UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

VALORACIÓN DIDÁCTICA DE CLASES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA CIRCUNFERENCIA EN PROFESORES DE EDUCACIÓN MEDIA DEL SUR DE CHILE

POR

Edith Eliana García Bobadilla

Tesis presentada para optar al grado académico de Magíster en Educación Matemática

Director de tesis: Dr. Luis Pino-Fan

Osorno, Chile. Abril de 2020

A mis queridos abuelitos, Luis y Eliana
que siempre me incentivaron
a ser profesional.
A mi hija y mi familia que fue el motor
que me movió para alcanzar
nuevas metas.

AGRADECIMIENTOS

A todos quienes de una u otra manera hicieron posible que llegue al término de este camino; especialmente a mi esposo y a mi hija que me acompañaron en este recorrido y cumplieron un rol fundamental, con su comprensión, sacrificio y apoyo incondicional durante toda esta etapa de formación.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES E IMÁGENES

RESUMEN

La enseñanza de las secciones cónicas es conocida por ser fuente de diversas dificultades para los profesores al momento de utilizar diferentes representaciones, lo que muchas veces ocasiona una falta de comprensión para el estudiante. En la actualidad, se sigue utilizando un enfoque más algebraico, en lugar de promover diversos tipos de representaciones que van dirigidas a la comprensión de los objetos matemáticos y sus significados (Méndez y Pérez, 2016). En este estudio, nos enfocaremos especialmente en la enseñanza de la sección cónica, circunferencia.

En esta investigación, en función de las problemáticas identificadas, indagamos el tipo de prácticas desarrolladas por los profesores para la enseñanza de la circunferencia. La presente investigación está orientada a la formación de profesores con el objetivo de emitir una valoración de clases sobre la circunferencia de dos profesores en servicio de la ciudad de Osorno en Chile pertenecientes a un establecimiento subvencionado por el estado (municipal). Además, pretende identificar cuáles son las características que se podrían potenciar para el desarrollo de competencias en la práctica de estos profesores, para lo cual se utilizó una metodología de tipo cualitativa sobre estudio de casos, apoyado en el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS), el cual es conocido dentro de la didáctica de la matemática por ser inclusivo. De esta manera nos centramos en la idoneidad didáctica utilizando sus criterios de idoneidad con sus componentes y descriptores, lo que nos permitió hacer una valoración de las prácticas de estos profesores en la enseñanza de la circunferencia.

De acuerdo al análisis realizado sobre las prácticas de los profesores, podemos concluir que ellos se guían por el curriculum chileno, pero cuando los estudiantes ejercitan, su enfoque solo se mantiene en la parte algebraica de los ejercicios propuestos en las clases. Además se pudo observar un bajo nivel en el rigor matemático del profesor al momento de sus prácticas.

Palabras claves: secciones cónicas, circunferencia, enfoque ontosemiotico, idoneidad didáctica, formación de profesores.

ABSTRACT

The instruction of conic sections is known for being a difficult content to teach for teachers when using different representations; which makes it difficult for students to understand this matter. Nowadays, an algebraic approach is still used instead of promoting different types of representations to favor the comprehension of mathematic objects and their meanings (Mendez & Pérez, 2016). In this study, we will specially focus on the teaching of the conic section, circumference.

In this investigation, and according to the identified problems about the subject, we dig into the practices developed by teachers when instructing the circumference. This study is oriented to teacher training with the objective of valuing lessons about circumference from two in-service teachers from Osorno in Chile who belong to public schools. Moreover, this study aims to identify which are the characteristics that could enhance the development of competences in the practices of teachers. For this, a qualitative methodology was used on case study, supported by the Ontosemiotic Apprach (OSA) which is known for being an inclusive approach among the mathematic didactics. Thus, we focused on the didactic suitability using their suitability criteria and their components and descriptors which allowed us to value the practices of these teachers when teaching the circumference.

According to the analysis of the teachers' practices, we can say that the teachers follow the Chilean curriculum but when students exercise the focus is still on the algebraic approach seen in the lessons. Furthermore, a low level of mathematical rigor on teachers was observed.

Key words: conic sections, circumference, Ontosemiotic Approach (OSA), didactic suitability, teacher training.

INTRODUCCIÓN

En esta investigación nos hemos interesado en la práctica didáctico-matemática de profesores al momento de enseñar el objeto matemático circunferencia. De acuerdo al Ministerio de Educación chileno (MINEDUC, 2001), la circunferencia como lugar geométrico, se encuentra inserta dentro de los planes y programas, en la asignatura electiva de Álgebra y Modelos Analíticos la cual se imparte en tercero medio, en donde se reconoce que los lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas y además se reconocen la recta, circunferencia, elipse y parábola a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan. La problemática se basa en que los profesores al momento enseñar la circunferencia, se enfocan solo en la parte algebraica, sin utilizar distintas representaciones como lo afirma, Da Silva (2013).

En el capítulo 1 nos hemos dedicado a revisar distintas investigaciones para conocer un poco de la historia de las secciones cónicas y del objeto matemático en estudio: la circunferencia y sus diferentes significados en el tiempo, ya que la enseñanza de la geometría en el enfoque didáctico es fundamental con respecto a la construcción del pensamiento geométrico. Además hemos investigado algunos problemas que se dan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, los errores y dificultades que hay al momento de la enseñanza en forma general de las cónicas y en específico del objeto matemático circunferencia, las diferentes propuestas de estrategias de enseñanza de las cónicas y por último también hemos hecho un breve recorrido por nivel del curriculum chileno acerca del objeto matemático.

En el capítulo 2 describimos el marco teórico de la investigación, como la metodología que se enmarca en un estudio desde una perspectiva de análisis cualitativo con estudios de casos. Además se han planteado los objetivos de la investigación, fundamentados con el marco teórico.

En el capítulo 3 se analiza bajo el marco teórico, las practicas didáctico-matemáticas de dos docentes, mediante observación de clases a través de registros en videos, de las distintas sesiones de las clases, los cuales están transcritos en los anexos 1 y 3, para luego hacer un análisis más acabado de los elementos que toma en cuenta el profesor durante el desarrollo de la clase y obtendremos algunas reflexiones de estas.

En el capítulo 4 se describen algunas conclusiones a partir de los objetivos planteados, resultados obtenidos en esta investigación y algunas debilidades que se presentaron.

CAPÍTULO 1
ANTECEDENTES Y ÁREA PROBLEMÁTICA

1.1 Introducción

En este capítulo presentaremos en la primera parte un breve estudio de la historia de las cónicas en general, pero en particular sobre el objeto matemático, la circunferencia. Luego se plantean los diferentes significados que se han dado en el tiempo, para posteriormente indagar las distintas propuestas de investigación que se han dado acerca de la geometría y de la circunferencia, ya sea a través de los diferentes usos de representaciones, de la geometría dinámica y el uso de manipulativos. Además, se da a conocer la problemática que tiene el profesor al momento de enseñar las cónicas dentro del aula y cuáles son las directrices del curriculum chileno acerca de cómo llegar al objeto matemático la circunferencia.

1.2 Las cónicas un estudio por su historia y sus significados

Menecmo en el año 350 a.C., perteneciente a la escuela platónica, fue uno de los primeros geómetras que trabajó las secciones cónicas y que se obtuvieron de acuerdo a un cono (Pérez, 2012), a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos de tres tipos, según el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso; las cónicas fueron nombradas *oxitoma* (sección del cono agudo), *amblitoma* (sección del cono obtuso) y *ortotoma* (sección del cono recto), tal como se afirma en Fernández-Mosquera (2011). Después en Mesa (2013) se menciona que recibieron el nombre de parábola, elipse e hipérbola, llamada la "triada de Menecmo". Además, se destacó especialmente por el estudio de la geometría, particularmente por la inclusión de procedimientos algebraicos en la solución de problemas geométricos. Por ello se le considera el precursor de la geometría analítica.

El desarrollo de las cónicas se debe a los griegos a fines del siglo IV a.C., de acuerdo a Fernández-Mosquera (2011) el primero fue Aristeo con su libro de los lugares solidos y

Euclides, cuya obra se basaba en la enseñanza de las cónicas con el uso de la astronomía; ambas obras fueron desaparecidas. Las contribuciones de Euclides, de acuerdo a Ramírez (2013), se plasmaron en los libros de las cónicas de Apolonio, aunque de una forma más general, estas se obtienen de una superficie cónica de revolución al cortarla con un plano, las distintas posiciones que toma el cono al intersectarlo con el plano genera diferentes gráficas que son: circunferencia, elipse, hiperbola y parabola. La circunferencia, tal vez es la cónica más estudiada, porque los griegos concibieron lo circular como perfecto y lo relacionaban con lo divino (Murillo, 2013).

Apolonio de Pergamo 262-190 a.C., en Ramírez (2013) se afirma que fue quien demostró que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones cónicas, dependiendo de la inclinación del plano que corta al cono, esto llevó a unificar el estudio de las cónicas. Además, Apolonio demostró que el cono no necesita ser recto, también consideró el cono con dos hojas, con lo cual lograba identificar las ramas de la hipérbola. Fue este autor quien dio a las secciones cónicas los nombres a la elipse, parábola e hipérbola, tal como lo asevera Mesa (2013).

Los aportes de Apolonio, de acuerdo a Pérez (2012) y Buccino (2011), están dados en su obra *Las Cónicas de Apolonio*, que fue escrita en ocho libros, los contenidos más destacados de cada libro son: libro I que se inicia con la generación de las cónicas. En el libro II se dan a conocer propiedades y se hace un estudio de las asíntotas; en libro III se enfoca en la relación armónica de la secante con la cónica y aparecen propiedades de los focos; en el libro IV se estudia los puntos de intersección de las cónicas; el Libro V es una de las principales obras ya que está dedicado a la distancia máxima y mínima de un punto a los de una cónica; el Libro VI está dedicado a la igualdad y semejanza de cónicas; el libro VII estudia las relaciones métricas sobre diámetros y en el libro VIII se desconoce su contenido.

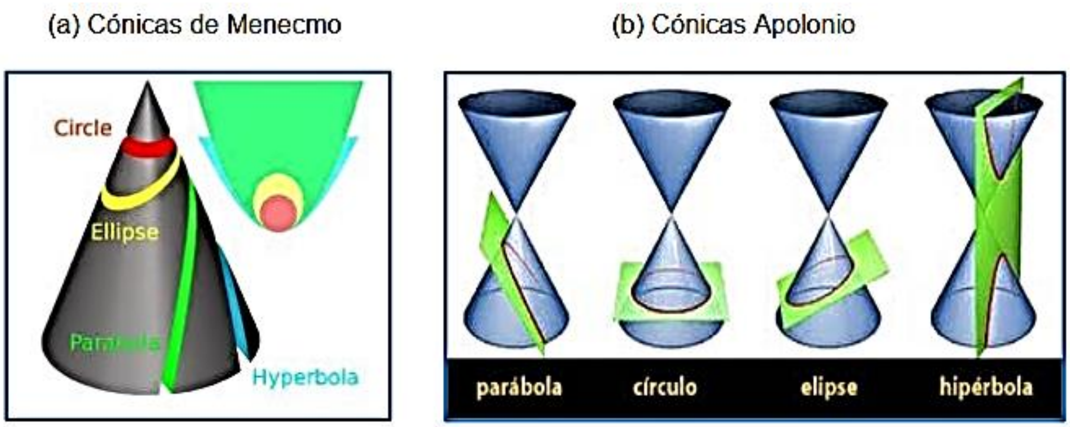


Figura 1.1. Secciones cónicas según Mecnemo y Apolonio. *Fuente:* Pérez (2012)

Los métodos utilizados para la construcción geométrica con regla y compás, demostraciones a través de postulados y teoremas básicos de la geometría de Euclides, Apolonio y sus sucesores, es la que se conoce hoy en día como la geometría sintética (Buccino, 2011). De las figuras geométricas planas, para Carmona (2011), el círculo es la más regular, notoriamente conocido y desarrollado por los matemáticos a través de la historia, no sólo por su seducción y propiedades, sino por sus aplicaciones prácticas, por ejemplo, la circunferencia es el perímetro más corto que encierra una superficie plana.

Como se señala en Fernández-Mosquera (2011), los planteamientos analíticos utilizados por Apolonio se pueden considerar como una anticipación a la geometría analítica de Descartes, ya que los métodos utilizados son muy similares. Al pasar los siglos, en el siglo XVI Rene Descartes, un matemático y filósofo, llevó a la geometría a cambiar sus modos de representación y así, las teorías de las cónicas adquieren una profundidad mayor. En Ramírez (2013) se afirma que con la geometría analítica se trabaja con coordenadas cartesianas y métodos algebraicos que llevan a definir que cualquier cónica puede ser representa a través de una ecuación de segundo grado, determinando adecuadamente los coeficientes de está utilizando las variables x e y, lo cual se puede comprobar a través de las construcciones geométricas. Tal como se describe en Fernández-Mosquera (2011), Muñoz (2015) y Buccino (2011), una de las obras más destacadas de Descartes es La Geometrie, que está dividida en tres libros, en el primer libro relaciona los cálculos de la aritmética con las operaciones geométricas; en el segundo libro realiza un estudio de la naturaleza de las curvas y las clasifica en geométricas y mecánicas; por último en el tercer libro se refiere al estudio de problemas con sólidos o supersólidos, a la resolución de ecuaciones y a la reconstrucción conociendo sus raíces.

En años posteriores, el matemático Johan de Witt en su obra *"Elementa Curvarum Linearum"* demostró que toda ecuación de segundo grado describe una cónica (Pérez, 2012). Después, Leonhard Paul Euler da un gran paso en la sistematización de la Geometría Analítica plana y tridimensional, en particular, la teoría de secciones cónicas, ampliando y perfeccionando así los trabajos anteriores en la investigación de los elementos geométricos y propiedades de las cónicas (Pérez, 2012).

1.3 Diversos significados de las cónicas en la historia.

Existen diversas formas de estudiar las cónicas, por ejemplo, a través de intersecciones del cono con planos como lo trabajado por Menecmo y Apolonio, también con casos particulares de ecuaciones de segundo grado con dos variables x e y, o como lugares geométricos de puntos que cumplen cierta propiedad geométrica.

Fernández-Mosquera (2011), reconoce la necesidad de coordinar los enfoques analíticos y sintéticos como una estrategia para superar la falsa división curricular entre las dos geometrías: la sintética, presente en la *geometría* escolar y primeros cursos universitarios; y la analítica, propia de la Educación Media y de cursos universitarios más avanzados. Fernández-Mosquera (2011), define: "*lugar geométrico* es un conjunto de puntos que poseen una cierta propiedad: una condición característica que determina si un punto pertenece al conjunto o no" (p. 34).

Mesa (2013), definen "un *lugar geométrico* como un conjunto de puntos del plano que cumplen determinada propiedad" (p. 65). Además, se nombra algunos lugares geométricos Mesa (2013, p.65):

- *Circunferencia*: conjunto de puntos del plano que están a una misma distancia de un punto fijo.

- *Parábola*: conjunto de puntos del plano que equidistan de una recta y un punto fijo.

- *Elipse*: conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias hacia dos puntos fijos es una constante.

- *Hipérbola*: conjunto de puntos del plano cuya diferencia en valor absoluto de sus distancias a dos puntos fijos es siempre constante.

Estas definiciones han sido también retomadas por textos clásicos para la enseñanza de las cónicas. Por ejemplo, el Leithold (1998, p.1173), en donde se define de la circunferencia de la siguiente manera (Figura 1.2).

A.5.1 Definición de circunferencia

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo. El punto fijo se denomina **centro** de la circunferencia, y a la distancia constante se le llama **radio** de la circunferencia.

Figura 1.2. Definición de Circunferencia de un libro de texto.

Otra definición, por ejemplo, es tomada del texto de 3° y 4° plan electivo de Santillana de Blanco, De las Heras, Fuenzalida y Riveros (1995, p.103), donde se define la circunferencia como lugar geométrico (Figura 1.3).

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos **P(x,y)** del plano que se encuentran a una distancia determinada **r** de un punto dado **O(h,k)** de dicho plano.

$$\mathcal{C}(O,r) = \{ P \in \mathcal{P} / OP = r \}$$

Figura 1.3. Definición de Circunferencia de un libro de texto.

Ramírez (2013) se refiere a distintas miradas de las cónicas, como una mirada analítica a través de la intersección entre el cono y el plano, dependiendo del ángulo que forman el plano y el cono, teniendo además en cuenta el ángulo que se forma entre el eje y la generatriz (Figura 1.4).

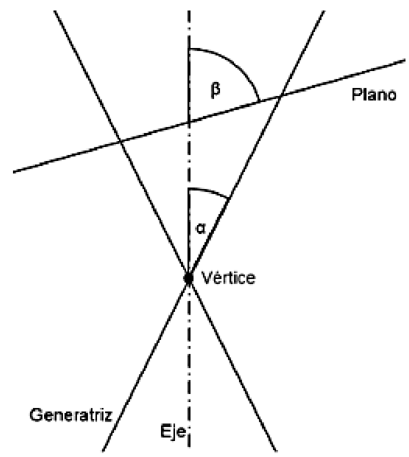


Figura 1.4. Esquema cono-plano. *Fuente:* Ramírez (2013, p.18).

A partir de la Figura 1.4 anterior, Ramírez (2013, p.18) define:

- Si $\beta = 0°$la intersección será una circunferencia.
- Si $\alpha < \beta < 90°$ la intersección será una elipse.
- Si $\alpha = \beta$ la intersección será una parábola.
- Si $\alpha > \beta$ serán las dos ramas de una hipérbola.

Luego ilustra gráficamente las cuatro secciones cónicas:

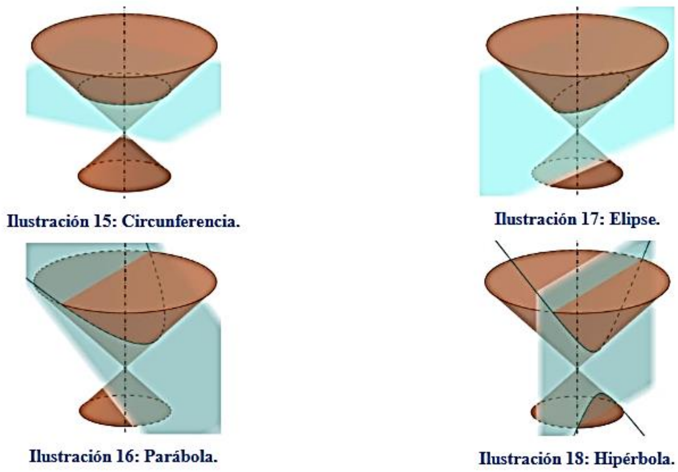


Figura 1.5. Ilustraciones de las Secciones Cónicas. *Fuente:* Ramírez (2013, p. 19)

Otra mirada que Ramírez (2013) le da a las cónicas, es como lugar geométrico, definiendo a la circunferencia como "el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro punto fijo (llamado centro). Esto es, los puntos $X = (x, y)$ del plano que están a una distancia fija r (radio) de otro punto c (centro). Simbólicamente, $C: d(X, c) = r$" (p. 19). Relacionando la mirada analítica, como lugar geométrico la circunferencia y llevando al plano cartesiano las secciones cónicas, se pueden interpretar en dos dimensiones, así se encuentra la ecuación cartesiana de las cónicas en este caso nos dedicaremos a la circunferencia.

Como se definió anteriormente, la circunferencia por los puntos $X = (x, y)$, para los que la distancia está dada entre cualquier punto de la circunferencia y el centro O como, $d(X, O) = r$, y esta distancia es igual al radio de la circunferncia. De lo anterior se tiene que ambos términos de la igualdad son positivos entonces $\left(d(X, O)\right)^2 = r^2$. Sabiendo que $X = (x, y)$ es un punto cualquiera de la circunferencia y O=(a, b), el centro de la circunferencia, se tiene:

$$d(X, 0) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Entonces $$\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = r^2$$

Luego $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

A partir de esto, se define la ecuación de la circunferencia de radio $r > 0$ y centro $O = (a, b)$

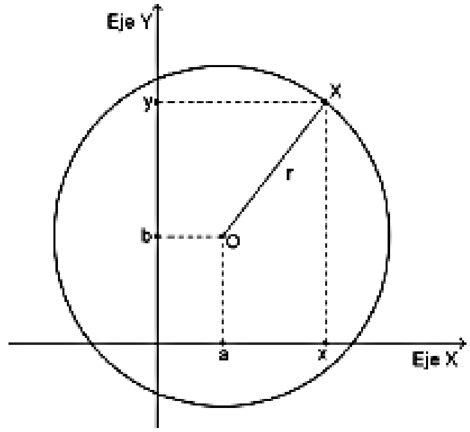


Figura 1.6. Representación de la circunferencia en el plano cartesiano. *Fuente:* Ramírez (2013, p.20)

A partir de desarrollar los cuadrados de binomios de $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Se tiene $D = -2a$, $E = -2b$ y $F = a^2 + b^2 - r^2$

De esto se obtiene la ecuación general de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

La ecuación general de las cónicas queda determinada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Dependiendo de los valores que tomen los parámetros A, B, C, D, E, y F, se obtiene la cónica.

Fernández-Mosquera (2011), afirma que una cónica se puede obtener a partir de una construcción geométrica adecuada para luego realizar una elaboración analítica geométrica de la ecuación algebraica, pero el enfoque tradicional basado sólo en la parte algebraica de las cónicas lleva a que se encuentre en la desaparición del currículo. Además, fundamenta que un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumple con ciertas propiedades.

En relación con cómo se generan las cónicas, Castillo (2017, p.48), señala que:

> Se denomina sección cónica a cada una de las curvas planas que se obtienen al cortar una superficie cónica por un plano que no pasa por su vértice. El tipo de curva que

se obtiene depende del ángulo α de la superficie cónica y del ángulo β que forma el plano P con el eje e. Este autor clasifica las cónicas:

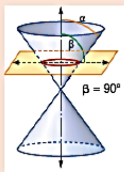
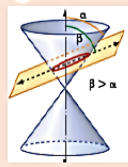
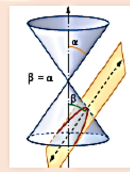
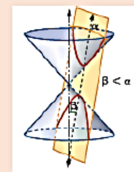
Circunferencia	Elipse	Parábola	Hipérbola
Si el plano corta de manera perpendicular al eje del cono.	Si el plano no perpendicular al eje, pero corta a toda generatriz.	Si plano es paralelo a una generatriz y corta a todas las demás.	Si el plano corta a dos ramas del cono y no pasa nada por el vértice.
			

Figura 1.7. Clasificación de las cónicas. *Fuente:* Castillo (2017, p.48).

Los tipos de representaciones de las secciones cónicas de la geometría analítica según Méndez y Pérez (2016) son (p. 21-22):

- **Representación verbal** de una sección cónica, en la geometría analítica, es una representación mediante una frase que está compuesta por palabras del lenguaje común, palabras de la terminología matemática y de la geometría analítica y eventualmente por signos matemáticos.

- **Representación gráfica** de una sección cónica, es una representación en la cual predomina una figura geométrica, es decir, es una representación que siempre contiene una figura geométrica y eventualmente frases o signos matemáticos, particularmente de la geometría analítica.

- **Representación analítica** de una sección cónica, es una representación en la que predomina una ecuación o sistema de ecuaciones.

Por su parte, los elementos principales de la circunferencia son el radio y el centro. Como hemos señalado anteriormente, esta sección cónica es una de las curvas más utilizadas por la geometría, por ello es que ha sido relevante el estudio en su forma analítica.

Arana (2016), propone una secuencia didáctica para la enseñanza de la circunferencia, la cual sugiere dividir en cuatro subtemas: (1) La distancia entre dos puntos, (2) La ecuación y los elementos de la circunferencia, (3) La recta tangente a la circunferencia y (4) La longitud de arco y el área de sector circular.

En la geometría proyectiva se puede determinar cualquiera de las cónicas a partir de una circunferencia. De lo descrito anteriormente se desarrolla la geometría algebraica que tiene distintas ramificaciones en distintos campos de las matemáticas. Una cónica se define como el corte de una superficie cónica con un plano o un lugar geométrico de los puntos de un plano.

1.4 Propuestas desde la investigación

1.4.1. El uso de diversas representaciones

Ornelas, Diéguez, Sánchez y Fonseca (2016), desarrollan una investigación la cual se basa en una serie de secuencias didácticas apoyadas en la teoría de registros de representación semiótica de Duval, que están orientadas a estudiantes de enseñanza superior que tienen dificultades para las relaciones entre las diferentes representaciones de las cónicas, algunos de los resultados obtenidos por estos autores, destaca la deficiencia de los estudiantes con su habilidad en la comprensión lectora, además de las deficiencias algebraicas, aritméticas y de conocimientos previos.

Méndez y Pérez (2016) señalan que los alumnos en formación inicial de profesores de matemáticas, carecen de fundamentos teóricos para poder lograr la transferencia de representaciones verbales de las secciones cónicas, correspondiente al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica.

1.4.2. Entornos de Geometría Dinámica

Actualmente existe una gran cantidad de aplicaciones y programas computacionales que se pueden aplicar en la geometría y las matemáticas en general. Mejía (2016) implementa una estrategia didáctica para mejorar la enseñanza de la circunferencia utilizando un juego digital, concretamente propone que los estudiantes reconozcan los usos y aplicaciones que tiene la geometría analítica y las cónicas, que juzguen a través de la historia un poco el desarrollo y evolución, que puedan ejercitar procedimientos matemáticos y validar sus resultados, y en clase utilizar toda la información y conceptos para trabajar en el fortalecimiento de la modelación, la comunicación y el razonamiento. Además, uno de los objetivos fue diseñar y construir actividades didácticas utilizando TIC en este caso juegos digitales, para el desarrollo de los conceptos básicos de geometría analítica.

La circunferencia puede abordarse desde la geometría sintética y analítica, utilizando GeoGebra, como lo propone Echevarría (2015), quien realizo una investigación utilizando distintas actividades para reconocer como objeto matemático la circunferencia, con estudiantes de quinto grado de secundaria. Por su parte, este autor logra darle sentido a la relación la geometría sintética con la geometría analítica a través de algunas actividades abordadas sobre la circunferencia en las dos geometrías. Bastos (2014) realiza una propuesta orientado a estudiantes de enseñanza media, que tiene como objetivo ofrecer una alternativa para que el profesor de Enseñanza Media pueda trabajar con Geometría Analítica y el estudio de la circunferencia en distintas actividades propuestas en la investigación y así, facilitar el trabajo del profesor en el aula, utilizando la tecnología digital como el software de geometría dinámica GeoGebra.

1.4.3. El uso de manipulativos.

Gutiérrez y Jaime (2015) consideran que no existen resultados concluyentes acerca de los beneficios que tiene el utilizar materiales manipulativos y/o programas informáticos, pero que actualmente el uso de programas computacionales viene a ser un complemento de los materiales manipulativos, para que los estudiantes logren crear imágenes mentales adecuadas, a las que están representadas en los textos de una manera estática. Zúñiga (2010) realiza un estudio de comparación de un material manipulativo y uno virtual, en el cual concluye que ambos son efectivos y afirma que los materiales virtuales son efectivos en el aprendizaje de conceptos de geometría. Por otra parte, Fortuny, Iranzo y Morera (2010) sugieren que en geometría, a través de la historia de la didáctica de la matemática, se han utilizado materiales manipulativos, aunque a nivel secundario se dice que el material es muy escaso y que además ocupa demasiado tiempo dentro del aula y no demuestra un verdadero aprendizaje en el estudiante.

