



UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**OBSERVACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE  
PRÁCTICAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS DE  
PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA SOBRE  
LA NOCIÓN DE FUNCIÓN: UN ESTUDIO DE  
CASO**

Tesis de Magíster

**Jessica Esmeralda Soto Peña**

Director: Dr. Luis Roberto Pino Fan

Osorno, Noviembre 2019



UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO

MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**OBSERVACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE  
PRÁCTICAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS DE  
PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA SOBRE LA  
NOCIÓN DE FUNCIÓN: UN ESTUDIO DE CASO**

Tesis de Magíster presentada por **Jessica Esmeralda Soto Peña** dentro del programa de Magíster en Educación Matemática para aspirar al grado de **Magíster en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos**, dirigida por el Dr. Luis Roberto Pino Fan, académico de la Universidad de Los Lagos.

---

Jessica Esmeralda Soto Peña

Tesista

---

Luis Roberto Pino Fan

Director



**UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS**

ESCUELA DE POSTGRADO

MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**OBSERVACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE  
PRÁCTICAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS DE  
PROFESORES DE ENSEÑANZA MEDIA SOBRE LA  
NOCIÓN DE FUNCIÓN: UN ESTUDIO DE CASO**

Esta Tesis de Magíster ha sido desarrollada en el marco del Proyecto de Investigación Fondecyt N° 11150014 “Exploración, caracterización y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores de enseñanza media en formación inicial, sobre las nociones clave del cálculo”.



# Agradecimientos

Escribir estas palabras me lleva a pensar en todos los esfuerzos que muchos realizamos para poder cursar y cerrar esta etapa.

En primer lugar, agradezco mi amada y pequeña, pero gran familia, Esmeralda, Albaro, Javiera y César, por apoyarme en cada momento que requerí de su ayuda, tiempo para cuidar a las niñas y por su bella compañía, siempre de manera incondicional.

A mis queridas hijas, Emilia y Pía, por amar y comprender a una mamá ocupada y cansada. Mami las ama de manera inconmensurable.

A mis amigos. Julia, por tu amistad, confianza en mi labor y tu colaboración constante, te quiero mucho. A Cristian, por cuidar de mis hijas al inicio del programa y apoyarme cuando nadie más pudo estar, gracias por tu amistad. A mis queridas Elena e Ivette, por la linda amistad formada en este proceso y por las jornadas de estudio que compartimos, fue un agrado enorme contar con ustedes.

A mi querido Oscar, por tu gran amor y por instarme a seguir en este camino, juntos.

A la Dra. Adriana Breda, aprecio y atesoro sus clases hasta el día de hoy, gracias a ellas pude reencontrarme con mi profesión y con la didáctica de manera muy positiva.

Al Dr. Luis Pino-Fan, por su paciencia, comprensión, confianza y conocimiento que compartió conmigo durante el desarrollo de esta investigación y los cursos del programa.

Finalmente, gracias a la Universidad de Los Lagos, particularmente a sus académicos y funcionarios del postgrado en Educación Matemática, por su acogida, cariño y apoyo durante estos años.

# Resumen

Esta investigación presenta los conocimientos didáctico-matemáticos puestos en juego por dos profesoras de matemática de enseñanza media sobre la noción de función. Este estudio de caso se formuló a partir de una revisión a la literatura que muestra los avances en el estudio del conocimiento de profesores y la reflexión como proceso orientado a la mejora progresiva en la gestión de los aprendizajes, la realidad del sistema educativo chileno y aspectos didácticos e histórico-epistemológicos sobre la noción de función. Tanto los datos recogidos como los conocimientos movilizados por los profesores en la etapa de diseño de clase y en la implementación de la misma, se sometieron a análisis utilizando algunas de las herramientas teórico-metodológicas propuestas en el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticos.

Así, el objetivo de esta investigación es caracterizar las prácticas didáctico-matemáticas de profesores cuando diseñan e implementan clases sobre la noción de función, para lo cual se propuso el desarrollo de tres fases: (1) Revisión de literatura sobre significados parciales sobre la noción de función, significados pretendidos por el currículum chileno para la enseñanza sobre funciones, representaciones para la enseñanza de la noción de función, errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la noción de función; (2) Obtener y estudiar los diseños didácticos propuestos por las profesoras para la enseñanza sobre la noción de función, para identificar los conocimientos didáctico-matemáticos movilizados durante la preparación de la clase, recolectar información mediante videgrabación y observación de la implementación de la clase señalada; y (3) Analizar las prácticas didáctico-matemáticas de las profesoras y reflexionar a partir de ellas. De este modo, esta investigación permitirá mostrar los conocimientos puestos en juego por los profesores y la importancia del uso de criterios específicos para la observación de clases.

Finalmente, los resultados de este estudio dan cuenta de las prácticas regulares de profesores durante las distintas fases del proceso de estudio sobre la noción de función y la necesidad del sistema educativo chileno de contar con espacios de reflexión, por medio de una guía de reflexión que incorpore criterios e indicadores claros y útiles para la implementación de este espacio de manera eficaz y sistemática.

# Abstract

In this research we introduce the didactical-mathematical knowledge showed by two highschool mathematics teachers about the notion of function. This case study was formulated based on a review of the literature, which shows the advances in the study of teacher knowledge and reflection as a process oriented to the progressive improvement in the learning management, the reality of the Chilean educational system and some didactical and historic-epistemological aspects about the notion of function. The collected data as well as the mobilized knowledge by the professors in the design stage and its implementation, were submitted to analysis using some of the theoretical tools proposed in the Didactic-Mathematical Knowledge and Competences model.

Thus, the objective of this research is to characterize the didactic-mathematical practices of teachers when they design and implement classes about the notion of function, for which the development of three phases was proposed: (1) Review of literature about the partial meanings about the notion of function, meanings intended by the Chilean curriculum for the function teaching, representations for the function teaching, errors and difficulties in teaching and learning the notion of function, (2) Obtain and study the didactical design proposed by the teachers for learning the notion of function, to identify the didactic-mathematical knowledge mobilized during the class preparation, gather information through video recording and observation of its implementation; and (3) Analyze the didactic-mathematical practices of teachers and reflect on them. In this way, this research will show the knowledge mobilized by the teachers and the importance of using specific criteria for class observation.

Finally, the results of this study manifest the regular practices of teachers during the different phases of the study process on the notion of function and the need of the Chilean educational system to have reflection spaces, through a reflection guide that incorporates clear and useful criteria for its implementation in an efficient and systemic way.

# Índice de Contenidos

<b>CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES Y ÁREA PROBLEMÁTICA.....</b>	<b>1</b>
1.1 Fundamentación.....	1
1.2 Estudio sobre los significados de la noción de Función.....	4
1.2.1 La función como correspondencia.....	4
1.2.2 La función como relación entre magnitudes variables.....	5
1.2.3 La función como representación gráfica.....	5
1.2.4 La función como expresión analítica.....	5
1.2.5 La función como correspondencia arbitraria.....	6
1.2.6 La función a partir de la teoría de conjuntos.....	6
1.3 Estudios sobre las representaciones de la noción de función para su enseñanza.....	7
1.4 Estudio sobre errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la noción de función.....	8
1.5 Significados Pretendidos por el currículo para la enseñanza de la noción de función .....	11
1.5.1 Significados pretendidos por el currículo de octavo básico.....	11
1.5.2 Significados pretendidos por el currículo de primero medio.....	12
1.5.3 Significados pretendidos por el currículo de segundo medio.....	12
1.5.4 Significados pretendidos por el currículo de tercero medio.....	12
1.5.5 Significados pretendidos por el currículo de cuarto medio.....	13
1.5.6 Significado pretendido por el currículo chileno para la enseñanza de la noción de función.....	13
1.6 Aproximación al problema de investigación.....	13
<b>CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA.....</b>	<b>17</b>
2.1 Introducción.....	17
2.2 Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas.....	17
2.3 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.....	21



2.3.1	Sistema de prácticas.....	22
2.3.2	Configuración de objetos y procesos.....	23
2.3.3	Idoneidad didáctica.....	24
2.4	Formulación del Problema de Investigación.....	29
2.4.1	Objetivos de Investigación.....	29
2.5	Metodología.....	32
2.5.1	Plan de Trabajo.....	33
2.5.2	Recolección de datos y contexto.....	34
2.5.3	Técnicas de recolección de datos.....	37
<b>CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DEL DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CLASES</b>		<b>39</b>
3.1	Introducción.....	39
3.2	Diseños de clase.....	41
3.2.1	Diseño de clase de la docente A.....	42
3.2.2	Diseño de clase de la docente B.....	47
3.3	Implementaciones de clase.....	52
3.3.1	Diseño de clase de la docente A.....	52
3.3.2	Diseño de clase de la docente B.....	56
<b>CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES.....</b>		<b>63</b>
4.1	Análisis generales.....	63
4.2	Sobre los objetivos específicos.....	64
4.2.1	Sobre el objetivo específico 1 OE-1.....	64
4.2.2	Sobre el objetivo específico 2 OE-2.....	66
4.2.3	Sobre el objetivo específico 3 OE-3.....	69
4.2.4	Sobre el objetivo específico 4 OE-4.....	72
4.3	Conclusiones finales.....	76
<b>REFERENCIAS.....</b>		<b>87</b>
<b>ANEXOS.....</b>		<b>93</b>



# Capítulo 1

## Antecedentes y Área Problemática

### 1.1. FUNDAMENTACIÓN

Durante las últimas décadas, las investigaciones en Educación se han centrado en las prácticas pedagógicas, describiendo y analizándolas por medio de modelos teóricos que han permitido caracterizar el conocimiento de los profesores, valorar sus prácticas y mejorarlas a partir de la reflexión de su rutina profesional, destacando la importancia de los procesos reflexivos como parte del quehacer docente.

Schön (1983) manifiesta que el profesor es un sujeto reflexivo y racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional. Esta idea también se desarrolla en Schoenfeld y Kilpatrick (2008), quienes introducen el concepto de proficiencia en la enseñanza de la matemática, donde destacan que:

*“Lograr proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, como lograr proficiencia matemática, es un proceso interactivo a lo largo de la vida. Ante un problema de la práctica de la enseñanza, el profesor de matemáticas necesita pensar reflexivamente sobre el problema si quiere resolverlo. Una vez hecha habitual, la reflexión puede llegar a ser el principal mecanismo para mejorar la propia práctica” (p. 348)*

Particularmente en Chile, en el año 1997, se aprobó el proyecto Jornada Escolar Completa (JEC), componente de la Reforma Educacional que amplía el tiempo escolar, tanto en enseñanza básica como en media. Este proyecto tenía como objetivo reestructurar el uso del tiempo con el fin de mejorar los aprendizajes y la formación de los estudiantes (Martinic y Vergara, 2007). Sin embargo, estos autores señalan que, hasta la fecha, a pesar de haber mejorado infraestructura, cobertura, asistencialidad y aumento de horas de clase, no se logró avanzar en la organización y gestión del tiempo, sin mayor impacto en las prácticas pedagógicas. Esto, se contradice con la perspectiva de que la calidad de los aprendizajes

depende de la organización y la interacción profesor-alumno de la clase. Por otra parte, el Marco para la Buena Enseñanza (MBE) impulsado en 2003, busca sentar las bases del desarrollo profesional y de sus prácticas, describiendo al profesor como un profesional a través de cuatro dominios: preparación de la enseñanza, creación de un clima propicio para el aprendizaje, enseñanza para todos los estudiantes y responsabilidades profesionales. Este último dominio hace referencia a procesos evaluación y reflexión sobre la propia práctica, de manera consciente y sistemática, con la finalidad de reformular dicha práctica a partir de la reflexión (Ruffinelli Vargas, 2016).

Adicionalmente, el Ministerio de Educación en Chile (MINEDUC) implantó en 2004 un sistema de evaluación del desempeño de profesores, de carácter formativo y orientado a mejorar la labor pedagógica de los docentes del sistema público (CPEIP, 2016). Esta evaluación está centrada principalmente en el desarrollo de un portafolio y una clase grabada en los que son estudiadas siete dimensiones: organización de una unidad, análisis de la clase, calidad de la evaluación, reflexión a partir de los resultados de la evaluación, ambiente de la clase, estructura de la clase e interacción pedagógica. Para esto, en Chile se han utilizado diversos modelos o propuestas para la observación de clases. Algunos ejemplos de estos enfoques son *Lesson Study* (Fernández y Yoshida, 2004), *Mirar con sentido profesional* (Mason, 2002), *Concept Study* (Davis, 2008), entre otros.

Las dimensiones con promedios más bajos corresponden al análisis de la clase, calidad de la evaluación e interacción pedagógica. En particular, esta última dimensión aborda aspectos comunicativos, metodológicos y conocimientos que facilitan el aprendizaje por parte de los estudiantes. A partir de estos resultados, se propone como desafío del sistema de evaluación docente incentivar el diálogo profesional en torno a las prácticas pedagógicas que ocurren como resultado de la evaluación docente (CPEIP, 2016). En esa línea, el MINEDUC modificó el MBE, editando una nueva versión en 2008, donde el dominio Responsabilidad profesionales plantea que el profesor debe reflexionar sistemáticamente sobre su práctica (CPEIP, 2008), identificando tres principales descriptores:

- Evalúa el grado en que los alumnos alcanzaron los aprendizajes esperados.
- Analiza críticamente su práctica de enseñanza y la reformula a partir de resultados de aprendizaje de sus alumnos.
- Identifica sus necesidades y procura satisfacerlas.

En particular, el segundo descriptor señala que, en su rutina, el profesor analiza en forma crítica las fortalezas y debilidades de sus prácticas, permitiendo reformularlas para alcanzar un mayor grado de pertinencia y efectividad.

A pesar de que la literatura afirma que los espacios propicios para reflexionar y aprovechar los saberes de los profesores deben gestarse en la escuela y ser un foco de interés al interior de éstas (Maturana, 2011), el sistema educativo chileno ha continuado sin soluciones concretas para desarrollar competencias de reflexión sobre la propia práctica y así mejorar de manera sistemática las dimensiones en que los docentes se muestran deficientes.

Lo anterior, involucra tanto a docentes en ejercicio como a los profesores en formación. En Pino-Fan, Guzmán, Larraín y Vargas (2018), diversos investigadores chilenos destacan que,

*“Un aspecto que hasta ahora no se tiene en cuenta en los programas de formación, tiene que ver con espacios dirigidos a que los futuros profesores adquieran competencias de análisis de las clases (o análisis didácticos). Los expertos señalan que dichos espacios, bien planificados y organizados, contribuirían al desarrollo de competencias que permitan al profesor analizar sus clases, detectar errores o conflictos y buscar mejoras potenciales de sus prácticas”.* (p.14)

Este estudio señala que los programas de formación de profesores presentan falta de espacios de reflexión sobre las prácticas, propias o la de otros, donde puedan analizar y reflexionar sobre las clases de matemática, permitiéndoles desarrollar competencias didáctico-matemáticas, detectar conflictos y buscar posibles mejoras.

El problema fundamental en este aspecto, es que los modelos teóricos y propuestas sobre observación de clases utilizados en Chile no señalan en forma explícita qué aspectos se deben tener en cuenta al momento de realizar las observaciones y reflexiones. De este modo, se identifica la necesidad de sistematizar la observación y reflexión sobre la práctica; sin embargo, estos enfoques evidencian la necesidad de disponer de herramientas específicas que ayuden a realizar tres tareas básicas del trabajo docente: descripción, explicación y valoración de la práctica de enseñanza y aprendizaje.

Lo anterior permite afirmar que tanto la formación inicial de profesores como el ejercicio docente en el sistema educativo público deben ser fortalecidos mediante la generación de competencias de reflexión y análisis de clases. Sin embargo, los estándares e instrumentos que

regulan el egreso de las carreras de pedagogía y el ejercicio docente, como es el MBE, que apuntan a la profesionalización docente y el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes, se contraponen a las políticas públicas que, paradójicamente, apuntan en sentido contrario (Ruffinelli Vargas, 2016).

## 1.2. ESTUDIO SOBRE LOS SIGNIFICADOS DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

La evolución histórica del objeto Función durante siglos, ha permitido construir diversos significados que conforman su significado de referencia. Para poder identificarlo, se ha hecho un recorrido sobre estudios que tratan los significados institucionales de dicha noción. Es así como en esta sección hacemos uso de los resultados de, básicamente, tres trabajos, a saber: Ramos (2005), Urrea (2015) y Biehler (2005).

Este objeto matemático ha tenido a lo largo de las últimas décadas gran presencia tanto en los currículos de enseñanza a nivel mundial como en la agenda de investigación en educación matemática. Esto se debe a su transición desde una perspectiva operacional hacia una estructural, que requieren procesos de nivel superior (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon & Reed, 2012), otorgándole así, importancia fundamental para el desarrollo de procesos de modelación, la resolución de problemas y la comprensión de las principales nociones del cálculo (Urrea, 2015). Es por esto que, la comprensión de la noción de Función ha sido objeto de estudio, abarcando aspectos cognitivos e instruccionales, tales como las dificultades de enseñanza y aprendizaje, estrategias y alternativas para su enseñanza.

Para el desarrollo de esta investigación es necesario conocer en profundidad los distintos significados parciales que conforman la noción de función y así poder caracterizar los conocimientos que poseen los docentes para la enseñanza de dicha noción.

En Urrea (2015) se realizó una revisión de estudios de carácter histórico-epistemológico, considerando, además, la reconstrucción de significados sobre la noción de función desarrolladas en investigaciones como Biehler (2005) y Ramos (2005), determinando entonces la existencia de seis significados parciales, descritos a continuación.

### 1.2.1. La función como correspondencia

Se entiende por correspondencia a aquello que asocia elementos entre dos conjuntos. El origen de este significado se remonta al desarrollo del concepto de número en la antigüedad.

Posteriormente, los Babilonios desarrollaron importantes avances matemáticos y astronómicos. Ejemplo de esto son las tablas de valores para progresiones geométricas. De este modo, esta noción surgió por correspondencias numéricas, ya que durante la época no se utilizaban las variables.

### 1.2.2. La función como relación entre magnitudes variables

Esta acepción surge por medio de la relación entre magnitudes geométricas variable, dando origen a la noción por medio del estudio de fenómenos sujetos al cambio y con distintos grados de intensidad y cambio continuo en ciertos intervalos, permitiendo establecer la noción de cantidades variables dependientes e independientes, relaciones funciones en el análisis de regularidades.

### 1.2.3. La función como representación gráfica

Se refiere a una relación entre magnitudes representada mediante una figura que hace alusión a la dependencia de una por sobre otra. Surge a partir del estudio de fenómenos naturales como el calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniforme acelerado, asociando la noción de función al estudio del cambio por medio de la representación de la relación de variabilidad entre magnitudes físicas por medio de gráficos.

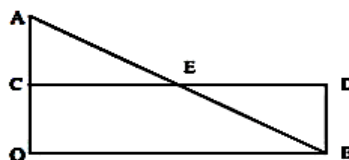


Figura 1.1. Movimiento uniforme (Urrea, 2015, p.10)

Estas variaciones comenzaron a ser estudiadas con las representaciones gráfico-geométricas desarrolladas por Nicolás Oresme en el siglo XIV. Posteriormente se evidenció este estudio en fenómenos naturales o en problemas de movimiento uniforme, tal como se muestra en la Figura 1.1.

### 1.2.4. La función como expresión analítica

En el trabajo de D'Hombres, Dahan, Bkouche, Houzel & Guillermet (1987, citado en Ruiz, 1998, p.175) se destaca la definición de Euler, quien afirma que “una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes”. Esta expresión algebraica se mediante una clase de

operaciones aritméticas, las potencias y raíces, admitiendo tanto valores reales como imaginarios de su argumento. Los problemas que movilizan esta acepción son propios del cálculo infinitesimal, conectando por lo general ideas físicas y matemáticas.

### **1.2.5. La función como correspondencia arbitraria**

Este significado surge a partir del siglo XIX a medida que se creaban las condiciones necesarias para definir funciones como correspondencias muy generales, variando desde la dependencia de variables o representando funciones por expresiones analíticas o reglas que asignaba un único valor o que podía mantenerse desconocido. Dirichlet fue el primero en considerar una función como una correspondencia arbitraria, considerando casos particulares donde la gráfica de la función no posee una curva que le represente.

### **1.2.6. La función a partir de la teoría de Conjuntos**

Esta acepción resulta ser mucho más abstracta que las anteriores, considerando el avance de la Matemática a través del tiempo. El grupo Bourbaki define función como una correspondencia entre conjuntos semejantes, Cauchy la entiende como una relación donde predominan las expresiones algebraicas. Sin embargo, a fines del siglo XIX, con la teoría de conjuntos de Cantor se permite establecer la definición formal del objeto función, dada la influencia e impacto sobre las distintas ramas de la disciplina.

*“Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos no vacíos. Una función  $f$  definida en un conjunto  $X$  y con valores en  $Y$  es una ley mediante la cual se hace corresponder a cada elemento de  $X$  un elemento de  $Y$ . Se dice también que  $f$  es una aplicación de  $X$  en  $Y$ . Para un elemento genérico  $x \in X$  denotaremos habitualmente por  $f(x)$  el elemento de  $Y$  correspondiente a ese  $x$ , y se dirá también que  $f(x)$  es el valor de la función  $f$  en  $x$ , esto se expresa a veces mediante la igualdad  $y = f(x)$ . Para denotar que  $f$  es una aplicación de  $X$  en  $Y$ , se escribe ordinariamente  $f: X \rightarrow Y$ , y a veces también  $x \rightarrow f(x)$ , esta última indica, más bien la operación de pasar de un elemento cualquiera  $x \in X$  a su transformado  $f(x) \in Y$ . En ocasiones, por emplear un lenguaje geométrico se habla de transformación de  $X$  en  $Y$ , en lugar de función o aplicación definida en  $X$  y con valores en  $Y$ ”. (Fernández, 1976, citado en Ruiz, 1998, p. 186).*



### 1.3. ESTUDIOS SOBRE LAS REPRESENTACIONES DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN PARA SU ENSEÑANZA

Desde una perspectiva cognitiva, la comprensión de un objeto matemático se entiende en términos de representaciones mentales, es decir, está vinculado al uso de símbolos que permitan representarlos. En ese sentido, Duval (1999) estableció las nociones de representación semiótica y de articulación de registros, definiendo las representaciones semióticas como las producciones conformadas por el uso de símbolos, relativos a un sistema particular de signos, permitiendo la transformabilidad desde una representación hacia otra, conservando el contenido de la representación inicial o parte de ella. De este modo, el tratamiento se define como una actividad cognitiva que transforma las representaciones de un objeto matemático en un mismo registro, transformándolo de acuerdo a las reglas propias del sistema.

Así, la construcción del significado de un objeto depende en gran parte del uso de las diferentes representaciones o una muestra representativa de éstas (Ramos, 2005). En consecuencia, la enseñanza de la matemática debe centrarse en que los estudiantes sean capaces de realizar conversiones desde una representación a otra sin contradicciones ni errores, ya que les permite identificar relaciones ricas y significativas respecto de una noción matemática (Duval, 2002; Even, 1998; Hitt, 1998; Janvier, 1987). Además, Ospina (2012) señala que las representaciones cumplen una función de comunicación, ya que permiten a los estudiantes exteriorizar sus representaciones mentales, ideas o relaciones matemáticas, en concordancia con Duval (2006); pero además cumplen una función objetiva, dado que son necesarias para desarrollar la actividad matemática, el funcionamiento cognitivo del pensamiento, el tratamiento de la información y la comprensión.

Respecto a la noción del objeto función, inicialmente Janvier (1987) señala que esta noción puede ser asociada a cuatro tipos de representaciones en cuatro clases:

- Expresión analítica
- Tabla
- Representación gráfica
- Representación verbal

Sin embargo, a partir de los trabajos de diversos autores (Duval, 1999; Duval, 2002; Hitt, 1998; Janvier, 1987) se establecen o utilizan los siguientes registros de representación (RR):

- **RR Verbal:** Alude al ámbito lingüístico, por medio del lenguaje natural, y es fundamental para interpretar y relacionar los tres registros anteriores, dado que permite definir o describir características de un objeto.
- **RR Tabular:** pone de manifiesto aspectos numéricos y cuantitativos por medio de tablas que organizan de manera parcial un objeto.
- **RR Analítico:** conecta la capacidad simbólica, por medio de símbolos numéricos o algebraicos, generalizando características o comportamiento de un objeto.
- **RR Gráfico:** guarda relación con el potencial conceptualizador de la visualización. Incluye al sistema de referencia cartesiano y las gráficas que permiten deducir comportamientos a partir de las relaciones en los elementos que componen al objeto.
- **RR Icónico:** corresponde a relaciones que no necesariamente posee las características de un objeto, pero se utilizan como referencia para el estudio de dicho objeto.

