



UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

**PRÁCTICAS SOBRE LA VARIABLE ALEATORIA PROPUESTAS EN EL
CURRÍCULO CHILENO DE EDUCACIÓN MEDIA**

POR

PATRICIA BELÉN CARRERA CARRERA

Tesis presentada para optar al grado académico de Magíster en Educación Matemática

Director: Dr. Luis R. Pino- Fan

Codirector: Dr. Hugo Alvarado

Osorno, Chile. Noviembre de 2020

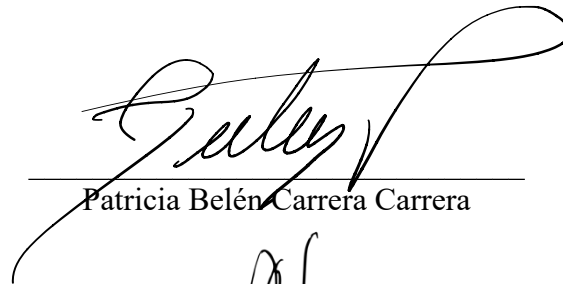


UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**PRÁCTICAS SOBRE LA VARIABLE ALEATORIA PROPUESTAS EN
EL CURRÍCULO CHILENO DE EDUCACIÓN MEDIA**

Tesis de Magíster presentada por **Patricia Belén Carrera Carrera** dentro del Programa de Magíster en Educación Matemática para aspirar al grado de Magíster en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos, dirigida por el Dr. Luis Roberto Pino Fan, académico de la Universidad de Los Lagos.



Patricia Belén Carrera Carrera



Dr. Luis Roberto Pino Fan



UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**PRÁCTICAS SOBRE LA VARIABLE ALEATORIA PROPUESTAS EN
EL CURRÍCULO CHILENO DE EDUCACIÓN MEDIA**

Esta Tesis de Magíster ha sido desarrollada al seno del Grupo de Investigación sobre Didáctica de la Matemática de la Universidad de Los Lagos (GIDMAT-ULAGOS), e inscrita a la línea de investigación “Historia, epistemología y aspectos socioculturales de las matemáticas”. Además, forma parte de acciones y desarrollos realizados en el marco del Proyecto Fondecyt 1200005, titulado “Desarrollo de competencias profesionales clave para la práctica pedagógica de profesores de matemáticas de enseñanza media”, y cuyo investigador responsable es el Dr. Luis Pino-Fan .

Se autoriza la reproducción y/o divulgación total o parcial, con fines académicos, mediante cualquier forma, procedimiento y/o tecnología de la presente obra, incluyendo la cita bibliográfica que reconoce la obra y a su autor/ autora.”

A todas las mujeres y niñas que por diversos motivos han sido privadas de educación.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por acompañarme cada día de mi vida, por darme la fortuna de contar con gente hermosa que me ama y por darme la fortaleza y sabiduría cada día.

A mi mamá Patricia, por enseñarme a amar el proceso de aprender, por dejarme abrir mis alas y apoyarme siempre en cada nuevo desafío. A mis abuelos Blanca y Osvaldo, por llenarme de amor cada día, por sus oraciones, por la paciencia y por el ejemplo de vitalidad y fe, gracias por disfrutar cada uno de mis logros.

A mi Sosita y a Lucas por la preocupación constante, por el amor y por ser mis compañeros incondicionales en todas las aventuras, por recordarme la importancia de disfrutar la vida y por disfrutar de mis logros como si fueron propios.

A ti Carlos, por recordarme cada día lo valiosa que soy, por darme ánimo cuando mis fuerzas se agotaban, por estar ahí en medio de la tormenta cuando el trabajo y el estudio absorbían mi tiempo, por esperar paciente, por hacerme reír y secar mis lágrimas, gracias por ser mi compañero de vida, por disfrutar y celebrar cada uno de mis logros y por apoyar e impulsar mi desarrollo personal y profesional, a ti amor muchas gracias

A mi familia, mi tía Nenita, Florencio, mi hermana Claudia y a la Sofía, gracias por cada palabra de aliento, por cada llamada y gesto de amor hacia mí, gracias por estar en los buenos y malos momentos.

Al Dr. Luis Pino Fan por su apoyo incondicional en la elaboración y dirección de este proyecto, muchas gracias por su dedicación y paciencia en cada etapa, por impulsar mi desarrollo profesional y ayudarme a ver la luz al final del túnel cuando todo parecía tan complejo, gracias por compartirme su experiencia y conocimiento, pero por sobre todo gracias por ser una excelente persona y por creer y confiar en mí.

Al Dr. Hugo Alvarado, por sus consejos y tiempo entregado en el desarrollo de este proyecto, muchas gracias por sus palabras de aliento, por compartirme su experiencia, conocimiento y pasión por la estadística.

A Rodrigo Quezada, por impulsarme a dar este paso y ser un ejemplo de amabilidad, superación y humildad. Gracias por enseñarme la importancia de compartir el conocimiento, de tener buenas redes de amigos y de atreverse a luchar por los sueños, te admiro y te quiero.

A la Universidad de los Lagos por cada una de las oportunidades brindadas, a los docente e investigadores del magíster en educación matemática, por su amabilidad, paciencia y generosidad, muchas gracias por todo lo entregado y por su calidad humana

ÍNDICE

	Página
INTRODUCCIÓN GENERAL.....	27
CAPÍTULO 1	
ÁREA PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES	31
1.1 Introducción	31
1.2 La importancia de la estadística	32
1.2.1 Ideas Fundamentales	33
1.2.2 Variable aleatoria como idea fundamental.....	35
1.3 Significado holístico de referencia de la noción de variable aleatoria.....	37
1.3.1. Ocho etapas históricas de la variable aleatoria.....	39
1.3.2. Elementos del significado de la variable aleatoria.....	43
1.3.3. Variable aleatoria discreta y continua.....	45
1.4 Historia e incorporación de la estadística y la probabilidad al currículo chileno....	46
1.4.1 Currículo matemática enseñanza media chileno.....	47
1.4.2 Cobertura del currículo chileno.....	53
1.5 El rol de los docentes en la enseñanza de la estadística y de la probabilidad.....	54
1.6 Problemas de la enseñanza y aprendizaje de la estadística.....	55
1.6.1 Dificultades de aprendizaje y estudios sobre la variable aleatoria.....	58
1.7 Textos Escolares: Otra Herramienta Para El Alcance De Objetivos.....	59
1.7.1 Variable Aleatoria y Análisis De Textos.....	61
1.7.2 La Política De Textos Escolares En Chile.....	82
1.7.3 Textos de Estudio y Guías Docente Matemática.....	84
1.8 Uso y Valoración De Los Textos Escolares En Chile.....	97

1.9	La variable aleatoria como un agente de cambio: conexión interdisciplinaria matemática – historia.....	100
1.10	Una aproximación al problema de investigación.....	102

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO, PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA 105

2.1.	Introducción	105
2.2.	El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática	105
2.2.1.	Sistemas de prácticas institucionales y personales	106
2.2.2.	Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas	107
2.2.3.	Significados y tipos de significados de los objetos matemáticos	108
2.2.4.	Configuraciones de objetos y procesos	111
2.3.	Problema de Investigación	112
2.3.1	Preguntas y objetivos de investigación	113
2.4.	Metodología	114
2.4.1.	Componentes y fases de la investigación	115
2.4.2.	Técnicas para el análisis de datos	117
2.4.3.	Población y muestra.....	125
2.4.4.	Interfaz de apoyo para análisis.....	126

CAPÍTULO 3

LA VARIABLE ALEATORIA EN EL CURRÍCULO CHILENO 129

3.1.	Introducción.....	129
3.2.	Análisis epistémico de las propuestas curriculares de Chile.....	131
3.2.1.	Análisis de la propuesta curricular para séptimo básico	131
3.2.1.1	Contextos.....	135

3.2.1.2.	Tipos de Variables.....	137
3.2.1.3.	Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas.....	141
3.2.1.4	Significado de la noción de variable aleatoria pretendido por el libro de texto y programa de estudio.....	157
3.2.2.	Análisis de la propuesta curricular para octavo básico	162
3.2.2.1.	Contextos.....	164
3.2.2.2.	Tipos de Variables.....	166
3.2.2.3.	Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas.....	169
3.2.2.4	Significado de la noción de variable aleatoria pretendido por el libro de texto y programa de estudio.....	186
3.2.3	Análisis de la propuesta curricular para primero medio.....	191
3.2.3.1	Contextos.....	194
3.2.3.2	Tipos de Variables.....	197
3.2.3.3	Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas.....	199
3.2.3.4	Significado de la noción de variable aleatoria pretendido por el libro de texto y programa de estudio.....	209
3.2.4	Análisis de la propuesta curricular para segundo medio.....	214
3.2.4.1	Contextos.....	218
3.2.4.2	Tipo de Variables.....	220
3.2.4.3	Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas.....	222
3.2.4.4	Significado de la noción de variable aleatoria pretendido por el libro de texto y programa de estudio.....	233
3.3.	Resumen Significados Pretendidos por El Currículo Chileno Sobre La Noción de Variable Aleatoria.....	243
3.3.1	Contextos de uso de la variable aleatoria a lo largo del curriculum.....	245
3.3.2	Evolución de la variable aleatoria en función de su tipo a lo largo del curriculum.....	246

3.3.3	Representaciones utilizadas para el estudio de la variable aleatoria.....	247
3.3.4	Relación contextos versus significados a lo largo del curriculum.....	249
CAPÍTULO 4		
CONCLUSIONES		251
4.1	Introducción	251
4.2	Conclusiones Sobre Objetivos.....	251
4.2.1	Sobre el objetivo específico OE-1.....	252
4.2.2	Sobre el objetivo específico OE-2.....	253
4.2.3	Sobre el objetivo específico OE-3.....	256
4.2.4	Sobre el Objetivo General OG.....	258
4.3	Principales Aportaciones Del Trabajo.....	260
4.4	Limitaciones Del Estudio.....	261
4.5	Futuras Líneas De Investigación.....	262
4.6	Publicaciones o Presentaciones Sobre la Investigación.....	263
Bibliografía		265

ÍNDICE TABLAS

Tabla 1.	1.	Características de las etapas históricas de la variable aleatoria....	41
Tabla 1.	2.	Objetivos bases curriculares eje probabilidad y estadística / probabilidad y estadística descriptiva e inferencial.....	50
Tabla 1.	3.	Conocimientos previos, palabras clave y Conocimientos eje Probabilidad y estadística.	53
Tabla 1.	4.	Eje de datos y azar. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de II medio en las pruebas SIMCE Matemática.....	57
Tabla 1.	5.	Dificultades de aprendizaje observadas a partir de los errores en las respuestas de las pruebas SIMCE Matemática por parte de los estudiantes.....	57
Tabla 1.	6.	7° Básico contenido Texto estudiante unidad estadística y probabilidad.....	86

Tabla 1.	7.	Contenidos de 8° Básico. Texto estudiante unidad estadística y probabilidad.....	89
Tabla 1.	8.	Contenido Texto de 1° Medio, unidad Probabilidad y estadística.	92
Tabla 1.	9.	2° Medio contenido texto estudiante unidad probabilidad y estadística.....	94
Tabla 3.	1.	Número de tareas analizadas por nivel y tipo de documento.....	131
Tabla 3.	2.	Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación eje probabilidad y estadística 7° básico.....	132
Tabla 3.	3.	Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación eje probabilidad y estadística 8° básico.....	163
Tabla 3.	4.	Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación eje probabilidad y estadística 1° medio.....	192
Tabla 3.	5.	Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación eje probabilidad y estadística 2° medio.....	215

ÍNDICE FIGURAS

Figura 1.	1.	Currículo en espiral.....	35
Figura 1.	2.	Etapas del desarrollo histórico de la variable aleatoria y sus interacciones con la variable estadística.	40
Figura 1.	3.	Textos utilizados para el análisis de Ortiz.....	61
Figura 1.	4.	Matriz de análisis Ortiz.....	65
Figura 1.	5.	Resultados Tipología de ejercicios Ortiz.....	68
Figura 1.	6.	Resultado Tipos de espacio muestral Ortiz.....	69
Figura 1.	7.	Resultados asignación de probabilidades a los sucesos Ortiz....	69
Figura 1.	8.	Resultados Contextos Ortiz.....	70
Figura 1.	9.	Resultados Presentación de la información Ortiz.....	70
Figura 1.	10.	Instrumentos de la política textos escolares.....	83
Figura 1.	11.	Articulación entre guía docente, texto de estudiante y cuaderno de ejercicios propuesto por editorial SM.....	96
Figura 2.	1.	Editoriales responsables de la edición de textos de matemática e historia, geografía y ciencias sociales.....	125
Figura 2.	2.	Repositorio de base de datos.....	127
Figura 2.	3.	Interfaz de usuario para análisis.....	120
Figura 3.	1.	Proceso de análisis de tareas.....	130
Figura 3.	2.	Estructura unidad 4 texto del estudiante evaluación 7° básico.....	135

Figura 3.	3.	Presencia de contextos programa de estudio y libro de texto 7° básico.....	136
Figura 3.	4.	Presencia de tipos de variable programa de estudio y libro de texto 7° básico.....	138
Figura 3.	5.	Ejemplo de tarea con variable discreta.....	139
Figura 3.	6.	Ejemplo de tarea con variable mixta.....	139
Figura 3.	7.	Ejemplo de tarea que moviliza más de un tipo de variable.....	139
Figura 3.	8.	Conclusión sección 10 muestreo y representación de datos.....	141
Figura 3.	9.	Tipologías de tareas en relación a las representaciones inicial, transitoria y emergentes presentes en las tareas del texto escolar y programa de estudio 7° básico.....	141
Figura 3.	10.	Ejemplo de tarea gráfica – simbólica.....	142
Figura 3.	11.	Ejemplo de tarea gráfica – verbal.....	142
Figura 3.	12.	Ejemplo de tarea gráfica – simbólica- verbal.....	143
Figura 3.	13.	Ejemplo de tarea gráfica – tabular- verbal.....	144
Figura 3.	14.	Ejemplo de tarea icónica – verbal.....	144
Figura 3.	15.	Ejemplo de tarea icónica – simbólica- verbal.....	144
Figura 3.	16.	Ejemplo de tarea simbólico – simbólico.....	145
Figura 3.	17.	Ejemplo de tarea simbólica – tabular.....	146
Figura 3.	18.	Ejemplo de tarea simbólica – verbal	146
Figura 3.	19.	Ejemplo tarea tabular – gráfica.....	147
Figura 3.	20.	Ejemplo tarea tabular - simbólica– gráfica.....	147
Figura 3.	21.	Ejemplo tarea tabular – simbólica.....	148
Figura 3.	22.	Ejemplo tarea tabular – verbal.....	148
Figura 3.	23.	Ejemplo tarea tabular – gráfica – verbal.....	149
Figura 3.	24.	Ejemplo tarea tabular – simbólica – verbal.....	149
Figura 3.	25.	Ejemplo tarea verbal – tabular – gráfica.....	150
Figura 3.	26.	Ejemplo tarea verbal – simbólica.....	150
Figura 3.	27.	Ejemplo tarea verbal – verbal.....	151
Figura 3.	28.	Ejemplo tarea verbal –gráfico – verbal.....	151
Figura 3.	29.	Ejemplo tarea verbal –simbólica – verbal.....	152
Figura 3.	30.	Ejemplo tarea verbal –tabular – verbal.....	152
Figura 3.	31.	Ejemplo tarea gráfica- gráfica.....	153
Figura 3.	32.	Ejemplo tarea gráfica- simbólica-gráfica.....	154
Figura 3.	33.	Ejemplo tarea gráfica – tabular – gráfica.....	154
Figura 3.	34.	Ejemplo tarea verbal – gráfica.....	155
Figura 3.	35.	Ejemplo tarea verbal – tabular.....	155
Figura 3.	36.	Ejemplo tarea mixta – verbal.....	156
Figura 3.	37.	Ejemplo tarea con doble movilidad de significado.....	157

Figura 3.	38.	Resumen presencia de significados en el texto del estudiante y programa de estudio 7° básico.....	158
Figura 3.	39.	Ejemplo problema sin clasificación.....	159
Figura 3.	40.	Porcentaje de presencia de significados por secciones y objetivos de aprendizaje.....	160
Figura 3.	41.	Contextos históricos versus significados de la variable aleatoria del libro de texto y programas de estudio.....	161
Figura 3.	42.	Estructura unidad 4 texto del estudiante evaluación 8° básico...	164
Figura 3.	43.	Presencia de contextos programa de estudio y libro de texto 8° básico.....	165
Figura 3.	44.	Presencia de tipos de variable programa de estudio y libro de texto 8° básico.....	167
Figura 3.	45.	Ejemplo de tarea que moviliza más de un tipo de variable.....	168
Figura 3.	46.	Definición de variable entregada por el libro de texto 8° básico	168
Figura 3.	47.	Definición de variable cuantitativa y cualitativa texto 8° básico	169
Figura 3.	48.	Tipologías de tareas en relación a las representaciones inicial, transitoria y emergentes presentes en las tareas del texto escolar de 8° básico	170
Figura 3.	49.	Ejemplo de tarea gráfica – verbal- grafica.....	171
Figura 3.	50.	Ejemplo de tarea gráfica – simbólica.....	172
Figura 3.	51.	Ejemplo de tarea gráfica – verbal.....	172
Figura 3.	52.	Ejemplo tarea gráfica – tabular- verbal.....	173
Figura 3.	53.	Ejemplo tarea icónica – verbal.....	173
Figura 3.	54.	Ejemplo tarea icónica – tabular- verbal.....	174
Figura 3.	55.	Ejemplo tarea simbólica – gráfica.....	175
Figura 3.	56.	Ejemplo tarea simbólica – simbólica.....	175
Figura 3.	57.	Ejemplo tarea simbólica – verbal.....	175
Figura 3.	58.	Ejemplo tarea simbólica – simbólica- verbal.....	176
Figura 3.	59.	Ejemplo tarea tabular– gráfica.....	176
Figura 3.	60.	Ejemplo tarea tabular – verbal – gráfica.....	177
Figura 3.	61.	Ejemplo tarea tabular – simbólica.....	177
Figura 3.	62.	Ejemplo tarea tabular – verbal.....	178
Figura 3.	63.	Ejemplo tarea tabular – gráfica – verbal.....	179
Figura 3.	64.	Ejemplo tarea tabular - simbólica– verbal.....	179
Figura 3.	65.	Ejemplo tarea verbal – gráfica.....	180
Figura 3.	66.	Ejemplo tarea verbal – simbólica.....	180
Figura 3.	67.	Ejemplo tarea verbal –tabular – simbólica.....	180
Figura 3.	68.	Ejemplo tarea verbal – tabular.....	181
Figura 3.	69.	Ejemplo tarea verbal – verbal.....	181

Figura 3.	70.	Ejemplo tarea verbal –gráfica – verbal.....	182
Figura 3.	71.	Ejemplo tarea verbal –icónica – verbal.....	182
Figura 3.	72.	Ejemplo tarea verbal –simbólica – verbal.....	183
Figura 3.	73.	Ejemplo tarea grafica –gráfica – verbal.....	183
Figura 3.	74.	Ejemplo tarea tabular- simbólica – grafica.....	184
Figura 3.	75.	Ejemplo tarea verbal- tabular – grafica.....	184
Figura 3.	76.	Ejemplo tarea mixta – gráfica.....	185
Figura 3.	77.	Resumen presencia de significados en el texto del estudiante y programa de estudio 8° básico.....	187
Figura 3.	78.	Ejemplo problema sin clasificación.....	188
Figura 3.	79.	Ejemplo problema con más de un significado.....	188
Figura 3.	80.	Porcentaje de presencia de significados por secciones y objetivos de aprendizaje.....	189
Figura 3.	81.	Contextos históricos versus significados de la variable aleatoria en el programa de estudio y texto de matemática e historia 8° básico.....	190
Figura 3.	82.	Estructura unidad 4 texto del estudiante evaluación 1° Medio...	194
Figura 3.	83.	Presencia de contextos programa de estudio y libro de texto 1° medio.....	195
Figura 3.	84.	Ejemplo de problema Duque de Toscana.....	196
Figura 3.	85.	Ejemplo problema de la apuesta interrumpida.....	197
Figura 3.	86.	Presencia de tipos de variable programa de estudio y libro de texto 1° medio.....	198
Figura 3.	87.	Ejemplo de tarea con variable mixta.....	199
Figura 3.	88.	Ejemplo de tarea con variable nula.....	199
Figura 3.	89.	Tipologías de tareas en relación a las representaciones inicial, transitoria y emergentes presentes en las tareas del texto escolar de 1° medio.....	200
Figura 3.	90.	Ejemplo de tarea gráfica – verbal.....	200
Figura 3.	91.	Ejemplo de tarea icónica – simbólica.....	201
Figura 3.	92.	Ejemplo de tarea icónica – verbal.....	201
Figura 3.	93.	Ejemplo de tarea icónica – simbólica- verbal.....	202
Figura 3.	94.	Ejemplo de tarea simbólica – gráfica.....	202
Figura 3.	95.	Ejemplo de tarea simbólica – verbal.....	203
Figura 3.	96.	Ejemplo de tarea tabular – gráfica.....	204
Figura 3.	97.	Ejemplo de tarea tabular – verbal.....	204
Figura 3.	98.	Ejemplo de tarea tabular - gráfica – verbal.....	205
Figura 3.	99.	Ejemplo tarea tabular – simbólica- verbal.....	205
Figura 3.	100.	Ejemplo de tarea verbal – simbólica.....	206

Figura 3.	101.	Ejemplo de tarea verbal – verbal.....	206
Figura 3.	102.	Ejemplo de tarea verbal- gráfica – verbal.....	207
Figura 3.	103.	Ejemplo de tarea verbal- simbólica – verbal.....	207
Figura 3.	104.	Ejemplo de tarea verbal – tabular – verbal.....	208
Figura 3.	105.	Ejemplo de tarea verbal – gráfica – verbal.....	208
Figura 3.	106.	Ejemplo problema sin clasificación.....	209
Figura 3.	107.	Resumen presencia de significados en el texto del estudiante y programa de estudio 1° Medio.....	210
Figura 3.	108.	Ejemplo tarea con doble movilidad de significado.....	211
Figura 3.	109.	Porcentaje de presencia de significados por secciones y objetivos de aprendizaje.....	212
Figura 3.	110.	Objetivo de aprendizaje 12 con sus indicadores de evaluación...	213
Figura 3.	111.	Contextos históricos versus significados de la variable aleatoria en el texto y programa de estudio de primero medio.....	213
Figura 3.	112.	Estructura unidad 4 texto del estudiante evaluación 2° medio...	217
Figura 3.	113.	Presencia de contextos programa de estudio y libro de texto 2° Medio.....	219
Figura 3.	114.	Ejemplo de tarea con variable nula.....	220
Figura 3.	115.	Presencia de tipos de variable programa de estudio y libro de texto 2° Medio.....	221
Figura 3.	116.	Definiciones en torno a los tipos de variables del texto segundo medio.....	222
Figura 3.	117.	Tipologías de tareas en relación a las representaciones inicial, transitoria y emergentes presentes en las tareas del texto escolar de 2° medio.....	223
Figura 3.	118.	Ejemplo de tarea gráfica – gráfica.....	223
Figura 3.	119.	Ejemplo de tarea gráfica – simbólica.....	224
Figura 3.	120.	Ejemplo de tarea gráfica – verbal.....	224
Figura 3.	121.	Ejemplo de tarea gráfica – tabular- verbal.....	225
Figura 3.	122.	Ejemplo de tarea icónica-simbólica.....	226
Figura 3.	123.	Ejemplo de tarea icónica – verbal.....	226
Figura 3.	124.	Ejemplo de tarea simbólica – simbólica.....	226
Figura 3.	125.	Ejemplo de tarea simbólica – verbal.....	227
Figura 3.	126.	Ejemplo de tarea tabular - simbólica – gráfica.....	227
Figura 3.	127.	Ejemplo de tarea tabular – simbólica.....	228
Figura 3.	128.	Ejemplo de tarea tabular – verbal.....	228
Figura 3.	129.	Ejemplo de tarea verbal-simbólica- gráfica.....	229
Figura 3.	130.	Ejemplo de tarea verbal- verbal – gráfica.....	229
Figura 3.	131.	Ejemplo de tarea verbal- simbólica.....	229

Figura 3.	132.	Ejemplo de tarea verbal – verbal.....	230
Figura 3.	133.	Ejemplo de tarea verbal – simbólica- verbal.....	230
Figura 3.	134.	Ejemplo de tarea verbal – tabular- verbal.....	231
Figura 3.	135.	Ejemplo de tarea verbal – grafica – verbal.....	231
Figura 3.	136.	Ejemplo de tarea Mixta – verbal.....	232
Figura 3.	137.	Ejemplo tarea movilizadora de significado S1 como variable de interés.....	233
Figura 3.	138.	Resumen presencia de significados en el texto del estudiante y programa de estudio 2° Medio.....	234
Figura 3.	139.	Ejemplo tarea movilizadora de significado S3 como variable estadística.....	235
Figura 3.	140.	Ejemplo tarea movilizadora de significado S4 como función....	235
Figura 3.	141.	Ejemplo problema sin clasificación.....	236
Figura 3.	142.	Porcentaje de presencia de significados por secciones y objetivos de aprendizaje.....	237
Figura 3.	143.	Definición variable aleatoria libre de texto 2° medio.....	237
Figura 3.	144.	Complemento a la definición variable aleatoria libre de texto 2° medio.....	238
Figura 3.	145.	Tabla recorrido variable aleatoria texto 2° medio.....	238
Figura 3.	146.	Definición de función de probabilidad libro de texto 2° medio..	239
Figura 3.	147.	Definición de función de distribución libro de texto 2° medio..	239
Figura 3.	148.	Contextos históricos versus significados de la variable aleatoria en el texto de 2° medio.....	240
Figura 3.	149.	Tipologías de ejercicios Ortiz en relación a las tareas relacionadas al significado S4 variable como función.....	241
Figura 3.	150.	Ejemplo de tarea con tipología SVA1, SVA4.....	242
Figura 3.	151.	Ejemplo de tarea con tipología SVA1, SVA2 y SVA6.....	242
Figura 3.	152.	Presencia de significados por nivel educativo.....	243
Figura 3.	153.	Detalle Presencia de significados por nivel educativo.....	244
Figura 3.	154.	Presencia de contextos históricos por nivel educativo.....	245
Figura 3.	155.	Presencia de tipos de variable por nivel educativo.....	246
Figura 3.	156.	Presencia de tipos de tipos de representaciones por nivel educativo.....	248
Figura 3.	157.	Resumen contextos versus significados de la variable aleatoria en el curriculum.....	249

RESUMEN

En esta investigación presentamos la reconstrucción del significado de la noción de variable aleatoria. Para ello realizamos una revisión documental de los estudios que se han desarrollado en relación a este objeto matemático. Del mismo modo, con la ayuda de algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, hemos analizado las prácticas matemáticas propuestas tanto por los programas de estudio como por los libros de texto en los niveles de séptimo básico a 2° medio. El propósito de este estudio es *caracterizar los significados sobre la variable aleatoria pretendidos por el currículo chileno de educación media <libros de texto, programas de estudio>, para la enseñanza de dicha noción*. Para lograr el objetivo central de la investigación, el estudio se llevó a cabo en tres fases: 1) Determinar el significado holístico de referencia de la variable aleatoria, identificando los pares <prácticas matemáticas, objetos matemáticos primarios intervinientes en tales prácticas>, a través de un estudio de tipo documental.; 2) Identificar las prácticas matemáticas (explícitas e implícitas) y los objetos matemáticos primarios que emergen de ellas, propuestas en los libros de texto y programas de estudio del currículo de educación media, para la enseñanza de la variable aleatoria; y 3) Estudiar la representatividad de los significados pretendidos en el currículo de enseñanza media, respecto del significado holístico de referencia sobre la variable aleatoria, destacando la relación de estos significados con los contextos en los que son puestos en juego.

Este estudio nos permitirá evaluar la representatividad y riqueza matemática de los significados pretendidos por el currículum chileno, sobre la variable aleatoria. Los resultados de nuestra investigación aportan nuevos conocimientos respecto de las características de las tareas a tomar en cuenta para gestionar idóneamente los aprendizajes sobre la noción de variable aleatoria, además de servir como una posible guía para la evaluación de textos escolares y elaboración de guías didácticas. Por otra parte, desde la metodología se aportan nuevos métodos en el desarrollo y análisis de datos que pudiesen servir a futuros investigadores.

Palabras claves: Variable aleatoria, enfoque ontosemiótico, libros de texto, análisis curricular.

ABSTRACT

This study aims to characterize the random variable's meanings, evaluate the representativeness and mathematical richness of the meanings declared by the Mathematics Chilean curriculum about a random variable.

We present the reconstruction of the meaning of the notion of a random variable. Firstly, a documentary review of the studies regarding the mathematical object was conducted. Secondly, the mathematical practices proposed both by syllabus and textbooks in basic eighth to second-grade levels are analyzed with some theoretical tools of the Ontosemiotic approach to mathematical knowledge and instruction.

In order to achieve the central objective of the research, the study was carried out in three phases: 1) to determine the holistic meaning of reference of the random variable, identifying the pairs <mathematical practices, primary mathematical objects involved in such practices>, through a documentary type study. 2) To identify the mathematical practices (explicit and implicit) and the primary mathematical objects that emerge from them, proposed in the textbooks and curricula of the high school curriculum, for the teaching of the random variable; and 3) To study the representativeness of the meanings intended in the high school curriculum, concerning the holistic meaning of reference on the random variable, highlighting the relationship of these meanings with the contexts in which they are put into play.

The study results contribute new knowledge regarding the characterization of the knowledge that future teachers should have to manage the pupils' random variable learning, besides serving as a possible guide of school text assessment and didactic guides designing.

Additionally, new methods are proposed for the development and analysis of data that could serve future researchers.

Keywords: Random variable, ontosemiotic approach, textbooks, curricular analysis.