Meavilla y Oller (2013) señalan, por su parte, que el utilizar en geometría material manipulativo permite que los estudiantes logren captar y comprender propiedades geométricas que a simple vista no se logran observar. En este sentido, en el estudio de las cónicas, Pérez (2004) utiliza elementos manipulables para generar estas, así logran los estudiantes reconocer características y propiedades de cada una de las cónicas. Para introducir el concepto de circunferencia, Cristancho (2012) utiliza material manipulativo el geoplano, para que el estudiante se le haga más fácil su aprendizaje, con el fin de que logre interactuar y así pueda construir un conocimiento de manera adecuada, ya que las falencias de los estudiantes se encuentran en la construcción y el reconocimiento de propiedades de las cónicas, en especial de la circunferencia.

Se ha demostrado que los materiales manipulativos logran mejorar el estudio de conceptos de la geometría analítica tal como lo asevera Lopez (2014), ya que se motivan más los estudiantes en el desarrollo de la clase. Además, afirma que al trabajar y hacer uso de material manipulativo en la enseñanza de la geometría el profesor debe tener en cuenta los tiempos y realizar una buena planificación con el fin de obtener un aprendizaje significativo para los estudiantes. Lopez (2014) define un manipulativo como un instrumento físico, mental o virtual que se puede manipular, trasformar y analizar con la finalidad de reafirmar, crear o profundizar conceptos de algún tema determinado. También, Eduteca (2003) define un manipulable como un objeto cualquiera o instrumento del mundo real que se puede palpar, para ver y experimentar conceptos matemáticos. Un problema que se evidencia en el uso de manipulativos lo afirma Arrieche y Pérez (2009), está relacionado con el docente ya que en el proceso de enseñanza y aprendizaje este material para el estudiante debe tener una conexión con los conocimientos previos, además el contenido que se aprende debe tener significado y utilidad para él.

Barrantes y Balletbo (2012), denominan los materiales manipulativos como elementos manipulativos y dan una clasificación de estos como: constructores, construidos y los mecanismos. Los constructores son aquellos que sirven para hacer modelos diversos, y el artículo principal es el papel, ya que se utiliza para hacer diferentes construcciones y actividades; los materiales construidos son sólidos de madera o plástico y sirven para observar, así profundizar conceptos y propiedades; y los mecanismos se basan en observar para así lograr obtener las características y propiedades de las cónicas.

Los materiales manipulativos, al momento de ser creados deben tener claro el propósito para el cual se van a utilizar. Como lo afirma Serrano (2016), los materiales educativos se pueden clasificar en:

> Materiales manipulativos creados con propósitos específicos: Son materiales creados especialmente para facilitar un determinado aprendizaje. Muchos de los materiales educativos creados con propósitos específicos pueden ser incluidos en modalidades de usos más amplios. Materiales manipulativos creados con propósitos variados: Este tipo de material tiene una finalidad educativa la cual es flexible; por esta razón puede ser objeto de diferentes usos (p. 9-10).

Los materiales manipulativos favorecen el aprendizaje de los alumnos en aspectos tales como:

> Aprender a relacionarse adecuadamente con los demás (ser gentiles, respetuosos, trabajar en equipo). Desarrollar procesos de pensamiento (anticipar, combinar elementos, clasificar, relacionar, solucionar problemas). Ejercitar ciertos procesos científicos (observar, interpretar modelos, experimentar). Aprender a ocupar el tiempo libre. (Bernabéu, 2005, p.10)

Otros autores, como Barrantes, Balletbo y Fernández (2014), afirman que la enseñanza de la geometría se basa sólo en memorización, no dando el espacio necesario al conocimiento geométrico a través del uso de manipulativos, ya que estos deberían llevar al estudiante a relacionarse más con su entorno para lograr permitir una mayor abstracción a las figuras y formas geométricas que se encuentran es su entorno. El uso de materiales manipulativos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son de gran utilidad, ya que ayudan al logro de los objetivos en el desarrollo de la clase, y le proporciona al estudiante un acercamiento de manera sencilla y familiar a los conceptos geométricos (Fernández y Río, 2015).

1.5 Las problemáticas sobre las prácticas del profesor de matemática sobre la enseñanza de las cónicas.

Bonilla, Parraguez y Solanilla (2014) realizan una propuesta didáctica basada en la teoría de Anna Sierpinska, los modos de pensamientos geométricos los cuales son sintético-geométrico , analítico-aritmético y analítico-estructural, cuya problemática es la enseñanza-aprendizaje de las cónicas, está propuesta se aplica a estudiantes de tercer año de enseñanza media (entre 16-18 años) con el objetivo que logren tener una mejor comprensión de las cónicas como lugar geométrico y no como una simple ecuación cartesiana; los resultados de esta investigación llevaron a verificar la dificultad que tienen los estudiantes para plantear ecuaciones y lo importancia de las herramientas analíticas que deben tener para poder generalizar . En el pensamiento geométrico, el estudio de la circunferencia como lugar geométrico tiene una gran importancia, sus representaciones, relaciones, propiedades y teoremas de acuerdo a Carmona (2011).

La problemática se basa en que los profesores al momento de enseñar la circunferencia, se enfocan sólo en la parte algebraica, sin utilizar distintas representaciones, como lo afirma Da Silva (2013), quien dice que el 90% de los alumnos que han finalizado su enseñanza media no logran identificar las distintas representaciones de las cónicas, debido a que los profesores restringen la enseñanza de este contenido sólo a la parte algebraica. Debido a ello, es que el autor propone una secuencia didáctica utilizando recursos de geometría dinámica para facilitar el reconocimiento de las cónicas en sus diferentes representaciones, esto los hace trabajando la construcción de las cónicas a través del concepto de lugar geométrico, concluyendo que para realiza esto es indispensable una buena elaboración y planificación de la secuencia.

Pérez (2012), observó que los estudiantes ejercitan procedimientos algebraicos y sólo memorizan los contenidos; debido a esto, este autor propone el diseño e implementación de una unidad del estudio de las cónicas donde los estudiantes sean capaces de utilizar diferentes sistemas de representaciones como verbal, grafico, algebraico y numérico; ya que el estudio de las cónicas tiene una visión más analítica. Las secciones cónicas en general, se trabajan desde una perspectiva más algebraica dentro del aula, y esto ya genera dificultades en los estudiantes al momento en que trabajan con distintas representaciones, muchas veces estas se deben a las dificultades en los conocimientos previos, en la aritmética, etc. (Ornelas, Diéguez, Sánchez y Fonseca 2016).

Podemos decir que una de las dificultades que enfrenta el profesor al momento de enseñar la circunferencia es respecto a que los estudiantes carecen del manejo adecuado de conceptos matemáticos en especial los conceptos de geometría (Castilla 2016), ya que aunque el profesor se esfuerce en tratar de que el estudiante comprenda, este lo más probable es que no lo logre producto de las falencias de sus concepto previos, debido a que estas herramientas son esenciales para acceder al conocimiento.

1.6 La enseñanza de las cónicas en el curriculum chileno

En el curriculum chileno, de acuerdo a los planes y programas del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2013a), el estudiante tiene su primer acercamiento a las figuras en 2 dimensiones en segundo básico, ya que aquí se espera que logren reconocer, visualizar y dibujar figuras como círculos con material concreto, para permitir que el estudiante desarrolle una visión geométrica de su entorno y con ello promover su imaginación y ampliar su visualización.

Posteriormente, el MINEDUC (2013b) señala que en tercero básico los estudiantes deben describir las figuras en dos dimensiones que forman las redes de las figuras en tres dimensiones como cilindros y conos, de acuerdo a sus caras, aristas y vértices. En sexto básico dibujan los círculos con instrumentos geométricos o software geométrico, para la construcción de ángulos (MINEDUC, 2013c). Además, el MINEDUC (2015) plantea que de 1° a 6° básico los estudiantes deben transitar por distintas representaciones como la concreta, pictórica y simbólica, ya que estas representaciones son clave para el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

En séptimo básico el MINEDUC (2014a) propone que los estudiantes deben mostrar que comprenden el circulo, describiendo las relaciones entre el radio, diámetro y perímetro, estimando de manera intuitiva el perímetro y área utilizando pi, para posteriormente lograr comprender que la circunferencia es un lugar geométrico, cuya característica radica en los puntos que están a igual distancia del centro; además, resuelven problemas de la vida diaria que implican el cálculo de perímetro y área de un círculo. En primero medio los estudiantes desarrollan la fórmula de los valores del área y del perímetro de sectores y segmentos circulares tal como lo sugiere el MINEDUC (2016).

En tercero medio, el plan común del MINEDUC (2014b) indica que los estudiantes deben tener ciertas habilidades para lograr relacionar la geometría elemental con la geometría cartesiana para poder aplicar el teorema de Pitágoras y para calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, éste es un primer acercamiento a la geometría analítica. De acuerdo al MINEDUC (2001), la circunferencia como lugar geométrico, se encuentra inserta dentro de los planes y programas de tercero medio plan electivo, en la asignatura de algebra y modelos analíticos, en donde se propone que los estudiantes logren reconocer que los lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas y, además, reconozcan la recta, circunferencia, elipse y parábola a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan. Esto con el claro objetivo de promover en los estudiantes el pensamiento asociado a imágenes y que lo relacionen con diferentes registros como geométrico, algebraico y numérico. Así mismo, señala que los estudiantes deben ser capaces de construir algunos lugares geométricos ya sea con material manipulativo o software computacional. En los contenidos planteados en la unidad de lugares geométricos se encuentra inserta la circunferencia como lugar geométrico, deducción de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, gráfico, ecuación de la circunferencia trasladada y la resolución gráfica y analítica de problemas sencillos que involucren circunferencia. Además, para no olvidar los espacios tridimensionales, se establece una relación entre la circunferencia y la esfera.

1.7 Aproximación al problema de investigación.

Debido a toda la problemática evidenciada anteriormente, como las dificultades de estudiantes al momento de relacionar las cónicas con sus diferentes representaciones, muchas veces producto de que los profesores en sus prácticas docentes trabajan sólo registros algebraicos, haciendo que los estudiantes sólo se dediquen a memorizar contenidos, además la falta de conceptos previos por parte de los estudiantes. La falta de recursos educativos por parte del profesor al momento de implementar la clase como el no utilizar recursos informáticos y manipulativos en las clases de geometría, restringe a los estudiantes su aprendizaje.

Por las razones descritas anteriormente, es que en esta investigación se propone comprender el tipo de prácticas que realizan los profesores en servicio de enseñanza media, al momento de trabajar el objeto matemático la circunferencia, dentro de la sala de clases, tal como lo señala el curriculum chileno, utilizando los diferentes registros como el algebraico, geométrico y numérico, para que los estudiantes logren trabajar las cónicas como un lugar geométrico, en específico la circunferencia, con todo lo anterior nos hacemos la siguientes preguntas: ¿Qué tipo de prácticas desarrollan los profesores para la enseñanza de la circunferencia? ¿Utilizan los diferentes registros, tal como lo señala el curriculum chileno?.

Posteriormente nos enfocaremos en los objetivo de la investigación, ya que nuestro marco teórico será parte de este.

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO, OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

2.1 Introducción

Este capítulo se ha estructurado en tres partes, en la primera sección se presenta el marco teórico describiendo parte de éste tal como los criterios de idoneidad y sus descriptores para que nos lleven a la valoración de la idoneidad didáctica; una vez introducido el marco teórico ya contamos con una terminología adecuada por lo que podemos enunciar de manera más precisa en la segunda sección el objetivo general y específicos de nuestra investigación; finalmente, concluimos el capítulo en la tercera sección con los fundamentos metodológicos que serán de utilidad para la tesis.

2.2 Marco teórico

El marco teórico que se utilizó para el análisis de los datos en esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (D'Amore, Font y Godino, 2007; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Contreras y Font, 2006), pero solo nos enfocaremos en algunas herramientas derivadas de este enfoque. Este marco intenta articular desde diferentes aproximaciones a la investigación de la enseñanza y aprendizaje. El interés de trabajar con este marco teórico es en el campo de la formación de profesores, tal como se ha realizado en trabajos previos (Pino-Fan y Godino, 2015), donde apuntaremos al análisis de las prácticas de profesores en servicio, debido a que esto implica que el profesor debe conocer, saber y utilizar de manera adecuada los conceptos y metodologías, de acuerdo a describir, comprender y valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje (Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco 2016).

2.2.1 Sistemas de prácticas y significados

En Godino (2012) el sistema de prácticas se considera como una de las nociones claves para los análisis epistemológicos y cognitivos requeridos en la didáctica de las matemáticas. De acuerdo a Rivas (2014) las prácticas se pueden dar de una persona o institución, en estas prácticas matemáticas intervienen los objetos materiales o abstractos que pueden estar representados de forma gráfica, oral, etc. Las prácticas matemáticas son aquellas en donde se resuelven problemas matemáticos de manera verbal, gráfica, etc.; la solución obtenida a este problema es darla a conocer a otros de manera que se valide y generalice a distintos contextos.

Rivas (2014) afirma que el EOS propone una tipología básica de significados y de relación que se da entre el significado personal e institucional al momento de la resolución de problemas matemáticos. De acuerdo a los significados personales se definen de tres tipos que están planteados en el EOS por Godino, Batanero y Font (2007, p. 5):

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

Luego podemos decir que el proceso de los significados personales se puede considerar en nuestros estudiantes como los conceptos previos que tienen de un cierto objeto y hasta llegar a los adquiridos en el proceso de enseñanza. Los objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando configuraciones, estas configuraciones se definen como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, además de las relaciones que se establecen entre los mismos al momento de la resolución de problemas. (Jiménez, 2018).

De acuerdo a los objetos que intervienen en las prácticas y que emergen de estas, según Godino, Batanero y Font (2007) nos conlleva a los significados institucionales que los proponen de la siguiente manera (p. 5):

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido.

2.2.2 Los objetos matemáticos

Los objetos matemáticos intervienen y emergen de los sistemas de prácticas (Godino, Batanero y Font 2007), de acuerdo con estos autores, se consideran dos niveles de objetos, primarios y secundarios. Estos objetos han sido trabajados por Godino, Batanero y Roa (2005), Godino, Batanero y Font (2007) entre otros, de acuerdo al EOS se proponen seis objetos primarios o entidades primarias que se nombran a continuación:

1. Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos).
2. Situaciones – problemas (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, ...).
3. Procedimientos, acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algorítmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
4. Conceptos- definición, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función, ...)
5. Proposiciones, propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.
6. Argumentos, argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Los objetos al relacionarse entre sí forman configuraciones y estas dependen del punto de vista en que se observen, se pueden considerar cognitivas cuando son vistas desde la perspectiva del estudiante o epistémicas cuando son vistas desde una perspectiva institucional (Molina, 2019).

En Rivas (2014) los objetos secundarios están compuestos por las siguientes facetas o dimensiones duales (p. 67):

- *Expresión-contenido*, relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado).
- *Personal-institucional*, se consideran objetos personales los que emergen de sistemas de prácticas específicas a una persona, mientras que si los objetos emergen de sistemas de prácticas compartidas en el seno de una institución son entendidos como objetos institucionales.
- *No ostensivo-ostensivo,* los objetos ostensivos son aquellos objetos que se pueden mostrar a otros (notaciones, símbolos,…) y los no ostensivos son los no perceptibles por sí mismos (los objetos institucionales y personales).
- *Unitario-sistémico,* en algunas circunstancias los objetos matemáticos intervienen como entidades unitarias, supuestamente conocidas y en otras, se deben descomponer para su estudio, p.ej., el sistema de numeración decimal (unidad, decena, centena,…) es visto como una entidad unitaria elemental en el estudio de la adición, pero en cursos anteriores es considerado de manera sistémica.
- *Ejemplar-tipo (extensivo-intensivo),* un objeto que interviene como un caso particular es un objeto de tipo ejemplar (p.ej., la función $y=2x+1$), en cambio una clase más general adquiere el status de un objeto tipo (p.ej., la familia de funciones $y=mx+n$).

Se puede afirmar que las nociones de sistema de prácticas con la configuración de objetos y procesos, permiten caracterizar los conocimientos institucionales y los conocimientos personales. La relación existente entre los distintos objetos, personal e institucional, cumplen un papel importante en los sistemas de prácticas.

2.2.3 Los niveles de análisis didáctico en el EOS

El EOS propone en diversos trabajos los niveles de análisis como en Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006); Godino, Font y Wilhelmi (2008); Molina (2019) entre otros, con el objetivo de desarrollar un análisis más acabado para describir, explicar y valorar procesos de instrucción. Los niveles de análisis didáctico del proceso de estudios son:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas. Este nivel se aplica principalmente a la planificación y a la implementación de un proceso de estudio, descompone el proceso de estudio y describe las prácticas realizadas, además permite describir una configuración epistémica.
2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos. Este nivel se enfoca en los objetos y en procesos que intervienen en la realización de las prácticas, su finalidad es describir la complejidad de las prácticas matemáticas.
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas. Este nivel observa el estudio de las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas, se orienta en trayectorias cognitivas.
4) Identificación del sistema de normas y meta normas. Estudia la compleja trama que soportan y condicionan las configuraciones didácticas.
5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. Se necesita de los criterios de idoneidad que logren valorar los procesos de instrucción efectiva realizados y dirigir su mejora

En esta investigación nos enfocaremos en el nivel 5, ya que en éste se debe tener en cuenta la valoración de procesos de instrucción conforme a la noción de idoneidad didáctica, este análisis se basa en los cuatro análisis anteriores y lleva a mejorar el proceso de instrucción. Los análisis anteriores deben aportar la información necesaria para poder emitir una reflexión valorativa sobre el proceso de estudio a través de la aplicación de la idoneidad didáctica.

2.2.4 Los criterios de idoneidad

En esta sección nos centraremos en el quinto nivel propuesto por el análisis didáctico que corresponde a la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio, para esto, en esta sección vamos a describir que es la idoneidad didáctica.

Con relación a que se debe entender por criterio de idoneidad, Godino, Moll, Wilhelmi, y de Castro (2009) señalan que:

> Se debe entender como una regla de corrección que establece el cómo debería ser realizado un proceso de instrucción. Sin embargo, estos criterios deben ser entendidos como reglas de corrección emanadas del discurso argumentativo de la comunidad científica, cuando éste está orientado a lograr un consenso sobre o que se puede considerar como mejor. (p. 60).

Los criterios de idoneidad nos servirán para ordenar de una manera adecuada el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para evaluar la implementación. Estos criterios son reglas de corrección útiles en dos momentos, tal como lo afirma Godino, Moll, Wilhelmi, y de Castro (2009); a priori, los criterios son principios que orientan cómo las cosas deben ser hechas y a posteriori, los criterios sirven para evaluar el proceso de estudio efectivamente implementado. La aplicación de los criterios de idoneidad nos llevara a evaluar los procesos de enseñanza aprendizaje, para luego proponer mejoras en futuras implementaciones.

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS), Godino, Moll, Wilhelmi y de Castro (2009) proponen los siguientes criterios para valorar la idoneidad didáctica:

- *Idoneidad epistémica.* Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*. Expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

- *Idoneidad interaccional*. Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.
- *Idoneidad mediacional*. Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad* emocional. Grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica.* Grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Otra forma de representar la idoneidad en forma resumida es mediante el hexágono regular Figura 2.1, el hexágono irregular interior sería una idoneidad real:

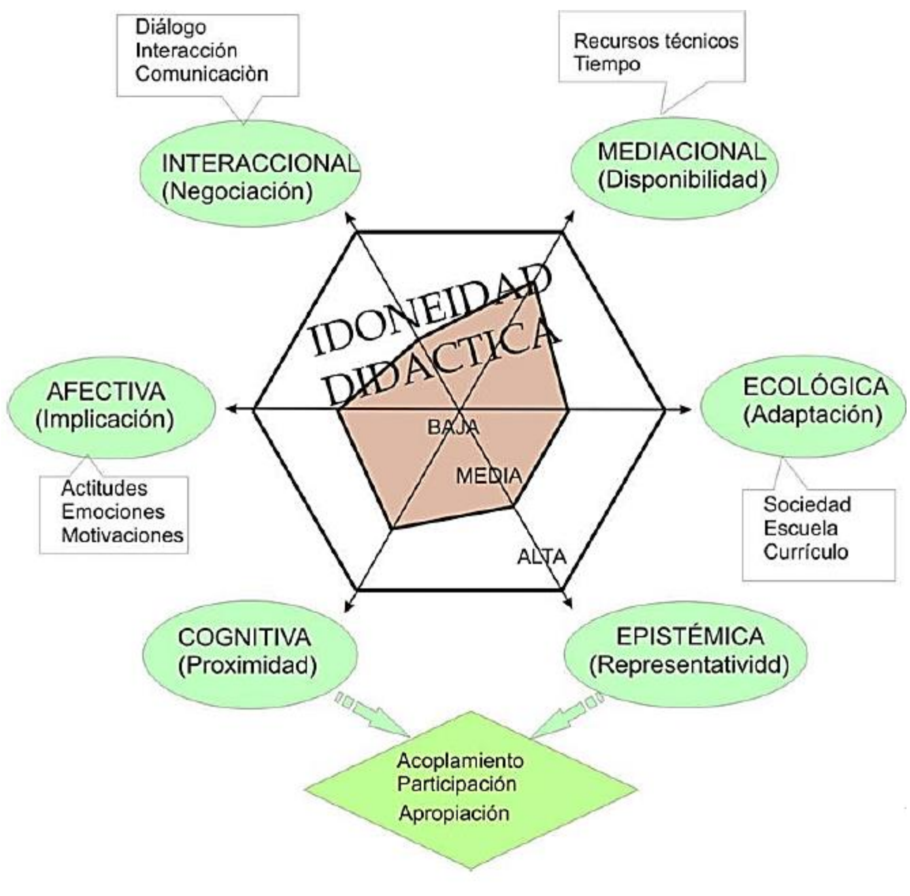


Figura 2.1. Idoneidad didáctica. Fuente: Godino (2013, p. 116)

Los criterios de idoneidad presentados, nos dan la opción de definir un conjunto de indicadores observables entregando la facultad de evaluar el grado de adecuación de cada uno de los componentes del proceso de estudio. Los indicadores de la idoneidad didáctica además de evaluar, nos llevan también a valorar un proceso de estudio.

En la secuencia se presenta la Tabla 2.1, donde se detallan los criterios de idoneidad didáctica y sus respectivos componentes y descriptores.

Tabla 2.1 Componentes y descriptores de los criterios de idoneidad

Componentes	Descriptores
Idoneidad Epistémica	
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo) Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

Idoneidad cognitiva	
Conocimientos previos (Componentes similares a la idoneidad epistémica)	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptación curricular a las diferencias indiv.	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas.
Alta demanda cognitiva	Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.) Promueve procesos meta-cognitivos.
Idoneidad Interaccional	
Interacción docente - discente	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.) Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión
Interacción entre discentes	Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).

Evaluación formativa	Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.
Idoneidad Mediacional	
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, computadoras)	Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (de la enseñanza colectiva / tutorización, tiempo de aprendizaje)	Adecuación de los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial). Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad.
Idoneidad Emocional	
Intereses y necesidades	Selección de tareas de interés para los alumnos. Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Idoneidad Ecológica	
Adaptación al currículo	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos (conexión de matemáticas avanzadas con las matemáticas del currículo y conexión entre diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo) o bien con contenidos de otras disciplinares (contexto extra-matemático bien con contenidos de otras asignaturas de la etapa educativa).
Utilidad socio-laboral	Los contenidos son útiles para la inserción socio-laboral.
Innovación didáctica	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva (introducción de nuevos contenidos, recursos tecnológicos, formas de evaluación, organización del aula, etc.).

Fuente: Breda y Lima, (2016, p 80-83).

2.3 Objetivos

2.3.1 Objetivo general

Caracterizar las prácticas didáctico-matemáticas de profesores en servicio cuando introducen el estudio de la circunferencia en estudiantes de Enseñanza Media.

2.3.2 Objetivos específicos

OE1: Caracterizar prácticas didáctico-matemáticas de referencia para la enseñanza de la circunferencia desde el punto de vista de la geometría analítica.

OE2: Observar las clases de dos profesores de matemáticas de enseñanza media relativas a la introducción del estudio de la circunferencia.

OE3: Describir las prácticas didáctico-matemáticas de los profesores participantes en el estudio sobre la enseñanza de la noción de circunferencia.

OE4: Analizar las prácticas didáctico-matemáticas con los criterios de idoneidad que utilizan los profesores al momento del desarrollo de clases sobre la enseñanza de la noción de la circunferencia.

OE5: Valorar, a partir de los resultados del OE3, la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y de aprendizaje realizados por los dos profesores del estudio para la enseñanza de la noción de circunferencia.

2.4 Metodología

En el presente trabajo se utiliza el paradigma de análisis cualitativo descriptivo que se realizará utilizando los criterios de idoneidad del constructo teórico de la EOS con el propósito de explorar las relaciones sociales y describir la realidad tal como la experimentan los sujetos de estudio (Murillo, Madera, Monasterio, Jaraiz, Cantador, Sánchez y Varas 2002), mediante estudio de casos como forma de investigación. El estudio de casos se define por el interés en el/los caso(s) individual(es) Stake (1994), desde esta perspectiva puede tener una importante contribución al conocimiento y para la construcción teórica. En la investigación cualitativa la relación entre problemas de investigación y los casos seleccionados debe ser revisada continuamente (Martín-Crespo y Salamanca 2007).

El estudio se desarrolla en la Región de los Lagos en la ciudad de Osorno (Chile), el establecimiento donde se toma la muestra es subvencionado por el estado (municipal), tiene una matrícula de 1200 estudiantes distribuidos desde 7°básico a 4°medio, este es un establecimiento que imparte educación científico humanista con jornada escolar completa. El estudio de casos se realiza a dos profesores que imparten clases en la asignatura electiva de Álgebra y Modelos Analíticos inserta en el currículo obligatorio de la educación chilena en tercero medio, pero que en este establecimiento se imparte en cuarto medio debido a la estructuración de los planes electivos ya que esta asignatura se imparte en el plan matemático y científico, esta consta con tres horas semanales.

Los profesores participantes en la investigación pertenecen al departamento de matemática de este establecimiento el cual está compuesto por nueve profesores, de los que se analizará solo a dos de ellos en la enseñanza del objeto matemático circunferencia. La profesora A tiene una formación de titulada en la carrera de pedagogía en enseñanza media con mención en matemática y computación, de la Universidad de los Lagos, décima región Chile, es egresada de Magister en curriuculum y evaluación de la Universidad Mayor de Temuco (Chile). De acuerdo al encasillamiento de la carrera docente, actualmente se encuentra en el tramo Experto 1, además cuenta con 8 años de servicio donde solo ha ejercido en colegios públicos. El profesor B tiene una formación de titulado en la carrera de pedagogía en enseñanza media con mención en matemática y computación, de la Universidad de los Lagos, décima región Chile, cuenta con una pasantía en la Universidad Toulouse Jean Jaurès de pedagogía en Francia. De acuerdo al encasillamiento de la carrera docente actualmente se encuentra en el tramo Avanzado, cuenta con 8 años de servicio los cuales ha ejercido 5 en establecimiento particular subvencionado y 3 en municipal, paralelamente además ha ejercido en educación de adultos por 5 años.

