hacer generalizaciones, resolver problemas no rutinarios y justificar conclusiones a partir de datos. Pueden calcular cambios porcentuales y aplicar su conocimiento acerca de conceptos numéricos y algebraicos, así como hacer relaciones para resolver problemas. Pueden resolver sistemas de ecuaciones y modelar algebraicamente situaciones simples. Pueden aplicar su conocimiento de medición y geometría en situaciones problemáticas complejas. Pueden interpretar datos a partir de una variedad de tablas y gráficos, incluyendo interpolación y extrapolación.
Alto	Pueden aplicar su comprensión y conocimiento matemático en una amplia variedad de situaciones relativamente complejas. Pueden ordenar, relacionar y hacer cálculos con fracciones y decimales para resolver problemas planteados, así como operar con enteros negativos y resolver problemas en múltiples etapas que incluyen proporciones con números naturales. Pueden resolver problemas algebraicos simples, que incluyen expresiones evaluativas, resolver sistemas de ecuaciones y usar fórmulas para determinar el valor de una variable. Pueden encontrar el área y volumen de figuras geométricas simples y utilizar su conocimiento acerca de propiedades geométricas para resolver problemas. Pueden resolver problemas sobre probabilidades e interpretar datos a partir de una variedad de gráficos y tablas.
Intermedio	Son capaces de aplicar conocimiento matemático en situaciones reales. Pueden sumar, restar o multiplicar para resolver problemas de una sola etapa que incluyen números naturales y decimales. Identifican representaciones de fracciones comunes y tamaños relativos de las fracciones. Comprenden relaciones algebraicas simples y resuelven ecuaciones lineales simples con una incógnita. Demuestran comprender las propiedades de los triángulos y conceptos geométricos básicos incluyendo simetría y rotación. Reconocen nociones básicas de probabilidad. Pueden leer e interpretar gráficos, tablas, mapas y escalas.
Bajo	Tienen sólo algunos conocimientos matemáticos básicos. Pueden hacer cálculos básicos con números naturales sin usar calculadora y aproximar números de dos decimales al entero más próximo. Reconocen algunos términos básicos y comprenden la información que entrega un gráfico de líneas.
Inferior	Muestran un conocimiento matemático inferior al mínimo que permite describir la prueba TIMSS.

Ilustración 1. Descripción de los niveles de logro de matemáticas TIMSS (2003, p. 47)

Por otra parte, se considera los niveles de desempeño, puesto que esto dará más fuerza a la idea que se quiere implementar en cuánto a la mejora de los aprendizajes de los estudiantes en el área de Geometría. Los niveles son los siguientes (Ilustración 2):

Nivel.	Umbral de puntaje.
Avanzado	Sobre 625
Alto	Sobre 550
Intermedio	Sobre 475
Bajo	Sobre 400

Ilustración 2. Niveles de desempeño TIMSS (2015, p. 10)

Si consideramos que los puntajes de Chile en las mediciones de los años 2003, 2011 y 2015 son respectivamente 387, 416 y 431 puntos; esto nos indica que, si bien ha experimentado una leve alza en sus puntajes, esta no logra superar el bajo nivel obtenido. Ahora apoyados en la tabla 1, el objetivo trazado en esta investigación es aportar para llegar al nivel intermedio de la medición, esto pues considera que contribuye a contar con elementos geométricos para nuestros fines de estudio.

Ante la deficiencia de los estudiantes chilenos en Matemáticas y en particular en la Geometría, nos interesa explorar el papel de las habilidades de visualización espacial de los estudiantes de Educación Media, en específico en el tema de Semejanza, el cual era uno de los tópicos a tratar en la prueba TIMSS (2003). Debido a lo anteriormente mencionado, se presentará un breve análisis curricular, con el fin de situar la visualización y la semejanza en el currículo chileno.

1.3 La visualización como habilidad geométrica y la semejanza en el currículo chileno.

El currículo chileno de Educación Media (el cual abarca del 7° Básico al 2° Medio) encuentra sus fundamentos dentro de sus bases curriculares (MINEDUC, 2015), las que en Matemáticas se encuentran divididas en los siguientes ejes temáticos: Números, Álgebra y Funciones, Geometría, Medición, Datos y Probabilidades; estos ejes temáticos tienen como propósito desarrollar las siguientes habilidades: Resolver problemas, Modelar, Representar, Argumentar y Comunicar; donde se espera que el estudiante muestre una serie de actitudes como creatividad en la solución, curiosidad en investigar y resolver, interés, trabajo en equipo responsable y proactivo, actitud crítica para valorar los datos y responsabilidad en el uso de las tecnologías para comunicar.

En el eje temático de Geometría se espera de manera principal que *"…los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales y que entiendan que ellas les permiten comprender el espacio y sus formas…" (pp. 99 -100); (*MINEDUC, 2015, p. 44*)* donde el estudiante debe aprehender una serie de conceptos matemáticos y desarrollar en específico las 'destrezas en la visualización espacial'. Sin embargo, tales destrezas de la visualización espacial no se encuentran definidas dentro de las bases curriculares. Si comparamos la idea de destreza presente en las bases curriculares con lo requerido en la prueba TIMSS, podemos identificar que se refiere a una habilidad de visualización espacial en 2^{da} o 3^{ra} dimensión.

Mientras el tema de Semejanza se encuentra inserto dentro de los objetivos de aprendizaje en el currículo chileno de 1° Medio con propósitos como el siguiente:

Aplicar propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria y otras asignaturas (MINEDUC, 2015, p. 120).

En 2° Medio este tema vuelve a aparecer como:

Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos (MINEDUC, 2015, p. 124).

Como puede observarse, el tema de semejanza es trabajado en 1° y 2° Medio de forma oficial, sin embargo, el estudiante previo a esto ha tenido una inserción paulatina a la idea de semejanza a partir del desarrollo de otros temas como la Congruencia la cual aparece en 7° Básico con objetivos de aprendizaje como construir objetos geométricos de manera manual y/o con software educativo: triángulos y cuadriláteros congruentes (MINEDUC, 2015, p. 108).

Hasta aquí, hay un fenómeno didáctico, estos se refieren a todas aquellas complejidades que se presentan en el mundo de los estudiantes cuando ellos están en el proceso de enseñanza aprendizaje, esto puede darse en el momento mismo que resuelven tareas (Puig, 1997), por ejemplo, en la solución de una prueba estandarizada, como en el currículo chileno que se refiere a la 'visualización espacial'; es por ello nuestra necesidad de explorar cómo se observa ese fenómeno desde el tipo de problemas que presentan los libros de texto en Chile, suponiendo que pueda ser una complicación para el profesor que debe desarrollar la habilidad de visualización espacial en el tema de semejanza. Enseguida recuperamos dos problemas de semejanza extraídos del libro de texto para estudiantes de I Medio, Galasso, Maldonado y Marambio (2016, p.203) como puede observarse en la Ilustración 3, para desarrollar un análisis crítico de las tareas propuestas al estudiante apoyado en la herramienta de la configuración epistémica de Godino, Batanero, Font (2007) con el fin de hacer un análisis preliminar de la complejidad del objeto matemático ‘Semejanza’ como podrá analizarse en la Tabla 1.

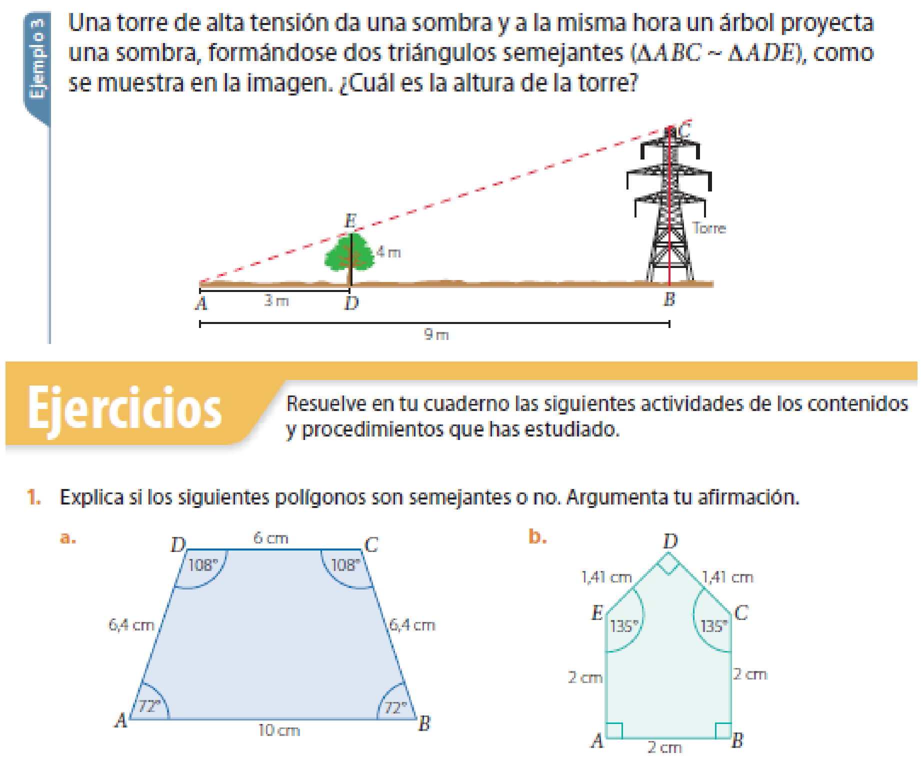


Ilustración 3. Tipos de tareas presentas en los libros de texto del estudiante de Primero medio

Tabla 1. Configuración epistémica de un problema de semejanza

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Situaciones de Problema:
• En contexto reales o imaginarios
• Descontextualizados o teóricos</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Lenguaje Matemático

Verbal:
• Parecidos, igual forma, pero distinto tamaño, etc.
Simbólico
≅, ~, Ángulos correspondientes, ángulos alternos externos y ángulos alternos internos.
Gráfico
Figuras con lápiz y papel.</td><td colspan="2">Definiciones (Conceptos):</td></tr>
<tr><td>Previos:
• Razón.
• Razón entre segmentos.
• Proporción.
• Segmentos proporcionales.
• Ángulos congruentes.</td><td>Definidos:
• Pares de ángulos.
• Ángulos entre paralelas.
• Relación entre lados y ángulos de un triángulo.
• Triángulos según medidas de los lados.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Procedimientos:</td></tr>
<tr><td>Previos:
• Determinar la razón de semejanza.
• Establecer una proporción entre 2 figuras semejantes.
• Exploran la construcción de 2 o más triángulos semejantes.</td><td>Definidos:
• Establecen la semejanza de 2 figuras planas.
• Aplican los criterios de semejanza en la resolución de problemas.
• Determinan la escala entre 2 puntos del plano.
• Comprobar que 2 triángulos son semejantes (Fundamentan)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Proposiciones:</td></tr>
<tr><td>Previos:
• Establecen diferencias entre congruencia y semejanza.
• Diferencian entre los distintos criterios para semejanza y congruencia.
• Utilizan la homotecia para construir polígonos semejantes.</td><td>Definidos:
• Comparan 2 figuras por congruencia y semejanza.
• Determinan longitudes inaccesibles aplicando la semejanza.
• Aplican el Teorema particular y general de Tales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Argumentos:</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Visualizan cuando 2 o más figuras son semejantes.
• Relacionan la homotecia con la semejanza de figuras planas y sus propiedades.
• Justifican cuando 2 figuras son semejantes y aplican en la resolución de problemas.</td></tr>
</table>

Fuente: Creación propia.

Ante la complejidad del objeto matemático, suponemos que podemos identificar que hay una habilidad que se requiere desarrollar para permitir la relación biunívoca entre los elementos que conforman la configuración epistémica que es la ‘Visualización Espacial’. A continuación, se presentará una serie de resultados de investigación desde la Educación Matemática que vinculan la visualización espacial y la semejanza.

1.4 La visualización espacial, un acercamiento desde la investigación en Educación Matemática.

La visualización espacial como habilidad se encuentra presente en nuestra cotidianidad en diversas actividades de la vida (Gutiérrez, 1991) y no solo se encuentra presente en el aprendizaje escolar o en la geometría. Pero dentro de la comunidad de investigación no hay consenso con un nombre único a esta habilidad, por lo que en diversos trabajos se encontrarán nombres como: percepción espacial, imaginación espacial, visión espacial o visualización. Si bien hay variantes en los elementos que se contemplan en cada uno de los conceptos, todas ellas hacen referencia a la habilidad que poseen los sujetos en representar elementos en su mente y movilizarlos entre registros de representación semiótica para resolver problemas (Kadunz y Yerushalmy, 2015).

El desarrollo de la visualización espacial, como agenda de investigación, es amplia; desde 1980 se han desarrollado importantes trabajos por parte de los investigadores.

Basado en la investigación de Fernández (2013), esta señala que en los últimos 20 años se ha producido una reaparición de la investigación sobre la visualización (Arcavi, 2003; Battista, 1900, 2007; Bishop, 1983, Clements, 1983; Gutiérrez, 1991, 1996a; Hershkowitz, Parzisz y van Dormolen (1996)); Lean y Clements (1981); Presmeg (1989, 1991, 2006a, 2008); Zimmerman y Cunningham (1991) esto por dos razones principales. La primera se relaciona con la presentación de conceptos, formas, relaciones y propiedades a través de nuevos elementos y entornos de aprendizaje, principalmente enfocados en la tecnología, convirtiendo los avances en esta área, en una poderosa herramienta matemática y científica que produce dinamismo a lo que antes solo era presentado en tablas, fórmulas y símbolos. La segunda, tiene relación con los cambios en la concepción de la propia naturaleza de la matemática, donde ésta es entendida como la búsqueda de patrones y la visualización será la herramienta principal para reconocer estos patrones (Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996, p. 163).

Arcavi (2003, p. 216) le atribuye a la visualización que “ofrece un método de ver lo invisible”, entendiendo la visualización como nombre (el producto, la Ilustración visual) o como verbo (el proceso, la actividad). Este autor considera que esta visualización de lo invisible es la posibilidad que tenemos solo los seres humanos de percibir un mundo abstracto y que no se puede desarrollar a través de la tecnología.

En este trabajo se asumirá la postura de Rösken y Rolka (2006, p.457) cuando se hable de la habilidad de la visualización espacial:

> …the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.

Que, bajo una traducción aproximada a la definición anterior, la visualización espacial será entendida como:

> …el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y avanzar entendimientos.

Como se puede observar, la definición anterior hace énfasis en que, la visualización puede ser una herramienta poderosa para explorar los problemas matemáticos, en especial, los problemas geométricos. Dentro de la didáctica de la geometría hay una propuesta de enseñanza y aprendizaje que ha mostrado grandes virtudes para el desarrollo del razonamiento geométrico que es el modelo de Van Hiele, por lo que a continuación se presentan una serie de resultados a la luz de este modelo de razonamiento.

1.5 El modelo de Van Hiele en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría desde la investigación.

En el siguiente apartado, presentaremos una descripción de algunos trabajos de investigación que se han enfocado en el modelo de Van Hiele, estos tienen por objetivo mostrar el estado de la investigación apoyado en este contexto en dos dimensiones:

1) El tipo de investigación que se ha desarrollado apoyados en el uso del modelo Van Hiele por nivel escolar.
2) Las áreas de oportunidad aún presentes.

Para el desarrollo de las dimensiones anteriores hemos considerado un análisis meta-etnográfico (Errasti, Pérez, Carrasco y Lama, 2014) en la base de datos EBSCOB, apoyado en palabras claves: razonamiento geométrico, visualización, visualización espacial, modelo de Van Hiele; con operadores booleanos como "y" y "o"; los criterios de exclusión en los que nos apoyamos son: la pertinencia y el contexto en donde se han publicado, por ejemplo, que sea una revista con referato externo o que se encuentren indexadas.

Enseguida se presenta la Tabla 2, que tiene por objetivo hacer un breve estudio del arte referente a las investigaciones realizadas en base al razonamiento geométrico de los últimos años.

Tabla 2. Análisis del tipo de investigaciones por nivel académico

	Medir el nivel de razonamiento geométrico		
Nivel Educativo	TICS	Lápiz y papel	Manipulables
Pre Básica y Básica	Alonso, A. (2011)	Wu, D. & Ma, S. (2005) Hernández et al (2015)	Juncaga, J. (2017) Livy, S. et al (2018)
Media	Gutiérrez, A. &Jaime, A. (2015); Aravena, M. & Caamaño C. (2013)		
Universidad y Profesores o profesores en formación	Alvarez, C. (2005) Graterol, E. & Andonegui, M. (2003)	Debrenti, E. (2016) Barrera, B, (2006)	Gur, H. (2017)

Fuente: Creación propia.

La tabla 2 presenta la concentración de algunos resultados de investigación, la cual se organizó según el nivel educativo de las investigaciones y el tipo de materiales implementados para su desarrollo. En relación con el nivel de educación básica:

Adrián Alonso (2011) realiza una investigación cuasi experimental a una muestra de estudiantes de enseñanza básica, conformada por dos grupos: control y experimental, con resultados en base a pre test y post test. En ambos grupos hay clase asistida, pero en uno de ellos usan material concreto y en el otro usan juegos y software computacionales. Ambos desarrollan un módulo que comprende estrategias básicas y genéricas aplicando el modelo de Van Hiele.

Este modelo experimental plantea como desafío que los estudiantes desarrollen de una forma práctica el pensamiento geométrico a partir del estudio de poliedros. Destaca la importancia de una mayor correspondencia entre el dibujo y el objeto, donde el estudiante pueda describir e inferir cada objeto sólido a partir de los elementos que lo componen; esto implica que enseñar la geometría no debe reducirse solo al seguimiento de un programa. Además, se debe tener en cuenta las tendencias actuales en términos de la metodología de la enseñanza, como son: la visualización, el uso de varias representaciones, hacer conjeturas, de manera que el estudiante construya significados a partir de su propia experiencia.

Der Bang Wu y Siu Lan Ma (2005), llevaron a cabo una investigación a 5.581 estudiantes de primaria seleccionados al azar, de 25 escuelas de Taiwán, para explorar conceptos básicos de geometría en relación con el triángulo, cuadrilátero y círculo. Se realizó una prueba de 25 preguntas, las cuales a su vez se caracterizaban en 9 tipos distintos, en función de sus atributos geométricos y basados en el nivel 1 de Van Hiele.

Los resultados fueron un 77,5 % de aprobación y el porcentaje de logro más alto fue el círculo, seguido por el triángulo y finalmente el cuadrilátero. Dentro de los 9 tipos de preguntas, destaca el tipo 3, que correspondía a la identificación de la línea recta y línea curva que fueron las más fáciles de responder por los estudiantes; y el tipo 6 referido a figuras extremadamente obtusas, que fue más difícil de responder y se asume que la explicación de esto es que aparece poco en los libros de texto y en la vida diaria del estudiante.