INTRODUCCIÓN

Los avances en ciencia y tecnología, el crecimiento exponencial en los sistemas de recogidas de datos, un mundo globalizado que bombardea a los ciudadanos con información día a día a través de cifras y gráficos, han generado la necesidad de nuevas herramientas analíticas a desarrollar en los ciudadanos, que los ayuden en la interpretación adecuada de la información que los rodea. Una herramienta clave en este proceso es la denominada cultura estadística. Batanero (2002) señala que la estadística ha tenido un rol fundamental en el desarrollo de la sociedad moderna, ya que ha proporcionado una batería de herramientas metodológicas para analizar variabilidad, relaciones entre variables, diseño de estudios y experimentos y mejorar las predicciones realizadas para tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

A partir de lo anterior, la necesidad de contar con ciudadanos culturizados estadísticamente se ha transformado en un objetivo para los líderes de diversas naciones, quienes han impulsado la incorporación de la estadística y la probabilidad en la educación escolar formal. En este sentido, investigadores y docentes han aportado a la definición de líneas curriculares que permitan abordar estas temáticas. La enseñanza de las ideas estocásticas a lo largo del proceso educativo, se comenzó a gestar por Bruner (1959) quien en la conferencia de Woods Hole en septiembre de 1959 propuso la idea de un curriculum en espiral conformado por una serie de ideas fundamentales posibles de enseñar en distintos niveles de profundidad desde el preescolar a la etapa universitaria. Unos años después Heitele (1975) propuso diez ideas fundamentales en estocástica basándose en reflexiones de ídoles

psicológicas y epistemológicas, a saber: expresiones de creencias, campo de la probabilidad, independencia, regla de adición, equidistribución y simetría, combinatoria, modelos de urnas y simulación, variable estocástica, la ley de los grandes números y muestra.

Heitele estableció la variable aleatoria como idea fundamental desde tres perspectivas: la epistemológica, en donde esta juega un papel básico en la matematización de la probabilidad a través de la historia; la psicológica, en donde la intuición de magnitudes en las que participa el azar surge en una etapa más temprana que la de experimento aleatorio; y como modelo explicativo, en donde tiene un papel fundamental en tres aspectos, su distribución, su esperanza y las operaciones entre variables aleatorias. Aun así, aunque es bien conocida la importancia de la variable aleatoria, ¿cómo el currículo de matemáticas y los libros de texto en el contexto chileno abordan el estudio de esta noción? En esta investigación presentamos el desarrollo de un estudio sobre los significados de la variable aleatoria, esperados y promovidos por el currículo de educación media chileno (entendiendo currículo como la dupla <Planes de Estudio y libros de texto>) y la representatividad de dichos significados respecto del significado de referencia de la variable aleatoria.

El trabajo que a continuación se presenta se estructura en cuatro capítulos a través de los cuales se va obteniendo y logrando el objetivo de esta investigación. En el Capítulo 1 de antecedentes hemos realizado un estudio documental sobre la noción de variable aleatoria que posteriormente da paso a la reconstrucción de los significados del objeto matemático. En el Capítulo 2 se presentan las nociones teóricas y metodológicas que utilizamos para el desarrollo de nuestra investigación, principalmente el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2007). Una vez presentadas dichas nociones teóricas y metodológicas fundamentales para el entendimiento del

objetivo general, se proponen las preguntas y objetivos de investigación. Posteriormente en el Capítulo 3 se presenta el análisis y caracterización del significado pretendido por el currículo por cada uno de los niveles educativos y de manera general, para lo cual se utilizan herramientas teóricas del EOS. Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones y se describe en qué medida se cumplieron los objetivos específicos y general planteados. Por último, se presentan las principales aportaciones, limitaciones y futuras líneas de investigación que se pudiesen desprender de este estudio.

CAPÍTULO 1

Área Problemática y Antecedentes

1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos una revisión general de las investigaciones realizadas en el área de la Didáctica de la Matemática relacionadas con el problema de investigación que nos concierne: la representatividad del significado pretendido por el currículo chileno respecto del significado de referencia del objeto variable aleatoria. Dichas investigaciones nos han orientado para cumplir con el propósito de nuestro estudio.

El capítulo está organizado en cuatro grandes apartados. En el primero de ellos presentamos un recorrido histórico-epistemológico sobre la noción de variable aleatoria. Posteriormente, en un segundo apartado hemos descrito la incorporación de la estadística y la probabilidad al currículo chileno y las principales problemáticas en torno a las dificultades para su enseñanza y aprendizaje, así como su relación con la variable aleatoria; para luego mostrar las características de los textos escolares de Chile, su importancia y valoración por parte de profesores y estudiantes, y algunas investigaciones de libros de textos en relación a la presentación de la variable aleatoria. Finalmente realizamos una aproximación al problema de investiga

1.2 LA IMPORTANCIA DE LA ESTADÍSTICA

Los avances en ciencia y tecnología, el crecimiento exponencial en los sistemas de recogidas de datos, un mundo globalizado que bombardea a los ciudadanos con mucha información día a día a través de cifras y gráficos, han generado la necesidad de nuevas herramientas para que los ciudadanos puedan interpretar adecuadamente la información que los rodea. Una de las nuevas herramientas que aflora es la denominada cultura estadística (Batanero, 2002). La estadística ha jugado un papel primordial en el desarrollo de la sociedad moderna, tal como propone Haedo (2001):

La estadística ha jugado un papel primordial en el desarrollo de la sociedad moderna, al proporcionar herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar en forma óptima estudios y experimentos y mejorar las predicciones y toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. (p.1)

Los gobiernos y empresas requieren de la estadística cifras más claras y confiables que les permitan tomar decisiones acertadas en ámbitos como el económico, social y político. Para el cumplimiento adecuado de esta tarea es necesaria la cultura estadística básica del ciudadano que ha de colaborar en la recolección de datos (Batanero, 2002). Es por ello que es deseable que el ciudadano logre desarrollar alfabetización estadística la cual se relaciona con la capacidad de leer e interpretar datos en tablas, gráficos, comprobación de información y comprensión de conceptos vinculados a la inferencia y la toma de decisiones en la vida real (Rivero, 2020), adicionalmente Gal (2002), comprende la alfabetización no solo como conocimiento fáctico, habilidades formales e informal, sino también creencias, hábitos y actitudes, así como una perspectiva crítica de estos conocimientos.

La necesidad de contar con ciudadanos culturizados estadísticamente ha planteado la necesidad de incorporar dicha formación en la educación formal. Es por ello que la educación en torno a la probabilidad y estadística se ha tornado una demanda urgente para las actuales sociedades. Investigadores, docentes e incluso los gobiernos que definen las líneas curriculares la han comenzado abordar con mayor profundidad.

1.2.1 Ideas fundamentales

Para Piaget (2004), el desarrollo del conocimiento es un proceso continuo, en donde su principio y final son inalcanzables. En este proceso existe una tensión constante entre un estado anterior de menor conocimiento y un estado de mayor conocimiento que es susceptible de ser construido a raíz de la tensión entre estados.

Estas ideas sirvieron como punto de partida para que Bruner comenzará su camino en el estudio del currículo escolar. Entre las ideas propuestas por Bruner (1959), en la conferencia de Woods Hole, destaca la idea de que cualquier tema puede ser enseñado de manera honesta a los niños independiente de su edad y que, por lo tanto, todos los tópicos pueden ser introducidos desde edad temprana; es por ello que estos no pueden ser exhaustivos a ninguna edad, pero sí pueden ser retomados para incrementar su profundización. Estas ideas conformaron el fundamento del currículo en espiral (*Figura 1.1*)

Desde un punto de vista epistemológico y pragmático, en el sentido de Bruner (1959), por ideas fundamentales se entenderá aquellas ideas que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, los cuales son tan eficientes como sea posible y que difieren en los distintos niveles cognoscitivos no de manera estructural, sino solamente en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración (Heitele, 1975).

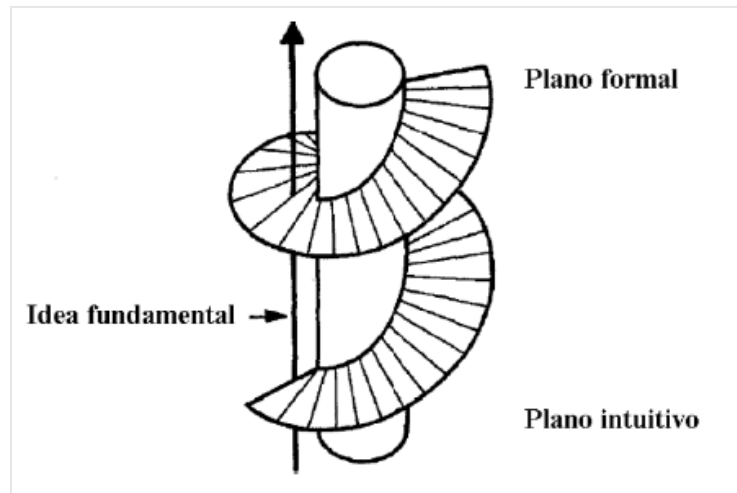


Figura 1.1 Currículo en espiral (Fuente: Heitele, 1975, p. 5)

Sin embargo, bajo el marco teórico con el que se trabajará este estudio, es importante acotar que, dependiendo del significado de una idea y el nivel de elaboración de esta, su estructura puede cambiar. También las ideas fundamentales sirven como brújulas o marcos referenciales para definir cuáles son los tópicos a cubrir en cada grado escolar, con qué profundidad se trabajarán, cómo vincularlos entre ellos y cómo vincularlos con otras ramas de las matemáticas.

A partir de las ideas de Bruner (1959) surgen algunas interrogantes como (a) ¿Cuál sería una lista de ideas fundamentales de conceptos estocásticos? (b) ¿Por qué la intuición significa tanto en estocásticos? (c) ¿Qué significa “intuición (estocástica)”? (d) ¿Cómo se desarrolla y cómo se le puede mejorar? Heitele (1975) centró su mirada en la primera de las preguntas expuestas, atreviéndose a dar respuesta a esta proponiendo diez ideas fundamentales en estocástica, basándose en reflexiones de índole psicológicas y epistemológicas (de la disciplina e histórica), a saber: (1) expresiones de creencias, (2) campo de la probabilidad, (3) independencia, (4) regla de adición, (5) equidistribución y

simetría, (6) combinatoria, (7) modelos de urnas y simulación, (8) variable estocástica, (9) la ley de los grandes números, y (10) muestra.

Heitele (1975) estableció a la variable aleatoria como idea fundamental desde tres perspectivas, la epistemológica en donde esta juega un papel básico en la matematización de la probabilidad a través de la historia, la psicológica en donde la intuición de magnitudes en las que participa el azar surge en una etapa más temprana que la de experimento aleatorio, y como modelo explicativo en donde tiene un papel fundamental en tres aspectos: su distribución, su esperanza y las operaciones entre variables aleatorias.

1.2.2 Variable aleatoria como idea fundamental

No es azaroso que la variable estocástica (variable aleatoria en el marco de este trabajo) fuese considerada como una idea fundamental, ya que al igual que los otros elementos estocásticos que componen la lista de Heitele se ganó su posición por su aporte al desarrollo de la estadística y la probabilidad. La variable aleatoria fue capaz de elevar el nivel de la probabilidad desde los juegos de azar hacia la matematización, a ella se deben una serie de aplicaciones de la estadística gracias a su concepción y al inventario conceptual con el que se relaciona. Su desconocimiento en el siglo pasado dificultó el trabajo de matemáticos tan reconocidos como Bernoulli, quien necesitó varios años para probar su ley débil de los grandes números. La variable no posee sólo un valor teórico en relación a la probabilidad, también es posible ver sus aplicaciones en la vida diaria, al estar inmersos en un mundo con tal flujo de información, también continúa presente desde la concepción clásica de los juegos de azar, en problemas de colas y en una serie de procesos físicos.

Para los más pequeños las variables aleatorias son concebidas como eventos de igual probabilidad de ocurrencia, casi como un principio ético-moral en el que a cada individuo le toca una parte; estas ideas suelen mantenerse incluso a medida que los niños van creciendo extrapolando erróneamente estas concepciones en los resultados de experimentos simples como el lanzamiento de dos monedas. A partir de esto, no se puede omitir que la equidistribución junto con la distribución moral juega un rol fundamental en la comprensión del mundo en el que estamos inmersos.

El teorema central del límite proporciona un modelo explicativo bastante convincente para una mejor comprensión de diversos fenómenos, lamentablemente esta noción no es accesible para una aproximación deductiva en los niveles anteriores a la universidad; sin embargo, sí es posible construir una comprensión intuitiva de este a través de experimentación.

Una función de distribución se caracteriza por su esperanza y su desviación estándar, ambas nociones sumamente importantes para que los hombres y mujeres puedan comprender la sociedad en la que están inmersos. La adquisición de estas nociones representa una herramienta que permiten enfrentarse críticamente y con seguridad a los datos estadísticos que son presentados cada día en los medios de información. Tener estas herramientas les permite a las personas dejar de conformarse con simples promedios que ocultan las medidas de dispersión de variables tan importantes como la distribución de sueldos en su país.

Las ideas en relación a la importancia de la variable aleatoria también son compartidas por Miller (1998) quien considera a la variable aleatoria como un concepto clave en el proceso de aprendizaje en posteriores nociones estadísticas, tales como las distribuciones de probabilidad, el modelo de regresión o la obtención de estimadores.

Además, alerta que la confusión que se puede generar en este tema, tendría repercusiones posteriores importantes en los estudiantes. Su importancia es tal que Batanero (2001) afirma que la variable aleatoria es la responsable del paso del estudio de los sucesos aislados al estudio de las distribuciones de probabilidad, además de que, junto con las funciones de distribución, son herramientas muy potentes que permiten hacer uso del análisis matemático en los fenómenos aleatorios.

1.3 SIGNIFICADO HOLÍSTICO DE REFERENCIA DE LA NOCIÓN DE VARIABLE ALEATORIA

Para poder estudiar un concepto matemático necesitamos poder comprender sus características, alcances, campos de acción, entre otros elementos que lo compongan y así lograr tener un entendimiento más profundo referente de aquello que se desea observar, en otras palabras, para poder estudiar un concepto matemático se debiese poder comprender su “significado”. En este campo Pino-Fan, Godino y Font (2011) proponen que en relación a los significados se encuentran:

El significado global de referencia se define a partir de dos nociones: significado global (también denominado significado holístico u holosignificado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático) y significado de referencia (entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio. Para una institución de enseñanza concreta, el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático). (Pino-Fan, Godino y Font, 2011, p. 147)

Además, estos autores señalan que los significados parciales de los objetos matemáticos están asociados a las prácticas matemáticas que se movilizaron para resolver ciertas situaciones problemas, en determinados períodos históricos, que dieron paso al surgimiento, evolución, formalización y generalización de determinado objeto matemático (Ibíd.), en nuestro caso, la variable aleatoria.

Ruiz (2013) recopila una serie de estudios que dan cuenta de los posibles significados de la variable aleatoria, la autora propone ocho etapas históricas que describe el proceso constitutivo de la variable aleatoria, tal como se aprecia en la *figura 1.2*. En ellas es posible observar el desarrollo histórico de la variable estadística y las vinculaciones entre las experiencias empíricas dadas por medio del análisis de datos de variables estadísticas y la teorización en el campo de la probabilidad. Es importante considerar que estas etapas no tienen un carácter lineal y que gran parte de ellas se superponen temporalmente, pero por temas de estructura la autora le ha otorgado un orden. Por último, cabe mencionar que las etapas se desarrollan entre 1200 al 1950, dejando el intervalo abierto en la última etapa, la cual se sigue nutriendo de los avances en esta área.

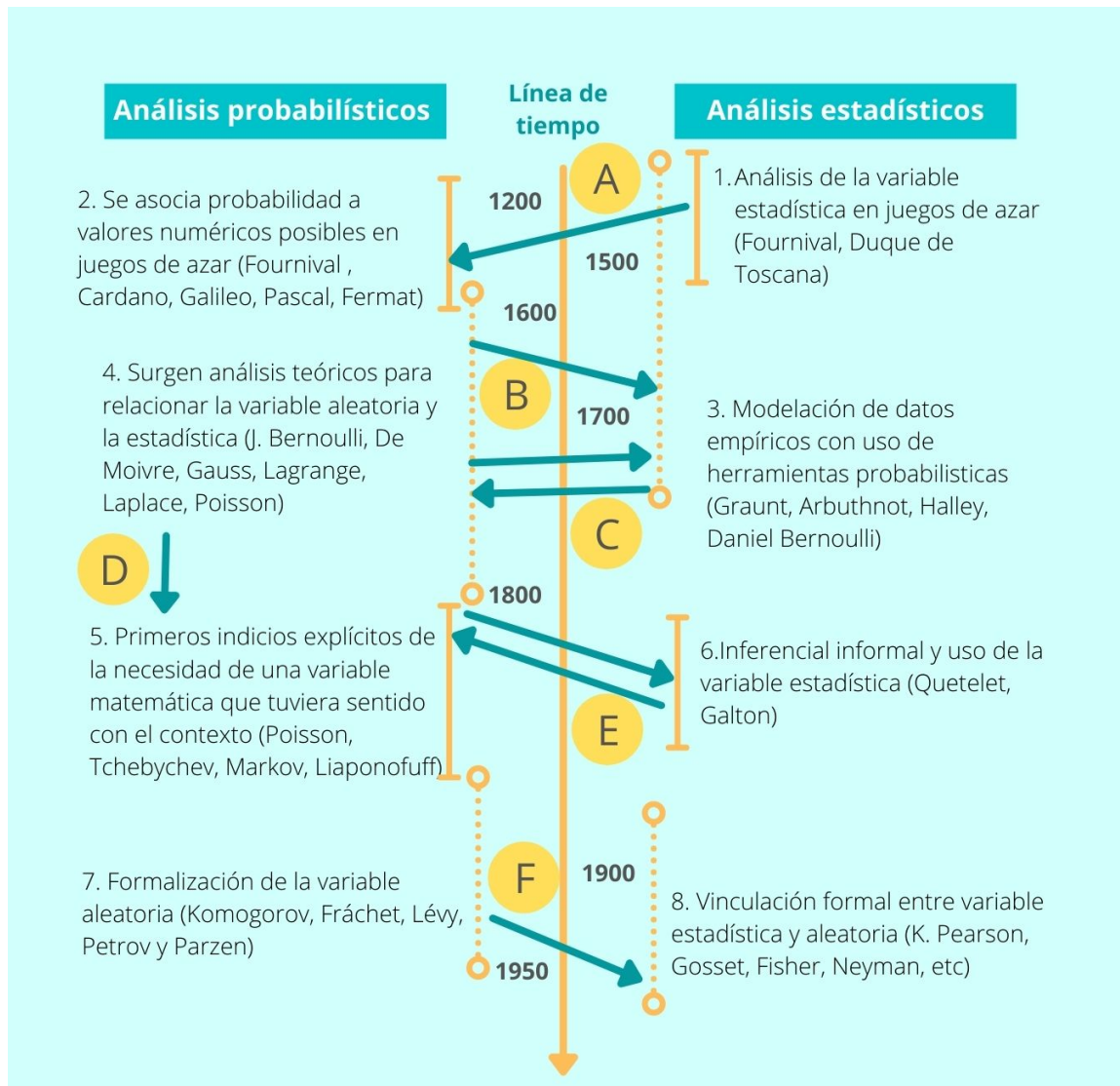


Figura 1.2 Etapas del desarrollo histórico de la variable aleatoria y sus interacciones con la variable estadística (Fuente: Ruiz, 2014, p.3).

1.3.1 Ocho etapas históricas de la variable aleatoria

Para cada una de las etapas planteadas por Ruiz (2013), se identificaron cuatro elementos relevantes; a saber, contexto de trabajo, personajes relevantes en el desarrollo de la variable, conceptos emergentes e impulsos y avances, los cuales se detallan en la tabla 1.1

Tabla 1.1

Características de las etapas históricas de la variable aleatoria (Fuente: Ruiz, 2013).

Etapa	Características
1° ETAPA	<ul style="list-style-type: none"> • Contexto de trabajo: Juegos de Azar • Representantes Mencionados: Duque de Toscana • Conceptos Emergentes: Recuentos, análisis numéricos intuitivos de la variable estadística. • Impulsos y avances: Conocer la mejor apuesta posible
2° ETAPA	<ul style="list-style-type: none"> • Contexto de trabajo: Juegos de Azar • Representantes Mencionados: Cardano, Pascal, Fermat y Hyugens. • Conceptos Emergentes: Recuentos teóricos de resultados posibles, se comenzó a asociar valores numéricos discretos a resultados de experimentos aleatorios. • Impulsos y Avances: <ul style="list-style-type: none"> ○ Solo en algunos de los problemas se hace explícita la variable. ○ Se interesan por la esperanza matemática y los valores aislados. ○ Esta etapa no tiene una inquietud académica, sino más bien, de consejo y recomendaciones de apuesta en los juegos de azar. ○ El libro de Huygens, sin embargo, ya tiene un manejo más riguroso, establece conceptos y un lenguaje para explicar sus soluciones y algunas generalizaciones.
3° ETAPA	<ul style="list-style-type: none"> • Contexto de trabajo: Fines políticos y militares • Representantes Mencionados: Graunt, Arbuthnott, Halley Galileo • Conceptos Emergentes: <ul style="list-style-type: none"> ○ Uso intuitivo variable estadística y cálculo de frecuencia. ○ El manejo de la media es importante. ○ Introducción al cuadrado del error. • Impulsos y Avances <ul style="list-style-type: none"> ○ Interés en recolección de datos estadísticos. ○ Se realizan cálculos para determinar regularidades y realizar predicciones. ○ Se reconoce la importancia de las variables numéricas para resultados probabilísticos. ○ Comienzan los análisis empíricos de las variables continuas gracias a las mediciones de Galileo.
4° ETAPA	<ul style="list-style-type: none"> • Contextos de Trabajo: en esta etapa se relacionaron con problemas de errores de medición, problemas de sobrevivencia o aplicaciones a la teoría matemática de la física molecular aplicada a los gases. • Representantes Mencionados: Bernoulli, de Moivre, Gauss, Laplace, Poisson • Conceptos Emergentes: independencia de variables, ley de Los grandes números, funciones para el cálculo de probabilidades, 1° versiones teorema central del límite (distribución binomial), funciones de densidad, convergencia de sucesiones de variables aleatorias, probabilidad como diferencial, cálculo con integrales, distribución normal, distribución exponencial, a la variable se le define como magnitud, cualidad variable o no se explicita.

- **Impulsos y Avances:** se busca generalizar resultados de casos particulares, cuestionamiento probabilidad frecuencial y teórica, cuestionamiento variable aleatoria y estadística, operaciones de variables, convergencia de sucesiones de variables aleatorias, diferenciar implícitamente entre la variable y los valores que puede tomar la variable en contextos discretos y continuos.
- 5° ETAPA
- **Contexto de trabajo:** la autora menciona que aparecen indicios explícitos de variables aleatorias asociadas a contextos y a demostraciones. Pero no menciona contextos de uso.
 - **Representantes Mencionados:** Poisson, Tchebychev, Markov, Liapounoff.
 - **Conceptos Emergentes:** función, función de distribución, función de densidad, distinción entre la función de densidad o la distribución de probabilidad y la función de probabilidad, enunciados más elaborados del teorema central del límite, la variable empieza a perder su carácter físico, ya no es manejada como el resultado de un fenómeno aleatorio con resultados numéricos, al menos en el ambiente formal de la probabilidad
 - **Impulsos y Avances**
 - El principal motor de desarrollo de la variable aleatoria fue la necesidad de establecer una variable de carácter matemático en la función de densidad y el problema de la continuidad, que también estuviera vinculada con el contexto probabilista.
 - Necesidad de una función, X que vinculara los resultados de un contexto aleatorio con un contexto matemático en donde se le asociaban sus probabilidades.
 - Se diferenciaron explícitamente los valores de la variable aleatoria y la variable en sí misma y se comenzó a trabajar con el concepto de suceso vinculado con una variable en el contexto matemático
 - Diferenciar entre el trabajo con variables continuas y discretas.
 - Las variables aleatorias ya se denotaban como variables e incluso algunos autores, el principal, Liapounoff, comenzaron a hacer explícita su condición de «sometidas al azar» (Liapounoff, 1901, p. 126, citado por Ruiz, 2013). El apellido de aleatoria, aún no es propio de ese tiempo en el que la diferencia entre azar y aleatoriedad aún no es explícita.
 - Cálculo de probabilidades de variables aleatorias dependientes y de sus funciones de distribución
 - Empieza a perder su carácter físico, ya no es manejada como el resultado de un fenómeno aleatorio con resultados numéricos, al menos en el ambiente formal de la probabilidad.
- 6° ETAPA
- **Contexto de trabajo:** en ciencias sociales, biológicas y de la herencia.
 - **Representantes Mencionados:** Quetelet y Galton.
 - **Conceptos Emergentes:** distribución normal, variable estadística, definir población estadística, gráficos y tablas, los percentiles, las ojivas, los histogramas, la mediana y la variación alrededor de la mediana, distribución normal estándar para probabilidades acumuladas y las primeras tablas de distribución normal estándar.
 - **Impulsos y Avances**
 - Surgen inferencias informales.
 - El interés fundamental era acercarse a la verdadera distribución de la variable estadística, lo que permitiría caracterizar a la población.

- La recolección de grandes cantidades de datos prevaleció como la mejor forma de conocer cómo se comportaba una variable estadística en una población.
- Se comienzan a representar gráficamente los datos.
- Se comenzó a diferenciar la variación debida a causas identificables y la regresión lineal.
- Todos los avances de manera informal sin mayor rigurosidad Matemática.

7° ETAPA

- **Contexto de trabajo:** Autora no hace alusión a un contexto en particular más que la ampliación en el campo de la teoría.
- **Representantes Mencionados:** Fréchet y Kolmogorov, Levy, Feller, Meyer, Petrov y Parzen.
- **Conceptos Emergentes:** variable aleatoria, magnitud, función y espacio de probabilidad
- **Impulsos y Avances**
 - Surgimiento de la variable aleatoria como objeto matemático para la definición de una teoría.
 - Conceptualizaron a la variable aleatoria generalizada, que puede no tener detrás una magnitud, en el sentido físico. Con base en la teoría de conjuntos y de la medida, se formalizó la definición de variable aleatoria como una función medible de valor real definida en un espacio de probabilidad.
 - La variable aleatoria adquiere identidad propia y es denotada tal como la conocemos actualmente, no sólo en su simbología sino también en su nomenclatura.
 - Se propone definir la variable aleatoria en dos momentos, comenzando con su definición a partir de un fenómeno aleatorio con resultados numéricos. De esta forma, sugiere un sistema que toma en cuenta el sentido que pueden tener los objetos matemáticos dentro de aplicaciones y que no pierde coherencia, formalidad ni rigor.

8° ETAPA

- **Contextos de trabajo:** se desarrollaron en torno a las aplicaciones de la inferencia en agronomía y biometría las cuales se extienden progresivamente a todos los campos científicos.
 - **Representantes Mencionados:** Fréchet y Kolmogorov, Levy, Feller, Meyer, Petrov y Parzen.
 - **Conceptos Emergentes:** inferencia, surge la teoría del contraste de hipótesis e intervalos de confianza, así como el diseño experimental, teoría del muestreo y la necesidad de controlar el tamaño de muestra, aparecen distribuciones que explícitamente se ocupaban de la inferencia, en particular la X^2 y la t de student, el teorema central del límite y las variables aleatorias multidimensionales.
 - **Impulsos y Avances**
 - Formalización de probabilidad y estadística.
 - Las herramientas estadísticas para los análisis de datos se multiplicaron, fundamentándola y haciéndola más potente. La inferencia se convierte en uno de los derroteros que hacen que la estadística formule sus propios métodos y procesos.
 - Se vinculan explícita y formalmente las variables estadística y aleatoria mediante los problemas de estimación.
-

1.3.2 Elementos de Significado de la Variable Aleatoria

Ortiz (2002) realizó un análisis de la probabilidad en los libros de texto en donde establece lo que él denomina conceptos probabilísticos, entre estos conceptos incluyó la variable aleatoria. Para su análisis se apoyó en las ideas de Hawkins, Jolliffe y Glickman (1992) quienes consideran el concepto de variable aleatoria bastante sutil, es una función con valores numéricos cuyo dominio es un espacio muestral. Además, consideran que una definición precisa de la variable aleatoria requiere un grado de sofisticación matemática excesivo para los estudiantes de secundaria. Por ello, en busca de una aproximación más adecuada para los niveles secundarios, tomándose en las ideas de Heitele (1975) en relación a los problemas didácticos que presentan los estudiantes y ante la imposibilidad de utilizar herramientas como el teorema central del límite antes de la universidad, los autores proponen que, quizás el único modo de introducir la distribución normal para alumnos de secundaria fuese por medio de la simulación.

Las variables aleatorias no son sólo importantes dentro de la teoría de la probabilidad, sino también en la vida cotidiana, tres son los puntos importantes en el modelo de variable aleatoria propuestos por Hawkins, Jolliffe y Glickman (1992): la distribución, la esperanza y la varianza. La distribución de una variable permite comparar cada caso aislado con el conjunto de observaciones, la esperanza matemática se interpreta intuitivamente como la media aritmética de los valores de la variable si repitiésemos un gran número de veces el experimento en idénticas condiciones y la varianza permite apreciar la variabilidad de la distribución en torno a la media. También es importante la composición de variables aleatorias mediante operaciones de tipo diverso para obtener otras nuevas.

A partir de lo anterior y con base en las ideas de Borovcnik, Bentz y Kapadia (1991, citados en Ortiz, 2002) quienes indican que una variable es aleatoria cuando su valor se determina como resultado de un experimento aleatorio, por lo que para caracterizar a una variable aleatoria necesitamos conocer el conjunto de todos sus posibles resultados y las probabilidades asociadas a cada uno de ellos.

Es así que una variable aleatoria se define como una función del espacio muestral E en el conjunto de números reales R . No cualquier función puede ser una variable aleatoria. Se requiere que, para cada intervalo I , el conjunto sea un suceso del espacio muestral y, por tanto, tenga una probabilidad bien definida. Esto garantiza que la variable aleatoria transporte la probabilidad P que está definida sobre el espacio muestral E a la línea real.