La recolección de datos se realizó a través de observación de las prácticas de los profesores por medio de registros de vídeos de las distintas sesiones de las clases para analizar los elementos que toma en cuenta el profesor al momento de desarrollarla. La grabación de las clases se realizó con dos cámaras, una fija al final de la sala con una vista panorámica y otra en la parte de adelante para un enfoque más personalizado a lo que hacía cada profesor y los estudiantes en el desarrollo de la clase, además se trató de no interrumpir el desarrollo normal de la clase para no distraer a los estudiantes. A la profesora A se le registraron 6 clases y al profesor B se le registraron 5 clases, pero solo se analizó una de cada uno de los profesores. Además, cada profesor trabajó con guía de ejercicios en la clase analizada las cuales se encuentran en el anexo 2 y 4. La clase observada de cada profesor que se analizó es relativa a la introducción de la circunferencia, es decir la primera clase de circunferencia de cada profesor, existiendo una transcripción de ésta correspondiente a la profesora A (ver anexo 1) y del profesor B (ver anexo 2).

Estas clases como son de asignatura electiva para ambos profesores se imparten en el mismo horario los días jueves en la jornada de la tarde de 14:15 a 15:00 horas y el día viernes en la jornada de mañana de 11:30 a 13:00 horas, el número de estudiantes designados a cada curso era de 38 para la profesora A y de 36 para el profesor B.

CAPITULO 3
ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS DIDÁCTICO MATEMÁTICA DE LOS PROFESORES

3.1 Introducción

En este capítulo presentaremos los análisis de las prácticas realizadas a la primera clase desarrollada por los dos profesores participantes de nuestra investigación, en las que se trabaja el objeto matemático circunferencia. La primera sección del capítulo corresponde al análisis del profesor A, nos referimos a la profesora de quien hemos descrito ya sus características anteriormente en la metodología. La segunda sección del capítulo corresponde al profesor B, nos referimos al profesor que también describimos ya anteriormente, para luego terminar la última sección con algunas reflexiones acerca de estos análisis de las prácticas didáctico-matemáticas descritas anteriormente.

3.2 Análisis de la práctica didáctico matemática del profesor A

3.2.1. Aspectos epistémicos de la práctica del profesor A

La profesora inicia su clase dando a conocer los objetivos de manera verbal (dictándolos), estos son: conocer los elementos de una circunferencia; determinar la ecuación principal y general de una circunferencia dado algunos de sus elementos. El Ministerio de Educación (Mineduc, 2001) propone que los estudiantes deben ser capaces de determinar el centro y radio de una circunferencia, y que la distancia al centro de la circunferencia es efectivamente el radio, para que luego escriban la ecuación del lugar geométrico (circunferencia). Durante el desarrollo de la clase la profesora, en el momento de explicar el objeto matemático que quiere enseñar, utiliza la representación gráfica y algebraica, pero finalmente la representación gráfica solo la toma como un apoyo, dándole más énfasis a la representación algebraica. Fernández-Mosquera (2011) afirma que una cónica se puede obtener a partir de una construcción geométrica adecuada para luego realizar una elaboración analítica geométrica de la ecuación algebraica. El Mineduc (2001) propone que a través de los lugares geométricos los estudiantes promueven el pensamiento asociado a las imágenes, así logran relacionar los diferentes registros gráfico, algebraico y numérico.

Una vez introducido el objetivo, la profesora inicia haciendo un recordatorio de la parábola y es aquí donde se produce el primer error al momento de explicar cómo ésta se genera, lo cual se describe en el extracto siguiente que se presenta en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Extracto de la transcripción de la clase del profesor A: Introducción a las cónicas

[L21]	P	¿Y esa parábola cómo se generaba? ¿Qué corte se le hacía a la figura?
[L22]	E	[Estudiante no identificable]: Diagonal
[L23]	E	[Estudiante no identificable]: Transversal
[L24] [L25]	P	Ya! Si vemos esto es una parábola [mostrando el corte diagonal con el material manipulativo, que genera una elipse].
[L26]	E	[Estudiante no identificable]: ¿corte horizontal? [Responde dudosa].
[L27] [L28]	P	¡Muy bien! Un corte horizontal ¿o vertical? [Percatándose quizá de un posible error]. Horizonte [señalando con la mano el horizonte o imitando un corte horizontal]
[L29]	E	[Grupo] Algunos responden horizontal y otros vertical al mismo tiempo.
[L30] [L31] [L32] [L33] [L34]	P	Así Horizontal ¿Cómo éste? [señalando con la mano el corte horizontal en el material manipulativo. Al señalar con la mano se le caen piezas del material]. Bueno este aparatito [refiriéndose al material manipulativo] tiene aquí unas cositas que se le mantiene pero como ya está viejito no está; tiene unos imanes como acá [muestra cómo se adhieren las piezas del corte horizontal al resto del material].
[L35] [L36]	P	Si yo le hago uno [corte] horizontal, sale esto [mostrando con el manipulativo como con el corte horizontal se genera la circunferencia].
[L37]	P	Entonces, ¿qué corte era?
[L38]	E	[grupo] Vertical
[L39] [L40] [L41]	P	Vertical, ¿cierto? [Confirmando la respuesta de los estudiantes]. Entonces, si yo le hago a los conos un corte vertical, va un corte así [mostrando manipulativo, e indicando con las manos el corte], va a nacer ¿la.....?
[L42]	E	[grupo] Parábola.
[L43] [L44]	P	Parábola. Si yo le hago un corte así [imitando con los dedos un corte vertical], como que si fuera un quesito y lo tomo y lo corto como con un cuchillo va salir una parábola, ¿ya?.

Como se observa en esta Tabla 3.1, en el inicio de la clase cuando se refiere a cómo se genera la parábola, la profesora hace uso de material manipulativo, en donde se produce un error al señalar que la parábola se genera con un corte horizontal; sin embargo, lo que se generaría con tal tipo de "corte" sería una circunferencia. Además, podemos observar, que la profesora se apoya en el uso reiterativo de la frase "corte del cono" como metáfora, para hacer alusión a las características y propiedades de las cónicas, tal como lo afirma Pérez (2004), al momento de utilizar el material manipulativo. Ramírez (2013), señala que cuando se estudian las cónicas con una mirada analítica a través de la intersección entre el cono y el plano, depende del ángulo que forman el plano y el cono, teniendo en cuenta el ángulo que se forma entre el eje y la generatriz. Castillo (2017) afirma que la parábola se genera con un "corte", si el plano es paralelo a una generatriz y corta a todas las demás, aspecto que la profesora no explicita en la explicación durante la clase. Lo anterior, puede ocurrir debido a que la profesora desconoce estos aspectos o solamente no considera el uso del lenguaje matemático.

También se puede observar al analizar el discurso de la profesora, que ella concluye que el "corte" que genera la parábola es de tipo vertical, lo cual ejemplifica con el corte que se hace al rebanar queso con un cuchillo. Por esta razón, ese ejemplo generaría una hipérbola al ser vertical, y la profesora no explicita que el corte debe ser paralelo a la generatriz y no vertical para formar una parábola, como lo afirma Castillo (2017).

Además podemos observar en la Tabla 3.1 que la profesora genera un primer conflicto cognitivo en los estudiantes, ya que se confunde con el corte que se debe realizar para generar una parábola. No obstante, casi de inmediato duda de su respuesta, por lo que consulta de nuevo a los estudiantes, quienes respondían simultáneamente ambas opciones, aunque en sentido estricto ninguna de tales opciones es matemáticamente correcta. Cabe señalar que, según Mateus (2017), un conflicto semiótico de tipo cognitivo se da entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto.

Durante el desarrollo de la clase se logró observar que la profesora cuando trabaja la circunferencia lo hace de una manera más algebraica (Figura 3.1), apoyándose en algunos gráficos al momento de ejemplificar, tal como lo define Méndez y Pérez (2016); pero la profesora lo que hace predominar al momento de los ejercicios es la parte algebraica, tal como se observa en la Figura 3.1.

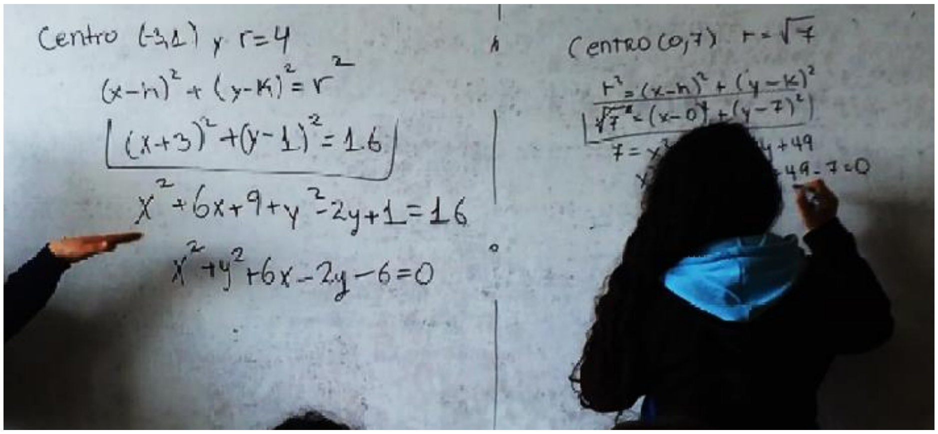


Figura 3.1. Trabajo de manera algebraica profesor A

3.2.2 Aspectos cognitivo de la práctica del profesor A

Durante el desarrollo de la clase se puede observar de una manera muy clara que los estudiantes han adquirido los conocimientos previos necesarios para poder comprender y trabajar el objeto matemático de la circunferencia. La profesora lo toma en cuenta al momento de desarrollar la clase, ya que entiende que los estudiantes tienen las capacidades necesarias para lograr aprender el objeto matemático que va enseñar en la clase, aunque ella cada conocimiento previo que necesita lo trabaja de manera explícita, haciendo preguntas a los estudiantes, lo cual se puede observar en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2 Extracto de la transcripción de la clase del profesor A: Elementos de la circunferencia

[L171] [L172] [L173] [L174]	P	Perfecto, estamos de acuerdo con la parábola con los elementos, ahora relacionémoslos con los elementos de la circunferencia, eh. Supongamos que yo tengo la siguiente circunferencia [profesora comienza a dibujar en la pizarra, el plano cartesiano], ¿Qué elementos creen ustedes, que yo podría encontrar en la circunferencia?
[L175]	E	[Estudiante no identificable] Radio.
[L176] [L177] [L178]	P	Ya ah, perfecto, entonces tengo un radio [profesora dibuja en la pizarra una circunferencia en el primer cuadrante, dibujándola con su centro y radio], por ahí dijo el compañero vamos a encontrar un radio.
[L179]	E	[Algunos estudiantes] Diámetro
[L180] [L181]	P	Un diámetro, obviamente el diámetro seria completo [profesora dibuja en la circunferencia de la pizarra el diámetro] y estaría formado, por dos veces el radio no.
[L182]	E	[Algunos estudiantes] Sí.

En esta Tabla 3.2 se observa que la profesora recuerda conceptos previos que los estudiantes debieran haber adquirido en cursos anteriores, recurre a los conceptos básicos relacionados con los elementos de la circunferencia, los cuales de acuerdo al Mineduc (2014a) se han obtenido y reforzado en séptimo básico, ya que de acuerdo al programa de estudio, los estudiantes deben ser capaces de utilizar propiedades y relaciones geométricas, cuando deben calcular el área y perímetro de un círculo, para ambos cálculos los estudiantes deben tener claro el radio y diámetro, además deben lograr relaciones entre el radio y diámetro tal como lo afirma la profesora. Además la profesora intenta aclarar la diferencia entre un círculo y circunferencia, tal como podemos observar en la siguiente Tabla 3.3.

Tabla 3.3 Extracto de la transcripción de la clase del profesor A: Definición de circunferencia y círculo

[L55] [L56] [L57]	P	Expliquemos por favor el concepto de círculo y circunferencia por que no vaya a ser que se confundan. [Mostrando material manipulativo pregunta], ¿que será esto? ¿Esto será un círculo o una circunferencia?
[L58]	E	[grupo] Dudan en sus respuestas
[L59]	E	[Estudiante no identificable] Algo circular
[L60]	P	A ver circ cir cir cu qué?
[L61]	E	[estudiante no identificable] Circular
[L62]	P	Es circular ya, ¿o es lo mismo?. [la profesora se comienza a sacarse un anillo]
[L63]	E	[grupo]No
[L64]	P	¿Es lo mismo o no?. [la profesora le cuesta sacarse su anillo haciendo gestos]
[L65]	E	[Estudiante no identificable] No.
[L66] [L67]	P	Ya, ¿Cuál será la diferencia miren?, bueno me costó un poquito sacarme el anillo. [Mostrando el material manipulativo y el anillo pregunta], acá observamos tenemos un anillo ¿y tenemos?
[L68]	E	[grupo] Un círculo
[L69]	E	[Estudiante no identificable] Eso.
[L70]	P	Entonces, ¿cuál será cual, cuál será la circunferencia y cuál será el circulo?
[L71]	E	[algunos] El anillo es la circunferencia
[L72] [L73] [L74]	P	Perfecto esto es una circunferencia [muestra el anillo], cierto que es el borde y esto es un circulo [muestra el material concreto solo el trozo con el corte horizontal] ¿cuál es la diferencia entre uno y otro?
[L75]	E	[Estudiante no identificable] Uno tiene área
[L76]	P	¿Qué tiene uno que no tenga el otro?
[L77]	E	[Estudiante no identificable] El círculo es un área completa de la parte…
[L78]	P	Tibio
[L79]	E	[Estudiante no identificable] Área
[L80] [L81]	P	Muy bien lo que pasa es que el circulo tiene superficie [muestra el material concreto solo el trozo con corte horizontal] y la circunferencia solo es el borde [muestra el anillo], ¿se entiende?

Cuando introduce el concepto de circunferencia, en la Tabla 3.3, la profesora utiliza material manipulativo, en donde se puede observar que utiliza un cono y su anillo (Figura 3.2). La profesora al momento que utiliza su anillo y el cono, lo hace para que los estudiantes logren recordar la diferencia entre circunferencia y círculo respectivamente. Este contenido ha sido trabajado, de acuerdo al Mineduc (2014a), en séptimo básico, ya que es en este nivel que los estudiantes deben ser capaces de comprenden el círculo, calculando su área y perímetro.

Figura 3.2. Representaciones de circunferencia y círculo profesora A

Podemos darnos cuenta que la profesora al momento de introducir conceptos previos insiste en reforzar constantemente estos conceptos y otros que desde su perspectiva son relevantes para la noción que quiere enseñar, tal como podemos ver en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4 Extracto de la transcripción de la clase del profesor A: Distancia entre dos puntos.

[L254] [L255] [L256]	P	Y hay ciertos conceptos que nosotros trabajamos ahí, como por ejemplo punto medio le suena, distancia entre dos puntos le suena, y alguien se acuerda de la formulita de la distancia de dos puntos.
[L257]	E	[Grupo algunos] Siii.
[L258] [L259]	P	A ver, veamos si es cierto. Supongamos que mi punto es (x_1, y_1) y el otro punto es (x_2, y_2). [profesora anota en la pizarra mientras nombra los puntos]
[L260]	A	[grupo algunos] Raíz
[L261]	P	Ya por ahí dicen que la distancia de p_1 a p_2 va ser raíz ¿de qué?
[L262]	A	[grupo algunos] x_1 menos x_2
[L263] [L264]	P	Se acuerdan súper [profesora anota en la pizarra la fórmula de distancia de los puntos escritos anteriormente]

En la Tabla 3.4 podemos observar que la profesora les hace recuerdo, a los estudiantes, sobre contenidos de distancia entre dos puntos como concepto previo, contenido que de acuerdo al Mineduc (2014b) se debe conocer en tercero medio, el cual sugiere dentro de la habilidades que el estudiante desarrolle un razonamiento lógico y pensamiento analítico, ya que deben lograr relacionar la geometría elemental con la geometría cartesiana, para así lograr aplicar el teorema de Pitágoras para determinar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano; esto es lo que la profesora realiza al momento de determinar la ecuación de la circunferencia (Figura 3.3).

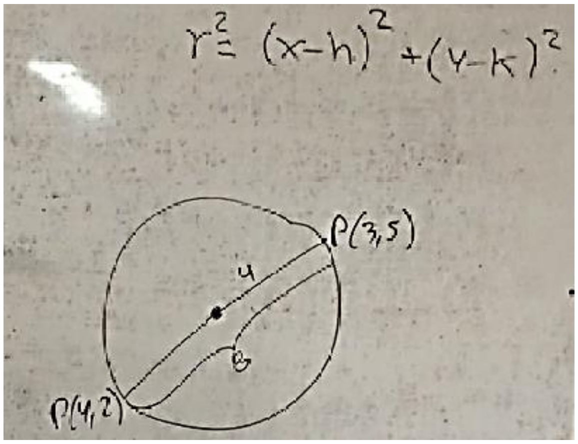


Figura 3.3. Aplicación del Teorema de Pitágoras del profesor A

Durante el desarrollo de la clase se logra observar que la profesora conecta constantemente los conocimientos previos con el objeto matemático que se quiere trabajar, tal como lo escribió en la pizarra, esto lo podemos apreciar en la Figura 3.3.

3.2.3 Aspectos interaccional de la práctica del profesor A

Se observa que en el desarrollo de la clase se produce una dinámica donde la interacción entre los estudiantes y la profesora se ve de manera relajada y fluida, pero gran parte del desarrollo se da de una manera más tradicional donde el profesor expone y luego los estudiantes resuelven los ejercicios.

En la Tabla 3.3 nos podemos dar cuenta que la profesora interactúa con los estudiantes y promueve la participación de estos para lograr que los estudiantes logren tener clara las diferencias entre el circulo y la circunferencia, haciéndole preguntas a estos, además la profesora contextualiza al hacer uso de material manipulativo (Figura 3.2) para definir el circulo y al momento de utilizar el anillo para explicar que es una circunferencia, ella formaliza ambas definiciones. La definición de circunferencia se da a conocer al estudiante, de acuerdo al Mineduc (2014a), en séptimo básico, ya que se espera que los estudiantes logren comprender que la circunferencia es un lugar geométrico cuya característica radica en los puntos que están a igual distancia del centro.

También se puede observar que igual la profesora intenta dar autonomía a los alumnos a la hora de resolver ejercicios como se ve en la Tabla 3.5.

Tabla 3.5 Extracto de la transcripción de la clase del profesor A: Tiempo de trabajo estudiantes

[L575]		Uno encuentra las ecuaciones, al final de su guía miren, al final de su guía, dice encuentra
[L576]		las ecuaciones principal y general de cada circunferencia a partir de los datos que se indican, como
[L577]		solo hemos vistos la ecuación principal por el momento ustedes van a terminar en el ejercicio uno
[L578]	P	y en el ejercicio dos, ¿cuál será la ecuación principal?, ya, me dice que el centro es (-3, 1) y el radio
[L579]		es 4, mientras que en el segundo dice que el centro es (0,7) y el radio es raíz de siete, ya vamos.
[L580]		[Estudiantes resuelven ejercicios en forma individual mientras la profesora se pasea en la sala
[L581]		abriendo las cortinas y observando que los estudiantes trabajan, esto ocurre en 1:50]
[L582]	P	Ya mientras que ustedes están concentrados yo voy a pasar la lista ya. [Una estudiante llama
[L583]		a la profesora preguntando en voz muy baja y esta responde en voz alta en la pizarra]

En la Tabla 3.5 se puede ver que la profesora asigna tiempo para que los estudiantes trabajen en forma individual, aplicando los contenidos explicados por ella a través de ejemplos en la pizarra y en la guía (anexo 2) entregada durante la clase; guía proporcionada con el objetivo de lograr evaluar si los estudiantes lograron aprender la ecuación principal de la circunferencia, en este caso la profesora pide una representación analítica la cual, tal como lo afirma Méndez y Pérez (2016), es una representación donde predomina la ecuación, (Figura 3.1).

3.2.4 Aspectos mediacional de la práctica del profesor A

En el desarrollo de la clase la profesora utiliza los recursos propios de la sala de clases pizarra y plumones, pero además también utiliza recursos del ámbito manipulativo (Figura 3.2 y 3.4) el cual se observa en el desarrollo de la clase, que solo los manipula ella y no los estudiantes.

Figura 3.4. Manipulativo utilizado por la profesora A

El número de estudiantes en este electivo es de 38, pero en la clase analizada se encontraban presente sólo 28. La distribución de los estudiantes no era la más adecuada ya que se encontraban muy dispersos, debido a las inasistencias, y estas salas están habilitada para 45 estudiantes. Esta asignatura tiene por horario 3 horas semanales, las cuales se distribuyen los días jueves en la jornada de la tarde de 14:15 a 15:00 horas y el día viernes en la jornada de mañana de 11:30 a 13:00 horas, el horario de la clase que se observó fue un día viernes. Se observó además que la profesora da más tiempo a los conocimientos previos durante el desarrollo de la clase, esto se debe a que es la primera clase de circunferencia.

Al comenzar la clase, la profesora introduce la noción de cónicas y cómo éstas se generan a partir de dos conos opuestos por el vértice, llamado por la profesora sólido de revolución (ver Tabla 3.1). Para ello, utiliza material manipulativo de madera (Figura 3.4) que representa a este sólido de revolución generado, según la profesora, por dos líneas rectas. Con este material, ella hace recuerdo a los estudiantes de cómo se generaba la parábola.

Existen autores como Zúñiga (2010), Barrantes y Balletbo (2012), entre otros, que sugieren que son adecuados el uso de manipulativos para la introducción de las secciones cónicas. Asimismo, Pérez (2004) afirma que con el material manipulativo los estudiantes logran reconocer características y propiedades de cada una de las cónicas; sin embargo, se evidencia cómo la profesora no vincula la práctica matemática y el uso de los manipulativos. Meavilla y Oller (2013), afirman que al utilizar en geometría material manipulativo se logra observar y comprender propiedades geométricas difícil de entender, lo cual permite que los estudiantes logren captar y comprender; no obstante, a simple vista no se logra observar esto en la práctica de la profesora.

En la Tabla 3.3 podemos observar que la profesora utiliza recursos materiales manipulativos tales como los conos y su anillo (Figura 3.2), pero sólo los utiliza como material de observación por parte de los estudiantes. Eduteka (2003), dice que un objeto cualquiera o instrumento que se pueda ver o palpar sirve para reconocer conceptos matemáticos, pero la profesora no logra utilizar de manera correcta el manipulativo.

Otro aspecto relevante de destacar, es que la profesora al momento de la enseñanza del objeto matemático invierte tiempo cuando los alumnos desarrollan ejercicios, tal como se puede ver en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6 Extracto de la transcripción de la clase del profesor A: Dificultades en el aprendizaje

[L659]	P	Ya estamos listo o falta todavía
[L660]	E	[grupo algunos] Listos
[L661]	P	Estamos listos dicen por acá [profesora responde pregunta a un estudiante]
[L662]	P	¿Están listo? [Pregunta a un grupo de estudiantes]
[L663]	E	[grupo algunos] Sí
[L664]	P	Ya. A ver cuantos faltan, ¿esperemos un ratito?
[L665]	E	[grupo algunos] Sí
[L666]	P	Solidaricemos, por allá están rapidito tratando de avanzar, esperémoslo un ratito.

En la Tabla 3.6 podemos observar que la profesora, al momento de las actividades de aplicación del contenido, se preocupa de los tiempos que necesitan los estudiantes al momento de resolver sus ejercicios, dedicando un tiempo suficiente a los estudiantes que presentan más dificultad de comprensión del objeto matemático.

3.2.5 Aspectos emocionales de la práctica del profesor A

Cabe señalar que en el desarrollo de la clase los estudiantes mostraron un gran interés, ya que participaron de manera activa cuando la profesora les daba el espacio y también al momento de realizar las actividades. La mayoría de las actividades planteadas son los que se utilizan tradicionalmente.

De acuerdo con la Tabla 3.3, la profesora promueve de manera muy efusiva la participación en las actividades de la clase, felicitando por su participación a los estudiantes que lograban recordar los contenidos que habían visto el año anterior, para así no provocar un rechazo a la geometría.

Además se puede observar en la Tabla 3.6 la profesora trabaja la constancia y perseverancia de los estudiantes, al momento que algunos de estos se demoran más que otros en resolver los ejercicios, ya que utiliza la palabra de solidarizar con los estudiantes que se están demorando un poco más y se espera que todos terminen para hacer la corrección de estos.

También podemos observar que se trabaja constantemente la motivación de los estudiantes como vemos en la Tabla 3.7.

Tabla 3.7 Extracto de la transcripción de la clase del profesor A: Motivación.

[L272] [L273]	P	Ya perfecto, me queda claro que se acuerdan de la formula, me interesaría más que ustedes se acordaran de donde salió esa fórmula ¿se acuerdan?
[L274]	E	[Grupo algunos] De Pitágoras.
[L275]	P	Muy bien, ¿salió del teorema de?
[L276]	E	[Grupo algunos] Pitágoras.
[L277] [L278]	P	Pitágoras, perfecto súper. Entonces nosotros vamos a utilizar, eso que ustedes ya sabe, que salió del teorema de Pitágoras, cierto, donde decía que los catetos al cuadrado ¿se acuerdan o no?

Podemos observar en la Tabla 3.7 que la profesora, durante el desarrollo de la clase, motiva a sus estudiantes al momento que van recordando los conceptos previos necesarios que van a utilizar durante el desarrollo de la unidad usando palabras como “muy bien”, “súper”.

3.2.6 Aspectos ecológicos de la práctica del profesor A

El curso de la profesora está conformado por tres grupos de estudiantes que provienen de tres cursos diferentes, de los cuales eligieron esta asignatura. Lo anterior impacta en la dinámica del curso al momento de las interacciones, sobre todo en la comunicación entre los estudiantes, ya que se observa que no existe una comunicación entre estudiantes de distintos grupos.

Nos damos cuenta que la profesora implementa la clase siguiendo las directrices curriculares de los planes electivos del Mineduc (2001), de la asignatura electiva de algebra y modelos analíticos. Además, constantemente la conecta con contenidos previos insertos en el currículo chileno de años anteriores. Hace uso de las directrices curriculares como por ejemplo, el lograr relacionar la circunferencia como cónica con contenidos vistos anteriormente como se ve en la Tabla 3.2, al momento de trabajar con los elementos de la circunferencia. En la Tabla 3.3, se puede observar cuando los estudiantes logran comprender y recordar el concepto de círculo y circunferencia vistos por estos en séptimo básico.

La profesora constantemente trata de relacionar los contenidos con otros contenidos matemáticos, como se puede observar en la siguiente Tabla 3.8.

Tabla 3.8 Extracto de la transcripción de la clase del profesor A: Relación de elementos entre la parábola y la circunferencia

[L171]	P	Perfecto, estamos de acuerdo con la parábola con los elementos, ahora relacionémoslos con
[L172]		los elementos de la circunferencia, eh. Supongamos que yo tengo la siguiente circunferencia
[L173]		[profesora comienza a dibujar en la pizarra, el plano cartesiano], ¿Qué elementos creen
[L174]		ustedes, que yo podría encontrar en la circunferencia?
⋮		⋮
[L233]	P	Porque si hablamos de una directriz, si pensamos que al igual que en la parábola tiene una
[L234]		directriz, tendría que ir una aquí, una aquí, una aquí, una aquí [profesora indica la circunferencia
[L235]		dibujada en el plano cartesiano en la pizarra distintos puntos alrededor de esta, cuando dice aquí],
[L236]		porque en realidad la ecuación de la directriz como que me pone limite ¿o no?, si y acá, sea
[L237]		¿cuantas ecuaciones de la directriz, si es que hubiera yo debería tener?, Paz

En la Tabla 3.9, se puede ver cómo la profesora intenta relacionar cada elemento de la parábola con la circunferencia.