Nevis Hernández (2015) realiza una investigación para evaluar la eficacia del modelo de Van Hiele en el avance de los niveles de razonamiento y su relación con los estilos de aprendizaje. Para ello su estudio tuvo un enfoque cuantitativo de tipo cuasi experimental con la aplicación de una secuencia didáctica en el objeto matemático polígono. La muestra corresponde a 55 estudiantes de séptimo básico de la Institución Educativa San José y se trabajó con dos grupos, el grupo control con la enseñanza tradicional y el grupo experimental con una secuencia didáctica basada en el Modelo de Van Hiele. Se aplicó un pre test, un post test y otro instrumento enfocado en identificar los estilos de aprendizaje. Con relación al pre y post test se utilizaron preguntas abiertas con criterios para evaluar cada pregunta y en el test de estilos, el cuestionario Chaea.

En relación con los resultados del post test, en el nivel 1, el grupo experimental avanzó considerablemente y en relación con el grado de adquisición, el grupo control tuvo un grado intermedio y el grupo experimental, un grado alto; en el nivel 2, el grupo control tuvo un grado de adquisición nulo y el grupo experimental, un grado bajo; en el nivel 3 no se observaron diferencias significativas, manteniéndose bajo; y con respecto al nivel 4, ningún grupo fue capaz de contestar las preguntas. Referente a los estilos de aprendizaje, se pudo comprobar que estos no tienen relación con los niveles de Van Hiele y respecto de la secuencia didáctica adoptada a partir de este modelo, fue más efectiva que la enseñanza tradicional.

Jan Guncaga (2017), realiza un piloto de investigación de la teoría de Van Hiele para analizar el pensamiento de niños en edad preescolar y primaria sobre formas geométricas. La muestra consideró dos grupos de niños, uno de edad preescolar y otro de cuarto básico. Al primer grupo se le realizó entrevistas semiestructuradas, grabadas en vídeo, donde utilizaban material manipulable y plantillas impresas, cuyo análisis fue cualitativo. En cambio, el segundo grupo se enfocó en una prueba no estandarizada, donde las tareas se centraban en la identificación de formas elementales, lo que corresponde a un análisis cuantitativo.

Sobre los resultados en el nivel preescolar, los niños corresponden al primer nivel de Van Hiele, donde perciben las formas de manera integral y no se dan cuenta de las deformaciones. Confunden las figuras planas con las espaciales y la posición y tamaño de las formas tienen influencia en el reconocimiento de estas. En el grupo de cuarto básico, las respuestas también corresponden al nivel uno de Van Hiele, ya que responden a los prototipos de la forma, aunque el nivel de pensamiento geométrico no fue mayor y no alcanzó el nivel dos, que corresponde al análisis. También tienen problemas al confundir formas planas y espaciales y además en la identificación de modelos de cuadrados, debido a la posición vertical y horizontal de las diagonales. Hay coincidencias en los errores en ambos grupos, asumiendo que lo aprendido en el preescolar, a una edad temprana, es mucho más significativo para el estudiante y permanece más en el tiempo.

Livy Sharyn et al. (2018), realizan un proyecto piloto basado en un estudiante de 4 años, donde se investiga el razonamiento espacial y el conocimiento conceptual de cubos y paralelepípedos. Se realiza una entrevista de razonamiento geométrico uno a uno, utilizando bloques de madera (Froebel). El objetivo era averiguar qué se puede derivar de la construcción de un prisma, respecto a su razonamiento espacial y el conocimiento conceptual de este cuerpo geométrico. El estudio proporcionó un análisis en profundidad del razonamiento espacial del estudiante y la falta de conocimiento conceptual en la construcción de prismas, poniendo en evidencia la importancia de la construcción de estos objetos por el estudiante y el descubrimiento de las propiedades que deriva de la experimentación con bloques de madera.

En el nivel de enseñanza media, se registran también algunas investigaciones respecto al razonamiento geométrico viso espacial:

Ángel Gutiérrez y Adela Jaime (2015), realizan una investigación experimental, que consiste en un estudio de casos a un estudiante de segundo medio con altas capacidades matemáticas (en el sistema español, un superdotado). Referente a los objetivos, uno era recoger información sobre los procesos de aprendizaje de la Geometría espacial en un entorno de Geometría dinámica tridimensional y el segundo objetivo corresponde a determinar la utilidad de este tipo de entornos basados exclusivamente en la interacción con un computador. El estudio se basó en conceptos relativos a paralelismo entre rectas y/o planos en el espacio. Se realizaron un total de 8 sesiones distribuidas en un cuestionario escrito y una serie de actividades frente al computador (todas grabadas) y en todas había diálogos entre el profesor y el estudiante.

Los resultados del estudio indican que a medida que se avanzaba en las actividades del programa "Cabri 3D", se logró observar que, de manera sistemática, esto influyó positivamente en el desarrollo de su imagen conceptual de los objetos espaciales estudiados (rectas y planos) y de los conceptos relativos al paralelismo. Durante el experimento, se observó, además, que el profesor hizo intervenciones en momentos adecuados para centrar la atención en la deducción de ciertas propiedades que no estaban a la vista del estudiante.

María Aravena y Carlos Caamaño (2013), realizan una investigación en la Región del Maule a 625 alumnos distribuidos en 5 ciudades y que cursan el Segundo Año Medio de establecimientos municipales vulnerables. Realizan un diagnóstico que consta de 10 ítems para analizar el nivel de razonamiento de Van Hiele y el grado de adquisición en distintos temas geométricos.

Respecto a los resultados obtenidos en cada ítem, destacan algunos de ellos, como por ejemplo en un ítem referido a las propiedades de los cuadriláteros donde se esperaba transiten en el nivel 1 al 2, los estudiantes se encuentran en el nivel 1 pues no reconocen las propiedades de las figuras y alcanzan un grado de adquisición sobre el 67% en ambos niveles en el proceso de razonamiento. Otro ítem, donde se espera que los estudiantes alcancen los niveles 2 al 4, donde se pide asociar las figuras geométricas con propiedades matemáticas, un 56% alcanza el nivel 2 y un 0,5% el nivel 3. Como resultado final, tienen un escaso conocimiento de las propiedades geométricas de las figuras que están dotadas por ellas, esto debido, a que una parte refiere a un proceso enfocado solo en la memorización que en cuanto a la comprensión; además, de un escaso manejo y conocimiento del lenguaje al momento de presentar o desarrollar una argumentación de los procesos llevados a cabo.

En la línea de investigación de las Universidades y Profesores en formación, señala Herendiné (2003) que las competencias del profesor deben estar relacionadas con el pensamiento espacial, las habilidades de visualización espacial, la capacidad de reconocer formas geométricas en diferentes entornos y la capacidad para describir dichas formas. Algunas investigaciones son las siguientes:

Carlos Rojas Álvarez (2005), realiza un estudio de carácter descriptivo con diseño preexperimental a 15 estudiantes del primer semestre en Pedagogía Infantil, cuyo objetivo era describir el nivel de razonamiento geométrico según Van Hiele. Para ello se aplicó la metodología de Mentefactos (esquema de estructura interna de un objeto) en los conceptos de triángulo, cuadrilátero y polígonos, utilizados en la unidad de geometría. Se aplicó un pre y post test para estudiar los niveles 1 y 2.

Respecto a los resultados, en el pre test los estudiantes en su mayoría tenían el nivel 0 (según el estudio, no alcanzaron el nivel 1) y después de la unidad que utilizó mentefactos la mayoría obtuvo nivel 2.

Elizabeth Graterol (2003), estudia la incidencia de utilizar el software educativo Cabri en la evolución del pensamiento geométrico considerando los niveles de Van Hiele. Fue aplicado a 17 estudiantes en formación de profesores de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador y desarrolló los temas de ángulos, paralelismo, polígonos, entre otros. Se aplica un pre test y post test considerando, en cada ítem, el contenido, la naturaleza de la tarea y el nivel de razonamiento.

Referente a los resultados, el factor clave fueron las instrucciones para el progreso en cada etapa del aprendizaje. Se observó un lento avance en el razonamiento geométrico, inicialmente estaban en el nivel 0 (no saben del tema) y después del proceso de enseñanza aprendizaje, avanzaron al nivel 1 (reconocimiento). Se observa un mayor grado de adquisición en el tema de ángulos, avanzando hasta 2 niveles y los otros temas avanzando un solo nivel; se concluye que el programa Cabri no tuvo incidencia en la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes.

Edith Debrenti (2016), lleva a cabo una investigación a 115 estudiantes de formación docente de 4 instituciones distintas, para averiguar la capacidad de asociarse y relacionarse con figuras geométricas en objetos reales, para crear oportunidad de futuras investigaciones y revelar sus conocimientos en geometría. Se realizó una prueba que constaba de 12 fotos a color de objetos reales (distintas construcciones), donde debían caracterizar los distintos objetos de dos y tres dimensiones presentes en cada una, junto con figuras no inusuales.

Los resultados en los 4 grupos fueron muy similares e indican que un 60% identifica figuras de dos dimensiones, mientras que un 40% de tres dimensiones. Además, demuestra que no están familiarizados con los términos geométricos de formas y figuras. Falta reconocer figuras bidimensionales como círculo, semicírculo, octágono y figuras tridimensionales como prisma, poliedro, pirámide truncada. Se indica que les resulta difícil reconocer figuras en posiciones inusuales, como una pirámide truncada hacia abajo (farola) y muchos olvidaron la terminología geométrica de 4 a 5 años anteriores de formación.

Bertha Barrera (2006), realizó una investigación de tipo descriptiva y estudio de campo a 39 estudiantes entre docentes de servicio y bachiller de Licenciatura de Educación Integral, inscritos en la asignatura de Geometría 1. El objetivo era evaluar los niveles de razonamiento de los estudiantes al inicio del curso. Para ello, se aplicó una prueba que constaba de 30 problemas, divididos en grupos de 6, considerando los 5 niveles de Van Hiele, en forma secuencial y con el lenguaje correspondiente a cada nivel.

Respecto a los resultados, sólo un bajo porcentaje de los estudiantes pudo resolver los problemas de los niveles 0 al 3 y no fueron capaces de responder los problemas del nivel 4, que consistía en demostraciones en base a axiomas.

Hülgaya Gur (2017), realizó una investigación cualitativa a 18 estudiantes de segundo grado de ciencias, seleccionados para un curso electivo de matemáticas y origami. Los datos fueron recogidos a partir de entrevistas semiestructuradas, la observación y el uso de materiales concretos. El objetivo era obtener respuestas a preguntas como las siguientes: ¿cómo se utiliza el origami en la enseñanza de la geometría?, ¿tienen alguna dificultad en matemática y clases de origami?

Los resultados fueron que el origami ayuda a los estudiantes a hacer que formas abstractas sean más fáciles de imaginar en la mente, declaraban que los estudiantes se divertían mientras usaban origami, aunque experimentaban dificultades en el plegamiento y la unificación. Informan que mejoraban sus habilidades de comunicación y colaboración, muchos de ellos coincidían que se debiera incluir en el plan de estudio de los colegios. Además, mencionan que el origami es útil en la comprensión de la geometría y que afecta positivamente el aprendizaje, por estar relacionado con la vida cotidiana. Permite mejorar el razonamiento geométrico y facilitar el análisis de las propiedades de los objetos.

A partir de la lectura de los diversos apartados de este trabajo, se puede identificar que, hay un problema potencial en el fenómeno de visualización y razonamiento geométrico, además de la existencia de objetos matemáticos complejos, como es el caso de la semejanza, donde el nivel de razonamiento visual exige la movilización de saberes matemáticos abstractos y de las formas de ver al objeto; es por ello, que nos proponemos mirar el tránsito entre los niveles de razonamiento visual apoyados en el uso del modelo de Van Hiele cuando se desarrolla intervención de secuencias didácticas.

CAPITULO 2: Referente teórico.

2.1 Introducción.

En el proceso de enseñanza de la Geometría, Barrantes (2002) afirma que se basa en la memorización de conceptos y su aplicación, lo que nos permite que el estudiante pueda llegar a una conceptualización que vaya más allá de sus propias capacidades.

Es por ello, que la Geometría presente en el currículum escolar, según varios autores es relegada al final del curso, priorizando el trabajo del número y operaciones (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006).

En las tendencias actuales, se propone el desarrollo de oportunidades donde el aprendizaje de los educandos sea a partir de su participación en el desarrollo de su conocimiento y así apropiarse de él (Hernández y Villalba, 2001). Las consecuencias de la enseñanza de la Geometría bajo el enfoque tradicional se traducen en la concepción de ésta como una disciplina difícil y poco útil para la mayoría de los estudiantes. La enseñanza tradicional de la Geometría se enfatiza hacia el estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas.

Existen varias investigaciones tales como Guillen (2004), Vargas y Araya (2013) donde se ha utilizado el modelo de Van Hiele ya sea para detectar los niveles de razonamiento de estudiantes y profesores o para diseñar y poner en práctica secuencias experimentales de enseñanza. En varios estudios se ha sido utilizado el modelo para evaluar o describir el nivel de razonamiento de los estudiantes (Usikin, 1982; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Burger y Shaughnessy, 1986; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Perdikaris, 2004; Aires, Campos y Poças, 2015) y profesores (Mayberry, 1983; Afonso, 2003).

2.2 Razonamiento viso espacial.

La visualización ha sido objeto de numerosas investigaciones en Educación Matemática, especialmente en el área de la geometría (Battista, 2007; Bishop, 1989; Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Presmeg, 2006[a]).

Arcavi (2003, p. 216) indica que la principal característica de la visualización es, “ofrece un método de ver lo invisible”, tanto entendiendo la visualización como nombre (el producto, la Ilustración visual) o bien como verbo (el proceso, la actividad). Cuando Arcavi (2003) habla de “ver lo invisible”, en su sentido más profundo y figurativo, se refiere a percibir un mundo abstracto que la tecnología (ni óptica ni electrónica) no puede ver por nosotros.

Investigaciones de Krutetskii y otros (1976), en el campo de la resolución de problemas, pusieron de manifiesto que, a la hora de aprender (hacer) Matemáticas, los estudiantes se pueden clasificar en tres grandes grupos:

• El “visual o geométrico”, compuesto por aquellos estudiantes que tienen una marcada inclinación hacia los aspectos visuales de las Matemáticas y que, consecuentemente, hacen uso del razonamiento visual.

• El “no visual o analítico”, formado por estudiantes que no tienen necesidad de recurrir a ningún tipo de soporte visual para trabajar con esquemas abstractos.

• El “intermedio o armónico”, integrado por aquellos estudiantes en los que las dos orientaciones cognitivas anteriores se conjugan armoniosamente. Este tipo de estudiantes hace un uso equilibrado del razonamiento visual y analítico.

En los programas de estudio se ha dado poco énfasis a los aspectos visuales en matemática (geometría) y se ha hecho énfasis en lo analítico. Por ello, se sugiere que los currículos permitan desarrollar cada tema en los aspectos analíticos y visuales para que el estudiante se enfrente al material de la manera que esté más próxima a su orientación cognitiva (Dreyfus y Eisenberg, 1986).

2.3 Modelo de Van Hiele.

Apoyado en The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought, Mary Crowley (1987), señala que este modelo es una teoría de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, el cual tiene su origen el año 1957, en las disertaciones doctorales de Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele en la Universidad de Utrecht de Holanda; su publicación se encuentra en el libro “Structure and Insight: A theory of mathematics education”. Además, esta teoría se encasilla dentro de la didáctica de la matemática y específicamente en la didáctica de la geometría.

El modelo de Van Hiele está formado por 2 partes:

1. Descripción de los distintos tipos de cuerpos geométricos de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento visual de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las facultades de Ciencias; a estos tipos de razonamiento se les denomina los niveles de razonamiento.
2. Descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad de sus clases para que los estudiantes sean capaces de acceder al nivel de razonamiento superior al que tiene actualmente; se trata de las fases de aprendizaje.

   Según Jaime y Gutiérrez (1990), Van Hiele "caracteriza el aprendizaje como un resultado de la acumulación de la cantidad suficiente de experiencias adecuadas; por lo tanto, existe la posibilidad de alcanzar niveles más altos de razonamiento fuera de la enseñanza escolar si se consiguen las experiencias apropiadas".

2.3.1 Niveles de Van Hiele.

Las condiciones necesarias y suficientes para alcanzar un nivel de Van Hiele son:

- Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.

- Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.

- Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.

- No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

Basado en la investigación de Élgar Gualdrón y Ángel Gutiérrez (2007), se puede presentar de forma muy resumida las principales características de los niveles de pensamiento enumeradas del nivel 0 al nivel 4:

NIVEL 0: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO.

Los estudiantes al estudiar un objeto geométrico lo juzgan solo por apariencia física y como un todo.

NIVEL 1: ANÁLISIS.

Los estudiantes identifican los partes de las figuras geométricas y describen éstas a través de sus propiedades por medio de la observación y medición, pero no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras y no son capaces de elaborar definiciones.

NIVEL 2: DEDUCCIÓN INFORMAL U ORDEN.

Los estudiantes son capaces de definir y clasificar lógicamente las familias de figuras, estableciendo condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas. Aunque se realice demostraciones no son capaces de entenderlas y por ende no logran entender el sistema axiomático de las matemáticas.

NIVEL 3: DEDUCCIÓN FORMAL.

Los estudiantes entienden el papel de los elementos de un sistema axiomático, realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, ya que reconoce la necesidad de justificar las proposiciones planteadas.

NIVEL 4: RIGOR.

Los estudiantes están capacitados para analizar el grado de rigor de distintos sistemas deductivos y compararlos entre sí. Son capaces de captar la geometría de forma abstracta y apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la Geometría.

2.3.2 Fases de Van Hiele.

Apoyado en la investigación de Gilberto Vargas (2013), los Van Hiele propusieron cinco fases de aprendizaje que guían al docente en el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su paso de un nivel a otro. Dentro del modelo, las fases no son exclusivas de un nivel sino, en cada nivel, el estudiante comienza con actividades de la primera fase y continua así, de tal forma que al terminar la fase 5 debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente (Jaime, 1993).

Las fases se describen según Jaime (1993) y Fouz y De Donosti (2005) de la siguiente manera:

Fase 1: Información.

También conocida como toma de contacto, el profesor debe identificar los conocimientos previos que tienen sus estudiantes sobre este nuevo objeto de estudio y su nivel de razonamiento en cuanto a este. Los estudiantes deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán.

Fase 2: Orientación dirigida.