En la medida que el estudiante sea capaz de vincular dos o más registros de representación de un mismo objeto matemático, su comprensión sobre el mismo será mucho más amplio (Duval, 2002; Janvier, 1987).

#### 1.4. ESTUDIOS SOBRE ERRORES Y DIFICULTADES EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Los análisis histórico-epistemológicos que se recogen a partir de las investigaciones dan cuenta de que las concepciones de los estudiantes de secundaria sobre la noción de función pueden organizarse en cinco configuraciones epistémicas, representadas en la Figura 1.2, mostrando una ampliación progresiva de los sistemas de prácticas asociadas a la noción de función (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005). Esta secuencia muestra de manera explícita las configuraciones asociadas a las prácticas que forman el significado de referencia del objeto función.

En consecuencia, y considerando lo desarrollado en el apartado 1.3, cada representación del objeto función moviliza una serie de acciones, situaciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos que se articulan entre sí. Así, el aprendizaje de la noción de función (o de cualquier otro objeto matemático) no debe limitarse a una sola forma de representación, sino que debe utilizarse una muestra representativa de estas representaciones, de modo que el estudiante

desarrolle la capacidad de realizar conversiones desde un registro a otro, y el tratamiento o traducción en un mismo registro (Duval, 1999; Janvier, 1987). No obstante, los estudiantes tienen dificultades para vincular las distintas representaciones de una función, dado que los abordan de manera fragmentada, lo que imposibilita la realización de conversiones entre registros (Gagatsis, Elia y Andreou, 2003; Sierpinska, 1992). En consecuencia, Duval (2002) destaca que los estudiantes consideran a las distintas representaciones de un mismo objeto como objetos matemáticos diferentes, dando cuenta de un pensamiento matemático monoregistroal.

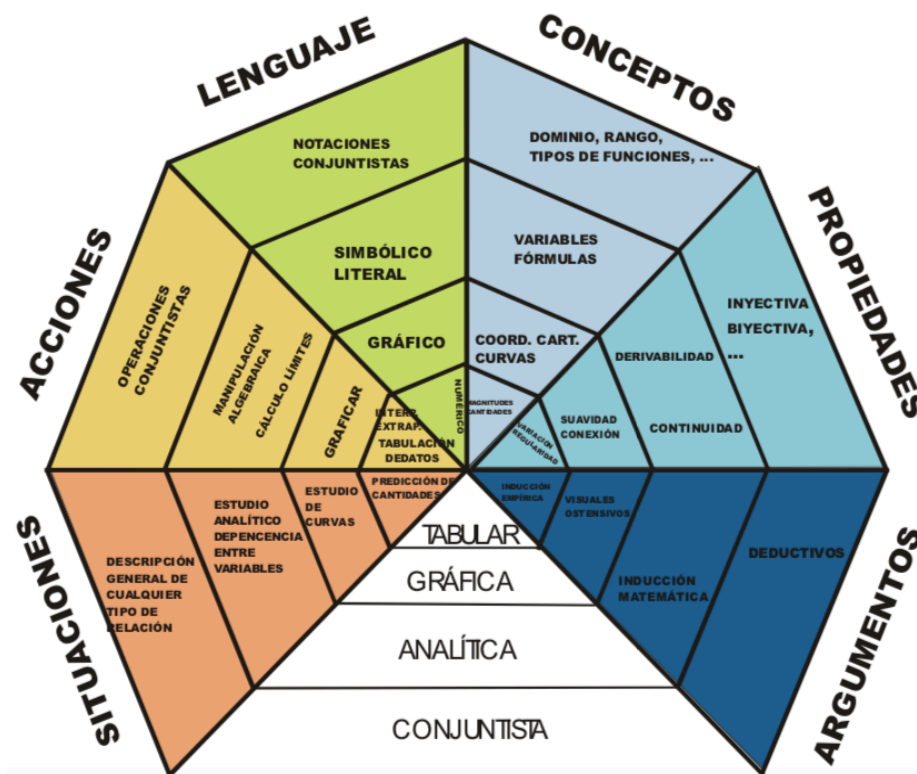


Figura 1.2. Configuraciones epistémicas de la noción de función (Ramos, 2005, p.96)

En torno a esto, investigaciones de Artigue (1998) y Ramos (2005) estudian los errores y dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la noción de función, presentando algunas diferencias o ambigüedades respecto de la terminología utilizada. En Godino, Batanero y Font (2003), se busca precisar las diferencias entre error y dificultad a partir de los significados personales e institucionales. De este modo, el error se reconoce como el desarrollo de una práctica matemática que no es válida desde el punto de vista de la matemática escolar; y una dificultad indica el grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Diversos autores (Artigue, 1998; Duval, 1995; Ramos, 2005; Urrea, 2015; Vinner y Dreyfus, 1989) han abordado la existencia de errores y dificultades en el aprendizaje de diversas nociones

matemáticas. En particular, con respecto a la noción de función, Artigue (1998) desarrolla una clasificación de estas dificultades:

- **Dificultades en la identificación de aquello que realmente es una función y en la identificación de las sucesiones como un caso de funciones.** Estas dificultades hacen referencia a los criterios que utilizan los estudiantes para verificar si un objeto matemático corresponde o no a la noción de función, proceso que habitualmente incorpora a la definición formal de función (Vinner y Dreyfus, 1989).
- **Dificultades para sobrepasar una concepción puramente de tipo proceso de la noción de función y llegar a ser capaz de relacionar con flexibilidad sus dimensiones de proceso y de objeto para desarrollar una concepción procedimental.** Esta dificultad se presenta cuando los estudiantes deben considerar funciones definidas por procesos equivalentes pero diferentes y reconocerlas como iguales.
- **Dificultades para relacionar los diferentes registros semióticos (Duval, 1995) que permita representar y trabajar con funciones.** Guarda relación con la complejidad en la conversión entre los registros de representación, principalmente en la conversión de un registro gráfico a un registro algebraico; por otra parte, también se considera el uso de información referida a distintas nociones en un mismo registro.
- **Dificultades para trascender los modos de pensamiento numérico y algebraico.** Esta dificultad se relaciona con la percepción de los estudiantes sobre el interés y utilidad tanto de las nociones como del pensamiento funcional que determinan.

Es necesario considerar que las dificultades anteriormente descritas carecen de sus orígenes históricos epistemológicos; en consecuencia, el aprendizaje del objeto función se aborda desde una perspectiva mecanicista, dado que algunos procesos de enseñanza tienden a enfocarse en procesos algorítmicos, sin un contexto o sus distintos significados. Esta ausencia de significados y representaciones, requieren ser articulados para la comprensión por parte de los estudiantes, de modo que les permita reconocer al objeto función como una herramienta que le permita visualizar con mayor precisión, interpretar y comprender adecuadamente los distintos fenómenos de la vida real donde está inmersa la función (Duval, 1995; Jaimes, 2012; Urrea, 2015).

## 1.5. SIGNIFICADOS PRETENDIDOS POR EL CURRÍCULO PARA LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Dado que esta investigación la enmarcaremos en un contexto más local, con profesores chilenos de enseñanza media, particularmente, de primero medio. En esta sección creemos necesario centrar el estudio curricular exclusivamente en el contexto chileno, entendiendo que cada país tiene políticas educativas propias, reformas, currículos, etc., y tal como señala Biehler en 2005, el uso de significados pretendidos puede variar de acuerdo al contexto institucional en el que se usa.

Para poder caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de referencia que los profesores deben tener para una enseñanza adecuada de la noción de función, es necesario definir los significados pretendidos por el currículo chileno en la enseñanza de funciones. Para esto, consideramos el trabajo realizado en Urrea (2015), donde se desarrolla un análisis epistémico tanto de los programas de estudio como del libro de texto, a partir de la metodología para el análisis de los significados curriculares, propuesta en Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), esto es, estudiando la representatividad de los campos de problemas propuestos, los tipos de representaciones movilizadas en el planteamiento y resolución de tareas, la representatividad de elementos regulativos y argumentativos y, por último, la representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto del significado global de referencia. De este modo, se establecen los siguientes significados pretendidos por el currículo para cada nivel educativo.

### 1.5.1. Significados pretendidos por el currículo de octavo básico

En el primer nivel educativo donde se presenta la enseñanza de la noción de función, el programa de estudio pretende introducir esta noción como una relación entre variables y posteriormente, en términos de la teoría de conjuntos. Sin embargo, el libro de texto sugiere por medio de los tipos de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos, la acepción de relación entre variables, salvo en algunas definiciones proporcionadas donde se aproxima a la teoría conjuntista. Por otra parte, también se desarrolla la función como expresión analítica, dada la ausencia de un contexto en particular en las tareas propuestas.

De este modo, se concluye que en el currículo de octavo básico predomina el significado de función como una relación entre variables y como expresión analítica.

### **1.5.2. Significados pretendidos por el currículo de primero medio**

El análisis del programa de estudio señala que esta noción se pretende introducir como una relación entre variables, estableciendo con posterioridad el significado de función como representación gráfica. Por una parte, el análisis del libro de texto sugiere que, de acuerdo al tipo de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos que se evidencian, la noción utilizada se define textualmente como “una relación de correspondencia entre dos variables” (Urrea, 2015, p.96), asumiendo el uso de un doble significado sobre la noción de función. También se presenta la función a partir de una expresión algebraica sin un contexto determinado, por ende, también desarrolla la acepción de función como expresión analítica. Finalmente, se incorpora en la definición formal de la noción de función, elementos de la teoría conjuntista.

De este modo, el currículo de primer año medio presenta diversos significados de la noción de función. En mayor medida se percibe la función como correspondencia, la función como relación entre variables y la función como expresión analítica; y en menor medida, la función como representación gráfica y algunos elementos de la teoría conjuntista.

### **1.5.3. Significados pretendidos por el currículo de segundo medio**

El currículo de segundo medio introduce la acepción de relación entre variables y el significado de función como representación gráfica. Por otro lado, el tipo de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos presentados en el libro de texto permite identificar la noción de función a partir de la teoría conjuntista. Además, en los problemas propuestos incorpora la noción de función como representación gráfica y como expresión analítica.

Así, el significado pretendido de este nivel es la función como relación entre variables, la función como representación gráfica, la función como expresión analítica y la función a partir de la teoría de conjuntos.

### **1.5.4. Significados pretendidos por el currículo de tercero medio**

En este nivel, el programa de estudio pretende desarrollar la acepción de relación entre variables, transitando al significado de función como representación gráfica. El libro de texto, por su parte, presenta definición de función en términos de la relación entre variables y luego involucra en el planteamiento y desarrollo de las tareas, elementos de la teoría de conjuntos. De manera adicional, se explicita el significado de función como expresión analítica.

En currículo chileno de tercer año medio sobre la noción de función, imperan los significados de función como relación entre variables, como representación gráfica, como expresión analítica, incorporando, además, elementos conjuntistas.

#### **1.5.5. Significados pretendidos por el currículo de cuarto medio**

La noción de función es presentada por el programa de estudio desde la teoría de conjuntos y, simultáneamente, como una representación gráfica. Los tipos de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos, propuestos en el libro de texto, introducen la acepción conjuntista, la función como expresión analítica y como representación gráfica.

De este modo, se concluye que el significado pretendido por el currículo de este nivel educativo es la función definida desde la teoría de conjuntos, la función como representación gráfica y la función como expresión analítica.

#### **1.5.6. Significados pretendidos por el currículo chileno para la enseñanza de la noción de función**

Los análisis de currículo chileno, desarrollados por Urrea (2015), dan cuenta que el significado pretendido por el currículo chileno es la función como relación entre variables y la función a partir de la teoría de conjuntos. Así, el contraste entre el significado pretendido y el significado holístico de referencia de esta noción, evidencia la falta de representaciones y significados del objeto función, con consecuencias claramente negativas en la comprensión adecuada de esta noción por parte de los estudiantes y de futuros profesores.

### **1.6. APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

Dada la complejidad antes mostrada sobre los aspectos a considerar para la idónea enseñanza sobre la noción de función y, debido a que, a pesar de la existencia de modelos que proponen

la observación de clases como elemento para mejorar la práctica profesional, esta observación no es sistemática, entonces nos preguntamos:

¿Cuál es el tipo de prácticas didáctico-matemáticas que realiza un profesor de enseñanza media para la enseñanza de la noción de función?

¿Cómo observar y qué observar en las prácticas didáctico-matemáticas que realiza un profesor de enseñanza media para la enseñanza de la noción de función?

Al enfocarnos en la enseñanza de la noción de función, y retomando lo expuesto en el apartado anterior, vemos que el significado pretendido por el currículo se limita a dos significados parciales de la noción de función, sus tareas y problemas no ofrecen la diversidad de representaciones y significados que conforman esta noción de manera global, obstaculizando su comprensión y aprendizaje por parte de los estudiantes.

Desde la literatura, Godino y Batanero (1994) señalan que los significados logrados por los estudiantes dependen primordialmente de los significados institucionales, y concretamente de los significados pretendidos, que dependen de los diseños de clase, y de los significados implementados y evaluados en los procesos de estudio (incorporados en la Figura 1.2).

De este modo, el grado de proximidad entre el significado holístico de referencia y el institucional, tanto en los programas de estudio como en los libros de texto, y su presencia en la implementación y evaluación de ciertos sistemas de prácticas, es de gran importancia para la enseñanza y aprendizaje de esta noción.

Con la finalidad de atender a la mejora de los procesos de estudio para la enseñanza y aprendizaje sobre la noción de función o cualquier otra noción, es necesario cuestionar la falta de espacios que permitan la reflexión sobre la propia práctica y, a partir de esto, definir qué características deberían tener estos espacios, de modo que les permitan valorar su propia práctica, establecer mejoras a sus diseños de clase y generar con posterioridad procesos de estudio idóneos.

Así lo sugieren D'Amore, Font y Godino (2007), quienes señalan que el aprendizaje de los estudiantes está sujeto a distintos metaconocimientos matemáticos y didácticos de los profesores que intervienen en sus prácticas. Estos últimos pueden ser valorados y guiados a la mejora progresiva a partir de ciertos criterios. En forma paralela y/o posterior, diversos autores



(Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005; Pino-Fan, Font y Godino, 2014; Pino-Fan, Assis y Castro, 2015; Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017) establecieron y desarrollaron los criterios de idoneidad como una herramienta de análisis didáctico y que permiten valorar las prácticas didáctico-matemáticas de los docentes en las distintas dimensiones que involucra un proceso de estudio, caracterizar los conocimientos que los profesores ponen en juego cuando diseñan e implementan dichos procesos y reflexionar sobre la propia práctica para identificar las posibles mejoras, por medio de estos criterios de idoneidad.

Considerando los antecedentes presentados en los apartados anteriores es posible señalar que el sistema educativo chileno no provee a los profesores espacios preestablecidos que les permitan desarrollar análisis, discusión y reflexión sobre sus propias prácticas y, sin embargo, los someten a un proceso de evaluación que valora y califica la reflexión e, incluso, caracteriza a esta última como parte de la rutina de los docentes, de manera constante, sistemática y organizada.

Para responder a las interrogantes propuestas anteriormente, este trabajo de investigación pretende mostrar el tipo de prácticas didáctico-matemáticas que desarrollan profesores de enseñanza media sobre la noción de función y, a partir de su análisis, identificar qué aspectos deben tomarse en cuenta en la elaboración de una guía de observación y reflexión sobre la práctica docente, facilitando la identificación de posibles mejoras y el proceso de rediseño. De este modo, es necesario desarrollar un análisis de las prácticas didáctico-matemáticas de profesores de enseñanza media y caracterizar tanto los conocimientos didáctico-matemáticos de referencia sobre la noción de función como aquellos que ponen en juego los docentes en sus prácticas y, así, desarrollar un proceso de reflexión, utilizando herramientas teórico-metodológicas adecuadas, que serán descritas en el próximo capítulo.



# Capítulo 2

## Marco Teórico y Metodología

### 2.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo se compone de cinco apartados. En los apartados dos y tres se desarrollan las nociones teóricas propuestas en dos corrientes teóricas que forman parte de la Educación Matemática: el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM), ampliación del modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), y el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. A partir de estas nociones, el cuarto apartado presenta la formulación del problema de investigación, exponiendo tanto la pregunta de investigación como los objetivos propuestos. En el último apartado, se describen las distintas fases del plan de trabajo, la muestra de estudio y los métodos de recolección de datos.

### 2.2. MODELO DE CONOCIMIENTO Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS DEL PROFESOR

Las investigaciones en Educación Matemática centradas en el conocimiento del profesor se desarrollan en distintas perspectivas, tales como la caracterización del conocimiento (matemático), el estudio de metodologías (conocimiento didáctico general) y otras que combinan estos enfoques, destacando la diferenciación entre estos saberes. Estos estudios apuntan a la mejora de las prácticas matemáticas, con un foco en el conocimiento exclusivamente matemático (Breda, Pino-Fan, y Font, 2017). Sin embargo, Mason (2002) señala la importancia del desarrollo de una competencia que permita a los profesores observar y analizar los contextos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, *mirando con sentido* el pensamiento matemático de sus estudiantes. Para el desarrollo de esta competencia de análisis didáctico se cuenta con diversas herramientas y enfoques teóricos, tales como el Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), a partir del cual surge la

necesidad de contar con un modelo que permita evaluar y desarrollar las competencias de los profesores en servicio y en formación (Breda, Pino-Fan y Font, 2017).

El modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2016) presentado en la Figura 2.1, es un modelo teórico-metodológico que surge en el marco del EOS, como un sistema de categorías de análisis del conocimiento del profesor (Godino, 2009; Pino-Fan *et al*, 2015; Pino-Fan y Godino, 2015), y considera las distintas contribuciones orientadas a la caracterización y estudio del conocimiento de los profesores, los refinamientos de este modelo ponen de manifiesto la relación y conexión los conocimientos y las competencias del profesor, orientando la agenda de investigación a un modelo que permita valorar y desarrollar competencias en el profesorado (Font, Breda y Sala, 2015; Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018). Así, el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) surge como una ampliación del Conocimiento Didáctico-Matemáticas (Pino-Fan y Godino, 2015), proponiendo que los conocimientos puestos en juego en las prácticas de los profesores puedan ser caracterizados y organizados en tres dimensiones (Pino-Fan *et al*, 2015; Pino-Fan y Godino, 2015):

### Dimensión Matemática

Aborda el conocimiento del contenido matemático, dividido en conocimiento común y conocimiento ampliado. El conocimiento común del contenido hace referencia a un conocimiento suficiente para resolver tareas propuestas en un nivel de estudios según el currículo de matemática. Sin embargo, el conocimiento ampliado del contenido, es aquel que permite al profesor para plantear retos a sus estudiantes, vinculando un objeto matemático con otras nociones matemáticas. Esta dimensión no es suficiente para desarrollar una práctica de enseñanza idónea, pues el profesor debe identificar todos los factores que influyen al diseñar e implementar clases sobre una determinada noción matemática (Pino-Fan y Godino, 2015).

### Dimensión Didáctica

Contempla el conocimiento pedagógico del contenido, es decir, el conocimiento del profesor puesto en juego en el proceso de enseñanza. Éste se divide en seis subcategorías, asociadas a las facetas del EOS:

- **Faceta epistémica:** caracteriza el conocimiento especializado de la dimensión matemática, haciendo referencia a los significados institucionales de cualquier

objeto matemático, estando ligada, además, a la identificación y movilización del conocimiento matemático implicado en una tarea y su vinculación con otros objetos matemáticos, implicando los distintos significados parciales de un objeto matemático, que permiten a posterioridad la emergencia del significado global en los procesos de estudio (Font y Godino, 2006).

- **Faceta cognitiva:** aborda el conocimiento de los aspectos cognitivos de los estudiantes, de modo que el docente pueda identificar las posibles resoluciones de una tarea por parte de éstos, así como también los posibles errores o conflictos que puedan emerger. Es decir, esta faceta se centra en el conocimiento del profesor sobre sus estudiantes, cómo aprenden, razonan y progresan en el aprendizaje de la matemática (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016).
- **Faceta afectiva:** hace referencia al conocimiento del profesor sobre aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes en relación a un objeto matemático y su respectivo proceso de estudio.
- **Faceta interaccional:** se relaciona con el conocimiento de las interacciones que se suscitan en el aula, la organización de tareas y la resolución de dificultades de sus estudiantes.
- **Faceta mediacional:** representa el conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes. Estos pueden ser tecnológicos, materiales y temporales.
- **Faceta ecológica:** se refiere al conocimiento de los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos, etc., que influyen en la gestión de los aprendizajes.

Para el estudio de cada una de estas facetas se contemplan distintos niveles de análisis, que permiten desarrollar el análisis del conocimiento didáctico-matemático de un profesor (Pino-Fan *et al*, 2014). Estos niveles son:

1. **Prácticas matemáticas y didácticas:** Corresponde a la descripción de todas las acciones realizadas para resolver la o las tareas matemáticas propuestas para el logro de los aprendizajes. Este nivel considera además las líneas generales de actuación del docente y los estudiantes.
2. **Configuraciones de objetos y procesos:** En este nivel se describen los objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas matemáticas, tanto los que

intervienen como aquellos que emergen de éstas. De este modo, se describe la complejidad de los objetos y los significados de prácticas matemáticas y didácticas con el fin de explicar los conflictos que se suscitan durante su realización y la progresión de los aprendizajes.

3. Normas y metanormas. Se refiere a la identificación del sistema de reglas, hábitos y normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que influyen en cada faceta y las interacciones entre éstas.
4. Idoneidad didáctica. Corresponde al grado en que un proceso de estudio reúne características que permiten considerarlo óptimo o idóneo (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016), valorando las adecuaciones y pertinencia de las acciones del docente. Esto permite al docente realizar un análisis y reflexionar sobre su práctica, identificando potenciales mejoras al proceso de estudio. Para ello, se utilizan un sistema de indicadores empíricos relacionados con cada faceta y sus respectivas interacciones.

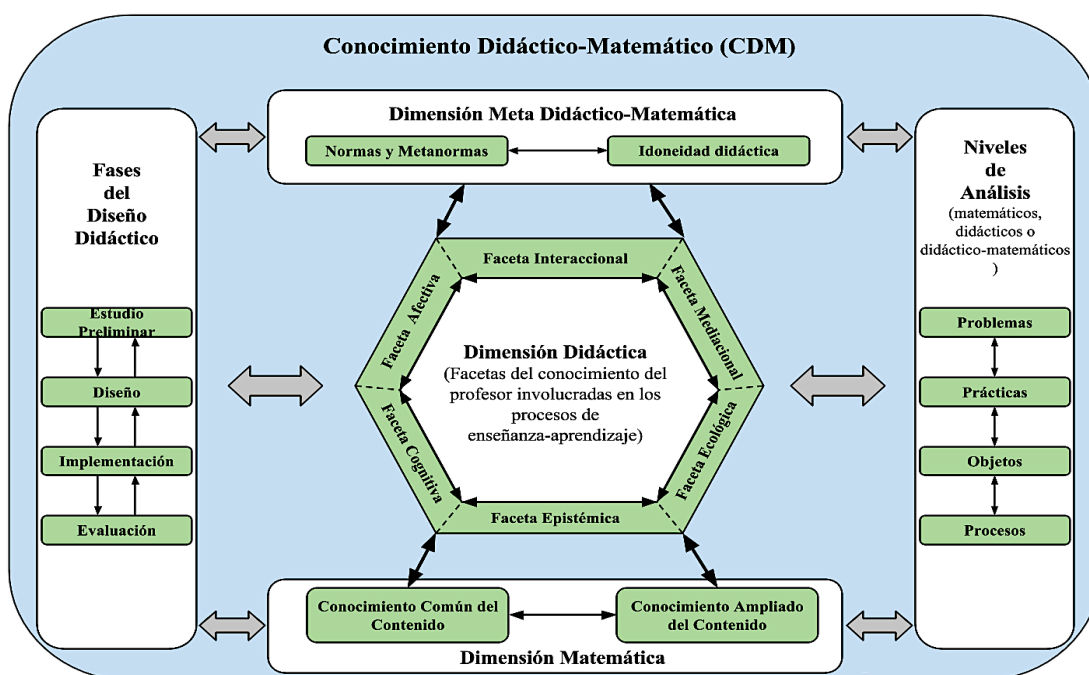


Figura 2.1. Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático (Pino-Fan y Godino, 2015, p.103)

### Dimensión Meta Didáctico-Matemática

Esta dimensión hace referencia a la reflexión que el profesor realiza sobre sus propias prácticas por medio de la identificación y análisis del conjunto de normas y metanormas que regulan los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática, y la valoración de la idoneidad didáctica,

por medio de los criterios de idoneidad, tal como se observa en la Figura 2.1. Además, esta dimensión es útil para encontrar mejoras en las etapas de diseño e implementación del proceso de estudio y la gestión de aprendizajes de sus estudiantes.

a) Por una parte, la dimensión normativa del EOS hace referencia al sistema de reglas, hábitos, normas que condicionan y soportan las prácticas matemáticas y didácticas. Reconocer los efectos de las normas y meta-normas que intervienen en los procesos de estudio son útiles para explicar los fenómenos didácticos que emergen en las prácticas y contribuir a la mejora progresiva de las prácticas didáctico-matemáticas del profesor. Las normas no sólo son matemáticas, sino que también involucran factores como el tiempo, el libro de texto del que dispone el alumno o las fechas de evaluación. En Godino *et al* (2016) se propone el desarrollo de competencia de análisis normativo de un proceso de estudio, con la finalidad de responder a las siguientes preguntas:

- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales?
- ¿Quién, cómo y cuándo se establecen las normas?
- ¿Cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático?

b) Paralelamente, los criterios de idoneidad pueden ser aplicados al análisis de un proceso de estudio, ya sea un diseño de clase, su implementación o el desarrollo de una unidad didáctica constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Las investigaciones destacan esta herramienta por su gran utilidad en el estudio del conocimiento de los profesores o futuros profesores y en la organización de la reflexión y evaluación de diversos procesos de instrucción (Breda, Pino-Fan, y Font, 2017; Seckel y Font, 2017).