A partir de lo anterior, Ortiz (2002) identifica los siguientes elementos del significado de la variable aleatoria:

- VA 1** *La variable aleatoria toma sus valores dependiendo de los resultados de un experimento aleatorio*
- VA 2** *Es una función del espacio muestral en R*
- VA 3** *Queda caracterizada mediante la distribución de probabilidad: Conjunto de valores que toma junto con su probabilidad*
- VA 4** *Se requiere que, para cada intervalo I de R el conjunto original sea un suceso del espacio muestral.*
- VA 5** *Una variable aleatoria define una medida de probabilidad sobre el conjunto de números reales.*
- VA 6** *Para cada variable aleatoria podemos definir una función de distribución de la forma siguiente:*

$$\begin{array}{l} 1) R: \longrightarrow [0,1] \\ 2) x: \longrightarrow F(x) = P(\xi \leq x) \end{array}$$

- VA 7** *La función de distribución de una variable aleatoria es una función real de variable real, monótona no decreciente.*
- VA 8** *La función de distribución de una variable aleatoria determina en forma biunívoca la distribución de probabilidad.*
- VA 9** *Sea (x_i, p_i) $i \in I$ la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Se define la media o esperanza matemática como $E[\xi] = \sum_{i \in I} x_i p_i$. Este concepto extiende la idea de media en una variable estadística.*
- VA 10** *La moda es el valor más probable de la variable.*
- VA 11** *La mediana es el valor de la variable para el cual la función de distribución toma el valor 1/2. Por tanto, la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor menor o igual a la mediana es exactamente 1/2.*

1.3.3 Variable Aleatoria Discreta y Continua

En los aparados anteriores se planteó la estrecha relación que existe entre las variables aleatorias y su distribución, y cómo a través del estudio de estas fue posible avanzar significativamente en este campo de estudio. Cuando la variable aleatoria se concibe como una función que se define entre dos conjuntos, entonces podemos otorgar algunas categorías de variables aleatorias a partir de estos conjuntos. Ruiz (2013) propone que el conjunto imagen de una variable aleatoria se denomina “discreto cuando toma un número finito o infinito numerable de elementos, o continuo, si toma un número infinito no numerable de elementos” (p. 90).

Es decir, las variables aleatorias definidas sobre espacios muestrales discretos se llaman discretas y las definidas sobre espacios muestrales continuos se llaman continuas. Esta distinción es utilizada para definir los temas de estudios ya que ello condiciona la forma en que se obtienen las probabilidades.

1.4 HISTORIA E INCORPORACIÓN DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD AL CURRÍCULO CHILENO

En Chile, a finales de los años noventa se realizó un cambio que permitió contar con un marco curricular para la educación básica desde 1996 y para la educación media desde 1998. La asignatura de matemática se estructuró en torno a tres ejes: álgebra y funciones, geometría, y estadística y probabilidad. Posteriormente, en el año 2002 se efectuó una actualización del currículo, incorporando la estadística en seis niveles de escolaridad. En el 2009 se propuso un ajuste curricular, que incluyó una inserción de la estadística descriptiva, la estadística inferencial y la probabilidad a través del eje denominado “datos y azar” durante toda la trayectoria académica. Ese mismo año el Ministerio de Educación (MINEDUC), publicó el mapa de progreso del aprendizaje referido a datos y azar en concordancia con la propuesta de ajuste curricular. En el 2012 aparecieron las nuevas Bases curriculares chilenas para los niveles de 1° al 6°, las que establecen el eje denominado “datos y probabilidades”. Este eje se enfoca en la estadística descriptiva y responde a la necesidad de que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades (Pino y Estrella, 2012). El 2015 se publican las nuevas bases curriculares para los niveles 7° al 10°, las cuales presentan cuatro ejes temáticos: números, álgebra y funciones, geometría y probabilidad y estadística.

Las bases curriculares para los niveles 11° y 12° (3° y 4° medio), entregadas en noviembre del 2019, establecen un cambio radical para la asignatura de matemática, estructurando esta en cuatro temáticas: límites derivas e integrales, probabilidades y estadística descriptiva inferencial; pensamiento computacional y programación y geometría, definiendo además un plan de formación general cuyos objetivos para 3° y 4° medio en el

área de probabilidad y estadística es “fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal” (MINEDUC, 2019, p. 110 -111).

1.4.1 Currículo matemática enseñanza media chileno

La ley general de educación 20.370 de Chile establece en su artículo 17 que “la educación formal o regular está organizada en cuatro niveles: parvularia, básica, media y superior, y por modalidades educativas dirigidas a atender a poblaciones específicas” (MINEDUC, 2009, p 7). De manera complementaria, en el artículo 25 se establece que el nivel de educación básica regular tendrá una duración de seis años y el nivel de educación media regular tendrá una duración de seis años, cuatro de los cuales, en el segundo caso, serán de formación general y los dos finales de formación diferenciada. La educación parvularia no tendrá una duración obligatoria.

Para los niveles educación Parvularia, Básica y Media, el Ministerio de Educación establece bases curriculares, las cuales definen por ciclos o por años respectivamente los objetivos de aprendizajes que permiten el logro de los objetivos generales para cada nivel. Además, a partir de las bases curriculares se establecen los planes y programas para cada nivel y asignatura. El foco de las bases curriculares se sitúa en lo que los estudiantes deben aprender, en términos de habilidades, actitudes y conocimientos. Para ello define una progresión de los aprendizajes que son alcanzables para todos. Estas bases recogen diversas tendencias en materia curricular, en cuanto a la formulación clara y explícita de los objetivos de aprendizaje y de su progresión, y a la incorporación explícita de las habilidades necesarias en cada área de aprendizaje. Con ello busca entregar a los docentes una guía para focalizar y

organizar su quehacer y para diseñar procedimientos de evaluación o monitoreo de los aprendizajes (MINEDUC, 2015).

La ley de educación establece la prescripción curricular a través de objetivos de aprendizajes (OA), presentes en las bases curriculares. En estas últimas se definen dos categorías OA, los objetivos de aprendizajes transversales (OAT), que corresponden a los objetivos que derivan de los objetivos generales de la ley relacionándose con el desarrollo personal, la conducta moral y social de los estudiantes poseen un carácter más amplio y general; se considera que atañen al nivel completo (enseñanza básica o enseñanza media) y que su logro depende de la totalidad de los elementos que conforman la experiencia escolar, tanto en el aula como fuera de ella, sin que estén asociados de manera específica a una asignatura en particular. Por su parte, en los objetivos de aprendizajes los cuales definen los aprendizajes esperables para una asignatura determinada para cada año escolar, se presentan habilidades, actitudes y conocimientos que buscan favorecer el desarrollo integral de los estudiantes, evidenciando de forma clara y precisa cuál es el aprendizaje que el estudiante debe lograr (MINEDUC, 2013).

A continuación, en la *Tabla 1.2* se aprecian los OA de la asignatura de matemática relacionados al eje de “probabilidad y estadística” pertenecientes a las bases curriculares entregadas para los primeros cuatro niveles de enseñanza media.

Tabla 1.2

Objetivos bases curriculares eje probabilidad y estadística / probabilidad y estadística descriptiva e inferencial (Fuente: Elaboración propia).

Nivel	Objetivos
7° Básico	<ul style="list-style-type: none"> • Estimar el porcentaje de algunas características de una población desconocida por medio del muestreo. • Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con <i>software</i> educativo. • Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango: <ul style="list-style-type: none"> ○ Determinando las medidas de tendencia central para realizar inferencias sobre la población. ○ Determinando la medida de tendencia central adecuada para responder un problema planteado. ○ Utilizándolos para comparar dos poblaciones. ○ Determinando el efecto de un dato que es muy diferente a los otros. • Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con <i>software</i> educativo: <ul style="list-style-type: none"> ○ Estimándolas de manera intuitiva. ○ Utilizando frecuencias relativas. ○ Relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje. • Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con <i>software</i> educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos.
8° Básico	<ul style="list-style-type: none"> • Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles: <ul style="list-style-type: none"> ○ Identificando la población que está sobre o bajo el percentil. ○ Representándolas con diagramas, incluyendo el diagrama de cajón, de manera manual y/o con <i>software</i> educativo. ○ Utilizándolas para comparar poblaciones. • Evaluar la forma en que los datos están presentados: <ul style="list-style-type: none"> ○ Comparando la información de los mismos datos representada en distintos tipos de gráficos para determinar fortalezas y debilidades de cada uno. ○ Justificando la elección del gráfico para una determinada situación y su correspondiente conjunto de datos. ○ Detectando manipulaciones de gráficos para representar datos. • Explicar el principio combinatorio multiplicativo: <ul style="list-style-type: none"> ○ A partir de situaciones concretas. ○ Representándolo con tablas y árboles regulares, de manera manual y/o con <i>software</i> educativo. ○ Utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto.

1° Medio

- Registrar distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una tabla de doble entrada y en una nube de puntos.
- Comparar poblaciones mediante la confección de gráficos “xy” para dos atributos de muestras, de manera concreta y pictórica:
 - Utilizando nubes de puntos en dos colores.
 - Separando la nube por medio de una recta trazada de manera intuitiva.
- Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas.
- Mostrar que comprenden el concepto de azar:
 - Experimentando con la tabla de galton y con paseos aleatorios sencillos de manera manual y/o con software educativo.
 - Realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas.
 - Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso.
 - Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

2° Medio

- Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas:
 - Definiendo la variable.
 - Determinando los posibles valores de la incógnita.
 - Calculando su probabilidad.
 - Graficando sus distribuciones.
- Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.
- Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad:
 - Revisando informaciones de los medios de comunicación.
 - Identificando suposiciones basadas en probabilidades.
 - Explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas.
 - Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades.

3° Medio

y

4° Medio

- Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada,
-

diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

- Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.
 - Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.
 - Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.
-

A partir de los objetivos definidos en las bases curriculares el Ministerio de Educación define los programas de estudio para cada nivel en los cuales se explicitan los conocimientos, habilidades actitudes además de los objetivos de aprendizaje e indicadores de logros de los mismos. En la *Tabla 1.3* se aprecian los conocimientos previos, conocimientos y palabras claves del eje probabilidad y estadística desde 7° básico hasta 2° medio, dado que para 3° y 4° aún no existen los programas de estudio a la fecha de elaboración de esta tesis, y por ende no se podrán apreciar los conocimientos, palabras claves y conocimientos previos esperados para dichos niveles educativos.

Tabla 1.3

Conocimientos previos, palabras clave y Conocimientos eje Probabilidad y estadística (Fuente: Elaboración propia).

Nivel	Conocimientos Previos	Palabras Clave	Conocimientos
7° Básico	Diagramas de punto, tallo y hoja. Comparación de dos grupos. Conocimiento intuitivo de tendencia de eventos. Gráficos de barra doble y circulares.	Encuestas, censo, aleatorio, muestreo, frecuencias absolutas, frecuencias relativas, histogramas, datos categóricos, medidas de tendencia central, media, moda, mediana, rango, experimentos aleatorios, equiprobables, no equiprobables.	Muestreo, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, medidas de tendencia central (media, mediana, moda), rango y probabilidad teórica de un evento.
8° Básico	Muestreo, tablas de frecuencias absolutas y relativas, medidas de tendencia central y rango, probabilidades de eventos.	Medidas de posición, percentiles, cuartiles, datos agrupados, datos categóricos, datos numéricos, datos cuantitativos, principio combinatorio, evento compuesto.	Medidas de posición, percentiles y cuartiles. Principio combinatorio.
1° Medio	Operatoria con números racionales, muestreo, tablas de frecuencias absolutas y relativas, medidas de tendencia central y rango, probabilidades de eventos, medidas de posición, percentiles y cuartiles y principio combinatorio.	Distribuciones de características, tablas de doble entrada, nubes de puntos, diagrama de árbol, regla aditiva, regla multiplicativa, noción de azar, tabla de Galton.	Distribuciones de dos características distintas, separación de la distribución de dos poblaciones diferentes, de manera intuitiva, reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas y concepto de azar.
2° Medio	Función, experimento, variable, probabilidad (regla de Laplace), principio multiplicativo y regla aditiva.	Probabilidad, distribución, variable aleatoria, combinatoria, permutación, rol de la probabilidad.	Variable aleatoria, función distribución, combinatoria, permutación, probabilidad.
3° Medio	Varianza, desviación estándar, variable aleatoria, cálculo combinatorio de probabilidades	Probabilidad condicional, variable aleatoria discreta, función de probabilidad,	Probabilidad condicional, variable aleatoria discreta, función de probabilidad, distribuciones de

de eventos independientes,
diagramas de árbol de
probabilidad.

distribución de probabilidad,
experimentos aleatorios,
modelo probabilístico.

probabilidad, distribución
binomial, valor esperado de una
distribución binomial, varianza de
una distribución binomial,
desviación estándar de una
distribución binomial.

1.4.2 Cobertura del currículo chileno

Contrario a la creciente incorporación de contenidos en torno a probabilidad y estadística en el currículo chileno, es el tiempo destinado a la enseñanza de estos contenidos en las aulas. El Ministerio de Educación (2013) estableció que, en promedio, el currículum de matemática alcanza una cobertura declarada por los docentes del 73% en relación a los contenidos mínimos obligatorios (CMO) y de estos reportan menor cobertura aquellos que pertenecen a estadística y probabilidad. Esto está relacionado con el tiempo destinado para la ejecución del mismo, el cual ocupa las menores cifras en casi todos los niveles de educación media (grado 7º, 8º, 9º, 10º y 11º) con la excepción de 4º Medio (grado 12º), en donde a Geometría se le destina la menor cantidad de horas.

Este problema no es propio de un nivel educativo ni tampoco de algún país en particular, como se puso de manifiesto en los trabajos del Joint ICMI/IASE Study (Batanero, Burrill, Reading y Rossman, 2008; Batanero, Burrill y Reading, 2011) en los cuales se evidenció que la incorporación de la estadística desde la educación básica no es todavía un hecho. Esto de igual manera se puede observar en México en el nivel básico, en donde, a pesar de que en los programas oficiales están especificados contenidos de probabilidad y estadística, suele ser la última unidad que, por falta de tiempo e incluso por dificultades del

profesor en el tema, no son estudiados o lo son superficialmente (Alatorre, 1998; Alquicira, 1998).

1.5 EL ROL DE LOS DOCENTES EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA Y DE LA PROBABILIDAD

Los profesores tienen un papel esencial al interpretar el currículo y adaptarlo a las circunstancias específicas (Ponte, 2001). En consecuencia, el cambio de la enseñanza de la estadística en las escuelas e institutos dependerá del grado en que se pueda convencer a los profesores de que la estadística es uno de los temas más interesantes y útiles para sus estudiantes y que todos ellos tienen capacidad para adquirir algunos conceptos elementales.

Carreño, Muñoz, Ochsenius y Rodríguez (2013) realizaron una investigación en torno a los resultados obtenidos en la evaluación docente de los profesores de Chile, en la cual se analizaron los tres elementos que componen dicha evaluación: prueba contenidos disciplinares y conceptuales, portafolio y clase grabada. Dentro de las debilidades observadas en el eje de estadística y probabilidad, se encontraron fallas a nivel conceptual en la definición de equiprobabilidad, definición de mediana, diferencia entre variable continua y discreta, uso del diagrama de árbol, probabilidad de eventos conjuntos, probabilidad condicionada y análisis combinatorio.

Los datos analizados también señalan que los profesores poseen dominio de la operatoria, en particular en la resolución de problemas clásicos; pero se aprecian debilidades respecto a su comprensión conceptual profunda. Los hallazgos relativos al dominio disciplinario de los docentes arrojaron una comprensión conceptual limitada, que no admite flexibilidad ni fluidez en el manejo de los contenidos (Carreño et al., 2013).

1.6 PROBLEMAS DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA

Existen también dificultades propias de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística. Estas dificultades se han analizado en conceptos estadísticos aparentemente muy sencillos, tales como los de gráficas estadísticas, medidas de posición central, variabilidad y distribución, sobre los que se apoya la construcción de la idea de variable aleatoria (ver, por ejemplo, Shaughnessy, 2007, las actas de los ocho congresos ICOTS, y las revistas *Journal of Statistics Education* y *Statistics Education Research Journal*).

Algunos de estos problemas también pudieran ser producto de una enseñanza de la estadística no adecuada o heredados de la enseñanza formalista tradicional de la matemática determinística. Así, por ejemplo, tanto en Chile como en México y en España la enseñanza de la estadística tiene una fuerte tendencia a prescindir de los fenómenos aleatorios y de “algebraizar” los resultados de la estadística, con la consecuencia, entre otras, de fomentar muy poco el desarrollo del pensamiento estocástico (Ruiz, 2013).

La Agencia de la Calidad de Chile (2018), en el informe sobre el desempeño de matemática de los estudiantes de 2° medio en el sistema nacional de evaluación de resultados de aprendizaje (SIMCE), reportó que en el eje de datos y azar “los estudiantes de II medio comúnmente presentan errores al responder preguntas que requieren haber consolidado la comprensión del significado de la probabilidad y de las medidas de tendencia central” (Agencia de la Calidad, 2018, p. 38). En la *Tabla 1.4* se observan las descripciones generales entregadas.

Tabla 1.4

Eje de datos y azar. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de II medio en las pruebas SIMCE Matemática (Fuente: Agencia de la Calidad, 2018).

Sub-área	Ámbitos de aprendizaje	Errores específicos asociados a las respuestas incorrectas
Probabilidad	Comprensión de la probabilidad; determinación de una probabilidad a partir de información presentada en una tabla.	Divide el número de casos favorables por el número de casos no favorables; Considera la categoría de la tabla y no la frecuencia, determina la probabilidad como 1 dividido en el total de casos o como 1 dividido en la frecuencia de la categoría.
Medidas de tendencia central	Comprensión de medidas de tendencia central.	Confunde y determina otra medida; por ejemplo, calcular la media en vez de determinar la moda

El informe reporta que los errores descritos en relación a las respuestas entregadas por los estudiantes en las pruebas SIMCE de matemática se deben, principalmente, a dificultades asociadas a las estructuras conceptuales y los procedimientos de trabajo que los jóvenes han desarrollado en matemática en sus años de escolaridad (Agencia de la calidad, 2018). En la *Tabla 1.5* se aprecian las observaciones entregadas:

Tabla 1.5

Dificultades de aprendizaje observadas a partir de los errores en las respuestas de las pruebas SIMCE Matemática por parte de los estudiantes (Fuente: Agencia de la Calidad, 2018).

Dificultad de Aprendizaje	Presencia de dificultades en:
Estructuras conceptuales	La comprensión y uso de las definiciones, representaciones simbólicas y propiedades esenciales de los conceptos involucrados; el establecimiento de relaciones entre conceptos.
Procedimientos de trabajo	La apropiación de los algoritmos y la comprensión del significado de los símbolos y sus propiedades, en el contexto de la operatoria aplicada; la resolución de problemas, especialmente en lo que se refiere a la representación de una situación concreta utilizando el lenguaje matemático y a la interpretación de los resultados que se obtienen

1.6.1 Dificultades de aprendizaje y estudios sobre la variable aleatoria

Kachapova y Kachapov (2011) identifican algunas concepciones erróneas de los estudiantes sobre la variable aleatoria, por ejemplo, que una variable aleatoria X es cualquier función de valor real en el espacio muestral, cualquier variable aleatoria es discreta o continua, y pensar en una variable aleatoria continua como la variable con una función de distribución continua, esto debido a que la condición de continuidad de la función de distribución es necesaria pero no suficiente.

Algunos estudios sobre la variable aleatoria se han centrado en mostrar ejemplos de actividades que promuevan la idea de la variable aleatoria discreta (e.g., Magel, 1998; Zacharopoulou, 2006), mientras que otros versan sobre la comprensión conceptual de la idea de variable aleatoria y las conexiones o vínculos con otros conceptos como estimador, parámetro, distribución de probabilidad, distribución muestral y valor esperado (e.g., Broers, 2009). También están aquellos estudios que proponen actividades donde es necesario que los estudiantes tengan conocimiento previo sobre la variable aleatoria, para el estudio de las distribuciones de probabilidad, como la binomial, normal, exponencial; y enmarcados en ellas las características de la variable aleatoria binomial (e.g., Stephenson, Richardson, Gabrosek & Reischman, 2009; Griffiths; 2010; Leemis, Luckett, Powell & Vermeer, 2012) todos ellos centrados en etapas universitarias.

1.7 TEXTOS ESCOLARES: OTRA HERRAMIENTA PARA EL ALCANCE DE OBJETIVOS

Los libros de texto son un peso importante en la enseñanza, tal como es señalado por diversos autores. En el informe Cockcroft (1985, citado en Ortiz 2002), se afirma que *“los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula”* (p. 114). En Rico (1990) encontramos varias citas interesantes sobre el libro de texto, que recogemos a continuación. La primera, hace referencia al papel tradicional que en ocasiones ha desempeñado el profesor, afirma:

El profesor conserva, mantiene y transmite el saber institucionalizado en los manuales, donde aparece seleccionado y adecuadamente estructurado. El libro proporciona seguridad y continuidad en los puntos de vista, facilita la imagen de que el conocimiento es algo localizado, que se puede encontrar fácilmente y con respecto al cual el único trabajo posible consiste en su asimilación. Su determinación ya está hecha, y su base fundamentalmente es “científica”, apoyada por la tradición y la experiencia. Como el libro supone un gran esfuerzo de síntesis, planificación, estructuración y acomodación de contenidos, por encima de la capacidad del profesor medio, se considera el paradigma del conocimiento que hay que transmitir. (Rico, 1990, p. 22)

Sobre el papel que en ocasiones ha desempeñado el profesor, Rico (1990) afirma que *“en las matemáticas escolares el profesor ha concentrado sus esfuerzos en hacer de puente entre el libro de texto y el alumno, poniendo a veces un énfasis excesivo en que el segundo se adapte al primero”* (p. 57). De igual forma considera que uno de los factores que pueden hacer fracasar los intentos de cambio de un currículo de matemáticas son los libros de texto,

ya que “la carencia de materiales y libros de texto adecuados a los nuevos currículos son en ocasiones obstáculos insalvables” (Ibíd., p. 29).

Para Goetz y Lecompte (1988) el análisis de libros de texto sirve para identificar las diferencias entre los objetivos de un programa y los medios llevados a cabo para su puesta en práctica. También perfila los sesgos de los contenidos y objetivos de los currículos “la recogida y análisis de libros de texto, guías curriculares, apuntes de clase y otros archivos ofrecen una fuente inestimable de datos de clase” (p. 63).

Chevallard (1991, pp. 61-62) afirma que los libros de texto tienen dos características, una que ofrecen una concepción legitimada del texto del saber a enseñar y otra que se convierten en la norma de progresión del conocimiento de los alumnos. Robert y Robinet (1989) señalan que el estudio de los libros de texto es un medio indirecto de conocer el pensamiento de los profesores sobre un contenido específico. Romberg y Carpenter (1986) por su parte indican que “el libro de texto es visto como la autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje. La propiedad de las matemáticas descansa en los autores del libro de texto y no en el maestro” (p. 867). Aclaran también que, en su país no es costumbre apartarse de lo que se indica en los libros de texto y que, cuando se hace, es para aumentar el control de la clase y no para hacer el contenido más significativo.

Los libros de texto, junto con la pizarra han sido el medio predominante en la clase de matemáticas (Fey, 1980). A partir del National Longitudinal Study of Mathematical Abilities, Begle (1973) concluyó que el libro de texto tiene una influencia muy poderosa en lo que aprenden los estudiantes. Aunque algunos profesores enseñan temas no incluidos en el libro de texto, el autor concluye que, en general lo que se enseña coincide con el contenido de los libros de texto. Según Konior (1993) los libros de texto son una de las formas más

utilizadas para transmitir los conocimientos en matemáticas. Por ello la investigación de tales textos puede contribuir a la adquisición de conocimiento y maestría de métodos matemáticos en los diferentes niveles de educación matemática

1.7.1 Variable Aleatoria y Análisis De Textos

Tal como se comentó en la sección 1.3.2, Ortiz (2002) realizó un análisis de textos en torno a la probabilidad tomando una serie de conceptos probabilísticos, entre los cuales consideró la variable aleatoria. Ortiz determinó en el análisis la aparición de manera explícita e implícita de la variable aleatoria en los libros, entendiendo por explícita los casos en los cuales se describe la variable estadística en el tema de probabilidad, ya que una variable estadística se obtiene a partir de los valores observados de una variable aleatoria en una muestra. En la *figura 1.3* se aprecian los textos utilizados para el análisis.

Tabla 1.5.2. Muestra definitiva de libros de texto
[A]: Valdés, J.; Marsinyach, S. (1975). Matemáticas Bachillerato 1º Ed. Bruño, Madrid
[B]: Pérez, J. M. (1977). Matemáticas BUP I. Ed. Everest, León.
[C]: Etayo, J; Colera, J. (1978). Matemáticas 1º. Ed. Anaya, Salamanca.
[D]: Lazcano, I; Barolo, P. (1980). Matemáticas 1º BUP. Ed. Edelvives, Zaragoza.
[E]: Peña, J; Taniguchi, P. (1981). Matemáticas Bachillerato 1º. Ed. Magisterio Español, (Coslada) Madrid.
[F]: Caruncho, J.; Gutiérrez, M.; Gil, J. (1985). Matemáticas. BUP 1º. Ed. Santillana, Madrid.
[G]: Negro, A.; Pérez, S. (1986). Matemáticas, 1º BUP. Ed. Alhambra, Madrid. Reimpresión 1986.
[H]: Compostela, B.; González, A. y otros. (1987). Matemáticas 1º BUP. Ed. AKAL, Madrid.
[I]: Guzmán, M.; Colera, J.; Salvador, A. (1988). Matemáticas, Bachillerato 1º, Ed. Anaya, Madrid.
[J]: Alvarez, F.; García, C. (1990, 1ª Ed.). FACTOR- 1. BUP 1º. Ed. Vicens – Vives, Barcelona.
[K]: Vizmanos, J.R.; Anzola, M; Primo, A. (1991): Funciones 1. Matemáticas 1º BUP. Ed. SM, Madrid.

Figura 1.3. Textos utilizados para el análisis de Ortiz (Fuente: Ortiz, 2002).

El análisis fue realizado a partir de los significados establecidos por Ortiz, los cuales han sido expuestos en la sección 1.3.2. Algunos de los resultados encontrados por el autor en relación a la presencia de los significados, se presentan a continuación:

VA 1 La variable aleatoria toma sus valores dependiendo de los resultados de un experimento aleatorio

En [E], aparece implícitamente (p.183), al definir la esperanza matemática. Aunque no hemos encontrado este elemento de significado, en algunos libros de texto como en [G] y dentro del capítulo de estadística, en el apartado "*Estadística descriptiva. Terminología. Variable aleatoria*", se define el concepto de variable estadística de la siguiente forma: "*Se denomina variable estadística a la variable que toma valores, llamados resultados dentro de un determinado dominio o carácter, con una determinada frecuencia o probabilidad*" (Texto [G], p. 222). Después de aclarar que existen variables estadísticas cualitativas y cuantitativas y que éstas últimas a su vez pueden ser discretas y continuas, en el ejemplo 29 afirma que: "*La variable estadística espesor del dieléctrico de una fabricación en serie de una determinada pieza de un condensador es una variable aleatoria cuantitativa continua, pues, teóricamente, puede tomar cualquier valor del intervalo de extremos mayor y menor conseguidos*" (Texto [G], p. 222).

En este ejemplo observamos una mención explícita a la variable aleatoria y también una cierta confusión entre los conceptos de variable aleatoria y variable estadística, ya que la estadística viene dada por una distribución de frecuencias y la aleatoria por una distribución de probabilidad.

En el texto [A], aparece implícitamente, en el ejemplo de la página 59, donde se refiere a la distribución de frecuencias y la distribución de probabilidad. No tratan este concepto el resto de los textos analizados.

VA 2 Es una función del espacio muestral en R.

No tratan este aspecto ninguno de los textos analizados.

VA 3 Queda caracterizada mediante la distribución de probabilidad: Conjunto de valores que toma junto con su probabilidad

En [A], dentro del tema 5 denominado Variable estadística. Medidas de posición central. Medidas de dispersión, en el apartado 5.4 Distribución de frecuencias y de probabilidad a partir de un ejemplo de lanzar diez veces un dado, afirma que:

"En general: El conjunto de valores que puede tomar una variable aleatoria, juntamente con sus probabilidades respectivas, se llama una distribución de probabilidad. Si la variable aleatoria x puede tomar los valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ con probabilidades $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ la distribución de probabilidad se expresa Así:

X		$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
P		$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$

(Texto [A], p. 60).

Concluye comentando que las distribuciones de frecuencia y de probabilidad suelen representarse gráficamente mediante diagramas de barras o mediante sectores.

En [I], en el apartado dedicado al estudio de la frecuencia absoluta y relativa, que denomina "distribución esperada y distribución empírica" está introduciendo implícitamente la idea de variable estadística y variable aleatoria por medio de un

ejemplo de experimento aleatorio de lanzar un dado. La distribución esperada se refiere a la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "número de elementos al lanzar un dado" y la distribución empírica a la variable estadística correspondiente a la repetición del experimento un número dado de veces. Introduce explícitamente las frecuencias relativas, la distribución de frecuencias y la representación por diagramas de barras de las distribuciones de frecuencias y probabilidades y las compara (teórica y empírica).

Presenta la probabilidad de un suceso como el valor esperado de la frecuencia relativa correspondiente a dicho suceso en la variable estadística, frecuencia relativa del suceso en una serie de experimentos. Va mostrando, a través de un ejemplo, la convergencia de la distribución empírica según aumenta el número de experimentos hacia la distribución teórica (o esperada) (Texto [I], pp.229-236). Es éste el texto en que se presenta más claramente la relación entre estos conceptos, aunque el nivel de formalización no sea excesivo, lo cual puede parecer adecuado para el curso a que está dirigido. Señala que en algunos casos (dado sesgado) no poseemos la distribución esperada y procedemos al revés. Obtener una distribución empírica para un número grande de experimentos y hacernos una estimación de la distribución esperada:

"Hay ocasiones en que la experiencia aleatoria que se va a realizar tiene unas condiciones de regularidad tales que podemos tener, a priori (antes de hacer ninguna experiencia), la distribución esperada. Esto es lo que ocurre con los lanzamientos de dados o monedas correctas y con las extracciones de cartas en barajas completas. Posteriormente, la experimentación nos lleva a resultados que se parecen mucho a los esperados, tanto más cuanto mayor es el número de lanzamientos o de extracciones. Pero otras veces no hay ninguna referencia a priori. Solo la experimentación nos permitirá obtener datos sobre el comportamiento de los distintos sucesos. Los datos obtenidos serán tanto mejores (tanto más fiables) cuanto más larga sea la experimentación" (Texto [I], p. 231) No tratan este concepto el resto de los textos.

VA 4 Se requiere que, para cada intervalo I de R el conjunto original sea un suceso del espacio muestral.

No tratan este concepto ninguno de los textos analizados.

VA 5 Una variable aleatoria define una medida de probabilidad sobre el conjunto de números reales.

No tratan este concepto ninguno de los textos analizados.

VA 6 Para cada variable aleatoria podemos definir una función de distribución de la forma siguiente:

$$\begin{array}{l} 1) R: \longrightarrow [0, 1] \\ 2) x: \longrightarrow F(x) = P(\xi \leq x) \end{array}$$

No tratan este concepto ninguno de los textos analizados.