Mediante actividades y problemas se guía al estudiante para que ellos descubran y aprendan las distintas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar. Es importante la adecuada selección de los problemas y actividades que necesiten orientarlos a la solución. De este modo se permite que el estudiante aprenda los conceptos y las propiedades fundamentales para el nuevo razonamiento.

Fase 3: Explicitación.

Los estudiantes deben expresar en palabra o por escrito los resultados que obtuvieron al resolver un problema o actividad, e intercambiar sus experiencias y discutir con sus pares y el profesor. Todo ello, para que perciban las características y relaciones descubiertas y afianzar así el lenguaje técnico referente al objeto de estudio. Deben aprender y afianzar un vocabulario propio del nivel. Se promueve la discusión y comentarios sobre cómo se resuelven los ejercicios anteriores, sus elementos, propiedades y relaciones observadas.

Fase 4: Orientación libre.

En esta etapa se produce la consolidación del aprendizaje, el cuál fue trabajado en las fases anteriores. En esta etapa los estudiantes deben utilizar los conocimientos adquiridos anteriormente para resolver problemas diferentes y con un mayor grado de complejidad; problemas que sean abiertos y preferentemente con más de una solución. La ayuda en esta etapa por parte del profesor debe ser la mínima en la resolución de problemas, obligando a los estudiantes a combinar distintos conocimientos y aplicarlos en diferentes situaciones.

Fase 5: Integración.

Los estudiantes establecen una visión global de lo que aprendieron sobre el tema y las distintas redes de relaciones que van formando, incorporando nuevos conocimientos, métodos de trabajo y razonamiento que traían anteriormente. El profesor guía los resúmenes o recopilaciones de la información para que ellos logren la integración, es decir la organización de los conocimientos adquiridos y finalmente comprobar si los ha adquirido.

2.3.3 Propiedades de Van Hiele

Las siguientes características están basadas en los autores Beltrametti, M., Esquivel y Ferrari, E. (2005); Jaime (1993); Jaime y Gutiérrez (1990):

Recursividad: el éxito en un nivel depende del grado de asimilación que tenga el estudiante de las estrategias del nivel anterior. Los objetos de un nivel se convierten en los objetos de estudio del siguiente, es decir, se hacen explícitos aquellos conocimientos que eran implícitos en el nivel anterior.

Secuencialidad: no se puede alcanzar un nivel sin haber superado de forma ordenada todos los niveles inferiores, cada nivel de razonamiento se apoya en el nivel anterior. Van Hiele decía que la edad no es un factor determinante para el paso de los niveles.

Especificidad del lenguaje: la forma de expresarse y el significado que se le da a determinado vocabulario. Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje y un significado específico del vocabulario matemático; por tanto, el docente debe ajustarse al nivel en que están sus estudiantes.

Continuidad: se refiere a la forma en cómo el individuo pasa de un nivel a otro. El paso en los niveles de Van Hiele se produce de forma continua y pausada, puede tardar varios años en los niveles 4 y 5.

Localidad: por localidad de los niveles se entiende que un individuo puede razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la geometría. Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento.

Hasta aquí se ha presentado en forma general posturas teóricas alrededor de la visualización y el razonamiento visual, enseguida se diserta sobre la postura que se asume para el desarrollo de este trabajo. El proceso de visualización entrega herramientas al estudiante para explorar el espacio físico en el que se desenvuelve, lo que le permite orientarse y tomar decisiones. En este trabajo se considera como eje articulador la propuesta de razonamiento geométrico de Van Hiele, que considera que el desarrollo viso espacial se debe promover pasando por fases de aprendizaje, por lo que, en este trabajo se diseñan secuencias de aprendizaje apoyadas en este referente y se valora el desarrollo del razonamiento espacial de estudiantes de primero medio en el tema de semejanza. La importancia de este Objeto matemático reside en que permite establecer vínculos entre la geometría y el álgebra a partir de las relaciones entre sus razones.

A continuación, se presentan la pregunta de investigación y los objetivos que guían este trabajo de investigación.

2.4 Pregunta de investigación.

¿Cuáles son los niveles de razonamiento visual en los que se encuentran los estudiantes en un pre y post test cuando desarrollan una intervención didáctica sobre semejanza apoyadas en las fases de Van Hiele?

2.5 Objetivos de investigación.

2.5.1 Objetivo General.

OG. Analizar el nivel de razonamiento visual de estudiantes en un pre y post test cuando desarrollen una intervención didáctica sobre semejanza apoyadas en las fases de Van Hiele.

2.5.2 Objetivos Específicos.

OE1: Conocer el nivel de razonamiento visual de los estudiantes antes y después de la aplicación de una intervención didáctica de semejanza.

OE2. Clasificar el nivel de razonamiento visual de los estudiantes antes y después de la aplicación de una intervención didáctica de semejanza.

OE3. Identificar bajo un estudio de casos las limitaciones de la implementación del modelo de Van Hiele.

CAPITULO 3: Metodología.

3.1 Tipo de metodología.

Es una investigación de tipo cualitativo descriptivo e interpretativo. Se considera importante que la instrucción sea en base a objetos de la realidad como cita Marzano (1997), los conceptos propios de cada asignatura ayudan a enriquecer la comprensión de los y las estudiantes sobre el mundo que los y las rodea y los fenómenos que experimentan u observan.

Al inicio, se presenta un pre test para identificar los conocimientos respecto a la semejanza de figuras planas a partir de enunciados simples y con distintas representaciones visuales en la actividad matemática. Lo anterior, para poder registrar las dificultades que puedan presentar en las distintas situaciones y las representaciones visuales del objeto matemático.

Posterior a esto, se revisarán situaciones importantes para este estudio exploratorio y se determinará si hubo o no un avance. Esto permitirá entregar elementos a futuros investigadores en la línea de formación sobre el tipo de representación y los errores más frecuentes de los estudiantes, permitiendo la generación de nuevas líneas de investigación en apoyo para mejorar el aprendizaje de las futuras generaciones de estudiantes.

Cabe mencionar que, por cada problema se entregaran posibles respuestas y cada una de ella está caracterizada por lo que propone Van Hiele, con el fin de ver los niveles de logro de los estudiantes.

Finalmente, se hará un estudio de casos, considerado las respuestas de un grupo mixto de estudiantes, considerando distintos casos. Además, se revisarán las respuestas en base a entrevistas realizadas a 3 estudiantes de la muestra, donde se consideró el tipo de registro de los estudiantes y el razonamiento visual del objeto de estudio.

3.2 Participantes.

Los participantes fueron elegidos con una muestra por conveniencia y son estudiantes que están cursando primero medio del Colegio Inmaculada Concepción de Puerto Varas, dicho establecimiento tiene una matrícula al año 2019 de 1.105 estudiantes donde se imparten clases desde pre kínder a cuarto año medio. Es un colegio de formación católica y sus profesores están en constante perfeccionamiento en distintas áreas relacionadas con educación. La muestra corresponde a 30 estudiantes, 15 mujeres y 15 hombres, quienes tienen entre 14 y 16 años. Viven dentro de la ciudad de Puerto Varas y sus alrededores. El primer instrumento les fue aplicado en el mes de octubre del año 2019 en la asignatura de Matemáticas, momento en que se continuaba revisando el eje temático de geometría y el segundo instrumento la cuarta semana del mismo mes. En cuanto a los contenidos se dio énfasis a una serie de tareas de exploración para que estos no fueran en forma memorística y abstracta como señalaban Barrantes (2002), Hernández y Villalba (2001). Las actividades propuestas estaban en relación con la semejanza de figuras planas; se aplicó un pilotaje a 30 estudiantes que en condiciones normales dieron término a esta investigación. Referente a la edad y otros cambios propios de la adolescencia, en general el grupo de estudio manifiesta un rechazo a las áreas científicas, pero se pueden aplicar metodologías en el área de formación docente.

3.3 Instrumentos pre y post test.

Para realizar una intervención didáctica, se aplicó un pre y post test donde se espera declarar el tipo de razonamiento viso espacial de los estudiantes y así, revisar las situaciones para el posterior análisis de las respuestas (Ver Ilustración 4).

a) En una escuadra se identifican 2 triángulos, el interior y el exterior.
Indica porque ambos triángulos son semejantes.

xplicación escrita:

Ilustración 4. Ejemplo de Ejercicios del Pre test (Instrumento completo en anexo)

3.4 Intervención didáctica.

3.4.1 Características de la intervención didáctica.

Las actividades se dividieron en 7 sesiones, la primera fue la recogida de datos (pre test) donde se realizó una actividad matemática individual, relacionada con el objeto de semejanza de figuras planas, la cual abordaba la semejanza por su forma y características, además de los criterios de semejanza y propiedades. A partir de la observación de las figuras, deben responder varios enunciados donde deben argumentar porque 2 figuras son o no semejantes.

En la sesión 2, se introdujo al estudiante en la historia de la semejanza a partir de un famoso problema que consiste en determinar la altura de la pirámide de Keops. El objetivo era que a partir de una situación real con la información mínima determinaran la altura de la pirámide; en esta primera aproximación se pide a los estudiantes que busquen distintas estrategias para encontrar la altura y visualizan que el matemático Tales con ayuda de su bastón y el sol se vale de 2 triángulos semejantes.

En la sesión 3, se plantean 2 situaciones en las que los estudiantes se reúnen en grupos de 6 y deben explicar y argumentar si existe una relación matemática entre 2 triángulos sin valores conocidos (Ilustración 5) y en 2 polígonos que tienen la misma forma, pero deben descubrir las condiciones para que mantengan una proporción.

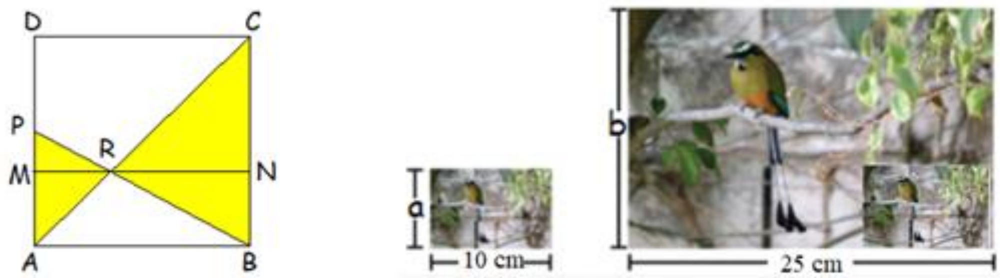


Ilustración 5. Ejemplos de figuras semejantes

Es importante mencionar que no se entrega definiciones y conceptos para que posteriormente se pueda socializar y sea resultado de un proceso y no un producto acabado. En esa dinámica se da una primera aproximación del concepto de semejanza como una relación entre los ángulos, relación entre los lados y forma.

En la sesión 4, se presenta a los estudiantes 2 situaciones donde el objetivo es la manipulación de los objetos, en la que puedan extraer sus propias conclusiones de la actividad. La primera actividad se presenta una figura real (cerámica) y se propone al estudiante si se puede ampliar y/o reducir y que condiciones pediría para mantener su forma (Ilustración 6)

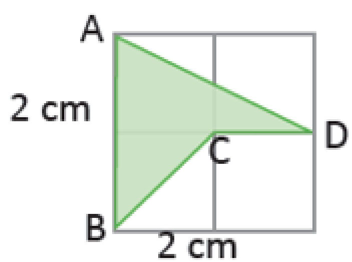


Ilustración 6. Ejemplo de cerámica

En la segunda actividad se entrega a cada estudiante una hoja de oficio y se le pide que la doble de un extremo a otro, pero en posición horizontal. Esto para el estudiante pueda observar que figuras geométricas se forman y acto seguido qué relación matemática existe entre estas. La figura a continuación es solo una referencia (Ilustración 7).

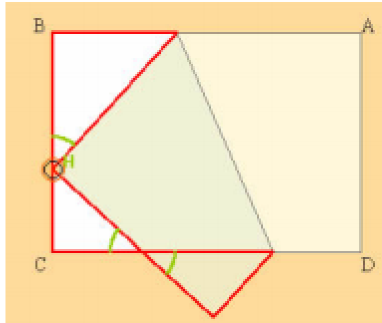


Ilustración 7. Doblado de papel extraído de material didáctico Programa Descartes.

A la mitad de la sesión se consulta sobre la semejanza de 2 figuras, qué significa y que condiciones deben cumplir 2 figuras para ser semejantes. Finalmente, se socializan el concepto de semejanza y qué características tiene y se entrega una definición en función de 2 figuras geométricas (Ilustración 8).

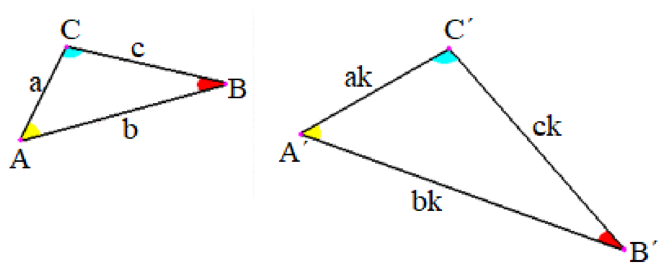


Ilustración 8. Concepción de triángulos semejantes

Finalizando la sesión, se entregan algunas situaciones donde debe comprobar si dos triángulos son semejantes o no y deben aplicar el concepto de semejanza (Ilustración 9).

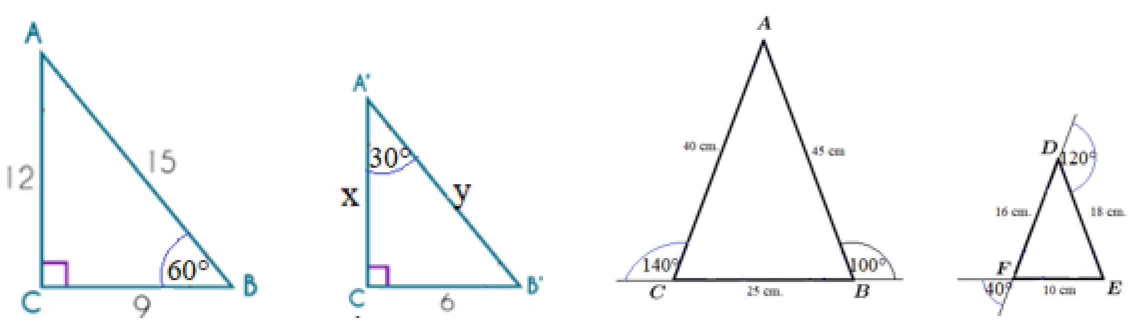


Ilustración 9. Ejemplos de figuras semejantes

En la sesión 5, se les presentan 2 imágenes y se pregunta a los estudiantes cuáles son semejantes, cuáles congruentes y por qué. La actividad anterior, la realizan en grupos de 5 estudiantes y no se entrega más información (Ilustración 10).

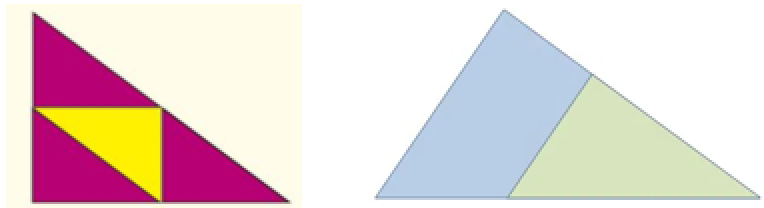


Ilustración 10. Ejemplos de congruencia y semejanza

En la sesión 6, se socializan los criterios de semejanza entre 2 triángulos, aplicación en mapas y escala de una casa. En la sesión 7, se introduce el concepto de homotecia a partir de un vídeo y se consulta acerca de las dos figuras que se forman si comparten alguna relación matemática (Ilustración 11).

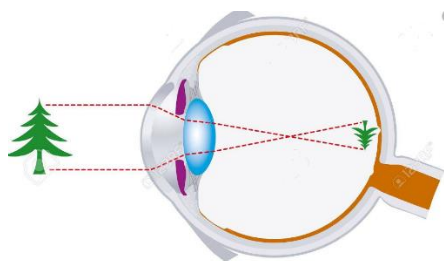


Ilustración 11. Ejemplo de homotecia.

En la última sesión, se aplica el post test para ver si hubo o no un avance en lo que respecta al razonamiento visual y nivel de Van Hiele.

Nota aclaratoria:

Sobre las limitaciones para aplicar la intervención didáctica, esto no se reportó antes debido al movimiento social que se vivió en el país en el mes de octubre, lo que impidió tomar clases en forma normal debido a cambios de horario y otros inconvenientes asociados.

3.4 Fases de la aplicación.

Fase 1: Pre test, el objetivo de este instrumento fue identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes; éste se desarrolló en una sola sesión.

Fase 2: Implementación de las secuencias didácticas, las cuales constaron de cinco sesiones de trabajo.

Fase 3: Post test, se dio en una sola sesión en el cual se confrontaba a los estudiantes con la aplicación nuevamente del pre test.

Fase 4: Entrevista a casos significativos. Después de un análisis preliminar se eligieron a tres casos significativos para el estudio.

Cabe destacar que para toda la aplicación de estas actividades se contó con los permisos de la institución, los estudiantes y los apoderados, también que la confidencialidad de los sujetos se mantendrá bajo resguardo, por ello a los estudiantes en este trabajo se les denotará con E_i, con i=1, 2, 3, …, 30.

Sobre la validez de los instrumentos, estos fueron validados por un panel de expertos entre ellos la Dra. Ismenia Guzmán y Dra. María Aravena Díaz.

CAPITULO 4: Análisis

4.1 Introducción

Los estudiantes que participaron en las tareas de semejanza de figuras planas describieron ciertas situaciones a partir de las imágenes que se les presentaban. He de señalar que algunos solo indicaron características de las figuras geométricas en forma particular y en otros casos relaciones entre 2 figuras como congruentes o semejantes.

Hay que mencionar que algunos estudiantes hicieron conjeturas equivocadas acerca del concepto de semejanza (Tabla 3). Referente al trabajo en aula, en las distintas actividades realizadas en la intervención didáctica, los estudiantes solo comentaban lo que observaban y la afirmación recurrente era que faltaban datos o que podían utilizar alguna propiedad para resolverlas; podía interpretarse que había poca deducción y un pobre vocabulario.

Respecto al análisis de las respuestas de los estudiantes, debemos mencionar que están en relación con el marco teórico del Modelo de Van Hiele, que enmarca en distintos niveles las respuestas de los estudiantes en las tareas.

Para profundizar la muestra de los resultados y el análisis de estos, se realizarán unos apartados de tipos de constructores, niveles de Van Hiele.

4.2 Operacionalización del marco teórico

La tabla 3, presenta la operacionalización del marco teórico, la que consiste en la reflexión de las respuestas a las diversas tareas de semejanza.