Tabla 3.9 Extracto de la transcripción de la clase del profesor A: Relación de ecuación entre la parábola y la circunferencia

[L282] [L283] [L284]	P	Ya, que decía que los catetos al cuadrado más cateto al cuadrado es igual a hipotenusa al cuadrado, pero ahora lo vamos aplicar para determinar cuál es la ecuación de la circunferencia, en el caso de la parábola ¿cuantos tipos de ecuaciones teníamos?
[L285]	E	[Grupo algunos] Dos
[L286]	E	[no identificable] Principal y general.
[L287]	P	Principal y general, y en el caso de la circunferencia ¿Qué creen que vamos a tener?
[L288]	E	[Grupo algunos] Principal y general.
[L289] [L290]	P	Principal y general, ¿cierto?, ¿sí?, entonces ahora vamos a descubrir de donde salió esa ecuación de la circunferencia.

De acuerdo con el Mineduc (2001), en el plan electivo los estudiantes deben reconocer que los lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas, esto es lo que lleva a cabo la profesora al momento de realizar preguntas (ver Tabla 3.9), refiriéndose a las ecuaciones de la parábola vistas anteriormente, para luego enlazarlas con la ecuación principal y general de la circunferencia.

3.3 Análisis de la práctica didáctico matemática del profesor B

3.3.1 Aspectos epistémicos de la práctica del profesor B

El profesor da inicio a su clase con una presentación en Power Point donde se nombran las cuatro cónicas que está trabajando y muestra cómo se generan a través de los cortes (Figura 3.5). Castillo (2017), define las cónicas como las curvas planas que se obtienen al cortar una superficie cónica por un plano.

Figura 3.5. Explicación del Profesor B sobre la generación de cónicas.

En la Figura 3.5, podemos observar que el profesor enseña sólo de manera visual la generación de las cónicas y no utiliza propiedades acerca de la relación entre el cono y el plano, tal como lo proponen algunos autores como Ramírez (2013) y Castillo (2017). Luego, en la Tabla 3.10, podemos leer las indicaciones que el profesor realiza con respecto a los cortes para generar la circunferencia.

Tabla 3.102 Extracto de la transcripción de la clase del profesor B: Introducción a las cónicas

[L3]		Ya, entonces ahora vamos a ver la circunferencia, que es la otra cónica ya, que es la otra cónica
[L4]		que corresponde al 2º semestre porque después voy a trabajar con ustedes lo que es la elipse y la
[L5]		Hipérbola, ya entonces hoy día voy a empezar con algo simple acerca de la circunferencia ¿ya?,
[L6]		entonces lo 1º es que observen lo siguiente miren, se acuerdan que cuando trabajamos la parábola
[L7]	P	yo les mostré donde salían estas famosas cónicas, salen cierto de la intersección de un cono que
[L8]		está en revolución ¿ya? con un plano, y ahí están las 4 cónicas, nosotros trabajamos la parábola
[L9]		ya que es la intersección de este plano con ese cono y nos toca ver ahora la circunferencia que es
[L10]		cuando el plano cierto es perpendicular a la base del cono ya y de ahí sale la circunferencia ya de
[L11]		esa parte es la intersección entonces entre el plano y un cono en revolución. ¿Alguna pregunta?
[L12]		[durante la explicación el profesor va indicando en el ppt los cortes del cono]

Pero al hacer una lectura más acaba de cómo se genera la circunferencia podemos ver que el profesor incurre en un error cuando afirma que la circunferencia se genera cuando el plano es perpendicular a la base del cono, esto lo realiza indicando las imágenes que están en la presentación de power point (Figura 3.5). Castillo (2017) afirma que la circunferencia se genera si el plano corta de manera perpendicular al eje del cono y no a la base como lo indica el profesor.

Posterior a esto, el profesor da a conocer y escribe en la pizarra el objetivo de la clase el cual es: conocer la circunferencia como lugar geométrico y su ecuación principal. El Ministerio de Educación Mineduc (2001) propone que los estudiantes deben ser capaces escribir la ecuación del lugar geométrico (circunferencia), tal como lo indica el profesor en la Tabla 3.11.

Tabla 3.11 Extracto de la transcripción de la clase del profesor B: Definición de la circunferencia

[L55]		A través de eso que yo recién le expliqué ahí como yo puedo dar una definición formal de la
[L56]		circunferencia, como la puedo definir con mis propias palabras y luego definiéndola con la parte
[L57]		matemática, darse cuenta que la circunferencia es un lugar geométrico, ya es una cónica estamos
[L58]	P	trabajando con cónica ya, entonces la vamos a definir de la siguiente forma: ya la circunferencia,
[L59]		ya es el lugar geométrico, ya ¿de qué? de todos los puntos ya, de todos estos puntos, cierto que
[L60]		[Indica el profesor la circunferencia qué esta dibujada en la pizarra] están acá, de todos los
[L61]		puntos P(x,y), que están a una distancia r, ya que es la distancia que está allá del centro O(h,k).

El profesor intenta dar diferentes definiciones de la circunferencia (ver Tabla 3.11), tal como lo explica él, una definición formal, aunque de una manera verbal para luego darle un enfoque matemático, como lugar geométrico y de manera gráfica al momento de referirse a un gráfico que realizó en la pizarra. Méndez y Pérez (2016), se refieren a los distintos tipos de representaciones de las secciones cónicas de la geometría analítica, tales como verbal, gráfica y analítica. Al momento de resolver la guía de ejercicios, los estudiantes pasan a desarrollarlos en la pizarra, por ejemplo, en el ejercicio B (Figura 3.6), sólo les indica trabajar de manera algebraica, ya que en el enunciado de la guía dice "Encuentra las ecuaciones principal y general de cada circunferencia a partir de los datos que se indican" (anexo 4), en este caso el profesor aclaró que sólo se trabaja con la ecuación principal, ya que este es el objetivo de la clase.

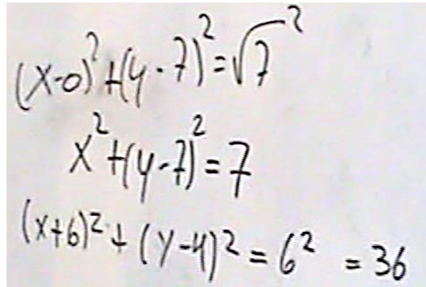


Figura 3.6. Trabajo de manera algebraica profesor B

3.3.2 Aspectos cognitivo de la práctica del profesor B

Al comenzar la clase, el profesor hace alusión a los conocimientos previos que los estudiantes han adquirido en años anteriores, tales como los elementos de la circunferencia, los cuales nombra, esto se puede observar en la Tabla 3.12.

Tabla 3.12 Extracto de la transcripción de la clase del profesor B: Elementos de la circunferencia

[L22]		Tenía un concepto igual que mostrarles miren qué es por ejemplo esa circunferencia, qué
[L23]		ustedes conocen la circunferencia ustedes la trabajaron en cursos anteriores ya ehhh, mostraron
[L24]		los elementos de la circunferencia entonces pueden describir un poco ya o un caso particular
[L25]		de los conceptos del centro y del radio la circunferencia ya así que anoten eso que está ahí para
[L26]		que puedan ir trabajando el concepto de la circunferencia. Bueno el concepto de circunferencia
[L27]		está relacionado con el centro cierto? y con los puntos donde todos tienen que estar a una misma
[L28]	P	distancia ya, eso es lo que ustedes conocen y años anteriores ustedes trabajaron otros elementos de
[L29]		la circunferencia cómo son las cuerdas, las tangentes, cierto? las secantes, los ángulos dentro de la
[L30]		circunferencia. Esa circunferencia que está ahí [El profesor se refiere a imagen de Power Point]
[L31]		está en un plano normal, no está en el plano cartesiano, sino que un bosquejo de la circunferencia
[L32]		con centro y con el radio que está ahí. ¿La definición del radio yo creo que la conocen ustedes
[L33]		cierto? La distancia desde el centro a un punto cualquiera de la circunferencia, lo que yo quiero
[L34]		hacer ahora esta parte de la circunferencia, pero en el plano ya como lugar geométrico ¿ya?

El profesor luego de nombrar algunos conceptos previos, como se puede verificar en la tabla anterior, proyecta la imagen de una circunferencia (Figura 3.7), pero no verifica si los estudiantes recuerdan aquellos conceptos previos, sólo les sugiere a los estudiantes que tienen que anotar, ya que posteriormente lo van a necesitar. Hay que recordar que estos conocimientos, de acuerdo al Mineduc (2014a), los estudiantes los han adquirido en séptimo básico, ya que es aquí en donde deben ser capaces de utilizar propiedades y relaciones geométricas y deben tener claro el radio y diámetro.

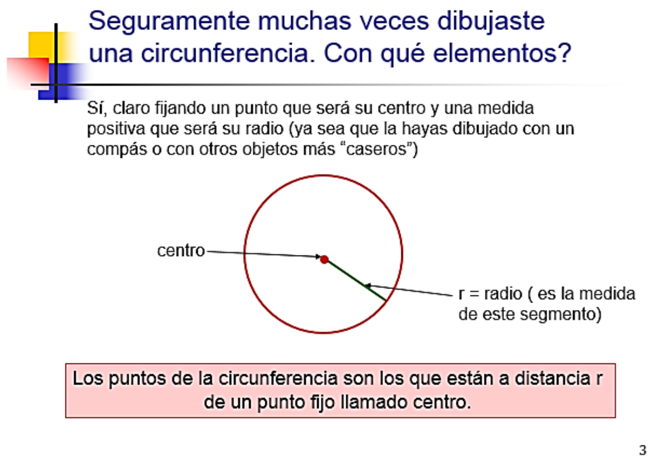


Figura 3.7. Elementos de la circunferencia descritos por el profesor B

Podemos observar en la (Figura 3.7), que el profesor logra recordar a los estudiantes sólo el centro y radio de la circunferencia como conocimiento previo, pero durante el desarrollo de la clase el profesor no verifica si los estudiantes cuentan con los conceptos previos necesarios, además no refuerza antes de aplicar estos con el objeto matemático que se está trabajando, da por hecho que los estudiantes deben saber y sólo aplica, tal como se puede observar en extracto de clase que se presenta en la Tabla 3.13.

Tabla 3.13 Extracto de la transcripción de la clase del profesor B: Distancia entre dos puntos

[L94]	P	Entonces ¿cómo? ¿Se acuerdan cuando trabajamos la distancia entre dos puntos?
[L95]	E	[grupo] sii
[L96] [L97]	P	Ya entonces vamos a trabajar acá voy a borrar acá [profesor intenta borrar la definición de Circunferencia]
⋮		⋮
[L101] [L102]	P	Voy a calcular acá entonces, la distancia ya, entre OP. ¡Ya! que la distancia que hay entre el centro O y el punto P. Pero ustedes saben calcular la distancia entre dos puntos.
[L103]	E	[algunos] si
[L104] [L105] [L106] [L107]	P	Se acuerdan que tomamos los valores de (x_1, y_1), entonces este lo voy a llamar (x_1, y_1)[Profesor se refiere al punto P de la circunferencia qué tiene en la pizarra], (x_2, y_2) [Profesor se refiere al centro O de la circunferencia dibujada en la pizarra], y voy establecer la relación con la resta de las coordenadas ¿Ya?, entonces se acuerdan de la fórmula ¿Qué era lo que llevaba?
[L108]	E	[algunos] La distancia
[L109]	P	La distancia era la raíz

En esta Tabla 3.13 se puede observar que se trabaja distancia entre dos puntos contenido visto por los estudiantes en 3° medio en plan común Mineduc (2014b) y reforzado antes de comenzar a trabajar las cónicas. Al no manejar los estudiantes los conceptos previos adecuados, se observa que cuando los estudiantes desarrollan la guía de ejercicios, estos se preocupan de esta deficiencia, ya que constantemente llaman a sus puestos al profesor para buscar respuesta de aspectos que no recuerdan de años anteriores.

3.3.3 Aspectos interaccional de la práctica del profesor B

Al observar la clase, en el inicio se produce un monólogo donde el profesor no da instancia a la participación de los estudiantes; esto ocurre aproximadamente durante los 10 primeros minutos de la clase, esto se puede observar en las Tablas 3.10 y 3.12, donde sólo se ve que el profesor expone sin interactuar con los estudiantes. Luego, conforme transcurre la clase, se observa más participación por parte de los estudiantes, tal como se logra observar en la Tabla 3.13. Además, la clase se desarrolla de manera muy tradicional, el profesor explica y posteriormente los estudiantes resuelven los ejercicios.

En el momento de resolver el ejemplo y ejercicios, el profesor da más autonomía a los estudiantes, ya que les proporciona tiempo para que ellos investiguen e interactúen entre sí, y de esta manera logren sacar sus propias conclusiones a partir de los ejercicios planteados. Además, se observa que el profesor interactúa de forma personal con los estudiantes resolviendo las dudas de estos en sus mismos asientos, es decir, el profesor es quien se mueve dentro de la sala, esto se logra observar en la Tabla 3.14.

En la Tabla 3.14 se logra observar que el profesor resuelve muchas dudas en forma individual, además que los estudiantes se encuentran con muchas dudas, esto se podría haber dado debido a la falta de refuerzo de los contenidos previos, tal como lo afirma Ramírez y Hernández (2017), porque así los estudiantes lograrían tener un pensamiento más analítico.

Tabla 3.14 Extracto de la transcripción de la clase del profesor B: Resolución de guía de ejercicios

[L232]	P	Entonces a medida que van a ir haciendo los ejercicios de la guía se van a ir encontrando con
[L233]		algunas dificultades
[L234]	E	[no identificable llama al profesor] podría venir.
[L235]	P	[Se detiene donde otra a estudiante a resolver las dudas]
[L236]	E	[no identificable] es x e y o no
[L237]	P	El centro es si x e y, si porque el punto donde reemplazas es (x, y) [profesor se pasea por la
[L238]		sala resolviendo dudas a los estudiantes, y revisando los ejercicios resueltos por estos]
[L239]	E	[no identificable] ¿Pasa por? el punto.
[L240]	P	Si porque cuando pasa por un punto, cuando te dan el centro y te dicen que pasa por un punto
[L241]		ese es el punto (x, y), ¿ya?.
[L242]	E	[no identificable] Profe a que se refiere con ¿pasa por?
[L243]	P	el punto (x, y) [profesor señala el punto de la circunferencia que tiene en la pizarra]
[L244]	E	[no identificable] Ah y hay que sacar la distancia.
[L245]	P	Y ahí sacas la distancia, sí.
[L246]	P	[Se pasea por la sala resolviendo dudas a los estudiantes, y revisando los ejercicios resueltos
[L247]		por los estudiantes]
[L248]	E	[algunos llaman a sus puestos para consultar en forma personal]
[L249]		[Los estudiantes trabajan en su guía de ejercicio de forma grupal y el profesor le da tiempo]
[L250]	P	Quien va a pasar a hacer la primera, por una décima [profesor se refiere a pasar a la pizarra]

3.3.4 Aspectos mediacional de la práctica del profesor B

El profesor, en el desarrollo de la clase, utiliza los recursos propios de una sala de clases como pizarra y plumones. Además, al comienzo utiliza un power point, como se ven las diapositivas de las Figuras 3.5 y 3.7, para que los estudiantes logren obtener una mayor visualización de cómo se genera el objeto matemático a través de la intersección de un cono que está en revolución, con un plano (Castillo, 2017; Ramírez, 2013). Así mismo, el profesor señala al final de la clase que para ver la gráfica de la circunferencia se puede trabajar con un software de geometría dinámica: Geogebra; tal como lo explica en el extracto de la Tabla 3.15. Este tipo de recursos tecnológicos es propuesto por Echevarría (2015), Bastos (2014) y Mejía (2016).

Tabla 3.15 Extracto de la transcripción de la clase del profesor B: Programa Geogebra

[L346] [L347] [L348] [L349]	P	Ya a ver miren, shh mañana vamos a terminar con la guía y lo otro que yo le quería mostrar miren, es que el programa Geogebra, chicos esperen un ratito el programa Geogebra me sirve para representar esta circunferencia ¿ya? [profesor escribe la ecuación de la circunferencia en programa para mostrársela a los estudiantes, los estudiantes guardan sus cosas en sus bolsos]
⋮		⋮
[L352] [L353]	P	Mañana le voy a explicar cómo representar la circunferencia con Geogebra, porque igual es otra herramienta que tenemos para trabajar ¿ya?. Se pueden retirar.

El número de estudiantes en este electivo es de 36, pero en la clase analizada se encontraban presente solo 31. Esta asignatura tiene por horario 3 horas semanales, las cuales se distribuyen los días jueves en la jornada de la tarde de 14:15 horas a 15:00 horas y los días viernes jornada de mañana de 11:30 a 13:00, la clase que se observo fue el día jueves en la tarde, lo que influyo en el comportamiento de los estudiantes ya que se encontraban bastante inquietos. Se observa además en la Tabla 3.13 que el profesor enfoca el tiempo a que los estudiantes desarrollen la guía de ejercicios y al monitoreo por parte del profesor en este proceso aclarando dudas.

3.3.5 Aspectos emocionales de la práctica del profesor B

Podemos darnos cuenta que los estudiantes, cuando el profesor le da los tiempos y el espacio para trabajar y participar en la clase, logran mostrar un interés por el aprendizaje del objeto matemático. Las actividades planteadas en la guía del profesor son de muy tradicionalistas. Además en las prácticas el profesor tampoco transmite o trata de potenciar los estados emocionales o afectivos de sus estudiantes, o al menos no hay evidencia de ello en esta clase.

3.3.6 Aspectos ecológicos de la práctica del profesor B

El grupo curso al interior de la sala está conformado por tres grupos que provienen de tres cursos diferentes, de los cuales eligieron esta asignatura, esto impacta en la dinámica del grupo al momento de las interacciones, en la comunicación entre los estudiantes, ya que se observa una relación muy dividida.

Durante el desarrollo de la clase se logra observar que el profesor la implementa de acuerdo a las directrices curriculares de los planes electivos del Mineduc (2001), de la asignatura electiva de algebra y modelos analíticos. El profesor intenta conectar los contenidos vistos en el curriculum de años anteriores, solo nombrándolos como se observa en las Tablas 3.12 y 3.13, como por ejemplo en la Tabla 3.12 se enfoca a los elementos de la circunferencia contenido visto en por el estudiante de acuerdo al Mineduc (2014a) en séptimo básico, también a las relaciones que se establecen entre trazos determinados por cuerdas y secantes de una circunferencia, además identifican ángulos inscritos y del centro en una circunferencia ambos contenidos vistos de acuerdo al curriculum Mineduc (2011) en segundo medio, en la Tabla 3.13 hace referencia a la distancia entre dos puntos de acuerdo al Mineduc (2014b) se debe conocer en tercero medio plan común.

De acuerdo al Mineduc (2001) propone que a través de los lugares geométricos los estudiantes promueven el pensamiento asociado a las imágenes, esto es lo que el profesor propone en la Tabla 3.11, pero al momento de la resolución de la guía de ejercicios no lo ejecuta, tal como se observa en la Figura 3.6.

3.4 Algunas reflexiones sobre la práctica de ambos profesores

Podemos observar que ambos profesores al iniciar sus clases comienzan a explicar cómo se generan las cónicas. La profesora A se apoya de un manipulativo para mostrárselos a los estudiantes, en cambio el profesor B trabaja una imagen en presentación Power Point. Pero en este intento de explicar, vemos que ambos profesores no utilizan una rigurosidad matemática, lo que los lleva a cometer errores matemáticos. Podemos darnos cuenta que son causa de las cantidades de metáforas que ambos utilizan, se puede pensar que son introducidas para poder facilitar las explicaciones, sin embargo, esto lleva a provocar conflictos cognitivos en los estudiantes.

Cuando los profesores trabajan contenidos previos, podemos observar que la profesora A los trabaja con mayor rigurosidad matemática, ya que ésta le consulta constantemente a los estudiantes para verificar si estos saben los contenidos y también los va reforzando durante el desarrollo de la clase, a diferencia del profesor B que sólo los nombra y aplica, asumiendo que los estudiantes deben tenerlos.

La interacción con los estudiantes se ve más reflejada en la práctica de la profesora A, ya que se observó durante gran parte del desarrollo de la clase. Además, le daba los espacios para que las preguntas se hagan de forma inmediata; a diferencia del profesor B quien sólo dio instancia de preguntar a los estudiantes cuando se estaban resolviendo los ejemplos y en el desarrollo de la guía.

Los grupos de estudiantes que trabajan en ambas clases eran muy parecidos, ya que ambos grupos pertenecían a un electivo compuesto de varios cursos. Los aspectos emocionales en la profesora A se lograron observar ya que ella constantemente motivaba a sus estudiantes y se preocupaba del aprendizaje de todos, sin importar el tiempo que le llevara. Por el contrario, el profesor B, no refleja en su práctica la parte emocional con los estudiantes, pero sí interactúa con estos al momento de resolver la guía de ejercicios.

También se logra observar en las prácticas de ambos profesores que se guían por las directrices del curriculum chileno, por ejemplo, al momento de los conceptos previos, los profesores reconocen bien qué contenidos los estudiantes han trabajado en años anteriores, así lo demuestran cuando la profesora A le pregunta y refuerza a sus estudiantes, y el profesor B cuando los nombra. También se puede observar cuando implementan su práctica docente, en el desarrollo de la clase analizada de ambos, ya que el contenido expuesto está en completa relación a los planes y programas del plan electivo de álgebra y modelos analíticos.

En conclusión podemos señalar que las siguientes figuras reflejan lo que hemos comentado, la valoración de la de la idoneidad didáctica de ambos profesores. En la Figura 3.8, podemos observar que la profesora A, tiene una alta idoneidad ecológica, interaccional, emocional y cognitiva, además se puede observar que podría mejorar en la idoneidad mediacional y epistémica.

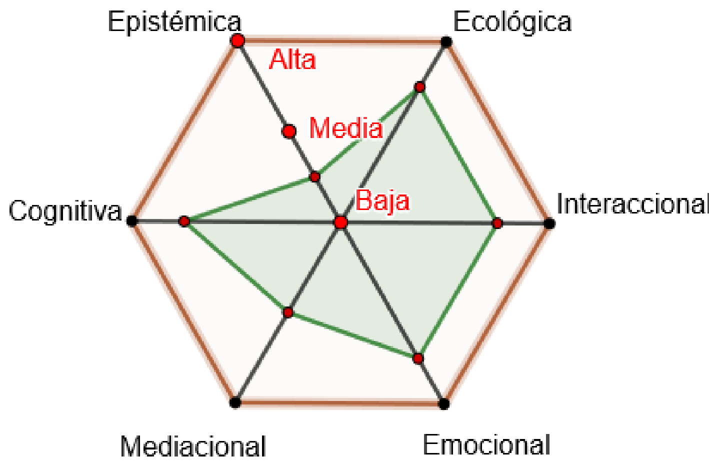


Figura 3.8. Valoración de la práctica profesora A

En la Figura 3.9, se observa la idoneidad del profesor B, el cual tiene una alta idoneidad ecológica, y un nivel medio de idoneidad cognitiva y mediacional; pero donde se encuentran sus mayores dificultades es en la idoneidad epistémica, interaccional y emocional.

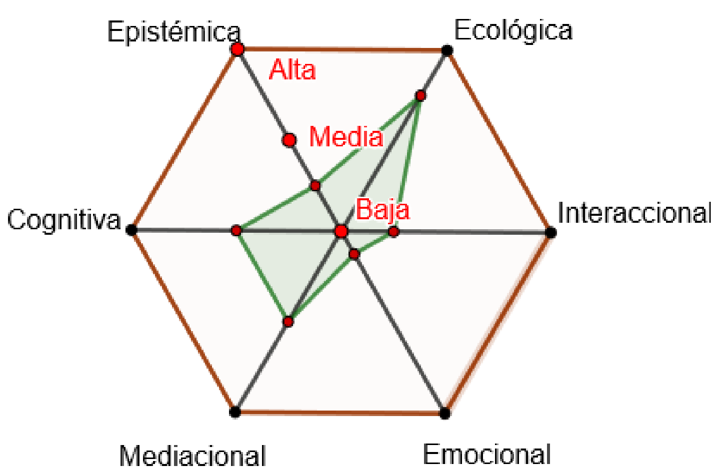


Figura 3.9. Valoración de la práctica profesor B

Finalmente de acuerdo a las Figuras 3.8 y 3.9 de la valoración de las prácticas docentes a través de los criterios de idoneidad podemos concluir que la profesora A, tiene una mejor valoración de su clase debido que esta "se acerca más al hexágono regular", el cual representa una práctica didáctico-matemática con alta idoneidad.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue caracterizar las prácticas didáctico-matemáticas de profesores en servicio cuando introducen el estudio de la circunferencia en estudiantes de Enseñanza Media. Para dar respuesta a este objetivo, se plantearon cuatro objetivos específicos que analizaremos posteriormente.

Para el primer objetivo específico nos propusimos caracterizar prácticas didáctico-matemáticas de referencia para la enseñanza de la circunferencia desde el punto de vista de la geometría analítica. Este objetivo se relaciona con el estudio de la literatura, por lo que primero se realizó una revisión bibliográfica histórica de las secciones cónicas, en específico del objeto matemático circunferencia, ya que la enseñanza de la geometría en el enfoque didáctico es fundamental con respecto a la construcción del pensamiento geométrico. Adicionalmente, se revisaron distintas investigaciones con los diversos significados de la circunferencia en la historia de las cónicas, los tipos de representaciones del objeto matemático, los errores y dificultades que hay al momento de la enseñanza, las diferentes propuestas de estrategias de enseñanza de las cónicas y por último la enseñanza de las cónicas; en específico, nuestro objeto matemático: la circunferencia en el curriculum chileno. Con todo lo descrito anteriormente, podemos acercarnos al problema de investigación relacionado con caracterizar prácticas didáctico-matemáticas, para así comprender el tipo de prácticas que llevan cabo los profesores en servicio.

En nuestro segundo objetivo específico nos planteamos observar las clases de dos profesores de matemáticas de enseñanza media relativas a la introducción del estudio de la circunferencia. Lo primero fue investigar de acuerdo al curriculum chileno, en qué nivel y momentos se trabaja el objeto matemático para poder llevar a cabo la observación de las practicas matemáticas de los profesores. Esta observación se realizó por medio de registros de videos de las distintas sesiones de clases para analizar más detalladamente los elementos que el profesor toma en cuenta al momento de desarrollar sus prácticas, además de revisar los recursos que utiliza como presentaciones power point, material manipulativo, guía de ejercicios, etc.

El tercer objetivo: describir las prácticas didáctico-matemáticas de los profesores participantes en el estudio sobre la enseñanza de la noción de circunferencia, se llevó a cabo transcribiendo la primera clase de introducción a la circunferencia de cada profesor (ver anexo 1 y anexo 3) para luego realizar un análisis con el marco teórico EOS, utilizando los criterios de idoneidad.