### 2.3. ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO (EOS) DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS

El EOS es un modelo teórico que articula distintas aproximaciones y enfoques teóricos referidos a la investigación en Educación Matemática, centrado en el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Esta articulación se logra mediante una perspectiva global que considera las distintas dimensiones que interactúan en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), analizándolas tanto de manera individual como las interacciones entre éstas.

En ese sentido, el EOS destaca que la enseñanza de las matemáticas tiene un carácter relacional y multidimensional, ya que comprende la articulación entre las prácticas docentes, los estudiantes y las nociones matemáticas, sumando a esto, las interacciones y aprendizajes que emergen desde estas prácticas.

De este modo, la Figura 2.2 muestra las seis facetas o dimensiones que componen el proceso de estudio: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, que son estudiadas a partir de cuatro niveles de análisis: las prácticas de los agentes, las configuraciones de los objetos que intervienen, las normas que condicionan y soportan dichas prácticas y la valoración la idoneidad del proceso de estudio (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009).



Figura 2.2. Facetas y niveles de análisis didáctico (Godino, 2011, p.5)

En el EOS se proponen distintas herramientas que permiten desarrollar análisis detallados y pertinentes para cada nivel de análisis.

### 2.3.1. Sistema de prácticas

En el EOS la noción de sistema de prácticas juega un importante rol en la construcción del conocimiento matemático, centrandó la actividad en torno a la resolución de problemas. Así, un sistema de prácticas se entiende como “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334). De este modo, un sistema de prácticas puede ser institucional y personal, introduciendo el significado institucional y personal de los objetos matemáticos, distinguiendo diversos tipos de los mismos (Figura 2.3).



## Tipos de significados institucionales

- **Referencial:** sistema de prácticas usado como referencia para la elaboración del significado pretendido.
- **Pretendido:** sistema de prácticas que se incluyen en la planificación del proceso de estudio.
- **Implementado:** en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- **Evaluado:** corresponde a las prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

## Tipos de significados personales

- **Global:** corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- **Declarado:** se refiere a las prácticas expresadas con respecto a las evaluaciones propuestas, desde el punto de vista institucional.
- **Logrado:** se refiere a las prácticas manifestadas que son conformes de acuerdo a lo establecido por el ámbito institucional.

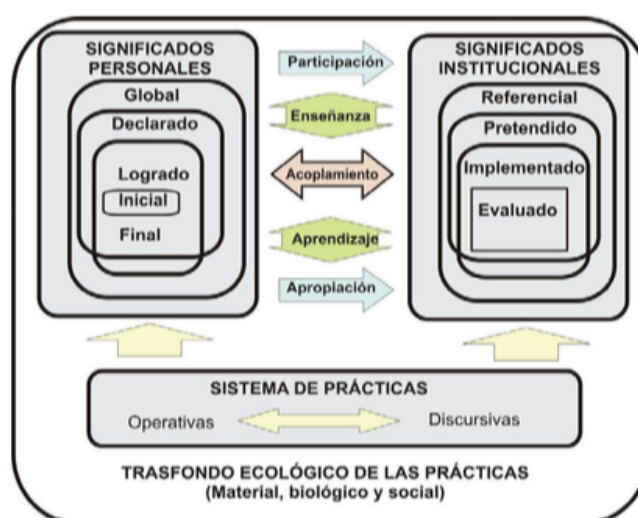


Figura 2.3. Tipos de significados institucionales y personales (Godino, Batanero y Font, 2008, p.6).

### 2.3.2. Configuración de objetos y procesos

Tanto los objetos matemáticos que intervienen y los que emergen en las prácticas matemáticas son objeto de estudio. En una práctica matemática donde se desarrolla la resolución de situaciones- problemas es posible identificar los objetos y procesos implicados por medio de

la configuración ontosemiótica del EOS. Al identificarlos de manera explícita permite a los docentes prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar los conocimientos de los estudiantes y reconocer objetos a recordar e institucionalizar oportunamente durante el proceso de estudio (Godino *et al*, 2016).

### **2.3.3. Idoneidad didáctica**

La noción de idoneidad didáctica, dimensiones y criterios nace en el EOS como una herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa, es decir, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en aula (Godino, 2011), ya que se refiere a las circunstancias del contexto educativo, a la adecuación y pertinencia de las acciones de los profesores, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio (Godino, 2013), es decir, articula de manera coherente y sistémica las seis dimensiones implicadas en un proceso de estudio (Godino, Batanero y Font, 2007). A partir del trabajo de Godino (2011) se presentan los seis criterios o idoneidades parciales que se ponen en juego durante un proceso de estudio:

- **Idoneidad epistémica:** se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados o pretendidos, respecto al significado de referencia.
- **Idoneidad cognitiva:** se refiere al grado de proximidad entre los significados pretendidos o implementados respecto de la zona de desarrollo potencial de los alumnos. Del mismo modo, al grado de ajuste entre los significados personales logrados y los significados pretendidos/implementados.
- **Idoneidad afectiva:** corresponde al grado de implicación (motivación, interés, etc.) de los estudiantes en el proceso de estudio, considerando factores institucionales, personales y académicos.
- **Idoneidad interaccional:** un proceso es idóneo desde esta perspectiva si permite identificar a priori conflictos semióticos potenciales y que, además, permita resolver conflictos que se producen durante el desarrollo del proceso de estudio.
- **Idoneidad mediacional:** corresponde al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- **Idoneidad ecológica:** se refiere al grado de ajuste del proceso de estudio con aspectos institucionales, como el proyecto educativo del establecimiento, programas de estudio, la sociedad y condicionamientos del entorno.

Estos seis criterios corresponden a indicadores de carácter empírico y muestran la complejidad de los aspectos que intervienen en un proceso de estudio, no solo de manera individual, sino que además las interacciones entre éstas. En Godino (2011) se expresa que las dimensiones y componentes de una intervención educativa se infieren a partir de indicadores empíricos, ya que no son observables en forma directa. Es por esto que, para operativizar estos criterios de idoneidad se proponen pautas de valoración de un proceso de estudio, considerando los componentes e indicadores para cada idoneidad.

**Tabla 2.1. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica.**

<b>COMPONENTES</b>	<b>INDICADORES</b>
Situaciones-Problemas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.</li> <li>- Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).</li> </ul>
Lenguaje	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica, ...), traducciones y conversiones entre los mismos.</li> <li>- Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige.</li> <li>- Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.</li> </ul>
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.</li> <li>- Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.</li> <li>- Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.</li> </ul>
Argumentos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen.</li> <li>- Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.</li> </ul>
Relaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.</li> <li>- Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.</li> </ul>

**Fuente: Godino (2011, p. 9).**

La Tabla 2.1 muestra los componentes e indicadores que operativizan esta noción, otorgando gran importancia a las situaciones problemas ya que es a partir de éstas que se generan las ideas matemáticas, de manera válida y representativa.

**Tabla 2.2. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva.**

<b>COMPONENTES</b>	<b>INDICADORES</b>
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio).</li> <li>- Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.</li> </ul>
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.</li> <li>- Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.</li> </ul>
Aprendizaje: (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas:               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situaciones; competencia metacognitiva.</li> </ul> </li> <li>- La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.</li> <li>- Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.</li> </ul>

**Fuente: Godino (2011, p. 10)**

Por otra parte, la Tabla 2.2 se muestra la idoneidad cognitiva como el grado en que los contenidos y significados implementados son adecuados para los alumnos.

**Tabla 2.3. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva.**

<b>COMPONENTES</b>	<b>INDICADORES</b>
Intereses y necesidades	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Las tareas tienen interés para los alumnos.</li> <li>- Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.</li> </ul>
Actitudes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.</li> <li>- Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.</li> </ul>
Emociones	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.</li> <li>- Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.</li> </ul>

**Fuente: Godino, 2011, p. 11.**

La idoneidad afectiva (Tabla 2.3) toma importancia en el logro de un estado afectivo que influya positivamente en el dominio cognitivo de los estudiantes y les permita movilizar

creencias, actitudes, emociones o valores en la resolución de un problema matemático. Por otra parte, en la Tabla 2.4, los componentes de la idoneidad interaccional muestran la importancia de las interacciones durante el proceso de instrucción, dado que favorecen el desarrollo del grupo-clase en términos comunicativos y la autonomía en los estudiantes, asumiendo la responsabilidad del estudio.

**Tabla 2.4. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional.**

COMPONENTES	INDICADORES
Interacción docente-discente	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado pronto, enfatiza los conceptos claves del tema, etc.)</li> <li>- Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.)</li> <li>- Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento.</li> <li>- Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.</li> <li>- Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.</li> </ul>
Interacción entre alumnos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes.</li> <li>- Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos.</li> <li>- Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.</li> </ul>
Autonomía	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).</li> </ul>
Evaluación formativa	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.</li> </ul>

**Fuente: Godino, 2011, p. 12.**

La Tabla 2.5 señala los componentes e indicadores respecto de la idoneidad medicinal, considerando el uso de recursos tanto tecnológicos como artefactos manipulativos, dado que su uso bien orientado y estratégico incrementa el potencial de los mismos, permitiendo mejoras en la comprensión por parte de los estudiantes.

**Tabla 2.5. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional.**

<b>COMPONENTES</b>	<b>INDICADORES</b>
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido.</li> <li>- Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.</li> </ul>
Número de alumnos, horario y condiciones del aula.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida.</li> <li>- El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no sé imparten todas las sesiones a última hora)</li> <li>- El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instrucción pretendido.</li> </ul>
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida.</li> <li>- Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema.</li> <li>- Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.</li> </ul>

**Fuente: Godino, 2011, p. 13.**

Finalmente, la idoneidad ecológica (Tabla 2.6) considera el entorno como un factor condicionante a las actividades desarrolladas en el proceso de estudio, y además las relaciones intra e interdisciplinarias de un contenido matemático.

**Tabla 2.6. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica.**

<b>COMPONENTES</b>	<b>INDICADORES</b>
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.</li> <li>- Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.</li> </ul>
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinarias	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarios.

**Fuente: Godino, 2011, p. 14.**

Finalmente, esta noción es representada mediante un hexágono regular (Figura 2.4), constituyéndose como el máximo grado de idoneidad a partir de los seis criterios mencionados.

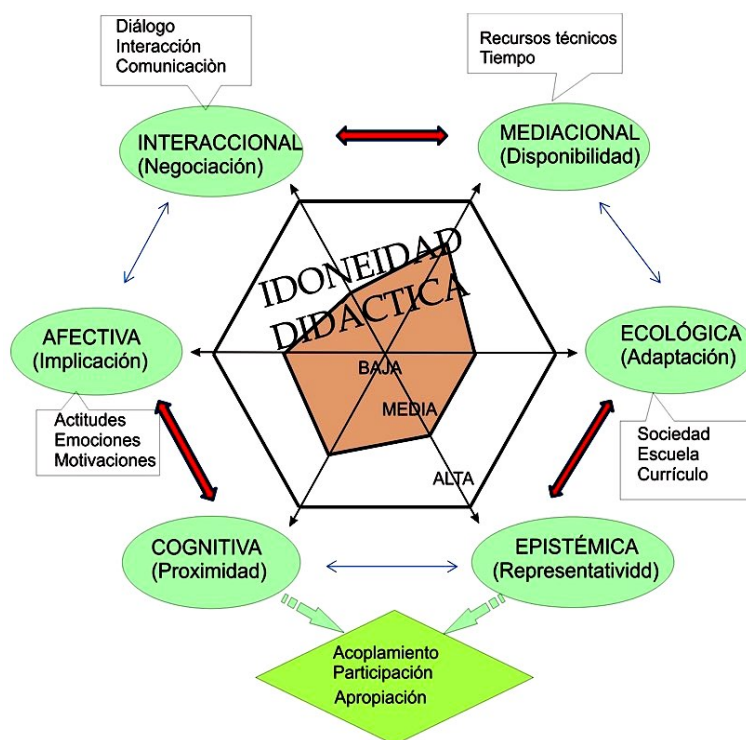


Figura 2.4. Idoneidad Didáctica (Godino, 2011, p.6)

Mientras tanto, el hexágono irregular hace referencia a la valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio implementado (Godino, 2011).

## 2.4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En Educación Matemática, el estudio sobre los conocimientos del profesor es relevante y se ha desarrollado por décadas, surgiendo distintos modelos teóricos que han descrito dichos conocimientos, principalmente sobre aquellos disciplinares. Lamentablemente, no fue posible designar una expresión que involucre al conjunto de los distintos conocimientos, competencias, disposiciones, etc., que los profesores movilizan para evidenciar mejoras en los aprendizajes de sus estudiantes (Godino, 2009). Así es como diversos autores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2002; Hill, Ball y Schilling 2008; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Shulman, 1986) desarrollaron categorías de conocimientos del profesor donde dan cuenta que el conocimiento puramente disciplinar no es suficiente para llevar a cabo procesos de enseñanza y aprendizaje óptimos, sino que además debe poseer un conocimiento profundo sobre la disciplina y su enseñanza.

Adicionalmente, Godino (2009) señala que “los profesores deberían ser capaces de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, utilizar los recursos adecuados, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje” (p.14), estableciendo ciertas categorías de análisis del conocimiento del profesor, a partir de la reorganización de las dimensiones, facetas y componentes del EOS que caracterizan el conocimiento necesario para enseñar la matemática (Godino et al, 2016), y proponiendo el Conocimiento didáctico-matemático, posteriormente ampliado al modelo CCDM, anteriormente descrito.

Estos modelos (Godino, 2009; Godino, Batanero y Font, 2007; Pino-Fan y Godino, 2015), dan cuenta de la complejidad de los factores involucrados en los procesos de estudio, apuntando a la necesidad tener un conocimiento profundo de la matemática y su enseñanza. Además, proporcionan herramientas de análisis pertinentes para caracterizar los conocimientos puestos en juego por los docentes en sus prácticas didáctico-matemáticas, incorporando, en esta línea, a los criterios de idoneidad como una herramienta para la reflexión sobre dichas prácticas, orientada a la valoración y mejora progresiva.

Con respecto al proceso de reflexión, y tal como se menciona en el primer capítulo, desde el año 2004 en Chile se ha utilizado el portafolio como recurso para evaluar el desempeño y las competencias de los profesores del sistema público, arrojando resultados deficientes en las interacciones y los procesos reflexivos. En Seckel y Font (2017), se considera este instrumento como un recurso que permite desarrollar una gran experiencia reflexiva, donde los profesores movilizan las competencias que determinan su desempeño profesional. Esto favorece los procesos de retroalimentación, ya que permiten evaluar y mejorar las propias prácticas. Sin embargo, cuando hablamos sobre el desarrollo de una competencia reflexiva, es necesario destacar la perspectiva de Perrenoud (citado en Seckel & Font, 2015), quien sostiene que es necesario que el docente en formación desarrolle un método para la reflexión, apoyado de un marco conceptual específico para su disciplina, y que además este proceso se realice durante toda su formación y no sólo durante una asignatura. A partir de esto, es posible comprender el desarrollo la competencia reflexiva como un proceso constante en el tiempo, disponiendo del espacio temporal adecuado.

Así mismo, es necesario llevar nuestra mirada a los profesores en servicio, cuya formación inicial carece de cursos orientados al desarrollo de procesos y competencias reflexivas. De este modo, al analizar su situación y retomando aspectos del primer capítulo, es posible entender cómo en Chile, desde la implementación de la JEC en 1997, se ha obstruido aún más la



posibilidad de ofrecer espacios de libre disposición para los docentes donde puedan generar grupos de discusión, análisis y reflexión sobre sus prácticas, impidiendo así que los profesores del sistema público puedan mantener un proceso constante y sistemático de reflexión, que conduzca al desarrollo de una competencia reflexiva y la posterior mejora de sus prácticas didáctico-matemáticas.

En efecto, si bien las políticas educativas en Chile buscan propiciar el desarrollo profesional, no han logrado contrarrestar la sensación de agobio laboral que sus profesores viven día a día, percibiéndose con mayor intensidad durante el proceso de evaluación docente, ya que los docentes no cuentan con horas de libre disposición para poder desarrollar el instrumento (portafolio), clase grabada o evaluación escrita, correspondientes al proceso. Es más, el MBE sostiene en su dominio de Responsabilidades profesionales, que los docentes deben preparar adecuadamente la enseñanza, creando un clima propicio para el aprendizaje, reflexionando sistemáticamente sobre su práctica, y construyendo relaciones profesionales y de equipo con sus colegas (CPEIP, 2008). Sin embargo, se insiste en evaluar y calificar a los docentes a través de instrumentos que buscan dar cuenta de prácticas que deben formar parte de su rutina profesional, pero que en la realidad no ocurren, ya que sus prácticas se ven claramente afectadas por el contexto sociocultural donde se desenvuelven y por el poco tiempo disponible para preparar la enseñanza, reflexionar sobre dichas prácticas y desarrollar lazos profesionales efectivos para el real beneficio del crecimiento profesional y la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Esta problemática nos obliga a pensar sobre las distintas dimensiones involucradas en los procesos de estudio que enfrentan los docentes chilenos y cómo éstos ponen en juego sus conocimientos, lidiando con la multiplicidad de factores que se conjugan en su contexto de enseñanza, para poder desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje adecuados sobre la noción de función.

Considerando lo anterior, esta investigación pretende estudiar las prácticas didáctico-matemáticas desarrollan los profesores de enseñanza media durante un proceso de estudio asociado a la enseñanza y aprendizaje sobre la noción de función, proporcionando un análisis de dichas prácticas, utilizando las herramientas del modelo CCDM, con la finalidad de caracterizar los conocimientos puestos en juego por los profesores durante el proceso de estudio.

De este modo, las directrices de esta investigación estarán orientadas a responder la siguiente pregunta de investigación:

*PI. ¿Qué tipos de conocimientos didáctico-matemáticos ponen en juego los profesores de enseñanza media cuando diseñan e implementan clases sobre la noción de función?*

#### **2.4.1. Objetivos de investigación**

Con la finalidad de aproximarnos a la PI, definimos el objetivo general (OG) de esta investigación:

*OG. Caracterizar las prácticas didáctico-matemáticas de profesores cuando planifican e implementan clases sobre la noción de función.*

Para la consecución de este objetivo y responder a la pregunta de investigación, es necesario plantear los siguientes objetivos específicos (OE):

*OE-1: Caracterizar los conocimientos didáctico-matemáticos de referencia que debería tener un profesor para gestionar adecuadamente los aprendizajes sobre la noción de función.*

*OE-2: Analizar el conocimiento didáctico-matemático puesto en juego por dos profesores de enseñanza media al diseñar clases sobre funciones.*

*OE-3: Analizar el conocimiento didáctico-matemático puesto en juego por dos profesores de enseñanza media cuando implementan clases sobre la noción de función.*

*OE-4: Identificar posibles mejoras en las prácticas de los profesores a partir de la caracterización y reflexión sobre sus prácticas.*

### **2.5. METODOLOGÍA**

Este estudio se enmarca en el modelo cualitativo de investigación, puesto que se pretende caracterizar los conocimientos didáctico-matemáticos de los docentes durante la reflexión, a partir del desarrollo de sus prácticas matemáticas. De este modo, se llevará a cabo un estudio de casos múltiples (Cohen y Manion, 2002), puesto que nos aproximamos a una perspectiva interpretativa y subjetiva, donde el investigador observa las características de una unidad o comunidad. Esto, con el fin de probar y analizar el fenómeno, y así establecer comportamientos

o rasgos destacados, respecto de aquellos que se consideran corrientes, mediante explicaciones, descripciones e ilustraciones.

En este caso, se desea analizar las prácticas didáctico-matemáticas de dos profesores de matemática de un mismo establecimiento, describiendo y caracterizando los conocimientos que éstos ponen en juego en el diseño e implementación de clases sobre la noción de función. Para esto, es necesario establecer que la investigación se desarrollará mediante una revisión de la literatura sobre la enseñanza y aprendizaje de la noción de función. Posteriormente, se llevará a cabo la recolección de datos y observación de las prácticas de las docentes, mediante la obtención de documentos, grabaciones, y observación directa, sin participación y no estructurada, dado que, según Cohen y Manion (2002), no se desea intervenir el proceso de estudio.

A partir de lo anterior, podemos determinar los componentes y fases de esta investigación.

### **2.5.1. Plan de Trabajo**

Para el logro de los objetivos específicos ya señalados, se proponen las siguientes fases de investigación:

#### *Fase 1. Tarea de investigación para OE (1)*

- Revisión de la literatura sobre significados parciales sobre la noción de función.
- Revisión de la literatura sobre representaciones para la enseñanza de la noción de función.
- Revisión y análisis de la literatura sobre errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la noción de función.
- Revisión de la literatura sobre los significados pretendidos por el currículo nacional para la enseñanza de funciones.

#### *Fase 2. Tarea de investigación para OE (2) y OE (3)*

- Obtener y estudiar los diseños didácticos propuestos por los profesores para la enseñanza de la noción de función, para identificar los conocimientos didáctico-matemáticos puestos en juego durante la preparación de la enseñanza.
- Recolectar información mediante videograbación y observación de la sesión referida a la implementación de la clase diseñada por los profesores.

### Fase 3. Tarea de investigación para OE (4)

- Analizar las prácticas de los profesores y reflexionar sobre ellas, a partir de la Fase 2.

#### **2.5.2. Recolección de datos y contexto**

Con respecto a la recolección de datos, este proceso se realizará a través de distintos documentos y registros de archivo, a detallar a continuación.

Para dar cumplimiento a la *Fase 1*, se utilizarán documentos para realizar la revisión de literatura, es decir, a partir de información de otros estudios. Para esto, en esta investigación nos basamos principalmente en los trabajos de Ramos (2005), Biehler (2005) y Urrea (2015), cuyos trabajos se centraron en el estudio de los significados sobre el objeto función que conforman su significado de referencia. En particular, Urrea (2015) establece el significado pretendido por el currículo chileno para la enseñanza de la noción del objeto función, a partir de un análisis al currículo y el desarrollo un estudio histórico epistemológico del objeto función, identificando seis significados parciales que constituyen su significado holístico de referencia. Por otra parte, los trabajos de Artigue (1998), Duval (1995), Duval (1999), Duval (2002), Hitt (1998), Janvier (1987), Ramos (2005) y Vinner y Dreyfus (1989) permitieron recopilar antecedentes sobre las representaciones sobre el objeto función, y los errores y dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje sobre dicha noción.

Posteriormente, en la *Fase 2* se recogerán documentos, tales como los diseños de clase de las docentes (planificaciones) y diapositivas en formato digital. Además, se redactarán notas de campo no estructuradas (recogidas por medio de la observación directa, sin participación), se obtendrán registros de archivo: grabaciones en audio y video, y transcripciones de episodios de clase. Adicionalmente, el Proyecto Educativo Institucional, entendido como el documento oficial del establecimiento, para comprender aspectos sobre el contexto de la institución y sus estudiantes.

Finalmente, el estudio de la literatura sobre los significados sobre la noción de función, sus representaciones, errores y dificultades en su aprendizaje permitirán establecer los conocimientos didáctico-matemáticos de referencia que debería tener un profesor para gestionar adecuadamente un proceso de estudio sobre la noción de función. Del mismo modo, la recolección de datos señalados en el contexto de este estudio de caso, nos permitirán analizar

los conocimientos didáctico-matemáticos movilizados por las docentes en la gestión de los aprendizajes de sus estudiantes y en la implementación de sus respectivas clases.