Tabla 3. Operacionalización del marco teórico

Nivel de Van Hiele	Descripción
Nivel -1	La respuesta del estudiante no es coherente con el contexto o no responde la pregunta.
Nivel 0 Visualización	La respuesta del estudiante se basa en nombrar o reconocer la forma de la figura. Identificar los ángulos interiores de la figura, la medida de sus lados, pero sin relacionarlos con alguna propiedad.
Nivel 1 Análisis	La respuesta del estudiante se basa en conceptos como ampliar, factor, reducir, lados proporcionales, ángulos interiores y exteriores de dos polígonos.
Nivel 2 Deducción informal	La respuesta del estudiante se basa en la semejanza de polígonos, a partir de propiedades de ángulos, lados proporcionales, criterios de semejanza y/o homotecia.
Nivel 3 Deducción	La respuesta del estudiante está basada en la proporción de sus lados y ángulos congruentes, puede apoyarse en criterios de semejanza.
Nivel 4 Rigor	La respuesta del estudiante se basa en características o propiedades de las figuras y condiciones mínimas para la semejanza de ellas.

Fuente: Creación propia, jerarquía propuesta para el análisis de la comprensión de tablas estadísticas

Solo indicar en cuanto al nivel -1, refiere también a que hubo algunos estudiantes que no contestaron algunas preguntas referidas a los problemas del pre test y en algunos casos la respuesta no tenía relación con la pregunta.

Hay que mencionar que se observó un pobre vocabulario matemático en las respuestas en ambos instrumentos pre y post test por los estudiantes, pese a que se consideró lo que indicaba Adrián Alonso (2011) que la instrucción de la geometría fuera en términos de que no se debe enseñar en forma abstracta y la metodología sea una repetición de conocimientos.

En este estudio la muestra fue de 30 estudiantes, los cuales están descritos de la siguiente forma:

E_i, siendo i = 1, 2, 3, …,30.

En el análisis exploratorio, estudiaremos 3 casos que dicen relación con comparar los instrumentos de medición pre y post test, a la luz de observar los niveles de razonamiento viso espacial del grupo de estudiantes y sus respectivos avances. Los casos los clasificaremos en:

Caso 1: Bajan su nivel de Van Hiele.
Caso 2: Mantienen el nivel de Van Hiele.
Caso 3: Suben un nivel de Van Hiele.

4.3 Análisis comparativo del pre test vs. post test.

Enseguida se presentan los resultados comparativos del pre y post test de los estudiantes. Para el desarrollo de éste se exhibe una tabla de cada uno de los ítems propuestos en este test.

4.3.1 Análisis del ítem 1.

La siguiente tabla 4 presenta una tabla de contingencia para mostrar la categoría de los estudiantes por nivel de razonamiento geométrico en el problema 1a del ítem 1:

Tabla 4. Análisis por contingencia problema 1a

PRE TEST

POST TEST

	N-1	N0	N1	N2	Total
N-1		E_{17}, E_{27}, E_{28}, E_{29} (4)			4
N0	E_{4}, E_{21}, E_{22} (3)	E_{1}, E_{5}, E_{8}, E_{10}, E_{15}, E_{16}, E_{18}, E_{19}, E_{24}, E_{25} (10)	E_{9} (1)	E_{26} (1)	15
N1		E_{3} (1)			1
N2		E_{7}, E_{11}, E_{13}, E_{14} (4)	E_{2}, E_{30} (2)	E_{6}, E_{23} (2)	8
N3				E_{12}, E_{20} (2)	2
Total	3	19	3	5	30

Fuente: Creación propia.

Este problema tenía por objetivo identificar atributos físicos de figuras semejantes y no semejantes del mundo real.

Como puede observarse en la Tabla 4, en el ítem 1, la mayoría de los estudiantes se encuentran en el nivel 0 de Van Hiele tanto en el pre test como el post test, lo que implica que los estudiantes solo se basan en nombrar o reconocer la forma de las figuras, e identificar ángulos o medidas de los lados sin relacionarlos con alguna propiedad. Cuando procedemos a establecer el análisis comparativo notamos que la mayoría de los estudiantes se quedan en N0; esto creemos se debe a la poca exploración de objetos geométricos con objetos reales y aplicación a estos.

A continuación, se presenta el análisis de algunos casos específicos. Primero revisemos la instrucción del problema 1 del ítem 1: En una escuadra se identificaron 2 triángulos, el interior y el exterior. Indica porque ambos son semejantes (Ilustración 12).

Ilustración 12. Problema 1a pre test

Las posibles respuestas que se esperaban en esta tarea las explico a continuación: una primera respuesta es que el estudiante identificara que un triángulo es la reducción del otro o la ampliación y que los lados son proporcionales. Una segunda respuesta es que establezca una relación entre los ángulos interiores del triángulo y por ser un objeto real identifique que ambos son triángulos rectángulos. Una tercera respuesta es que ubique en el interior del triángulo pequeño un centro de homotecia y forme una homotecia.

Estudiemos los siguientes casos:

Caso 1: Bajan su nivel de Van Hiele.

Analizaremos el caso del estudiante E_{26} el cual baja del nivel 2 al nivel 0 de Van Hiele. En su respuesta del pre test (Ilustración 13) argumenta una relación entre los ángulos de ambos triángulos y los lados lo que lo ubica en el nivel 2 de Van Hiele y que hace referencia a la tabla de operacionalización (Tabla 3). También hay que señalar que coincide con lo que plantea la prueba Timms que incluye propiedades y características de figuras.

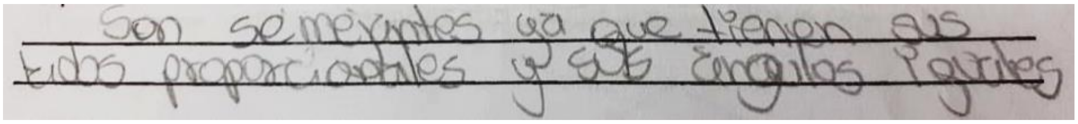


Ilustración 13. Respuesta de estudiante E26 problema 1a del pre test.

Referente a la respuesta del estudiante E_{26} en el mismo problema (Ilustración 14), se ubica en el nivel 0 de Van Hiele, dado que en el post test afirma que tiene los mismos ángulos, pero no relaciona en forma correcta los lados de ambos triángulos que deben ser proporcionales entre sí, lo que deja en evidencia que no maneja correctamente las propiedades de semejanza de triángulos en base a la configuración epistémica (Tabla 1).

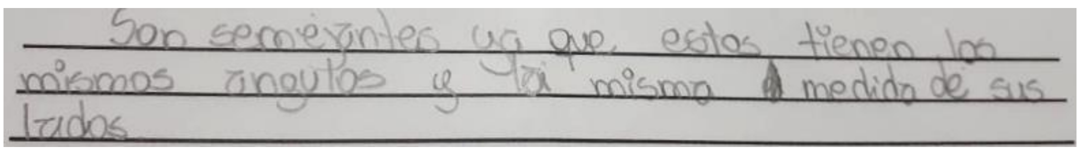


Ilustración 14. Respuesta de estudiante E26 problema 1a del post test.

Caso 2: Mantienen el nivel de Van Hiele.

Analizaremos los casos de los estudiantes E_6 y E_{23} los cuáles mantienen su nivel 2 de Van hiele en ambos instrumentos pre y post test.

Primero, analicemos el caso del estudiante E_6, en su respuesta del pre test (Ilustración 15) menciona una relación entre los lados y ángulos (criterios de semejanza) e indica que los ángulos son iguales, más si revisamos la configuración epistémica los ángulos deben ser congruentes. Pero, su respuesta al final hace alusión a cuerpos lo que indica que tiene diferencias entre objetos bidimensionales y tridimensionales. Desde el currículum, en el eje temático geometría podemos indicar que no ha desarrollado bien sus capacidades espaciales.

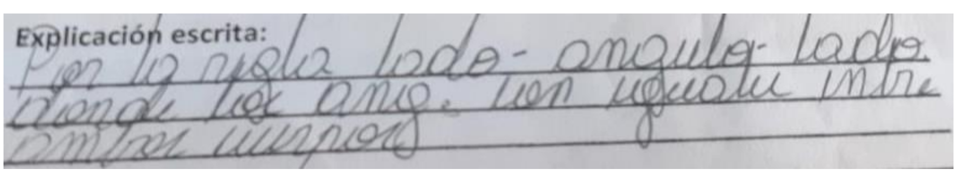


Ilustración 15. Respuesta de estudiante E6 problema 1a del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test (Ilustración 16), observamos que su respuesta se mantiene en el nivel 2 de Van Hiele porque establece relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos, lo que va en la línea de la configuración epistémica.

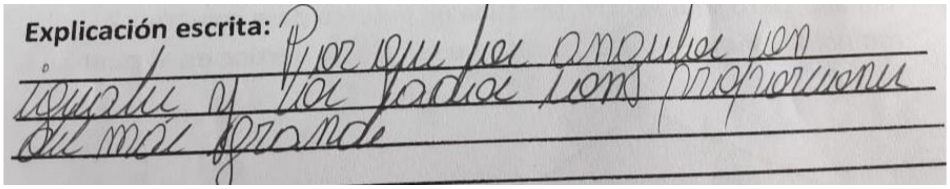


Ilustración 16. Respuesta de estudiante E6 problema 1a del post test.

Segundo, analicemos el caso del estudiante E_{23}, en su respuesta del pre test (Ilustración 17) señala una relación entre los ángulos interiores y exteriores lo que lo ubica en el nivel 2 de Van Hiele (según tabla de operacionalización) y coincide con lo que plantea la prueba Timms que incluye propiedades y características de figuras.

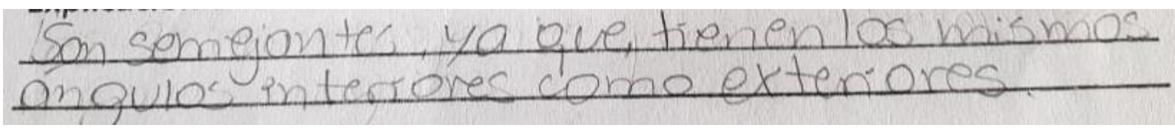


Ilustración 17. Respuesta de estudiante E23 problema 1a del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test (Ilustración 18), observamos que su respuesta se mantiene en el nivel 2 de Van Hiele, aunque utiliza en forma indirecta un criterio de semejanza (tabla de operacionalización).

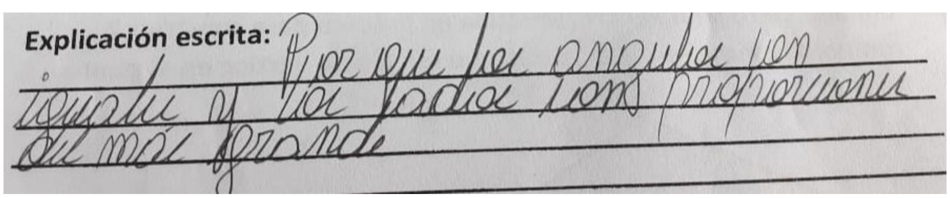


Ilustración 18. Respuesta de estudiante E23 problema 1a del post test.

En ambos casos, los estudiantes E_6 y E_{23} mantienen el nivel 2 de Van Hiele, lo que podemos observar es lo acotado de sus respuestas con lápiz y papel, con relación al objeto matemático de semejanza.

Caso 3: Suben su nivel de Van Hiele.

Analizaremos los casos de los estudiantes E_{12} y E_{20} los cuáles transitan del nivel 2 al nivel 3 de Van hiele en ambos instrumentos pre y post test.

Primero, analicemos el caso del estudiante E_{12}, en su respuesta del pre test (Ilustración 19) indica una relación entre los ángulos interiores y exteriores de ambos triángulos lo que lo ubica en el nivel 2 de Van Hiele (tabla de operacionalización).

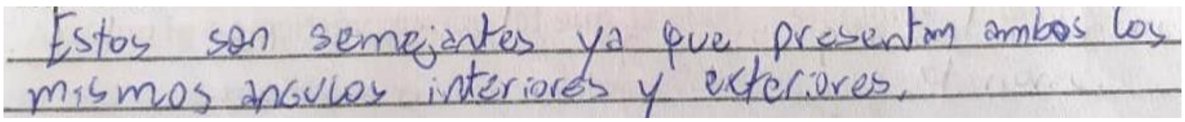

Estos son semejantes ya que presentan ambos los mismos angulos interiores y exteriores.

Ilustración 19. Respuesta de estudiante E12 problema 1a del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test (Ilustración 20), observamos que su respuesta sube al nivel 3 de Van Hiele porque establece relaciones entre los ángulos de los triángulos y, además, utiliza un criterio de semejanza (tabla de operacionalización).

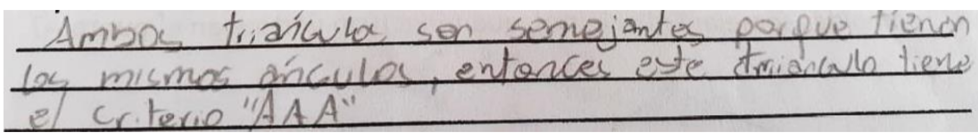

Ambos triángulos son semejantes porque tienen los mismos ángulos, entonces este triángulo tiene el criterio "AAA"

Ilustración 20. Respuesta de estudiante E12 problema 1a del post test.

Segundo, analicemos el caso del estudiante E_{20}, en base a su respuesta (Ilustración 21) utiliza la habilidad de visualización espacial (Gutiérrez, 1991) en una escuadra como objeto de cotidianeidad presente en los ángulos interiores del triángulo.

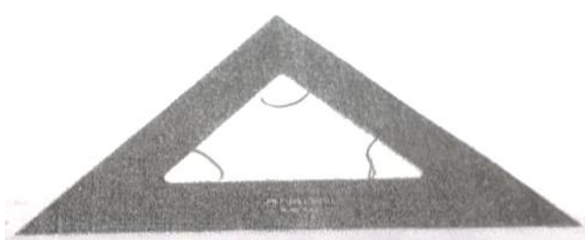


Ilustración 21. Respuesta de estudiante E20 problema 1a del pre test.

Referente a su respuesta del pre test (Ilustración 22) señala una relación entre los ángulos interiores de ambos triángulos lo que lo ubica en el nivel 2 de Van Hiele (tabla de operacionalización). Aunque, no establece una relación de medida entre los lados.

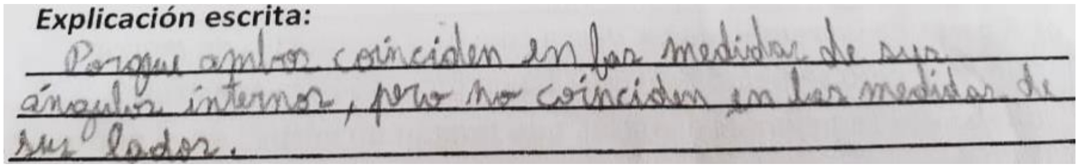

Explicación escrita:
Porque ambos coinciden en las medidas de sus ángulos internos, pero no coinciden en las medidas de sus lados.

Ilustración 22. Respuesta de estudiante E20 problema 1a del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test (Ilustración 23), observamos que su respuesta sube al nivel 3 de Van Hiele porque establece relaciones entre los ángulos interiores y demuestra mediante construcciones geométricas (Ilustración 24); es importante señalar que representa elementos en su mente y los moviliza en registros de representación semiótica para resolver problemas (Kadunz y Yerushalmy, 2015).

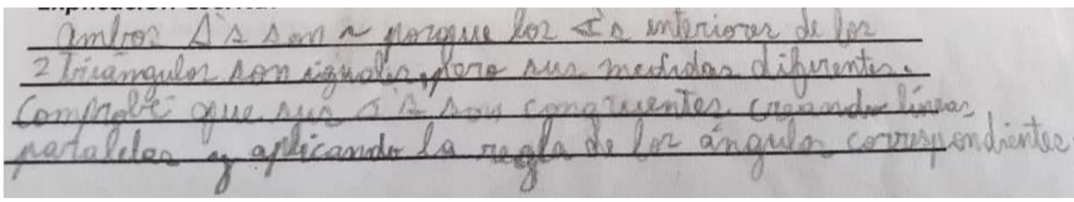

Ambos Δs son ~ porque los ∢s interiores de los 2 triángulos son iguales, pero sus medidas diferentes. Comprobé que sus ∢ Δ son congruentes creando líneas paralelas y aplicando la regla de los ángulos correspondientes.

Ilustración 23. Respuesta de estudiante E20 problema 1a del post test.

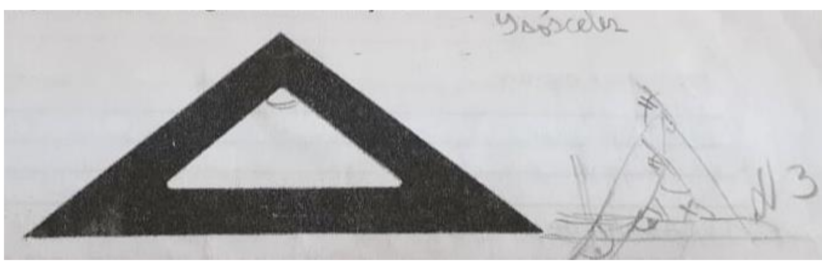


Ilustración 24. Respuesta de estudiante E20 problema 1a del post test.

En ambos casos, los estudiantes E_{12} y E_{20} transitan del nivel 2 al nivel 3. El primer estudiante basa su respuesta en propiedades y criterios; en cambio el segundo utiliza además simbología presentada en la configuración epistémica y una limitación en cuánto a la explicación del registro que utilizo para probar que 2 triángulos son semejantes.

4.3.2 Análisis del ítem 1

La siguiente tabla 5 presenta una tabla de contingencia para mostrar la categoría de los estudiantes por nivel de razonamiento geométrico en el problema 1b del ítem 1:

Tabla 5.Tabla de contingencia problema 1b

PRE TEST

POST TEST

	N-1	N0	N1	N2	Total
N-1		E_{28}, E_{29} (2)	E_{17} (1)	E_{27} (1)	4
N0	E_{22} (1)	E_3, E_4, E_5, E_{10}, E_{15}, E_{18}, E_{19}, E_{21}, E_{24}, E_{25} (10)	E_{16} (1)	E_{26} (1)	13
N1		E_1, E_{13}, E_{30} (3)	E_8, E_9 (2)		5
N2		E_2, E_7, E_{14}, E_{23} (4)	E_6 (1)	E_{12} (1)	6
N3				E_{20} (1)	1
N4		E_{11} (1)			1
Total	1	20	5	4	30

Fuente: Creación propia.

Este problema corresponde al ítem 1, por lo que su objetivo fue descrito en el problema anterior.