Al realizar el análisis de las prácticas didáctico-matemáticas con los criterios de idoneidad que utilizan los profesores con respecto a la enseñanza de la noción de la circunferencia, tal como lo indica el cuarto objetivo, se puede concluir que ambos profesores tienden a utilizar prácticas tradicionalistas debido a que explican el contenido y luego los estudiantes resuelven la guía de ejercicios. Lo anterior, nos indica que existe una carencia de diversidad de formas de enseñanza. Con respecto a los recursos utilizados, en primera instancia podemos concluir que sólo usan los materiales básicos de una sala de clases tal como pizarra y plumón, aunque una de las participantes, profesora A, incluyó manipulativos como un elemento de enseñanza, pero éste solo tuvo una función de observación para los estudiantes, al igual que la presentación power point del profesor B. Pudimos observar además, que los profesores cometen errores matemáticos al momento de explicar cómo se generaban las cónicas, lo que nos lleva a concluir que ambos profesores no aplican rigor matemático al momento de implementar sus clases, es decir, la falta de conceptos y propiedades matemáticas al momento de explicar. También, se logró observar que los profesores a pesar de que intentaban introducir el objeto matemático con distintos tipos de representación tal como Méndez y Pérez (2016), al momento de ejercitar, sólo llegaban a la representación algebraica.

En nuestro quinto objetivo nos propusimos valorar, a partir de los resultados del objetivo específico tres y cuatro, la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y de aprendizaje realizados por los dos profesores del estudio para la enseñanza de la noción de circunferencia. Al hacer el análisis de la clase bajo la mirada de los criterios de idoneidad, en la idoneidad epistémica, podemos observar la falta de rigurosidad matemática en ambos profesores al introducir el objeto matemático esto se dio en errores en conceptos matemáticos al momento de explicar lo que pueden llevar a los estudiantes a confusiones posteriormente. Así mismo pudimos identificar poca representatividad del objeto cuando los estudiantes resuelven la guía de ejercicios, la cual no era la misma al momento de enseñanza, esto nos indica una baja o media idoneidad epistémica. La idoneidad cognitiva en la profesora A se puede considerar media o alta y en el profesor B media, la idoneidad interaccional en la profesora A se puede considerar media-alta y en el profesor B baja, la idoneidad mediacional la podemos considerar media en ambos profesores. Con respecto a la idoneidad emocional, en la profesora A se puede considerar media-alta a diferencia del profesor B que sería baja y la idoneidad ecológica se puede considerar media- alta en ambos profesores.

Para dar respuesta a nuestro objetivo de caracterizar las prácticas didáctico-matemáticas de profesores en servicio cuando introducen el estudio de la circunferencia en estudiantes de Enseñanza Media, revisamos parte de la historia y literatura del objeto matemático circunferencia, recogiendo datos a través de registros de videos para su posterior análisis a través de la mirada del EOS, utilizando de éste los criterios de idoneidad, podemos concluir que las prácticas de los profesores observados carecen de rigor matemático, pero si se trabajan los contenidos de acuerdo al curriculum chileno del Ministerio de Educación, dando una gran importancia a éste.

Pese a haber avanzado en dirección de caracterizar las prácticas de los profesores y haber encontrado evidencia de las debilidades de los profesores en torno a sus conocimientos matemáticos, falto profundizar en este trabajo algunos aspectos como la planificaciones de los profesores, desarrollar el análisis con más clases y haber ampliado la muestra con más profesores.

Finalmente, nos quedan las siguientes preguntas ¿Qué pasará cuando entre en vigencia el nuevo plan de estudio en donde todos los profesores tienen que impartir este contenido?, ¿Todos los profesores tendrán los conocimientos y competencias para impartir este contenido en la sala de clases?, de acuerdo a el cambio curricular en cuarto medio en el año 2021 debido a que la circunferencia como lugar geométrico viene incluido en los planes y programas de plan común.

BIBLIOGRAFÍA

Arana, R. A. (2016). *Diseño y análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia* (tesis de maestría inédita). Instituto Tecnológico de Sonora, México.

Arrieche, M., & Pérez, Y. (2009). Análisis de un proceso de estudio sobre la elipse mediante los criterios de idoneidad didáctica.

Barrantes, M., & Balletbo, I. (2012). Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria.

Barrantes, M., Balletbo, I., & Fernández, M. (2014). Enseñar geometría en secundaria. In *Memoria del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (pp. 1-14).

Bastos, D. O. (2014). Estudo da circunferência no ensino médio: sugestões de atividades com a utilização do software GeoGebra (Master's thesis). Universidade Federal do Rio Grande (Brasil). Recuperado: http://www.repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/6520/TCC_Debora_Bastos_versao_final.pdf?sequence=1

Bernabeu, M. (2005). Una concepción didáctica para el aprendizaje del cálculo aritmético en el primer ciclo. (Tesis doctoral). Instituto Superior Pedagógico "Enrique J. Varona", Cuba. Recuperado de: www. biblociencias. cu/gsdl/collect/tesis/index/assoc/HASH01b1/98f864c5. dir/doc. pdf.

Blanco, S., De las Heras, R., Fuenzalida, G., y Riveros, J. (1995). Matemática Plan Electivo III y IV medio. Santiago: Santillana.

Bonilla, D., Parraguez, M., & Solanilla, L. (2014). Las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento.

Breda, A., Lima, V. M. R . (2016). Estudiol de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, 5(1), 74-103. Doi: 10.4471/redimat.2016.1955

Buccino, S. (2011). *Historia de la Matemática en un ambiente de Geometría Dinámica: un nuevo enfoque en la enseñanza de las Cónicas.* Universidad Tecnológica Nacional (Argentina). Recuperado:

http://ria.utn.edu.ar/bitstream/handle/20.500.12272/1435/Tesina%20SorayaBuccino.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Carmona. J. (2011). *La circunferencia. Una propuesta didáctica usando el modelo de Van Hiele y* geometría *didáctica*. Tesis de Maestría. Colombia: Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/8855/1/01186517.2011.pdf

Castilla, J. A. (2016). La expresión matemática de la longitud de la circunferencia en el marco de la enseñanza para la comprensión.

Castillo, I. (2017). *Diseño e implementación de guía didáctica y evaluación formativa en la enseñanza de secciones cónicas, en los estudiantes de tercero de bachillerato, de una unidad educativa de la ciudad de Quevedo*. Tesis de Magister, Ecuador.

Cristancho, L. Á. (2012). Construcción de la sección cónica circunferencia por medio del uso del geoplano con estudiantes de grado undécimo.

Da Silva, N. V. S. (2013). Cônicas e suas Diferentes Representações.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. (2007). La Dimensión Metadidáctica de los Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática. Paradigma, 28(2), 49-70.

Eduteca. (2003). Los manipulables en la enseñanza de la Matemática, obtenido desde: http://www.eduteka.org/Manipulables.php

Echevarría, J. A. (2015). *Estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y la geometría analítica, mediado por el geogebra, con estudiantes de quinto grado de educación secundaria*. Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/6756/ECHEVARRIA_ANAYA_JULIO_ESTUDIO.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Fernández, M., & Río, A. (2015). Construcción de triángulos con materiales manipulativos.

Fernández-Mosquera, E. (2011). *Situaciones para la Enseñanza de las cónicas como* lugar *geométrico* desde *lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus* (Doctoral dissertation). Universidad del Valle. (Colombia). Recuperado: http://funes.uniandes.edu.co/9475/1/CB-0450269.pdf

Fortuny, J. M., Iranzo, N., & Morera, J. L. (2010). Geometría y tecnología. En *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 69-86). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas.

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2005). Análisis onto-semiótico de problemas combinatorios y de su resolución por estudiantes universitarios. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 3-36.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 127-135.

Godino, J., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 26(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, *38*, 25-48.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática

Godino, J. D., Moll, V. F., Wilhelmi, M. R., & de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *27*(1), 59-76.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 111-132.

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *9*(2), 53-83.

Jiménez, M. (2018). Herramientas del Enfoque Ontosemiotico (EOS) para el análisis y rediseño de tareas con potencial matemático alto.

Leithold, L. (1998). *El cálculo* (Vol. 7). México. Oxford University Press.

Lopez, C. E. P. (2014). Manipulables físicos y fijación de conceptos de geometría analítica.

Martín-Crespo, M. & Salamanca, A. (2007). El muestreo en la investigación cualitativa.

Mateus, E. (2017). El EOS como herramienta de análisis de un proceso de instrucción.

Meavilla, V., & Oller, A. M. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *82*, 89-100.

Méndez, O. N. Q., & Pérez, A. M. R. (2016). Transferencias entre representaciones verbales de las secciones cónicas en la formación del profesor de matemática. *Pedagogía y Sociedad*, *19*(47), 19-37.

Mejía, A. G. (2016). *Implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza la línea recta, la circunferencia, y la parábola en el grado décimo utilizando herramientas TIC, un estudio de caso*. Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín). Recuperado: http://bdigital.unal.edu.co/55501/1/71216351.2016.pdf

Mesa, H. (2013) Propuesta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de las cónicas en la educación media con énfasis la hipérbola. Universidad Nacional de Colombia. Recuperado: http://bdigital.unal.edu.co/41955/1/70565194.2014.pdf

Mineduc. (2001). Programa de estudio Algebra y Modelos Analíticos 3° Año Medio. Santiago: Mineduc. (Programa vigente decreto n°128/2001).

Mineduc. (2011). Programa de estudio para Segundo año medio: Matemática

Mineduc. (2013a). Programa de estudio para Segundo año básico: Matemática

Mineduc. (2013b). Programa de estudio para Tercer año básico: Matemática.

Mineduc. (2013c). Programa de estudio para Sexto año básico: Matemática.

Mineduc. (2015). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio. Recuperado: https://media.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/28/2017/07/Bases-Curriculares-7%C2%BA-b%C3%A1sico-a-2%C2%BA-medio.pdf

Mineduc. (2014a). Programa de estudio para Séptimo año básico: Matemática

Mineduc. (2014b). Programa de estudio para Tercero medio plan común

Mineduc. (2016). Programa de estudio para primero medio: Matemática.

Molina O. J. (2019). *Sistema de normas que influyen en procesos de argumentación: un curso de geometría del* espacio *como escenario de investigación*. Universidad de Los

Lagos (Chile). Recuperado: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_OMolina.pdf.

Muñoz, Y. (2015). *Análisis histórico–epistemológico de la noción de función en la obra la geometría de René Descartes. Universidad del Valle.* (Colombia). Recuperado: http://funes.uniandes.edu.co/11568/1/Mu%C3%B1oz2015An%C3%A1lisis.pdf

Murillo, J. A. (2013). *Contribución a la enseñanza de las cónicas mediante el uso de la astronomía.* Universidad Nacional de Colombia. Recuperado: http://bdigital.unal.edu.co/9366/1/15426837.2013.pdf

Murillo, J., Madera, A., Monasterio, I., Jaraiz, A., Cantador, R., Sánchez, J. C., & Varas, R. (*2002*). Estudio de casos. *Universidad Autónoma de Madrid*.

Ornelas, M., Diéguez, A., Sánchez, P., & Fonseca, A. (2016). Secuencia didáctica para el aprendizaje de las figuras cónicas y sus diferentes representaciones. *CULCyT*, (50).

Pérez, M. R. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *Revista Suma*, *46*, 71-citation_lastpage.

Pérez, I. (2012). *Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación* desde *una visión analítica.* Universidad Nacional de Colombia. Recuperado: http://bdigital.unal.edu.co/7098/1/01186609.2012.pdf

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. Paradigma, 36(1), 87-109.

Ramírez, D., & Hernández, J. (2017). El aprendizaje de la demostración en las cónicas.

Ramirez, R. H. (2013). *Las Secciones Cónicas en la Escuela Secundaria: un Análisis Matemático y Didáctico* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de General Sarmiento). Universidad Nacional de General Sarmiento (Argentina). Recuperado: https://www.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2014/10/Las-Secciones-C%C3%B3nicas-en-Escuela-Secundaria.-Un-an%C3%A1lisis-matem%C3%A1tico-y-did%C3%A1ctico.pdf

Rivas, H. R. (2014). Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria.

Serrano, J. (2016). Evaluación de material didáctico concreto en la enseñanza de geometría en estudiantes de primero básico del instituto nacional educación básica. Universidad

Rafael Landívar. Recuperado: http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesiseortiz/2016/05/86/Serrano-Jorge.pdf

Stake, R. E. (1994). Case studies. InN. K. Denzin & YS Lincoln (Eds.), Handbook of qualitative research (pp. 236-247).

Zúñiga, C. M. (2010). Lo que la investigación sabe acerca del uso de manipulativos virtuales en el aprendizaje de la matemática. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.

ANEXOS

Anexo 1

Transcripción clase profesora A

[Inicia la clase después a las 11:32hrs. Transcurren dos minutos hasta que la profesora inicia interacción con los estudiantes. Comienza dictando fecha y objetivos de la clase].

PROFESORA: eh, entonces anotamos la fecha de hoy 01-09-17, objetivo dos puntos.

PROFESORA: Conocer los elementos de una circunferencia; determinar la ecuación principal y general de una circunferencia… Sí, atrás sí. [Los objetivos los dicta paseándose por la sala y consultando a los estudiantes si terminaron de anotar antes de continuar dictando].

ESTUDIANTES EN GRUPO: Sí.

PROFESORA: …de una circunferencia dado algunos de sus elementos.[Termina el objetivo]

PROFESORA: ya, vamos a recordar un poquito y para eso quiero que miren acá [refiriéndose a material manipulativo que toma en las manos –sólido de revolución que permite establecer con sus cortes las cónicas].

PROFESORA: ¿les parece conocido?

ESTUDIANTES EN GRUPO: Sí.

PROFESORA: Ya lo habíamos visto antes, ¿cierto? Entonces cuando nosotros comenzamos a trabajar con las cónicas yo les contaba que, eh.., que las cónicas nacían de un sólido en revolución, donde se hacían girar dos rectas ¿cierto?, que formaban dos conos. Finalmente cuando los conos están formados, como están acá [muestra el material manipulativo], yo le puedo hacer diversos cortes ¿si?.

ESTUDIANTES: [algunos pero no todos]: Sí

PROFESORA: Y uno de los cortes que nosotros ya conocíamos ¿era?

ESTUDIANTES: [algunos pero no todos]: La parábola.

PROFESORA: La parábola [confirmando la respuesta de los estudiantes], ¿cierto?

PROFESORA: ¿Y esa parábola cómo se generaba? ¿Qué corte se le hacía a la figura?

ESTUDIANTE [no identificable]: Diagonal

ESTUDIANTE [no identificable]: Transversal

PROFESORA: Ya! Si vemos esto es una parábola [mostrando el corte diagonal con el material manipulativo, que genera una elipse].

ESTUDIANTE [no identificable]: ¿corte horizontal? [Responde dudosa].

PROFESORA: ¡Muy bien! Un corte horizontal ¿o vertical? [Percatándose quizá de un posible error]. Horizonte [señalando con la mano el horizonte o imitando un corte horizontal]

ESTUDIANTES EN GRUPO: [algunos responden horizontal y otros vertical al mismo tiempo].

PROFESORA: Así Horizontal ¿Cómo éste? [señalando con la mano el corte horizontal en el material manipulativo. Al señalar con la mano se le caen piezas del material]. Bueno este aparatito [refiriéndose a su material manipulativo] tiene aquí unas cositas que se le mantiene pero como ya está viejito no está; tiene unos imanes como acá [muestra como se adhieren las piezas del corte horizontal al resto del material].

PROFESORA: Si yo le hago uno [corte] horizontal, sale esto [mostrando con el manipulativo como con el corte horizontal se genera la circunferencia].

PROFESORA: Entonces, ¿qué corte era?

ESTUDIANTES EN GRUPO: Vertical

PROFESORA: Vertical, ¿cierto? [confirmando la respuesta de los estudiantes]. Entonces, si yo le hago a los conos un corte vertical, va un corte así [mostrando el manipulativo, e indicando con las manos el corte], va a nacer ¿la.....?

ESTUDIANTES EN GRUPO: Parábola.

PROFESORA: parábola. Si yo le hago un corte así [imitando con los dedos un corte vertical], como que si fuera un quesito y lo tomo y lo corto como con un cuchillo va salir una parábola, ¿ya?.

PROFESORA: ¿y qué corte yo tendré que hacerle a estos conos para que se genere una circunferencia?

ESTUDIANTES EN GRUPO: Horizontal

PROFESORA: horizontal, ya vimos el vertical cierto que se formaba la parábola y ahora vamos a ver?

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable] el horizontal
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable] el horizontal
PROFESORA: el horizontal que genera?
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable] circunferencia
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable] circunferencia
PROFESORA: un circulo o circunferencia?
ESTUDIANTES EN GRUPO: circunferencia
PROFESORA: expliquemos por favor el concepto de círculo y circunferencia por que no vaya a ser que se confundan. [Mostrando el material manipulativo pregunta], ¿que será esto? ¿Esto será un círculo o una circunferencia?
ESTUDIANTES EN GRUPO: dudan en sus respuestas
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: algo circular
PROFESORA: A ver circ cir cir cu qué?
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: circular
PROFESORA: es circular ya, ¿o es lo mismo?. [la profesora se comienza a sacarse un anillo]
ESTUDIANTES EN GRUPO: no
PROFESORA: ¿es lo mismo o no?. [la profesora le cuesta sacarse su anillo haciendo gestos]
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable] no.
PROFESORA: ya, ¿Cuál será la diferencia miren?, bueno me costó un poquito sacarme el anillo. [Mostrando el material manipulativo y el anillo pregunta], acá observamos tenemos un anillo ¿y tenemos?
ESTUDIANTES EN GRUPO: un círculo
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: eso.
PROFESORA: entonces, ¿cuál será cual, cuál será la circunferencia y cuál será el circulo?
ESTUDIANTES EN GRUPO: [algunos] el anillo es la circunferencia
PROFESORA: perfecto esto es una circunferencia [muestra el anillo], cierto que es el borde y esto es un circulo [muestra el material concreto solo el trozo con el corte horizontal] ¿cuál es la diferencia entre uno y otro?
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: uno tiene área
PROFESORA: ¿qué tiene uno que no tenga el otro?
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: el círculo es un área completa de la parte…
PROFESORA: tibio
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: área
PROFESORA: muy bien lo que pasa es que el circulo tiene superficie [muestra el material concreto solo el trozo con el corte horizontal] y la circunferencia solo es el borde [muestra el anillo], ¿se entiende?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si
PROFESORA: ya perfecto, entonces todos espero que hayan entendido de donde nace, que todo nace de sólidos en revolución de dos rectas que se hacen girar un determinado ángulo, cuyas rectas generan dos conos, y al formarse dos conos a esos dos conos yo le puedo hacer diversos cortes, uno de los cortes que hicimos fue vertical, que fue una parábola, y el otro, fue horizontal que es el que vamos a aprender ahora, ya. [Muestra el material concreto]
PROFESORA: eh recordemos un poquito a ver, que tanto nos acordamos de la parábola. Cuando nosotros comenzamos a ver, la unidad de la parábola, nosotros lo primeros que conocimos son sus elementos. ¿Qué elementos se acuerdan de la parábola a ver?
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: el foco
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: vértice
PROFESORA: se acuerdan que tenían foco, perfecto
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: vértice
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: vértice
PROFESORA: tenía un vértice, ya perfecto
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: parámetro
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: un lado recto
PROFESORA: un lado recto
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: parámetro
PROFESORA: parámetro, ya vamos a dibujar entonces [profesora dibuja en la pizarra]

PROFESORA: vamos a pensar en el origen ya [profesora dibuja en la pizarra una parábola con vértice en el origen], que siempre es más fácil de visualizar, ¿entonces donde estaba el foco?.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] ahí [estos se ríen]

PROFESORA: aquí [esta indica en el dibujo de la parábola que hizo en la pizarra de manera incorrecta]

ESTUDIANTE [no identificable]: no, al medio

PROFESORA: obviamente el foco estaba acá [esta indica en el dibujo de la parábola que hizo en la pizarra de manera correcta el foco y el vértice] y el vértice ¿qué más teníamos?

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: el parámetro

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: el parámetro

PROFESORA: el foco, el vértice, el parámetro

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: el parámetro profe.

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: el parámetro.

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: lado recto.

PROFESORA: ya, por allá dicen lado recto, ¿Qué era el lado recto?

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: la diferencia que había…..

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: la abertura

PROFESORA: la abertura, ya perfecto, el lado recto era la distancia que existía cierto entre los dos puntos, esa recta imaginaria que pasa por los focos, y que mientras mayor sea el lado recto, va a tener mayor amplitud la parábola ¿cierto?. Pero llega un momento supongamos que el lado recto es cero ¿qué pasaba con la parábola?, ¿se transformaba en una?

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: en una

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] una recta

PROFESORA: ¿en que se transformaba si el lado recto es cero?

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: una recta

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: una línea

PROFESORA: en una línea en una recta perfecto, ¿qué más teníamos?, lado recto.

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: parámetro

PROFESORA: ya, por ahí alguien dijo el parámetro, ¿Qué era el parámetro?

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: la distancia del vértice al foco.

PROFESORA: ya, y para nosotros el parámetro siempre era positivo ¿cierto?, aunque a pesar que hay algunos libros que lo toman negativo, pero nosotros trabajamos el parámetro como una distancia

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: distancia.

PROFESORA: por lo tanto como es una distancia, siempre va a ser positivo

PROFESORA: entonces [esta indica en el dibujo de la parábola que hizo en la pizarra] acá teníamos el parámetro, ¿ahí no más era el parámetro?.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no

PROFESORA: ¿o había algo más?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] la directriz

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: la directriz era la misma distancia

PROFESORA: ya, ¿y donde estaba?, ¿acá arriba?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] abajo

PROFESORA: dividida por la mitad

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: frente al vértice

PROFESORA: frente al vértice, teníamos una recta, que en este caso era horizontal ¿cierto?, ¿Qué más? ¿Qué característica especial tenía esa recta con el vértice, con el foco?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] es la misma distancia

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: es p

PROFESORA: ya ves, dice la compañera acá que la distancia desde el vértice al foco es la misma desde el vértice a la directriz, ¿por lo tanto que es esto? [esta indica en el dibujo de la parábola que hizo en la pizarra la distancia del vértice al foco y luego a la directriz]

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: el parámetro

PROFESORA: el parámetro, ¿estamos de acuerdo?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] sí.

PROFESORA: perfecto, ¿Qué otro elemento en la imagen…. , tenemos el lado recto, tenemos el foco, tenemos el vértice, tenemos la ecuación de la directriz.

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: la ecuación principal y la general

PROFESORA: Ya, y por ahí, dice la compañera que tenía una ecuación principal y una general, eso dejémoslo en es stop, porque también lo vamos a relacionar con lo que vamos a ver. Pero estamos hablando de los elementos.

PROFESORA: estamos listo, no hay nada más, ustedes me dicen no hay nada más, no.

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: eje focal.

PROFESORA: ya, ¿Cuál era el eje focal?, perfecto.

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: el eje, en este caso era la línea de ahí.

PROFESORA: ya perfecto, que en este caso sería esta línea, [esta indica en el dibujo de la parábola que hizo en la pizarra el eje focal], que sería el eje focal pasaría a ser como un eje de simetría ¿cierto?, porque es como si estuviera viendo de frente, si, si lo ven el eje focal [esta indica con las manos abriendo y cerrando sus palmas]. Que en algunos problemas que nosotros resolvíamos ¿cierto?, estaba decíamos que el eje focal, era eh, las ordenadas, el eje de las y o las abscisas el eje de las x ¿cierto?, sí, ya.

PROFESORA: perfecto, estamos de acuerdo con la parábola con los elementos, ahora relacionémoslos con los elementos de la circunferencia, eh. Supongamos que yo tengo la siguiente circunferencia [profesora comienza a dibujar en la pizarra, haciendo el plano cartesiano], ¿Qué elementos creen ustedes, que yo podría encontrar en la circunferencia?

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: radio.

PROFESORA: ya ah, perfecto, entonces tengo un radio [profesora dibuja en la pizarra una circunferencia en el primer cuadrante, dibujándola con su centro y radio], por ahí dijo el compañero vamos a encontrar un radio.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] diámetro

PROFESORA: un diámetro, obviamente el diámetro seria completo [profesora dibuja en la circunferencia de la pizarra el diámetro] y estaría formado, por dos veces el radio no.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: ya, ¿qué más?

PROFESORA: que más tiene de especial

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: área

PROFESORA: por acá dice área, sí, sí, pero elemento, además que dijimos que la circunferencia no tenía superficie, ¿cierto?, ya, ¿qué más?

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: secante

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: una tangente

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: una cuerda

PROFESORA: mire, mire la figura ¿Qué más falta?, está el radio ¿Qué más falta?.

PROFESORA: a ver la distancia desde aquí a aquí, a cualquier punto de la circunferencia es la misma o va cambiando, [profesora indica en la circunferencia dibujada en la pizarra la distancia del centro a distintos puntos de la circunferencia], o esto que yo tengo aquí [profesora dibuja otra circunferencia en la pizarra], y aquí tengo un r, esto también es una circunferencia

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: no

PROFESORA: ya, ¿qué característica tiene esa circunferencia que no tenga esa?

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: que el radio va a ser igual para todos

PROFESORA: muy bien, entonces la distancia que haya desde este punto a cualquier punto de la circunferencia [profesora indica en la circunferencia dibujada en el plano cartesiano en la pizarra la distancia del centro a distintos puntos de la circunferencia]

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: radio

PROFESORA: es exactamente la

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: misma

PROFESORA: la misma sí, estamos de acuerdo, ¿sí o no?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] siii.