VA 7 La función de distribución de una variable aleatoria es una función real de variable real, monótona no decreciente.

No tratan este concepto ninguno de los textos analizados

VA 8 La función de distribución de una variable aleatoria determina en forma biunívoca la distribución de probabilidad.

No tratan este concepto ninguno de los textos analizados.

VA 9 Sea (x_i, p_i) $i \in I$ la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Se define la media o esperanza matemática como $E[\xi] = \sum_{i \in I} x_i p_i$. Este concepto extiende la idea de media en una variable estadística.

MOMENTOS:

La esperanza matemática o valor medio de la distribución de probabilidad es una de las ideas fundamentales en este campo, ya que, según Heitele (1975) puede ser precursora de la idea de probabilidad. Extiende la idea de media aritmética y permite definir un juego equitativo. En [E], dentro de un apartado denominado problemas de recapitulación, encontramos: "8. Se llama esperanza matemática de un juego a la suma de los productos de las cantidades que se pueden alcanzar por las respectivas probabilidades de obtenerlas. Un juego se llama equitativo cuando la esperanza matemática es igual a la apuesta. Por ejemplo; se paga 1 pta. por sacar una carta de una baraja española de 40 cartas; si sale una sota se cobran 2 ptas., si sale un caballo 3 ptas., y si sale un rey 5 ptas. Como la probabilidad de cada uno de estos sucesos vale $1/10$, se tiene: Esperanza matemática = $2 \text{ ptas.} \cdot 1/10 + 3 \text{ ptas.} \cdot 1/10 + 5 \text{ ptas.} \cdot 1/10 = 1 \text{ pta.}$ de modo que el juego resulta equitativo" (Texto [E], p. 183). A continuación, propone un problema donde hay que calcular la esperanza matemática de varios juegos e indicar si son o no equitativos. Vemos que en este ejemplo no solo se hace referencia explícita a la esperanza matemática y a la idea de juego equitativo, sino que implícitamente se está definiendo la variable aleatoria y su distribución. En [J], sólo aparece un ejercicio sobre la esperanza matemática que es el 58 (p. 301). No tratan este concepto el resto de los textos analizados.

VA 10 La moda es el valor más probable de la variable.

La moda es un valor central sencillo de calcular, sin embargo, no es tratada en los textos que hemos analizado, posiblemente debido a la limitación de tiempo.

VA 11 La mediana es el valor de la variable para el cual la función de distribución toma el valor $1/2$. Por tanto, la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor menor o igual a la mediana es exactamente $1/2$.

Autores no realizan comentarios sobre este punto

Para la presentación del análisis con base en los elementos del significado de la variable aleatoria de los libros de texto, se presentó una matriz, en donde las filas

representaron los textos a analizar y las columnas los elementos intencionales propuestos.

Tal como se muestra en la *figura 1.4*:

Tabla 2.7.1. Presentación del concepto de variable aleatoria en los textos analizados

	VA1	VA2	VA3	VA4	VA5	VA6	VA7	VA8	VA9	VA10	VA11
[A]	II		D								
[B]											
[C]											
[D]											
[E]	I								EE		
[F]											
[G]	I										
[H]											
[I]			IE								
[J]									E		
[K]											

IE= Implícitamente, Ejemplo; D= Definición, I = Implícitamente, E= Ejercicios, EE =Ejemplo y Ejercicio

Figura 1.4. Matriz de análisis (Fuente: Ortiz, 2002).

Cuando estos elementos de significado aparecían en los textos analizados, los indicaban según la leyenda que figura al pie de la tabla mostrada en la *figura 1.4*, y si no eran tratados aparece el casillero correspondiente en blanco.

Tras el análisis, Ortiz (2002) concluye que los únicos elementos de significado tratados en algunos textos son los relacionados con la definición, la caracterización mediante la distribución de probabilidad y la esperanza matemática. El resto de los elementos de significado no aparecen en ningún texto.

Además de los significados establecidos por Ortiz este consideró una serie de unidades de análisis y variables que nos parecen interesante rescatar en relación a la finalidad de este estudio.

Unidades de Análisis y Variables Consideradas Por Ortiz

(a) **Tipo de Actividad que se pide al alumno:** ejemplo introductorio, ejemplo después de la definición, ejercicio introductorio, ejercicio después de la definición y problema después de haber hecho un ejemplo similar.

(b) **Concepto al que el ejercicio se refiere explícitamente o implícitamente**

(c) **Tipología del ejercicio o ejemplo dentro de cada concepto**

- **SVA1: Determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria:** Se describe al alumno un experimento aleatorio y se define por intensión una variable aleatoria asociada al mismo. Se trataría de determinar el conjunto de valores que toma dicha variable, junto con las probabilidades asociadas.
- **SVA2. Determinar la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor determinado.** Se describe al alumno una cierta variable aleatoria, pidiéndole el cálculo de la probabilidad asociada a un cierto valor de dicha variable. El alumno deberá identificar el conjunto de sucesos elementales asociados a dicho valor y calcular la probabilidad del suceso compuesto identificado.
- **SVA3. Dada una lista de variables aleatorias, decidir si son cualitativas o cuantitativas y cuáles son discretas y cuáles continuas.** Se trataría de diferenciar entre los diferentes tipos de variables aleatorias, cuya importancia se debe a que los resúmenes estadísticos y tipos de gráficos varían según esta clasificación.
- **SVA4: Representar gráficamente la distribución de probabilidad de una variable aleatoria.** Se trataría de elaborar un diagrama de barras u otra representación gráfica adecuada, para representar gráficamente la distribución de

probabilidad. Además de identificar el tipo de variable aleatoria requeriría por parte del alumno un conocimiento sobre las representaciones gráficas correspondientes.

- **SVA5: A partir de la representación gráfica, hallar la distribución de probabilidad.** Sería la actividad inversa de la anterior y requiere, por parte del alumno, un conocimiento e interpretación correcta del gráfico.
- **SVA6: Obtener la función de distribución dada la distribución de probabilidad.** A partir de la distribución de probabilidad dada, bien en forma numérica, bien en forma gráfica, obtener la tabla de valores o la representación gráfica de la función de distribución. Esta actividad estaría relacionada con los conceptos de estadístico de orden, mediana, cuartiles y percentiles.
- **SVA7: Obtener alguno de los valores de posición central, media, mediana o moda o de dispersión.** Dada la distribución de probabilidad de la variable, obtener alguno de los valores centrales. Implicaría la idea de representar la variable aleatoria mediante un resumen numérico.
- **SVA8: Dada una distribución de probabilidad comprobar si verifica los axiomas de probabilidad.** Una variable aleatoria induce una probabilidad sobre el conjunto de números reales. La probabilidad de que la variable tome un valor particular o un conjunto de valores debe seguir los axiomas de probabilidad.
- **SVA9: Calcular el valor de la variable aleatoria al que corresponde una cierta probabilidad.** Es decir, calcular el valor de la variable al que corresponde un cierto valor de la función de distribución.

En relación a las tipologías de ejercicios propuestos por Ortiz, se puede apreciar en la *figura 1.5* los resultados obtenidos en relación a la presencia de estos en los textos analizados.

Tabla 3.9.1. Tipología de actividades sobre variables aleatorias/estadísticas

	SVA1	SVA2	SVA3	SVA4	SVA5	SVA6	SVA7	SVA8	SVA9
[A]	Ejemplo			Ejemplo					
[B]									
[C]									
[D]	Implícito								
[E]				Ejercicio					
[F]	Ejercicio								
[G]		Ejemplo		Ejemplo					
[H]									
[I]	Ejercicio	Implícito		Ejemplo	Ejemplo				Implícito
[J]	Implícito				Implícito				
[K]	Implícito			Implícito					

Figura 1.5. Resultados Tipología de ejercicios (Fuente: Ortiz, 2002).

Tal como se observa en la *figura 1.5*, algunas de las actividades consideradas en el estudio no se visualizaron en ninguno de los libros analizados. Tal fue el caso de los elementos extensionales: dada una lista de variables aleatorias, decidir si son cualitativas o cuantitativas y cuáles son discretas y cuáles continuas; obtener la función de distribución dada la distribución de probabilidad; Obtener alguno de los valores de posición central, media, mediana o moda o de dispersión y Dada una distribución de probabilidad comprobar si verifica los axiomas de probabilidad. Por otro lado, los elementos: determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria y representar gráficamente la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, fueron los que tuvieron mayor presencia en los textos analizados.

(d) Tipos de espacio muestral: espacio muestral infinito, espacio muestral finito, con dos elementos equiprobables, espacio muestral finito, con más de dos elementos equiprobables, espacio muestral finito y con sucesos no equiprobables. En la *figura 1.6*

se observa los resultados obtenidos en dicho análisis en relación a la frecuencia de aparición de los tipos de espacio muestral, observando una clara tendencia hacia los espacios muestrales finitos con sucesos equiprobables.

Tabla 3.9.3. Frecuencia y (porcentaje) del tipo de espacio muestral utilizado en los ejercicios sobre variable aleatoria en los textos analizados

Tipo de espacio muestral	Libro [I]	Libro [A]	Total
Finito, sucesos equiprobables con más de dos elementos	15 (88.23)	6 (100.00)	21 (91.30)
Finito, sucesos no equiprobables	2 (11.77)	0 (0.00)	2 (8.70)
Total	17 (73.90)	6 (26.10)	23 (100.00)

Figura 1.6. Resultado Tipos de espacio muestral (Fuente: Ortiz, 2002).

- (e) **Posible asignación de probabilidades a los sucesos:** regla de Laplace, información estadística disponible, realización o simulación de experimentos, consideración de probabilidad subjetiva, consideración geométrica de la probabilidad y leyes físicas. En la *figura 1.7* se observan los resultados encontrados en dicho análisis, en donde es posible observar una mayor presencia de la regla de Laplace y de información estadística y una nula aparición de las otras asignaciones propuestas.

Tabla 3.9.4. Frecuencia y (porcentaje) de la asignación de probabilidades en los ejercicios sobre variable aleatoria en los textos analizados

Asignación de probabilidad	Libro [I]	Libro [A]	Total
Regla de Laplace	15 (88.20)	6 (100.00)	21 (91.30)
Información estadística	2 (11.80)	0 (0.00)	2 (8.70)
Total	17 (73.90)	6 (26.10)	23 (100.00)

Figura 1.7. Resultados asignación de probabilidades a los sucesos (Fuente: Ortiz, 2002).

- (f) **Contexto del enunciado:** juego, biología, física, meteorología, sociedad, trabajo, etc, experiencia del alumno. En la *figura 1.8* es posible observar los resultados obtenidos en relación al contexto en el estudio realizado, en donde se aprecia que el único contexto presente en los libros de textos fue el de juego.

Tabla 3.9.5. Frecuencia y (porcentaje) de los contextos en los ejercicios sobre variable aleatoria utilizados en los libros analizados

Contexto	Libro [I]	Libro [A]	Total
Juego	17 (100.00)	6 (100.00)	23 (100.00)
Total	17 (73.90)	6 (26.10)	23 (100.00)

Figura 1.8. Resultados Contextos (Fuente: Ortiz, 2002).

(g) Presentación de la información: verbal, tabla, gráfico estadístico, diagrama de árbol, gráficos, diagramas de flechas, fotos o dibujos y tabla y gráfico. En la *figura 1.9* se presentan los resultados obtenidos en relación a la forma de presentación de la información.

Tabla 3.9.6. Frecuencia y (porcentaje) de la presentación de la información en los ejercicios sobre variable aleatoria en los textos analizados

Presentación información	Libro [I]	Libro [A]	Total
Verbal	11 (82.60)	6 (100.00)	17 (73.90)
Tabla	6 (17.40)	0 (0.00)	6 (26.10)
Total	17 (73.90)	6 (26.10)	23 (100.00)

Figura 1.9. Resultados Presentación de la información (Fuente: Ortiz, 2002).

En conclusión, en la mayoría de los textos utilizados en el análisis no se trata el concepto de variable aleatoria, esto resulta preocupante teniendo en cuenta su importancia. Tras el análisis, Ortiz (2002) concluyó que la variable aleatoria debiese ser tratada y relacionada con la probabilidad, aunque de una manera no excesivamente formalizada. También dejó plasmada la idea de que la variable aleatoria es compleja de trabajar, pero que es posible lograrlo realizando una distribución de los contenidos a lo largo de varios cursos, debiendo comenzar la formación estocástica en edades más tempranas.

Alvarado y Batanero (2008) realizaron un estudio en torno al análisis de dieciséis libros presentes en las bibliografías de estudiantes de ingeniería principalmente de Chile llevando sobre ellos un análisis de contenido, que sirve para efectuar inferencias mediante

la identificación sistemática y objetiva de las características específicas de un texto buscando el significado del discurso, su objeto de estudio fue el teorema central del límite, el cual estudia el comportamiento de la suma de variables aleatorias y es uno de los conceptos fundamentales en estadística. Dicha investigación fundó sus bases sobre el enfoque ontosemiótico, misma herramienta metodológica que se utilizará en la presente investigación. Algunos de los pasos descritos en su metodología fueron: (1) determinar los textos de estadística universitaria a analizar; (2) seleccionar los capítulos, mediante una lectura detallada de los que tratan el tema, clasificando y agrupando las diferentes definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones prototípicas; (3) determinar los elementos de significados, a partir del análisis epistémico, como guía para establecer el significado del teorema que se da en la institución universitaria, en este punto a partir de una investigación histórica- documental identificaron:

(a) Campos de problemas:

- CP1 *Obtener una aproximación de la distribución binomial para valores grandes de n .*
- CP2 *Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuida.*
- CP3 *Establecer la distribución de la suma de variables aleatorias discretas no idéntica-mente distribuidas.*
- CP4 *Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias continuas.*
- CP5 *Estimar el error de aproximación en el teorema central del límite.*
- CP6 *Encontrar condiciones necesarias y suficientes para el teorema.*
- CP7 *Obtener la distribución de la suma de variables aleatorias dependientes.*

- CP8 *Obtener el tamaño adecuado de una muestra de poblaciones desconocidas.*
- CP9 *Obtener la distribución de la suma de los logaritmos de variables aleatorias independientes.*
- CP10 *Obtener la distribución de diferencias de medias muestrales en dos poblaciones.*
- CP11 *Determinar la distribución de funciones de variables aleatorias.*
- CP12 *Estimar por intervalos de confianza la media y otros parámetros para muestras grandes.*
- CP13 *Establecer pruebas de hipótesis de la media y otros parámetros para muestras grandes.*

(b) Procedimientos

- AP1 *Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias.*
- AP2 *Tipificación/ destipificación del cálculo de probabilidades para obtener una muestra aleatoria de tamaño adecuado.*
- AP3 *Cálculo de probabilidades referidas al teorema con calculadora, tablas de distribución o programa de ordenador.*
- AP4 *Cálculo de probabilidades referidas al teorema a partir de simulación con materiales manipulables*

(c) Enunciados

- E1 *Enunciado del teorema mediante la convergencia de sucesiones de variables aleatorias.*
- E2 *Enunciado del teorema como límite ordinario de una sucesión de funciones.*

- E3 *Enunciado del teorema para la suma de variables independientes no idénticamente distribuidas.*
- E4 *Enunciado del teorema para la suma de variables independientes idénticamente distribuidas.*
- E5 *Enunciado del teorema de forma general.*
- E6 *Enunciado intuitivo del teorema.*
- (d) **Proposiciones**
- P1 *La media de una suma de variables aleatorias es siempre la suma de las medias, sea aproximada o exacta la distribución de dicha suma.*
- P2 *La varianza de la distribución de la suma de variables aleatorias independientes es la suma de las varianzas.*
- P3 *La media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximadamente normal.*
- P4 *La aproximación mejora con el número de sumandos.*
- P5 *Las transformaciones lineales de variables aleatorias también siguen una distribución asintótica normal.*
- P6 *Las medias muestrales en dos poblaciones siguen una distribución aproximadamente normal.*
- P7 *Aproximación de una distribución discreta por una continua.*
- P8 *Aproximación de algunas distribuciones clásicas a la distribución normal.*
- P9 *Los errores aleatorios siguen una distribución normal.*
- P10 *Los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal.*

P11 *Los estimadores de los momentos tienen distribución asintótica normal.*

P12 *Corrección de continuidad.*

En torno al lenguaje clasifican cuatro posibles áreas, a saber, términos y expresiones verbales, notaciones y símbolos, representaciones gráficas y simulaciones; (4) Elaborar tablas comparativas que recogen los elementos de significados en los distintos textos seleccionados; (5) análisis comparativo de contenido, entre lo que los autores de los libros seleccionados consideran más adecuado para este nivel educativo y el análisis del significado de referencia; (6) Presentación de conclusiones, mediante el análisis descriptivo de la información obtenida.

Algunas de las conclusiones obtenidas por los autores fueron que no se diferencia la aplicación del teorema para la suma de variables aleatorias y la media aritmética tampoco se acentúan problemas reales de la ingeniería con salida de software estadístico, ni se tratan las propiedades matemáticas del teorema en tópicos tan importantes de la inferencia estadística como los métodos de estimación, errores de estimación y aplicaciones a las distribuciones de probabilidades clásicas

Siguiendo una línea metodológica similar Alvarado y Segura (2012) estudiaron los significados de las distribuciones muestrales en 22 libros de texto presentes en las bibliografías recomendadas para estudiantes de ingeniería principalmente de Chile, para ello identificaron veinticinco situaciones problemas, ocho procedimientos, veintidós proposiciones y cinco argumentos que a continuación se listan.

(a) Situaciones problemas

SP1 *Determinar la distribución de la suma de dos variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuidas.*

- SP2 *Determinar la distribución de la suma de dos variables aleatorias continuas.*
- SP3 *Determinar la distribución de una combinación lineal de variables normales.*
- SP4 *Determinar la distribución de la suma de n variables aleatorias normales.*
- SP5 *Obtener la distribución de la media muestral en poblaciones normales.*
- SP6 *Determinar la distribución de la diferencia de medias muestrales en poblaciones normales.*
- SP7 *Obtener la distribución de la varianza muestral en poblaciones normales.*
- SP8 *Determinar el error de estimación en poblaciones normales.*
- SP9 *Obtener el tamaño adecuado de una muestra de población normal.*
- SP10 *Estimar parámetro de forma puntual.*
- SP11 *Obtener intervalo de confianza para la media muestral de poblaciones normales.*
- SP12 *Establecer pruebas de hipótesis de la media muestral de poblaciones normales.*
- SP13 *Aproximación de la distribución binomial.*
- SP14 *Distribución aproximada de la suma de n variables discretas independientes e idénticamente distribuidas*
- SP15 *Distribución de la suma de variables aleatorias discretas no idénticamente distribuidas.*
- SP16 *Distribución aproximada de suma de variables aleatorias continuas.*

- SP17 *Estimación del error de aproximación.*
- SP18 *Condiciones necesarias y suficientes del teorema central del límite.*
- SP19 *Distribución de la suma de variable aleatoria dependiente.*
- SP20 *Tamaño adecuado de una muestra de poblaciones desconocida.*
- SP21 *Distribución de los logaritmos de variable aleatoria independiente.*
- SP22 *Distribución de diferencias de medias muestrales en poblaciones desconocida.*
- SP23 *Distribución de funciones de variables aleatorias.*
- SP24 *Estimación por intervalos de confianza.*
- SP 25 *Pruebas de hipótesis para muestras grande.*

(b) Procedimientos

- AP1 *Cálculo de estadístico de variables aleatorias discretas acotadas.*
- AP2 *Cálculo de estadístico para datos agrupados en clases.*
- AP3 *Cálculo algebraico de variables aleatorias normales con calculadora y/o tablas estadísticas.*
- AP4 *Cálculo de probabilidades en poblaciones normales para obtener una muestra aleatoria adecuada.*
- AP5 *Cálculo algebraico y transformación de n variables aleatorias.*
- AP6 *Cálculo de probabilidades aproximada para obtener una muestra aleatoria adecuada.*

AP7 *Cálculo de probabilidades referidas al teorema central del límite con calculadora, tablas de distribución o programa computacional.*

AP8 *Cálculo de probabilidades referidas al teorema central del límite a partir de simulaciones con materiales manipulables.*

(c) Proposiciones

P1 *La media de la distribución de una combinación lineal de variables aleatorias es la suma de las medias por sus respectivas constantes numéricas*

P2 *El valor esperado de la distribución de la media aritmética es la media de la población*

P3 *La varianza de la distribución de una combinación lineal de variables aleatorias independientes es la suma de las varianzas por sus constantes numéricas al cuadrado.*

P4 *La varianza de la distribución de la media aritmética es la varianza de la población sobre el tamaño de la muestra de variables aleatorias independientes.*

P5 *El valor esperado de la distribución de la varianza muestral es la varianza de la población.*

P6 *La varianza de la distribución de la varianza muestral de poblaciones normales es la varianza de la población por una constante.*

P7 *La combinación lineal de variables aleatorias independientes normales sigue una distribución normal.*

P8 *La media aritmética de una muestra aleatoria de población normal tiene distribución normal.*

P9 *La suma de cuadrados de variables aleatorias independientes normales estándar tiene una distribución Chi-cuadrado.*

P10 *La suma de cuadrados de las desviaciones medias sobre la varianza de la población normal sigue una distribución Chi-cuadrado*

P11 *La distribución de la media muestral de la población normal con varianza desconocida sigue una distribución t-studen.t*

- P12 *La distribución de la diferencia de medias muestrales en poblaciones normales con varianzas conocidas sigue una distribución normal.*
- P13 *La distribución de la diferencia de medias muestrales en poblaciones normales con varianzas desconocidas sigue una distribución t-student.*
- P14 *El cociente de varianzas muestrales sobre las varianzas poblaciones normales sigue una distribución de Fisher.*
- P15 *La media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximadamente normal.*
- P16 *La aproximación mejora conforme crece el número de variables aleatorias.*
- P17 *Las diferencias de medias muestrales en dos poblaciones siguen una distribución aproximadamente normal.*
- P18 *Aproximación de una distribución discreta a la distribución normal.*
- P19 *Aproximación de una distribución continua a la distribución normal.*
- P20 *Los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal.*
- P21 *Los estimadores de los momentos tienen distribución asintótica normal.*
- P22 *Corrección por continuidad.*

(d) Argumentos

- A1 *Demostraciones formales algebraicas y/o deductiva*
- A2 *Presentación de casos particulares de un resultado general*
- A3 *Simulaciones manipulables de distribuciones en el muestreo.*

A4 *Simulación gráfica con el computador.*

A5 *Comprobación de ejemplos y contraejemplos, sin pretender generalizar.*

En torno al lenguaje identificaron términos, símbolos, gráficos y simulaciones. Algunos de los hallazgos encontrados fueron la baja presencia las representaciones manipulativas y de simulación, y el planteamiento de problemas con datos reales con salidas de software, los cuales son consideramos un recurso indiscutible de apoyo a la enseñanza de las distribuciones muestrales, por otro lado los textos apunta a ser más técnicos en ausencia de la fundamentación de propiedades estadísticas, y el procedimiento usual de resolver los ejercicios es mediante la representación manipulativa con su respectiva gráfica de barras, la forma usual de expresiones es simbólica, y en varios textos deducen las variables de distribuciones clásicas de probabilidad por medio de la suma de variables aleatorias independientemente e idénticamente distribuidas, de manera particular en los textos de estadísticas para la carreras de ingenierías no se observa en los autores que enfaticen las representaciones manipulables y la simulación gráfica con el ordenador; situación que se presenta también en los textos clásicos de estadística, en que predomina la argumentación y fundamentación de las proposiciones.

En palabras muy simples, la variable aleatoria es una función que asocia un valor numérico a cada evento del espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio (Walpole, Myers y Myers, 1999), es por ello que nos parece pertinente rescatar la investigación realizada por Parra y Pino- Fan (2017) cuyo foco fue el análisis ontosemiótico de los libros de textos chilenos para el objeto función, en dicha investigación se utilizó la

metodología propuesto por Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), la cual propone para los análisis de los significados curriculares, cinco criterios (p. 130-132):

- **Representatividad de los campos de problemas propuestos:** La elección de tareas matemáticas que pongan en juego los objetos y significados matemáticos es crucial para promover aprendizajes significativos. Para Freudenthal: “[La matemática como una actividad humana] es una actividad de resolución de problemas, de buscar problemas, pero es también una actividad de organización de una disciplina...” (Freudenthal, 1971, p. 413-414).

Los significados de objetos matemáticos están ligados a los sistemas de prácticas realizadas para resolver un determinado tipo de problemas, estos problemas deben ser representativos del campo correspondiente, a fin de que los significados que se propongan a los estudiantes sean representativos del significado global del objeto en cuestión.

Los campos de problemas identificados fueron: (a) Problemas que movilizan la función como correspondencia; b) Problemas que movilizan la función como relación entre variables; c) Problemas que movilizan la función como representación gráfica; d) Problemas que movilizan la función como expresión analítica; e) Problemas que movilizan la función como correspondencia arbitraria; y f) Problemas que movilizan la función desde un punto de vista conjuntista.

- **Tipo de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas:** Durante el proceso de análisis de la idoneidad epistémica es necesario considerar los distintos lenguajes utilizados para referir a los diferentes tipos de objetos matemáticos, así como los tratamientos y conversiones entre los mismos.

Los tipos de representaciones identificadas fueron: verbal, gráfica, simbólica, tabular e icónica, pudiendo estas ser previas para aquellas representaciones que debe, en principio, interpretar y decodificar el estudiante (o un sujeto) con la finalidad de comprender y abordar la tarea o emergentes para aquellas representaciones que surgen como parte de las respuestas de los sujetos (o respuestas que se espera que surjan, si se mira desde un punto de vista institucional).

- **Representatividad de los elementos regulativos y argumentativos:** A partir de los elementos lingüísticos identificados con el criterio anterior, se hace posible la identificación de definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos propuestos tanto en los Programas de Estudios como en libros de texto de matemáticas.
- **Conocimientos previos a la introducción de la función:** Este criterio se refiere a la enumeración, presentación y relación entre los conocimientos previos de la noción de función, que se formulan tanto en los libros de texto como en los Programas de Estudios.
- **Representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto del significado global de referencia:** Una de las tareas que son propias del maestro es el diseño instruccional, en la cual se involucran diversos aspectos tales como los epistémicos (contenidos), los cognitivos o los instruccionales. El conjunto de contenidos matemáticos que se proponen en los Programas de Estudios y en los textos, corresponden a una elección por parte de la institución: el currículo pretendido. Esos contenidos matemáticos y los significados conferidos a estos en los textos representan a los significados institucionales de

referencia. Para que la instrucción sea epistémicamente idónea, este conjunto de objetos y significados institucionales de referencia deben representar al significado global de la función. El énfasis en determinados significados y objetos matemáticos, y el desconocimiento de otros puede resultar en un cubrimiento epistémico parcializado que puede afectar la idoneidad del proceso de instrucción (p.132).

El estudio concluye que los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos en los textos escolares, mayoritariamente requieren de la activación de representaciones simbólicas, verbales y en menor medida gráficas. Usualmente se presentan problemáticas desde expresiones simbólicas o verbales de la función para posteriormente dar respuestas bajo representaciones simbólicas o gráficas, lo que pudiese estar limitando a los estudiantes ya que, de acuerdo con Elia, Panaoura, Eracleous y Gagatsis (2006) algunas dificultades de los estudiantes en la construcción de nociones matemáticas pueden estar vinculadas a la restricción de representaciones presentadas en los procesos de enseñanza.

1.7.2 La Política De Textos Escolares En Chile

El estado de Chile establece como política pública la entrega sistemática y gratuita de los libros de texto a todos los estudiantes y profesores de los establecimientos educativos de establecimientos públicos y particulares subvencionados en el país tratando así de entregar igualdad de oportunidades en los procesos de aprendizajes de todos los estudiantes, independiente de condición social, económica o territorial.

Esta política se comenzó a llevar a cabo desde el año 2000, a través del programa textos escolares de la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación

(UCE). A través de estas medidas se buscaba beneficiar principalmente a los profesores, los estudiantes y sus familias.

El sistema de apoyo contempla la integración de tres instrumentos tal como se puede apreciar en la *figura 1.10*, cuya función es apoyar y fomentar el aprendizaje de las y los estudiantes en torno al currículo nacional.

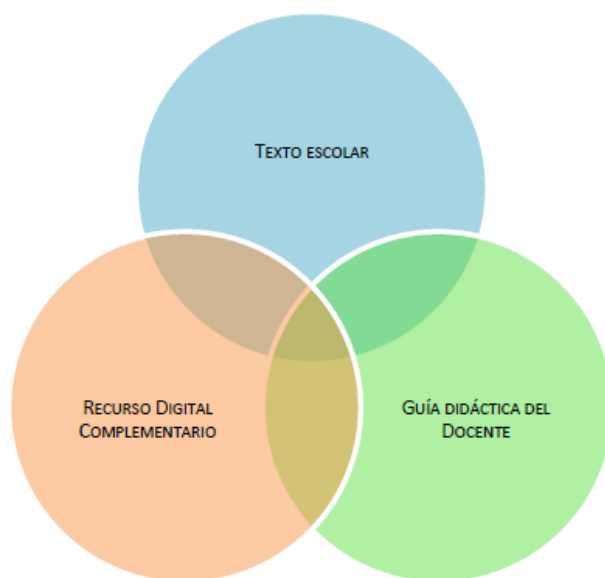


Figura 1.10. Instrumentos de la política textos escolares (Fuente: MINEDUC, 2018).

El Ministerio de Educación considera que los textos del estudiante son una herramienta clave en el proceso de enseñanza aprendizaje, siendo un vehículo de transmisión curricular adecuada para acceder de manera progresiva, a las habilidades, conocimientos y actitudes propias de las asignaturas definidas en los documentos curriculares de cada nivel.

Otro instrumento entregado son las guías didácticas del docente, las cuales son un instrumento de apoyo a los y las docentes, en estas se entregan orientaciones en torno a conocimientos teórico-práctico de la asignatura respectiva y las ciencias de la educación

(currículum, didáctica, evaluación), todo con base en el currículo establecido (*Guernica Consultores S.A*, 2016).

La propuesta del Texto del estudiante, la Guía Didáctica para el Docente y Recursos Digitales Complementarios se basa en una visión actualizada, que recoge los avances de las asignaturas respectivas y que promueve un aprendizaje de calidad de acuerdo con el currículum vigente. (Ibíd.)