Como puede observarse en la Tabla 5, la mayoría de los estudiantes se encuentran en el nivel 0 de Van hiele en el pre test y luego de aplicada la propuesta didáctica se observó una leve movilidad de estos estudiantes en el post test, ubicando a 13 estudiantes en el nivel 0 y otros 13 estudiantes en niveles superiores. En base al nivel 0 los estudiantes nombran o reconocen la forma de las figuras e identifican ángulos o medidas de los lados sin relacionarlos con alguna propiedad. Cuando procedemos a establecer el análisis comparativo notamos que la mayoría de los estudiantes se quedan en N0, pero se produce una concentración en el post test de 11 estudiantes entre los niveles 1 y 2 lo que indica una tendencia debido en parte, porque el estudiante se va apropiando de ciertos conceptos matemáticos y relaciones entre figuras planas.

A continuación, se presenta el análisis de algunos casos específicos:

Primero revisemos la instrucción del problema 1b del ítem 1: Se dibuja un triángulo rectángulo y cada lado se divide a su mitad formando un nuevo triángulo. Explica por qué el triángulo original es semejante al primero (Ilustración 25).

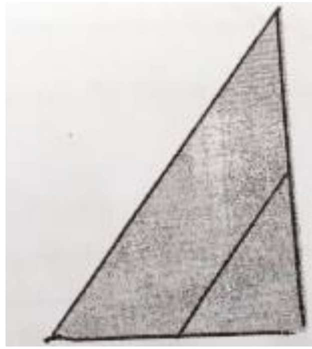


Ilustración 25. Problema 1b Pre test

Las posibles respuestas que se esperaban en esta tarea las explico a continuación: una primera respuesta es que el estudiante indicara la correspondencia de los ángulos; es decir, que ambos triángulos son rectángulos y la relación entre sus lados sea Pitagórica (Contenido de octavo básico). Una segunda respuesta, que se trataría de la misma forma, es que los ángulos son congruentes y sus lados proporcionales. Una tercera respuesta, es que sea una homotecia directa de centro uno de los vértices y factor entre 0 y 1.

Estudiemos los siguientes casos:

Caso 1: Bajan su nivel de Van Hiele.

Analizaremos el caso del estudiante E_{26} el cual baja del nivel 2 al nivel -1 de Van Hiele. En su respuesta del pre test (Ilustración 26) argumenta una relación de proporcionalidad de los lados, lo que lo ubica en el nivel 2 de Van Hiele (tabla de operacionalización).

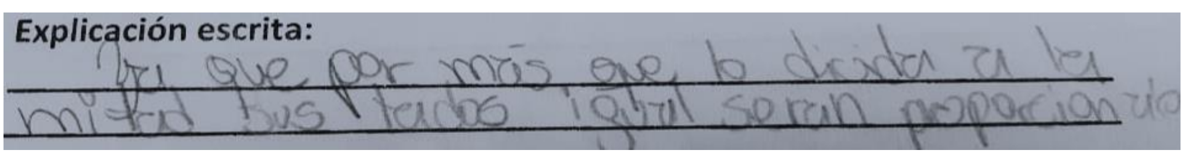


Ilustración 26. Respuesta de estudiante E26 problema 1a del pre test.

Referente a la respuesta del estudiante E_{26} en el mismo problema (Ilustración 27), se ubica en el nivel -1, dado que en el post test no es coherente la respuesta (Tabla de operacionalización). Lo que deja en evidencia que no maneja el concepto de semejanza de triángulos en base a la configuración epistémica (Tabla 1).

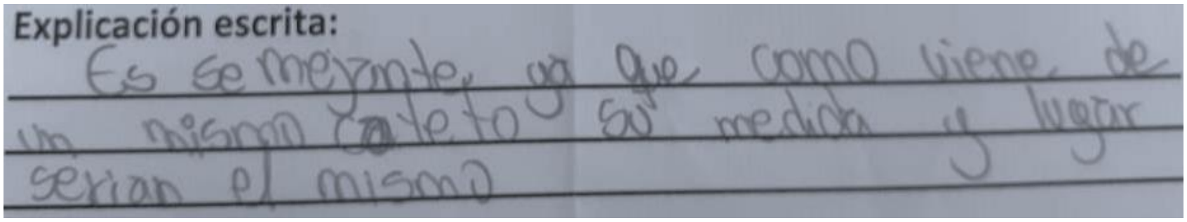


Ilustración 27. Respuesta de estudiante E26 problema 1a del post test.

Caso 2: Mantienen el nivel de Van Hiele.

Analizaremos los casos de los estudiantes E_8 y E_9 los cuáles mantienen el nivel 1 de Van hiele en ambos instrumentos pre y post test.

Primero, analicemos el caso del estudiante E_8, en su respuesta del pre test (Ilustración 28) hace alusión la reducción de los lados de un triángulo, lo que lo ubica en el nivel 1 de Van Hiele (tabla de operacionalización).

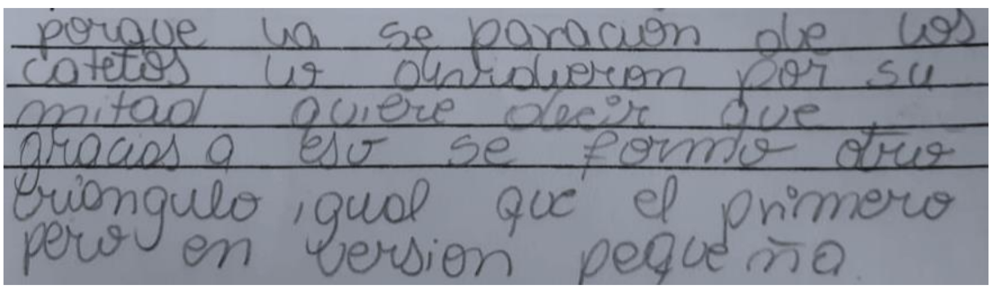


Ilustración 28. Respuesta de estudiante E8 problema 1b del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test (Ilustración 29), observamos que su respuesta se mantiene en el nivel 1 de Van Hiele, menciona que los ángulos son los mismos y no establece relaciones entre los lados (tabla de operacionalización).

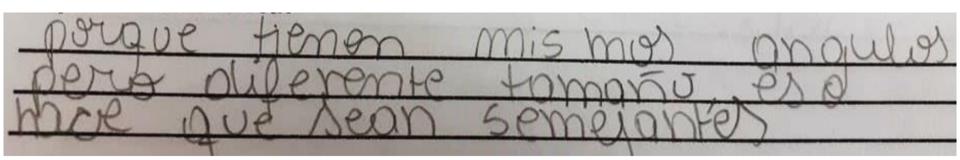


Ilustración 29. Respuesta de estudiante E8 problema 1b del post test.

Segundo, analicemos el caso del estudiante E_9, en su respuesta del pre test (Ilustración 30) según Arcavi (2003) el estudiante utiliza un "método de ver lo invisible" al dividir un triángulo en 4 triángulos más pequeños y congruentes que lo ubica también en el nivel 1 de Van Hiele (Tabla de operacionalización).

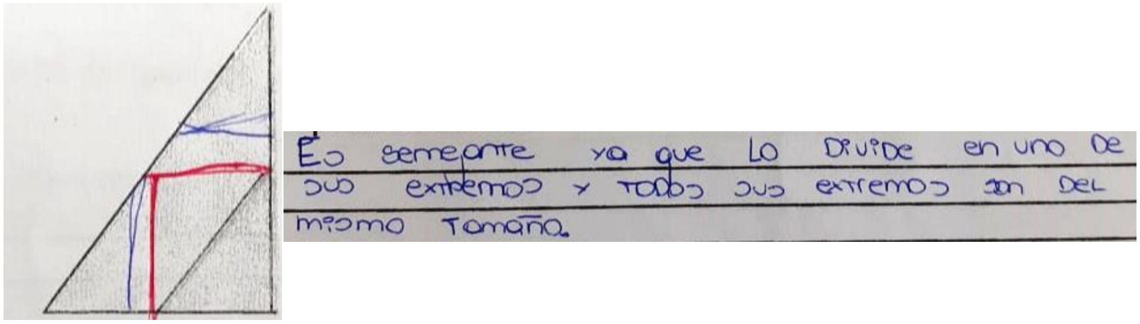


Ilustración 30. Respuesta de estudiante E9 problema 1b del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test (Ilustración 31), observamos que su respuesta se mantiene en el nivel 1 de Van Hiele porque solo menciona una reducción de la figura (tabla de operacionalización).

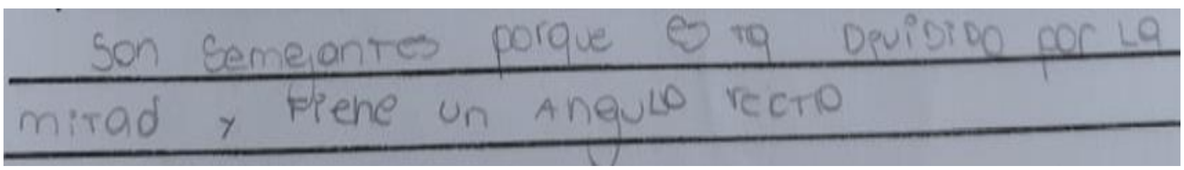


Ilustración 31. Respuesta de estudiante E9 problema 1b del post test.

En ambos casos, los estudiantes E_8 y E_9 mantienen el nivel 1 de Van Hiele, lo que podemos observar es lo acotado de sus respuestas con lápiz y papel, en relación con el objeto matemático de semejanza.

Caso 3: Suben un nivel de Van Hiele.

Analicemos el caso del estudiante E_{20}, en su respuesta del pre test (Ilustración 32) indica una relación entre los ángulos interiores y los lados de los triángulos lo que lo ubica en el nivel 2 de Van Hiele (tabla de operacionalización). No utiliza correctamente el concepto de ángulos congruentes como señala la configuración epistémica.

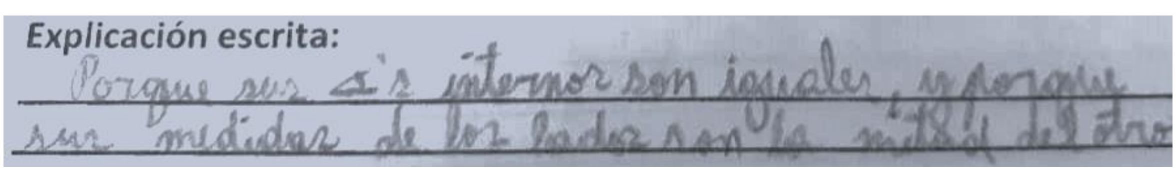


Ilustración 32. Respuesta de estudiante E20 problema 1b del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test (Ilustración 33), observamos que su respuesta sube al nivel 3 de Van Hiele porque establece relaciones entre los ángulos de los triángulos y utiliza un criterio de semejanza (tabla de operacionalización). Basado en la postura de Rösken y Rolka (2006) respecto a la visualización como el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre imágenes, el estudiante utiliza la figura para comparar 2 triángulos y desarrollar una demostración informal de semejanza.

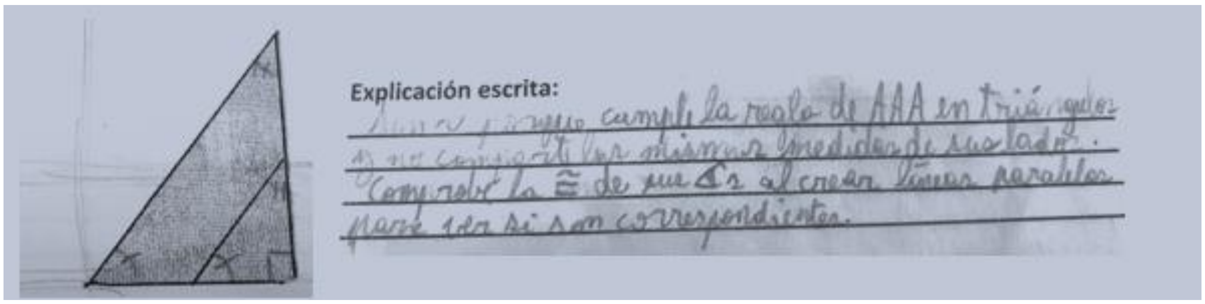


Ilustración 33. Respuesta de estudiante E20 problema 1b del post test.

4.3.3 Análisis del ítem 2.

La siguiente tabla 6 presenta una tabla de contingencia para mostrar la categoría de los estudiantes por nivel de razonamiento geométrico en el problema 2a del ítem 2:

Tabla 6.Tabla de contingencia problema 2a

PRE TEST

POST TEST

	N-1	N0	N1	Total
N-1		E_1, E_{17}, E_{19} (3)		3
N0	E_3, E_4, E_9, E_{10}, E_{14}, E_{15}, E_{18}, E_{21}, E_{27}, E_{28}, E_{29} (11)	E_5, E_6, E_{16}, E_{20}, E_{22}, E_{24}, E_{26} (7)		18
N2	E_{11}, E_{23}, E_{25} (3)	E_7, E_8, E_{12}, E_{13}, E_{30} (5)	E_2 (1)	9
Total	14	15	1	30

Fuente: Creación propia.

Este problema corresponde al ítem 2, cuyo objetivo es que establecen semejanza entre 2 o más polígonos.

Como puede observarse en la Tabla 6, en este ítem 1, la mayoría de los estudiantes se encuentran entre los niveles -1 y nivel 0 de Van Hiele en el pre test y luego de aplicada la propuesta didáctica se observó una gran movilidad de estos estudiantes en el post test, siendo

11 estudiantes que pasaron del nivel -1 y se concentraron en los niveles 0 y 2. También, mencionar que 9 estudiantes alcanzan en el post test el nivel 2 de Van Hiele. Lo último, conviene comentar porque los estudiantes en el nivel 2 utilizan propiedades de ángulos y proporción de los lados.

A continuación, se presenta el análisis de algunos casos específicos.

Primero revisemos la instrucción del problema 2a del ítem 2: Describa un procedimiento para que a partir del punto P se pueda construir un triángulo semejante al triángulo T (Puede utilizar un instrumento geométrico como apoyo) (Ilustración 34).

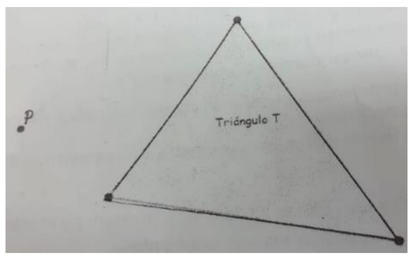


Ilustración 34. Problema 2a pre test

Las posibles respuestas que se esperaban en esta tarea las explico a continuación: una primera respuesta es que el estudiante una los vértices del triángulo T con el punto P y enseguida trace semirrectas y construya una homotecia directa con factor mayor a 1 (doble de la figura), explicando que así se obtendrán 2 triángulos semejantes. Una segunda respuesta, similar a la primera solo que se trataría de una homotecia inversa (cambia el sentido). Una tercera respuesta, sería construir una homotecia de razón entre 0 y 1 (mitad de la figura). Sobre la construcción se espera que los estudiantes, dibujen una reducción o ampliación de la figura en un sentido u otro.

Estudiemos los siguientes casos:

Caso 1: Bajan su nivel de Van Hiele.

Analizaremos el caso del estudiante E_1 el cual muestra una baja del nivel 0 al nivel -1. En su respuesta del pre test (Ilustración 35) reconoce la forma de 2 figuras y da una procedimiento para construir otro triángulo lo que la ubica en el nivel 0 de Van Hiele (tabla de operacionalización).

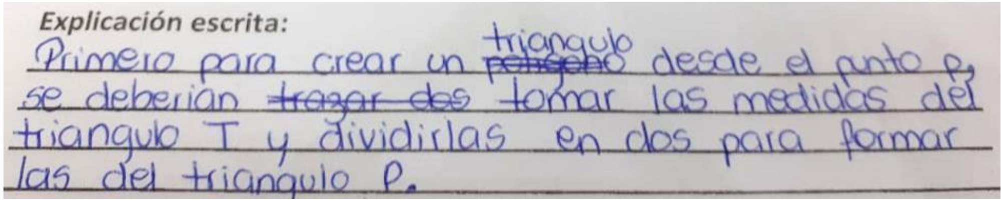

Explicación escrita:
Primero para crear un ~~polígono~~ triangulo desde el punto P, se deberian ~~trazar dos~~ tomar las medidas del triangulo T y dividirlas en dos para formar las del triangulo P.

Ilustración 35. Respuesta de estudiante E1 problema 2a del pre test.

Referente a la respuesta del estudiante E_1 en el mismo problema en el post test se ubica en el nivel -1, dado que deja en blanco y no responde la pregunta.

Caso 2: Mantienen el nivel de Van Hiele.

Analizaremos los casos de los estudiantes E_{24} y E_{26} los cuáles mantienen el nivel 0 de Van Hiele en ambos instrumentos pre y post test.

Primero, analicemos el caso del estudiante E_{24}, en su respuesta del pre test (Ilustración 36) explica un procedimiento para construir dos triángulos a partir de la traslación utilizando elementos de octavo básico, lo que lo ubica en el nivel 0 de Van Hiele (tabla de operacionalización). Se puede deducir que indica la construcción de 2 triángulos congruentes (configuración epistémica).

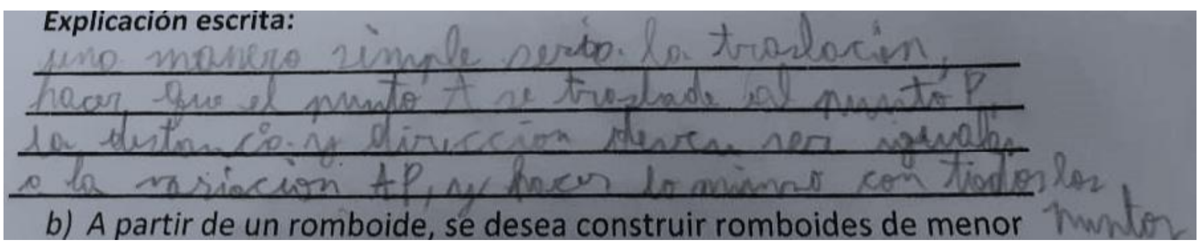

Explicación escrita:
una manera simple sería la traslación, hacer que el punto A se traslade al punto P, la distancia y dirección deberá ser igual a la traslación AP, y hacer lo mismo con todos los puntos
b) A partir de un romboide, se desea construir romboides de menor

Ilustración 36. Respuesta de estudiante E24 problema 2a del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test (Ilustración 37), observamos que su respuesta se mantiene en el nivel 0, si bien explica cómo construir otro triángulo no relaciona con alguna propiedad (tabla de operacionalización). La explicación aplica al concepto de homotecia en forma intuitiva.