PROFESORA: ya perfecto, pero como nombro esos puntos po, distancia desde ese punto [profesora indica en la circunferencia dibujada en el plano cartesiano en la pizarra el centro], desde ese punto, se llama ese punto

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: centro
PROFESORA: muy bien, a entonces a este le vamos a llamar punto centro y para un tema de notación nosotros le vamos a llamar [profesora indica en la circunferencia dibujada en el plano cartesiano en la pizarra el centro], adivinen como se llamaba, a ver retrocedamos acá relaciónemelo con la parábola, ¿cómo se llamaba el vértice?, ¿cómo le denotábamos?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] (h,k)
PROFESORA: muy bien, (h,k) perfecto. Entonces, ¿cómo le vamos a denotar al centro?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] (h,k)
PROFESORA: (h,k) [profesora anota el centro (h,k) en la circunferencia dibujada en el plano cartesiano en la pizarra]
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] ah
PROFESORA: ah, entonces ya descubrieron dos elementos que serían, el radio y el centro, que descubrieron, que al igual que la parábola el vértice es (h,k), y en el caso de la circunferencia el centro va a ser mi (h,k).
PROFESORA: ¿habrá por ejemplo una ecuación de una directriz?
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: un foco
PROFESORA: ¿habrá un foco?
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: un parámetro
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: habrá un parámetro
PROFESORA: ¿qué creen?, no importa si se equivocan, ¿qué creen?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos comentan] un parámetro, ¿Qué más puede haber?
PROFESORA: si, ¿dónde podría estar?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos comentan] mmmm
PROFESORA: porque si hablamos de una directriz, si pensamos que al igual que en la parábola tiene una directriz, tendría que ir una aquí, una aquí, una aquí, una aquí [profesora indica en la circunferencia dibujada en el plano cartesiano en la pizarra distintos puntos alrededor de esta, cuando dice aquí], porque en realidad la ecuación de la directriz como que me pone limite ¿o no?, si y acá, sea ¿cuantas ecuaciones de la directriz, si es que hubiera yo debería tener?, Paz
PAZ: miles
PROFESORA: miles, infinitas, por lo tanto, no tiene sentido que allá una ecuación de la directriz, ¿se entiende o no?, ¡si!, entonces no hay, ¿qué más?. Foco, pensemos en el foco que había una distancia, hay un parámetro, que se regulaba cierto, que era la distancia desde el foco al vértice dependiendo del vértice y de la directriz, pero acá ya tenemos un cierto parámetro. ¿Cuál es nuestro parámetro que se va a repetir siempre?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos comentan]: r
PROFESORA: r es nuestro radio, entonces no tiene sentido. Entonces, aquí ¿Qué tenemos?, vamos a tener dos elementos el centro y el radio que maravilloso no. Después de haber tenido cuantos acá, acá teníamos como cinco elementos, acá tenemos dos, entonces ¿cómo va ser esta unidad?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] fácil
PROFESORA: fácil, muy bien, perfecto, va a ser fácil, ya. ¿Estamos de acuerdo con los elementos?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] siii.
PROFESORA: ahora quiero que recordemos un poquito, un poco más atrás, antes de comenzar nosotros a ver, la parábola vimos la unidad de la recta, recuerdan ¿sí?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] siii.
PROFESORA: y hay ciertos conceptos que nosotros trabajamos ahí, como por ejemplo punto medio le. suena, distancia entre dos puntos le suena, y alguien se acuerda de la formulita de la distancia de dos puntos.
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] siii.
PROFESORA: a ver, veamos si es cierto. Supongamos que mi punto es (x_1, y_1) y el otro punto es (x_2, y_2). [profesora anota en la pizarra mientras nombra los puntos]
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] raíz
PROFESORA: ya por ahí dicen que la distancia de p_1 a p_2 va ser raíz ¿de qué?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] x_1 menos x_2
PROFESORA: se acuerdan súper [profesora anota en la pizarra la fórmula de distancia de los puntos escritos

anteriormente]
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] x_1 menos x_2
PROFESORA: ¿ x_1 menos x_2?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] x_2 menos x_1
PROFESORA: x_2 menos x_1
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] y_2 menos y_1
PROFESORA: y_2 menos y_1, elevado al cuadrado
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] al cuadrado
PROFESORA: ya perfecto, me queda claro que se acuerdan de la formula, me interesaría más que ustedes se acordaran de donde salió esa fórmula ¿se acuerdan?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] de Pitágoras.
PROFESORA: muy bien, ¿salió del teorema de?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] Pitágoras.
PROFESORA: Pitágoras, perfecto súper. Entonces nosotros vamos a utilizar, eso que ustedes ya sabe, que salió del teorema de Pitágoras, cierto, donde decía que los catetos al cuadrado ¿se acuerdan o no?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] sii
PROFESORA: si
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] sii
PROFESORA: ya, que decía que los catetos al cuadrado más cateto al cuadrado es igual a hipotenusa al cuadrado, pero ahora lo vamos aplicar para determinar cuál es la ecuación de la circunferencia, en el caso de la parábola ¿cuantos tipos de ecuaciones teníamos?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] dos
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: principal y general.
PROFESORA: principal y general, y en el caso de la circunferencia ¿Qué creen que vamos a tener?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] principal y general.
PROFESORA: principal y general, ¿cierto?, ¿sí?. Entonces ahora vamos a descubrir de donde salió esa ecuación de la circunferencia.
PROFESORA: Ustedes me decían que había una cierta regularidad que se cumplía, por allá lo dijo una compañera, dijo que la distancia desde el punto centro, que nosotros llamamos (h, k), a cualquier punto de la circunferencia ¿debía ser?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] radio.
PROFESORA: la misma, ¿cierto?. Y bajo esa definición, nosotros vamos a deducir la ecuación ¿de la? Circunferencia. Utilizando la distancia entre dos puntos ¿cierto?. Supongamos que usted no se acuerda de la formulita de la distancia de dos puntos entonces lo vamos analizar. Si ese es mi punto (h, k), ¿Quién es este? [Profesora indica en su dibujo en la pizarra el centro la circunferencia y luego cuando realiza la pregunta indica el eje de las x].
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] h
PROFESORA: perfecto, esta distancia es h, ¿estamos de acuerdo?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si
PROFESORA: ya, y esta distancia que hay aquí ¿cuánto es? [Profesora indica en su dibujo en la pizarra preguntando indica el eje de las y].
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] k
PROFESORA: perfecto k, y esta distancia de aquí a aquí ¿Cuánto es? [Profesora indica en su dibujo en la pizarra preguntando indica el eje de las x y la distancia al punto x].
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] x
PROFESORA: x, muy bien, completa es x, y esta distancia de aquí a aquí ¿Cuánto es? [Profesora indica en su dibujo en la pizarra preguntando indica el eje de las x y la distancia al punto x].
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] y
PROFESORA: y, ¿cierto?, muy bien. Entonces como ustedes se acuerdan del teorema de Pitágoras, les iba a decir ¿ qué cuánto vale esta distancia mira?. Aquí se forma un triángulo ¿lo ven o no?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si
PROFESORA: ¿lo ven o no?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si
PROFESORA: ya, ¿si?, lo ven

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: perfecto, entonces yo podría aplicar el teorema de Pitágoras. Hipotenusa al cuadrado, igual a cateto cuadrado, más el otro cateto al cuadrado, siempre y cuando yo sepa cuánto valen los catetos y la hipotenusa.

PROFESORA: si esa distancia, esta distancia completa es x y este pedacito de acá es h, ¿cuánto mide la distancia de este cateto? [Profesora indica en su dibujo en la pizarra]

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]:: x menos h.

PROFESORA: perfecto, x el segmento completo, menos el pedacito h,¿ cierto? x menos h, bien, entonces eso mide ese cateto. Ahora nos vamos acá, como nos vamos ¿qué resto?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] y menos k

PROFESORA: el segmento grande le quito el pequeño, ¿entonces va a quedar?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] y menos k

PROFESORA: y menos k, ¿estamos de acuerdo?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: y estamos a punto de descubrir cómo es la ecuación principal de la circunferencia, entonces pregunto, ¿quién es la hipotenusa?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] el radio

PROFESORA: ¿quién es la hipotenusa?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] el radio

PROFESORA: el radio, entonces va a quedar radio al cuadrado, todos de acuerdo

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: si, luego cateto al cuadrado, importa ¿cuál use?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no

PROFESORA: no ¿cierto?, supongamos que vamos a usar primero este, aunque en realidad da lo mismo ¿cierto?, ¿Cómo quedaría cateto al cuadrado?. [Profesora indica en su dibujo en la pizarra]

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] x menos h al cuadrado

PROFESORA: ¿Cómo?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] x menos h al cuadrado

PROFESORA: pero sin miedo, díganlo

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] x menos h al cuadrado

PROFESORA: x menos h al cuadrado, más el otro cateto

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] profe los paréntesis

PROFESORA: ya, y menos k al

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]:: cuadrado

PROFESORA: cuadrado, ¿estamos bien?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: ¿hay algo que no hayan entendido?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no

PROFESORA: no, lo único que hicimos fue aplicar el teorema de Pitágoras, y les presento ¿qué creen ustedes?, miren la forma que tiene, ¿será una ecuación principal o una general?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] principal

PROFESORA: principal, porque nosotros aprendimos cuando vimos la parábola, que la ecuación principal tenia ciertas ventajas sobre la ecuación general, ¿Cuál era la ventaja que la principal yo podía observar?

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]:: (h,k)

PROFESORA: observar (h,k) y podía observar fácilmente todos los elementos, en cambio cuando teníamos la general, no podíamos ¿cierto?, no con facilidad, y esta es nuestra amiga siempre la principal, porque con esa yo puedo visualizar en forma directa cuales son los elementos ¿de la?.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] parábola.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] circunferencia.

PROFESORA: ya, de la circunferencia, perfecto, ¿se entiende o no pequeños?.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: yo no los voy a invitar a que copien esto porque todo esta explicado en su guía, así que atentos acá, no anoten porque esta todo en su guía, atentos eso es lo más importante, el trabajo que van a hacer ustedes va ser cuando resuelvan los ejercicios, el trabajo de ustedes.

PROFESORA: ya, tenemos la ecuación principal, ahora veamos un ejemplo, veamos el ejemplo que aparece en la guía, voy aprovechar de repartir igual con ayuda de la compañera. Usted quiere ayudar

PROFESORA: Ya ehh, digieran por mientras por favor vayan digiriendo ¿cuál es la ecuación principal de la circunferencia?, la verdad es que me llevo la grata sorpresa de que se les hizo muy fácil, y se les hizo muy fácil ¿Por qué?, porque ya saben la parábola y van relacionando los elementos, los conceptos. En realidad después de ver la parábola que tenía tantos elementos y esta que tiene dos igual es más fácil.[dos estudiantes reparten guía a sus compañeros]

PROFESORA: ya, si ustedes se fijan, van observando su guía, su guía tiene todo lo que hemos explicado, tiene inclusive esa figurita, [profesora señala la figura que hizo en la pizarra], ya y tiene el corte que nosotros hacemos a los conos al sólido de revolución, para que se genere la circunferencia, y como dijo Javiera un corte horizontal. Acá tiene toda la explicación de cómo se obtiene la ecuación, como llegamos nosotros a la ecuación a la forma principal, que es lo mismo que yo acabo de explicar acá en la pizarra ¿sí?, ¿estamos de acuerdo?.

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]:: si

PROFESORA: entonces para que ustedes no anoten, vamos hacer el mismo ejemplo que aparece en su guía, si que no anoten nada porque está en su guía, sí que no es necesario que este concentrado ahí en anotar.

PROFESORA: ya, comenzamos con los ejemplos, por lo tanto luego de los ejemplos ya se vienen las actividades ¿cierto?, donde ustedes tienen que demostrar que entendieron, ¿si entendieron o no entendieron?, ya. Ejemplo [profesora anota en la pizarra], nuestro primer objetivo era conocer los elementos de la circunferencia y los acabamos de conocer. ¿Cierto?

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]:: si

PROFESORA: nuestro segundo objetivo, Javiera ¿cuál era nuestro segundo objetivo?, me puede ayudar.

Javiera: [no responde]

PROFESORA: tú me puede ayudar, ¿cuál era el segundo objetivo?. ¿Lo anoto?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] determinar la ecuación principal y general

PROFESORA: determinar la ecuación general y

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]:: principal

PROFESORA: general y principal dado ciertos elementos eso decía, ya conocimos los elementos por lo tanto cumplí con el primer objetivo, ahora nuestro segundo objetivo es determinar la ecuación general y principal, dado ciertos elementos, entonces en el ejemplo dice determine la ecuación principal, ¿qué vamos a determinar la ecuación?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos]]: principal

PROFESORA: principal, ¿ecuación principal de qué?, dado que elementos, porque cierto yo les decía al igual que en la parábola, nosotros teníamos que determinar la ecuación principal o general, pero nos daban ciertas pistas, ciertos elementos, lo mismo pasa ahora con la circunferencia, nosotros vamos a tener que determinar la ecuación general y la principal y nos van a dar ciertos elementos ¿sí?

PROFESORA: ya, entonces, dice, dice como pista, ¿Cuáles son las pistas que dice?, a ver si están perdidos o no, están leyendo la guía o ¿no?, ¿cuál es la primera pista que nos dan?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] un punto

PROFESORA: un punto que

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] un punto (2,5)

PROFESORA: un punto cualquiera, porque si es que ella me dice un punto puede ser un punto de la circunferencia o puede ser el punto centro

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] punto centro

PROFESORA: punto centro, bien. Punto centro, ¿Qué punto centro es?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] (2,5)

PROFESORA: ¿(2,5)?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] (4,2)

PROFESORA: a ya, ya ¿todos están viendo el ejemplo?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: (4,2) y su radio me dice que vale 3, ¿sí o no?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: si, tenemos dos pistas tenemos el centro y tenemos el radio, ehh, vamos a ver cómo está la memoria, a ver quién se acuerda, sin mirar, no miren la guía, ¿Cómo era la ecuación de la circunferencia?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] r^2

PROFESORA: r^2

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] paréntesis (x-h)

PROFESORA: (x-h), ya

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] al cuadrado

PROFESORA: al cuadrado

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] más

PROFESORA: más

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] y -k

PROFESORA: ya, ¿ y-k al?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] cuadrado

PROFESORA: cuadrado, ¿está bien o no?, o era h-x

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no

PROFESORA: ya, perfecto, porque al igual que en la parábola ¿cierto?, en la parábola igual era x-h, yapo si es lo mismo. Vamos ehh, quiero que ustedes observen y se den cuenta de los elementos imprescindibles o necesarios, ¿o que yo necesito? para poder determinar la ecuación de la circunferencia. ¿Qué elementos yo necesito?, y sabiendo esos elementos puedo determinar la ecuación.

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: centro y radio

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: radio y punto centro

PROFESORA: necesito conocer el centro

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] y radio

PROFESORA: y conocer el radio, pregunto en el ejercicio ¿conocemos el centro?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: ¿conocemos el radio?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: no hay ninguna dificultad para hacerlo

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: reemplazar

PROFESORA: entonces, como dice r^2, $(x\text{-}h)^2 + (y\text{-}k)^2$,¿es cosa de?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] reemplazar

PROFESORA: reemplazar, ¿radio?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] 9

PROFESORA: ya, tres elevado a dos que seria 9, perfecto. x- h ¿pero quién es h?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] cuatro

PROFESORA: cuatro, ya. Y menos

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] dos

PROFESORA: dos al cuadrado, ¿estamos de acuerdo o no?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: ¿y se estresaron?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no.

PROFESORA: no ya, entonces ya tenemos la ecuación, prinici

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] principal

PROFESORA: principal, si o no. Quiero que observen y si al revés, yo tuviera que obtener el centro ¿Qué pasa con los signos?. Observemos, desde el centro y la ecuación, ¿qué pasa con los signos?, hay algo que pasa ahí o no, a ver observemos.

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: que es negativo y queda positivo

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: que la formula

PROFESORA: ya perfecto, si yo tengo la ecuación por el contrario a mí me dan la ecuación, yo tengo que determinar cuál es su centro ¿qué va a pasar con los signos?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] es lo contrario

PROFESORA: el signo contrario, si es menos cuatro es cuatro, si es menos dos es
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: dos
PROFESORA: ¿eso pasaba con quién?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] con la parábola
PROFESORA: con la parábola ¿cierto?, también pasaba,
PROFESORA: ya, ehh, entonces ¿alguien no entendió el primer ejemplo?,¿tiene dudas?
PROFESORA: no
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: nnnnn
PROFESORA: vamos con otro ejemplo, ahh. Entonces ¿Cuánto vale mi h? mi h vale cuatro mi k vale dos y mi radio vale tres. Ehh, ¿Qué otra cosa podría suceder?, a ver conversemos un poquito, pensemos. un poquito, si yo tengo una circunferencia, José, y sé que mi radio o sea que mi diámetro vale 8.
ESTUDIANTE [José]: radio cuatro
PROFESORA: entonces ¿el radio es?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] cuatro
PROFESORA: perfecto, y si por el contrario, yo no supiera cuánto vale la distancia, cuanto es el diámetro, pero si supiera dos puntos, si supiera por ejemplo que este punto vale, [la profesora en una circunferencia dibujada en la pizarra indica dos punto de la circunferencia que forman el diámetro] el (3,5) y este punto vale el punto (4,2).
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] la distancia
ESTUDIANTE [José]: la distancia entre esos dos puntos
PROFESORA: que tendría que yo hacer para obtener el diámetro, ¿cierto?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] la distancia
PROFESORA: O ¿de qué manera lo haría?
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: con la fórmula de la distancia
PROFESORA: ya, allá dice la compañera con la fórmula de la distancia, la fórmula de la distancia ¿para qué?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] entre dos puntos
PROFESORA: entre dos puntos, ¿para determinar qué?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] el diámetro
PROFESORA: el diámetro, esa es una forma, perfecto. Busquemos otra manera, pensemos un poquito, si yo tengo esos dos puntos. ¿Podría yo calcular el centro?
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: punto medio
PROFESORA: alguien lo dijo
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: ah si
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: punto medio
PROFESORA: punto medio, por lo tanto yo también podría dado esos dos puntos determinar el punto
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] medio
PROFESORA: medio y teniendo el punto medio, podría calcular la distancia que hay desde ese punto medio, al punto de la circunferencia, y obtengo en forma directa el radio, ya tenemos dos opciones para una misma situación
PROFESORA: ya, ¿está claro eso?
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si
PROFESORA: si, alguna pregunta chico, no puede ser que todo esté tan claro. Siempre queda duda, o si no le hago preguntas yo a ustedes, si ustedes no me hacen.
ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: profe puede explicarlo de nuevo
ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] [se ríen]
PROFESORA: ya, perfecto, esta situación, resulta que cuando nosotros nos dan el radio no hay problema, es cuatro. Cuando nos dan el diámetro nosotros sabemos que es la mitad del diámetro es el radio, por lo tanto si me dicen que el diámetro vale 8, el radio vale la mitad 4, no hay problema. Pero como estamos en geometría analítica, a lo mejor ni siquiera nos dan el radio y ni siquiera nos dan el diámetro. Puede que nos den dos puntos, de una recta que pasa por esa circunferencia, ya nos den dos puntos opuestos que forman el diámetro, entonces que va obtener, usted tiene otras herramientas también que aprendió en las primeras unidades y esas herramientas era determinar la

distancia entre dos puntos, entonces usted puede determinar la distancia entre dos puntos, supongamos que determine la distancia y me dio 8 o me dio 10 ¿Cuánto vale el radio?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] diez

PROFESORA: cinco, ya y la otra opción, esa era un camino, y la otra opción era como decía el compañero allá, porque él no quiere determinar la distancia de todo, para que si el necesita esto no más [profesora indica el radio en su circunferencia dibujada en la pizarra], entonces él dijo voy a calcular el punto medio ¿sí?, que sería nuestro centro y de ahí calculo la distancia que hay desde ese punto medio a la circunferencia y obtengo de inmediato el radio.

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: Profe y si los dos puntos no pasan por el centro

PROFESORA: ese se hace de otra manera y ese también vamos a ver con otras pistas, por ejemplo que pasa si me dan tres puntos de la circunferencia, que pasa si esos puntos no forman el diámetro, simplemente esos puntos puede ser que p1 este aquí y el otro p2 este acá [profesora indica dos puntos cualquiera de la circunferencia dibujada en la pizarra], también se puede sacar, sí, pero eso no es para esta clase, pero ya se viene, pero ya se viene. Bien, alguna duda, preguntas, ya como ustedes no tienen dudas y no tiene preguntas, yo tengo una pregunta para ustedes. ¿Qué pasara con la ecuación de la circunferencia, si la ecuación de la circunferencia, si mi circunferencia en esta oportunidad está en el centro? ¿Qué pasara si la circunferencia esta su punto centro está en el (0,0)?

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: (0,0)

PROFESORA: a ver, veamos si tenemos el sistema cartesiano ¿cierto?, y que pasa si nosotros, si nosotros tenemos el centro, ¿quién era mi centro?.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] (h,k)

PROFESORA: ya mi (h,k), pero ahora mi (h,k)está en el centro , en el origen del sistema cartesiano, entonces que va a pasar ¿Cómo creen ustedes que va quedar la formula?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] $x^2+y^2=r^2$

PROFESORA: Muy bien, $x^2+y^2=r^2$. Entendió el resto ¿porque?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: si no lo entendemos lo hacemos. Entonces dice, $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$[profesora escribe en la pizarra], ¿pero quién vale 0?,si mi

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] h y k

PROFESORA: h y k, entonces, como esta en el centro en el origen del sistema cartesiano h, k va ser (0,0), por lo tanto, h se hace cero, k se hace cero y me va a quedar como decía Cristian $x^2+y^2=r^2$, ¿sí?, o sea que al igual que la parábola es más simple cuando está en el…

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: origen

PROFESORA: (0,0), en el origen del sistema cartesiano, entonces si alguien la quiere anotar no se o quiere tomar apuntes de esto, en todo caso también está en su guía, si, si esta [profesora revisa apunte entregado a estudiantes], ya vamos a ver si realmente entendieron, actividad uno, actividad uno y nos vamos.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] ehhhh

PROFESORA: no nos vamos, nos vamos, nos vamos al ejercicio ¿cierto?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] [estos se ríen]

PROFESORA: uno encuentra las ecuaciones, al final de su guía miren, al final de su guía, dice encuentra las ecuaciones principal y general de cada circunferencia a partir de los datos que se indican, como solo hemos vistos la ecuación principal por el momento ustedes van a terminar en el ejercicio uno y en el ejercicio dos, ¿cuál será la ecuación principal?, ya, me dice que el centro es (-3, 1) y el radio es 4, mientras que en el segundo dice que el centro es (0,7) y el radio es raíz de siete, ya vamos.

[Estudiantes resuelven ejercicios en forma individual mientras la profesora se pasea en la sala abriendo las cortinas y observando que los estudiantes trabajan, esto ocurre en 1:50]

PROFESORA: ya mientras que ustedes están concentrados yo voy a pasar la lista ya. [Una estudiante llama a la profesora preguntando en voz muy baja y esta responde en voz alta en la pizarra]

PROFESORA: eh, recordemos por si alguien tiene dudas, como la compañera pregunto, si no se po, si el radio vale 12, eso vale el radio [profesora escribe en la pizarra $\sqrt{12}=r$] y al elevarlo al cuadrado me va a quedar [profesora escribe en la pizarra $\left(\sqrt{12}\right)^2=r^2$], ¿qué pasaba cuando el índice de la raíz y el exponente era igual?

ESTUDIANTES EN GRUPO: [algunos] se elimina la raíz.

PROFESORA: se elimina cierto, por si acaso si alguien se olvidó, ahí está, ya atentos a la lista jóvenes.

[Profesora pasa la lista y se demora 3:30 minutos]

[ESTUDIANTES trabajan de forma individual y grupal, resolviendo sus dudas entre ellos]

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: había que sacar la principal no más po.

PROFESORA: la principal, solo la principal

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: viste

PROFESORA: ya hicieron la general

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: ya lo hicieron por intuición, ¿cierto?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: porque se imaginaron que se hacía de la misma manera como se hacía la parábola, perfecto, súper bien, lo vamos a explicar igual.

PROFESORA: [profesora termina de pasar la lista] vamos a dar un paseíto, ya la verdad es que yo no le pedía que hagan la principal porque todavía, ósea la general porque todavía no la veíamos. [Profesora se pasea en la primera fila mirando el trabajo de los estudiantes] Pero veo varios por ahí que lo hicieron por intuición ¿cierto?, al final había que resolver los cuadrados de binomios para la suma o sea para la diferencia ¿sí?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: ya, muy bien

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: entonces y lo hago general

PROFESORA: ya si perfecto, súper. Ya que se atrevieron háganlo de la forma general.

[Profesora monitorea paseándose por la sala el trabajo de los estudiantes]

PROFESORA: vamos a invitar a alguien ¿cierto?, que pase a la pizarra, para que no sea yo la que haga todas las cosas.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] nooo

PROFESORA: ¿cierto?, sí que vamos, vamos. [Profesora se pasea por la sala]

ESTUDIANTE [estudiante no identificable a profesora]: ¿aquí me pide el radio al cuadrado?, acá cierto,

PROFESORA: si

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: ya entonces me da el radio es 4, me da 16

PROFESORA: exacto

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: pero si el radio acá me queda siete, tengo que multiplicarlo, elevarlo al cuadrado

PROFESORA: no no

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: o es solo

PROFESORA: no porque tú me estás diciendo acá, que el radio al cuadrado es siete

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: ahh

PROFESORA: que te piden acá

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: ya está dado el radio al cuadrado

PROFESORA: eso, entonces sin raíz

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: si

PROFESORA: ya

ESTUDIANTE 2: profe

PROFESORA: espéreme un poquito

ESTUDIANTE 2: el radio se pasa restando y queda igual a cero

PROFESORA: exacto

ESTUDIANTE 2: si

PROFESORA: la general queda igualada a cero

ESTUDIANTE 1: profe, mire que se hace aquí

PROFESORA: no, todavía no, todavía no, todavía no porque estamos con el ejercicios el 1 y el 2, fíjate a lo mejor puede que haya otro de esos mismos, haber

ESTUDIANTE 1: no se

PROFESORA: parece que si

ESTUDIANTE 3: profe, como esta

PROFESORA: hay que igualarla

ESTUDIANTE 3: [no se escucha]

PROFESORA: por eso que, por eso yo le había dicho dejémosla así desordenada, entonces cuando demos la explicación tú vas a saber cómo tenemos que ordenarla

PROFESORA: ya, ehh, Acá Claudita me hizo una buena pregunta, me dijo yo ya resolví los cuadrados de binomios para pasar de la principal a la general, pero ¿cómo lo ordeno?

ESTUDIANTE: eso

PROFESORA: que coloco primero x y que hago, como lo ordeno el y^2 el x^2, entonces lo vamos a dejar desordenado y yo después que pasen los compañeros voy a explicar cómo se ordena, por eso le había dicho que hagan pri, solamente la principal ¿sí?

PROFESORA: ya usted está listo, está listo ¿sí?, [revisa cuaderno de estudiante] ya, y lo ordeno y la x, no tenía x.

ESTUDIANTE 2: no

PROFESORA: haber x^2 y^2, y x acá no tenía, perfecto y está bien ordenado

PROFESORA: ya, como vamos ¿falta todavía?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: [profesora completa libro de clases 50 segundos]

PROFESORA: ya estamos listo o falta todavía

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos]:…….

PROFESORA: estamos listos dicen por acá [profesora responde pregunta a un estudiante]

PROFESORA: ¿están listo? [Pregunta a un grupo de estudiantes]

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: ya. A ver cuantos faltan, ¿esperemos un ratito?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: solidaricemos, por allá están rapidito tratando de avanzar, esperémoslo un ratito.

PROFESORA: entonces ustedes hicieron el uno, el dos.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] el tres no

PROFESORA: Y el tres lo pueden hacer, creen ustedes que están capacitados para hacer el tres que dice.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: centro en el (-6, 4), y diámetro 12

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: si porque si el diámetro es 12

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] el radio es 6

PROFESORA: el radio es 6, entonces un dos tres.

[Profesora se pasea por la sala respondiendo dudas a los estudiantes]

PROFESORA: Por mientras que vallamos avanzando, va a pasar algún compañero, para que no diga que yo le tengo mala o algo así, lo vamos a elegir al azar, entonces ustedes me van a decir stop, a ver [profesora mueve un lápiz sobre la nómina de los estudiantes] ustedes me dicen.

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: stop

PROFESORA: Barbara Fica

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no vino, [estudiantes se ríen]

PROFESORA: [profesora mueve un lápiz sobre la nómina de los estudiantes]

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: stop

PROFESORA: Francisca, Francisca Loaiza

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] [estudiantes se ríen]

PROFESORA: entonces la compañera va pasar a hacer el número uno, [se acerca a estudiante y le pasa el plumón]

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: ¿con el cuaderno?

PROFESORA: sí.

PROFESORA: mitad de la pizarra, cierto [le indica a la estudiante], para que la otra mitad la ocupe el compañero.

PROFESORA: ya, vamos a ver que dice el azar, ustedes me dicen stop

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] stop

PROFESORA: Felipe Cabezas

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no vino [se ríen]

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] stop

PROFESORA: Flores, María José Pacheco

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: nooo

PROFESORA: María José

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] [se ríen]

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: ehh, ¿Cuál profe?