En relación al proceso de adquisición de los libros de textos, cabe mencionar que estos son adquiridos en el mercado editorial a través de licitaciones públicas, el proceso abarca la elaboración de las bases de licitación y sus respectivos trámites administrativos, el desarrollo de las ofertas por parte de las editoriales, la evaluación de las mismas, la elegibilidad según sea el caso, la adquisición y la entrega de los textos al ministerio por parte de los proveedores, lo anterior permite la posibilidad de que los textos escolares sean confeccionados por más de una editorial. El objetivo del proceso de adquisición consiste en comprar las ofertas editoriales más adecuadas de entre las que se presentan. Es de suma importancia que los textos cumplan los requerimientos establecidos para su elaboración, estos requisitos contemplan la estrecha relación que estos deben tener con la normativa y orientaciones curriculares vigente.

1.7.3 Textos de Estudio y Guías Docente Matemática

A continuación, se presentarán los instrumentos entregados para la asignatura de matemática para los niveles 7° básico, 8° básico, 1° medio y 2° medio; en este estudio no se contemplan los textos escolares de 3° medio y 4° medio ya que los textos escolares de estos

niveles aún no están actualizados con las nuevas bases curriculares. Los detalles en relación a los contenidos de los instrumentos se centrarán en los ejes de estadística y probabilidad.

Instrumentos 7° Básico

La editorial a cargo de la elaboración de los textos para este nivel es la editorial SM. La propuesta editorial está compuesta por un texto para el estudiante, un cuaderno de ejercicios y una guía docente. En la presentación de la guía docente se expone que:

...la propuesta editorial, busca aportar en la implementación de las bases curriculares para la educación media exponiendo, por un lado, al estudiante a experiencias de aprendizajes que van en busca de desarrollar el pensamiento crítico, reflexivo y analítico y, por otro, entregando al docente herramientas que le permitan ser un mediador y un guía en este proceso, apoyando a los y las estudiantes con material complementario para realizar una mejor implementación de las experiencias en el aula. (Del Valle, 2015, p. 4).

(a) Texto del estudiante 7° Básico

En su presentación, el texto describe al estudiante que él será el protagonista de su propio aprendizaje, y el texto será un vehículo con el que, junto a su profesor o profesora, podrá adquirir los contenidos, el desarrollo de las habilidades, la realización de procedimientos y el fomento de actitudes propias de la matemática. Los contenidos propuestos para el eje de estadística y probabilidad se presentan en la tabla 1.6

Tabla 1.6

7° Básico contenido Texto estudiante unidad estadística y probabilidad (Fuente: Merino, Muñoz, Pérez, Rupin, 2015)

Temas	Puntos a tratar
Sección 10: Muestreo y representación de datos	<ul style="list-style-type: none">• ¿Qué debo saber?• Lección 40 ¿Qué es una población y una muestra?• Lección 41 ¿Cómo debe ser la muestra?• Lección 42 ¿Cómo organizar datos?• Lección 43 ¿Qué gráfico utilizar?• Mural: Los riesgos del consumo de bebidas energéticas con alcohol• ¿Cómo voy?• Resolución de problemas• Vuelvo a mis procesos
Sección 11 Medidas de tendencia central	<ul style="list-style-type: none">• ¿Qué debo saber?• Lección 44 ¿Qué es la media aritmética o promedio?• Lección 45 ¿Qué es la moda?• Lección 46 ¿Qué es la mediana?• Lección 47 ¿Cómo comparar muestras utilizando las medidas de tendencia central?• Mural: Bullying, ¿cómo nos afecta?• ¿Cómo voy?• Resolución de problemas• Vuelvo a mis procesos
Sección 12 Probabilidad	<ul style="list-style-type: none">• ¿Qué debo saber?• Lección 48 ¿Qué es un experimento aleatorio?• Lección 49 ¿Cómo estimar la probabilidad mediante la frecuencia relativa?• Lección 50 ¿Cómo determinar la probabilidad teóricamente?• Lección 51 ¿Cómo calcular probabilidades usando diagramas de árbol?• Mural: Simulando experimentos aleatorios con Excel.

- ¿Cómo voy?
 - Resolución de problemas
 - Vuelvo a mis procesos
-

(b) Cuaderno de Ejercicios 7° Básico

El cuaderno de ejercicios parte realizando la siguiente presentación para el estudiante:

... El siguiente material fue diseñado para reforzar y profundizar los conocimientos y habilidades que trabajarás durante este curso. Te encontrarás con actividades que te motivarán para comenzar el estudio de nuevos conocimientos, repasando aquellos necesarios para enfrentar con éxito cada nueva unidad. Este material está organizado en las mismas secciones y lecciones del texto e incluye recursos para realizar en forma individual y grupal, además de páginas destinadas a actividades de integración y evaluación, como también páginas enfocadas a la resolución de problemas. Al finalizar cada unidad tendrás disponibles actividades de cierre que integran los conocimientos y habilidades adquiridas durante el trabajo en ellas. Por último, en las páginas finales encontrarás las soluciones a los ejercicios y problemas incluyendo más de una opción para aquellas preguntas que lo requieran. (Santis, 2015, p. 1)

(c) Guía Docente 7° Básico

La guía docente comienza presentando el modelo didáctico en el cual se fundamenta el desarrollo del texto del estudiante, junto con los objetivos de aprendizajes, objetivos transversales y tiempo estimado de ejecución.

Las unidades de trabajo presentadas en la guía se corresponden con las presentadas en el texto del estudiante, al inicio de cada unidad se entrega el propósito y los objetivos propuestos para esta. Además, se presentan una serie de orientaciones metodológicas sobre cómo abordar el inicio de cada sección y el proceso de evaluación final junto con actividades complementarias, evaluaciones fotocopiables y un banco de preguntas con el solucionario de todas las actividades presentadas. Por último, incluyen ventanas didácticas y de profundización disciplinar y didáctica que permiten actualizar y conocer estudios e investigaciones recientes, de una bibliografía y páginas web recomendadas.

Instrumentos 8° Básico

La propuesta editorial para este nivel está a cargo de la editorial SM. La propuesta editorial está compuesta por un texto para el estudiante, un cuaderno de ejercicios y una guía docente.

(a) Texto del Estudiante 8° Básico

En su presentación el texto describe al estudiante que él será el protagonista de sus propios aprendizajes, y que el texto será un vehículo que, junto a su profesor o profesora, servirá para la adquisición de los contenidos, el desarrollo de las habilidades, la realización de procedimientos y el fomento de actitudes propias de la matemática. Los contenidos propuestos para el eje de estadística y probabilidad son:

Tabla 1.7

Contenidos de 8° Básico. Texto estudiante unidad estadística y probabilidad (Fuente: Catalán, Pérez, Prieto y Rupin, 2015)

Temas	Puntos a tratar
Sección 10: Interpretación y comparación de gráficos.	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué debo saber? • Lección 42 ¿Cómo interpretar la información de un gráfico? • Lección 43 ¿Cómo comparar gráficos? • Lección 44 ¿Cómo escoger el gráfico más adecuado para un requerimiento? • ¿Cómo voy? • Resolución de problemas • Vuelvo a mis procesos
Sección 11 Medidas de posición	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué debo saber? • Lección 45 ¿Qué es un percentil? • Lección 46 ¿Qué es un cuartil? • Lección 47 ¿Cómo representar gráficamente los cuartiles? • Lección 48 ¿Cómo construir diagramas de cajón usando un software? • Lección 49 ¿Cómo comparar muestras usando medidas de posición? • ¿Cómo voy? • Resolución de problemas • Vuelvo a mis procesos
Sección 12 Probabilidad	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué debo saber? • Lección 50 ¿Qué es el principio multiplicativo? • Lección 51 ¿Cuál es la cardinalidad de un espacio muestral? • Lección 52 ¿Cómo calcular probabilidades usando el principio multiplicativo? • ¿Cómo voy? • Resolución de problemas • Vuelvo a mis procesos • Sintetizo mis aprendizajes • Refuerzo mis aprendizajes • ¿Qué aprendí?

(b) Cuaderno de Ejercicios 8° Básico

Este material de trabajo sigue la lógica del cuaderno de ejercicios del nivel anterior, presentando ejercicios que apoyan las unidades de trabajo incluidas en el texto del estudiante, a través de los cuales se busca reforzar y profundizar los conocimientos y habilidades que trabajarás durante este curso.

(c) Guía Docente 8° Básico

La guía docente, al igual que para el nivel anterior, comienza presentando el modelo didáctico en el cual se fundamenta el desarrollo del texto del estudiante, junto con los objetivos de aprendizajes, objetivos transversales y tiempo estimado de ejecución. Las unidades de trabajo presentadas en la guía se corresponden con las presentadas en el texto del estudiante, al inicio de cada unidad se entrega el propósito y los objetivos propuestos para esta. Además, se presenta una serie de orientaciones metodológicas sobre cómo abordar el inicio de cada sección y el proceso de evaluación final junto a actividades complementarias, evaluaciones fotocopiables y un banco de preguntas, junto con el solucionario de todas las actividades. Por último, incluyen ventanas didácticas y de profundización disciplinar y didáctica, que permiten actualizar y conocer estudios e investigaciones recientes, de una bibliografía y páginas web recomendadas.

Instrumentos 1° Medio

La editorial a cargo de la elaboración de los textos para este nivel es Santilla. La propuesta editorial considera un texto para el estudiante, un cuaderno de ejercicios y una guía docente separados en dos tomos.

(a) Texto estudiante 1° Medio Matemática

En su presentación el texto escolar propone al estudiante que en el eje de probabilidad y estadística:

... registrarás y compararás distribuciones de dos características distintas empleando una tabla de doble entrada y una nube de puntos. Igualmente desarrollarás las reglas de las probabilidades en el contexto de resolución de problemas. Comprenderás el concepto de azar experimentando con distintas representaciones gráficas. (Galasso, Maldonado y Marambio, 2016. p. 3)

El texto se organiza en cuatro unidades en la línea de los ejes presentes en los programas anteriormente mencionados; en ellos se presentan una sección de inicio de unidad, evaluación inicial, presentación del tema, ejercicios propuestos y evaluación final. Además de lo anterior, el texto destaca la alusión a objetivos, habilidades y actitudes a trabajar a lo largo de sus páginas. Junto con la entrega de información complementaria para profundizar los contenidos, se presentan también actividades complementarias que son definidas como actividades en las que se vincula lo estudiado en una unidad con una situación contextualizada, a través de diversas actividades. A lo anterior se suma la sugerencia de herramientas tecnológicas y el uso de software, que tienen como finalidad apoyar la resolución de problemas; por último, mencionan que a lo largo del texto los estudiantes encontrarán vinculaciones del contenido con otras áreas del conocimiento y le serán presentadas pequeñas reseñas históricas de personajes que hayan aportado a la matemática. La Tabla 1.8 muestra los contenidos definidos.

Tabla 1.8

Contenido Texto de 1º Medio, unidad Probabilidad y estadística (Fuente: Galasso et al, 2016)

Temas	Puntos a tratar
Tema 1 Comparación de muestras	<ul style="list-style-type: none">• Relación entre dos variables cuantitativas• Relación entre dos variables cualitativas• Comparación de dos poblaciones
Tema 2 Propiedades de la probabilidad.	<ul style="list-style-type: none">• Unión e intersección de eventos.• Reglas aditivas de la probabilidad.• Reglas multiplicativas de la probabilidad
Tema 3 Comportamiento aleatorio	<ul style="list-style-type: none">• Paseos aleatorios y frecuencias relativas.• Herramientas tecnológicas.• Paseos aleatorios y probabilidad.• Actividades Complementarias

(b) Cuaderno de ejercicios 1º Medio Matemática

El cuaderno de ejercicios entrega en su presentación la siguiente descripción:

... Aquí encontrarás entretenidas y variadas actividades que te permitirán reforzar, ejercitar y profundizar los contenidos trabajados en tu texto de Matemática 1º Medio. (Galasso y Setz, 2016, p. 3)

Al igual que el texto del estudiante, el cuaderno de ejercicios se estructura en cuatro unidades que van en la línea de los ejes presentados en los programas de estudio. Las actividades del cuaderno siguen el orden de los contenidos del texto, identificado el tema y la unidad de cada ejercicio. Dentro de los ejercicios propuestos se presentan ítems de verdadero y falso, respuesta abierta o desarrollo y selección múltiple. Además, al final del cuaderno de ejercicios se presenta el solucionario de todas las actividades.

Guía Docente 1° Medio Matemática Tomo 2

La guía docente contiene una descripción de los pilares de la propuesta didáctica, la articulación de la propuesta editorial, fundamentación del modelo didáctico y la visión global del año. Para la unidad de probabilidad y estadística se presenta el propósito de la unidad, información curricular y la posterior planificación en base a las temáticas del texto del estudiante.

Instrumentos 2° Medio

La editorial a cargo de la elaboración de los textos de este nivel es SM, cuya propuesta editorial está compuesta por un texto del estudiante, una guía didáctica del docente y un cuaderno de ejercicios, los cuales se articulan a partir de un hilo conductor que cruza los distintos momentos didácticos y establece una secuencia y progresión que da cuenta de los objetivos de aprendizaje propuestos en el currículo.

(a) Texto estudiante 2° Medio Matemática

En la presentación el texto expone al estudiante que:

...Cada una de las actividades y secciones propuestas son instancias de aprendizaje que te harán cuestionarte, reflexionar y buscar respuestas creativas para llegar a la o las soluciones posibles. Aprender es un proceso natural que requiere de trabajos colaborativos que te permitirán debatir ideas, cuestionar procedimientos y llegar a acuerdos y conclusiones grupales.

(Chacón, García, Rupin, Setz y Villena, 2016, p. 3)

Al igual que para el nivel anterior, el texto se organiza en torno a los cuatro ejes de trabajo propuestos en los programas de estudio. El texto propone al estudiante que “cada

unidad se articula en torno a un hilo conductor, el que le permitirá comprender cómo la matemática está presente en la vida cotidiana” (Chacón et al., 2016, p. 8). Dentro del texto se presentan espacios para que los estudiantes propongan metas y estrategias como una forma de fomentar que el estudiante “sea protagonista de su propio aprendizaje” (ibíd., p. 8). A lo largo del texto se presentan lecciones cuyos objetivos y prerrequisitos son expuestos; dentro de la lección se propone un tema en torno al cual se engloban las actividades, apoyada por preguntas guías que invitan a cuestionar, justificar y fundamentar las ideas de los estudiantes. Se presentan también autoevaluaciones, talleres para trabajar las habilidades de resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar.

A continuación, la Tabla 1.9 muestra el contenido propuesto para la unidad de probabilidad y estadística.

Tabla 1.9

2º Medio contenido texto estudiante unidad probabilidad y estadística (Fuente: Chacón et al, 2016)

Temas	Puntos a tratar
Tema 1 Técnicas de conteos	<ul style="list-style-type: none">• ¿Cuándo se aplica el principio multiplicativo?• ¿Qué son las permutaciones y combinaciones?• ¿En qué se aplican las combinaciones?• Evaluación de proceso
Tema 2 Variable Aleatoria	<ul style="list-style-type: none">• ¿Qué es una variable aleatoria?• ¿Cuál es la probabilidad de una variable aleatoria?• ¿Cómo se grafica la distribución de una variable aleatoria?• Evaluación de proceso
Tema 3 Probabilidad	<ul style="list-style-type: none">• ¿Cómo se aborda la probabilidad en los medios de comunicación?

- ¿Cómo se aplica la probabilidad en la toma de decisiones?
 - ¿Cómo puede interpretarse la probabilidad?
 - Taller de habilidades
 - Evaluación de proceso
 - Matemática en acción
 - Sintetizo mi aprendizaje
 - Evaluación Final
-

(b) Cuaderno de ejercicios 2° Medio Matemática

Al igual que el texto del estudiante, el cuaderno de ejercicios se estructura en cuatro unidades que van en la línea de los ejes presentados en los programas de estudio. Las actividades del cuaderno se presentan siguiendo el orden de los contenidos del texto, identificado el tema y la unidad de cada ejercicio. No se detalla una descripción del formato de ejercicios que serán propuestos a los estudiantes.

(c) Guía Docente 2° Medio Matemática Tomo 2

La guía docente inicia presentando la articulación que existe entre los instrumentos que componen su propuesta editorial, tal como se puede observar en la *figura 1.11*.

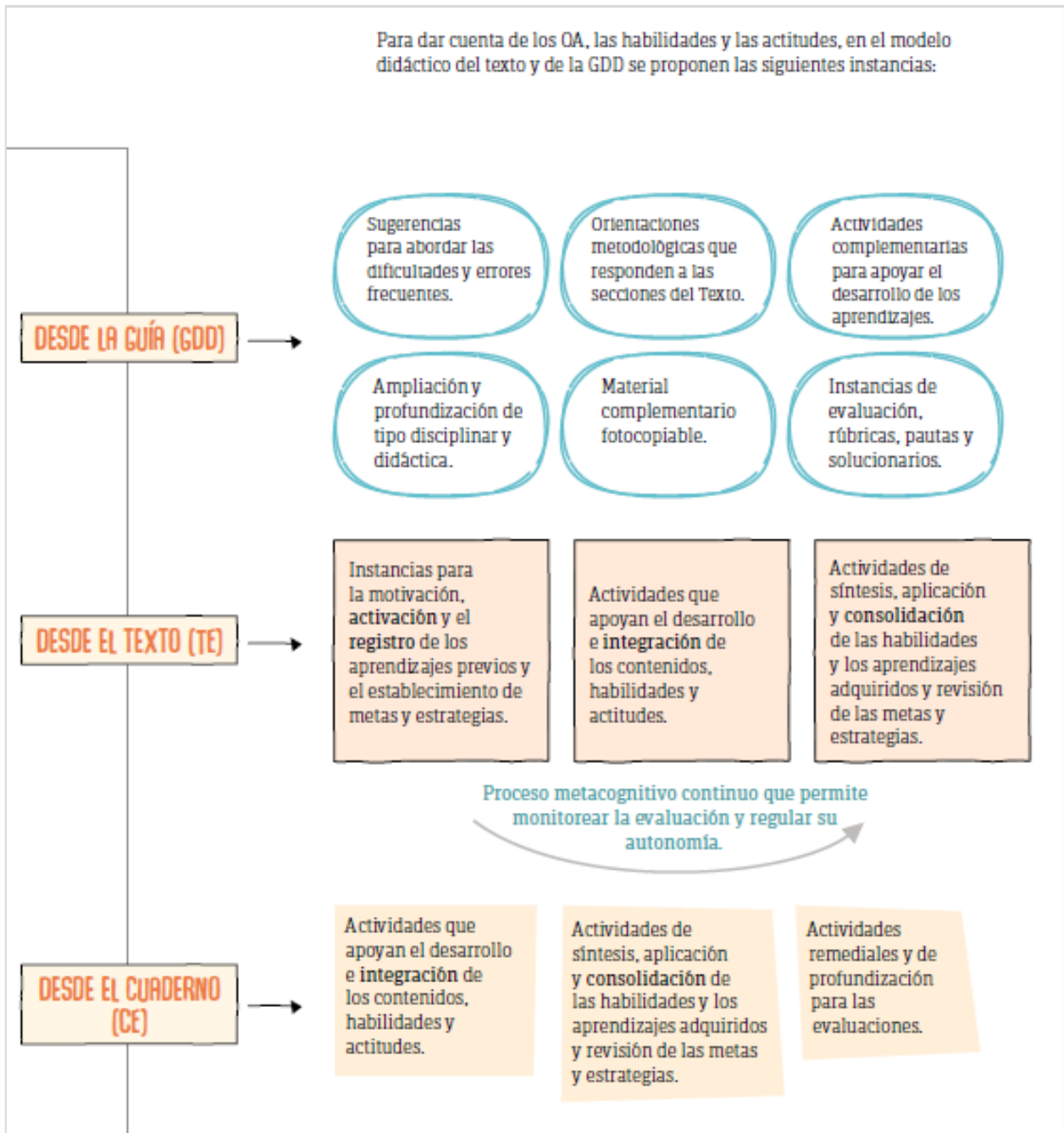


Figura 1.11. Articulación entre guía docente, texto de estudiante y cuaderno de ejercicios propuesto por editorial (Fuente: Santis, Muñoz y Díaz, 2017, p. 107)

Los contenidos propuestos en la guía docente, van de la mano con los detallados en el libro de texto del estudiante, incorporando algunos apartados propios de la labor docente.

1.8 USO Y VALORACIÓN DE LOS TEXTOS ESCOLARES EN CHILE

La política de textos escolares, como toda política pública, busca impactar en las comunidades; es por ello que una vez puesta en marcha un par de años surge la necesidad de evaluar el impacto de las políticas en las comunidades educativas. Un estudio encargado por el Ministerio de Educación en relación al uso y valoración de los textos escolares, arrojó conclusiones interesantes de destacar en torno a los textos escolares y guía docentes. En torno al uso del texto de matemática del estudiante (Guernica Consultores S.A, 2016, p. 74):

- la mayoría utiliza los textos “todas” o “la mayoría de las clases”, uno de cada cuatro (24.2%) reconoce el empleo sólo durante “pocas clases”. Se trata de una proporción elevada que invita a indagar sobre las razones de sub-uso.
- La utilización del texto de matemática entregado por el MINEDUC se asocia con fuerza a varios de los objetivos de trabajo en clase: en primer lugar, contribuye a la selección de ejercicios a desarrollar en clase, con un 82% de menciones agregadas (“de manera frecuente” y “muy frecuentemente”). En la misma línea, tres de cada cuatro docentes lo utilizan como apoyo “para trabajar los objetivos del aprendizaje”, para “seleccionar actividades a ser desarrolladas por los alumnos” y para el “estudio y consolidación de los aprendizajes”.
- En lo que hace a los componentes, el mayor uso se asocia a los ejercicios, con un 58.6% de “alto uso”; seguido de las actividades, con un 52.4%. Al reverso, la proporción de “alto uso” es bastante más baja a nivel de “evaluaciones” (20.1%) y “láminas” (26.9%). En este caso, no hay diferencias que respondan a una lógica, ni a nivel de cursos ni de dependencia.

Por su parte, en relación a la valoración del texto de matemática del estudiante, Guernica Consultores S.A (2016, p. 82) señalan:

- Los profesores relevan en primer lugar la utilidad del texto para desarrollar la habilidad de “usar estrategias y procedimientos propios de la disciplina”, con un 86.3% de respuesta “útil” y “muy útil”, de manera agregada; y seguidamente destacan, en una proporción similar, la contribución a “emplear diversas estrategias para resolver problemas y alcanzar respuestas adecuadas”.
- Avanzando en la estimación de aspectos más específicos, la “claridad de conceptos y definiciones”, el “nivel de dificultad de las actividades”, el “nivel de complejidad del vocabulario”, la “secuencia en el tratamiento de los objetivos” y el “ordenamiento de las actividades de las más simples a las más complejas”, reciben una calificación de “adecuados” o “muy adecuado” en una proporción que supera al 80% de las preferencias. Siempre en el contexto de una mayoritaria valoración, los aspectos más deficientemente evaluados remiten a la “cantidad de actividades sugeridas por el texto” y la “pertinencia de las actividades a los intereses de los estudiantes”. Aspectos que, no obstante, su buena calificación general, podrían requerir de algunos ajustes.
- Finalmente, en relación a la apreciación por algunos aspectos de las actividades propuestas por el texto, las mejores calificaciones remiten a que “sus instrucciones son claras”, con un 80.7% de acuerdo agregado. En general, todos los aspectos resultan bien evaluados, con acuerdo en a lo menos 3 de cada 4 opiniones en lo que hace tanto a los intereses de los estudiantes, lo adecuado de su extensión y de la cantidad propuesta. En tanto lo que, de manera coincidente con lo observado en

lenguaje, aparece como un elemento a mejorar, es la cercanía “con la realidad y el entorno escolar, familiar y comunitario de los estudiantes”.

Sobre la valorización y uso guía docente (Guernica Consultores S.A, 2016, p. 90):

- Masivamente, con un 90.8% de menciones, los profesores(as) de Matemática, disponen de un ejemplar de la Guía Didáctica del Docente, para su uso exclusivo; un 6.6% en cambio, sólo pueden consultarla en el establecimiento no disponen de un ejemplar propio; y un minoritario 2.5%, decididamente no ha tenido acceso. La disponibilidad no varía mayormente de acuerdo al *curso* involucrado, así como tampoco en función de la *dependencia* del establecimiento.
- Respecto al uso dado a la Guía, encabeza las primeras preferencias la “orientación general para comprender las directrices de la asignatura” (28.6%), seguida del uso como instrumento de planificación del curso (24.8%). Considerando las dos primeras menciones de manera conjunta, la primera frecuencia la asume el uso “como apoyo pedagógico principal para la preparación de clases”, con un 25.7% de las respuestas. E incluso asume importancia la utilización “como un texto más de consulta para la preparación de clases”. Lo que muestra su centralidad a la hora de realizar esta última tarea, que en conjunto como elemento principal o como un texto más alcanza el 46.2% de las respuestas.
- En lo que hace a satisfacción con las sugerencias de actividades propuestas en la Guía, en general la conformidad es muy alta cualquiera sea el eje curricular, con niveles que oscilan entre el 86.7% para el trabajo en medición hasta el 89.4% en el caso del trabajo con números y operaciones.

1.9 LA VARIABLE ALEATORIA COMO UN AGENTE DE CAMBIO: CONEXIÓN INTERDISCIPLINARIA MATEMÁTICA - HISTORIA

El crecimiento exponencial de la estadística y la probabilidad como ciencias se debe a la expansión de los campos de investigación; áreas como la biología, la economía, la salud, las políticas públicas, la astronomía entre otros, fueron contextos de crecimiento para una serie de elementos estocásticos, tales como por ejemplo la variable aleatoria.

En su calidad de idea fundamental, la variable aleatoria debe proporcionar al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, además de servir como brújula a la hora de tratar de vincular estas ideas con otras ramas de las matemáticas. Pero ¿será que la variable aleatoria se podrá vincular sólo con otras áreas de la matemática o será posible vincularla con áreas distintas a ésta? Si sus orígenes se remontan a una diversidad de campos, ¿Por qué limitarla sólo al estudio en el área de matemáticas?

Heitele (1975) considera que la variable aleatoria, sus características y elementos, tales como su distribución y esperanza, permiten que hombres y mujeres puedan comprender la sociedad en la que están inmersos. Como ejemplo se puede señalar que, a raíz del estallido social iniciado en octubre del 2019 en Chile, se ha comenzado a incluir con mayor frecuencia, en las conversaciones cotidianas, temas como la distribución de los sueldos de los ciudadanos, la tasa de natalidad del país y las proyecciones de estas para sustentar el modelo de pensiones para la tercera edad; se habla del aumento en la esperanza de vida de hombres versus mujeres. Al respecto, los medios de comunicación muestran resultados de encuestas a diario, sobre diferentes temáticas y notas, comparando la realidad de Chile con los demás países de Sudamérica, Europa y del mundo en general, comparando la progresión de este en los últimos años en temas como el PIB o nivel escolaridad, acceso a salud, etc. Los

ciudadanos de Chile están siendo bombardeados por información basada en conceptos como promedio, esperanza, distribuciones, es por ello que cabe preguntarse ¿tendrán los ciudadanos de Chile las herramientas para interpretar de manera crítica aquello que se les presenta? ¿Qué se está enseñando a los estudiantes de enseñanza media quienes forman parte activa de los debates comentados en torno a estos conceptos?

El Ministerio de Educación considera que la historia como asignatura permite al estudiante alcanzar una mejor comprensión de la sociedad y su rol en ella, es por ello que está conformada por disciplinas como Historia, Geografía, Economía, Demografía, Sociología y Ciencia Política, las cuales permiten estudiar al ser humano como individuo y como miembro de la sociedad desde distintas perspectivas. Los objetivos de aprendizaje de Historia, Geografía y Ciencias Sociales contemplan una serie de habilidades propias de las disciplinas que conforman esta asignatura. Estas habilidades son valiosas herramientas cognitivas necesarias para comprender los contenidos estudiados y para desarrollar conocimientos en otras áreas y en diferentes contextos de la vida. Se espera que la adquisición de conocimientos y el desarrollo de la capacidad de procesar la información contribuyan a que las y los estudiantes puedan tomar decisiones de una manera responsable e informada (MINEDUC, 2016).

Por otra parte, el Ministerio de Educación propone en sus bases curriculares que el eje de probabilidad y estadística debe responder a la necesidad de que todos y todas las estudiantes (futuros ciudadanos) aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos y, a partir de esto, se espera formar estudiantes críticos, que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones, que sean

capaces de determinar situaciones conflictivas a raíz de interpretaciones erróneas de un gráfico y de las posibles manipulaciones intencionadas que se pueden hacer con los datos.

Es por ello que, considerando el carácter de la variable aleatoria como idea fundamental, y los objetivos propuestos por el Ministerio de Educación en la asignatura de historia y el eje de estadística y probabilidad de la asignatura de matemática, resulta también interesante observar la evolución y usos de la variable aleatoria en la asignatura de historia.

1.10 UNA APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se ha mostrado la importancia de la variable aleatoria a lo largo de la historia, y cómo sus características y propiedades la hacen presente tanto en el mundo teórico como en la vida real a través de aplicaciones móviles en las que se aprecia el clima para un día, semana o mes, o se define la probabilidad de éxito de una pareja. Sin embargo, pese a su presencia en diversos campos y a las bondades que posee a la hora de realizar análisis, su comprensión no resulta un proceso fácil para profesores ni para estudiantes, ya que se debe manejar una serie de conceptos previos tales como los de función, espacio muestral, combinación de funciones, gráficos, probabilidad, conjuntos, entre otros, para lograr definirla de forma adecuada en niveles superiores. Sumado a lo anterior, la diferencia de herramientas para abordar situaciones con contextos discretos y continuos suma otra dificultad a la comprensión de la variable aleatoria.

Tanto estos antecedentes, como la incorporación de la estadística y la probabilidad en el currículo de educación chileno, nos induce a preguntarnos ¿De qué manera se enseña la variable aleatoria a lo largo del currículo de enseñanza media chileno? ¿Qué observar de todos los elementos que influyen en el proceso de aprendizaje de la variable aleatoria?

Godino y Batanero (1994, citados en Pino-Fan, Parra y Castro, 2019), establecen que los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados con los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados. Además, “el profesor, como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia” (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013, p. 147).

En la implementación dentro del aula, los significados del objeto variable aleatoria, considerados por el docente, se definen a partir de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013); a partir de ahí, se deriva la importancia de que los significados pretendidos por el currículo sean representativos del significado holístico de la noción de variable aleatoria.