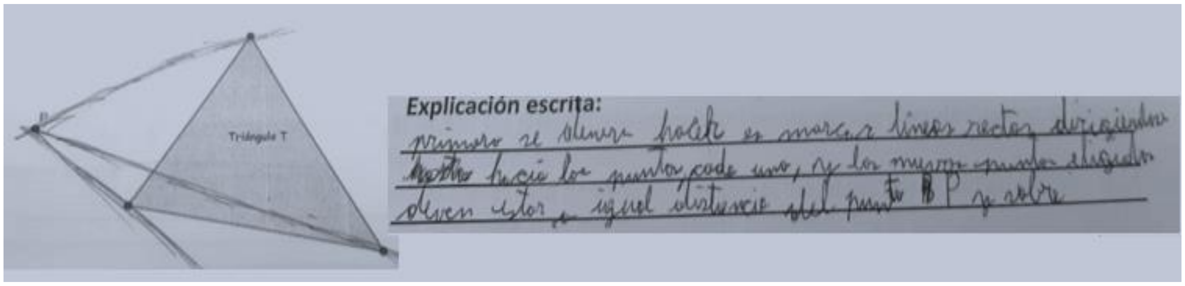


Ilustración 37. Respuesta de estudiante E24 problema 2a del post test.

Segundo, analicemos el caso del estudiante E_{26}, en su respuesta del pre test (Ilustración 38) indica un procedimiento para dibujar otro triángulo, lo que lo ubica en el nivel 0 de Van Hiele. Si bien, no desarrolla una construcción completa moviliza elementos como segmentos de recta.

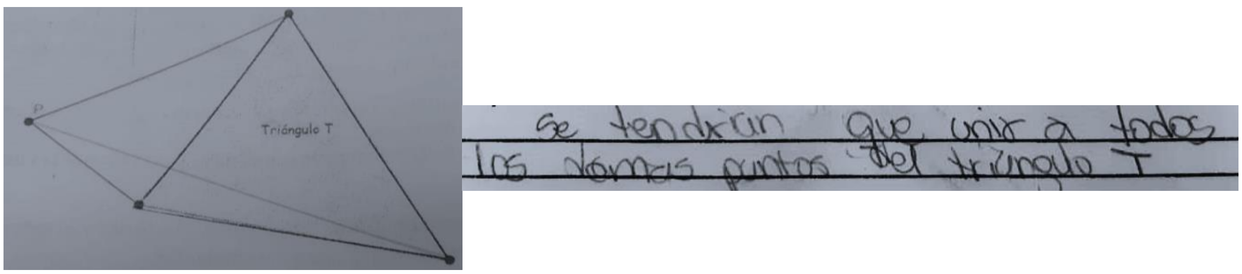


Ilustración 38. Respuesta de estudiante E26 problema 2a del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test (Ilustración 39), observamos que su respuesta se mantiene en el nivel 0 de Van Hiele dado que indica un procedimiento para construir 2 triángulos semejantes, por homotecia inversa (configuración epistémica). No establece diferencias entre triángulos congruentes y semejantes.

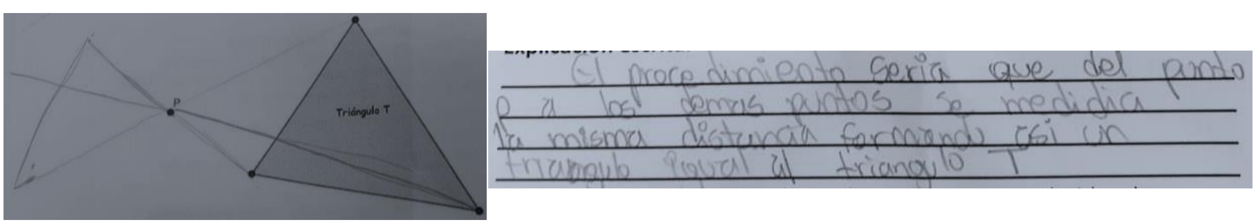


Ilustración 39. Respuesta de estudiante E26 problema 2a del post test

En ambos casos, los estudiantes E_{24} y E_{26} si bien se mantienen en el nivel 0 de Van Hiele, representan elementos en su mente y lo movilizan entre registros de representación como señalan Kadunz y Yerushalmy (2015).

Caso 3: Suben un nivel de Van Hiele.

Analicemos el caso del estudiante E_2, en su respuesta del pre test (Ilustración 40) indica un procedimiento para reducir el triángulo original, lo que lo ubica en el nivel 1 de Van Hiele (configuración epistémica).

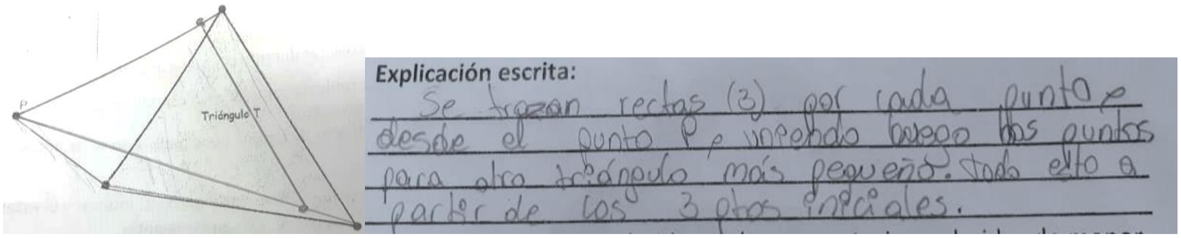


Ilustración 40. Respuesta de estudiante E2 problema 2a del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test del estudiante E_2 (Ilustración 41), observamos que su respuesta sube al nivel 2 de Van Hiele porque indica que puede utilizar una homotecia para construir 2 triángulos semejantes.

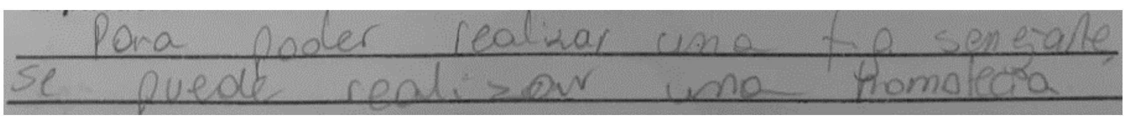


Ilustración 41. Respuesta de estudiante E2 problema 2a del post test.

4.3.4 Análisis del ítem 2

La siguiente tabla 7, presenta una tabla de contingencia para mostrar la categoría de los estudiantes por nivel de razonamiento geométrico en el problema 2b del ítem 2:

Tabla 7. Tabla de contingencia problema 2b

PRE TEST

POST TEST

	N-1	N0	N1	N2	N4	Total
N-1	E_{13} (1)	E_{17}, E_{19} (2)				3
N0	E_1, E_3, E_4, E_7, E_9, E_{11}, E_{14}, E_{15}, E_{16}, E_{18}, E_{21}, E_{24}, E_{26}, E_{28}, E_{29} (15)	E_5, E_6, E_{10}, E_{22} (4)		E_{27} (1)		20
N1		E_{25} (1)				1
N2	E_{23} (1)	E_8, E_{30} (2)		E_{12} (1)	E_2 (1)	5
N3			E_{20} (1)			1
Total	17	9	1	2	1	30

Fuente: Creación propia.

Este problema corresponde al ítem 2, cuyo objetivo se indicó anteriormente.

Como puede observarse en la Tabla 7, en este ítem 2, la mayoría de los estudiantes se encuentran entre los niveles -1 de Van hiele en el pre test y luego de aplicada la propuesta didáctica se observó una gran movilidad de estos estudiantes en el post test, ubicando varios de ellos en el nivel 0. También, hay que mencionar que solo 7 estudiantes alcanzan niveles de orden 1, 2 y 3 respectivamente esto debido a la complejidad del problema.

A continuación, se presenta el análisis de algunos casos específicos.

Primero revisemos la instrucción del problema 2b del ítem 2: A partir de un romboide, se desea construir romboides de menor tamaño, pero semejantes. Describa un proceso para construir 2 romboides semejantes a la inicial, que tengan un vértice en el punto A (Ilustración 42).

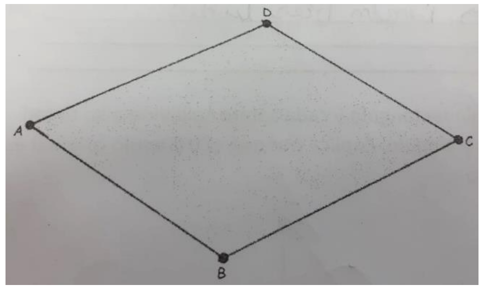


Ilustración 42. Problema 2b pre test

Las posibles respuestas que se esperaban en esta tarea las explico a continuación: una primera respuesta es que el estudiante apoyado en los lados del romboide dibuje en un sentido y el otro una homotecia con centro el punto A y factor 1/3 y otro 2/3. Una segunda respuesta, similar a la primera solo que se trataría de una homotecia inversa (cambia el sentido) se prolongan los lados AB y AD. Sobre la construcción se espera que los estudiantes, dibujen una reducción de la figura en un sentido u otro.
Estudiemos los siguientes casos:

Caso 1: Bajan su nivel de Van Hiele.

Analizaremos el caso del estudiante E_2 el cual muestra una baja del nivel 4 al nivel 2 de Van Hiele. En su respuesta del pre test (Ilustración 43) plantea el disminuir el tamaño de la figura inicial y evoca propiedades de paralelismo del rombo, lo que la ubica en el nivel 4 de Van Hiele (tabla de operacionalización).

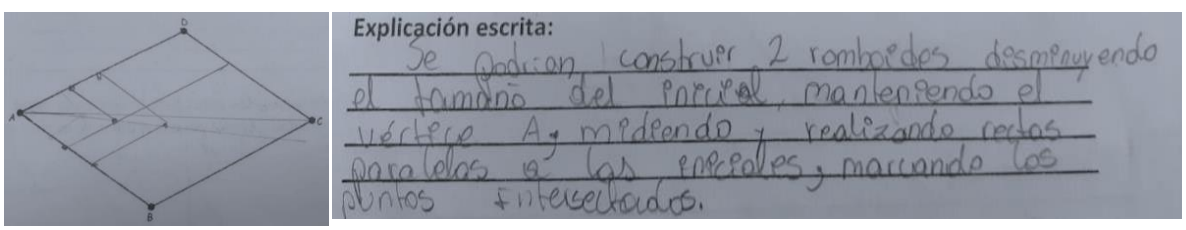


Ilustración 43. Respuesta de estudiante E2 problema 2b del pre test.

Referente a la respuesta (Ilustración 44) en el post test se ubica en el nivel 2 puesto que plantea que se reduce la figura inicial y se basa en la homotecia (tabla de operacionalización), pero no indica la razón entre los lados y el tipo de homotecia utilizado (configuración epistémica).

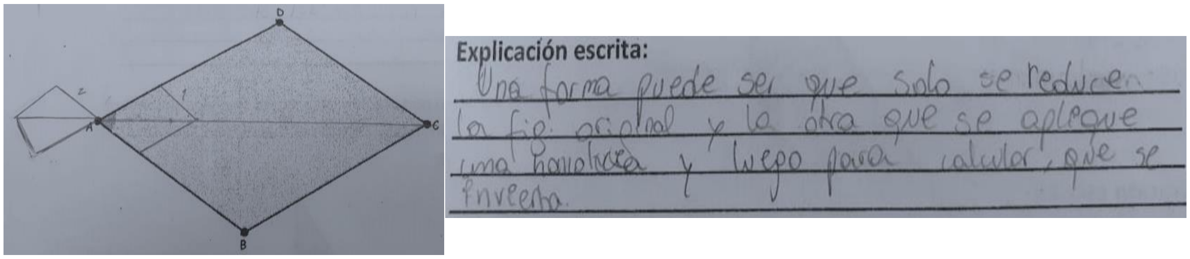


Ilustración 44. Respuesta de estudiante E2 problema 2b del post test.

Caso 2: Mantienen el nivel de Van Hiele.

Analicemos el caso del estudiante E_{12}, su respuesta (Ilustración 45) se mantiene en el nivel 2 de Van Hiele, por plantear la rotación de la figura (contenido de octavo básico), división de segmentos y alude a propiedades de ángulos interiores de la figura original (tabla de operacionalización).

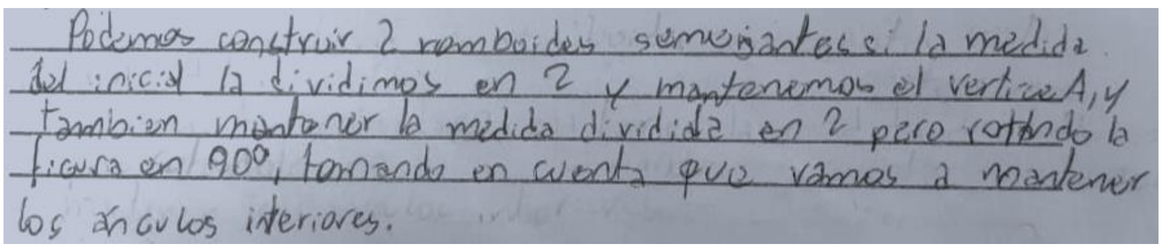


Ilustración 45. Respuesta de estudiante E12 problema 2b del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test (Ilustración 46), observamos que su respuesta se mantiene en el nivel 2 de Van Hiele porque se basa en la proporción de los lados (tabla de operacionalización).

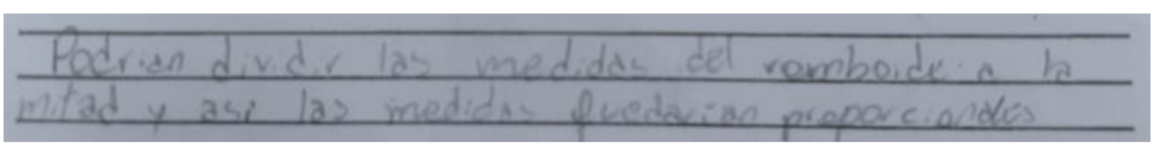


Ilustración 46. Respuesta de estudiante E24 problema 2b del post test.

Caso 3: Suben un nivel de Van Hiele.

Analicemos el caso del estudiante E_{20}, en su respuesta del pre test (Ilustración 47) se basa en reducir los lados a partir de segmentos paralelos, lo que lo ubica en el nivel 1 de Van Hiele (tabla de operacionalización). Apoyado en Arcavi (2003) el estudiante a través de la visualización ofrece un método de ver lo invisible al prolongar los lados del romboide original y marcar los ángulos opuestos por el vértice.

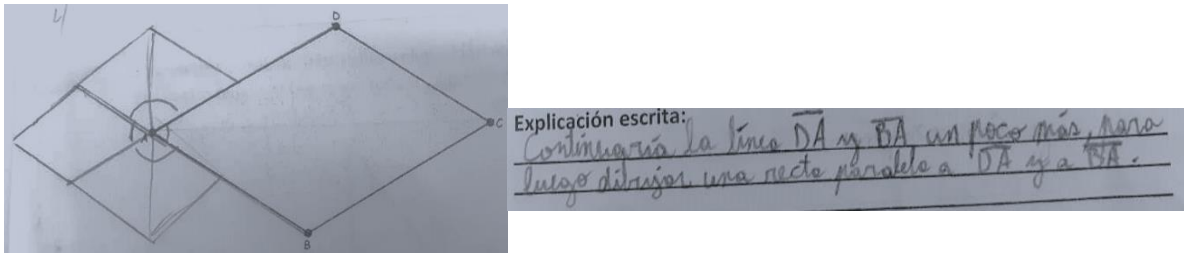


Ilustración 47. Respuesta de estudiante E20 problema 2b del pre test.

Contrastando la respuesta del pre test con el post test (Ilustración 48), observamos que su respuesta sube al nivel 3 de Van Hiele, ya que el estudiante utiliza relaciones entre lados paralelos y ángulos congruentes (tabla de operacionalización). Basados en Rösken y Rolka (2006) la visualización como proceso y producto de la creación a partir de imágenes es lo que señala en su respuesta el estudiante.

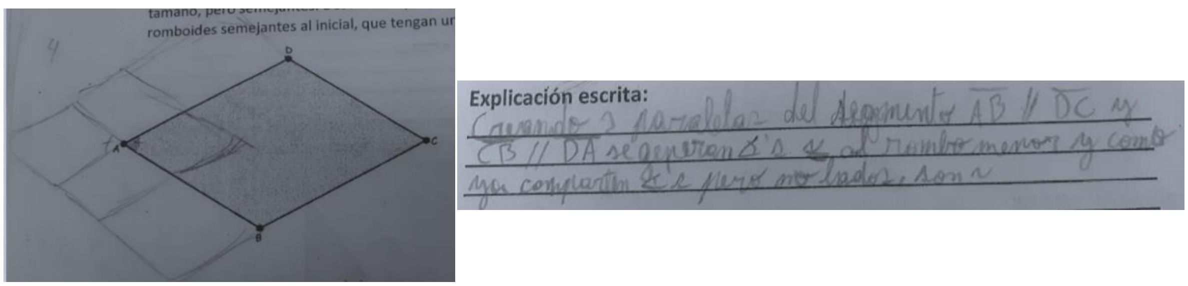


Ilustración 48. Respuesta de estudiante E20 problema 2b del post test.

Podemos resumir que los problemas revisados anteriormente en los distintos casos dan cuenta que el tránsito entre los distintos niveles de Van Hiele no es lineal y progresivo, esto considerando que hay estudiantes que bajan de nivel y no logran avanzar respecto a sus pares.

4.4 Análisis de Entrevistas

La entrevista fue realizada al final de la intervención didáctica en horario de clases, fue una entrevista grabada la cuál después se transcribió a una tabla.

Los estudiantes entrevistados fueron elegidos por ciertas características comunes que presentaban en el análisis de las respuestas a los distintos problemas. Estos estudiantes presentan respuestas muy acotadas y en algunos casos, aparece una Ilustración de apoyo.

4.4.1 Caso estudiante con nivel -1

El entrevistado corresponde al estudiante E_{25} y se analiza el problema 2a (anexo). Revisaremos primero lo que respondió en el problema 2a (Ilustración 49), este no entregaría antecedentes suficientes para alcanzar el nivel 0 (tabla de operacionalización). Basados en su respuesta, se procede a entrevistar a este estudiante para reunir nuevos antecedentes.