Así, esta investigación corresponde a un estudio de caso en el que definimos una muestra conformada por dos profesoras del Liceo Antonio Varas de la comuna de Lago Ranco, siendo uno de ellos una docente con más de 10 años de experiencia, a quien denominaremos profesora A; y la otra docente, una profesora novel, con menos de 5 años de experiencia, a quien denominaremos profesora B.

Con respecto al sistema educativo chileno, éste se rige por la Ley de General de Educación (LGE) de 2009 (Ley N° 20.370), a partir de la cual se han elaborado los distintos documentos curriculares que se encuentran en vigencia. Las Bases Curriculares, bajo Decreto Supremo de Educación n° 614/2013 y Decreto Supremo de Educación n° 369/2015, corresponden al principal instrumento curricular, de carácter obligatorio, y que ofrece una base común de aprendizajes para todos los estudiantes del país, mediante Objetivos de Aprendizaje (OA) establecidos para cada curso. Éste, es el documento referencial para la construcción de otros instrumentos curriculares, como los Planes y Programas de Estudio, los que presentan una organización del tiempo escolar y de los objetivos de aprendizaje en función del tiempo, respectivamente (Mineduc, 2009; Mineduc, 2016; Urrea, 2015).

En el Programa de Estudio de Matemática, el Mineduc (2016) promueve el aprendizaje de la disciplina dada su importancia en la resolución de problemas, el desarrollo del razonamiento, su aporte al avance de la ciencia y tecnología, la formulación de juicios de valor, la toma de decisiones, y la asociación a la autonomía y logros por parte del entorno social. Para ello es imperativo que los alumnos adquieran una sólida comprensión de los conceptos matemáticos fundamentales, con el fin de emplear e interpretar las matemáticas, aplicar el razonamiento matemático y entender el rol de la disciplina a nivel global. Esta adquisición de aprendizajes se plantea mediante el logro de cuatro habilidades: resolver problemas, modelar, representar, y comunicar y argumentar. Estas habilidades son entendidas como las capacidades de los estudiantes para realizar tareas y solucionar problemas. De este modo, se contempla su desarrollo en cuatro ejes temáticos: Números, Álgebra y funciones, Geometría, y Probabilidad y estadística.

La noción de función se contempla en el eje Álgebra y funciones, desde octavo año de enseñanza básica a cuarto año de enseñanza media. Este eje se enfoca en la importancia de la

comprensión del lenguaje algebraico como herramienta para representar situaciones y relaciones que puedan ser escritas mediante ecuaciones, inecuaciones o funciones, para así poder resolver problemas, identificar regularidades y construir modelos. En particular, este eje busca reforzar el ámbito numérico y el uso de metáforas para interiorizarse del concepto de función, de modo que los estudiantes puedan utilizarla para resolver problemas que requieren de manipular, modelar y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos, utilizando sus respectivas representaciones (Mineduc, 2016).

En el Programa de Estudio de primer año medio, el eje temático *Álgebra y Funciones* tiene por objetivo que los estudiantes resuelvan sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, utilizando representaciones gráficas y pictóricas, sumado a los métodos algebraicos reducción, igualación y sustitución. Posteriormente, se incorpora la noción de linealidad en dos variables, donde los estudiantes deben describir o identificar relaciones entre dos variables y representarlas de manera gráfica, en el plano cartesiano o por medio de esquemas. Adicionalmente, los estudiantes deben modelar fenómenos de la ciencia y de la realidad que se ajusten a esta noción, utilizando lenguaje matemático. Para el desarrollo de estos aprendizajes, el Programa de Estudios sugiere reforzar el concepto de función y la noción de función lineal y afín, determinados como conceptos previos de la unidad.

En Mineduc (2016) se señala que las Bases Curriculares constituyen un instrumento suficientemente flexible que puede ser adaptado a los diversos contextos educativos, sociales, económicos, territoriales y religiosos del país, dado que a partir de éstas es posible generar distintas aproximaciones curriculares, didácticas, metodológicas y organizacionales, plasmadas en los proyectos educativos de los establecimientos, permitiendo entonces, que los alumnos alcancen los Objetivos de Aprendizaje propuesto por estas Bases Curriculares.

Por otra parte, la comuna de Lago Ranco se ubica al sureste del lago del mismo nombre, en la Provincia del Ranco, Región de Los Ríos. Gran porcentaje del territorio de la comuna es precordillerano, por lo que la mayoría de su población se ubica en zonas rurales. Esta comuna cuenta con establecimientos de enseñanza media municipal y establecimientos de enseñanza básica de dependencia tanto municipal como particular-subsuccionado. Los establecimientos de dependencia municipal son administrados por el Departamento de Administración de Educación Municipal (DAEM), encargado entre otras funciones de administrar un sistema de transporte propio, que traslada a los estudiantes desde sus respectivos hogares (o sectores de

acercamiento) al establecimiento, y viceversa, promoviendo el acceso a la educación a pesar de las dificultades que generan los tiempos de traslado, las distancias o las condiciones geográficas y climáticas, propias de la zona.

En particular, el Liceo Antonio Varas es un establecimiento de dependencia municipal, ubicado en la ciudad y comuna de Lago Ranco, cuenta con una matrícula de 769 alumnos, distribuidos desde enseñanza pre-básica a media, con uno o dos cursos por nivel, siendo el único establecimiento con formación científico-humanista de la comuna. Este establecimiento es de alto nivel de vulnerabilidad, alcanzando un 88,12% en enseñanza básica y un 89,71% en enseñanza media, tomando como referencia un 92,98% comunal. Sumado a esto, el liceo se encuentra clasificado en un grupo socioeconómico (GSE) bajo, con apoderados que declaran en promedio 9 años de escolaridad.

Además, cuenta con Programa de Integración Escolar (PIE) conformado por un grupo de educadores diferenciales, terapeuta ocupacional y fonoaudiólogo, que atiende a 117 alumnos con necesidades educativas especiales (NEE) transitorias y permanentes, diagnosticados por profesionales especializados. Las atenciones a estudiantes con NEE transitorias contemplan dificultades específicas de aprendizaje en cálculo, dificultades específicas de aprendizaje en lecto-escritura, trastornos del lenguaje, funcionamiento intelectual limítrofe y trastorno por déficit atencional (con y sin hiperactividad). Respecto a las NEE permanentes, se atienden alumnos con discapacidad intelectual leve, trastornos del espectro autista (asperger y autismo), disfasia severa y discapacidad múltiple.

El establecimiento cuenta con dos cursos en primero año de enseñanza media, primero medio A y primero medio B. El curso primero medio A, a cargo de la docente B, se compone por 35 alumnos, mientras que el primero medio B, a cargo de la docente A, está conformado por 41 estudiantes.

### **2.5.3. Técnicas para el análisis de los datos**

Con la finalidad de caracterizar de los conocimientos didáctico-matemáticos de referencia sobre la noción de función, se considerará la revisión de la literatura realizado en el capítulo de antecedentes y las herramientas teórico metodológicas propuestas en el modelo CCDM para la caracterización de los conocimientos matemáticos y didácticos de las profesoras, a señalar, niveles de análisis (Pino-Fan *et al*, 2014; Pino-Fan y Godino, 2015). Respecto al análisis de las prácticas didáctico-matemáticas de las docentes bajo estudio, éstos serán realizados a partir de

la información recogida en la *Fase 2*, tales como diseños de clase, diapositivas, grabaciones de clases, notas de campo y transcripciones de episodios de clase. Estos datos, permitirán describir, explicar, valorar las acciones de las profesoras, con respecto a las seis facetas que componen la dimensión didáctica del modelo CCDM. De este modo, el análisis de sus diseños e implementaciones de clase se desarrollarán a través los criterios de idoneidad y sus respectivos componentes e indicadores, presentados en el tercer apartado de este capítulo, permitiendo.

La utilización de las herramientas teórico-metodológicas propuestas en el modelo CCDM para el desarrollo de las *Fases 2 y 3*, se debe a que la literatura (Breda *et al*, 2017; Seckel y Font, 2017) da cuenta de la utilidad de este modelo en la organización de las categorías de conocimiento del profesor, a través de criterios y pautas específicas que permiten su operativización; del mismo modo, los criterios de idoneidad son señalados como una herramienta metodológica eficaz para el desarrollo de los procesos reflexivos de los docentes.



# Análisis de los Diseños Didácticos e Implementaciones de los profesores

Este capítulo se desarrolla en tres apartados. El primero de ellos consiste en la descripción de los objetivos de aprendizaje considerados por las docentes en el diseño e implementación de clases que serán analizados para efectos de esta investigación, a partir del contexto educativo del establecimiento, haciendo referencia a aspectos sociales y territoriales. Posteriormente, en el segundo apartado se desarrolla la descripción y el análisis de los diseños de clase, a partir de las herramientas presentadas en el Marco Teórico de esta investigación. El tercer apartado, presenta la descripción y análisis de las clases implementadas por los docentes, por medio de las herramientas propuestas en el modelo CCDM.

### 3.1. INTRODUCCIÓN

Para el desarrollo y comprensión de esta investigación, es necesario considerar aspectos sociales, territoriales y educativos que determinan el contexto en que se desarrollan las prácticas de las docentes involucradas, descritos anteriormente. Igualmente, se consideran aspectos curriculares relativos a la enseñanza sobre la noción de función.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el Programa de Estudio considera el concepto de función como parte de los conocimientos previos del eje temático Álgebra y Funciones. Sin embargo, las docentes A y B, declaran diseñar e implementar sus clases en función del logro de aprendizajes, desarrollando un trabajo de nivelación previo a las unidades de primero medio. De este modo, utilizan elementos de las Bases Curriculares de octavo básico, destinando parte del tiempo escolar a la nivelación de sus estudiantes, ya sea el tiempo asignado a las clases

como el tiempo de libre disposición, favoreciendo así la atención a la diversidad de niveles de aprendizaje de los estudiantes de los cursos, tal como se menciona en las Bases Curriculares (Mineduc, 2016). Así, los análisis de los diseños e implementaciones de clases que serán presentados en este capítulo se enmarcan en primer año medio, en la introducción del eje temático Álgebra y Funciones de primero medio, tomando como referencia los objetivos de aprendizaje considerados por las Bases Curriculares de octavo básico, que incorpora la noción de función en el segundo de los cinco objetivos de aprendizaje del eje temático número dos, correspondiente a Álgebra y Funciones, cuyo foco es precisamente el concepto de función. Esta noción se introduce por medio de la representación de situaciones de cambio lineal, utilizando tablas y apoyándose en la noción de proporcionalidad. Posteriormente, se modelan situaciones de la vida diaria y de otras disciplinas o asignaturas, desarrollando así la noción de función propiamente tal y sus distintas representaciones. Luego, utilizan las representaciones simbólicas para resolver ecuaciones e inecuaciones lineales con coeficientes racionales y enteros. Finalmente, conocen las funciones lineal y afín, a partir de distintos contextos y utilizando distintas representaciones.

<p><b>OA 7</b> Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>› Utilizando tablas.</li> <li>› Usando metáforas de máquinas.</li> <li>› Estableciendo reglas entre <math>x</math> e <math>y</math>.</li> <li>› Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con <i>software</i> educativo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>› Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente (“constante de proporcionalidad”).</li> <li>› Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa.</li> <li>› Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad.</li> <li>› Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.</li> <li>› Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales <math>f(x) = a \cdot x</math> (<math>y = a \cdot x</math>).</li> <li>› Representan la linealidad <math>f(kx) = kf(x)</math> y <math>f(x1 + x2) = f(x1) + f(x2)</math> en tablas y gráficos.</li> <li>› Identifican la pendiente del gráfico <math>\frac{\Delta y}{\Delta x}</math> de la función <math>f(x) = a \cdot x</math> con el factor <math>a</math>.</li> <li>› Verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación <math>f(x) = a \cdot x</math>.</li> <li>› Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.</li> </ul>
--	---

**Figura 3.1. Objetivo de Aprendizaje 7 e indicadores de evaluación (Mineduc, 2016, p.100)**

Así, el Objetivo de Aprendizaje 7 (OA 7) señala que los estudiantes deben mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal, utilizando tablas y metáforas de máquinas, estableciendo reglas entre  $x$  e  $y$ , representando de manera gráfica en el plano cartesiano o usando diagramas de Venn, de manera manual y/o con software educativo. En

forma paralela, el Programa de Estudio presenta una serie de indicadores que dan cuenta del logro de estos aprendizajes, presentados en la Figura 3.1.

Adicionalmente, el Objetivo de Aprendizaje 10 (OA 10) indica que los estudiantes deben ser capaces de comprender la función afín, generalizándola como una suma constante a una función lineal, mediante el traslado de funciones lineales en el plano cartesiano, determinando el cambio constante de un punto a otro de su gráfica, resolviendo problemas asociados a situaciones de interés simple, de la vida diaria o de otras asignaturas. Los indicadores que permiten evaluar el logro de estos aprendizajes se describen en la Figura 3.2.

<p><b>OA 10</b></p> <p>Mostrar que comprenden la función afín:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>› Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal.</li> <li>› Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano.</li> <li>› Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con <i>software</i> educativo.</li> <li>› Relacionándola con el interés simple.</li> <li>› Utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>› Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante.</li> <li>› Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín: <math>f(x) = a \cdot x + b</math>.</li> <li>› Determinan las regiones en el plano cartesiano cuyos puntos <math>p(x,y)</math> representan soluciones <math>(x,y)</math> de las inecuaciones: <math>y &lt; a \cdot x + b</math> o <math>y &gt; a \cdot x + b</math>.</li> <li>› Diferencian modelos afines, lineales y de proporcionalidad inversa.</li> <li>› Modelan situaciones de la vida diaria o de ciencias con funciones afines.</li> <li>› Identifican, en la ecuación funcional, el factor <math>a</math> con la pendiente <math>\frac{\Delta y}{\Delta x}</math> de la recta y el sumando <math>b</math> con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen <math>o(0,0)</math></li> <li>› Elaboran gráficos de funciones afines <math>a</math> y <math>b</math> dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación <math>f(x) = a \cdot x + b</math>.</li> <li>› Resuelven problemas de la vida diaria o de ciencias que involucran el cambio constante expresado mediante ecuaciones recursivas de la forma <math>f(x + 1) - f(x) = c</math>.</li> </ul>
--	--

Figura 3.2. Objetivo de Aprendizaje 10 e indicadores de evaluación (Mineduc, 2016, p.102)

A partir de estos antecedentes, se presentan en los siguientes apartados el análisis de los diseños de clase para abordar la noción de función y sus respectivas implementaciones de clase.

### 3.2. DISEÑOS DE CLASES

Los diseños de clase desarrollados por las docentes corresponden a la planificación de una clase, semana o unidad didáctica, incorporando objetivos de aprendizaje, contenidos, metodologías y estrategias, secuencia de actividades, recursos, indicadores de evaluación, entre otros. Los diseños elaborados por las profesoras, utilizan su formato habitual de planificación y corresponden a una planificación de clase sobre la noción de función.

A continuación, se presentan los análisis realizados a los diseños de clase, desarrollado mediante los niveles de análisis del conocimiento didáctico-matemático, que se basan en la descripción, explicación y valoración de los conocimientos que las docentes ponen en juego durante el proceso de instrucción. Los diseños se encuentran disponibles en la sección de anexos.

### **3.2.1. Diseño de clase de la docente A**

#### Descripción

El contenido de la clase diseñada por la docente A contempla el OA 7 del Programa de Estudio señalado en el apartado anterior. Para su logro, propone los siguientes objetivos específicos:

- *Reconocer el concepto de función a través de relaciones matemáticas.*
- *Identificar elementos de una función, dominio y recorrido.*
- *Identificar tipos de funciones lineal y afín.*
- *Evaluar funciones, respetando la jerarquía de las operaciones.*

Las actividades planteadas se estructuran en inicio, desarrollo y cierre de la clase. En el inicio, la docente plantea comunicar los objetivos de la clase, reconociendo el concepto de función por medio del uso de relaciones y la lluvia de ideas. Para el desarrollo, plantea el avance de una guía de trabajo, en modalidad grupal. Propone, además, formalizar los “conceptos asociados al estudio de una función” durante el avance de las actividades que componen esta guía. Para finalizar la clase, la docente contempla el desarrollo de una síntesis de lo aprendido durante la clase, verificando los aprendizajes mediante el planteo de preguntas a los estudiantes, que además involucren qué aspectos pudieron dominar y qué aspectos deben reforzar.

Con respecto a los recursos que propone utilizar durante la clase considera el cuaderno, lápices, guía, PC y proyector. Para finalizar, los indicadores de evaluación que se indican para verificar el logro de los objetivos son los siguientes:

- *Reconocen y construyen el concepto de función.*
- *Identifican dominio y recorrido.*
- *Identifican funciones lineal y afín.*
- *Evalúan funciones (determinan imágenes).*

Con respecto al nivel de explicación y valoración de este diseño, se presentarán de acuerdo a los criterios de idoneidad.

## Explicación y Valoración

### a) Faceta epistémica

El currículo de primero medio introduce la noción de función por medio de diversos significados parciales para su enseñanza, destacando la función como relación entre variables, la función como representación gráfica y la función como expresión analítica. Sin embargo, la acepción de la función a partir de la teoría conjuntista se presenta en menor medida al utilizar solo algunos elementos para introducir el significado de la noción. Por otra parte, estos significados movilizan a su vez representaciones verbales, tabulares, gráficas, simbólicas e icónicas.

En su diseño, la docente considera la construcción de la noción de función a partir del concepto de relación matemática, utilizando tablas de valores y la metáfora de la máquina (a partir del OA 7), con la finalidad de establecer una regla que represente esta relación. A partir de la conceptualización anterior, desarrolla la formalización de conceptos como dominio y recorrido de una función y variables dependiente e independiente, por medio de la resolución de problemas realistas, y posteriormente las funciones lineal y afín (Figura 3.3). Con respecto a las habilidades declaradas por la docente, se busca promover situaciones donde los estudiantes deban argumentar y comunicar.

<b>OBJETIVO DE LA CLASE</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Reconocer el concepto de función a través de relaciones matemáticas.</li><li>• Identificar elementos de una función, dominio y recorrido</li><li>• Identificar tipos de funciones afín y lineal.</li><li>• Evaluar Funciones, respetando la jerarquía de las operaciones</li></ul>

**Figura 3.3. Objetivos de Aprendizaje. Diseño de docente A.**

Uno de los aspectos principales a mejorar, es evidenciar las situaciones-problemas que serán abordadas para la enseñanza sobre la noción de función, y dar cuenta de la representatividad de sus significados parciales y los registros de representación movilizados.

### b) Faceta cognitiva

Tal como se menciona en el primer apartado, el diseño de clase considera el estudio de la noción de función desarrollada en octavo básico, dado que corresponde a los conocimientos previos del eje temático Álgebra y funciones en primero medio.

Dadas las características de sus estudiantes y el establecimiento de origen de los alumnos que llegan a este curso, la docente realiza una nivelación al comienzo de la unidad, con el fin de desarrollar una base de conocimientos previos para todos los estudiantes.

En el diseño de la clase es posible detectar que se planifican actividades de refuerzo a los estudiantes con la finalidad de promover el logro de todos los alumnos. Con respecto a los indicadores que se plantean, es posible identificar ciertas formas de evaluación formativa que permiten a la docente detectar el grado de comprensión conceptual y proposicional de sus estudiantes.

Adicionalmente, durante el cierre de la clase se propone una actividad de refuerzo donde la profesora evalúa a los estudiantes por medio de preguntas sobre las actividades de la clase y donde identifican qué dominan de lo desarrollado y qué aspectos de la clase deben reforzar con posterioridad a ésta. Por ende, utilizan la información de esta evaluación formativa para tomar decisiones respecto a sus logros y dificultades de aprendizaje.

Una posible mejora en esta faceta, hace referencia a incluir en su diseño algunos conflictos y dificultades que puedan manifestarse durante el desarrollo de la clase y sus respectivas estrategias para solucionarlos, así como también el desarrollo de actividades de ampliación.

### c) Faceta afectiva

Las componentes de la faceta afectiva se ven reflejados tanto en las actividades como en los objetivos actitudinales planteados por la profesora. Con respecto a las actividades, inicialmente se desarrolla una lluvia de ideas que promueve la participación en la actividad, favoreciendo la argumentación por parte de los alumnos. Durante el desarrollo el trabajo grupal también promueve la argumentación, el cual se valora por su calidad al interior del grupo. Los objetivos actitudinales declarados son los siguientes:

- *Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.*
- *Trabajar en equipo, en forma responsable y productiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.*

Esto refuerza lo planteado en el párrafo anterior, mostrando que la planificación busca, por medio de sus objetivos y actividades, promover la autoestima de los estudiantes y evitar el rechazo a la matemática.

Respecto a las posibles mejoras en esta faceta, es posible identificar la mención (en la planificación) del uso de instrumentos de medición adecuados para la construcción de los gráficos, puesto que su uso permite que se expongan cualidades de estética y precisión de las matemáticas, necesarios para motivar a los estudiantes sobre la comprensión de esta noción.

#### d) Faceta interaccional

Respecto de esta faceta se identifica la intención de la docente por llegar a consensos a partir de los argumentos proporcionados por los estudiantes por medio de las preguntas retóricas y la lluvia de ideas. A partir del trabajo grupal propuesto, se favorecen las interacciones entre alumnos, ya que promueve el diálogo y comunicación, la argumentación de afirmaciones y/o respuestas, y evitando la exclusión de los estudiantes. De este modo, se favorece la autonomía en términos de las interacciones y diálogos que sustentan el consenso y la institucionalización de la noción en cuestión. Sin embargo, se evidencia en el diseño que la institucionalización propiamente tal será desarrollada por la docente, sin especificar que los alumnos asuman la responsabilidad de plantear conjeturas o hacer conexiones. Los aspectos evaluativos de la clase se plantean de manera explícita durante el inicio y el cierre de la clase, por medio de recursos retóricos, preguntas y evaluación formativa al final de la clase.

De este modo, esta faceta se ve bastante desarrollada, sin embargo, se sugiere contemplar en el diseño una presentación del tema que aborde aspectos claves del tema y de manera más organizada, así como también, actividades de ampliación que permitan a los estudiantes plantear conjeturas y desarrollar un trabajo más autónomo.

#### e) Faceta mediacional

Para el logro de los objetivos de la clase se propone el desarrollo de representaciones gráficas, ya sea manual o con uso de software. En este caso, el diseño contempla el uso de software, pero no menciona el uso de regla graduada para construir las gráficas de manera manual. Por una parte, el uso de software contribuye al desarrollo de definiciones y propiedades por medio de la visualización, y además contribuye a introducir lenguajes, procedimientos y argumentaciones que se adapten a los significados que se proponen. Sin embargo, la ausencia

de un instrumento de medición en la construcción de una gráfica puede derivar en errores y dificultades en los aspectos mencionados anteriormente.

Con respecto al tiempo de enseñanza, solo se refiere a la estructura y no al tiempo asignado a cada momento de la clase, no obstante, es posible inferir a partir de sus objetivos y actividades que asigna más tiempo a la comprensión de los conceptos ligados a la función, tales como dominio, recorrido, variables dependiente e independiente, función lineal y función afín, que requieren de los distintos registros de representación para su comprensión. Adicionalmente, la noción de función, parece no ser abordada lo suficiente ni con el apoyo del lenguaje necesario para su comprensión.

Respecto a las condiciones de aula y del curso, el número de alumnos y la densidad en la sala de clases son factores que condicionan negativamente el logro de los aprendizajes propuestos, sin embargo, la docente propone distribuir al curso de modo que el proceso de instrucción se desarrolle de la manera más adecuada posible.

En términos generales, es posible determinar algunos indicadores de esta faceta que pueden ser mejorados con posterioridad, tales como: señalar y describir con mayor precisión los recursos que serán utilizados y de qué modo o en qué momentos de la clase serán utilizados; y contemplar de manera explícita el desarrollo de tutorías tanto de manera colectiva como personalizada.

#### f) Faceta ecológica

Los contenidos propuestos en este diseño dan cuenta de las necesidades del curso respecto de las directrices curriculares, adaptando la implementación de los objetivos de aprendizaje de primero medio en función de sus conocimientos previos.

Es posible identificar que la docente incorpora el uso de computador y software educativo para potenciar los logros de sus estudiantes. Además, por medio de los objetivos tanto conceptuales como actitudinales, se puede detectar que los contenidos y las actividades propuestas contribuyen a la formación en valores democráticos, permitiendo a los estudiantes desarrollar valores establecidos por los Programas de Estudio que apuntan al rigor, la perseverancia y la proactividad.



Esta faceta puede ser mejorada por medio de prácticas reflexivas que orienten a los estudiantes al desarrollo del pensamiento crítico, estableciendo relaciones con otros objetos matemáticos u otras disciplinas.