Así, poniendo el foco en el currículo de matemáticas, entiendo a este como la dupla <textos escolares, programas estudio/bases curriculares>, cabe ahora preguntarnos: ¿Qué tipos de procedimientos presentan los libros de texto para el tratamiento de la variable aleatoria? ¿Los textos ilustran la componente gráfica como introducción al tema? ¿Qué definiciones ofrecen los libros de textos escolares sobre la VA?

En este sentido, en esta investigación nos proponemos aproximarnos a la respuesta de la siguiente pregunta:

¿Cuál es el tratamiento que hace el currículo chileno <libros de texto, programas de estudio> de matemáticas de educación media para la enseñanza de la variable aleatoria?

Una vez presentadas las nociones teóricas que sustentarán nuestro estudio, retomaremos con mayor precisión la pregunta anterior para formular tanto nuestra pregunta de investigación como los objetivo general y objetivos esp

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO, PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

2.1 INTRODUCCIÓN

El presente capítulo está organizado en tres grandes apartados. En el primero presenta las nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos. En un segundo apartado se establece la fundamentación teórica del planteamiento del problema donde se presentan tanto objetivos como las preguntas de investigación. Finalmente hemos descrito distintas fases y actividades conducentes a la consecución de nuestros objetivos de investigación.

2.2 EL ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS

El marco teórico seleccionado para el cumplimiento de los objetivos propuestos en esta investigación es el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemáticos de Godino y colaboradores, quienes han venido trabajando y actualizando las herramientas que componen este marco desde 1994 en diversos trabajos (Godino y Batanero,

1994; Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007). El EOS incorpora un modelo epistemológico, antropológico y sociocultural de las matemáticas, además de un modelo cognitivo e instruccional que permite a través de sus herramientas teóricas realizar análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Este marco teórico permite realizar un análisis profundo de los significados de la noción de un determinado objeto matemático, para fines de la presente investigación el objeto matemático de estudio es la variable aleatoria. A continuación, se describen las ideas centrales del Enfoque Ontosemiótico (EOS) que serán de utilidad para el desarrollo de esta investigación.

2.2.1 Sistemas de prácticas personales e institucionales

Dentro del EOS, la noción de sistema de prácticas tiene un papel protagónico tanto desde el punto de vista epistemológico como didáctico. Godino y Batanero (1994) conciben por sistema de prácticas a “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (p. 334). La naturaleza de las prácticas descritas por los autores se define a partir del ente que realiza dicha práctica, este puede ser una persona o compartidas en el seno de una institución; la serie de prácticas realizadas dan lugar a las nociones de sistemas de prácticas personales y sistemas de prácticas institucionales. Ambos sistemas son definidos por los autores de la siguiente manera (Ibíd., p. 337): “El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I”. Por su parte, “Los sistemas de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas

prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación $Pp(C)$ ” (Ibíd., p. 339).

Como señalan Font, Godino y Gallardo (2013), las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los textos matemáticos son leídos y producidos, y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas (p. 104).

2.2.2 Objetos intervinientes y emergentes en los sistemas de práctica

En el EOS se adopta de entrada un cierto pragmatismo puesto que se considera a los objetos matemáticos como entidades intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994). En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.), dichos objetos son utilizados al hacer matemáticas y son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas, y dan cuenta de su organización y estructura. Ahora bien, dado que los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales, entonces si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución los objetos intervinientes se considerarán objetos institucionales, mientras que si tales sistemas corresponden a una persona serán considerados objetos personales. Godino y Batanero (1994) lo señalan de la siguiente manera: “El objeto institucional OI es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de PI(C). Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de OI” (p. 338). Mientras que el “objeto personal Op es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de Pp(C)” (p. 339).

Además, dentro del EOS se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, intervinientes en los sistemas de prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007):

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
- Situaciones-Problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- Conceptos/Definiciones (introducidos mediante definiciones o descripciones) (experimento, espacio muestral, función, etc.).
- Propositiones/Propiedades (enunciados sobre conceptos).
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

De acuerdo con Pino-Fan (2014), estos seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

2.2.3 Significados y tipos de significados de los objetos matemáticos

En el EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función, media, esperanza, punto...), desde una perspectiva pragmático-antropológica. El significado de un objeto matemático se define como el “sistema de prácticas operativas y discursivas que

Capítulo 2. Marco teórico, problema de investigación y metodología

una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones–problemas en las que dicho objeto interviene” (Pino-Fan, 2014, p. 45). Así, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo cual da origen a los significados institucionales y significados personales respectivamente. Godino y Batanero (1994), definen estos significados de la siguiente manera: “Significado de un objeto institucional OI es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge OI en un momento dado” (p. 340). Por su parte, “Significado de un objeto personal Op es el sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto Op en un momento dado” (p. 341).

Es obvio que los objetos personales e institucionales no tienen un único significado. Por ejemplo, en una clase de matemáticas (una institución) en donde se lleva a cabo un sistema de prácticas de donde emerge el objeto “Variable Aleatoria”, el significado que los estudiantes atribuyan a dicho objeto dependerá de los sistemas de prácticas que lleve a cabo esa institución en particular, y que es distinto al significado subyacente a los sistemas de prácticas que lleve a cabo otra institución.

Los sistemas de prácticas se han categorizado teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre la faceta personal, de un sujeto, de las prácticas y la faceta institucional. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario

distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia.

La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de tipologías de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011). De acuerdo con Godino y Font (2007), son cuatro los tipos de significados institucionales (p. 2):

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico–epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Estos mismos autores (Ibíd., p. 2) proponen tres tipos de significados personales:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar el sujeto relativas a un objeto matemático.

- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

Como señalan Godino y Batanero (1994) los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados. Además, el profesor, como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013).

2.2.4 Configuraciones de objetos matemáticos

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (resolver un problema sobre la aplicación de la variable aleatoria) vemos el uso de los objetos matemáticos primarios descritos en la sección 2.2.2; por ejemplo, lenguajes verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones

simples que componen la práctica, y la acción compuesta de estas, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones–problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos los cuales se articulan conformando una configuración ontosemiótica (Pino-Fan, Godino y Font, 2015) la cual puede ser de carácter epistémico o cognitivo, según se refiera a objetos matemáticos y procesos institucionales o personales, respectivamente.

2.3 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El análisis de los textos, aunque no sustituye la observación de la enseñanza en el aula, puede proporcionar información para la construcción de instrumentos de evaluación para mejorar la enseñanza. Se han encontrado significados sesgados en la presentación de la probabilidad en algunos libros (Ortiz, Serrano y Batanero 2002). Considerando las investigaciones relacionados con la variable aleatoria presentadas a lo largo del capítulo 1, tales como Magel (1998), Ortiz (2002), Zacharopoulou (2006), Broers(2009), Kachapova y Kachapov (2011), Stephenson, Richardson, , Alvarado y Batanero (2008), Gabrosek y Reischman (2009), Griffiths (2010), Alvarado y Segura (2012) Leemis, Lockett, Powell & Vermeer (2012) Parra y Pino (2017) nos planteamos la siguiente pregunta de investigación ¿Cuál es el tratamiento que hace el currículo chileno <libros de texto, programas de estudio> de matemáticas de educación media para la enseñanza de la variable aleatoria? Sin embargo, tras presentar las herramientas entregadas por el EOS, presentadas en la sección 2.2, es posible decantar y pulir esa pregunta para observar el problema bajo el lente ofrecido por el EOS, es por ello que desde esa postura nos realizamos la siguiente pregunta de investigación (P.I):

P.I. *¿Cuáles son los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de educación media chileno sobre la variable aleatoria?*

2.3.1 Objetivos General y Específicos de investigación

Para tratar de aproximar una respuesta a la pregunta de investigación planteada anteriormente, se han definido los siguientes objetivos.

Objetivo general

Caracterizar los significados sobre la variable aleatoria pretendidos por el currículo chileno de educación media <libros de texto, programas de estudio>, para la enseñanza de dicha noción.

Objetivos específicos:

- OE1: Determinar el significado holístico de referencia de la variable aleatoria, identificando los pares <prácticas matemáticas, objetos matemáticos primarios intervinientes en tales prácticas>, a través de un estudio de tipo documental.
- OE2: Identificar las prácticas matemáticas (explícitas e implícitas) y los objetos matemáticos primarios que emergen de ellas, propuestas en los libros de texto y programas de estudio del currículo de educación media, para la enseñanza de la variable aleatoria.
- OE3: Estudiar la representatividad de los significados pretendidos en el currículo de enseñanza media, respecto del significado holístico de referencia sobre la variable aleatoria, destacando la relación de estos significados con los contextos en los que son puestos en juego.

La comparación realizada entre los significados de la variable aleatoria y los movilizados por el curriculum nos permitirá emitir juicios de valoración de la idoneidad epistémica del significado curricular de la noción de variable aleatoria. Además, nos permitirá proporcionar herramientas para los profesores de matemática quienes deben interpretar y abordar los aspectos curriculares tanto de los programas de estudio como de los libros de texto

2.4 METODOLOGÍA

La siguiente investigación trata de un estudio *cualitativo* (Rodríguez y Valdeoriola, 2009) dado que estamos interesados en caracterizar prácticas matemáticas propuestas tanto en los programas de estudio, como en los libros de texto. De manera particular dentro de este enfoque nos centraremos en realizar un análisis didáctico el cual es definido por Puig (1997) como “el análisis de contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos” (p.61). En una visión más amplia Font (2011) y Giménez, Font y Vanegas (2013) lo definen como: diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didácticos y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Para esta investigación, en congruencia con los desarrollos de Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), entenderemos por currículo a la dupla <Programas de estudio, Libros de Texto>. Así, el análisis conjunto de los Programas de Estudios y de los libros de texto, nos permite estudiar tanto el tratamiento que se le da a la variable aleatoria, como los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de Chile sobre tal noción.

El análisis de contenido es un proceso que demanda un gran esfuerzo cognitivo y creativo del investigador. Según Weber (1985), un tipo de medición aplicado a un texto, que

se basa en la idea de que las unidades del texto pueden clasificarse en un número reducido de categorías. Tiene por propósito la búsqueda del significado, efectuando inferencias mediante la identificación sistemática y objetiva de las características específicas de un texto (Ghiglione y Matalón, 1991). En la línea de didáctica de la probabilidad y estadística un libro de texto se considera como un segundo nivel de transposición didáctica, después del primer nivel que lo constituirán los currículos y programas oficiales. Si en un texto aparece un significado sesgado, éste puede llegar a transmitirse a los alumnos, debiendo el profesor que los usa mantener un permanente cuidado epistemológico del contenido de los libros de texto (Ortiz 1999).

A continuación, en la siguiente sección presentamos las fases que hemos planificado para llevar a cabo nuestro estudio.

2.4.1 Componentes y fases de la investigación

Para lograr los objetivos de esta investigación, nos hemos propuesto las siguientes fases de investigación, tomando como referencia los trabajos de Ortiz (2002), Alvarado y Batanero (2008), Alvarado y Segura (2012), Ruiz (2013) y Parra y Pino -Fan (2017):

Fase 1: Tareas de investigación relacionadas con OE-1

- Revisión y análisis de las investigaciones de tipo documental desarrolladas en torno al objeto variable aleatoria, con la finalidad de identificar contextos de uso, las principales problemáticas, así como las prácticas matemáticas desarrolladas para su solución, que dieron paso al surgimiento, evolución, y formalización, de dicha noción.
- Caracterizar las prácticas matemáticas identificadas con la tarea anterior, a partir de la identificación de los elementos clave de la configuración ontosemiótica epistémica:

Situaciones/problemas, representaciones, conceptos/definiciones y propiedades. Cada una de las configuraciones epistémicas identificadas llevará asociado un significado parcial de la variable aleatoria.

- Organizar y vincular los significados parciales obtenidos como resultado de la Fase 1, para reconstruir el significado holístico de referencia del objeto variable aleatoria. Si bien dentro del Enfoque ontosemiótico se consideran los siguientes objetos matemáticos primarios como elementos que configuran la práctica matemática de un sujeto o institución, elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos/definiciones, proposiciones/ propiedades, procedimientos y argumentos, en esta investigación nos ha resultado relevantes centrarnos en cuatro de tales 6 elementos, elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos/definiciones, proposiciones/ propiedades, dado que a nivel histórico estos nos permitieron identificar el sentido o significados conferidos a lo largo de la historia, según la literatura científica revisada, a la variable aleatoria (y sus características).

Fase 2: Tareas de investigación relacionadas con OE-2

- Estudiar y analizar los libros de texto de matemática sugeridos por los programas de estudio, de séptimo básico a segundo medio, propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, con la finalidad de identificar las prácticas matemáticas previstas para el estudio de la variable aleatoria.
- Estudiar y analizar los libros de texto de Historia, Geografía y Ciencias sociales sugeridos por los programas de estudio, de 8° básico y 2° medio, propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, con la finalidad de identificar las prácticas matemáticas que pudiesen estar vinculadas con el estudio de la variable aleatoria.

- Caracterizar las prácticas identificadas con la tarea anterior asociándoles un significado pretendido por los libros de texto sobre la variable aleatoria, el tipo de representación movilizada y el tipo de variable utilizada.
- Estudiar la correspondencia entre los significados pretendidos por el libro de texto respecto de los significados (resultado de la fase 1), sobre la noción variable aleatoria. Este estudio nos permitirá evaluar la representatividad (y riqueza matemática) de los significados pretendidos por el currículum chileno.

Fase 3: Tareas de investigación relacionadas con OE-3

- Estudiar y analizar los libros de texto de matemática sugeridos por los programas de estudio, de 7° básico a segundo medio, propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, con la finalidad de identificar los contextos presentes en las tareas propuestas.
- Estudiar y analizar los libros de texto de historia, geografía y ciencias sociales sugeridos por los programas de estudio, de 8° básico y 2° medio, propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, con la finalidad de identificar los contextos presentes en las tareas propuestas.
- Estudiar la correspondencia entre los contextos presentados en las tareas propuestas en los textos escolares respecto de los contextos de referencia en el que se ponen en juego los significados de la variable aleatoria.

2.4.2 Técnicas para el análisis de los datos

Para el análisis de los planes de estudio y los libros de texto, se considerará la metodología propuesta en Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), y usada por Parra y Pino – Fan (2017) la cual propone para los análisis de los significados curriculares cinco criterios los cuales fueron expuestos en detalle en la sección 1.7.1. combinada con algunos elementos

de estudio de los presentados por Ortiz (2002), Alvarado y Batanero (2008) y Alvarado y Segura (2012), a continuación se presentan los criterios que utilizaremos:

- *Tipo de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas:*

Durante el proceso de análisis de la idoneidad epistémica es necesario considerar los distintos lenguajes utilizados para referir a los diferentes tipos de objetos matemáticos, así como los tratamientos y conversiones entre los mismos. Con base en los hallazgos de las investigaciones que se han estudiado y descrito en el Capítulo 1, en relación a las representaciones que se deberían contemplar idóneamente para abordar el estudio de la noción de variable aleatoria, encontramos que para la noción de variable aleatoria deberían considerarse las siguientes representaciones: verbal, gráfica, simbólica, tabular e icónica. Hemos considerado las nociones de representaciones que proponen Pino-Fan y colaboradores (2013, p. 141), entendiendo, así como representaciones previas o inicial a las representaciones que debe, en principio, interpretar y decodificar el estudiante (o un sujeto) con la finalidad de comprender y abordar la tarea. Como emergentes entenderemos a aquellas representaciones que surgen como parte de las respuestas de los sujetos (o respuestas que se espera que surjan, si se mira desde un punto de vista institucional). Por último, con base en los resultados encontrados por Parra (2015), en relación a los tipos de representaciones activadas para el objeto función, se ha considerado la incorporación de representaciones transitorias en aquellos casos en los que es necesario que el estudiante transite por un tipo de representación entre la inicial y la emergente.

- *Representatividad de los significados*: Una de las tareas que son propias del maestro es el diseño instruccional, en la cual se involucran diversos aspectos tales como los epistémicos (contenidos), los cognitivos o los instruccionales. El conjunto de contenidos matemáticos que se proponen en los Programas de Estudios y en los textos, corresponden a una elección por parte de la institución: el currículo pretendido. Esos contenidos matemáticos y los significados conferidos a estos en los textos representan a los significados institucionales de referencia. Para que la instrucción sea epistémicamente idónea, este conjunto de objetos y significados institucionales de referencia deben representar al significado global de la variable aleatoria. El énfasis en determinados significados y objetos matemáticos, y el desconocimiento de otros puede resultar en un cubrimiento epistémico parcializado que puede afectar la idoneidad del proceso de instrucción (p.132). Con base en el estudio de las diversas etapas históricas de la evolución de la variable aleatoria, según diversos autores (e.g., Ruiz, 2013; Alvarado, 2008; Ortiz, 2002; Batanero, 2001; Hetitele, 1975, Alvarado y Segura, 2012) realizado en el capítulo 1, se da cuenta de que el objeto matemático variable aleatoria es el resultado de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 800 años. Así, fue posible identificar cuatro significados de la variable aleatoria, a partir de los campos de problemas y contextos de origen, los cuales se describen a continuación:
 - *Significado 1: La variable aleatoria como variable de interés*. Uno de los primeros campos de problemas en donde se vislumbra la idea de variable aleatoria, es el que se vincula con los juegos de azar. Sin embargo, el análisis matemático más formal de los mismos surgió en épocas relativamente

recientes (García, 1971). Las ideas plasmadas en estos trabajos son muy poco formales, pues no se menciona la existencia de variables o distribuciones de manera general. Sin embargo, sí se definen variables para casos particulares y, en ciertos casos, se trabaja con sus distribuciones. Diversos matemáticos se interesaron por el problema de estimar la apuesta equitativa en un juego de azar, lo que los llevó a considerar implícitamente variables aleatorias y su distribución. En términos modernos, su interés principal era la esperanza matemática de la variable. Tal fue el caso de Fournival, Cardano o Galileo, quienes, con base en su interés por encontrar la mejor apuesta en los juegos de azar, se dedicaron a estudiar resultados posibles al lanzar 3 dados. Más adelante, Pascal y Fermat, basados en las ideas de Fournival, Cardano y Galileo, inician con la teoría de probabilidades en búsqueda de la solución para las apuestas equitativas. Posteriormente es Huygens quien explicita la necesidad de pensar en una variable de estudio, es decir, una variable de interés en consideración al contexto. En el análisis de su solución, Huygens hace explícita la variable necesaria a analizar: “En primer lugar, debemos considerar el número de juegos que sigue deseando [ganar] cada jugador” (Huygens, 1714/1657, p. 4), para ello, se sitúa en el contexto del problema.

- ***Significado 2: La variable aleatoria como magnitud.*** De Moivre (1756) estableció un cambio con respecto a anteriores libros de probabilidad. Se comenzó a abandonar el latín y a escribirse o a traducirse contemporáneamente al inglés o al idioma del autor, lo que hizo que un vocabulario especialista se desarrollara más rápidamente al trabajar con un

idioma vivo. Además, mostraba un enfoque conceptual distinto, en donde separó claramente la probabilidad de un suceso de su valor o de su esperanza. En su tercera edición (De Moivre, 1756) estableció el paradigma de la probabilidad matemática, dejando atrás los problemas filosóficos y formando las bases teóricas a todas sus proposiciones (Ruiz, 2013). Según Pearson (1924), de Moivre escribió el primer tratamiento de la probabilidad integral y la esencia de la curva Normal, aportando con diversas herramientas para el campo de la probabilidad. En esa época, los científicos usaban la idea de variable ligada al estudio del análisis matemático. Comúnmente la llamaban cantidad o magnitud variable, lo cual evidenciaba su carácter de cualidad vinculada con la medición, proceso a través del cual, la cualidad podría tomar distintos valores.

- **Significado 3: La variable aleatoria como variable estadística.** Paralelo al desarrollo de la teoría de la probabilidad, a través de la resolución de problemas de juego, surgía el nacimiento de la estadística a través de la recopilación y descripción de datos sociales o económicos. El hombre ha tenido necesidad de realizar conteos y representaciones que podrían considerarse recuentos estadísticos sencillos desde tiempos inmemorables. La necesidad de conocer y planear, en el sentido de saber qué es lo que se tiene y hacer accesible y manejable esa información para tomar decisiones, ocasionó que poco a poco gobernantes, comerciantes y militares realizaran censos y recuentos cada vez más sofisticados. Es así como la variable estadística está asociada a la observación y descripción de una muestra de un

conjunto de datos. Siguiendo esta idea, Ríos (1967) propone que la variable estadística describe el conjunto de valores obtenidos en los datos al realizar un número n concreto de veces el experimento, es decir, si consideramos un experimento aleatorio S y realizamos un cierto número n de pruebas relativas al mismo, obtenemos un conjunto de observaciones denominadas muestra aleatoria de extensión n . Este conjunto de resultados dará lugar a una tabla estadística en que a unos ciertos valores de la variable corresponden ciertas frecuencias. A tal “variable, que representa únicamente los n resultados de n realizaciones del experimento aleatorio S , la denominaremos variable estadística” (Ríos, 1967, p. 70).

- **Significado 4: La variable aleatoria como función.** Hawkins y cols. (1992) consideran el concepto de variable aleatoria como una función con valores numéricos cuyo dominio es un espacio muestral. Borovcnik y cols. (1991) indican que una variable es aleatoria cuando su valor se determina como resultado de un experimento aleatorio, además, establece que para caracterizar a una variable aleatoria necesitamos conocer el conjunto de todos sus posibles resultados y las probabilidades asociadas a cada uno de ellos. Es así que una variable aleatoria se define como una función del espacio muestral E en el conjunto de números reales R . No cualquier función puede ser una variable aleatoria. Se requiere que, para cada intervalo I , el conjunto sea un suceso del espacio muestral y, por tanto, tenga una probabilidad bien definida. Esto garantiza que la variable aleatoria transporte la probabilidad P que está definida sobre el espacio muestral E a la línea real.

Contextos

Dado que los distintos significados emergen de diferentes contextos en los que se utiliza la variable aleatoria, nos parece relevante observar la presencia de estos ya que considerando el carácter de idea fundamental de la variable, nos parece relevante observar los contextos, considerando que estos sirven como antesala a las situaciones cotidianas a las que se pueden enfrentar los estudiantes en su rol de ciudadanos y ; para ello y con base en el estudio documental, se determinaron 9 contextos posibles, a saber: (a) *juegos de azar*, considerando para este toda tarea relacionada con dados, cartas, monedas, extracción de bolsa y otros; (b) *censos y registros*, considerando toda tarea relacionada con el conteo de una población y sus características; (c) *ciencias naturales y biológicas*, considerando para este toda tarea relacionada con medio ambiente, salud, flora y fauna; (d) *física y astronomía*, con el cual se consideran todas las tareas relacionadas con astros y procesos físicos tales como sonido, velocidad, entre otros; (e) *observación e interpretación a partir de encuestas*, que considera todas las tareas relacionadas con la interpretación de datos de encuestas no determinadas a una población en particular y cuyo tamaño es menor a la de un censo, también se consideran aquí el registro de datos en partidos de diferentes tipos de deporte; (f) *economía*, que considera todas las tareas relacionadas con aspectos económicos y políticos; (g) *formal*, considerando en una tarea cuyo contexto es el uso de axiomas y definiciones formales de la variable; (h) *intramatemático*, que considera aquellas tareas en las que se presenta el uso de nociones vistas previamente a través de una pseudo-aplicación, en el sentido que se aplica pero a una situación ficticia, solo para movilizar conocimientos matemáticos; y (i) *sin contexto*.

- *Representatividad de los campos de problemas propuestos:* La elección de tareas matemáticas que pongan en juego los objetos y significados matemáticos es crucial para promover aprendizajes significativos. Según Freudenthal (como se citó en Parra, 2015): “[La matemática como una actividad humana] es una actividad de resolución de problemas, de buscar problemas, pero es también una actividad de organización de una disciplina...”. Los significados de objetos matemáticos están unidos a los sistemas de prácticas realizadas para resolver un determinado tipo de problemas, dichos problemas deben ser representativos del campo correspondiente, a fin de que los significados que se propongan a los estudiantes sean representativos del significado global del objeto en cuestión. Para este estudio, se analizarán las tipologías de problemas propuestas por Ortiz (2002), descritas en el capítulo 1 en relación a las tipologías exclusivamente para aquellas tareas relacionadas con el significado S4 variable aleatoria como función, ya que no se encontró en la literatura tipologías relacionadas a los otros significados. Sin embargo, se irán dejando observaciones que puedan orientar la definición de tipologías a definir en una futura investigación.

Además de los dos criterios definidos por Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), incorporamos el siguiente:

- *Tipo de variable presente en las tareas propuestas:* Dado el carácter discreto o continuo que puede tomar la variable aleatoria y el rol decidido de estas en torno al tipo de tratamiento que se le debe otorgar a estas en cada caso, resulta indispensable identificar los tipos de variables presentes en las tareas propuestas y la relación de estas con los significados de referencia. Con base al estudio documental realizado, se

definen cuatro casos posibles para el tipo variable: (a) discreta, cuando se toma un número finito o infinito numerable de elementos; (b) continua, si toma un número infinito no numerable de elementos; (c) mixta en aquellos casos en los que se movilizan variables de tipo cualitativa y cuantitativa a la vez, y (d) nulo en aquellos casos en los que no se define ningún tipo de variable.

Como se puede observar, los cuatro criterios antes mencionados involucran el uso de las herramientas teórico-metodológicas propuestas por el EOS y que han sido descritas en el apartado 2.2 de este capítulo.

2.4.3 Población y Muestra

La población considerada para este estudio corresponde a los instrumentos que componen el currículo de matemática chileno; tal como se comentó en apartados anteriores, el currículo está compuesto por los programas de estudio y los libros de texto. En relación a los libros de textos, podemos comentar que el Ministerio de Educación a través de la unidad de currículum y evaluación del Ministerio de Educación (UCE) hace entrega instrumentos de apoyo para el proceso de enseñanza–aprendizaje, los cuales consideran libros de textos para el estudiante, guía docente y recursos digitales complementarios, en todos los niveles y todas las asignaturas. El conjunto de instrumentos es encargado a diferentes editoriales a través de licitación pública. La *figura 2.1* muestra las editoriales a cargo de la elaboración del material de matemática e historia, geografía y ciencias sociales para cada nivel.

Capítulo 2. Marco teórico, problema de investigación y metodología

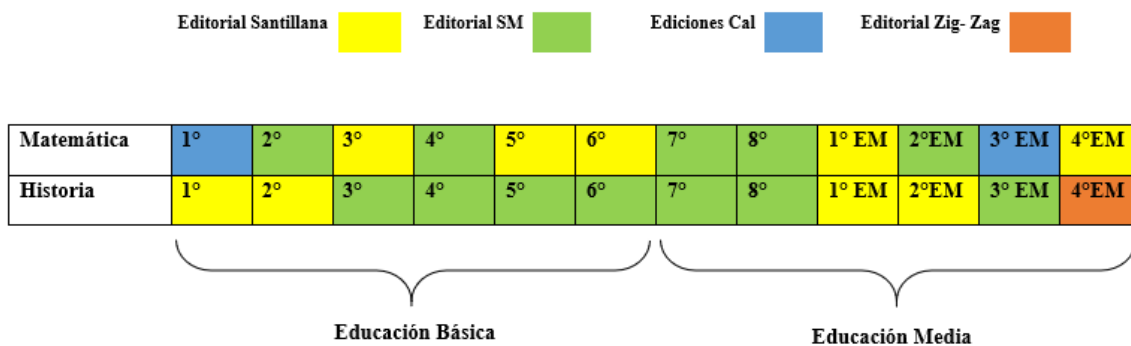


Figura 2.1. Editoriales responsables de la edición de textos de matemática e historia, geografía y ciencias sociales (Fuente: Elaboración propia).

De esta población se ha escogido como muestra de estudio los textos de matemática correspondientes a los niveles de 7° básico, 8° básico, 1° medio y 2° medio dejando fuera los textos de 3° y 4° medio ya que durante el desarrollo de esta tesis aún no se encontraban ajustados a las nuevas bases curriculares promulgadas en junio del 2019 para dichos niveles. Además, considerando la relación entre el eje de estadística y probabilidad con los objetivos establecidos por la asignatura de historia, geografía y ciencias sociales en torno al desarrollo de habilidades como el pensamiento crítico, se ha decidido considerar el texto de historia, geografía y ciencias sociales de 8° básico y 2° medio.

Las unidades de estudio dentro de los textos escolares de matemática serán las relacionadas con el eje de estadística y probabilidad, en las cuales se incorporan las nociones de nuestro objeto de estudio, para el caso de los textos de historia, geografía y ciencias sociales el análisis se extenderá a la totalidad de las unidades ya que no es posible determinar una unidad específica de vinculación con la variable aleatoria.

En relación a los programas de estudio se analizarán los programas de estudio desde 7° básico a 2° medio. De cada uno de los textos y programas de estudio escogidos se identificaron las tareas propuestas las cuales corresponden a nuestra unidad de análisis.

2.4.4 Interfaz de apoyo para análisis

El análisis de tarea no es una actividad sencilla ya que implica la observación e identificación de diversos aspectos y llevar un registro manual de dicho proceso lo que puede tornarse engorroso, poco efectivo y una carga adicional a la hora de elaborar bases de datos para los análisis, es por ello que decidimos crear una interfaz que permitiría visualizar las imágenes de las tareas, asignar categorías de análisis de manera predefinida y observaciones en un mismo momento y de manera ordenada cuyo registro se almacenara de forma paralela una base de datos considerando las categorías de estudio lo que facilita el posterior análisis y vínculo con los softwares estadísticos. La interfaz se creó utilizando el programa Access el cual pertenece a la línea de Microsoft Office, en él se creó un formulario de ingreso y una base de datos que posteriormente se vinculó a Excel y a Tableau para desarrollar los análisis. En las figuras 2.2 y 2.3 se aprecia la base de datos de almacenamiento y la interfaz de análisis.