PROFESORA: el dos, ya mi niña [profesora le pasa plumón a la estudiante]

PROFESORA: y el resto está con el tres, ¿o acá no? [se acerca a dos estudiantes y revisa su cuaderno]

PROFESORA: ahora viene la otra explicación, esperemos la otra explicación y ahí podemos hacer el tres, tenga paciencia, lo pueden ir revisando allá.

PROFESORA: pueden tomar asiento [le indica a la estudiante que estaban en la pizarra haciendo el ejercicio uno] muchas gracias, revisemos por favor. ¿Qué me dicen ustedes está bien lo que hizo la compañera o está mal?. $x^2+y^2+6x-2y-6=0$. A ver primero vamos a revisar la principal, porque esa era la que se pedía, ustedes hicieron, hicieron yapa pero bien, ¿está bien?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: si, está bien ¿cierto?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: luego la compañera resolvió el cuadrado de binomio ¿cierto?, obtuvo eso, resolvió el otro cuadrado de binomio para la diferencia, obtuvo eso, también está bien resuelto, el problema es el orden, ¿estará bueno?, ¿estará malo?, ¿cómo lo hacemos?, ¿cómo lo ordenamos?. Eso el orden lo vamos a dejar en stop, porque tengo que explicar de dónde y porque es ese orden, y de donde salió ese orden, porque yo después voy a decir acá x^2 primero, y^2, después la x después la y, después el término que está solo, pero tenemos que saber ¿por qué? ¿De dónde?.

PROFESORA: ¿y cómo esta acá lo que hizo de la compañera?, [profesora se refiere al ejercicio 2 que recién termina la estudiante]

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] bien [se ríen los estudiantes]

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: esta bueno profe

PROFESORA: ya súper, ¿cierto?, aquí quedo el x^2 solamente, resolvió el cuadrado de binomio, bien resuelto por cierto y lo dejamos ahí en standby, porque queremos saber si ese es el orden o no ¿sí?, ¿sí?.

PROFESORA: ya, ahora que ya están estos dos, porque todavía veo que la compañera allá está luchando con el ejercicio 3, ya o no, o ya está lista.

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]:

PROFESORA: esta lista si, ya, entonces miren acá. Nosotros sabemos, que esta es nuestra ecuación [profesora escribe en la pizarra la ecuación principal]

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: principal

PROFESORA: principal, gracias aquí tengo una estudiante, ecuación principal y ustedes por intuición, lo hicieron sin que yo les explicara, porque dedujeron que era igual que en la parábola, cuando yo tenía la ecuación principal de la parábola, yo resolvía los cuadrados de binomios y dejaba igualado ¿a? ¿a qué?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] a cero

PROFESORA: a cero, entonces ustedes intuyeron que era así, y efectivamente es así, ya. x^2 como quedaría acá, si yo resuelvo el cuadrado de binomio

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] -2hy

PROFESORA: o no ven los de atrás, ¿los de atrás ven esto?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: 2xh mas

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] h^2

PROFESORA: h^2, cuadrado de binomio para la diferencia, vamos con el otro cuadrado

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] y^2

PROFESORA: y^2 menos

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] menos 2y

PROFESORA: yk

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] yk

PROFESORA: yk

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] más

PROFESORA: más

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] k^2

PROFESORA: k^2 ya, y todo eso quedaba igualado al radio al cuadrado ¿sí? Ya. Ahora nosotros sabemos que para que quede en la forma general, de hecho ustedes lo aprendieron cuando aprendieron la ecuación de la recta, que había una ecuación principal y una general, que la principal era cuando la y estaba solita ¿cierto?, y en la principal yo podíamos observar todos los elementos con facilidad, como era el coeficiente de posición y la pendiente ¿se acuerdan?, siempre la principal es más amena y más amigable para observar geométricamente sus elementos, lo mismo pasaba con la parábola. Pero en todas las ecuaciones, la ecuación general de la recta esta igualada ¿a?, la general

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] a cero

PROFESORA: y en la parábola la ecuación general esta igualada ¿a?

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: cero

PROFESORA: entonces usted deduce que la ecuación de la circunferencia en la forma general tiene que estar igualada ¿a?

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: cero

PROFESORA: ya, entonces vamos a igualar a cero. El $x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2$, [profesora escribe en la pizarra], ¿Qué es lo que estoy haciendo?, solo ordenando ¿cierto? los elementos

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: menos r^2

PROFESORA: Ya, menos r^2, gracias si, [profesora completa la ecuación general que estaba escribiendo en la pizarra] ¿alguna duda eso?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no

PROFESORA: no, entonces acá vamos a obtener la ecuación general,que dice que primero va ir el x^2, después va ir el y^2, ya dice también que el numerito que acompaña a la h le vamos a poner D, o que acompaña al x, es lo mismo xh que hk o sea que xh que hx

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: entonces voy a colocar hx, ya, entonces ese -2h x le vamos a llamar D, esta explicado así también en su guía así que no hay que anotar nada, más esto [se refiere a 2y], le vamos a poner quien deduce que viene.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] E

PROFESORA: D

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] E

PROFESORA: E, y también la incógnita, la variable es h o sea x e y por lo tanto la k es una constante es un valor, entonces es lo mismo que yo tenga yk y ky si, entonces coloco ky a esa constante le vamos a llamar E, porque ese es un valor es un numero ya, y y va ser tu variable el que va ir cambiando ¿cierto?, le llamo y, y a todo esto D, E ¿y a todo esto le vamos a llamar? [Profesora señala en la pizarra $h^2+k^2-r^2$]

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] F

PROFESORA: F, entonces de aquí en adelante ustedes tienen que saber que cuando está en la forma principal primera va el x al cuadrado, luego va él y cuadrado, luego va el que tiene x, luego va el que tiene y, luego el termino independiente ¿sí?, o ¿no?.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: ya, revisemos como lo ordenaron las compañeras, $x^2+y^2+6x-2y-6=0$, ¿Cómo esta ordenado?[se refiere al ejercicio uno de la guía]

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] bien

PROFESORA: bien perfecto, pregunto vamos a la ecuación general ¿Quién es mi D aquí?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] 6

PROFESORA: 6 perfecto, ¿Quién es mi E?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] 2

PROFESORA: ¿2?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] -2

PROFESORA: -2, ¿Quién es mi F?, mi termino independiente,

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] -6

PROFESORA: -6, ¿sí? o ¿no?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: ya, vamos a ver como lo ordeno la compañera acá, [se refiere al ejercicio dos de la guía] ¿como esta?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] bien

PROFESORA: bien cierto, puedo borrar esto, [se refieres a la explicación de la forma general que anoto en la pizarra] porque esto usted lo tiene en su guía

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: y que no es necesario usted tome tiempo para que anote, pregunto aquí sí que con mucho cuidado ah, observando bien ¿quién es mi D?.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no está

PROFESORA: no está porque no hay con x cierto, no está la variable x, cero. ¿Quién es mi E?.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] -14

PROFESORA: ya -14. ¿Quién es mi F?.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] 42

PROFESORA: 42, ¿estamos de acuerdo?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: si, ya y nos falta alguien que pase a la pizarra y ¿está bien ordenado?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: si, está bien ordenado ya, espero que no salga la otra compañera, vamos a ver que dice el azar Ian.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no vino

PROFESORA: no vino, no salió nadie [cuando vuelve a señalar la lista al azar]

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] [se ríen]

PROFESORA: eh, Camila Ancapichun

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] [se ríen]

PROFESORA: no es por allá ¿cierto?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: oh la amiga, ya vamos Camila usted puede

ESTUDIANTE: [Camila] no la hice

PROFESORA: no la hiciste, ya la vamos hacer junta entonces

ESTUDIANTE: [Camila] tengo hasta la ecuación principal

PROFESORA: cópiala hasta donde la tienes y lo hacemos juntas, y el resto lo borramos cierto porque ustedes le dio lo mismo o no

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: ya lo borramos entonces,

PROFESORA: entonces D el que acompaña al x, E el que acompaña al y, F el termino independiente cierto el que esta solito si. [Profesora revisa la guía durante la estudiante resuelve ejercicio en la pizarra]

PROFESORA: quiero que vallamos a la guía y por mientras que su compañera ahí avanza, vallamos subrayando lo que ya hemos visto, entonces sección cónica ¿lo vimos?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: si, ustedes lo entienden cierto, que nace de hacer girar dos rectas, que al hacer girar esas dos rectas con cierto ángulo forman dos conos, dos conos si entonces eso está listo y cuando yo hago un corte horizontal se genera la circunferencia. Los conceptos y los elementos están listos también, damos vuelta la hojita ecuación principal de la circunferencia esta lista cierto.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: eh, analizamos de donde se obtenía la ecuación principal y determinamos la ecuación principal también, ecuación en el origen por allá eh, Cristian nos dijo que era $x^2+y^2=r^2$, nosotros analizamos cuando el (h,k) era (0,0) si, y nos dio efectivamente, también esta lista. Ecuación general de la circunferencia que la acabamos de explicar recién si, que también esta lista, y lo que faltaría ver y que es importante que nosotros veamos es que sucede, en que situación, en que caso o que elementos necesito yo para determinar la ecuación, todo los posibles casos en que yo puedo determinar la ecuación y nos falta ver eh, como determinar la ecuación principal y general conociendo ya no solo el centro y el radio, sino conociendo el centro y un punto de la circunferencia ¿sí?, eso nos falta y con eso ya estamos terminando.

PROFESORA: ya vamos con la compañera [se acerca a la estudiante que estaba en la pizarra haciendo el ejercicio]. ¿A ver cuál era tu centro?

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: (-6,4)

PROFESORA: -6 y -4 [lo revisa en la ecuación principal].

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]:¿hay que resolver?

PROFESORA: si hay que resolvar, resolver 6^2 ¿resolvar?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] [se ríen]

PROFESORA: ya toda la semana po chicos 6^2, ustedes ya me conocen, 6^2, ¿6por6?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] 36

PROFESORA: 36, y eso igual que ese menos menos pasa a más, ya ahora el cuadrado de binomio ahí, que te dice el cuadrado de binomio que el primer término al cuadrado más dos por el primero por el segundo, dos por x y por 6, ya 2 por 6, dos por el primero por el segundo.

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: 2x

PROFESORA: por 6

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: 12x

PROFESORA: 12 más el ultimo al

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: cuadrado

PROFESORA: 6 por 6

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: 36

PROFESORA: 36, más el primer término al cuadrado

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: y^2

PROFESORA: y^2, más dos por el primero por el segundo

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: -8y

PROFESORA: -8y, más el ultimo al cuadrado

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: 16

PROFESORA: 16, ahora la vamos a trasladar para acá, como decía $x^2+y^2+12x-8y$, después

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: se suma 36 y 16

PROFESORA: ya, pero yo puedo eliminar el 36 con el 36

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: ahh

PROFESORA: porque tengo un mismo elemento a ambos lados, y y de hay 16. ¿Cuánto vale D? el que acompaña al x.

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: 12

PROFESORA: y E

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: -8

PROFESORA: F como seria

ESTUDIANTE [Estudiante no identificable]: 16

PROFESORA: 16, [Estudiante se devuelve a su asiento], ya ehh, ¿que hicimos con la compañera ahí? y ¿cómo está el ejercicio?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] bueno

PROFESORA: bueno, bien entonces vamos a pasar al último tema que nos queda que es determinar la ecuación de la circunferencia, pero esta vez ya no nos dan explicito, ni ni el centro ni el radio, nosotros vamos a tener que hacer algo para poder determinarlo ya. Entonces, entonces dice vamos a tomar el ejemplo, vamos a tomar el ejercicio cuatro, todos con el ejercicio cuatro, que dice el ejercicio cuatro, dice que el centro es (2,-1) ¿está bien o no?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: y que pasa, pasa por qué punto

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] A

PROFESORA: por el punto A que es (-1,4) ¿sí?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: ya, ¿estamos de acuerdo?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: vamos a invitar a Cristian, eso que fue arbitrario cierto no fue al azar

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no

PROFESORA: a Cristian a que pase a hacer el dibujo, no importa que no esté en el sistema cartesiano, pero que se imagina el con esos datos, ya Cristian.

PROFESORA: que se imagina ahí si el tuviera que hacer un dibujo que haría

ESTUDIANTE: [Cristian pasa a la pizarra y dibuja]

PROFESORA: estamos terminando cierto queda minutos, como 20 minutos 15 minutos [profesora se pasea por la sala]

ESTUDIANTE: [Cristian le pide a la profesora que observe el plano que hizo en la pizarra]

PROFESORA: ya ehh, lo que tú te imaginas no importa que este malo, lo que tú te imaginas

ESTUDIANTE: [Cristian]

PROFESORA: marque lo único que si te pido que marques bien, bien grandecito el punto, que tus compañeros vean, por qué tú lo ubicaste bien, ubico bien los dos puntos. Pero que hago después, que me imagino ¿Qué te imaginas tú?, dice que el centro y pasa por ese punto ¿Qué te imaginas?

ESTUDIANTE: [Cristian señala los puntos que dibujo en el plano en la pizarra]mmm, ahí

PROFESORA: ah

ESTUDIANTE: [Cristian señala como puede ser su dibujo]

PROFESORA: ahí dice muy bien, pero colócalo, dibújalo, no importa que no se exacta, no importa si no sea exacta es lo que usted se imagina.

ESTUDIANTE: [Cristian hace una recta con los dos puntos]

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] [se ríen]

PROFESORA: no importa después vamos a trabajar con un software ¿cierto? con un programita y hay las gráficas van a salir perfectas, pero ustedes ya manejan y entienden.

PROFESORA: ya, ¿Qué es eso?

ESTUDIANTE: [Cristian]: un radio

PROFESORA: es un radio, colóquele una r

PROFESORA: como el compañero dice que ese es un radio como iría la circunferencia, ¿la circunferencia iría tal vez aquí? [Profesora se acerca a la pizarra indicando que la circunferencia pasaría por el radio es decir por el centro]

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] noooo

PROFESORA: no sé por qué yo no lo ha dibujado como se la imagina

ESTUDIANTE: [Cristian señala en la pizarra el dibujo de manera correcta]

ESTUDIANTE: es gigante

PROFESORA: es gigante dice por acá la compañera

ESTUDIANTE: [Cristian señala a la profesora como podría ser la circunferencia]: profe es como así

PROFESORA: ya pero hágala, es lo que usted, usted se imagina. Trate de que sea perfecta por favor

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] [se ríen]

ESTUDIANTE: [Cristian]: encima quiere perfecta

PROFESORA: [se ríe]

ESTUDIANTE: falta un compas

PROFESORA: si falta el compás, [profesora comenta con la estudiante que se le olvido porque tenía un compás, este audio no es muy nítido], no importa es parte del show.

ESTUDIANTE: [Cristian llama a la profesora y todavía no se atreve a hacer la circunferencia]

PROFESORA: pero haga la circunferencia, todos queremos ver la circunferencia

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] siii

PROFESORA: ya vamos

ESTUDIANTE: dale no más

ESTUDIANTE: [Cristian]: se van a reír

PROFESORA: no, no importa si es una circunferencia, vamos, vamos.

ESTUDIANTE: [Cristian se ríe y no se atreve a hacer la circunferencia]: profe, no quiero

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] [se ríen]

PROFESORA: alguien quiere pasar a hacerla por favor, el compañero usted, usted quiere

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: no

PROFESORA: no le tengan miedo si es una circunferencia, ya yo la voy hacer

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] ohh

PROFESORA: no quedo perfecta pero, ¿porque no quedo perfecta?

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: por el radio

PROFESORA: porque el radio cierto no mide lo mismo ya, gracias Cristian

ESTUDIANTE: [Cristian vuelve a su asiento]

PROFESORA: bueno lo más importante no era que la circunferencia quedara perfecta, de hecho no importa si no quedo perfecta, ya, lo más importante es que usted entendiera y se ubicara espacialmente aquellos datos que a ustedes le dieron. Y Bueno dijo que el (2,-1) era su centro si, y que pasaba por ese punto, por lo tanto pasaba por ese punto [profesora indica en la pizarra el punto (-1,4)], ¿todos lo visualizaron así?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: si, perfecto ahora yo les pregunto ¿cuáles eran los datos que nosotros siempre necesitábamos para determinar la ecuación?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] radio

PROFESORA: el radio

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] el (h,k), el centro

PROFESORA: tengo el (h,k)

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: obvio lo tengo el centro el (2,-1), pero ¿Qué me falta?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] el radio

PROFESORA: pero en este caso como yo determino el radio si conozco los dos extremos del radio

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] distancia entre dos puntos

PROFESORA: distancia entre dos puntos si, ¿Cómo era la formulita?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] raíz

PROFESORA: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2}$

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

PROFESORA: perfecto [profesora anota formula en la pizarra], entonces vamos a calcular la distancia que hay de un punto a otro punto, ¿si?, ehh. Entonces este va ser mi ¿Cuál va ser mi P_1 cual mi P_2 importa no importa?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no importa, nooo

PROFESORA: ya coloquémosle a este ahh. Ya póngamole P_1, este que sea P_1[profesora se refiere a un punto de la circunferencia], haber, la pregunta es ¿importa cuál es P_1 cual es P_2?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no

PROFESORA: no, ¿Por qué no?

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: las distancias son iguales

PROFESORA: no muy bien, porque la distancia desde aquí hacia la compañera y de la compañera hacia mí es la misma, no importa por cual punto yo comienzo, verdad. Entonces vamos, dice x_2, ¿Quién es mi x_2?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] -1

PROFESORA: están seguros

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no 2

PROFESORA: ya mi x_2, porque este es mi P_2 y este es mi P_1

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] 2

PROFESORA: eso nos pusimos de acuerdo

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] 2

PROFESORA: ya dos menos x_1

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] menos, menos 1

PROFESORA: menos de la formula y el menos del -1

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] más uno

PROFESORA: perfecto, y_2

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] menos 1

PROFESORA: y_2

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] menos 1

PROFESORA: menos 1, menos

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] cuatro

PROFESORA: cuatro, perfecto. Radio ehh, quiero preguntarles algo ¿este es radio o radio al cuadrado?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] radio

PROFESORA: radio cierto, porque estoy viendo la distancia, después ese resultado voy a tener que

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] usar radio al cuadrado

PROFESORA: elevarlo al cuadrado, perfecto vamos, menos con menos

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] más

PROFESORA: en realidad me quedo dos más uno eso es

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] tres

PROFESORA: elevado al cuadrado

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] nueve

PROFESORA: nueve, ya. Menos uno y menos cuatro

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] -5

PROFESORA: menos cinco elevado al cuadrado

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] 25

PROFESORA: 25 sumemos

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] 34

PROFESORA: ya 34, la verdad es que yo el 34 lo puedo descomponer

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no

PROFESORA: 17 por 2 o no,

PROFESORA: no, no puedo descomponer ya y me conviene descomponer

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no

PROFESORA: no porque como después voy a tener que elevar al cuadrado

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] se elimina la raíz

PROFESORA: se va la raíz si, entonces la pregunta es ¿Cuánto es el radio al cuadrado?, porque en definitivo yo necesito el radio al cuadrado.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] 34

PROFESORA: no necesito el radio

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] 34

PROFESORA: 34, entonces ustedes completen la ecuación, complételа, vamos, vamos, tenemos el radio tenemos el centro [profesora se pasea por la sala] y nos va quedando poquito tiempo así que vamos terminando con los ejercicios

PROFESORA: ya entonces van a completar ese, y vamos hacer el final. Uno más y nos vamos

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: [pregunta]

PROFESORA: porque la fórmula es así, porque es hipotenusa al cuadrado

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: [pregunta]

PROFESORA: exactamente, sí.

PROFESORA: estamos listos completaron. Vuelvo a repetir chicos aquí no importa quién es P_1 quien es P_2, la distancia es la misma. Porque estamos calculando la distancia no otra cosa [profesora se pasea en la sala respondiendo dudas a los estudiantes].

PROFESORA: vamos borrando, porque vamos a ir cerrando, vamos a ir viendo si realmente logramos los objetivos o no, cierto. ¿Qué aprendió hoy? ¿Fue importante o no? ¿Cómo lo hizo?. Vamos, vamos, vamos. [Profesora se pasea en la sala respondiendo dudas a los estudiantes]

PROFESORA: ya vallamos cerrando entonces, vallamos cerrando ehh, quiero que ustedes me cuenten rapidito porque nos quedan 5 minutos ehh, ¿Qué fue lo que aprendimos hoy?.

ESTUDIANTE[Estudiante no identificable]: muchas cosas

PROFESORA: pero que cosas, haber yo les voy hacer preguntas dirigidas a ver ehh, ¿Cuál fue la cónica que trabajamos hoy?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] circunferencia

PROFESORA: ¿Qué corte se le hacía a los conos?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] horizontal, vertical

PROFESORA: horizontal, perfecto. ¿Cuántas formas o tipos de ecuaciones de la circunferencia hay?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] dos

PROFESORA: ¿Cuáles?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] principal y general

PROFESORA: principal y general perfecto, ¿Cuál de las dos ecuaciones, cuál es más fácil de visualizar sus elementos?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] principal

PROFESORA: principal perfecto eh. ¿Cuántos elementos o que elementos necesito yo conocer para determinar la ecuación principal?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] dos, el centro y el radio

PROFESORA: el centro y el radio y ¿cuántos elementos tenía la circunferencia?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] dos

PROFESORA: ¿Cuál?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] centro y el radio

PROFESORA: centro y el radio ya, ¿Quién era (h.k)?

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] el centro

PROFESORA: perfecto, ehhh se acuerdan cuando nosotros vimos una presentación de la parábola, había ciertas situaciones en la vida cotidiana, donde se presentaba la parábola

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] si

PROFESORA: como el lanzamiento de un proyectil teníamos una catedral se acuerdan

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] no

PROFESORA: lo vimos en la sala chiquitita acá

PROFESORA: ya la pregunta y la inquietud que quiero que ustedes se lleven hoy, es para que me servirá a mi determinar la ecuación de la circunferencia, porque o es necesario o solamente me basta con conocer ¿Cuál es el área? ¿Cuál es el perímetro de un circulo?. Para que ¿Cuál será la necesidad?. En qué situación me lo puedo encontrar.

PROFESORA: entonces los invito que, cuando se vallan a sus casas vallan observando a ver si se encuentran alguna situación en la cual ustedes puedan compartir el día jueves. Eso es todo nos vemos, que estén bien.

ESTUDIANTES EN GRUPO:[algunos] chaoo

Anexo 2

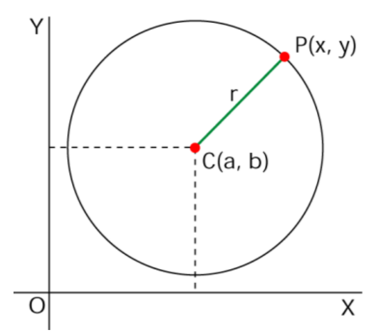
Guía de clases de la profesora A

GUÍA 1: La Ecuación de la Circunferencia

ÁLGEBRA Y MODELOS ANALÍTICOS

Nombre:			
Curso:		Fecha: / /16	***"Ojo por ojo y todo el mundo acabará ciego."*** ***GANDHI***
Indicadores de evaluación:	○ Comprender e identificar una circunferencia y un círculo. ○ Identificar los elementos de una circunferencia. ○ Determinar la ecuación principal y general de una circunferencia.		
Instrucciones: Resuelva cada uno de los ejercicios en el espacio indicado, revise las soluciones, consulte al profesor si su solución es distinta a la señalada.			

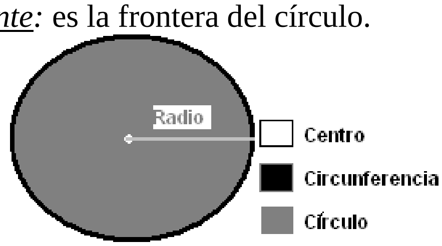
***Analíticamente**:* es una ecuación de segundo grado con dos variables. Ahora bien, no toda ecuación de este tipos representa siempre una circunferencia; sólo en determinadas condiciones esto es cierto.



Geométricamente: es la frontera del círculo.

Centro: (h, k)

Radio r



$$P(x, y) \in \text{Circunferencia} \Leftrightarrow d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$

Ecuación analítica de la circunferencia: $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

Una circunferencia queda completamente determinada si se conocen su centro y su radio.

ECUACIÓN PRINCIPAL DE LA CIRCUNFERENCIA: Centro (h,k) y radio r

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CENTRADA EN EL ORIGEN

Nota: Si la circunferencia se encuentra centrada en el origen, es decir h=0 y k=0, la ecuación de la circunferencia es dada por:

$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$ entonces $\boxed{(x)^2+(y)^2=r^2}$

ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA : una ecuación del tipo

$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$

¿Cómo podemos transformar esta ecuación a la forma? $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Paso 1: Escribimos la ecuación de la forma $\cdot x^2+Dx+y^2++Ey+F=0$

Paso 2: Sumamos y retamos. $(\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4})$

$$x^2+Dx+y^2+Ey+F+(\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4})-(\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4})=0$$

Paso 3: Ordenamos los términos de manera conveniente.

$$(x^2+Dx+\frac{D^2}{4})+(y^2+Ey+\frac{E^2}{4})=-F+\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}$$

Paso 4: Si observas el resultado anterior podrás darte cuenta que se forman cuadrados de binomio, es decir:

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(Y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

Nota: De la ecuación que hemos obtenido podemos deducir que:

(h,k)= $\left(\frac{D}{2},\frac{E}{2}\right)$ r= $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F.}$

Además si $D^2+E^2-4F>0$, la circunferencia es real.

$D^2+E^2-4F<0$, la circunferencia es imaginaria.

$D^2+E^2-4F=0$, la circunferencia es de r=0.

¡Resolvamos los siguientes ejercicios!:

1.- Hallas la ecuación de la circunferencia:

a) de centro (-2,3) y radio 4.
b) de centro (0,7) y radio $\sqrt{7}$.
c) de centro (-6,4) y diámetro 12.
d) de diámetro que une los puntos (-3,5) y (7,-3).
e) De centro en el origen y que pase por el punto (6,0)
f) Centro (-3,4) y es tangente al eje Y
g) Centro (-3,-2) y es tangente a la recta 3x+ 4y + 2 = 0

4.- Hallar la ecuación de la circunferencia de manera que uno de sus diámetros sea el segmento que une los puntos (5,-1) y (-3,7).

5.- Hallar la ecuación de la circunferencia que tenga como centro el punto (4,-2) y diámetro 8.

2.- Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$.

3.- Hallar el valor de k para que la ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ represente una circunferencia de radio 7.

6.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos (2,3) y (-1,1) y cuyo centro esta situado en la recta x-3y-11=0

7.- Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (5,-2) y que pase por el punto (-1,5).