### 3.2.2. Diseño de clase de la docente B

#### Descripción

El contenido de la clase diseñada por la docente B busca desarrollar el OA 7 del Programa de Estudio, sin embargo, se presenta con una leve diferencia respecto al descrito anteriormente, por lo tanto se muestra el aprendizaje esperado propuesto por la docente en la Figura 3.4.

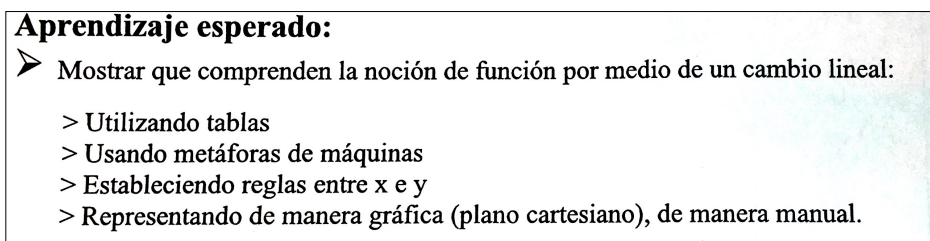


Figura 3.4. Aprendizaje esperado del diseño de clase de la docente B.

Para el logro de éste, propone el siguiente objetivo de clase:

- *Definir el concepto de función mediante situaciones de la vida cotidiana relacionadas al cambio lineal, utilizando tablas y metáforas de máquinas.*

Las actividades planteadas se estructuran en inicio, desarrollo y cierre de la clase. Para el inicio asigna 15 minutos, donde además de saludar a los estudiantes, socializa las normas de convivencia y comportamiento durante la clase, explica el objetivo de la clase y plantea preguntas a los estudiantes sobre la posibilidad de “graficar situaciones cotidianas” tal como se ha realizado en clases anteriores, o qué sucede con el pago de cuentas de luz, plan de teléfono o de un taxi; lo anterior, declara la docente con la finalidad de recordar los contenidos de clases anteriores para anclarlos con los nuevos.

El desarrollo de la clase está propuesto para 50 minutos, donde la docente plantea una situación de la vida cotidiana que los estudiantes deben desarrollar y dar solución, “graficando los datos obtenidos” y dando paso a la formalización del concepto de función. Posterior a esto, se desarrollarán ejercicios bajo la metáfora de la máquina, mediante las cuales “se identificarán las funciones trabajadas”, haciendo referencia a que los alumnos identificarán la expresión analítica de dichas funciones.

Para el cierre de la clase propone una síntesis de 15 minutos, “generalizando los conceptos aprendidos y realizando un ejercicio de ejemplo para resumir”, y dando un espacio a los estudiantes para que puedan hacer comentarios o dudas sobre el contenido o el trabajo realizado. Respecto a los recursos, se propone el uso de pizarra, PC, presentación en Ms. PowerPoint y proyector. Finalmente, para verificar el logro del objetivo de aprendizaje por parte de los estudiantes, la docente consigna la revisión del trabajo realizado por los alumnos en sus cuadernos.

### Explicación y Valoración

Con respecto al análisis de este diseño, se presentan a continuación las explicaciones y valoraciones a la implementación de la clase con base en los criterios de idoneidad.

#### a) Faceta epistémica

Los significados pretendidos por el currículo de octavo básico para la enseñanza de la noción de función son variados, destacan principalmente la función como relación entre variables, la función como representación gráfica y algunos elementos de la teoría conjuntista; en menor medida desarrolla esta noción por medio de la función como expresión analítica. Estos significados movilizan a su vez representaciones verbales, tabulares, gráficas, simbólicas e icónicas.

El diseño de clase de la docente considera la resolución de una situación-problema por medio del cual se movilizan sus diversas representaciones, realizando conversiones entre ellas, con el fin de formalizar la noción de función, movilizando el significado de una función como relación entre variables. La docente señala que la situación-problema corresponde a una situación de la vida cotidiana, por lo que se asume que es un problema de tipo realista. De este modo, propicia escenarios de aprendizaje donde los estudiantes resuelven un problema de forma personal o en equipo, en concordancia con Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan (2018), donde se acepta que el aprendizaje será de mejor calidad si se promueven estos escenarios por medio de la resolución de un problema realista, debido a que propician la construcción del conocimiento.

Posteriormente, se plantea el desarrollo de ejercicios mediante el uso de metáforas de máquinas, a partir de los cuales se espera que los estudiantes identifiquen la expresión analítica

de las funciones dadas. La docente busca por medio de esta actividad, que los estudiantes sean capaces de representar la función de manera simbólica.

La última actividad sugiere que los alumnos identifiquen “funciones y relaciones entre las variables”, lo que entendemos como diferenciar entre una función y una relación propiamente tal, sin señalar además que tipo de representaciones se utilizará para ello. En concordancia con lo anterior, los estudiantes deben ser capaces de argumentar por qué cierta representación corresponde a una relación o a una función. Sin embargo, este tipo de actividades son desarrolladas en el libro de texto a través de una representación icónica, usando diagramas de Venn, limitando el tipo de representaciones que permiten desarrollar la comprensión de esta noción.

En términos valorativos, se sugiere que las situaciones-problema propuestas en el diseño de clase sean representativas de su significado de referencia y se usen los diferentes modos de expresión matemática, para no limitar la comprensión de los estudiantes sobre la noción de función a las tres acepciones propuestas: la función como relación entre variables, la función como gráfica y la función como expresión analítica.

#### b) Faceta cognitiva

Al igual que la docente anterior, el diseño de clase contempla el estudio de la noción de función desarrollada en octavo básico, puesto que en el currículo de primero medio se determina como conocimientos previos del eje temático Álgebra y funciones. Además, considera tanto las características de sus estudiantes y del establecimiento como la proveniencia de los alumnos que llegan a este curso. De este modo, se realiza una nivelación al comienzo de la unidad, para desarrollar con la mayor homogeneidad posible los conocimientos previos que debieran dominar todos los alumnos del curso.

De este modo, la docente manifiesta monitorear los conocimientos previos de los estudiantes por medio de preguntas al inicio de la clase, recordando los contenidos de clases anteriores y relacionándolos con situaciones cotidianas que orienten a los estudiantes sobre el objetivo de la clase (Figura 3.5). Al finalizar las actividades, desarrolla una síntesis de la clase donde generaliza los conceptos trabajados y una actividad de refuerzo, por medio de un espacio donde los estudiantes puedan plantear interrogantes sobre la clase.

**Objetivo de la clase:**  
Definir el concepto de  
función mediante  
situaciones de la vida  
cotidiana relacionadas  
al cambio lineal  
utilizando tablas y  
metáforas de maquinas

**Figura 3.5. Objetivo de aprendizaje. Diseño de docente B.**

La evaluación del logro de aprendizajes se manifiesta en el diseño por medio del desarrollo de la fluencia procedimental, la comprensión de situaciones y la competencia comunicativa y argumentativa durante el desarrollo de actividades, sin embargo, no se detalla cómo se logrará definir qué niveles de comprensión y competencia desarrollarán los estudiantes.

El diseño de la docente promueve el acceso y logro a todos los estudiantes, sin embargo, es posible identificar las siguientes mejoras: proponer actividades de ampliación para los alumnos más avanzados, plantear tareas o actividades que promuevan el desarrollo de la competencia metacognitiva, utilizar una pauta de evaluación de los logros y estrategias que permitan la difusión de sus logros de la clase.

c) Faceta afectiva

Respecto a los intereses y necesidades que componen la faceta afectiva, es posible identificar que las situaciones-problemas propuestas permitan a los estudiantes valorar la utilidad del objeto función en la vida cotidiana y/o profesional. El planteamiento de las actividades promueve la participación de los estudiantes y la argumentación, y en concordancia con esto, el objetivo actitudinal “demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales” da cuenta de la intención de la docente por promover la perseverancia y la responsabilidad durante la clase.

Finalmente, es posible identificar mejoras al diseño, que guardan relación con declarar el uso de instrumentos que puedan resaltar la cualidad de precisión de las matemáticas a través de las representaciones gráficas que se proponen, resaltando la importancia del uso de artefactos como las reglas graduadas o software educativo que permita una construcción pertinente de estas gráficas para facilitar la comprensión de la noción de función.

Se propone, en esta faceta, reflexionar de manera previa con respecto a los conflictos que pudieran ocurrir entre estudiantes durante la implementación de la clase, así como también favorecer el diálogo entre estudiantes y promover el desarrollo de la autonomía.

#### d) Faceta interaccional

La docente propone preguntas retóricas al comienzo de la clase para captar la atención de los estudiantes. Durante el desarrollo de la clase, al resolver la situación-problema no se evidencia la intención de favorecer el diálogo entre los estudiantes, sino que busca llegar a consensos a partir de las respuestas y los argumentos que proporcionan los estudiantes.

De este modo, monitorea y evalúa el proceso que desarrollan los alumnos. De la misma forma, manifiesta en el diseño que solicitará cuadernos a los estudiantes para monitorear el trabajo realizado.

#### e) Faceta mediacional

Con respecto a los recursos utilizados, solo se declara el uso de una presentación en PowerPoint, a pesar de que no se explica en qué momento de la clase será utilizado ni para qué fin. Tampoco observa en el diseño el uso de reglas graduadas para la construcción de las representaciones gráficas, más aún considerando que en el OA 7 omite las representaciones con uso de software educativo. Por otra parte, la organización del tiempo (15 minutos de inicio, 50 minutos de desarrollo y 15 minutos de cierre) revela la intención de la docente de dedicar suficiente tiempo a los contenidos que presentan más dificultades de comprensión.

De acuerdo a lo anterior, es posible plantear que, en un futuro diseño de esta clase, la docente señale y describa con mayor precisión el tipo de recursos que sean utilizados, cuándo serán utilizados y con qué finalidad.

#### f) Faceta ecológica

Respecto a la implementación de los contenidos y su grado de adaptación al currículo, si bien solo forma parte de los conocimientos previos del currículo de primero medio, por motivos ya explicados, la docente busca nivelar y/o desarrollar la comprensión sobre la noción de función. Para esto integra la resolución de una situación-problema de tipo realista, que promueve la participación de los estudiantes, que se involucren en su desarrollo, propiciando la construcción de la noción de función, y que posteriormente pueden aplicar en la vida cotidiana. Sin embargo,

no se evidencia que las actividades diseñadas estimulen el desarrollo del pensamiento crítico ni conexiones intra o interdisciplinarias.

### 3.3. IMPLEMENTACIONES DE CLASES

Las herramientas que provee el modelo CCDM, es decir, los niveles de análisis del conocimiento didáctico-matemático, basados en la descripción, explicación y valoración de los conocimientos que las docentes ponen en juego durante el proceso de instrucción. Para efectos del análisis de las implementaciones de clases y las conclusiones, se consideran los siguientes análisis a las implementaciones de clases de las docentes.

#### 3.3.1. Implementación de clase de la docente A

##### Descripción

Inicialmente, los alumnos forman grupos de trabajo y la clase inicia con el saludo de la profesora, la entrega del objetivo de la clase y la guía de trabajo, a partir del cual recuerdan el concepto de relación reforzado en la clase anterior. Con base en esta actividad, comienza a construir la definición de función, a partir de una metáfora sobre relaciones de amistad y pareja, captando la atención y el interés de los estudiantes. Durante este proceso, utiliza representaciones gráficas, icónicas y verbales y pares ordenados, realizando conversiones entre las mismas. La docente es enfática en diferenciar los conceptos de relación y función y, a pesar de ello, los alumnos con dudas insisten en preguntar para comprender, a lo que la profesora responde de distintos modos, en particular, por medio de la definición construida y ejemplos, introduciendo en este momento la notación  $f(x)$  para las cuales los alumnos deducen la expresión analítica asociada a cada ejemplo. La definición de función desarrollada incorpora algunos significados parciales, tales como la función como correspondencia, como representación gráfica y algunos elementos de la teoría de conjuntos.

Posteriormente, incorporan los conceptos de variable dependiente e independiente, dominio y recorrido, utilizando registros los simbólico y tabular. Sin embargo, a partir de situaciones problema de tipo realista, contextualizados a la realidad de los estudiantes y que involucran la función en su forma algebraica, se definieron las funciones lineal y afín, poniendo en juego las distintas representaciones y realizando conversiones entre ellas.

Para finalizar la clase, desarrolla una actividad de refuerzo donde sintetiza los contenidos de la clase por medio de preguntas dirigidas a los estudiantes.

Durante la clase, la dinámica de trabajo desarrollada por la profesora fue el diálogo profesor-alumno, motivando a los alumnos a participar, generando definiciones claras y precisas, promoviendo el logro y acceso de todos los estudiantes y detectando los niveles de comprensión de lo tratado durante el desarrollo de toda la clase. Los alumnos argumentaron sus conjeturas o las respuestas que les hacía la docente, logrando el consenso entre los estudiantes.

Por último, la docente presentó los contenidos con clara adaptación curricular a partir del estudio previo sobre la realidad académica de los estudiantes, abordándolos por medio de temáticas afines a los intereses de los estudiantes.

### Explicación

Durante la construcción de la definición de función, la docente utilizó una situación cotidiana representada por medios de registro verbal, tabular e icónico, utilizando lenguaje matemático adecuado al nivel curricular y al curso en particular, y habiendo realizado actividades de refuerzo al inicio de la clase y en clases anteriores, donde se reforzaron los conocimientos previos necesarios para abordar la temática de la clase actual. Sin embargo, se presentaron algunos conflictos en su comprensión, que pudieron ser dados por abordar solo una situación cotidiana para la construcción de dicha definición, la que movilizó solo algunas representaciones de función (Figura 3.6).

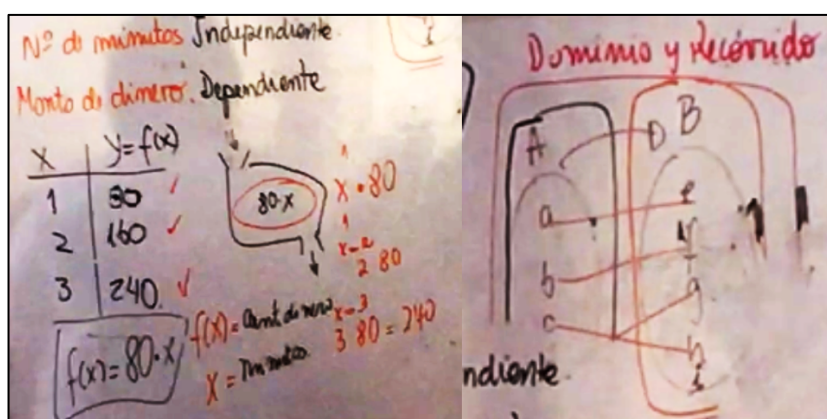


Figura 3.6. Representaciones y metáfora utilizadas por docente A.

El segundo conflicto se presenta una vez definida función. La profesora busca que los alumnos logren diferenciar entre relación y función, utilizando la situación inicial, sin embargo, los estudiantes no logran comprender, por lo que la profesora comienza a representar la situación por medio de diagramas y pares ordenados. Al persistir las dudas utiliza otros ejemplos, mediante los cuales moviliza otras representaciones, los cuales permiten comprender a algunos estudiantes y compartirlo con sus compañeros.

Por otra parte, el aula, la cantidad de alumnos, el exceso de diálogo profesor-alumno y la poca variedad de implementos utilizados para desarrollar la clase, fueron un factor que pudo afectar negativamente en el diálogo entre estudiantes, la autonomía y el logro de niveles de comprensión suficientes para desarrollar una actividad de ampliación.

### Valoración

Para valorar este proceso de estudio e identificar posibles mejoras, utilizamos los criterios de idoneidad didáctica, señalados en el capítulo dos como una guía de análisis y reflexión sistemática.

#### a) Faceta epistémica

A partir de los antecedentes recopilados, esta es una de las facetas con mayor alcance por la profesora. Se considera necesario que la docente utilice situaciones problemas que movilicen de manera representativa los distintos significados sobre la noción de función, sus representaciones y la articulación efectiva entre estos significados, mejorando además las relaciones y conexiones entre los objetos que intervienen en la práctica, para una mayor comprensión sobre los significados movilizados. Por otra parte, se sugiere que las actividades promuevan en mayor medida situaciones donde los alumnos deban argumentar.

#### b) Faceta cognitiva

Esta faceta revela que la docente no logró prever algunos conflictos que pudieron suscitarse durante la clase. Es por esto que, dentro de las mejoras para un nuevo diseño e implementación de su clase, se sugiere plantear actividades diversas que promuevan el logro y acceso de todos los estudiantes, mejorando los distintos modos de evaluación (y a distintos niveles) y desarrollando actividades de ampliación que permitan a los estudiantes alcanzar los niveles de



logro esperados y desarrollar mayores niveles de competencia. Los logros alcanzados por los alumnos y por la clase pueden ser difundidos al cierre de forma general posterior a la síntesis.

c) Faceta afectiva

De los indicadores que componen esta faceta la docente logró desarrollarlos de manera adecuada, intereses, actitudes y emociones. Sin embargo, es necesario que la docente utilice instrumentos de medición para realizar las construcciones de las gráficas realizadas y así poder resaltar las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

d) Faceta interaccional

Respecto a las interacciones docente-discentes, se desarrolló una presentación adecuada, clara y organizada sobre los temas claves de la clase, logrando consensos con base en los argumentos planteados. Sin embargo, puede desarrollarse otra dinámica de clase que facilite de mejor manera la inclusión de los alumnos tanto en la clase como los diálogos entre alumnos. Del mismo modo, las situaciones problema y ejemplos deben apuntar a la autonomía de los estudiantes y, así, que éstos puedan plantear preguntas, explorar ejemplos y contraejemplos, conjeturar o explorar otras herramientas que le permitan hacer conexiones, resolver los problemas y comunicar sus soluciones, hallazgos o conjeturas.

e) Faceta mediacional

Es necesario utilizar recursos manipulativos e informáticos, tales como reglas, proyector y computador, que se adapten a las necesidades de los contenidos de clase, y así no perjudicar la comprensión en los estudiantes en términos de visualización y las propiedades de proporcionalidad de las gráficas implicadas en las situaciones implementadas (ver Figura 3.7).

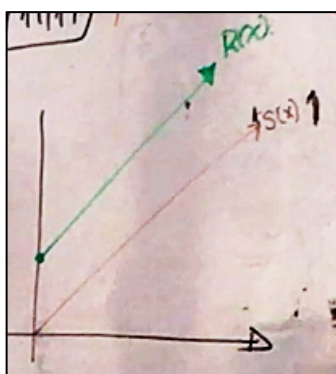


Figura 3.7. Gráficas construidas por docente A.

A pesar de que el curso es bastante numeroso, se hace necesario contemplar una distribución que permita llevar a cabo el proceso de instrucción pretendido en el diseño. En este aspecto, el horario (10:00 horas) fue beneficioso para el desarrollo de la clase.

Respecto al tiempo de enseñanza presencial, éste fue suficiente para el desarrollo de lo planificado, asignando tiempo suficiente a los contenidos clave y a aquellos que presentaron mayor dificultad de comprensión.

#### f) Faceta Ecológica

Los contenidos de la clase fueron debidamente adaptados al nivel curricular del curso y acorde a las directrices curriculares establecidas por el MINEDUC, contemplando situaciones contextualizadas que van en directo beneficio de la formación socio-profesional de los estudiantes y con una dinámica de clase que promueve valores democráticos.

Esta faceta puede ser mejorada con situaciones problema y actividades de ampliación que orienten a los estudiantes al desarrollo del pensamiento crítico, estableciendo conexiones intra e interdisciplinarias. De igual forma, se sugiere incorporar nuevas tecnologías e innovar con base en investigaciones que permitan a la docente desarrollar una práctica reflexiva, orientada a la mejora en el tiempo.

### **3.3.2. Implementación de clase de la docente B**

#### Descripción

La clase inicia con el saludo de la profesora, la explicación del objetivo de la clase y la socialización de las normas de convivencia. Posteriormente, el desarrollo de la clase comienza con el planteamiento de una situación-problema de venta de audífonos a través de una red social, presentando dos posibles casos: la compra desde Santiago y la compra desde regiones. A partir de ambos enunciados se determinan los costos para un, dos, tres y cuatro audífonos por medio del concepto de proporcionalidad, ordenando los valores obtenidos en una tabla de valores y luego se representa de manera verbal/escrita el procedimiento realizado para dichos cálculos, con el fin de generalizar esta situación y representarlo por medio de una expresión analítica. Finalmente, la docente construye la representación gráfica de ambas situaciones (de forma manual, sin un instrumento de medición adecuado), identificando las variables dependiente e independiente; posterior a esto, institucionaliza la noción de función como una

relación entre dos variables relacionadas a través de una expresión matemática, asemejando esta noción a la metáfora de una máquina, y denotando este objeto matemático como  $f(x)$  o función de  $x$ , tal como se muestra en la Figura 3.8.

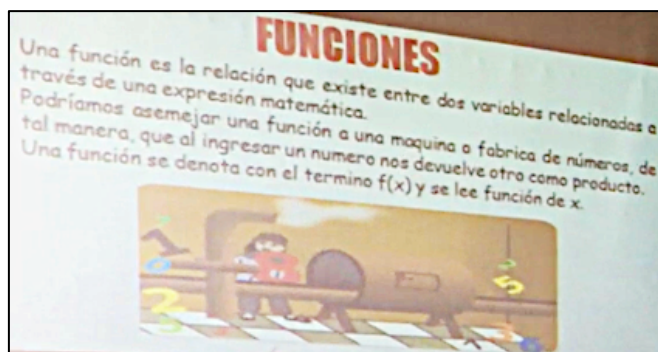


Figura 3.8. Formalización de la noción de función dada por docente B.

Durante la resolución de esta situación-problema se introduce la noción de función por medio de la noción de proporcionalidad. De este modo, el significado introducido es el de *función como relación entre magnitudes variables*, movilizandolos registros de representación verbal, tabular, gráfica y simbólica, y desarrollando conversiones entre éstos (Figura 3.9). Sin embargo, es la docente quien se encarga de generar las definiciones y proposiciones, en particular, la definición que entrega sobre la noción de función no es del todo clara ni correcta respecto al significado global de referencia de este objeto.

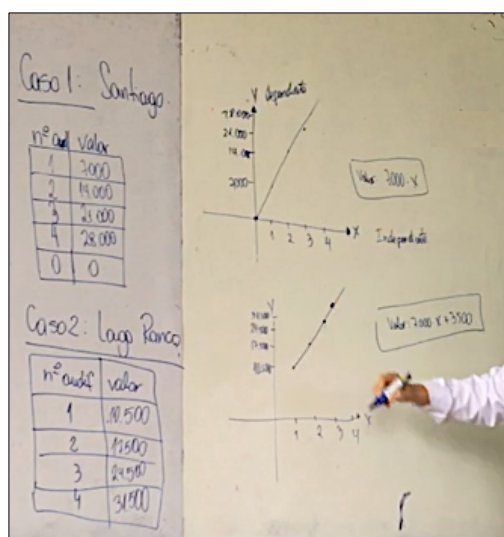


Figura 3.9. Registros de representación movilizados por docente B.

Posteriormente, la docente desarrolla en pizarra ejercicios donde se representa el objeto función mediante la metáfora de la máquina. En esta actividad la docente representa la función

mediante enunciados verbales sencillos y algunos valores *que ingresan a la máquina*, mientras que los estudiantes se encargan de entregar los valores *de salida*. Finalmente, se determina la expresión analítica que representa *la función de la máquina*.

A pesar de que la estrategia de la metáfora de la máquina utilizada por la docente no moviliza ninguno de los significados descritos en el capítulo uno, la docente lo utiliza para realizar la conversión entre los registros tabulares y simbólicos, tal como se muestra en la Figura 3.10. Adicionalmente, la docente no utiliza ninguna metáfora para comprender la función como representación gráfica de manera dinámica, es decir, utilizando un software gráfico o calculadora (Font y Acevedo, 2003). De este modo, es necesario considerar que las metáforas no son inocuas, sino que producen efectos significativos en la comprensión de los estudiantes, en particular del objeto función.

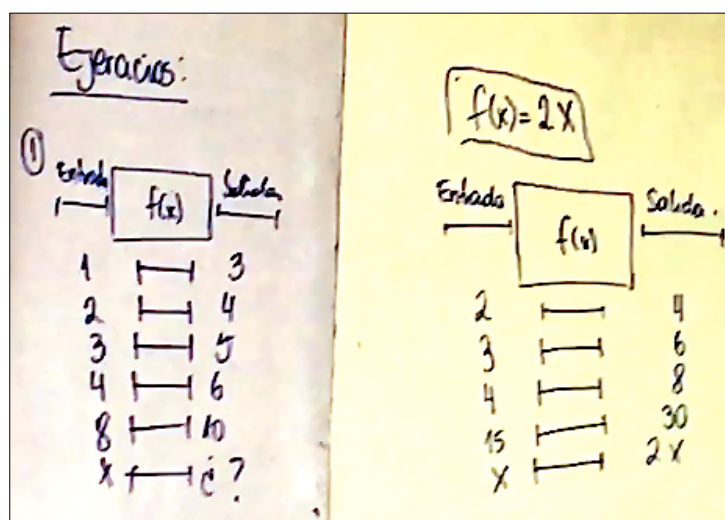


Figura 3.10. Uso de metáfora de la máquina.