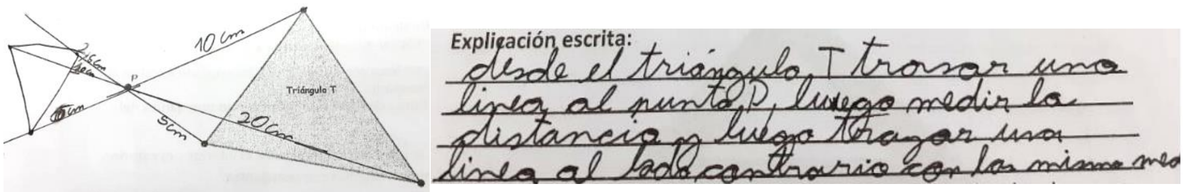


Ilustración 49. Respuesta del estudiante E25 problema 2a post test

Revisaremos el problema 2a, el estudiante respondió:

Entrevistador: *Con respecto a la pregunta 2, dice establecen semejanza entre 2 o más polígonos semejantes. 2a, describa un procedimiento para que a partir del punto P se pueda construir un triángulo semejante al triángulo T.*

Estudiante E_{25}: *Primero medí de un punto P a una esquina del triángulo T. Eso me dio 10, después trace a la siguiente la mitad 5 cm. (Ver Ilustración 49) De ahí, hice lo mismo con los otros*.

Entrevistador: *Es decir, por cada punto del triángulo prolongaste los lados y mediste* la mitad.

Estudiante E_{25}: *Eso hice.*

Entrevistador: *Con lo anterior, ¿aseguras que los dos triángulos son semejantes?*

Estudiante E_{25}: *Sí, porque son los mismos triángulos invertidos.*

Entrevistador: *Algo más que agregar.*

Estudiante E_{25}: *La medida de los lados se divide a la mitad y son semejantes por lado, lado, lado.*

Entrevistador: *Lo que nombraste a ¿qué corresponde?*

Estudiante E_{25}: *Una propiedad de semejanza.*

Ilustración 50. Entrevista estudiante E25 problema 2a post test

Como se puede observar, en la entrevista el estudiante utiliza un lenguaje informal. A medida que se consultan más detalles se reporta el uso de conceptos relacionados con semejanza que no aparecían en su respuesta y que hacen referencia a la configuración epistémica. Falta reportar más información acerca de las relaciones entre los lados y ángulos y condiciones mínimas para la semejanza de 2 triángulos. Una vez realizados los análisis, el estudiante se ubicaría en el nivel 1 (tabla de operacionalización).

4.4.2 Caso estudiante que mantiene el nivel 0

El entrevistado corresponde al estudiante E_{23} y se analiza el problema 1b (anexo). Revisaremos primero lo que respondió en el problema 1b (Ilustración 51), los antecedentes entregados solo entregan una relación entre triángulos basada en un ángulo recto lo que la ubicaría en el nivel 0. Basados en su respuesta, se procede a entrevistar a este estudiante para reunir nuevos antecedentes.

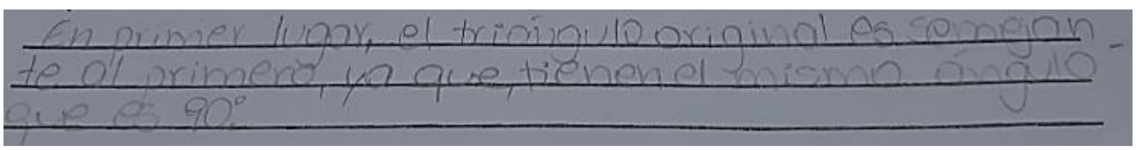

En primer lugar, el triangulo original es semejan-
te al primero, ya que, tienen el mismo angulo
que es 90°

Ilustración 51. Respuesta estudiante E23 problema 1b del post test.

Revisaremos el problema 1b, el estudiante respondió:

Entrevistador: *1b, se dibujó un triángulo rectángulo y cada cateto se divide a su mitad formando un nuevo triángulo. Explica por qué el triángulo original es semejante al primero.*

Estudiante E_{23}: *Bueno, el triángulo original es semejante al primero porque tienen el mismo ángulo y el punto de homotecia en el ángulo recto.*

Entrevistador: *No entiendo bien la idea.*

Estudiante E_{23}: *El centro de homotecia es donde está el ángulo recto.*

Entrevistador: *Entonces, que pasaría con los 2 triángulos.*

Estudiante E_{23}: *Podríamos obtener una constante, ¿una constante era?*

Entrevistador: *Una constante de proporción, ¿pero cuánto sería?*

Estudiante E_{23}: *De valor 2.*

Entrevistador: *¿Por qué?*

Estudiante E_{23}: *Porque se multiplica la medida de cada lado por 2 y se hace más grande.*

Entrevistador: *¿Algo más que agregar acerca de la semejanza?*

Estudiante E_{23}: *Son semejantes por lado, ángulo y lado.*

Ilustración 52. Entrevista estudiante E23 problema 2a post test

Como se puede observar, el estudiante utiliza un lenguaje matemático formal. Como se va desarrollando la entrevista aparece el concepto de homotecia y sus elementos asociados y que hacen referencia a la configuración epistémica. Falta reportar que para que dos triángulos sean semejantes se utiliza el criterio lado, ángulo, lado en función de las medidas de sus lados y el ángulo recto en común. Una vez realizados los análisis, el estudiante se ubicaría en el nivel 2 (tabla de operacionalización).

4.4.3 Caso estudiante que alcanza un nivel 3

El entrevistado corresponde al estudiante E_{20}, se analiza el problema 1a (anexo). Revisaremos primero lo que respondió en el problema 1a (Ilustración 53) los antecedentes entregados dan cuenta que aplica criterio de semejanza ángulo, ángulo, ángulo y explica a partir del uso de paralelas que dos triángulos son semejantes lo que lo ubica en el nivel 3. Basados en su respuesta, se procede a entrevistar a este estudiante para reunir nuevos antecedentes.

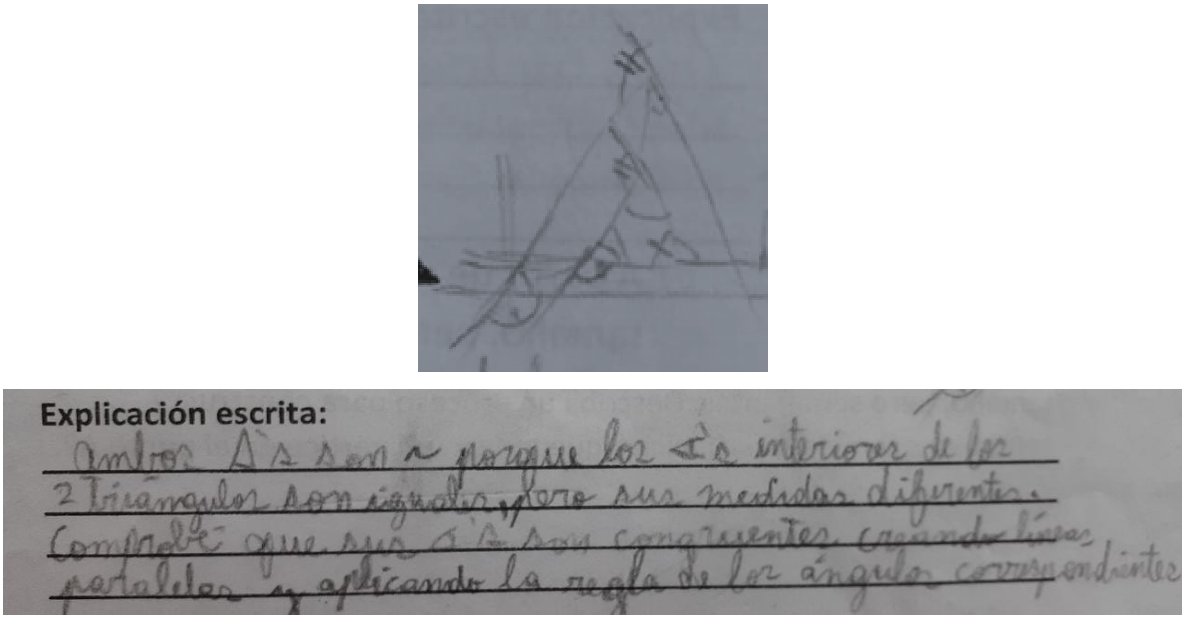


Ilustración 53. Respuesta estudiante E20 problema 1a post test

Revisaremos el problema 1a, el estudiante respondió:

Entrevistador: *Con respecto a la pregunta 1, dice identifica atributos semejantes y no semejantes del mundo real. En el ejercicio 1 a) en una escuadra se identifican 2 triángulos uno interior y otro exterior. Indica porque ambos son semejantes. (Ilustración 1)*

Estudiante E_{20}: *Bueno, en este ejercicio lo que yo hice fue trazar paralelas en las esquinas de cada triángulo para comprobar si los ángulos son correspondientes y así ver si son iguales. Entonces al extender la línea que sería de parte de la escuadra me dio que si eran correspondientes. Por lo tanto, cada ángulo con el consecuente de afuera con el exterior eran igual con el de adentro, entonces esto iba a ser que sean iguales cada uno con el tercero.*

Entrevistador: *Pero, te refieres igual en que cosa, ¿en relación a qué?, ¿En relación a sus lados o sus ángulos?*

Estudiante E_{20}: *Explico, uno tiene un triángulo y el mini triángulo de adentro.*

Entrevistador: *¿Qué ocurre entonces?*

Estudiante E_{20}: *Se hace como si fueras a calcular los ángulos exteriores, (señala al dibujo) se traza una línea en cada lado del triángulo y con eso puedes crear una paralela para que te sirva como guía con respecto para ver a donde están los ángulos.*

Entrevistador: *Explica un poco más esa idea.*

Estudiante E_{20}: *Con esa paralela que tú creas va a poder ver los ángulos que tienes adentro. Por ejemplo, cree una paralela y pude ver (señala los ángulos, ver flechas) que son iguales por el tema que son correspondientes.*

Entrevistador: *Entonces, ¿son o no semejantes? y ¿por qué?*

Estudiante E_{20}: *Si son semejantes, porque comparten ángulo, ángulo, ángulo.*

Entrevistador: *Y eso, ¿a qué corresponde?*

Estudiante E_{20}: *A una propiedad de semejanza.*

Ilustración 544. Respuesta estudiante E20 problema 1a post test

Como se puede observar, el estudiante utiliza un lenguaje formal. Como se va desarrollando la entrevista el estudiante desarrolla la demostración de que 2 triángulos son semejantes utilizando elementos adicionales como rectas paralelas. A diferencia de la respuesta escrita, el estudiante moviliza los conocimientos en relación a los ángulos de ambos triángulos. Una vez realizados los análisis, el estudiante mantiene el nivel 3, dado que debiera especificar que lados son proporcionales y que ángulos son congruentes entre sí (tabla de operacionalización).

A continuación, se analiza la respuesta del mismo estudiante en el problema 1b (anexo). Revisaremos primero lo que respondió en el problema 1b (Ilustración 55), lo que da cuenta que aplica criterio de semejanza ángulo, ángulo, ángulo para indicar que dos triángulos son semejantes lo que lo ubica en el nivel 3. No queda clara la construcción que señala de paralelas. Basados en su respuesta, se procede a entrevistar a este estudiante para reunir nuevos antecedentes.

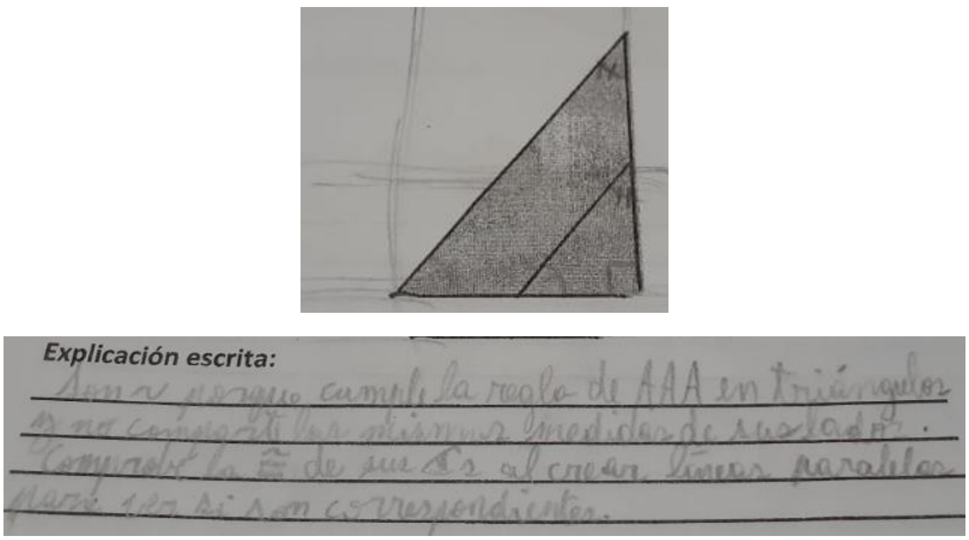


Ilustración 55. Respuesta estudiante E20 problema 1b post test

Revisaremos el problema 1b, el estudiante respondió:

Entrevistador: *1b, se dibuja un triángulo rectángulo y cada cateto se divide a su mitad formando un nuevo triángulo. Explica por qué el triángulo original es semejante al primero.*

Estudiante E_{20}: *(Señala la figura), acá forme un rectángulo porque el rectángulo como tiene ángulos rectos va a ser paralelo y va a tener lados paralelos.*

Entrevistador: *Pero, ¿qué esperas obtener con eso?*

Estudiante E_{20}: *Las paralelas son muy útil en este caso de semejanza porque te sirven para ver el tema de los ángulos. Acá (se refiere a la figura) comparten ángulos, entonces tiene uno de sus 3 ángulos iguales.*

Entrevistador: *Por lo que señalas, ¿comparten un ángulo recto?*

Estudiante E_{20}: *No dice que es recto. Oh dice que es recto porque es triángulo rectángulo. Este ángulo recto lo comparten los dos triángulos.*

Entrevistador: *Explica, entonces porque son semejantes.*

Estudiante E_{20}: *Apoyado en la paralela (ver flechas) muevo el triángulo a la izquierda y listo quedan iguales.*

Entrevistador: *Es decir, ¿trasladando?*

Estudiante E_{20}: *Trasladando los ángulos, se puede comprobar que son iguales por el tema de paralelas.*

Entrevistador: *Con lo anterior, ¿comprobarías que son semejantes?*

Estudiante E_{20}: *Si.*

Entrevistador: *¿Por qué?*

Estudiante E_{20}: *Me acordé, por el criterio ángulo, ángulo, ángulo.*

Ilustración 56. Entrevista estudiante E20 problema 1b Pre test

Como se puede observar, el estudiante utiliza un lenguaje formal. Como se va desarrollando la entrevista el estudiante realiza una demostración de semejanza de triángulos utilizando rectas paralelas y traslación de figuras planas (contenido de octavo básico). A diferencia de la respuesta escrita, el estudiante moviliza los conocimientos en relación a los ángulos de dos triángulos rectángulos. Una vez realizados los análisis, el estudiante mantiene el nivel 3, dado que debiera especificar que ángulos son congruentes entre sí (tabla de operacionalización).

CONCLUSIONES

Esta investigación da cuenta de los niveles de razonamiento viso espacial de un grupo de estudiantes enfrentados a distintas tareas relacionadas con el objeto semejanza de figuras planas en la problemática en Chile referente al bajo nivel de logro que presentan en el área de Geometría en las pruebas tanto nacionales como internacionales.

Esta investigación está situado en un fenómeno didáctico que es la visualización espacial y para ello se presentó una intervención didáctica de 5 sesiones de trabajo en clases para estudiarlo. Este nivel de visualización se decidió evaluar, en un grupo de estudiantes considerando sus respuestas en un pre test y un post test.

Sobre la intervención didáctica, podemos señalar que su intención era presentar tareas de visualización que permitieran movilizar habilidades en el objeto de semejanza de figuras planas.

En seguida se da respuesta a los objetivos planteados en el capítulo x:

Referente al objetivo específico 1, que era conocer el nivel de razonamiento visual de los estudiantes antes y después de la aplicación de una intervención didáctica de semejanza lo podemos hacer a partir de la revisión de los resultados en la tabla 8. Los cuáles dan cuenta sobre los niveles que transita cada estudiante en el pre test.

Tabla 8. Tabla de contingencia pre test de 30 estudiantes

Niveles

Ítems

Pre test	N-1	N0	N1	N2	N3	N4
1a	3	19	3	5	0	0
1b	1	20	5	4	0	0
2a	14	15	1	0	0	0
2b	17	9	1	2	0	1

Fuente: Elaboración propia.

Al analizar los datos, podemos ver que los estudiantes se concentraron en el nivel 0 lo que corresponde a la mitad del grupo y se movilizaron cerca de 10 estudiantes de 30. Mencionar que en el nivel 0 los estudiantes reconocen la forma de la figura, identifican los ángulos interiores y medidas de sus lados, pero no las relacionan con alguna propiedad. Es relevante el gran número de estudiantes que se concentran en el nivel -1, en este nivel ellos no daban respuesta a lo que se les preguntaba o no contestaban.

Referente a los resultados de los estudiantes en el post test, estos se concentran en la tabla 9:

Tabla 9. Tabla de contingencia post test de 30 estudiantes

Niveles

Ítems

Post test	N-1	N0	N1	N2	N3	N4
1a	4	15	1	8	2	0
1b	4	13	5	6	1	1
2a	3	18	0	9	0	0
2b	3	20	1	5	1	0

Fuente: Elaboración propia.

Podemos indicar que, una vez aplicado el diseño didáctico, los estudiantes en el post test tuvieron un 57% los que los deja en el nivel 0, también agregar que un número importante de ellos se movilizó entre los niveles 1 al nivel 4. Comparando ambas tablas podemos ver que hubo estudiantes que avanzaron de nivel, que es lo que postula Van Hiele, pero hubo estudiantes que retrocedieron.

Podemos ver en el post test que una gran cantidad de estudiantes se movilizó al nivel 0 y que aproximadamente un 23% se encuentra en el nivel 2, este nivel señala que el estudiante reconoce propiedades de ángulos, lados proporcionales, criterios de semejanza y/o homotecia. Analizando ambas tablas, también podemos mencionar que hay estudiantes que bajaron de nivel, por lo que podemos señalar que el aprendizaje no siempre es lineal y ascendente como postula Van Hiele. Por lo tanto, uno de los resultados importantes de esta investigación es que no siempre se da un avance lineal y ascendente, lo anterior permite que esta investigación de luces para contribuir en las futuras investigaciones en el diseño de una secuencia didáctica para estar atento a estas situaciones y proponer una batería de tareas y retos que movilicen a los estudiantes a un nivel superior.