Capítulo 2. Marco teórico, problema de investigación y metodología

Id	Curso	Asignatura	Problema	Inciso	Página de d.	Contexto	Significado	Tipo de Vari
30	7º Básico	Matemática	Tarea 1	todos	280	Sin contexto	Problema sin Clasificación	
31	7º Básico	Matemática	Tarea 2	a-g	282	Observación e interpretación a partir de encuestas	S1: Como variable de interés	Mixta
32	7º Básico	Matemática	Tarea 3	a y b	282	Observación e interpretación a partir de encuestas	S3: Como Variable estadística	Discreta
33	7º Básico	Matemática	Tarea 4	a-d	282	Observación e interpretación a partir de encuestas	S3: Como Variable estadística	Discreta
34	7º Básico	Matemática	Tarea 5	a y b	283	Sin contexto	Problema sin Clasificación	Continua
35	7º Básico	Matemática	Tarea 6	a	283	Observación e interpretación a partir de encuestas	S1: Como variable de interés	Discreta
36	7º Básico	Matemática	Tarea 7	a y b	283	Observación e interpretación a partir de encuestas	S1: Como variable de interés	Discreta
37	7º Básico	Matemática	Tarea 8	1- 2	284	Observación e interpretación a partir de encuestas	S1: Como variable de interés	Discreta
38	7º Básico	Matemática	Tarea 9	1-4	285	Observación e interpretación a partir de encuestas	S3: Como Variable estadística	
39	7º Básico	Matemática	conclusión de sección		285	Sin contexto		
40	7º Básico	Matemática	Tarea 10		286	Sin contexto	S1: Como variable de interés	Mixta
42	7º Básico	Matemática	Tarea 11		286	Censos y Registros	S3: Como Variable estadística	Discreta
43	7º Básico	Matemática	Tarea 12	a-j	287	Sin contexto	S1: Como variable de interés	Mixta
44	7º Básico	Matemática	Tarea 13		287	Observación e interpretación a partir de encuestas	S1: Como variable de interés	Mixta
45	7º Básico	Matemática	Tarea 14		287	Observación e interpretación a partir de encuestas	S1: Como variable de interés	Discreta
46	7º Básico	Matemática	Tarea 15	a y c	287	Observación e interpretación a partir de encuestas	S1: Como variable de interés	Discreta
47	7º Básico	Matemática	Tarea 16	1-3	289	Ciencias Naturales y Biológicas	S3: Como Variable estadística	Discreta
49	7º Básico	Matemática	Conclusión de sección		0			
50	7º Básico	Matemática	Tarea 17	a- h	290	Intramatemático	Problema sin Clasificación	
51	7º Básico	Matemática	Tarea 18	a y b	290	Observación e interpretación a partir de encuestas	Problema sin Clasificación	Discreta
52	7º Básico	Matemática	Tarea 19	a - c	290	Observación e interpretación a partir de encuestas	S1: Como variable de interés	Mixta
53	7º Básico	Matemática	Tarea 20	a - d	290	Sin contexto	Problema sin Clasificación	
54	7º Básico	Matemática	Tarea 21	a	290	Observación e interpretación a partir de encuestas	S3: Como Variable estadística	Discreta
55	7º Básico	Matemática	Tarea 22		291	Ciencias Naturales y Biológicas	S3: Como Variable estadística	Discreta
56	7º Básico	Matemática	Tarea 23		291	Observación e interpretación a partir de encuestas	S3: Como Variable estadística	Discreta
57	7º Básico	Matemática	Tarea 24		291	Juegos de Azar	S3: Como Variable estadística	Discreta
58	7º Básico	Matemática	Tarea 25	1 y 2	291	Sin contexto	S3: Como Variable estadística	
59	7º Básico	Matemática	Tarea 26	1 y 2	291	Observación e interpretación a partir de encuestas	S3: Como Variable estadística	Mixta
60	7º Básico	Matemática	Tarea 27		292	Censos y Registros	S3: Como Variable estadística	Discreta

Figura 2.2. Repositorio de base de datos (Fuente: Elaboración propia).

Los campos de ingreso considerados tanto en la interfaz de usuario como en el base de datos son: el curso o nivel educativo al cual pertenece la tarea, la asignatura, los incisos de la tarea que se están considerando; el código de análisis asignado, la página del documento del que es extraída la tarea; el objetivo de aprendizaje con el cual se relaciona la tarea para aquellos casos en que la tarea se extrae de un programa de estudio; el contexto que se le asocia, el tipo de significado que se le asocia, el tipo de variable que moviliza, los tipos de representaciones inicial, transitoria y emergente; elementos intencionales y tipologías de problemas del significado como función y finalmente un apartado para observaciones para cada tipo de tarea y uno a nivel general. La creación de esta interfaz no representa un objetivo de investigación y por ende no profundizaremos más detalle de su creación.

Capítulo 2. Marco teórico, problema de investigación y metodología

ANÁLISIS

"VARIABLE ALEATORIA"

47

Objetivo de Aprendizaje

Curso 7° Básico

Asignatura Matemática

Código de Tarea Tarea 16

Inciso 1-3

Página de documento 289

Contexto Ciencias Naturales y Biológicas

Significado S3: Como Variable estadística

Tipo de Variable Discreta

Taller 7. Infiriendo características de la población

En los mismos tríos del taller anterior analicen la siguiente situación:

Los investigadores de una universidad descubrieron que en un lago hay dos especies de peces. Ellos desean conocer qué cantidad hay de cada una, pero no saben cuántos peces hay en total en el lago. Para ello, extraen distintos tamaños de muestra:

Muestra 1
n = 20

Muestra 2
n = 50

Muestra 3
n = 100

Asista. El tamaño de muestra es la cantidad de individuos, objetos o sucesos que se toman en un estudio. Por ejemplo: si se encogen 30 personas para realizar una encuesta, el tamaño de la muestra se anda como n = 30.

- ¿Por qué deben extraer muestras para saber la cantidad que hay de cada especie de pez?
- Los resultados obtenidos en cada muestra son los de la tabla.

	Especie A	Especie B
M 1	30%	70%
M 2	50%	50%
M 3	60%	40%

¿Es relevante el tamaño de la muestra para determinar el porcentaje de peces en el lago?
- La muestra de 50 peces la repitieron 10 veces y en cada oportunidad repusieron los peces al lago. A continuación se presentan los resultados:

	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a
Especie A	35	28	22	31	30	32	34	27	29	33
Especie B	15	22	28	19	20	18	16	23	21	17

¿Podrían estimar el porcentaje de peces de cada especie en el lago? Expliquen su procedimiento.

Al repetir un experimento muchas veces, los porcentajes se estabilizan, es decir se observa que tienden a acercarse a un valor determinado.

REPRESENTACIONES UTILIZADAS

Representación inicial	Representación transitoria	Representación Emergente
Tabular	Simbólica	Verbal

Como función Como variable estadística Como magnitud Como variable de interés

Elementos Intensionales del significado "Como función"

VA1
 VA2
 VA3
 VA4
 VA5
 VA6
 VA7
 VA8
 VA9
 VA10
 VA11

Tipologías de problemas significado "como función"

FVA1: Determinar la distribución de probabilidad de una variable.
 FVA2: Determinar la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor determinado.
 FVA3: Dada una lista de variables aleatorias, decidir si son cualitativas o cuantitativas y cuáles son discretas y continuas.
 FVA4: Representar gráficamente la distribución de probabilidad de una variable aleatoria
 FVA5: A partir de la representación gráfica, hallar la distribución de probabilidad
 FVA6: Obtener la función de distribución dada la distribución de probabilidad
 FVA7: Obtener alguno de los valores de posición central, media, mediana o moda o de dispersión
 FVA8: Dada una distribución de probabilidad comprobar si verifica los axiomas de probabilidad
 FVA9: Calcular el valor de la variable aleatoria al que corresponde una cierta probabilidad
 FVA10: Operaciones entre variables

Observaciones

Figura 2.3. Interfaz de usuario para análisis (Fuente: Elaboración propia).

CAPÍTULO 3

LA VARIABLE ALEATORIA EN EL CURRÍCULO CHILENO

3.1 INTRODUCCIÓN

El presente capítulo presenta un análisis epistémico de las propuestas curriculares dadas por el Ministerio de Educación. En esta investigación entenderemos por currículo a la dupla <Programa de Estudios, Libros de Texto>. La noción de *variable aleatoria*, como objeto matemático básico y unificador, es considerada como una de las diez ideas fundamentales en estocásticas, siendo uno de los conceptos más importantes dentro de la probabilidad y estadística. El actual currículo chileno otorga a este objeto matemático gran relevancia en distintos ámbitos científicos y de desarrollo personal e individual, conduciendo la atención hacia el análisis de sus procesos de instrucción.

El propósito de este capítulo es especificar el significado pretendido de la noción de variable aleatoria en el currículo chileno, a partir de las prácticas matemáticas establecidas por los programas de estudio y libros de textos. Teniendo en cuenta los significados de la variable aleatoria definidos en el capítulo 2, se realiza un estudio de la representatividad del significado de referencia de la variable aleatoria, respecto del significado pretendido por el currículo nacional chileno. A continuación, se presentan un diagrama de flujo que modela el proceso que se llevó a cabo para el análisis de las tareas.

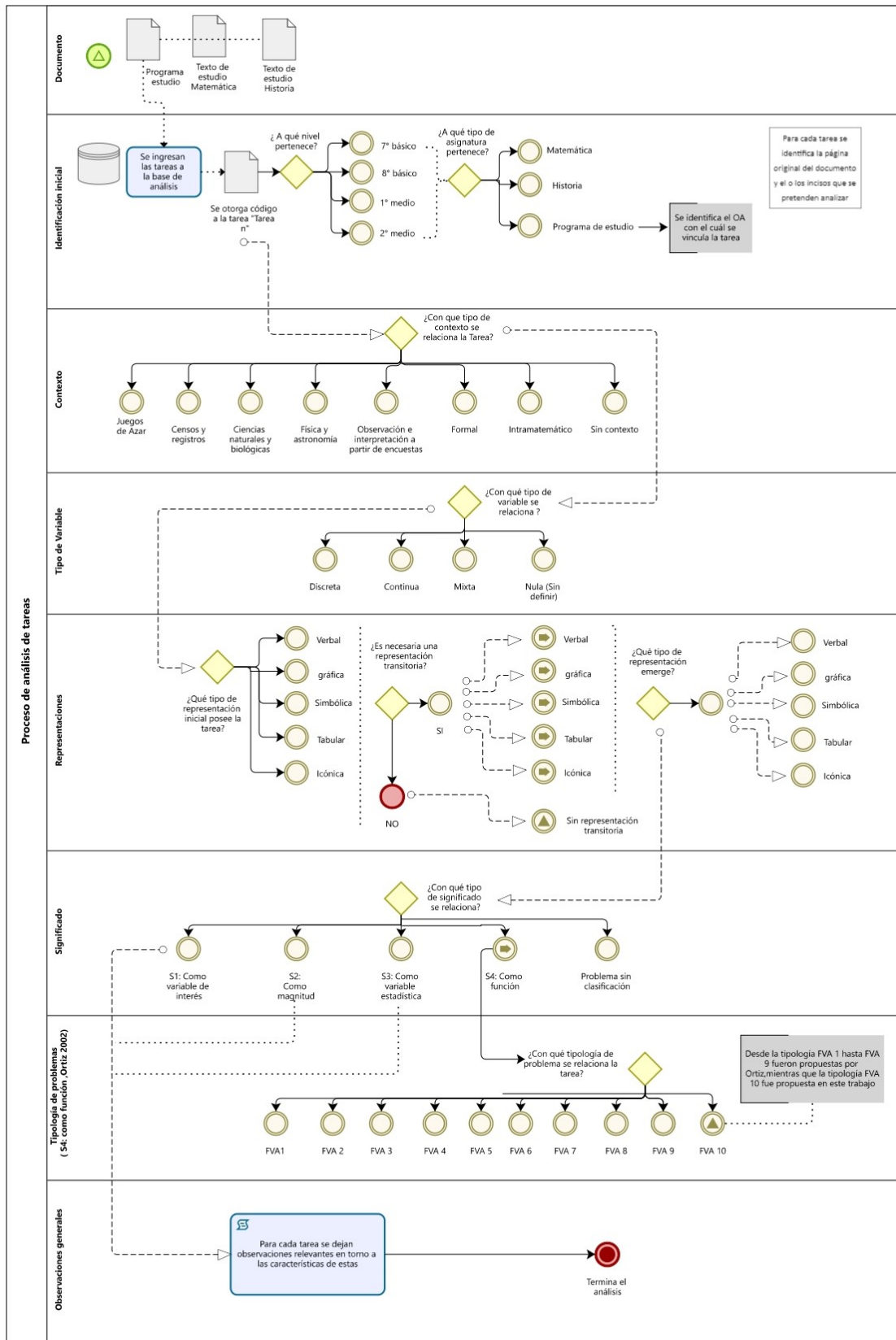


Figura 3.1 Proceso de análisis de tareas (Fuente: Elaboración propia)

3.2 ANÁLISIS DE LOS SIGNIFICADOS DE LA VARIABLE ALEATORIA PRETENDIDOS EN EL CURRÍCULO CHILENO

A continuación, presentamos los análisis de las propuestas curriculares para los niveles de 7° básico a 2° medio, tal como se puede apreciar en la tabla 3.1 se analizaron un total de 867 tareas, de ellas el 33% corresponden a 7° básico, el 26% corresponden a 8° básico, el 15% corresponden a 1° medio y el 26% corresponden a 2° medio.

Tabla 3.1

Número de tareas analizadas por nivel y tipo de documento

Curso	Programa de Estudio	Texto de estudiante Matemática	Texto de estudiante Historia	Total general
7° básico	32	254		286
8° básico	19	198	12	229
1° Medio	34	93		127
2° Medio	24	117	24	225
Total general	109	722	36	867

3.2.1 Análisis de la propuesta curricular para séptimo básico

Presentamos el análisis de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de séptimo básico. Para esto, consideramos el Programa de Estudios (PE) o “Programa de Estudio para séptimo Año Básico” propuesto por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc, 2016). Así mismo, consideramos el libro de texto que sugiere el marco curricular:

- Merino, R., Muñoz, V., Pérez, U., & Rupin, P. (2015). *Texto del estudiante. Matemática 7° básico*. Chile: Ediciones SM Chile S.A.

Debemos recordar que, de acuerdo a lo descrito en la metodología, para esta investigación entendemos el currículo como la dupla <Programas de Estudios, Libros de Texto>.

El Programa de Estudios para séptimo básico propuesto por el Ministerio de Educación de Chile se divide en cuatro Unidades, cada una de estas asociadas a un Eje Temático. La noción

de variable aleatoria se aborda en la Unidad 4, que está relacionada con el Eje Temático de Probabilidad y estadística. En dicha unidad se plantean cinco aprendizajes esperados y para cada aprendizaje esperado una serie de indicadores de evaluación, tal como muestra en la tabla 3.2

Tabla 3.2

Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación eje probabilidad y estadística 7° básico.

Fuente: Mineduc 2016

Objetivo de Aprendizaje	Indicadores de Evaluación
<p>OA 15 Estimar el porcentaje de algunas características de una población desconocida por medio del muestreo.</p>	<p>>>Infiere sobre la composición de una población pequeña (botellita opaca con 5 bolitas de dos colores, por ejemplo) mediante un muestreo aleatorio reiterado (de una bolita por vez, a través de una ventanita, por ejemplo). >>Plantean temas que interesen a los alumnos para realizar encuestas entre los estudiantes del 7° nivel del colegio; infieren porcentajes representativos de la muestra y luego comparan con la realidad. >>Identifican las muestras aleatorias y no aleatorias a base de ejemplos dados. >>Elaboran modelos para el muestreo aleatorio en la población del 7° nivel del colegio. >>Analizan las muestras obtenidas para ver coincidencias o diferencias. >>Conjeturan acerca de los resultados posibles de experimentos aleatorios y comparan la conjetura con la realidad.</p>
<p>OA 16 Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos</p>	<p>>>Confeccionan tablas de frecuencias absolutas y relativas de los datos obtenidos en las muestras. >>Elaboran el gráfico más conveniente para representar los datos; por ejemplo: el gráfico de tallo y hojas si se representan muestras opuestas,</p>

apropiados, de manera manual y/o con *software* educativo.

como alumnos y alumnas, fumadores y no fumadores, etc.
>> Sacan datos de los gráficos y los registran en tablas, diferenciando entre la frecuencia relativa y la absoluta.
>> Cambian de un gráfico a otro; por ejemplo: de un gráfico de barras a un gráfico de líneas, etc.
>> Verbalizan y comunican información presentada en gráficos.
>> Plantean, realizan y documentan encuestas, elaborando escalas categóricas de varios temas de interés.

OA 17

Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango:
>> Determinando las medidas de tendencia central para realizar inferencias sobre la población.
>> Determinando la medida de tendencia central adecuada para responder un problema planteado.
>> Utilizándolos para comparar dos poblaciones.
>> Determinando el efecto de un dato que es muy diferente a los otros.

>> Descubren que distribuciones muy dispersas y distribuciones homogéneas pueden tener la misma mediana.
>> Reconocen la importancia del valor mínimo, del valor máximo y del recorrido para describir oportunamente una distribución de datos cuantitativos.
>> Muestran que la mediana no se altera si hay variaciones grandes en los valores extremos.
>> Analizan situaciones y determinan cuál es la medida de tendencia central para efectuar las comparaciones e inferencias sobre la o las poblaciones.
>> Describen la inferencia que se puede obtener de un grupo de datos que es muy diferente a otro en una muestra.
>> Visualizan la medida

OA 18

Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con *software*

Mediante experimentos, estiman la probabilidad de un evento, registrando las frecuencias relativas.
>> Establecen la probabilidad de un evento mediante razones, fracciones o porcentajes, sea haciendo un experimento o por medio de un problema.

educativo: >>Estimándolas de manera intuitiva. >>Utilizando frecuencias relativas. >>Relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje.	>>Antes del experimento, estiman la probabilidad de ocurrencia y verifican su estimación, usando de frecuencias relativas. >>Elaboran, con material concreto (como dados y monedas), experimentos aleatorios con resultados equiprobables y no equiprobables. >>Realizan los experimentos aleatorios con numerosas repeticiones, determinan las frecuencias absolutas relativas y representan los resultados mediante gráficos. >>Analizan y comunican si se cumple aproximadamente la equiprobabilidad.
OA 19 Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con <i>software</i> educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos.	>>Determinan la probabilidad de manera teórica y luego comparan con la probabilidad de realizar el experimento. >>Determinan la probabilidad de un experimento, usando gráficos, diagramas de árbol o tablas. >>Comparan la probabilidad de un evento según un muestreo, su frecuencia relativa y un gráfico adecuado. >>Determinan la probabilidad de un problema mediante diagramas de árbol. >>Calculan la probabilidad de un evento de manera teórica.

Por su parte el texto del estudiante presenta el estudio de elementos relacionados con la variable aleatoria en la unidad 4 titulada “Estadística y probabilidad”, esta unidad está dividida en tres secciones y a su vez cada sección se divide en lecciones tal como se puede apreciar en la *figura 3.2*

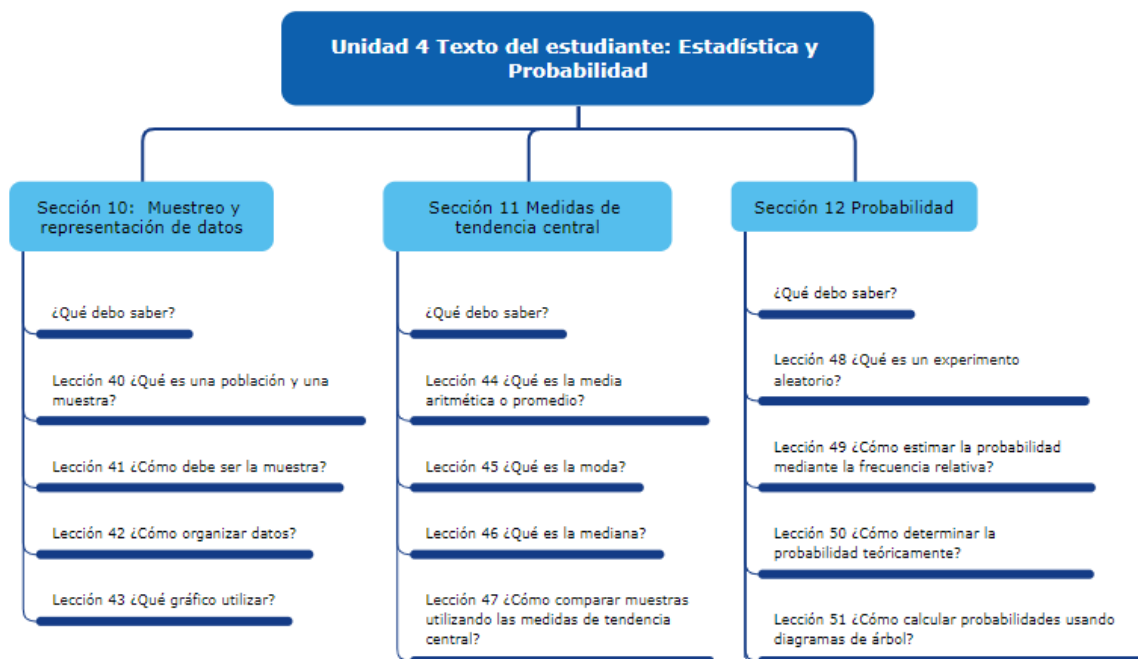


Figura 3. 2. Estructura unidad 4 texto del estudiante evaluación 7° básico

(Fuente: Merino et al., 2015)

A continuación, realizamos el análisis de las tareas propuestas a lo largo del programa de estudio y texto del estudio, siguiendo las estructuras presentadas en las figuras 3.4 y 3.5.

3.2.1.1 Contextos

La figura 3.3 presenta el resumen de la presencia de los contextos históricos de la variable aleatoria observados en las tareas propuestas a lo largo de cada objetivo de aprendizaje, sección y lección del programa de estudio y libro.

Se observa una clara tendencia al uso de contextos relacionados con observación e interpretación de encuesta tanto en el programa de estudio, visualizados en el 37,5% (5) de los casos, como en el libro de texto visualizado en el 52,76% (134) de los casos, en conjunto con contextos relacionados con juegos de azar el cual fue observado en el 19,69% (50) de las tareas analizadas en el texto de estudio y en el 50% (16) de las tareas presentadas en el programa.

ANÁLISIS CONTEXTO 7º BÁSICO

Asignatura	Sección/Tema	Lección	Contexto							
			Censos y Registros	Ciencias Naturales y Biológicas	Economía	Intramatemático	Juegos de azar	Observación e interpretación a partir de encuestas	Sin contexto	
Programa de Estudio	OA 15	Estimar el porcentaje de algunas características de...	●					●		
	OA 16	Representar datos obtenidos en una muestra media...			●			●		
	OA 17	Mostrar que comprenden las medidas de tendencia...				●		●		
	OA 18	Explicar las probabilidades de eventos obtenidos po...					●	●		
	OA 19	Comparar las frecuencias relativas de un evento obt...		●			●	●		
Texto de estudiante	Sección 10 Muestreo y representación de datos	Evaluación de proceso _Como voy	●	●				●		
		Lección 40 que es una población y una muestra	●					●		●
		Lección 41 como debe ser la muestra		●		●	●	●		●
		Lección 42 como organizar datos	●					●		
		Lección 43 que gráfico utilizar	●					●		
		Que debo saber						●		●
	Sección 11 Medidas de tendencia central	Evaluación de proceso _Como voy	●					●		
		Lección 44 que es la media aritmética o promedio	●	●		●		●		
		Lección 45 que es la moda				●		●		
		Lección 46 que es la mediana				●		●		
		Lección 47 como comparar muestras usando las me...	●			●		●		
	Que debo saber	●					●		●	
	Sección 12 Probabilidad	Evaluación de proceso _Como voy		●		●		●	●	●
		Lección 48 que es un experimento aleatorio	●			●		●		●
		Lección 49 como estimar la probabilidad mediante l...	●			●		●	●	
		Lección 50 como determinar la probabilidad teórica...	●	●				●	●	
		Lección 51 como calcular probabilidades usando dia...				●		●	●	●
		Que debo saber	●			●		●	●	●
	Síntesis y Evaluación Final	Evaluación Final	●	●				●	●	
		Refuerzo						●	●	●

Figura 3.3. Presencia de contextos programa de estudio y libro de texto 7º básico (Fuente: Elaboración propia)

Por su parte, los contextos menos observados fueron ciencias naturales y biológicas con una presencia menor al 4% tanto en el programa como en el texto del estudiante, para el contexto *economía* se visualizó solo un caso en el programa de estudio. Finalmente cabe destacar que no se observaron tareas con contextos tales como el *formal* y *física y astronomía*, limitando la presencia de los contextos históricos en los estudiantes.

3.2.1.2 Tipos de Variables

La *figura 3.4* presenta el resumen de la presencia de los tipos de variables observados en las tareas propuestas a lo largo de cada objetivo de aprendizaje, sección y lección del programa de estudio y libro.

La variable discreta es predominante tanto el texto del estudiante como en el programa de estudio con una presencia de un 40,16% (102) y 84,38% (27) respectivamente, por su parte las variables de tipo continua se observaron solo en un 17,72% (45) de las tareas analizadas en el texto del estudiante y en un 9,38% de las tareas presentadas en el programa de estudio. En relación a las variables de tipo mixta, fueron observadas solo en el texto del estudiante con una presencia de un 33,86% (86).

ANÁLISIS TIPO DE VARIABLE 7º BÁSICO

Asignatura	Sección/Tema	Lección	Tipo de Variable			
			Nulo	Continua	Discreta	Mixta
Programa de Estudio	OA 15	Estimar el porcentaje de algunas características de una población desconocida por ..	•		●	
	OA 16	Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absol..			●	
	OA 17	Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango.		•	●	
	OA 18	Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de ma..			●	
	OA 19	Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experiment..	•	•	●	
Texto de estudiante	Sección 10 Muestreo y representación de datos	Evaluación de proceso _Como voy			●	●
		Lección 40 que es una población y una muestra	•		●	●
		Lección 41 como debe ser la muestra	●		●	●
		Lección 42 como organizar datos			●	●
		Lección 43 que gráfico utilizar			●	●
		Que debo saber	•	•	●	•
	Sección 11 Medidas de tendencia central	Evaluación de proceso _Como voy		●	●	●
		Lección 44 que es la media aritmética o promedio		●		
		Lección 45 que es la moda	•		●	●
		Lección 46 que es la mediana	•	•	●	•
		Lección 47 como comparar muestras usando las medidas de tendencia central	●	●	●	•
		Que debo saber	•	•	●	●
	Sección 12 Probabilidad	Evaluación de proceso _Como voy	•		●	●
		Lección 48 que es un experimento aleatorio	•		●	●
		Lección 49 como estimar la probabilidad mediante la frecuencia relativa	•	•	●	●
		Lección 50 como determinar la probabilidad teóricamente			●	●
		Lección 51 como calcular probabilidades usando diagramas de árbol	•		●	●
		Que debo saber	●	•	●	•
	Síntesis y Evaluación Final	Evaluación Final		●	●	●
		Refuerzo	•	•	●	●

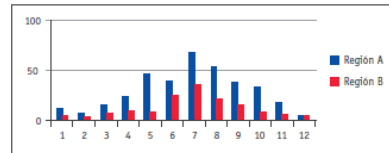
Figura 3. 4. Presencia de tipos de variable programa de estudio y libro de texto 7º básico (Fuente: Elaboración propia)

A continuación, las *figuras 3.5* y *3.6* ejemplifican tareas con variables discretas y continuas respectivamente.

9. En una empresa de linternas la probabilidad de que una falle antes de que cumpla el año de garantía es de 0,007. Si se vendieron 250 000 linternas durante el último año, calcula cuántas linternas se espera que tengan fallas antes de que venza el año de garantía.

Figura 3.5. Ejemplo de tarea con variable discreta (Fuente: Merino et al., 2015, p. 349)

5. Comparan dos muestras representadas por un gráfico de doble barra que se refiere al agua caída en dos regiones. Los números en el eje horizontal indican los meses de enero a diciembre y los números en el eje vertical señalan la cantidad de agua en mm por m².



- › Determinan el valor máximo y el valor mínimo de lluvia caída en ambas regiones. Estiman los valores que muestran las barras.
- › Calculan el promedio anual y el promedio de las estaciones para ambas regiones.
- › Comunican coherencias y diferencias.

Figura 3.6. Ejemplo de tarea con variable mixta (Fuente: Mineduc, 2016, p. 179)

Es importante comentar que, la unidad base de análisis fueron las tareas propuestas en relación a los incisos que la componen, y en algunos casos se volvió necesario analizar por separado incisos de una misma tarea ya que movilizan diferentes tipos de variables como el caso presentado en la *figura 3.7*, donde el inciso a y c se relacionan con variables de tipo continua, mientras que el inciso b presenta una variable de tipo discreta.

Analiza las siguientes situaciones y justifica tu respuesta.

a. A Nicole le ofrecen empleo en dos empresas distintas por la misma cantidad de horas. El único dato que tiene para decidir a cuál irse es el promedio de sueldos de ambas. En la empresa A, el promedio de sueldos es \$ 600 000 y en la empresa B es de \$ 540 000. ¿Le basta conocer el promedio de ambas empresas para decidir cuál le conviene?

c. Alejandra se ha ganado un viaje. Las opciones son Túnez o Sudáfrica. La única información con la que cuenta es la moda de las temperaturas, la cual es 35 °C en la primera opción y 26 °C en la segunda. Alejandra desea irse a un lugar caluroso por lo que opta por la primera opción. ¿Es posible saber si tomó una buena decisión? ¿Por qué? ¿Qué datos son necesarios para decidir?

Figura 3.7. Ejemplo de tarea que moviliza más de un tipo de variable

(Fuente: Merino et al., 2015, p. 326)

En torno a definiciones relacionadas con tipos de variables el libro presenta las definiciones que se pueden apreciar en la figura 3.8.