Finalmente desarrolla una síntesis, ejemplificando con situaciones cotidianas que los alumnos analizan y deciden si corresponden a una función. Además, los estudiantes proponen otras situaciones cotidianas que involucran a este objeto matemático, permitiendo a la docente evaluar de manera formativa el grado de comprensión y de implicación de los estudiantes en el proceso de estudio.

Este proceso de instrucción se basa en el diálogo entre los estudiantes y la profesora, quienes responden a las interrogantes planteadas por la docente, mostrando su implicancia en la actividad, y posteriormente la docente se encarga de la institucionalización de la noción desarrollada. No se observan espacios de diálogo entre los estudiantes, por lo que no todos los estudiantes participan de las actividades de la clase, perjudicando la autonomía con que los

estudiantes pudieran asumir el proceso de estudio. No obstante, la actividad de síntesis al cierre de la clase favorece el planteamiento de preguntas y la exploración mediante ejemplos que involucren situaciones representables por medio de una función.

Finalmente, durante el proceso de estudio se utilizaron como recursos cuadernos, lápiz, proyector, computador, presentación en PowerPoint.

### Explicación

Para el desarrollo de la reflexión utilizaremos el siguiente episodio de la clase. La profesora y los estudiantes han representado los datos del problema inicial por medio de tablas de valores y sus respectivas gráficas:

**P:** *Todo lo que hemos estado viendo y estas situaciones que hemos estado trabajado, tienen completa relación con lo que vamos a comenzar a trabajar ahora, que son funciones. ¿Habían escuchado este término?*

**A:** *No*

**P:** *¿Lo habían visto anteriormente?*

**A:** *No*

**P:** *Ya. Dice: (Lee desde la presentación) Una función es la relación que existe entre dos variables relacionadas a través de una expresión matemática. ¿Ya? Podríamos asemejar una función a una máquina o fábrica de números, de tal manera que... Mateo, ya pues... podríamos asemejar entonces una función a una máquina o una fábrica de números, donde ingresamos un número y nos devuelve otro número como producto, eso es lo que realiza una función. Una función la denotamos con el término  $f(x)$  y se lee función de  $x$ . O sea, cuando yo hablo de funciones, yo eso lo denoto como  $f$ , entre paréntesis,  $x$ . Ya, anotemos esa definición, que es importante.*

**A3:** *Profe, ¿por qué no corre la cortina? Se ve mal.*

**A:** [copian la definición]

**P:** [corre la cortina]

**P:** *Entonces tengo que una función es una relación entre dos variables. ¿Estábamos relacionando estas dos variables acá? (apunta a la tabla de valores del problema inicial) ... el número de audífonos con el total a pagar... ¿lo estaba relacionando?*

**A1:** *Si...*

**A2:** *Si*

**P:** *¿Puedo decir que eso corresponde a una función?*

**A:** *Sí*

**P:** *¿Estoy relacionando dos variables con una fórmula matemática?*

**A:** *Sí*

**P:** *¿Puedo relacionar todo lo anteriormente hecho con las funciones?*

A: Sí

P: Entonces, cuando tengo una relación entre dos variables, se genera una dependencia, yo hablo de funciones. Y eso lo denoto como  $f(x)$  [apunta a la presentación]. O sea, esta misma relación que nosotros hicimos con el producto, ¿podríamos escribirla como una función?

A4: Sí

P: Las funciones siempre las denoto como  $f(x)$  y esa es la relación que existe entre las dos variables, o sea entre el valor del audifono y la cantidad a comprar. Entonces lo que nosotros acabamos de hacer es generar una función para la situación que trabajamos.

Este episodio se estudia por la importancia que posee el uso de un lenguaje y reglas claras y precisas, adaptadas al nivel curricular y que movilicen distintos significados y objetos que contribuyan a su comprensión, fortaleciendo -además- las interacciones durante el proceso de instrucción.

En concordancia con lo anterior, las Bases Curriculares señalan que las interacciones se convierten en un tema central para los estudiantes, dada su capacidad de escuchar y reaccionar frente a otras ideas, beneficiándose de los intercambios sociales. De este modo, las actividades en grupo orientadas al desafío escolar y la guía adecuada del profesor pueden promover el logro de aprendizajes significativos. En esta clase, la profesora identifica conflictos en términos de motivación, interacción y autonomía, sin embargo, no genera cambios en la metodología de trabajo o la distribución del curso para solucionarlos, ni tampoco incorpora material manipulativo o una guía de aprendizaje que favorezca a la motivación y la participación del grupo de estudiantes.

Además, al reconocer los objetos y procesos implicados en un proceso de estudio permite prever algunos conflictos que puedan suscitarse en la comprensión de la noción de función. En este caso, la ausencia de algunos significados limita la comprensión de la noción de función, por ende, perjudica el logro del objetivo de la clase.

### Valoración

Como parte del análisis, se identificaron los siguientes aspectos a mejorar, en función de cada criterio de idoneidad didáctica.

#### a) Faceta epistémica

Es necesario plantear situaciones-problema que pongan en juego los distintos significados parciales sobre la noción de función, con el fin de desarrollar una comprensión de esta noción

con una alta proximidad a su significado global de referencia. El uso del lenguaje no es representativo con respecto a los registros de representación en las actividades desarrolladas durante la instrucción, por tanto, es necesario que la docente incorpore a futuro situaciones problemas que pongan en juego distintos registros de representación, realizando conversiones y tratamiento entre estos registros.

Las definiciones y explicaciones deben ser claras y correctas, de lo contrario se deben precisar mediante situaciones problemas que promuevan en los estudiantes la negociación de las mismas.

#### b) Faceta cognitiva

Las evaluaciones formativas realizadas por la docente no permiten evidenciar el logro de aprendizaje a nivel grupo-curso, dando origen a una comprensión más bien procedimental que conceptual o argumentativa. Por otra parte, se menciona el concepto de proporcionalidad, utilizándolo en ejemplos, sin tener seguridad que los alumnos conozcan esta noción ni hacer preguntas acordes a ello.

Para mejorar esta faceta, se sugiere que la docente desarrolle otras actividades de refuerzo donde se activen los conocimientos previos de los estudiantes y difundir los resultados de las evaluaciones formativas realizadas.

#### c) Faceta afectiva

La tarea inicial propuesta genera interés en los estudiantes y muestra utilidad en la vida cotidiana, aunque en términos generales, es necesario proponer actividades que promuevan la participación de todos los estudiantes, resaltando además las cualidades de precisión de la matemática, mediante el uso de instrumentos manipulativos en las construcciones de representaciones gráficas.

#### d) Faceta interaccional

De acuerdo a los análisis se sugiere que, en un próximo diseño e implementación de clase sobre la noción de función, se consideren componentes de la faceta interaccional en relación al desarrollo la interacción entre docente y estudiantes, apuntando a que se desarrolle de manera fluida, dando tiempo suficiente a los estudiantes de razonar y argumentar ideas propias y reconociendo los conflictos que se suscitan durante este proceso. Es necesario dar cabida al

diálogo entre los estudiantes y procesos argumentativos entre éstos para determinar la validez de sus afirmaciones, de modo que, los estudiantes desarrollen el grado de autonomía suficiente para resolver las tareas propuestas sin la guía constante de la docente.

e) Faceta mediacional

Se propone el uso de calculadoras para los cálculos de proporcionalidad e instrumentos o software educativo para la construcción de gráficas. El uso de tecnologías en la clase podría beneficiar de manera positiva a los aprendizajes, particularmente en el uso de representaciones gráficas, evitando imprecisiones en la construcción a mano alzada que realiza.

A pesar de que la docente dedica tiempo suficiente a las actividades de refuerzo, el tiempo podría aprovecharse de mejor manera para el desarrollo de la noción de función con mayor rigor y profundidad. Otra posible mejora guarda relación con la distribución de los alumnos en el aula, aprovechando los espacios y potenciando las habilidades de sus estudiantes.

f) Faceta ecológica

Dado el carácter de nivelación curricular de esta instrucción, los contenidos desarrollados son pertinentes de acuerdo al currículo. El contexto de las situaciones problemas abordadas en primera instancia, permite a la docente enfatizar la relación entre el objeto función y distintas situaciones cotidianas. Se detecta en esta faceta, entonces, que es posible mejorar la apertura hacia innovación basada en el uso de tecnologías y la conexión con otros objetos, orientada al desarrollo del pensamiento crítico de los estudiantes.



# Conclusiones

En este último capítulo se presentan los resultados de esta investigación. Estos resultados, se obtienen en función de la pregunta de investigación y los objetivos específicos, planteados en el Capítulo 2, con el fin de entregar una respuesta o una aproximación a la pregunta de investigación mencionada.

De este modo, el primer apartado presenta las conclusiones respecto de los análisis realizados en el Capítulo 3. El segundo apartado contiene las conclusiones finales a partir de cada objetivo específico, mientras que en el tercero se desarrollan las conclusiones finales.

### 4.1. ANÁLISIS GENERALES

El capítulo 3 presenta la descripción y análisis de las prácticas matemáticas de dos docentes, A y B, a partir de los cuales este cuarto capítulo presenta las conclusiones finales. Para llevar a cabo esta tarea, se utiliza la noción de idoneidad didáctica, que ha sido introducida como una herramienta de apoyo para la valoración y la reflexión global sobre la práctica didáctico-matemática de las profesoras. El análisis didáctico realizado reveló que las prácticas didáctico-matemáticas de las docentes presentan similitudes en relación a algunas facetas, mostrando mayor dominio en las facetas epistémica, afectiva y mediacional, al contrario de las facetas ecológica, interaccional y cognitiva.

En términos generales, las docentes proponen situaciones problemas que involucran diversos contextos, ligados a la realidad de sus estudiantes, con la finalidad de que el contenido tome sentido y se promueva el logro y acceso por parte de ellos. De este modo, utilizan sus conocimientos sobre la noción de función de manera flexible en sus tareas de enseñanza. Sin embargo, estas tareas no son del todo representativas para el logro de los aprendizajes de la clase. Del mismo modo, no se logra estimular a los estudiantes en torno a la reflexión de sus razonamientos ni que la mayoría de los estudiantes pueda dar explicaciones por medio de la

argumentación, lo cual no permite el desarrollo de la confianza necesaria en los estudiantes para enfrentar con perseverancia la resolución de problemas que puedan resultarles difíciles.

Un aspecto débil a destacar son las pocas oportunidades que poseen las docentes de incrementar y actualizar sus conocimientos didáctico-matemáticos. Esto, debido a aspectos laborales y geográficos, principalmente. En ese sentido, la elaboración de este trabajo da cuenta de la utilidad de la noción de idoneidad didáctica, en términos de análisis didáctico, ya que permite realizar una síntesis global de las prácticas didáctico-matemáticas desarrolladas por las docentes, y al mismo tiempo, desarrollar un análisis detallado sobre cada faceta, orientando de manera natural dichos análisis a la reflexión sobre la práctica, propia o de terceros y, en consecuencia, a la mejora de dichas prácticas, dado que permite ampliar la forma en que se concibe la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

## 4.2. SOBRE LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para evaluar la consecución de los objetivos específicos, se detalla a continuación los análisis respecto a cada uno de ellos.

### 4.2.1 Sobre el objetivo específico 1 OE-1

Este primer objetivo específico consiste en:

*Caracterizar los conocimientos didáctico-matemáticos de referencia que debería tener un profesor para gestionar adecuadamente los aprendizajes sobre la noción de función.*

A partir de la sección 2.2, podemos caracterizar los conocimientos de referencia con que los profesores deberían contar para el desarrollo de una gestión adecuada de los aprendizajes sobre la noción de función, en torno a las dimensiones matemática, didáctica y meta didáctico-matemática.

En ese sentido, el conocimiento matemático, hace referencia a los conocimientos que debe tener un profesor sobre la noción de función, es decir, el conocimiento común y ampliado del objeto función, necesario para resolver ejercicios, problemas y retos que pudiese plantear a sus estudiantes, movilizandolos distintos significados y representaciones del objeto función y

vinculando el objeto función con otras nociones (conexiones intradisciplinarias o interdisciplinarias).

Adicionalmente, en la sección 1.2 se presentó, desde una perspectiva histórico-epistemológica, los seis significados parciales de la noción de función. Éstos son la función como correspondencia, la función como relación entre magnitudes variables, la función como representación gráfica, la función como expresión analítica, la función como correspondencia arbitraria y la función a partir de la teoría de Conjuntos (Urrea, 2015). Font y Godino (2006) señalan que estos significados permiten la emergencia del significado global de una noción, movilizandando las distintas representaciones del objeto función, a señalar, verbal, tabular, analítico, gráfico e icónico. La importancia del uso de estas representaciones radica en que, en la medida que el estudiante logre realizar vínculos entre éstos, se logrará la construcción de su significado (Janvier, 1987; Duval, 2002).

Los conocimientos didácticos del profesor sobre la noción de función están ligados al conocimiento pedagógico de la noción, involucrados en el diseño e implementación de clases, es decir, los ligados a las facetas de la dimensión didáctica del CCDM: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, desarrollados en la sección 2 del capítulo 2.

Respecto a la faceta epistémica, los conocimientos del profesor sobre la noción de función, guardan relación con sus significados institucionales, a señalar, la movilización del conocimiento en la resolución de tareas, la vinculación del objeto función con otros objetos matemáticos y el uso de sus distintos significados parciales para la emergencia del significado global de la noción. La faceta cognitiva involucra los conocimientos que tiene el profesor sobre qué saben sus estudiantes acerca de la noción de función y cómo éstos aprenden y progresan en sus aprendizajes, teniendo en cuenta el desarrollo de trabajos grupales o individuales, actividades de ampliación o refuerzo, evaluaciones que den cuenta de los aprendizajes logrados, los posibles errores y dificultades que se suscitan durante este proceso, mencionados en el apartado 1.4, referidos a la identificación de una función, al dominio de los distintos registros de representación, así como el tratamiento y la conversión entre éstos, y la utilidad de esta noción. Desde la faceta afectiva se abordan los conocimientos de los estudiantes respecto a sus intereses, necesidades, valores, participación en el proceso de estudio, el desarrollo del autoestima, creencias y conocimientos previos sobre la noción de función. Por otra parte, la faceta interaccional da cuenta de los conocimientos que los profesores tienen sobre la presentación de la noción de función, la identificación y resolución de conflictos y el uso de

recursos para involucrar e incluir a los estudiantes en la dinámica de la clase, favoreciendo así, el diálogo entre estudiantes, evitando la exclusión y desarrollando la autonomía en el proceso de estudio. Otra de las facetas, es la mediacional, que muestra cómo los docentes son capaces de utilizar recursos, tiempos y espacios disponibles, acorde a las condiciones del aula y los estudiantes. Finalmente, la faceta ecológica hace referencia al conocimiento de los docentes sobre aspectos institucionales en torno a la noción de función, es decir, los significados pretendidos por el currículum, las directrices curriculares, la innovación didáctica orientada hacia investigación y reflexión, la contribución del proceso de estudio en términos sociales, profesionales y culturales de los estudiantes.

De esta última faceta, el currículum propuesto por MINEDUC se centra en algunos significados parciales para la enseñanza de la noción de función. En particular, para octavo básico se presenta el significado de función como una relación entre variables y como expresión analítica. Luego, en primer año de enseñanza media, se amplían los tipos de significados propuestos, presentando en mayor medida la función como correspondencia, como relación entre variables y como expresión analítica; si bien los significados de función como representación gráfica y a partir de la teoría de conjuntos son propuestos, aparecen en menor medida. A partir de esto, es necesario señalar que los profesores de matemática de octavo básico gestionan un proceso de estudio para la enseñanza de la noción de función con un bajo grado de representatividad de significados y representaciones, por lo tanto, los alumnos adquieren conocimientos limitados acerca de dicha noción y, de este modo, que no ocurra la emergencia del significado del objeto función.

Finalmente, la dimensión meta didáctico-matemática, tal como se menciona en la sección 2.2, guarda relación con los procesos reflexivos que realiza el profesor sobre sus propias prácticas. El CCDM propone en esta dimensión, que el profesor sea capaz de identificar y analizar aspectos normativos y de valorar su práctica de acuerdo a los criterios de idoneidad; esto, con la finalidad de encontrar mejoras en la gestión de aprendizajes para nuevos procesos de estudio.

#### **4.2.2 Sobre el objetivo específico 2 OE-2**

Este objetivo específico propone:

*Analizar el conocimiento didáctico-matemático puesto en juego por dos profesores de enseñanza media al diseñar clases sobre funciones.*

En el capítulo 3 se presentan los análisis de los diseños de clases de ambas profesoras, los cuales, en contraste con los conocimientos didáctico-matemáticos de referencia concluidos en el apartado anterior, permiten analizar el conocimiento didáctico-matemático puesto en juego por ambas docentes durante la fase de diseño. Dichos análisis se presentan a continuación en función de las distintas facetas de la dimensión didáctica, debido a que esta dimensión involucra los conocimientos pedagógicos necesarios para la gestión de aprendizajes, particularmente sobre el diseño de clases.

En el caso de la docente A, muestran en su faceta epistémica la movilización de los cinco registros de representación de una función, sin embargo, no lo hace a través de todos sus significados.

Por otra parte, en los análisis realizados al diseño de clase de la docente A, la faceta epistémica se destaca por proponer distintas situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación, por promover situaciones donde los alumnos deban argumentar y presentando procedimientos adecuados al nivel educativo de ellos. Sin embargo, el diseño no da cuenta de la representatividad que estas situaciones respecto a las diversas representaciones y significados sobre la noción de función, tampoco se observan relaciones con otros objetos matemáticos. Respecto a la faceta cognitiva, el diseño de la docente manifiesta la intención de abordar los conocimientos previos de los estudiantes, de formar grupos de trabajo, de realizar actividades de refuerzo que permitan el logro de sus estudiantes y de realizar una evaluación formativa para verificar los aprendizajes logrados y difundir sus resultados con los estudiantes. Sin embargo, no se observan elementos que den cuenta sobre el conocimiento sobre cómo aprenden o progresan en sus aprendizajes, así como de los posibles errores y dificultades que pudieran suscitarse. Al considerar los componentes afectivos, se observa en la propuesta los conocimientos de la docente sobre los intereses, necesidades, valores y participación de los estudiantes, por medio de estrategias y recursos buscan desarrollar la autoestima, las creencias, entre otros aspectos. El único aspecto no observado de esta faceta guarda relación con la ausencia de instrumentos de medición que permitan construir las gráficas señaladas en forma manual, dado que su ausencia no permite visualizar aspectos de precisión y estéticos ligados a la noción de función. Con respecto a la faceta interaccional, a pesar de que el diseño contempla la presentación de la noción de función sin mayores descripciones, no es posible definir si es adecuada en torno a su contenido más que a su organización, además la dinámica propuesta promueve la inclusión de los estudiantes y la búsqueda de consensos, el trabajo en equipo

favorece la comunicación entre los alumnos, la argumentación y la inclusión entre sus integrantes.; no se observan elementos sobre el desarrollo de la autonomía. Respecto a las componentes de la faceta mediacional, el diseño no considera el uso de recursos manipulativos ni calculadoras, salvo ordenador para construir gráficas por medio de software, para la construcción de gráficas en forma manual no se da cuenta del uso de instrumentos de medición apropiados, imposibilitando la visualización a partir de modelos concretos. El tiempo en el diseño, se limita a organizar los momentos de la clase, por lo tanto, no es posible aseverar que el tiempo planificado fue suficiente para la enseñanza pretendida; respecto a las condiciones de aula y el número de alumnos, se propone el trabajo en equipo, facilitando el desarrollo del proceso de estudio. Finalmente, en cuanto a la faceta ecológica, se aborda el proceso de estudio a partir de las directrices curriculares, los significados pretendidos por el currículo nacional en menor medida; la enseñanza pretendida está orientada a contribuir en términos sociales y valóricos, sin embargo, no se observa el desarrollo del pensamiento crítico ni conexiones interdisciplinarias.

Respecto al diseño de la docente B, en los componentes de la faceta epistémica se evidencian diversas situaciones de contextualización, problematización y ejercitación, donde se ponen en juego la argumentación de los estudiantes y las diversas representaciones de la noción de función, sin embargo, solo se movilizan algunos significados parciales de la misma; tampoco se observan conexiones con otros objetos matemáticos. El análisis muestra en la faceta cognitiva que la docente considera los conocimientos previos de sus estudiantes; la dinámica de esta clase considera aparentemente actividades de carácter individual, ya que no se explicita la modalidad de trabajo grupal, y evaluaciones formativas durante la clase; no se considera en el diseño los posibles errores y dificultades que pudieran presentar los estudiantes, la difusión de los resultados de las evaluaciones que se realizan durante la clase ni actividades de ampliación. En cuanto a la faceta afectiva, se considera una de las más desarrolladas, donde la planificación de clase manifiesta de manera explícita que promueve la participación de los estudiantes del proceso en cuestión, por medio del conocimiento de sus necesidades, intereses, valores y creencias, favoreciendo el desarrollo de la autoestima; el único aspecto no desarrollado es el uso de instrumentos de medición para la construcción de gráficas, dado que no se pretende utilizar software para ello, imposibilitando que los estudiantes visualicen la precisión y estética propia de la matemática. Las interacciones más desarrolladas hacen referencia a una dinámica de clase que promueve la inclusión, el diálogo entre estudiantes y la argumentación, no así respecto al desarrollo de la autonomía. Del mismo modo, no se

profundiza en el diseño respecto a la presentación de la noción. Los medios puestos en juego se describen de manera superficial, ya que no se detalla con qué finalidad serán utilizados ni en qué momento de la clase; el tiempo se organiza de acuerdo a los momentos de la clase, designando mayor tiempo al desarrollo de la clase, durante la contextualización y formalización de la noción, que considera suficiente para la enseñanza pretendida. Finalmente, la faceta ecológica se desarrolla en términos de las directrices curriculares, el uso de TICs y la contribución de la noción de función en ámbito social y cultural; no se evidencia la intención de profundizar en términos reflexivos.

En términos generales, los diseños de las docentes se desarrollan en mayor profundidad en las componentes correspondientes a las facetas afectiva, mediacional y ecológica, esto implica que las docentes tienen el conocimiento necesario de sus estudiantes para promover la participación durante el proceso de estudio, considerando en éste las condiciones de aula, los tiempos y recursos que deben utilizar para lograr los aprendizajes propuestos por el currículo chileno, contribuyendo la enseñanza pretendida a la formación de sus estudiantes en término socioculturales. Las facetas menos desarrolladas, dan cuenta de conocimientos que no fueron considerados durante la preparación de sus respectivos diseños de clase, tales como definiciones, procedimientos, conexiones con otros objetos matemáticos, actividades de ampliación, errores y dificultades que pudieran suscitarse durante la implementación de la clase, conocimientos sobre cómo aprenden y progresan los estudiantes en sus aprendizajes y la movilización de los distintos significados de la noción de función en las distintas situaciones propuestas. Estos aspectos influyen en gran medida en la emergencia del significado global de función y, por consecuencia, en la calidad de las interacciones entre docentes y discentes y el logro de aprendizaje de estos últimos.

#### **4.2.3 Sobre el objetivo específico 3 OE-3**

El tercer objetivo específico consiste en:

*Analizar el conocimiento didáctico-matemático puesto en juego por dos profesores de enseñanza media cuando implementan clases sobre la noción de función.*

De manera similar al apartado anterior, los análisis a las implementaciones de clase son presentadas de acuerdo a las distintas facetas de la dimensión didáctica. Lo anterior, a partir del contraste realizado entre los conocimientos didáctico-matemáticos de referencia,

caracterizados en el primer apartado de esta sección, y los análisis de las implementaciones de clases de ambas profesoras, desarrollados en el capítulo 3.