8.- Hallar el centro y el radio de las siguiente circunferencias. Determinar si cada una de ella es real imaginaria o se reduce a un punto. Aplicar la fórmula y comprobarla por suma y resta de los términos adecuados para completar cuadrados.

a) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

b) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x + 7y = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

Anexo 3

Transcripción clase profesor B

PROFESOR: Nosotros terminamos con la sección de las cónicas donde trabajamos con la parábola

ESTUDIANTE:[No identificable] si profesor

PROFESOR: Ya, entonces ahora vamos a ver la circunferencia, que es la otra cónica ya, que es la otra cónica que corresponde al 2º semestre porque después voy a trabajar con ustedes lo que es la elipse y la Hipérbola, ya entonces hoy día voy a empezar con algo simple acerca de la circunferencia ¿ya?, entonces lo 1º es que observen lo siguiente miren, se acuerdan que cuando trabajamos la parábola yo les mostré donde salían estas famosas cónicas, salen cierto de la intersección de un cono que está en revolución ¿ya? con un plano, y ahí están las 4 cónicas nosotros trabajamos, la parábola ya que es la intersección de este plano con ese cono y nos toca ver ahora la circunferencia que es cuando el plano cierto es perpendicular a la base del cono ya y de ahí sale la circunferencia ya de esa parte es la intersección entonces entre el plano y un cono en revolución. ¿Alguna pregunta? [durante la explicación el profesor va indicando en el ppt los cortes del cono]

ESTUDIANTES: [grupo] jaja

PROFESOR: Bueno entonces quiero que ahora este, anotemos el objetivo ya qué va a ser el que vamos a Trabajar, lo voy anotar en este ladito [profesor escribe el objetivo en la pizarra]. Colocan 1º cómo título circunferencia y hoy día lo que quiero hacer con ustedes conocer la circunferencia como lugar geométrico y tratar de llegar a su ecuación principal, es lo último que quiero ver. Ya eso es lo que quiero hacer en esta clase y en este momento. [objetivo escrito en la pizarra: conocer la circunferencia como lugar geométrico y su ecuación principal], Ya que conozcamos cuál es la ecuación principal de la circunferencia y poder dar una definición formal en el plano, ya utilizando coordenadas ya en el plano cartesiano, entonces para eso voy a tomar el. Voy a trabajar en …

PROFESOR: Tenía un concepto igual que mostrarles miren qué es por ejemplo esa circunferencia, qué ustedes conocen la circunferencia ustedes la trabajaron en cursos anteriores ya ehhh, mostraron los elementos de la circunferencia entonces pueden describir un poco ya o un caso particular de los conceptos del centro y del radio la circunferencia ya así que anoten eso que está ahí para que puedan ir trabajando el concepto de la circunferencia. Bueno el concepto de circunferencia está relacionado con el centro cierto? y con los puntos donde todos tienen que estar a una misma distancia ya, eso es lo que ustedes conocen y años anteriores ustedes trabajaron otros elementos de la circunferencia cómo son las cuerdas, las tangentes, cierto? las secantes, los ángulos dentro de la circunferencia. Esa circunferencia que está ahí [El profesor se refiere a imagen de Power Point] está en un plano normal, no está en el plano cartesiano, sino que un bosquejo de la circunferencia con centro y con el radio que está ahí. ¿La definición del radio yo creo que la conocen ustedes cierto?. La distancia desde el centro a un punto cualquiera de la circunferencia, lo que yo quiero hacer ahora esta parte de la circunferencia pero en el plano ya como lugar geométrico ¿ya? Entonces quiero llegar a una definición formal de la circunferencia de qué forma quiero que observen [profesor dibuja eje coordenado en la pizarra]. Por ejemplo, ahí está plano cartesiano X e Y, voy a tomar una circunferencia cualquiera, con cualquier centro [Profesor dibuja una circunferencia en el primer cuadrante del plano cartesiano] ahí. Voy a tomar una circunferencia cualquiera ya, en el plano cartesiano, entonces esa circunferencia que está ahí su centro va a estar en cualquier punto del plano entonces cuando nosotros trabajamos la vez pasada la parábola se acuerdan que 1º la trabajamos con vértice en el origen y después cambiamos con vértice (h,k) que era cuando el vértice estaba en cualquier punto del plano, ahora les voy a dar la definición en caso general ya? entonces voy a tomar el centro ya, h es que estas distancias h y este segmento va a ser k [Profesor dibuja el centro a la circunferencia que estaba en la pizarra], entonces este va ser el centro O, de coordenadas (h,k), ya esa es cualquier circunferencia qué tiene centro (h,k) en cualquier punto del plano y voy a tomar un punto cualquiera de esta circunferencia un punto P (x,y) ya?, donde que tiene que ocurrir, donde la distancia entre el centro y el punto P (x,y) y tiene que ser el radio ya, entonces cualquier punto que yo tome acá de la circunferencia, la distancia qué va hay desde el centro a este punto tiene que ser la misma ya? en este caso r, ¿se entendió por ahí?

ESTUDIANTES: [grupo] siii

PROFESOR: Ya eso es más o menos con cualquier centro ya, la circunferencia puede estar en cualquier cuadrante, en cualquier punto del plano cartesiano ya, entonces esta es una circunferencia con centro (h,k), y un punto cualquiera (x,y), ¿alguna pregunta por ahí? Alguna pregunta. [Profesor se pasea por la sala intentando que los estudiantes hagan sus preguntas pertinentes]

PROFESOR: A través de eso que yo recién le expliqué ahí como yo puedo dar una definición formal de la circunferencia, como la puedo definir con mis propias palabras y luego definiéndola con la parte Matemática. 1º darse cuenta que la circunferencia es un lugar geométrico, ya es una cónica estamos trabajando con cónica ya, entonces la vamos a definir de la siguiente forma: ya la circunferencia, ya es el lugar geométrico, ya ¿de qué? de todos los puntos ya, de todos estos puntos, cierto que [Indica el profesor la circunferencia qué esta dibujada en la pizarra] están acá, de todos los puntos P(x,y), que están a una distancia r, ya que es la distancia que está allá del centro O(h,k). Ya eso es lo que yo puedo definir con mis propias palabras con respecto a la circunferencia ¿cierto? en el plano ¿Alguna consulta con eso?, hablen, hablen no pasa nada.

ESTUDIANTES: [grupo] jaja

PROFESOR: Ahora cómo puedo escribir esta definición con una forma matemática como la puedo expresar acá en una forma matemática ya, a través del lenguaje matemático.

ESTUDIANTES: [Conversan entre ellos, pero no participan en la clase]

PROFESOR: La circunferencia de centro O a un punto P [Profesor escribe en la pizarra C(O,P)], ya ese C es la circunferencia de centro O a un punto P, va a ser igual a cualquier punto que pertenezca al plano miren ¿porque esa $\wp$?, porque esa $\wp$ la diferencio de la P del punto que estoy tomando allá, es una $\wp$, para identificar que estoy hablando de un plano ya [Profesor escribe en la pizarra $C(O,P) = \{P \in \wp\}$. En este plano en $\mathbb{R}^2$, Tal qué ¿qué tiene que pasar? ¿Qué tendría que pasar porque el punto que pertenezca al plano?, tal qué, ¿qué tiene que pasar?

ESTUDIANTES: [grupo] es la distancia

PROFESOR: Cualquier punto que pertenezca al plano tal que, la distancia de OP tiene que ser igual a

ESTUDIANTES: [grupo] A r, Radio

PROFESOR: al radio. ¿Ya? entonces ahí está definido recién eh, una expresión matemática de lo que es la circunferencia ¿Ya?, entonces acá hay que tener presente que yo estoy trabajando con una circunferencia de cualquier centro ¿ya?, yo después voy a dar ejemplos de la circunferencia de cualquier centro a un punto y ahí está escrita ya, a través de un concepto y de una expresión matemática.

PROFESOR: Ahora ¿qué es lo que quiero llegar?, quiero llegar a esto [Profesor indica en la pizarra el objetivo haciendo énfasis subrayando ecuación principal], a la ecuación principal entonces voy a tratar de ver ¿cómo? con esos valores y con esos puntos [indicando la circunferencia dibujada en la pizarra] que tome ahí es el punto (x,y) y el centro (h,k), llegar a una ecuación que me permita representar la circunferencia, y si ustedes se dan cuenta acá estamos trabajando con el concepto de distancia [Profesor indica el dibujo que tiene en la pizarra donde se destaca la distancia entre el centro de la circunferencia y un punto cualquiera qué es igual al radio] ¿cierto?, y al igual que la vez pasada cuando trabajamos con la parábola, se acuerdan que yo demostré ¿de dónde salía la ecuación de la parábola?, aplicando la fórmula de la distancia

ESTUDIANTES: [algunos] si

PROFESOR: Acá voy a hacer lo mismo ya.

ESTUDIANTES: [algunos] Cómo

PROFESOR: entonces ¿cómo? ¿se acuerdan cuando trabajamos la distancia entre dos puntos?

ESTUDIANTES: [grupo] sii

PROFESOR: Ya entonces vamos a trabajar acá voy a borrar acá [profesor intenta borrar la definición de Circunferencia]

ESTUDIANTE: [no identificable] No borre

ESTUDIANTES: [grupo] jaja

ESTUDIANTE: [no identificable] Escriba el lado po profe

PROFESOR: Voy a calcular acá entonces, la distancia ya, entre OP. ¡Ya! que la distancia que hay entre el centro O y el punto P. Pero ustedes saben calcular la distancia entre dos puntos.

ESTUDIANTES: [algunos] si

PROFESOR: Se acuerdan que tomamos los valores de (x_1, y_1), entonces este lo voy a llamar (x_1, y_1)[Profesor se refiere al punto P de la circunferencia qué tiene en la pizarra], (x_2, y_2) [Profesor se refiere al centro O de la circunferencia dibujada en la pizarra], y voy establecer la relación con la resta de Las coordenadas ¿Ya?, entonces se acuerdan de la fórmula ¿Qué era lo que llevaba?

ESTUDIANTES: [algunos] La distancia

PROFESOR: La distancia era la raíz

ESTUDIANTE: [no identificable] x_1

ESTUDIANTE: [no identificable] x_2-x_1

PROFESOR: ya, pero ahí o x_1- x_2, Cómo está al cuadrado van a quedar positivos igual así que sería $(x\text{-}h)^2$ [Profesor escribe en la pizarra la distancia el punto de la circunferencia y su centro]

ESTUDIANTE: [algunos] más

PROFESOR: más

ESTUDIANTE: [algunos] y-k

PROFESOR: ¿Y eso tiene que ser igual a qué?

ESTUDIANTE: [algunos] r

PROFESOR: a r, cierto, eso tiene que ser igual a r, ¿ya?, [profesor escribe en la pizarra formula de distancia aplicada con las coordenadas centro O y el punto P de la circunferencia que estaba en la pizarra] entonces a través de la fórmula de la distancia qué allá está anotado voy a establecer ¿ya?, la ecuación de la circunferencia en su forma principal.

PROFESOR: De qué forma vamos a trabajar ahora, lo que voy a hacer ahora, voy a elevar al cuadrado para eliminar la raíz, ¿ya?, ahí entonces me va a quedar la ecuación de la forma x menos h al cuadrado más y menos k al cuadrado ¿igual a?

ESTUDIANTE: [algunos] r^2

PROFESOR: r^2, [Profesor escribe en la pizarra la ecuación de la circunferencia] entonces eso que encerré ahí corresponde a la ecuación de la circunferencia en su forma

ESTUDIANTE: [algunos] Principal

PROFESOR: principal, esa es la ecuación de la circunferencia en su forma principal. Entonces debajito podemos definirlas si quieren ya, como la ecuación, pueden anotar qué esta ecuación corresponde a la ecuación principal de la circunferencia con centro

ESTUDIANTE: [no identificable] cero

PROFESOR: nooo, estamos trabajando con ¿qué centro?

ESTUDIANTE: [no identificable] (h,k)

PROFESOR: centro (h,k) y radio R, ya y su radio tiene que ser r

ESTUDIANTE: [no identificable] Puede repetir de nuevo profe

PROFESOR: Ya, corresponde a la ecuación principal de la circunferencia, ya esto corresponde a la ecuación principal de la circunferencia con centro (h,k) y radio r.[Profesor indica la ecuación que está escrita en la pizarra, anota separadamente el centro y el radio de la circunferencia]

ESTUDIANTE: [no identificable] profe no hay general aquí

PROFESOR: dime

ESTUDIANTE: [no identificable] hay forma general

PROFESOR: si, la forma general viene después en la otra clase ¡ya!, como hay principal existe la general también, que esa después vamos a tener que hacer la solución de los cuadrados del binomios y solamente dejarla en función de una variable. Ejemplo, veamos un ejemplo simple de eso. [Profesor escribe en la pizarra el ejemplo, mientras los estudiantes conversan]

PROFESOR: Determinar la ecuación principal de la circunferencia, ¿ya?. Determinar la ecuación principal de la circunferencia de centro (4,2) y radio r=3. Para hacer el ejemplo solo hay que reemplazar los valores [profesor indica formula de la ecuación principal escrita en la pizarra] acá en la ecuación principal, ustedes saben cómo este sh [profesor hace callar los estudiantes], como este es el centro este va a ser h y este va a ser k [profesor indica en la pizarra las coordenadas del centro] tengo el radio y encuentro la ecuación principal de la circunferencia [profesor da tiempo para que los estudiantes resuelvan solos el ejemplo], ¿alguna duda hasta ahí?.

ESTUDIANTE: [algunos] no.

PROFESOR: [profesor pasa asistencia del curso, estudiantes terminan el ejemplo]

PROFESOR: ¿ya?, se pudo calcular, ¿pudieron encontrar la ecuación de la circunferencia?.

ESTUDIANTE: [algunos] si.
PROFESOR: sí.
ESTUDIANTE: [no identificable] profe se reemplazaba.
PROFESOR: se reemplazaba no más ¿cierto?.
ESTUDIANTE: [no identificable] ahh.
PROFESOR: no hay que hacer nada más porque estamos trabajando en la forma principal, ya miren les traje una guía shh, para trabajar, pero solamente, la guía dice encontrar las ecuaciones principal y general solamente vamos a encontrar la principal
ESTUDIANTE: [no identificable] profe puede explicar el ejemplo
PROFESOR: si, solamente vamos a trabajar la principal [profesor reparte las guías a los estudiantes y les va explicando que solo van a calcular la ecuación principal de la circunferencia] que es la más simple.
ESTUDIANTE: [no identificable muestra el ejemplo resuelto en su cuaderno al profesor cuando este le pasa la guía de ejercicios].
PROFESOR: es reemplazar
ESTUDIANTE: [no identificable] así.
PROFESOR: sí. [profesor sigue repartiendo la guía de ejercicios]
ESTUDIANTE: [no identificable muestra su cuaderno] ¿eso no más?
PROFESOR: porque si tu la empiezas a resolver después es el caso general.
ESTUDIANTE: [no identificable] ahh
PROFESOR: y yo todavía no quiero trabajar en eso.
PROFESOR: Ya, entonces como nos queda la solución de la circunferencia en principal. [profesor revisa ejemplo, debido a que se lo pidió una estudiante]
ESTUDIANTE: [no identificable] x-4
PROFESOR: x menos
ESTUDIANTE: [algunos] cuatro
PROFESOR: cuatro al cuadrado más, shh
ESTUDIANTE: [algunos] y menos 2 al cuadrado
PROFESOR: shh, igual a
ESTUDIANTE: [algunos] nueve.
PROFESOR: a nueve, ya que se cierra el cuadrado, ahí, no resuelvan los cuadrados ya
ESTUDIANTE: [no identificable] Eso solamente profesor
PROFESOR: eso solamente
ESTUDIANTE: [no identificable] a ya
PROFESOR: no quiero trabajar nada más porque si resuelven los cuadrados es lo que vamos a ver mañana cuando empiece a trabajar con la general
ESTUDIANTE: [no identificable] Mañana
PROFESOR: así que no hay que resolver los cuadrados
ESTUDIANTE: [no identificable] no se resuelven
ESTUDIANTE: [no identificable] Eso, eso solamente
ESTUDIANTE: [no identificable] Hay que dejarlo así nomas
PROFESOR: pero si esta es la ecuación principal [Profesor indica en la pizarra la formula de la ecuación principal]
ESTUDIANTE: [no identificable] Yo pensé que la principal es igual a 0.
PROFESOR: No
ESTUDIANTE: [no identificable] Esa es la ecuación principal
ESTUDIANTE: [no identificable] Era eso y yo la empecé a resolver
PROFESOR: Mañana la vamos a resolver, ahora trabajemos con la guía shhh.
PROFESOR: Ahora qué pasa con la guía shh, en la guía tenemos, por ejemplo van a ver dificultades en algunos ejercicios ¿ya?, por ejemplo, bueno la letra es parecido al de la pizarra la letra B el radio tiene una raíz.
ESTUDIANTE: [no identificable] se saca la raíz
PROFESOR: entonces la raíz va a tener que elevarla al cuadrado.
ESTUDIANTE: [no identificable] se le sale la raíz

PROFESOR: Las letras C sh, tengo un diámetro entonces hay que tener cuidado porque me están dando el diámetro y no tengo el radio
ESTUDIANTE: [no identificable] A pero el diámetro
PROFESOR: ¿Qué hay que sacar ahí?
ESTUDIANTE: [no identificable] Se divide en dos
ESTUDIANTES: [algunos] Seis
PROFESOR: ¿El?
ESTUDIANTE: [no identificable] El doce se divide en dos
PROFESOR: El que va en el centro, el punto
ESTUDIANTE: [no identificable] Medio
PROFESOR: Medio, ¿ya?
ESTUDIANTE: [no identificable] Ahhh
ESTUDIANTE: [no identificable] ¡El punto medio!
PROFESOR: Si
ESTUDIANTE: [no identificable] Profe ¿pero el diámetro no es el que se divide en dos?, quedaría en seis
ESTUDIANTE: [no identificable] no sería lo mismo
PROFESOR: Es que como tu estas trabajando pal siguiente lado, tu vas a encontrar un punto, porque tu tienes que encontrar el centro, no tienes que encontrar la longitud, después si, después vamos a calcular la distancia entre los dos puntos y ahí vas a encontrar la distancia
ESTUDIANTE: [no identificable] ¿Como dijo?
PROFESOR: Primero saca el punto medio. Le estoy dando las indicaciones.
PROFESOR: Entonces a medida que van a ir haciendo los ejercicios de la guía se van a ir encontrando con algunas dificultades
ESTUDIANTE: [no identificable llama al profesor] podría venir.
PROFESOR: [Se detiene donde otra a estudiante a resolver las dudas]
ESTUDIANTE: [no identificable] es x e y o no
PROFESOR: El centro es si x e y, si porque el punto donde reemplazas es (x, y) [profesor se pasea por la sala resolviendo dudas a los estudiantes, y revisando los ejercicios resueltos por estos]
ESTUDIANTE: [no identificable] ¿Pasa por? el punto.
PROFESOR: Si porque cuando pasa por un punto, cuando te dan el centro y te dicen que pasa por un punto ese es el punto (x, y), ¿ya?.
ESTUDIANTE: [no identificable] Profe a que se refiere con ¿pasa por?
PROFESOR: el punto (x, y) [profesor señala el punto de la circunferencia que tiene en la pizarra]
ESTUDIANTE: [no identificable] Ah y hay que sacar la distancia.
PROFESOR: Y ahí sacas la distancia, sí.
PROFESOR: [Se pasea por la sala resolviendo dudas a los estudiantes, y revisando los ejercicios resueltos por los estudiantes]
ESTUDIANTE: [algunos llaman a sus puestos para consultar en forma personal]
[Los estudiantes trabajan en su guía de ejercicio de forma grupal y el profesor le da tiempo]
PROFESOR: Quien va a pasar a hacer la primera, por una décima [profesor se refiere a pasar a la pizarra]
ESTUDIANTE: [algunos] Yo, yo
ESTUDIANTE: [no identificable] Por una decima
PROFESOR: Si. En ese lugar de la pizarra [profesor le indica a la estudiante donde debe hacer el ejercicio]
PROFESOR: [profesor se pasea por la sala aclarando dudas a los estudiantes]
ESTUDIANTE: [no identificable] Yo quiero hacer la otra
PROFESOR: la segunda
ESTUDIANTE: [no identificable] Profe, profe
ESTUDIANTE: [no identificable] Como se hace la D
PROFESOR: La D, que tiene referencia, ¿en cuál?
ESTUDIANTE: [no identificable] D
PROFESOR: En la D, ah porque te dice que pasa por el punto A(-4,1), entonces toma el valor (x, y)
ESTUDIANTE: [no identificable] ah
PROFESOR: entonces tú tienes ahí (x, y)
ESTUDIANTE: [no identificable] ah se puede sacar toda la formula, tienes que sacar el radio

PROFESOR: Si.
ESTUDIANTE: [no identificable] ah ya.
PROFESOR: entonces como, ah con eso vas a encontrar la distancia de los dos puntos y te va a dar el radio.
ESTUDIANTE: [no identificable] Si
PROFESOR: [revisa ejercicio resuelto en la pizarra por una estudiante] Ya ahí esta la letra A que es de centro -3 eso es lo que calculo ahí y tiene radio 4, letra B
ESTUDIANTE: [no identificable] Yo
ESTUDIANTE: [no identificable] profe
PROFESOR: Que paso, quieres pasar a la pizarra
ESTUDIANTE: [no identificable] quiero que vea si está bien [alumna muestra cuaderno al profesor para su revisión]
PROFESOR: [profesor hace un gesto que insinúa que está bien lo que hizo la alumna]
ESTUDIANTE: [no identificable llama al profesor y pregunta]
PROFESOR: [profesor se acerca a la pizarra al dibujo de la circunferencia para explicar] te dan el centro y te dan el valor del punto, entonces tu sabes cuánto vale x y cuánto vale y, entonces eso lo reemplazas en la distancia para determinar el radio.
ESTUDIANTE: [no identificable que estaba haciendo ejercicio B se retira de la pizarra y le entrega el plumón al profesor]
ESTUDIANTE: [no identificable] Profe yo.
PROFESOR: La C
ESTUDIANTE: [no identificable indicando a uno de sus compañeros] Que haga la D.
PROFESOR: La D la hace usted haber.
PROFESOR: [profesor se pasea por la sala aclarando dudas a los estudiantes]
ESTUDIANTE: [Algunos comentan en grupo los ejercicios que están resolviendo]
ESTUDIANTE: [no identificable] Profe, ¿está dando decima?
PROFESOR: Sí
ESTUDIANTE: [no identificable] ¿Por pasar ahí?
PROFESOR: Sí
ESTUDIANTE: [no identificable otra] yo paso
PROFESOR: porque quiere pasar por una decima
ESTUDIANTE: [no identificable] no no
PROFESOR: pase no más
ESTUDIANTE: [no identificable otra] profe yo
PROFESOR: A ya [profesor revisa cuaderno de estudiante] claro si
ESTUDIANTE: [Algunos llaman al profesor a sus puestos para que le resuélvalas dudas]
ESTUDIANTE: [no identificable se coloca de pie y pide que le revisen sus ejercicios para pasa a la pizarra] donde
PROFESOR: borra ahí. [profesor indica que borre el ejemplo para que haga ejercicio D]
ESTUDIANTE: [no identificable otra] profe en el ejercicio 10, hay que formar el triangulo
PROFESOR: Espera [profesor proyecta gráficos en el PPT]
ESTUDIANTE: [no identificable] es la única forma
[estudiante resuelve el ejercicio en la pizarra, profesor revisa computador y data para proyectar]
ESTUDIANTE: [no identificable] Oh me dio el mismo resultado [estudiante se refiere a lo que su compañero resolvió en la pizarra]
PROFESOR: el i lo vamos a calcular mañana ¿ya?, shh ¿saben por qué?, porque del i necesito saber primero este debiera ser un sistema
ESTUDIANTE: [no identificable] que
PROFESOR: si, debiera ser un sistema
ESTUDIANTE: [no identificable] profe y en la cuatro
PROFESOR: y en la cuatro hay una [estudiante que estaba en la pizarra interrumpe al profesor para entregar un plumón
ESTUDIANTE: [no identificable] profe
PROFESOR: ya miren, shh
ESTUDIANTE: [no identificable] ¿Cuál ejercicio hizo?

319.	PROFESOR: la B
320.	ESTUDIANTE: [no identificable] Profe y así está bien [se refiere a lo que hizo su compañero en la pizarra]
321.	PROFESOR: veamos la D
322.	ESTUDIANTE: [no identificable] porque lo hizo así po no
323.	PROFESOR: ah
324.	ESTUDIANTE: [no identificable] No hizo la ecuación
325.	PROFESOR: No po, hay calculo la distancia, falta otro paso
326.	ESTUDIANTE: [no identificable] Profe, ¿Qué?
327.	ESTUDIANTE: [no identificable otro] Pasarlo a la ecuación principal
328.	PROFESOR: Te falta pasarlo a la ecuación principal
329.	ESTUDIANTE: [no identificable] ahh
330.	ESTUDIANTE: [no identificable que paso a la pizarra] A, pero hacer lo mismo, pero colocar
331.	PROFESOR: eso, entonces ahora toma el valor un punto ¿cierto?
332.	ESTUDIANTE: [no identificable que paso a la pizarra] …….
333.	PROFESOR: Ya
334.	ESTUDIANTE: [no identificable que paso a la pizarra] Lo hago
335.	PROFESOR: si
336.	ESTUDIANTE: [no identificable que paso a la pizarra] ¿El plumón?
337.	PROFESOR: ¿Dónde lo dejaste?
338.	ESTUDIANTE: [no identificable que paso a la pizarra] Se lo pase
339.	PROFESOR: Toma [pasa el plumón al estudiante]
340.	ESTUDIANTE: [no identificable que paso a la pizarra] ahí [indicando la pizarra]
341.	PROFESOR: si hay está el centro, entonces reemplaza la ecuación principal donde diga x
342.	PROFESOR: ahí si
343.	ESTUDIANTE: [no identificable] Profe que significa con tangente
344.	PROFESOR: tangente que toca en un punto, eso mira [profesor toma el cuaderno de la estudiante y dibuja]
345.	[se siente el timbre que indica que se terminó la hora de clases]
346.	PROFESOR: ya a ver miren, shh mañana vamos a terminar con la guía y lo otro que yo le quería mostrar
347.	miren, es que el programa Geogebra, shh chicos esperen un ratito el programa Geogebra me sirve
348.	para representar esta circunferencia ¿ya? [profesor escribe la ecuación de la circunferencia en el
349.	programa para mostrársela a los estudiantes, los estudiantes guardan sus cosas en sus bolsos]
350.	ESTUDIANTE: [no identificable] Le sale una parábola
351.	PROFESOR: Me faltó un cuadrado
352.	PROFESOR: Mañana le voy a explicar cómo representar la circunferencia con Geogebra, porque igual es
353.	otra herramienta que tenemos para trabajar ¿ya?. Se pueden retirar.

Anexo 4

Guía de clases del profesor B

<u>LICEO BICENTENARIO</u>
<u>CARMELA CARVAJAL DE PRAT</u>
<u>OSORNO</u>

MATEMÁTICA GUÍA DE APRENDIZAJE

CURSO:4° MEDIO "ALGEBRA Y MODELOS ANALITICOS".

Objetivos de aprendizaje: Comprender, representar la ecuación de la circunferencia en su forma principal y General.

1. Encuentra las ecuaciones principal y general de cada circunferencia a partir de los datos que se indican.

a)Centro (-3,1) y radio 4.

b)Centro (0,7) y radio $\sqrt{7}$.

c)Centro (-6,4) y diámetro 12.

d)Centro (2,-1) y pasa por A(-1,4).

e)Centro (-3,4) y es tangente al eje Y.

f)Los extremos de un diámetro son A(-2,6) y B(8,-4).

g)Centro (5,12) y pasa por el punto (0,0).

h)Centro en el origen (0,0) y pasa por A(8,0).

i)Los puntos A(-2,5), B(3,2) y C(0,0) pertenecen a ella.

j)Centro (-3,2) y es tangente a la recta 3x+4y+2=0