Referente al objetivo específico 2, que era clasificar el nivel de razonamiento visual de los estudiantes antes y después de la aplicación de una intervención didáctica de semejanza, se estudiaron 3 casos: el estudiante que bajó de nivel, el estudiante que mantiene el nivel y el estudiante que sube de nivel comparando los resultados del pre y pos test. En base a los resultados obtenidos y analizados en el capítulo anterior, en el primer caso un estudiante que bajó de nivel puede deberse a que le gustan ciertas actividades de construcción, pero no moviliza sus conocimientos para retos mayores y por ello, no puede lograr el desarrollo de la tarea. En el segundo caso, hay estudiantes que se mantienen en el mismo nivel, porque repiten conceptos y/o propiedades y no son capaces de aplicarlas y avanzar a un nivel mayor de Van Hiele. En tercer lugar, hay estudiantes que son capaces de asumir nuevos retos, utilizar sin instrucción de un profesor propiedades al servicio de nuevos retos o desafíos que se les propongan. En general, se ve una mejora en el tipo de respuestas y utilizan figuras geométricas para encontrar respuestas a los problemas (Razonamiento viso espacial). Por lo anterior, podemos concluir en base a estos resultados que el razonamiento visual no es lineal y progresivo.

Referente al objetivo específico 3, que era identificar bajo un estudio de casos las limitaciones de la implementación del modelo de Van Hiele. Consideramos que los niveles de Van Hiele están en función del razonamiento del estudiante, lo cual es difícil de analizar dado por una parte por la gran cantidad de estudiantes y la doble función de investigador/profesor. Por otra parte, porque el profesor difícilmente va a explorar si ésta se desarrolla a tiempo para intervenir y poder realizar acciones que permitan avanzar de nivel o mantenerlo.

Si recordamos el objetivo general era analizar el nivel de razonamiento visual de estudiantes en un pre y pos test cuando desarrollan una intervención didáctica sobre semejanza apoyadas en las fases de Van Hiele. No existió un cambio significativo entre el pre y post test explorados desde las respuestas escritas en la resolución de tareas de los estudiantes, en otras palabras los niveles de Van Hiele en general se mantuvieron. Sin embargo, en las entrevistas se alcanza a dilucidar un mayor nivel de razonamiento, pero el escaso manejo del lenguaje matemático nos impedía clasificar en otro nivel al estudiante, el cual en sus respuestas orales dejaba indicios de poseer después de la intervención.

Una limitación del modelo de Van Hiele, es el encasillamiento de los estudiantes en un nivel determinado, pudiendo considerar que estos no puedan avanzar a un nivel mayor del que tienen inicialmente. Sobre la investigación, podemos señalar que fue de carácter cualitativo, era una muestra muy pequeña y por lo mismo, no permite generalizar los resultados. Como se mencionó anteriormente, el doble rol como profesor e investigador no permitía estar atento a los distintos fenómenos que ocurren en clases y a través de los resultados del post test se observó el pobre vocabulario matemático que presentaba el grupo de estudio. Mencionar que en la intervención didáctica hubo problemas en cuánto a que varios alumnos no querían fotografías en grupo o videos que pudieran servir como evidencia y como parte de la ética del investigador se respetó ese acuerdo.

Una contribución en esta línea de investigación y apoyados en el modelo anterior, es incluir una batería de problemas que permitan retroalimentar los casos en que los estudiantes no alcancen un nivel mayor que sus pares y para las actividades grupales pueda haber disponible una grabadora para registrar las respuestas de los estudiantes y compartirlas con otros grupos y a través de la interacción se pueda retroalimentar las respuestas. Cabe destacar que las entrevistas realizadas a algunos estudiantes, fue una experiencia muy enriquecedora en cuánto al tiempo, la sintonía con los estudiantes y una mejora notable en la respuesta. Además, se sugiere que este trabajo debe ir acompañado de un par y un profesor para desarrollar un trabajo colaborativo.

Las futuras líneas de investigaciones y aportaciones de otros investigadores en el estudio basado en Van Hiele, es que se considere que el aprendizaje no es lineal y ascendente. Por lo que consideramos importante revisar el tránsito del razonamiento de los estudiantes, para descubrir nuevas actividades de exploración que permitan entregar más herramientas a los profesores en el aula.

BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R., Delgado, G., Puchulu, M. (2006). "Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática". Revista Iberoamericana de Educación [en línea], 39 (1). Recuperado el 14 de Mayo de 2016, dehttp://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Alonso, A. (2011). Desarrollo del pensamiento espacial y sistema geométrico en el aprendizaje de los sólidos regulares mediante el modelo de Van Hiele, con los estudiantes de 6 grado del colegio San José de la comunidad marista.

Álvarez, C. R. (2005). Mentefactos y niveles de razonamiento geométrico, según Van Hiele, en alumnas de licenciatura de Pedagogía Infantil. *Zona próxima*, (6), 82-93.

Aravena Díaz, M. & Caamaño Espinoza, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule: Talca, Chile. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16(2), 179-211.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *52*(3), 215-241.

Barrantes, M. (2002). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje (Tesis de Doctorado). Departamento de Didáctica de la Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Facultad de Educación. Universidad de Extremadura. España.

Barrera, B. D., & Centeno, M. (2006). Evaluación de Niveles de Razonamiento Geométrico en Estudiantes de la Licenciatura en Educación integral. *Divulgaciones Matemáticas*, *14*(2), 141-151.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. Learning and teaching geometry, K-12, 1-16.

Debrenti, E. (2016). Some Components of Geometric Knowledge of Future Elementary School Teachers. Acta Didactica Napocensia, 9(3), 11-20.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1986). Sobre la estética del pensamiento matemático. *Para el aprendizaje de las matemáticas, 6*, 1.

Errasti, B., Pérez, M., Carrasco, J.M., Lama, M. et al. (2014). Essential elements of the relationship between the nurse and the person with advanced and terminal cancer: a meta-ethnography. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1016/j. outlook.2014.12.001.

Fernández Blanco, M. T. (2011). Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro.

Galasso B. (2016), Texto del estudiante matemática 1 medio. Santiago Chile: Santillana.

Gamboa, R. y Ballesteros, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la Didáctica de la Geometría. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 4(5), 113- 136.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), pp. 127-135. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Graterol, E., & Andonegui, M. (2003). Incidencia de un software educativo en la evolución del razonamiento geométrico de estudiantes de educación superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *16*(1), 147-153.

Gualdrón, É., & Gutiérrez, Á. (2007). Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación matemática*, *16*(3), 103-125.

Guncaga, J., Tkacik, Š., & Žilková, K. (2017). Understanding of Selected Geometric Concepts by Pupils of Pre-Primary and Primary Level Education. European Journal of Contemporary Education, 6(3), 497-515.

Gur, H., & Kobak-Demir, M. (2017). Geometry Teaching via Origami: The Views of Secondary Mathematics Teacher Trainees. Journal of education and Practice, 8(15), 65-71.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. In Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría (pp. 44-59).

Gutiérrez, A., Pegg, J. y Lawrie, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. *Proceedings of the 28th International Conference for the P.M.E.* (vol. 2, pp. 511-518). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la Geometría: el modelo de Van Hiele. *Teoría y práctica en Educación Matemática. S. Llinares y MV Sánchez. Alfar. Utrera, Sevilla*.

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 9(2), 53-83.

Hernández, N. M. F., Wilches, J. C. P., & Robles, J. R. (2015). Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje. *Revista Panorama*, *9*(16), 44-54.

Hernández, V. y Villalba, M. (2001). Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. Recuperado de http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Kadunz, G., & Yerushalmy, M. (2015). Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics. In the Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 463-467). Springer, Cham.

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in School Children ed J Kilpatrick and IJ Wirszup (Chicago).

Livy, S., Downton, A., Reinhold, S., & Wöller, S. (2018). Insights into a Year 4 Student's Spatial Reasoning and Conceptual Knowledge of Rectangular Prisms. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Ministerio de educación (2015). Base curricular 7 ° básico a 2 ° medio. Recuperado de https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de educación (2016). Programa de estudio primero medio matemática. Recuperado de: https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-34359_programa.pdf

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 1(2), 47-66.

Rösken, B., & Rolka, K. (2006, July). A picture is worth a 1000 words–the role of visualization in mathematics learning. In Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 457-464).

Steen, L. A., Turner, R., & Burkhardt, H. (2007). Developing mathematical literacy. In Modelling and applications in mathematics education (pp. 285-294). Springer, Boston, MA.

Timss (2003). Chile y el aprendizaje de matemáticas y ciencias según Timss. Recuperado de https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/documentos-web/Estudios+Internacionales/TIMSS/Informe+Nacional+de+Resultados+TIMSS+2003.pdf

Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Uniciencia, 27(1), 74-94.

Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del Geogebra, según el modelo de Van Hiele. Uniciencia, 27(1), 95-118.

Wu, D. B., & Ma, H. L. (2005). A Study of the Geometric Concepts of Elementary School Students at van Hiele Level One. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 329-336.

ANEXOS

Anexo: Prueba de pre test.

Universidad de Los Lagos
Magíster en Educación Matemática

PRETEST TESIS

Estudiante: _________________________________ Sexo: _______________
Primero Medio: _____________________________
Colegio Inmaculada Concepción Puerto Varas.
Instrucciones:

- Realice todos los cálculos que necesite en cada situación.
- Haga una lectura comprensiva antes de contestar en cada situación.

Observación: Un instrumento geométrico puede ser un transportador, regla o compás que puede solicitar durante la prueba al profesor)

Para cada situación o problema conteste en el espacio asignado o realice el cálculo que considere necesario.
1) Identifica atributos físicos de figuras semejantes y no semejantes del mundo real.

a) En una escuadra se identifican 2 triángulos, el interior y el exterior. Indica porque ambos triángulos son semejantes.

Explicación escrita:

____
____
____
____

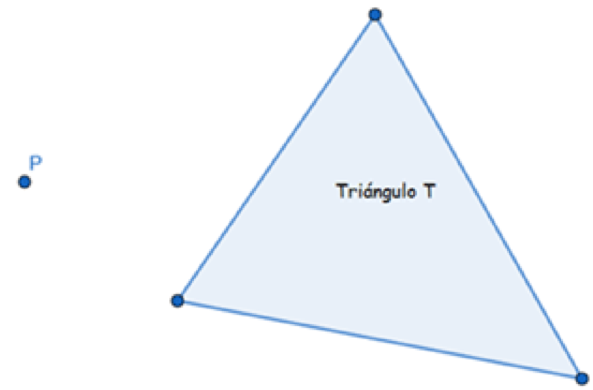
b) Se dibuja un triángulo rectángulo y cada cateto se divide a su mitad formando un nuevo triángulo. Explica por qué el triángulo original es semejante al primero.

Explicación escrita:

____
____
____
____

2) Establecen semejanza entre 2 o más polígonos semejantes.

a) Describa un procedimiento para que a partir del punto P se pueda construir un triángulo semejante al triángulo T. (Puede utilizar un instrumento geométrico como apoyo)



Explicación escrita:

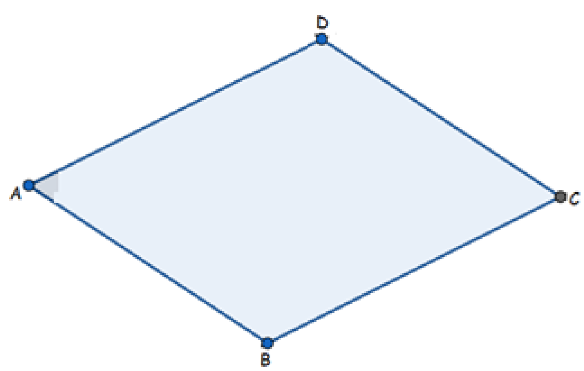
____

____

____

____

b) A partir de un romboide, se desea construir romboides de menor tamaño, pero semejantes. Describa un proceso para construir 2 romboides semejantes al inicial, que tengan un vértice en el punto A?.



Explicación escrita:

____

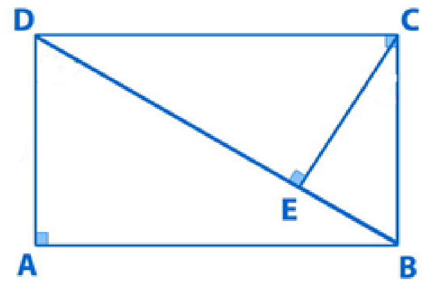
____

____

____

3) Demuestra de manera deductiva informal la semejanza de polígonos.

Sin usar instrumentos geométricos, verifica si los siguientes triángulos son semejantes entre sí. Explique el procedimiento que use.



Explicación escrita:

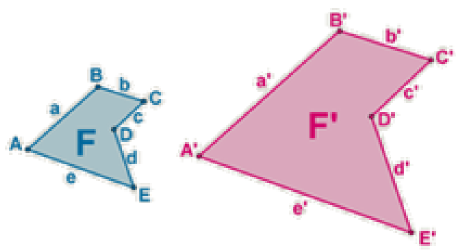
____

____

____

____

4) Utiliza los criterios de semejanza de triángulos para demostrar el criterio de semejanza de polígonos.
Si consideras que dos triángulos son semejantes por el criterio lado – lado – lado. Describe si es posible que los polígonos F y F´ son semejantes entre sí.



Explicación escrita:

____

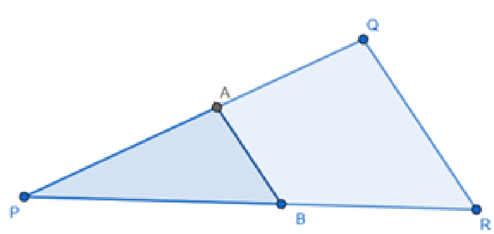
____

____

____

5) Identifica características visuales de figuras semejantes y establece relaciones.

En la siguiente figura AB // QR, ¿Qué relación existe entre los triángulos PBA y PRQ? ¿Congruentes o semejantes?. Explicar.



Explicación escrita:

____

____

____

____

____

____

____

6) Argumenta de manera empírica sus conclusiones y resultados.

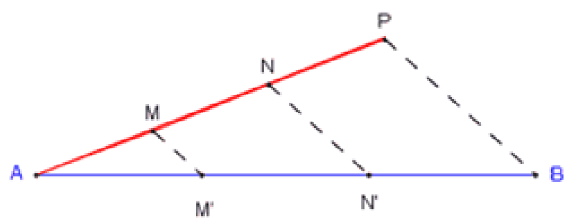
¿Qué o cuáles aspectos geométricos podrías destacar de la siguiente figura, relacionados con el concepto de semejanza?

Explicación escrita:

____
____
____
____
____
____
____

7) Descubre a partir de la experimentación, el teorema de Tales y lo demuestra de forma deductiva informal basándose en la semejanza de triángulos.

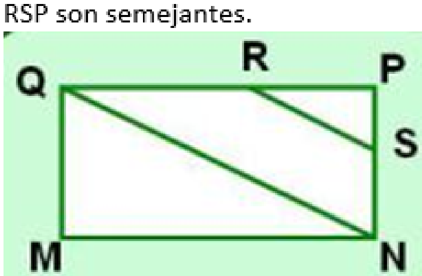
Considera el triángulo ABP, el cual está formado por 3 triángulos semejantes entre sí. Explique un procedimiento para establecer si los segmentos M´N´, N´B y MN, NP forman una proporción.



Explicación escrita:

____
____
____
____

8) Presenta, por escrito y oralmente, demostraciones de teoremas usando lenguaje formal.
Considera el rectángulo MNPQ, si RS//QN demostrar que los triángulos QNP y RSP son semejantes.

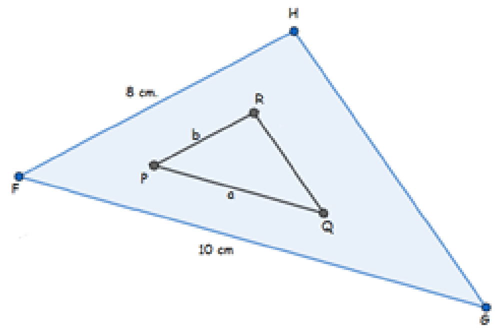


Explicación escrita:

____
____
____
____
____
____
____

9) Utiliza la semejanza para calcular longitudes proporcionales.

Las siguientes figuras son semejantes, en su opinión ¿qué valores podrían tomar las medidas de los lados a y b del triángulo interior?



Explicación escrita:

____

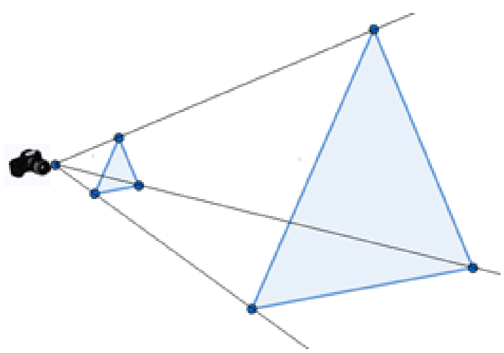
____

____

____

10) Demuestra experimentalmente y justifica, mencionando definiciones o propiedades, la semejanza de polígonos.

A partir del lente de una cámara, se logra proyectar la imagen de un triángulo. ¿Existe alguna relación entre las distancias del lente a cada uno de los vértices del triángulo inicial y del triángulo final?



Explicación escrita:

____

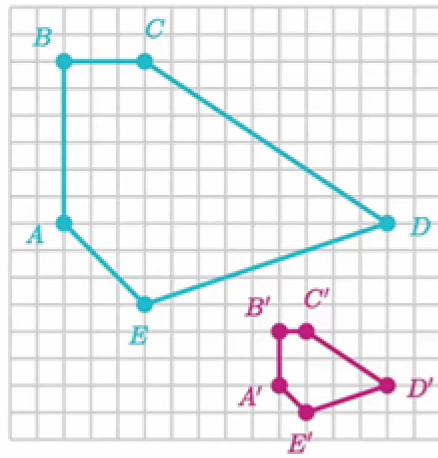
____

____

____

11) Resume las diferentes formas de construcción de figuras semejantes y explicita sus características y asocia las propiedades de semejanza de triángulos a la semejanza de polígonos.

Basado en la semejanza de triángulos, verifique que los siguientes polígonos son semejantes.

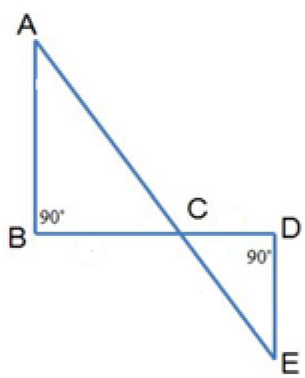


Explicación escrita:

____
____
____
____

12) Determina relaciones entre semejanza de figuras planas y volumen de figuras semejantes y construye un mapa conceptual sobre el tema de las semejanzas de polígonos y cuerpos geométricos.

Los siguientes triángulos son semejantes entre sí, explica la relación entre sus áreas.



Explicación escrita:

____
____
____
____