Los análisis realizados a la implementación de clase realizada por la docente A muestran en su faceta epistémica que la docente logra poner en juego sus conocimientos en la resolución de tareas, movilizándolo a su vez las distintas representaciones de una función, sin embargo, no se utiliza una muestra representativa de situaciones que movilicen los significados parciales de dicha noción; tampoco se establecen vínculos con otros objetos matemáticos. La faceta cognitiva destaca por el dominio sobre los conocimientos previos de los estudiantes, actividades de refuerzo y el desarrollo de evaluaciones que permiten a los estudiantes tomar decisiones, pero no poseen distintos niveles de evaluación; del mismo modo, no se observaron actividades de ampliación y la docente no logró prever algunos conflictos, logrando dar resolución a algunos de ellos. Los componentes afectivos son bastante desarrollados en términos de intereses, necesidades, actitudes y emociones, el único aspecto no desarrollado guarda relación con resaltar las cualidades de precisión y estética de la matemática. Los análisis relacionados con la faceta interaccional evidencian deficiencias respecto a la resolución de conflictos, el diálogo entre estudiantes y el desarrollo de la autonomía, a pesar de que la noción fue presentada de manera bastante contextualizada y organizada, pudiendo llegar a consensos e incluyendo a los alumnos en la dinámica de la clase. Respecto a la faceta mediacional, el horario de la clase, el tiempo de enseñanza y el espacio utilizado fueron adecuados para la realización de la instrucción, salvo por la distribución de los grupos de trabajo; no se observó un uso adecuado de los recursos tecnológicos y manipulativos que pudieron mejorar la comprensión de los estudiantes. En último lugar, los componentes de la faceta ecológica más desarrollados corresponden al alineamiento con las directrices curriculares y su contribución a la formación de los estudiantes en términos democráticos y socioculturales; aquellas menos logradas guardan relación con la implementación de actividades de ampliación, orientadas a las conexiones con otros objetos matemáticos y al desarrollo del pensamiento crítico; tampoco se observó durante la implementación de clase aspectos referentes a la innovación didáctica.

Con respecto a la docente B, los análisis muestran que, en relación a la faceta epistémica, movilizó solo dos significados parciales de función y el uso de la metáfora de la función como una máquina, poniendo en juego a su vez las distintas representaciones de la noción, sin observar el vínculo con otros objetos matemáticos. En cuanto a la faceta cognitiva, se observaron momentos de la clase donde se trabaja con base a los conocimientos previos, a los



argumentos de los alumnos y a las definiciones puestas en juego, promoviendo el logro de los estudiantes por medio de actividades de refuerzo. No se observó que la modalidad de trabajo individual haya contribuido al aprendizaje y progreso de los estudiantes, lo que permite inferir que la docente no previó las posibles dificultades manifestadas en los estudiantes, según sus características personales y las evaluaciones que se utilizaron con la finalidad de verificar la comprensión de los estudiantes por parte de la profesora. Las componentes de la faceta afectiva evidencian la intención de la profesora por favorecer el desarrollo del autoestima, creencias y conocimientos previos, presentando situaciones problemas acorde a los intereses de los estudiantes, sin embargo, el grupo-curso no se involucró completamente en la dinámica de la clase ni se promovió de manera eficiente el desarrollo de la autonomía, necesaria para la resolución de tareas; además, no se resaltaron las cualidades de precisión y estética en las gráficas construidas de forma manual en pizarra, a mano alzada. En relación a la faceta interaccional, las componentes más desarrolladas guardan relación con la interacción docente – discentes, donde se desarrolla una presentación adecuada de la noción, que promueve la participación de los estudiantes y la argumentación, en situaciones de contextualización y ejercitación, y logrando, además, reconocer y resolver en cierta medida los conflictos suscitados durante el proceso de estudio; no obstante, la distribución del grupo no favorece el diálogo entre estudiantes ni la inclusión en la dinámica de la clase, perjudicando a su vez, el desarrollo de autonomía. En cuanto a los medios, se muestra un dominio insuficiente de los recursos materiales, tanto tecnológicos como manipulativos, influyendo de manera negativa en la contextualización a través de la visualización; respecto a las condiciones del aula y los estudiantes, el horario, el número de estudiantes y el aula son apropiados para el desarrollo de la enseñanza, no así la distribución de los alumnos; el tiempo fue suficiente para el desarrollo de la clase, dedicando tiempo a los temas claves y a los contenidos que presentaron mayores dificultades de comprensión. En último lugar, la faceta ecológica, evidencia la alineación con las directrices curriculares y la contribución de este proceso de estudio a la formación sociocultural de los estudiantes, sin embargo, no se observan acciones que apunten al desarrollo del pensamiento crítico o la innovación pedagógica.

En general, las implementaciones de clase de las docentes sobre la noción de función se desarrollan en mayor profundidad en las componentes propias de la faceta afectiva, dado su énfasis en la nivelación de conceptos elementales para el desarrollo posterior de la unidad, centrándose en actividades de interés para los estudiantes, la validez de sus creencias y conocimientos previos y el desarrollo de la autoestima. Sin embargo, la faceta menos

desarrollada por ambas docentes es la cognitiva, donde las observaciones mostraron la nivelación de contenidos y el tiempo dedicado a actividades de refuerzo; sin embargo, no se observó el conocimiento sobre el progreso de los estudiantes en sus aprendizajes, la falta de actividades de ampliación. En el caso del uso de evaluaciones formativas, se desarrollaron de manera constante a lo largo de la clase, pero fueron de uso exclusivo de la docente, no permitiendo a los estudiantes involucrarse en su proceso educativo de manera activa ni tomar decisiones a partir de estas evaluaciones. En este sentido, ambas docentes ponen en juego conocimientos sobre sus alumnos en cuanto a aspectos motivacionales y valóricos, pero no abordan de manera significativa cómo éstos aprenden y progresan en sus aprendizajes. Este conocimiento parcelado sobre sus estudiantes guarda directa relación con los resultados de la evaluación docente, específicamente sobre los conocimientos de los docentes que facilitan el aprendizaje de sus estudiantes de la dimensión interacción pedagógica y el desafío propuesto por el MINEDUC para incentivar procesos de reflexión pedagógica, desarrollados en la sección 1.1, que apunten a la mejora de las prácticas pedagógicas de los docentes; problemática que se mantiene de manera transversal en el profesorado chileno.

Las facetas con desarrollo intermedio, dan cuenta de conocimientos que no fueron considerados en detalle durante la preparación de sus respectivos diseños de clase, tales como definiciones, procedimientos, conexiones con otros objetos matemáticos, actividades de ampliación, una anticipación de los errores y dificultades que pudieran suscitarse durante la implementación de la clase, conocimientos sobre cómo aprenden y progresan los estudiantes en sus aprendizajes y la movilización de los distintos significados de la noción de función en las distintas situaciones propuestas. Estos aspectos influyen, en gran medida, en la calidad de las interacciones entre docentes y discentes y, por consecuencia, en la emergencia del significado global de función en la calidad de las interacciones entre docentes y discentes y el logro de aprendizaje de estos últimos.

#### **4.2.4 Sobre el objetivo específico 4 OE-4**

El cuarto objetivo específico consiste en:

*Identificar posibles mejoras en las prácticas de los profesores a partir de la caracterización y reflexión sobre sus prácticas.*

El capítulo 3 consta de los análisis de los diseños e implementaciones de clases de ambas profesoras en términos de narrativas, respecto a descripción, explicación y valoración,

utilizando las facetas y componentes de los criterios de idoneidad como herramienta de análisis. Para dar cumplimiento a este objetivo, es necesario establecer una proximidad entre las valoraciones hechas a los diseños e implementaciones de cada docente, identificando las posibles mejoras de sus prácticas en la enseñanza sobre la noción de función.

De este modo, se presentan las posibles mejoras en función de los criterios de idoneidad.

En el caso de la docente A, las mejoras sugeridas en relación con cada faceta son:

a) Faceta epistémica

Explicitar y utilizar situaciones problemas que movilicen los distintos significados y representaciones sobre la noción de función, articulando de manera efectiva estos significados y estableciendo relaciones entre los objetos que intervienen en las prácticas. Otro aspecto a señalar es el desarrollo de actividades que promuevan situaciones de argumentación entre los estudiantes.

b) Faceta cognitiva

Las posibles mejoras respecto a esta faceta hacen referencia a la anticipación de la profesora a posibles conflictos, errores y dificultades, en concordancia con proponer actividades variadas que promuevan el logro y acceso de los estudiantes, la implementación de distintos modos de evaluación que permitan establecer el grado de comprensión de los estudiantes y la difusión de dichos resultados al final de la clase.

c) Faceta afectiva

En función de la comprensión de los estudiantes, es necesario resaltar las cualidades de estética y precisión de la matemática a través de la visualización, por medio del uso de recursos manipulativos o software.

d) Faceta interaccional

Las posibles mejoras en esta faceta guardan relación con diversas componentes que no están desarrolladas en ambas fases del diseño didáctico o que no fueron implementadas, tales como potenciar la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase, facilitar el diálogo entre alumnos y promover situaciones donde los estudiantes puedan establecer conjeturas y conexiones, comunicar sus soluciones o hallazgos, de manera autónoma.

e) Faceta mediacional

Las componentes de esta faceta que pueden ser mejoradas hacen referencia al uso adecuado de recursos manipulativos e informáticos, en función de potenciar el logro de los aprendizajes de los estudiantes. Del mismo modo, es necesario señalar y describir los recursos y el momento en que se utilizarán durante la clase. En cuanto al número de alumnos por sala, que en este caso es desfavorable, se identifica una propuesta de distribución tal que favorezca el clima de aprendizaje al interior y el logro de aprendizajes por parte de los estudiantes, pero que no fue eficiente al momento de implementar la clase, por lo que se hace necesario la búsqueda de otras distribuciones o estrategias.

f) Faceta ecológica

Esta faceta presenta posibles mejoras en torno al uso de situaciones que permitan el desarrollo del pensamiento crítico, estableciendo conexiones intra o interdisciplinarias e incorporando espacios reflexivos y la lectura de investigaciones que le permitan innovar en sus prácticas.

Para la docente B, las posibles mejoras identificadas tras el análisis fueron:

a) Faceta epistémica

Utilizar situaciones problema que movilicen de manera representativa los distintos significados parciales y registros de representación del objeto función, estableciendo conexiones con otros objetos matemáticos o nociones de otras disciplinas.

b) Faceta cognitiva

Monitorear de manera más efectiva el progreso de los estudiantes, para verificar cómo éstos aprenden y progresan durante el proceso de estudio, implementando evaluaciones formativas a distintos niveles, cuyos resultados sean difundidos al grupo-curso y usados para tomar decisiones a posteriori. Finalmente, se sugiere reforzar actividades tanto de refuerzo como de ampliación para potenciar las diferencias individuales.

c) Faceta afectiva

Utilizar situaciones de aprendizaje que promuevan el desarrollo actitudes como la participación, responsabilidad y perseverancia, favoreciendo la argumentación en condiciones de igualdad para todos los estudiantes, y resaltando las cualidades de estética y precisión de la

matemática, por medio del uso de distintos recursos, artefactos y materiales, ya sean manipulativos y tecnológicos.

d) Faceta interaccional

Reforzar las interacciones docente-alumno con respecto a la identificación y resolución de conflictos, por medio de preguntas y respuestas adecuadas a dichos conflictos, o la reflexión sobre estos episodios de clase, buscando la sistematización de este proceso por medio de la reflexión constante en el tiempo. Finalmente, facilitar la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase, captando su atención por medio de recursos retóricos y argumentativos. Respecto a la interacción entre alumnos, promover el diálogo entre ellos, evitando la exclusión y favoreciendo la inclusión en la dinámica de la clase. En relación a la autonomía de los estudiantes, es necesario trabajar la responsabilidad del estudio, proponiendo tareas que les permitan plantear preguntas y soluciones, explorando ejemplos y contraejemplos que los faculten para establecer conjeturas, entre otras.

e) Faceta mediacional

Respecto a los materiales, utilizar recursos manipulativos que permitan introducir situaciones, lenguajes, procedimientos y modelos concretos, acorde a la enseñanza pretendida. En relación con las condiciones de aula, se sugiere trabajar en la distribución de los estudiantes, favoreciendo su inclusión en la dinámica de la clase y la realización de tutorías que permitan, a su vez, el logro y acceso de todos los estudiantes.

f) Faceta ecológica

Integrar las tecnologías a la dinámica de la clase como herramientas utilizadas en función de los aprendizajes, a disposición de los estudiantes, permitiéndoles explorar, desarrollar el pensamiento y establecer conexiones con otros contenidos.

En términos generales, se observan algunas inconsistencias entre los diseños y las implementaciones de clases de ambas docentes. Las posibles mejoras de las docentes A y B guardan relación con una serie de aspectos que fueron observados en el diseño de clase y que no fueron contemplados en la implementación, o bien, fueron desarrollados de manera parcial.

### 4.3. CONCLUSIONES FINALES

Esta investigación, se desarrolló en función de cuatro objetivos específicos, para dar cuenta de las prácticas didáctico-matemáticas que desarrollan dos docentes cuando diseñan e implementan clases sobre la noción de función.

En cuanto al objetivo específico 1, *OE-1, caracterizar los conocimientos didáctico-matemáticos de referencia que debería tener un profesor para gestionar adecuadamente los aprendizajes sobre la noción de función*, se indagó respecto a las prácticas de reflexión docente sobre la propia práctica, su importancia en las prácticas didáctico-matemáticas y el contexto chileno en función de los espacios de reflexión. Posteriormente, se estudió a diversos autores sobre los significados de la noción de función, las representaciones de la noción de función para su enseñanza, los errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la noción de función y los significados pretendidos por el currículo para la enseñanza de la noción de función.

Lo anterior permitió identificar los conocimientos de referencia descritos en el apartado 4.2.1 en función de las dimensiones matemática, didáctica y meta didáctico-matemática del CCDM. Respecto a la dimensión matemática, se identificaron todos aquellos conocimientos ligados al conocimiento común y ampliado sobre la noción de función, la movilización de los distintos significados y representaciones del objeto función y sus conexiones intra e interdisciplinarias. En la dimensión didáctica, se identificaron los conocimientos relacionados al conocimiento pedagógico de la noción de función que se movilizan durante las fases del diseño didáctico, en función de las facetas de esta dimensión, epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, descritos anteriormente. Por otra parte, la dimensión meta didáctico-matemática aborda los procesos reflexivos desarrollados en la rutina profesional de los docentes, para lo cual el CCDM propone el uso de los criterios de idoneidad para valorar las prácticas didáctico-matemáticas y encontrar posibles mejoras a los procesos de estudio desarrollados.

Sobre el objetivo específico 2, *OE-2, analizar el conocimiento didáctico-matemático puesto en juego por dos profesores de enseñanza media al diseñar clases sobre funciones*, se observaron y estudiaron los diseños didácticos propuestos por las profesoras con la finalidad de identificar los conocimientos puestos en juego, en función de las componentes de las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.

En este proceso se encontró que las docentes desarrollaron con mayor profundidad las facetas afectiva, mediacional y ecológica, mostrando que sus diseños de clase contemplan conocimientos sobre cómo promover la participación de los estudiantes y sus intereses, la distribución de los alumnos en aula y los tiempos que deben destinar a los distintos momentos de la clase y tareas propuestas, y la contribución a la formación sociocultural de sus estudiantes por medio de la enseñanza pretendida.

Las facetas menos desarrolladas fueron interaccional, epistémica y cognitiva, debido a la ausencia en los diseños de clase de conocimientos relacionados a las definiciones y procedimientos a utilizar, movilización de los significados parciales del objeto función, conexiones, actividades de ampliación, la anticipación a posibles conflictos, errores y dificultades, que dan cuenta del conocimiento del profesor sobre cómo aprenden y progresan sus estudiantes en sus aprendizajes.

En términos generales, de las fortalezas y debilidades descritas en los diseños de clase, es posible observar que muchos aspectos no fueron considerados al momento de planificar. Sin embargo, estas mismas fortalezas y debilidades se contrastan de manera consistente. Por una parte, las fortalezas muestran el conocimiento de las profesoras sobre el currículo y de las estrategias, recursos y tareas que pueden plantear a los estudiantes para despertar interés en ellos y promover la inclusión en la dinámica de la clase; mientras que, las debilidades podrían apuntar a la omisión en el diseño y/o al desconocimiento de las docentes sobre sus estudiantes en términos de aprendizaje, pudiendo limitar de alguna forma los progresos que éstos pudiesen mostrar durante el proceso de estudio.

Con respecto al objetivo específico 3, *OE-3, analizar el conocimiento didáctico-matemático puesto en juego por dos profesores de enseñanza media cuando implementan clases sobre la noción de función*, se recolectó información a través de videgrabaciones y observaciones de las sesiones de implementación de las clases diseñadas por los profesores. Estos antecedentes fueron analizados por medio de las facetas de la dimensión didáctica del CCDM que, en contraste con los conocimientos de referencia, muestran que la faceta más desarrollada corresponde a la afectiva y que la menos desarrollada es la faceta cognitiva, es decir, las docentes destacan por poner en juego sus conocimientos sobre los estudiantes en términos valóricos y actitudinales, no así respecto a la forma en que éstos aprenden y progresan en sus aprendizajes, afectando las interacciones entre docentes y estudiantes durante la implementación de las clases, la emergencia del significado global de función y el logro de

aprendizajes. Lo anterior, se presenta en sintonía con lo visto en los análisis sobre los diseños de clase, permitiendo descartar la posibilidad de la omisión en el diseño y, considerando con mayor certeza, que existe un conocimiento que no se ha alcanzado sobre sus estudiantes, aspecto que es necesario mencionar al momento de realizar un proceso de reflexión sobre este diseño didáctico.

Finalmente, en relación al objetivo específico 4, *OE-4, identificar posibles mejoras en las prácticas de los profesores a partir de la caracterización y reflexión sobre sus prácticas*, se analizaron y valoraron las prácticas didáctico-matemáticas de las docentes a partir de los criterios de idoneidad, utilizados como herramienta de análisis didáctico para encontrar mejoras a los diseños e implementaciones de clase.

En ese sentido, las posibles mejoras identificadas se presentaron de acuerdo a los criterios de idoneidad. Con respecto a la idoneidad epistémica, se identifica principalmente la necesidad de movilizar los distintos significados y sus representaciones, así como también establecer conexiones entre el objeto función y otros objetos matemáticos o de otras disciplinas. Para la idoneidad cognitiva, se sugiere implementar y difundir los resultados de las evaluaciones durante la clase y anticipar durante la fase de diseño los posibles conflictos que pudiesen surgir durante la implementación de sus clases. En relación con la idoneidad afectiva, destaca principalmente el uso adecuado de los recursos manipulativos y software, potenciando la visualización y las cualidades de estética y precisión. En la idoneidad interaccional, se sugiere a las docentes mejoras referidas a proponer situaciones que promuevan el diálogo entre alumnos y faciliten la inclusión de los estudiantes en la dinámica de la clase, donde puedan establecer conjeturas y comunicarlas, desenvolviéndose de manera autónoma. Esta faceta presentó algunos matices respecto a los análisis a ambas docentes, de donde se deduce que la experiencia como docente favoreció la resolución de conflictos durante la implementación de la clase. Con respecto a la idoneidad mediacional, se sugiere mejorar la distribución de los estudiantes en la sala y la descripción del uso de recursos manipulativos y tecnológicos en el diseño de clase y, del mismo modo, utilizarlos de manera eficiente, para el logro de todos los estudiantes. Es necesario destacar que el uso de recursos se limitó a las docentes, por lo que los estudiantes no pudieron manipular estos recursos; respecto a la distribución de los alumnos en sala, la docente A utilizó una distribución de los estudiantes por grupos, mientras que la docente B mantuvo la distribución que los alumnos acostumbran a utilizar, mirando frente a la pizarra. Finalmente, para la idoneidad ecológica se propone que las docentes promuevan el desarrollo



del pensamiento crítico y estableciendo conexiones intra o interdisciplinarias, las que podrían mejorar con la implementación de un espacio de reflexión o la revisión de lecturas que les permitan innovar en sus prácticas. Sin embargo, la realidad de las docentes carece de espacios temporales significativos para que las docentes puedan incorporar la reflexión a su rutina profesional, dificultando el desarrollo profesional respecto a esta última faceta.

En términos generales, esta investigación, que da cuenta de las prácticas didáctico-matemáticas de dos docentes, muestra diversas fortalezas y debilidades. Respecto a la dimensión matemática, ambas profesoras evidencian desenvolverse de manera regular a través del conocimiento común en relación a la noción de función, sin embargo, es necesario profundizar sus conocimientos sobre dicha noción a través de lecturas e investigaciones que potencien sus competencias y les permitan mejorar sus prácticas. Del mismo modo, respecto al conocimiento ampliado, se ausentan las conexiones intra o interdisciplinarias y no se evidencian las competencias para resolver situaciones problemas que pudieran proponer a sus estudiantes.

En la dimensión didáctica, los análisis y las valoraciones dan cuenta de dos docentes que se desempeñan de mejor forma en torno a las facetas afectiva, mediacional y ecológica, y de menor manera respecto a las facetas interaccional, epistémica y cognitiva. Esto, muestra que las docentes conocen las directrices curriculares chilenas y a sus estudiantes en términos actitudinales, proponiendo actividades de su interés, utilizando un lenguaje adecuado al nivel de los discentes y promoviendo la participación durante sus clases; pero este conocimiento no es suficiente para promover el logro y acceso de todos los estudiantes, dado que no se consideran los estilos de aprendizaje y la forma en que los alumnos progresan en ellos, no se favorecen el diálogo, la participación de manera constante ni la autonomía, sin profundizar a través de actividades de ampliación, limitando la enseñanza de la noción de función a algunos significados y representaciones que, tal como mencionan diversos autores (Duval, 2006; Font y Godino, 2006; Janvier, 1987; Ramos, 2005), son insuficientes para la emergencia del significado global de un objeto.

Otro aspecto a mencionar, es la presencia de las distintas componentes e indicadores de los criterios de idoneidad en los diseños de clase de las docentes, si bien éstos no se encuentran de manera explícita, el uso de los criterios de idoneidad como herramienta de análisis didáctico facilita de manera considerable la investigación, dado su tipología y descripción de sus respectivas componentes, pudiendo realizar los distintos análisis de manera organizada y precisa.

En relación con la dimensión meta didáctico-matemática, dadas las características del sistema educativo público, reflexionar sobre la práctica no es considerado como parte de la rutina de los docentes chilenos, por lo que, incorporar las mejoras propuestas en esta investigación a las prácticas didáctico-matemáticas de las docentes, implicaría la implementación de un espacio de reflexión para las profesoras que hoy no se considera. A pesar de la falta de espacios de reflexión en la rutina diaria de los profesores, en muchos establecimientos se dispone de un horario de reunión por disciplina o área de estudio, que normalmente abarca una hora semanal, donde se desarrollan actividades acordes a las necesidades del grupo de trabajo o del establecimiento, tanto administrativas como académicas. Entonces, este espacio eventualmente podría ser utilizado con la finalidad de desarrollar procesos de análisis y reflexión sobre la práctica o, bien, el desarrollo de ciclos formativos que promuevan la reflexión pedagógica.

Para este espacio de reflexión, se propone estipular como criterios para el análisis didáctico, los propuestos a través de la dimensión meta didáctico-matemática, en particular los criterios de idoneidad, definiendo un espacio contextualizado a las necesidades que presentan las prácticas docentes, con temas más concretos, como el análisis de clases, propuestas didácticas, errores y dificultades de los estudiantes, entre otros. Estos espacios de reflexión permitirían mirar con claridad los tres momentos claramente definidos: planificación, implementación y reflexión sobre la práctica, dando la oportunidad a los profesores de mejorar sus prácticas a través del análisis con indicadores que ofrezcan criterios de observación precisos y organizados. En ese sentido, como ya se ha mencionado, los criterios de idoneidad, considerados como un instrumento teórico-metodológico, son buenos predictores para hacer reflexiones sobre la práctica, de modo que los profesores puedan hacer sus propias guías de reflexión didáctica, como se propone en los artículos de Font *et al* (2015), Breda *et al* (2017) y Godino *et al* (2018), promoviendo el desarrollo de la competencia reflexiva.

La importancia de incorporar este espacio de reflexión como parte de un proceso de estudio, surge como una necesidad no menor, que permite a los profesores evaluar su propuesta didáctica teniendo en cuenta los antecedentes empíricos que formaron parte de este proceso. Si bien se propone la reflexión al término de este ciclo, en términos evaluativos, durante el proceso de diseño se reflexiona de manera preliminar sobre la práctica, debido a que el profesor prevé lo que puede ocurrir en el aula, y una vez allí, pueda tomar decisiones idóneas. Una vez que el ciclo ha terminado, el profesor se ve en la necesidad de evaluar y reflexionar sobre lo que ha

funcionado y lo que no, qué aspectos se pueden mejorar y rediseñar lo desarrollado anteriormente durante la planificación.

Además, las competencias que desarrollan los profesores no se limitan a los conocimientos matemáticos, didácticos y reflexivos, sino que también a movilizar estos conocimientos durante la implementación de sus diseños de clases, cuando se presentan diversos conflictos, en torno a los errores y dificultades de sus estudiantes. En estos términos, una de las conclusiones de esta investigación radica en que todos los conocimientos puestos en juego por las profesoras, les permiten desenvolverse durante todo el proceso de estudio. Sin embargo, su desempeño depende exclusivamente de los conocimientos que han adquirido tanto en su formación inicial como en su ejercicio docente. En ese sentido, el rol de la reflexión de manera previa, durante la fase de diseño y, a posteriori, durante el espacio de reflexión, permite a los docentes recurrir a sus conocimientos y a los diversos recursos y estrategias externas, presentes en las directrices curriculares o la literatura; sin embargo, durante la implementación de clases el profesor cuenta solo con sus conocimientos y competencias para resolver los diversos conflictos que pueden suscitarse, y que son adquiridos por medio de la práctica. Esta competencia, conocida como *teacher noticing*, se manifiesta en un profesor que comprende la complejidad de los procesos y la variedad de eventos que ocurren en el aula, manejando situaciones de estrés y tomando decisiones adecuadas -con confianza- durante el desarrollo de la clase y le permiten desarrollar la habilidad crítica de notar características importantes durante los procesos de instrucción, desenvolviéndose de manera más eficiente y equilibrada (Star, Lynch y Perova, 2011; Castro, Pino-Fan & Velásquez-Echavarría, 2018). En ese sentido, el desarrollo de esta competencia, requiere de un docente con la experiencia suficiente y procesos de reflexión sistematizados en el tiempo que faciliten a los profesores observar y analizar prácticas didáctico-matemáticas, mediante el uso de herramientas de análisis con criterios e indicadores rigurosos, tales como los criterios de idoneidad.

A partir de lo anterior, en esta investigación, que estudia las prácticas didáctico-matemáticas de dos docentes, una profesora novel y otra profesora con más de 10 años de experiencia, existían algunas ideas a priori sobre los desempeños de ambas docentes y los conocimientos didáctico-matemáticos que movilizarían al diseñar e implementar clases sobre la noción de Función. Una vez recolectados los datos del contexto donde estas profesoras ejercen la docencia, los diseños y las grabaciones a las implementaciones de las docentes, y realizados los análisis y valoraciones de sus prácticas, fue posible observar muchas similitudes en relación

con los conocimientos movilizados, fortalezas y debilidades. Con respecto a las diferencias, el *teacher noticing* se manifiesta en la docente con mayor experiencia, quien logra identificar conflictos y actuar en búsqueda de una solución que, sin embargo, no en todos los casos fueron adecuados o suficientes para dar solución a dichos conflictos. De esta forma, se refuerza la idea de que estos espacios de reflexión deben ser incorporados a la rutina profesional docente de manera sistemática para promover el desarrollo de esta competencia, puesto que no se logra su adquisición por medio de la observación de clases, aun cuando esta observación sea frecuente o repetitiva (Star *et al.*, 2011).

Del mismo modo, es necesario para concluir este trabajo, evidenciar el grado de proximidad entre los diseños e implementaciones de clases de las docentes, utilizando los criterios de idoneidad.

Con respecto a la docente A, la idoneidad epistémica muestra un mayor grado de proximidad en cuanto a falta de situaciones problema que aborden los distintos significados y representaciones de la noción de función y la posibilidad para que los alumnos generen o negocien definiciones. Por otra parte, se ven inconsistencias entre diseño e implementación con respecto al uso de definiciones claras y situaciones donde los alumnos deban argumentar. Respecto a la idoneidad cognitiva, si bien presenta consistencias entre diseño e implementación, éstas corresponden a debilidades presentes a lo largo del proceso de instrucción, tales como la falta de anticipación a conflictos en el diseño, que pudieran ser de utilidad para resolverlos de mejor forma durante la implementación, así como también la ausencia de actividades de ampliación y los modos de evaluación formativa, que deben ser mejorados. En la idoneidad afectiva es uno de los criterios con mayor grado de proximidad, donde solo se identifica como debilidad, en ambos momentos, resaltar las cualidades de estética y precisión de la matemática. La idoneidad interaccional presenta varias inconsistencias que, a pesar de ser consideradas en el diseño, no se evidenciaron durante la implementación, o viceversa. Estas tienen relación con promover las interacciones entre alumnos, favorecer la autonomía e incorporar un desarrollo del tema de manera adecuada. Un aspecto ausente en ambos momentos es que los alumnos tuvieran la posibilidad de establecer conjeturas y comunicarlas. La idoneidad mediacional muestra un grado de proximidad mucho más alto, donde el tiempo considerado en el diseño es consistente con lo observado en la implementación. Por otra parte, el uso de recursos tecnológicos es considerado en el diseño, pero en la implementación se observó que se limita a la profesora, sin dar oportunidad a los

alumnos de manipular dichos recursos. De igual forma, se observaron inconsistencias respecto a la distribución de aula propuesta en el diseño que, si bien se realizó en la implementación, no fue efectiva para el desarrollo de la clase. En último lugar, la idoneidad ecológica muestra bastante proximidad respecto a la adaptación del currículo a las necesidades del curso, aportando directamente a la formación valórica y socio-profesional de los estudiantes. Tanto en el diseño como en la implementación no se observa apertura a la incorporación de prácticas reflexivas, que apunten al desarrollo del pensamiento crítico por medio de conexiones con otros objetos.

En el caso de la docente B, la idoneidad epistémica muestra consistencias entre diseño e implementación con respecto a las debilidades mencionadas anteriormente, sin embargo, el diseño no es claro con relación al lenguaje y el uso de definiciones claras y correctas, aspecto que se sugiere como posible mejora en el apartado de análisis. Los indicadores de la idoneidad cognitiva que alcanzan un grado adecuado de proximidad son diversos, ya que se observan en ambos momentos del diseño didáctico, aquellos que fueron propuestos, se evidenciaron en la práctica, y aquellos que no fueron descritos, no se observaron en la implementación. En la idoneidad afectiva se alcanza un alto grado de proximidad, destacando como debilidad indicadores ligados a la componente emocional. La idoneidad interaccional no alcanza un grado de proximidad aceptable, dado que hay inconsistencias entre diseño e implementación en relación al reconocimiento y resolución de conflictos y la inclusión en la dinámica de la clase. Del mismo modo se observan debilidades que se mantienen en ambos momentos, tales como la búsqueda de consensos, la ausencia de diálogo entre los estudiantes y la falta de desarrollo de la autonomía. Con respecto a la idoneidad mediacional, los indicadores de recursos materiales y tiempo presentan menor grado de proximidad con relación al contraste entre diseño y lo observado en la implementación, sin embargo, los indicadores relacionados al número de alumnos y condiciones de aula no se mencionan en el diseño, pero tampoco se observan acciones concretas en la implementación. Para finalizar, la idoneidad ecológica alcanza un nivel adecuado de proximidad debido a las consistencias entre diseño e implementación, esto, en términos bastante diversos, puesto que hay aspectos desarrollados en ambos momentos y otros que no, a señalar, adaptación del currículo a las necesidades del contexto, contribución a la formación socio-profesional y cultural de los estudiantes, la ausencia de conexiones y apertura a la innovación tecnológica.

En términos generales, se observó un alto grado de proximidad entre los diseños e implementaciones de ambas docentes; sin embargo, la mayoría de las consistencias encontradas dan cuenta de aspectos señalados en la valoración de cada docente, es decir, indicadores que no fueron considerados en el diseño y tampoco fueron observados en la implementación de clase. Por otra parte, las inconsistencias evidenciadas se reflejan a través de indicadores que fueron desarrollados en el diseño y no en aula, y viceversa. En ese sentido, estos hallazgos permiten sostener las conclusiones señaladas en párrafos anteriores, en relación a la necesidad de incorporar espacios de reflexión sistemáticos a las prácticas didáctico-matemáticas de las docentes, puesto que la falta de reflexión a través de una guía de valoración didáctica con criterios e indicadores bien definidos, impide: (1) que las docentes puedan observar de manera crítica aspectos de sus prácticas que pueden ser mejorados durante el desarrollo de los distintos momentos del diseño didáctico y, (2) que no se da la oportunidad a los profesores chilenos de adquirir competencias didáctico-matemáticas idóneas para la mejora en la gestión de los aprendizajes.

Tal como se mencionó en la sección 1.1, el MBE describe al profesor por medio de cuatro dominios: preparación de la enseñanza, creación de un clima propicio para el aprendizaje, enseñanza para todos los estudiantes, y responsabilidades profesionales. En el cuarto dominio se refiere a los procesos de evaluación y reflexión sobre la propia práctica, entendida como un proceso que debe ser efectuado en forma consciente y sistemática. Adicionalmente, en Pino-Fan *et al* (2018), se abordan las problemáticas que enfrentan los programas de formación del profesorado, dando cuenta de la escasez de cursos de didáctica que permitan a los profesores en formación a adquirir competencias didáctico-matemáticas idóneas orientadas a la gestión de aprendizajes, el análisis didáctico y la reflexión sobre su propia práctica.

En este sentido, al contrastar la realidad del sistema educativo chileno y la formación del profesorado, con la normativa, los estándares y las acciones propuestas por el MINEDUC, se encuentran diferencias e inconsistencias sustanciales respecto a la teoría y la práctica. Por un lado, el MINEDUC sostiene la utilidad de los espacios de reflexión como parte de la rutina profesional, pero por otro, la práctica pedagógica y las mallas curriculares de formación del profesorado, dan cuenta de la ausencia de estos espacios de reflexión.

Un último aspecto a considerar guarda relación con la realidad de los establecimientos educacionales, el contexto socioeconómico y cultural tanto de sus estudiantes, sus familias y su entorno más cercano. La influencia del contexto se considera un factor relevante en el

desempeño de los profesores. En particular, este estudio muestra a dos profesoras que adecuan los contenidos de un curso de acuerdo al contexto de sus estudiantes, utilizando lenguaje apropiado al nivel de ellos, pero no al nivel educativo donde se encuentran. Además, estas adaptaciones curriculares y la contextualización utilizada en las situaciones-problema que abordaron las docentes, claramente muestran sus conocimientos sobre los intereses y necesidades de sus estudiantes y su intención de promover el acceso y logro de todos ellos.

Es efecto, las docentes parecieran desarrollar, de manera consciente y con mayor foco, las facetas ecológica y afectiva, para captar el interés de estudiantes desmotivados o con conocimientos y habilidades que no fueron desarrolladas en los niveles anteriores, sacrificando en cierto grado aspectos epistémicos y cognitivos. Adicionalmente, las componentes de las facetas interaccional y mediacional no se logran desarrollar lo suficiente, en consecuencia con los antecedentes recopilados en el capítulo 1, por lo que resulta evidente la necesidad de realizar un trabajo en equipo, donde puedan evidenciar los aspectos ya mencionados, reflexionar sobre estas y otras prácticas didáctico-matemáticas, y puedan incorporar en la gestión de nuevos procesos de estudio.

Para finalizar esta sección de conclusiones, se considerarán algunas reflexiones finales. En estos términos, los aportes de esta investigación hacen referencia a evidenciar el tipo de prácticas regulares que realizan los profesores de matemática cuando diseñan e implementan clases sobre la noción de función. Otro aspecto a considerar, es sostener con evidencia la necesidad de establecer en el currículo chileno, espacios de reflexión para el desarrollo de competencias didáctico-matemáticas que vayan en directo beneficio de sus prácticas pedagógicas, de manera sistemática y estipulando criterios e indicadores claros para la formulación de una guía de reflexión didáctica. La incorporación de los criterios de idoneidad a la sistematización de estas reflexiones no sería ajena a la práctica misma, ya que, como concluimos anteriormente, estos criterios están implícitos en sus diseños, en cada aspecto o componente que fue considerada por las profesoras.

Respecto a las limitaciones de esta investigación, se puede considerar que la muestra de dos profesoras es mínima y, adicionalmente, la cantidad de diseños e implementaciones de clases analizadas fuese insuficiente para concluir de manera representativa de acuerdo a la realidad local de las docentes. Sin embargo, la apertura a esta investigación, se abre precisamente por lo manifestado en la literatura con respecto a los espacios de reflexión a nivel país. Adicionalmente, si bien esta investigación no propone un espacio de reflexión para las

docentes, plantea propuestas para la incorporación de espacios de reflexión a través de los hallazgos encontrados y los antecedentes que forman parte de la misma.

A partir de las limitaciones mencionadas, es posible cerrar este capítulo señalando que este trabajo presenta vías de continuidad en función de investigaciones que consideren diseños de espacios de reflexión bien definidos a partir de los criterios de idoneidad como herramienta de análisis didáctico y reflexión, donde los profesores diseñen guías de reflexión, para los tres momentos del diseño didáctico, es decir, a priori, en aula y a posteriori, permitiéndoles mejorar la gestión de aprendizajes y, en consecuencia, sus prácticas didáctico-matemáticas.



## Referencias Bibliográficas

- Artigue, M. (1998). Teaching and Learning Elementary Analysis. In C. Alsina, J. M. Alvarez, B.R. Hodgson, C. Laborde, A. Pérez (Eds.), *ICME 8 (1996) Selected Lectures* (pp. 15 - 29). Sevilla: S.A.E.M. THALES.
- Ball, D., Lubienski, S. y Mewborn, D. (2002). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4o ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: The concept of function as an example. In *Meaning in mathematics education* (pp. 61-81). Springer, New York, NY.
- Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. 13(6), 1893-1918.
- Castro, W. F., Pino-Fan, L., & Velásquez-Echavarría, H. (2018). A proposal to enhance preservice teacher's noticing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*.
- Cohen, L., & Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. New York, USA: Routledge.
- CPEIP, Ministerio de educación. (2008). *Marco para la Buena Enseñanza*. Santiago, Chile.
- CPEIP. (2016). *Resultados evaluación docente 2015*. Santiago, Chile. Recuperado de [https://www.docentemas.cl/docs/Resultados\\_Evaluacion\\_Docente\\_2015.pdf](https://www.docentemas.cl/docs/Resultados_Evaluacion_Docente_2015.pdf)
- Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(2), 86-91.
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1243-1267.

- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registro semiótico y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Original publicado en 1995)
- Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics visualization* (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinveztav-IPN.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *PARADIGMA*, 28(2), 49-77.
- D'Hombres, J., Dahan, A., Bkouche, R., Houzel, C., & Guillemot, M. (1987). *Mathématique au fil des ages*. París: Guathier-Vilars.
- Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 105-121. doi: 10.1016/S0732-3123(99)80063-7
- Fernández, C., & Yoshida, M. (2004). Lesson study: A case of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development.
- Font, V., & Acevedo, J. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 405-418.
- Font, V., Breda, A., & Sala, G. (2015). Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. *Praxis Educacional*, 11(19), 17-34.
- Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.
- Gagatsis, A., Elia, I., & Andreou, S. (2003). Representations and mathematics learning: Functions and number line. *Euclides g*, 59, 5-34.

- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13 – 31.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME)*, Recife, Brasil.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas [Indicators of didactical suitability for mathematics teaching and learning processes]. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111-132.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7-37.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & De Castro Hernández, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 27(1), 59-76.
- Godino, J. D.; Giacomone, B.; Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con

- herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 63 - 83.
- Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. and Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4.2, 1–26.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Hitt F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123-134.
- Jaimes, N. (2012). *La noción de función, un acercamiento a su comprensión*. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P.
- Martinic, S., & Vergara, C. (2007). Gestión del tiempo e interacción del profesor-alumno en la sala de clases de establecimientos de Jornada Escolar Completa en Chile. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 5(5e), 3-20.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: the discipline of noticing*. Londres, Reino Unido: Routledge-Falmer.
- Maturana Cortés, M. V. (2011). “Espacios de reflexión pedagógica”, una aproximación de los profesores en liceos municipales y particular sub-vencionados de la comuna de Vallenar. (Tesis Doctoral). Universidad de Chile. Santiago, Chile.
- Mineduc (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media. Actualización 2009*. Santiago de Chile. doi: 978-956- 292-2586.
- Mineduc (2016). Bases curriculares 7° básico a 2° medio. *Ministerio de Educación de Chile*. Recuperado de <http://www.curriculumnacional.cl/>

- Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal*. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales.
- Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1429-1456. doi: 10.12973/eurasia.2015.1403a
- Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el curso de Bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123-150.
- Pino-Fan, L., Font, V., & Godino, J. D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137-151). México, D. F.: Ediciones D. D. S. y universidad Autónoma de Guerrero.
- Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, 36(1), 87-109.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(1), 63-94. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8>
- Pino-Fan, L., Guzmán, I., Larraín, M., & Vargas, C. (2018). La formación inicial de profesores en Chile: 'voces' de la comunidad chilena de investigación en Educación Matemática. *Uniciencia*, 32(1), 68-88. doi: <http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-1.5>
- Ramos, A. B. (2005). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Barcelona, España.
- Ruffinelli Vargas, A. (2016). Ley de desarrollo profesional docente en Chile: de la precarización sistemática a los logros, avances y desafíos pendientes para la profesionalización. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 42(4), 261-279.

- Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis doctoral publicada). Universidad de Jaén, España.
- Schön, D. (1983). *The Reflective Practitioner*. New York: Basic Books.
- Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In *The Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 321-354). Brill Sense.
- Seckel M. J. & Font V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Práxis educacional*, 19, 55-75.
- Seckel, M. J., & Font, V. (2017). *Efectos del uso del portafolio para desarrollar la competencia reflexiva en futuros profesores de matemática*. En Serna, Luis Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1236-1244). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Sierpinska, A. (1992). Understanding the Notion of Function. In G. Harel, E. Dubinsky (Eds.), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25- 58). USA: Mathematical Association of America.
- Star, J. R., Lynch, K. H., & Perova, N. (2011). Using video to improve mathematics' teachers' abilities to attend to classroom features: A replication study. *Mathematics teachers' noticing: Seeing through teachers' eyes*.
- Urrea, Y. E. P. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función*. (Tesis de magíster publicada). Universidad de Los Lagos, Chile.
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 266-356.

# Anexos

## Anexo 1. Diseño de clase. Docente A



### PLANIFICACIÓN DE AULA

<b>ASIGNATURA:</b> Matemática	<b>CURSO:</b> Primero Medio	<b>PROFESOR:</b> Julia Parra Villagrán	<b>SEMESTRE:</b> Segundo Semestre
<b>OBJETIVO DE APRENDIZAJE: (8vo básico)</b>			
OA 7 Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: <ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizando tablas.</li> <li>Usando metáforas de máquinas.</li> <li>Estableciendo reglas entre x e y.</li> <li>Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.</li> </ul>			
<b>ACTITUDES:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.</li> <li>Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.</li> </ul>			

FECHA	OBJETIVO DE LA CLASE	HABILIDAD	ACTIVIDAD (en forma simple)	RECURSOS	INDICADOR DE EVALUACION
09/11	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconocer el concepto de función a través de relaciones matemáticas.</li> <li>Identificar elementos de una función, dominio y recorrido</li> <li>Identificar tipos de funciones afín y lineal.</li> <li>Evaluar Funciones, respetando la jerarquía de las operaciones</li> </ul>	Explicar Fundamentar Evaluar	<b>Inicio:</b> Se explicitan los objetivos de la clase y a través del concepto de relación se reconoce "función" por medio de lluvia de ideas. <b>Desarrollo:</b> se entrega guía de trabajo, trabajo grupal. Se explica el avance de la guía formalizando los conceptos asociados al estudio del una función. <b>Cierre:</b> Síntesis de lo aprendido en clases. Responden preguntas Qué manejo. Qué debo reforzar.	Data Notebook Cuadernos Lapices	Reconocen y construyen el concepto de función. Identifican dominio y recorrido. Identifican funciones lineales y afín. Evalúan funciones (determinan imágenes)

## Anexo 2. Diseño de clase. Docente B

### VIII.- CLASE A CLASE

Curso: 1° Medio A		Fecha: 07/11/2017	Asignatura: Matemáticas	
<b>Aprendizaje esperado:</b> ➤ Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: <ul style="list-style-type: none"> <li>&gt; Utilizando tablas</li> <li>&gt; Usando metáforas de máquinas</li> <li>&gt; Estableciendo reglas entre <math>x</math> e <math>y</math></li> <li>&gt; Representando de manera gráfica (plano cartesiano), de manera manual.</li> </ul>				
Objetivo (según corresponda)	Habilidad – Actitud	Descripción de clase (tiempos)	Recursos	Evaluación
<b>Objetivo de la clase:</b> Definir el concepto de función mediante situaciones de la vida cotidiana relacionadas al cambio lineal utilizando tablas y metáforas de máquinas	<b>Habilidad:</b> > Explicar y fundamentar: - Soluciones propias y los procedimientos utilizados	<b>Inicio (15 min.):</b> Saludo correspondiente a los alumnos. Se socializan las normas de convivencia y comportamiento al interior del aula. Además se explican los objetivos en la pizarra. Luego el profesor relaciona los conocimientos previos por medio de preguntas al azar a alumnos: ¿Podemos situaciones cotidianas graficarlas como lo hemos hecho en clases pasadas? ¿Qué sucede cuando pagamos la luz, utilizamos un taxi o contratamos un plan de teléfono? De esta forma recordando los contenidos anteriores para anclarlos a los nuevos contenidos a trabajar ayudará a los alumnos a orientarse sobre la clase que se realizará.	PPT Pizarra Pc	Se revisa el trabajo realizado en los cuadernos de los alumnos.

	<b>Actitud:</b> Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales	<b>Desarrollo (50 min.):</b> El profesor comienza a desarrollar la clase, donde a través de una situación de la vida cotidiana relacionadas con cambio lineal introduce los temas a trabajar, a modo de introducción. Luego comienza la clase donde los estudiantes deberán dar solución al problema planteado, indicando pasos y forma de solución. De esta forma, se graficarán los datos obtenidos y se dará paso a la formalización del concepto de función. Posteriormente definido el concepto, se trabajará con ejercicios de máquinas mediante las cuales se identificarán las funciones trabajadas. Se desarrollaran ejercicios en pizarra, a modo de ejemplo, identificando funciones y relaciones entre las variables.  <b>Síntesis (15min.):</b> Para terminar el profesor hace un resumen de los contenidos trabajados, generalizando los conceptos aprendidos y realizando un ejercicio de ejemplo para resumir. Por último se entrega un espacio para que los alumnos puedan realizar comentarios finales o interrogantes que puedan tener del contenido y trabajo realizado por los alumnos.		
--	--	--	--	--



**Anexo 3.** Pauta de análisis de diseños e implementaciones de clases.

**Pauta de análisis**

Aspectos a considerar

- Significados sobre la noción de función
- Significado pretendido por el currículo para la enseñanza de la noción de función
- Representaciones de la noción de función para su enseñanza
- Errores y dificultades en la enseñanza y el aprendizaje sobre la noción de función
- Dimensión matemática: conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido.
- Dimensión didáctica: facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica
- Criterios de idoneidad: componentes e indicadores

NO: No Observado MO: Medianamente Observado O: Observado	Marcar cada opción con un punto • ó X, agregando las observaciones que argumenten dicha opción.
--	---

<b>Faceta: Epistémica</b>					
Componente	Indicadores	NO	MO	O	Observaciones
Situaciones-problema	- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. -				
	- Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).				
Lenguaje	- Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica, ...), traducciones y conversiones entre los mismos. - Nivel del lenguaje adecuado				
	- a los niños a que se dirige. - Se proponen situaciones de				
	- expresión matemática e interpretación.				

Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.				
	- Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.				
	- Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.				
Argumentos	- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen.				
	- Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.				
Relaciones	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.				
	- Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.				

<b>Faceta: Cognitiva</b>					
Componente	Indicadores	1	2	3	Observaciones
Conocimientos previos	- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio).				

	- Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.				
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.				
Aprendizaje:	- Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: - Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situaciones; competencia metacognitiva.				
	- La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.				
	- Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.				

<b>Faceta: Afectiva</b>					
Componente	Indicadores	1	2	3	Observaciones
Intereses y necesidades	- Las tareas tienen interés para los alumnos.				
	- Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.				

Actitudes	- Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.				
	- Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.				
Emociones	- Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.				
	- Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.				

<b>Faceta: Interaccional</b>					
Componente	Indicadores	1	2	3	Observaciones
Interacción docente-discente	- El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado pronto, enfatiza los conceptos claves del tema, etc.)				
	- Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.)				
	- Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento. Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.				
	- Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.				
Interacción entre alumnos	- Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes.				

	- Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos.				
	- Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.				
Autonomía	- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).				
Evaluación formativa	- Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.				

<b>Faceta: Mediacional</b>					
Componente	Indicadores	1	2	3	Observaciones
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores)	- Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. - Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.				
Número de alumnos, horario y condiciones del aula.	- El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida.				
	- El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no sé imparten todas las sesiones a última hora)				

	- El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso de instrucción pretendido.				
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	- El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida.				
	- Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema.				
	- Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.				

<b>Faceta: Ecológica</b>						
Componente	Indicadores	1	2	3	Observaciones	
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.					
Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.					
	- Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.					
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.					
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.					
Conexiones intra e interdisciplinarias	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarios.					