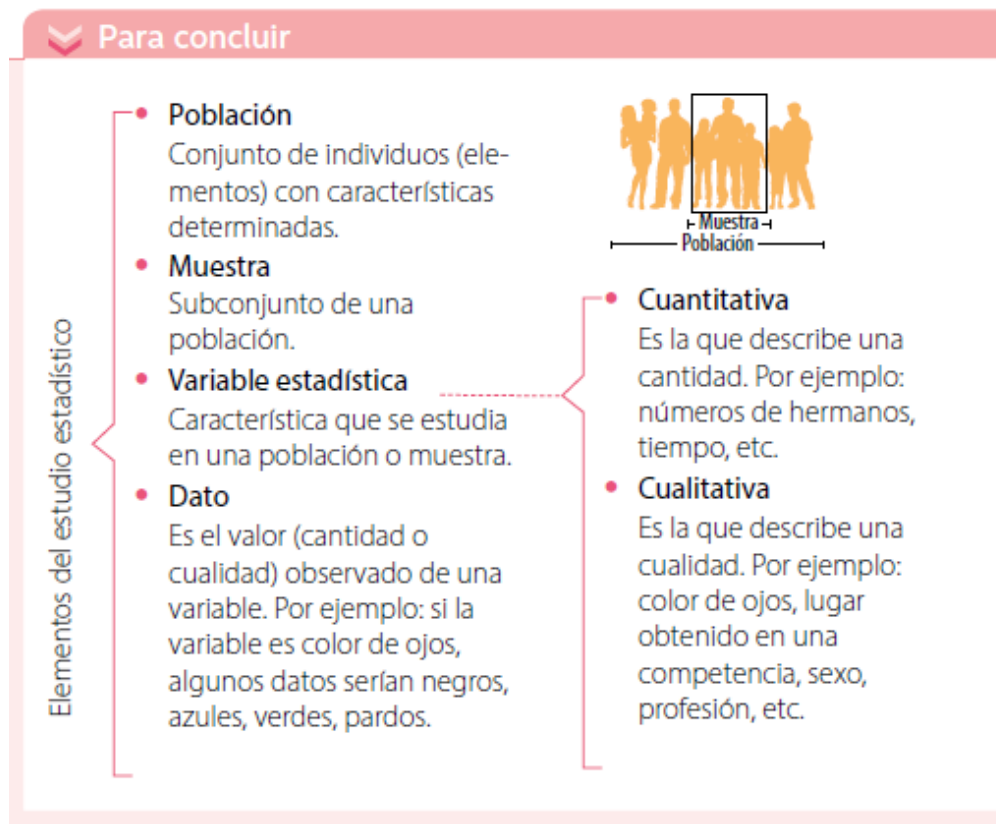


Figura 3.8. Conclusión sección 10 muestreo y representación de datos (Merino et al., 2015, p. 285)

La definición entregada de variable estadística es limitada a una característica de una población, sin incorporar el sentido amplio del significado S3 como variable estadística que no solo considera la característica de una muestra sino también la observación de un número “n” de repeticiones de un experimento. Tampoco se observan acotaciones en torno a la importancia de diferenciar variables a la hora de analizar y representar los diferentes datos. Todo esto puede producir errores futuros en la comprensión de los diversos tipos de significados de la variable y de los conceptos relacionados a esta.

3.2.1.3 Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas

La *figura 3.9* resume el tipo y respectiva cantidad de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de las tareas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstas (o en las soluciones esperadas, en el caso de las tareas no resueltas). En cuanto al tipo de representaciones, encontramos veintisiete clases de tareas diferentes, cuyas combinaciones se presentan en detalle para el libro de texto y programa de estudio en la figura 3.12, algunas tareas se visualizaron solo en el libro de texto otras solo en el programa de estudio y otras en ambos documentos.

Representaciones Movilizadas

Representación inicial	Representación Emergente			
	Gráfica	Simbólica	Tabular	Verbal
Mixta				●
Gráfica	● ● ●	●		● ● ●
Icónica				● ●
Simbólica		●	●	●
Tabular	● ●	●		● ● ● ●
verbal	● ●	●	●	● ● ● ● ●

Representación transitoria

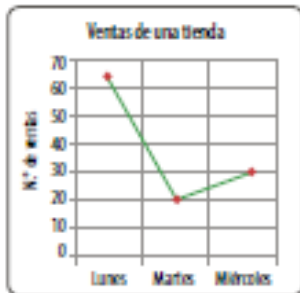
- Sin representación transitoria
- Gráfica
- Simbólica
- Tabular

Figura 3. 9. Tipologías de tareas en relación a las representaciones inicial, transitoria y emergentes presentes en las tareas del texto escolar y programa de estudio 7° básico

La primera, utilizando la terminología de Duval (1995), refiere a aquellas tareas en las que se proporciona una representación gráfica, la cual deberá ser interpretada por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la variable aleatoria (o algún elemento relacionado con ella) se represente simbólicamente (*Figura 3.10*).

6. En cada caso calcula la(s) medida(s) de tendencia central.

b. Ventas de una tienda durante los días posteriores a su inauguración.



c. La cantidad de estudiantes inscritos en los talleres del viernes en su colegio.

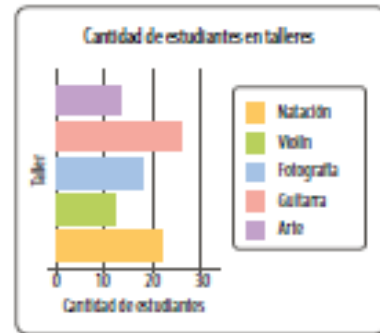


Figura 3.10. Ejemplo de tarea gráfica – simbólica (Fuente: Merino et al., 2015, p. 362)

La segunda clase refiere a aquellas tareas en las cuales proporciona una representación gráfica la cual deberá de ser interpretadas por los estudiantes con la finalidad de argumentar y proporcionar una respuesta en registro verbal (Figura 3.11).

Aplica

4. Analiza el gráfico y responde.

Gráfico de barras titulado "Venta de colaciones en una semana". El eje vertical muestra "Colaciones vendidas" (rango 0-30) y el eje horizontal los días "Lunes", "Martes", "Miércoles", "Jueves" y "Viernes".

Día	Colaciones vendidas
Lunes	22
Martes	30
Miércoles	20
Jueves	16
Viernes	32

- ¿Qué día de la semana hay una mayor venta de colaciones? ¿Por qué puedes interpretar esto?
- ¿Entre qué días se vendieron más de 20 colaciones?
- ¿En qué días se produce la mayor disminución de las ventas?
- ¿Por qué las barras están separadas?

Figura 3.11. Ejemplo de tarea gráfica – verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 299)

La tercera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo gráfico a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.12*.

3. El diagrama de barras representa el número de alumnos de los 10 cursos de la enseñanza media de un colegio.
 - › Determinan la mediana del número de alumnos en un curso.
 - › Conjeturan si la mediana está cerca de la media y comprueban la conjetura por el cálculo.

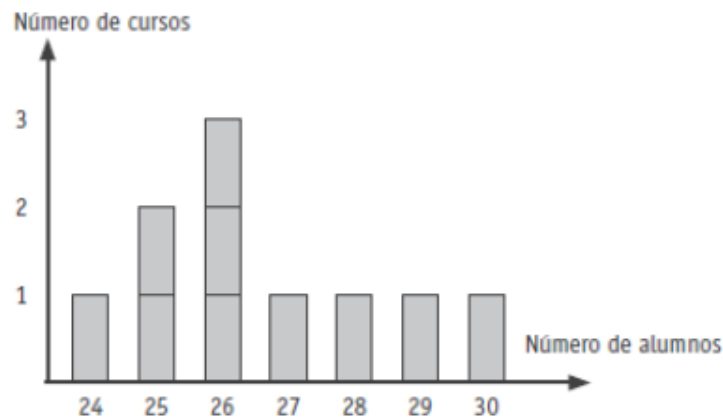


Figura 3.12. Ejemplo de tarea gráfica – simbólica- verbal

(Fuente: Mineduc., 2016, p. 173)

La cuarta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo gráfico a lo tabular y de lo tabular a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en los incisos en la *Figura 3.13*.

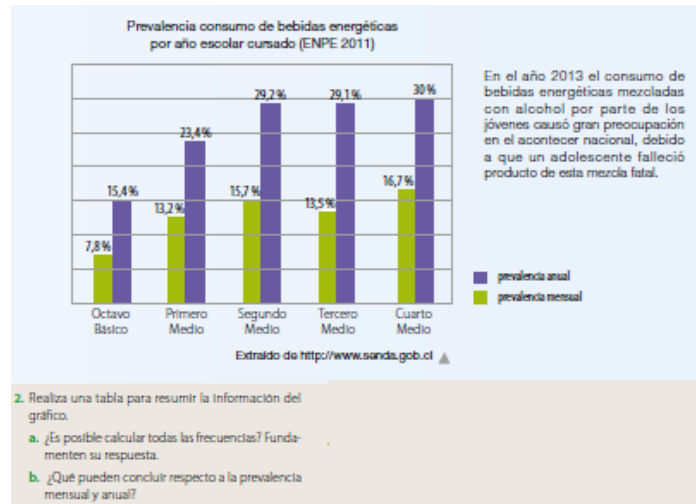


Figura 3.13. Ejemplo de tarea gráfica – tabular- verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 303)

La quinta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación icónica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal, un ejemplo de esta clase se presenta en la figura 3.14. La sexta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación icónica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo icónico a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta figura 3.15.

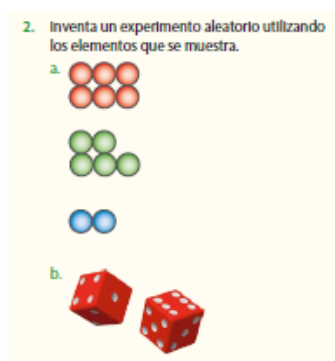


Figura 3.14. Ejemplo de tarea icónica - verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 340)

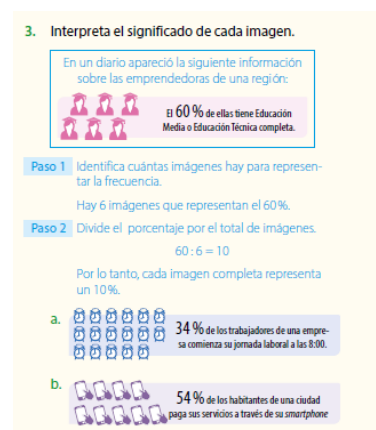


Figura 3.15. Ejemplo de tarea icónica – simbólica-verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 299)

La séptima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación simbólica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.16*, en donde al incorporar las etiquetas con valores numéricos sobre el gráfico, este pierde su calidad de registro gráfico transformados en un registro simbólico.

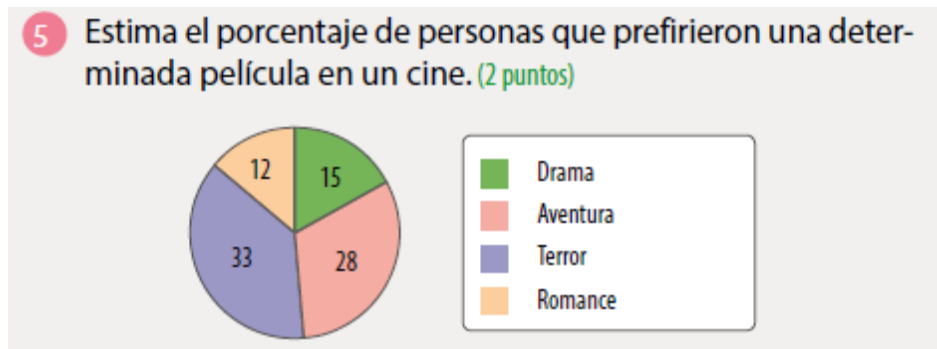


Figura 3.16. Ejemplo de tarea simbólica – simbólica (Fuente: Merino et al., 2015, p. 283)

La octava clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación simbólica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación tabular. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.17*, en donde nuevamente al incorporar las etiquetas con valores numéricos sobre los gráficos, estos son transformados en un registro simbólico.

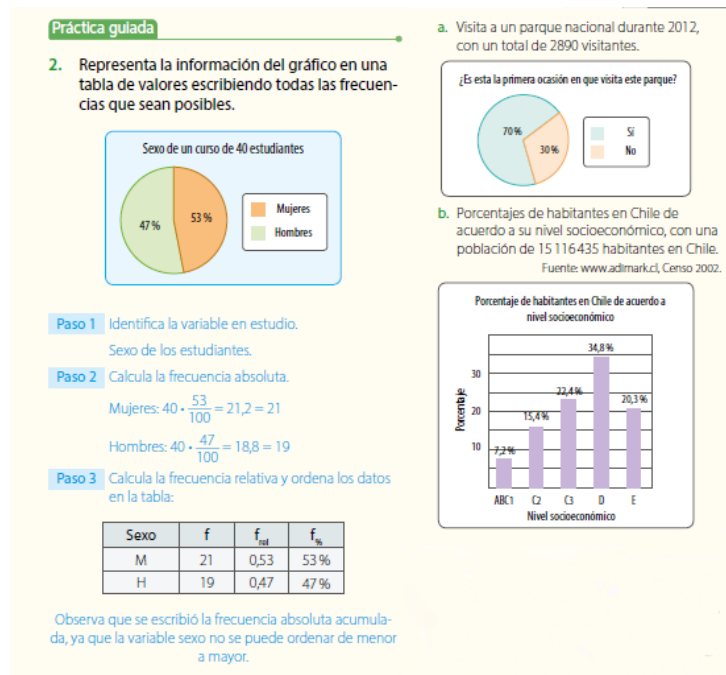


Figura 3.17. Ejemplo de tarea simbólica – tabular (Fuente: Merino et al., 2015, p. 294)

La novena clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación simbólica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.18*, en donde nuevamente al incorporar las etiquetas con valores numéricos sobre el gráfico produce la transformación del registro a uno simbólico.

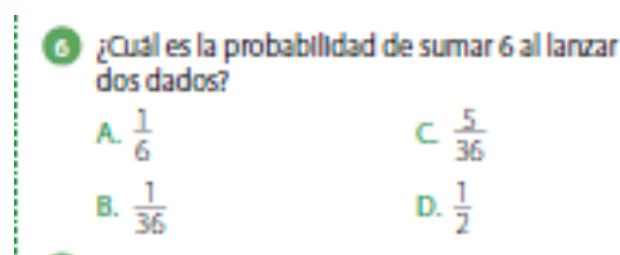


Figura 3.18. Ejemplo de tarea simbólica – verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 363)

La décima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Un ejemplo de esta clase se presenta en el inciso c de la tarea presentada en la *figura 3.19*.

5. Las tablas muestran la cantidad mensual de los mensajes telefónicos mandados por dos estudiantes.

1.º semestre		
	Paula	Pedro
Ene	40	55
Feb	30	32
Mar	120	88
Abr	93	124
May	60	47
Jun	185	164

2.º semestre		
	Paula	Pedro
Jul	155	110
Ago	66	90
Sep	94	68
Oct	48	88
Nov	76	32
Dic	80	75

- a. Ordena la lista de menor a mayor.
- b. Determina los valores máximos, mínimos, el rango y las medidas de tendencia central de ambas listas.
- c. Representa los datos en un gráfico de doble barra.
- d. ¿Cuál de las medidas de tendencia central crees que es la más representativa? Justifica tu respuesta.

Figura 3. 19. Ejemplo tarea tabular – gráfica (Fuente: Merino et al., 2015, p. 327)

La décimo primera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello, el estudiante debe transitar de lo tabular a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro gráfico. Un ejemplo de esta clase se presenta en la figura 3.20.

Repaso →

1. Calcula las frecuencias relativas.

Edad de los integrantes de una barra de fútbol		
Edades	f	f_{rel}
10	33	
15	10	
20	45	
25	15	
30	22	

2. Realiza un gráfico de barras para la tabla anterior.

Figura 3. 20. Ejemplo tarea tabular - simbólica– gráfica (Fuente: Merino et al., 2015, p. 344)

La décimo segunda clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta clase se presenta en la figura 3.21.

6. En cada caso calcula la(s) medida(s) de tendencia central.
- a. Las flores que plantó un grupo de jóvenes en el taller de ecología.

Flores plantadas	
Cantidad de jóvenes	Cantidad de flores plantadas
1	2
2	3
3	7
4	1
5	19
Total	32

Figura 3. 21. Ejemplo tarea tabular – simbólica (Fuente: Merino et al., 2015, p. 362)

La décimo tercera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en el inciso a de la tarea presentada en la *figura 3.22*.

- 7 Analiza la tabla y responde las preguntas.

Número de revistas compradas	
Cantidad de personas	f
1	9
2	12
3	7
4	12
Total	40

- a. ¿Cuál es la variable en estudio?
- b. ¿Cuál es el rango?
- c. ¿Cuántas personas compraron menos de 3 revistas?

Figura 3. 22. Ejemplo tarea tabular – verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 305)

La décimo cuarta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una

representación verbal. Para ello, el estudiante debe transitar de lo tabular a lo gráfico y de lo gráfico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.23*.

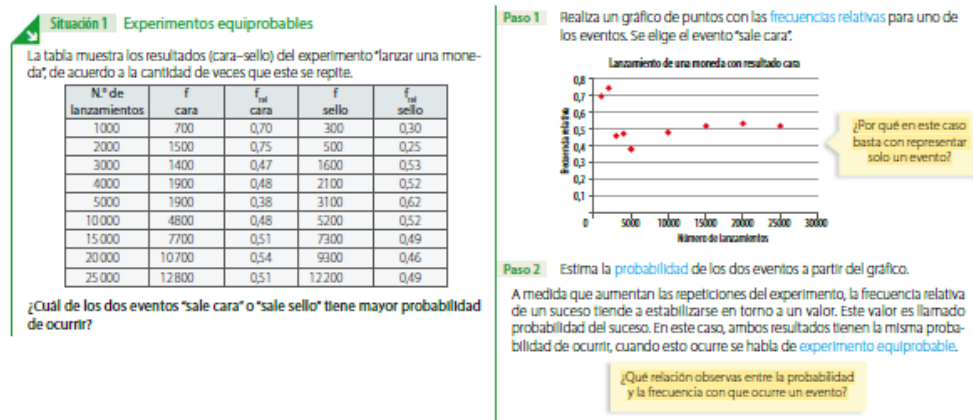


Figura 3. 23. Ejemplo tarea tabular – gráfica - verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 342)

La décimo quinta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo tabular a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.24*.

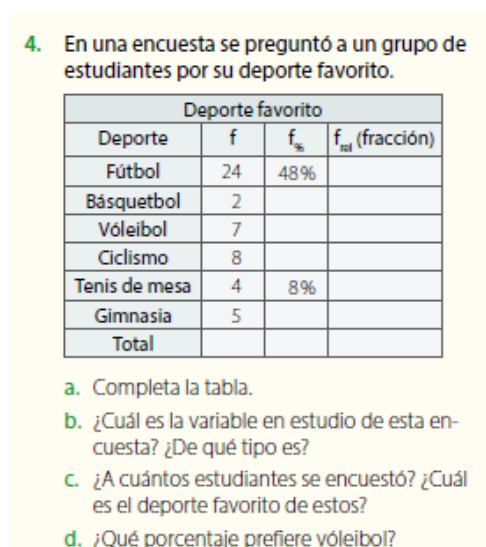


Figura 3. 24. Ejemplo tarea tabular – simbólica - verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 295)

La décimo sexta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello, el estudiante debe transitar de lo verbal a lo tabular y de lo tabular a una respuesta en registro gráfico. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.25*.

2. A continuación se presenta la masa corporal (kg) aproximada de los niños de un consultorio de entre 5 y 10 años. Organiza los datos en una tabla de frecuencia absoluta y representa los datos en un gráfico.

17	20	16	17	18	30	20	28
25	38	18	36	33	36	20	26
18	20	20	38	17	25	37	27

Figura 3. 25. Ejemplo tarea verbal – tabular – gráfica (Fuente: Merino et al., 2015, p. 314)

La décimo séptima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.26*.

Repaso

1. Determina cada conjunto.

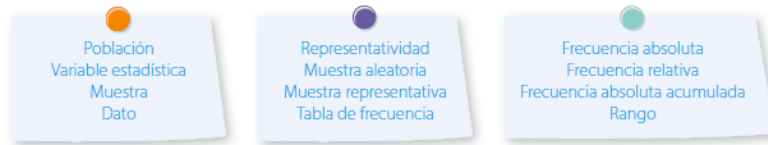
- Los números pares que están entre el 1 y el 11.
- Los números impares que están entre el 1 y el 15.
- Los números primos que están entre el 1 y el 20.

Figura 3. 26. Ejemplo tarea verbal – simbólica (Fuente: Merino et al., 2015, p. 340)

La décimo octava clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.27*.

Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran los conceptos clave de la sección.
Con algunos de ellos, completa las propuestas que aparecen.



- Dos conceptos para referirse a la cantidad de elementos de un grupo: _____
- Dos palabras que se utilicen para el estudio de habitantes de un lugar: _____
- Un concepto nuevo para ti: _____
- Una posible definición del concepto nuevo: _____

Figura 3. 27. Ejemplo verbal – verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 287)

Cabe destacar que esta clase de tareas es la que presenta una mayor presencia a lo largo del texto del estudiante con un 46,15% de representatividad en relación al total de tareas analizadas.

La décimo novena clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello, el estudiante debe transitar de lo verbal a lo gráfico y de lo gráfico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.28*.

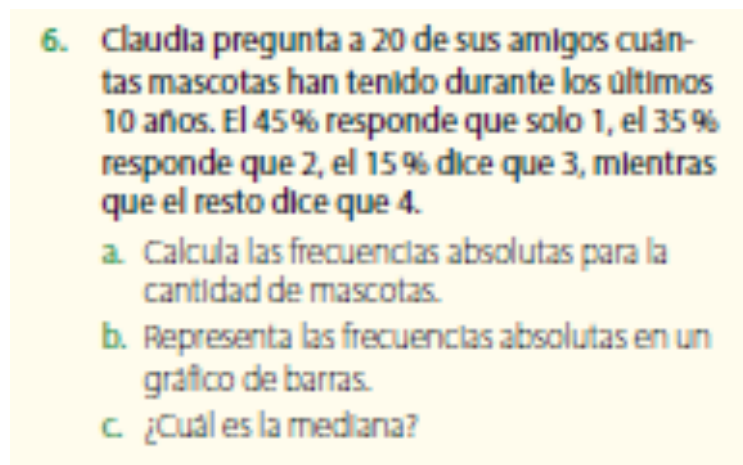


Figura 3. 28. Ejemplo tarea verbal – gráfico - verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 323)

La vigésima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.29*.

Práctica guiada

4. Calcula el promedio de cada conjunto y analiza si es un buen representante de ellos.

3	4	50	2	5	2
---	---	----	---	---	---

Calcula el promedio.

$$\bar{x} = \frac{3 + 4 + 50 + 2 + 5 + 2}{6} = 11$$

En este caso el promedio obtenido no es un buen representante de la tendencia de los datos ya que la mayoría de los datos son muy pequeños, excepto por un valor.

a.

5,5	6,2	7,1	8	6,7	5,5
-----	-----	-----	---	-----	-----

b.

2	30	1	3	1	1	2	1
---	----	---	---	---	---	---	---

c.

30	32	45	2	31	30	35
----	----	----	---	----	----	----

Figura 3. 29. Ejemplo tarea verbal –simbólica - verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 314)

La vigésimo primera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo tabular y de lo tabular a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.30*.

Representar e interpretar datos mediante tablas

1 Organiza los datos de los trabajadores de una oficina utilizando tablas de frecuencias e interpreta lo obtenido. (6 puntos)

a. El sexo de los trabajadores:

F	M	M	M	F	F
M	F	F	M	M	F
F	M	M	M	M	M

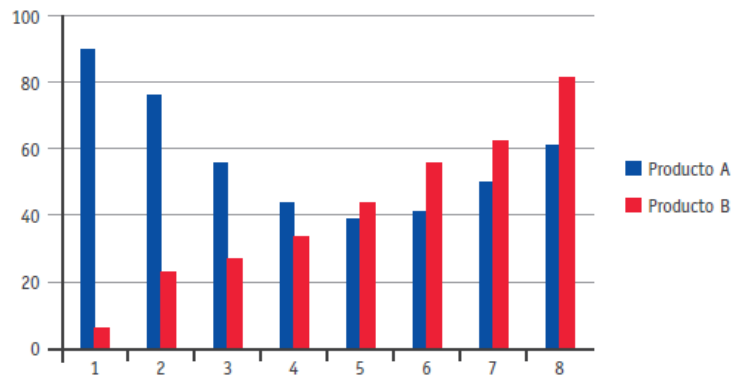
b. La cantidad de hijos que tienen los trabajadores:

2	3	4	1	0	2
2	0	0	1	1	2
0	1	3	3	2	4

Figura 3. 30. Ejemplo tarea verbal –tabular - verbal (Merino et al., 2015, p. 310)

La vigésimo segunda clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.31*.

3. Resuelven el siguiente problema: El gráfico de doble barra muestra la venta mensual de los productos A y B de la misma empresa.



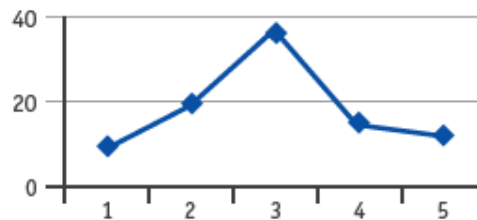
- › Describen el desarrollo de ambos productos en el período de 8 meses.
- › Convierten el gráfico de doble barra en un gráfico de línea para determinar aproximadamente el mes en el cual la venta del producto B sobrepasa la venta del producto A.

® Historia, Geografía y Ciencias Sociales (Formación económica).

Figura 3. 31. Ejemplo tarea gráfica- gráfica (Fuente: Mineduc, 2016, p. 170)

La vigésimo tercera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello el estudiante debe transitar de lo gráfica a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro gráfica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.32*.

5. Los alumnos del 7a y del 7b hicieron una encuesta sobre el modo en que se transportan de la casa al colegio. Las categorías de 1 al 5 significan: a pie, en bus escolar, en auto de los papás, en micro y en bicicleta respectivamente.
- › Leen los datos y calculan las frecuencias relativas.
 - › Basados en las frecuencias relativas, elaboran un gráfico circular.

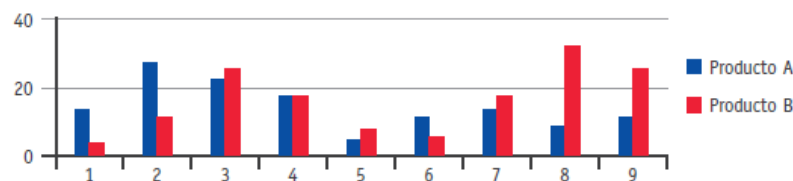


® Educación Física y Salud OA 5 de 7° básico.

Figura 3. 32. Ejemplo tarea gráfica- simbólica-gráfica (Fuente: Mineduc, 2016, p. 171)

La vigésimo cuarta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello el estudiante debe transitar de lo gráfica a lo tabular y de lo tabular a una respuesta en registro gráfica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.33*.

4. El gráfico de doble barra muestra el número de alumnas y alumnos que participan en actividades extraprogramáticas de un colegio. Las actividades son las siguientes, de 1 a 9: teatro, coro, natación, atletismo, judo, gimnasia artística, vóleybol, fútbol y básquetbol. Las columnas azules representan a las niñas y las rojas, a los niños.



- › Leen los datos y confeccionan una tabla de frecuencias absolutas.
- › Basados en los datos extraídos, elaboran un gráfico de tallo y hojas.

Figura 3. 33. Ejemplo tarea gráfica – tabular - gráfica (Fuente: Mineduc, 2016, p. 170)

La vigésimo quinto clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.34*.

2. Lanzan 10 chinchas a la vez, registran el evento “base” o “punta” y calculan las frecuencias relativas.
 - › Repiten los lanzamientos y calculan las frecuencias relativas acumuladas.
 - › Elaboran un gráfico de líneas, en el cual anotan las frecuencias relativas acumuladas para cada 10, 20, 30, ... lanzamientos.

Figura 3. 34. Ejemplo tarea verbal - gráfica (Fuente: Mineduc, 2016, p. 178)

La vigésimo sexta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación tabular. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.35*.

1. Elaboran una tabla de posibles eventos para el lanzamiento de dos dados.
 - › Se lanzan los dados de a uno y se registran pares ordenados de los números 1 a 6.
 - › Se lanzan los dos dados a la vez y no se registra el orden de los eventos.

Figura 3. 35. Ejemplo tarea verbal - tabular (Fuente: Mineduc, 2016, p. 178)

La vigésimo séptima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación mixta, es decir, se presenta al estudiante más de un tipo de representación a la vez, y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la sección *mural* propuesta por el libro de texto, en donde se pretende conectar los objetivos vistos en una sección con la vida real. La sección mural se puede observar en la *figura 3.36*.

Mural

Actividad: Valorando el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.

Los riesgos del consumo de bebidas energéticas con alcohol

70% de las personas entre 18 a 29 años que consumen bebidas energéticas las mezclan con alcohol.

Son muchos los riesgos asociados al consumo de alcohol, más si este se mezcla con bebidas energéticas: consumo intenso, intoxicación y dependencia. Así lo demuestran diversas investigaciones realizadas por el SENDA (Servicio Nacional para la Prevención y Rehabilitación del Consumo de Drogas y Alcohol).

Lamentablemente los jóvenes las consumen libremente sin saber cuáles son sus reales efectos, ya que el alcohol tiene un efecto depresor y a su vez la bebida energética tiene el efecto contrario, y entonces la persona que la consume no siente cansancio, con lo cual consume más alcohol, produciendo una intoxicación que podría llevarla a la muerte.

Al respecto Erwin Núñez, académico de la Escuela de Nutrición y Dietética de la U. Andrés Bello, explica sobre los riesgos:

"Tanto el alcohol como las energéticas tienen un efecto diurético, por lo que al combinarlos es más fácil que se produzca deshidratación, la cual conduce a diarreas, náuseas, vómitos, fatiga, dolor de cabeza, aumento de la frecuencia cardíaca, calambres musculares y una resaca severa."

Diario El Sur, 23 de abril de 2012.

Distribución por categorías de la pregunta: ¿Qué tan seguido toma usted alguna bebida alcohólica?

Categoría	f	f _n
Nunca	1006901	18,1
Una vez al mes o menos	2417413	43,3
Dos a cuatro veces al mes	1801531	32,2
Dos o más veces a la semana	350797	6,3
Total	5576642	100

Extraído de <http://www.senda.gob.cl>

Prevalencia consumo de bebidas energéticas por año escolar cursado (ENPE 2011)

Año Escolar	Prevalencia Anual (%)	Prevalencia Mensual (%)
Octavo Básico	15,4%	7,8%
Primero Medio	23,4%	13,2%
Segundo Medio	29,2%	15,7%
Tercero Medio	29,1%	13,5%
Cuarto Medio	30%	16,7%

En el año 2013 el consumo de bebidas energéticas mezcladas con alcohol por parte de los jóvenes causó gran preocupación en el acontecer nacional, debido a que un adolescente falleció producto de esta mezcla fatal.

Extraído de <http://www.senda.gob.cl>

ACTIVIDAD EN GRUPO

Reunirse en grupos de 4 integrantes y realicen las actividades propuestas. Luego, comuniquen su respuesta a los demás equipos.

- ¿Qué variables están presentes en cada estudio? ¿De qué tipo son?
- Realiza una tabla para resumir la información del gráfico.
 - ¿Es posible calcular todas las frecuencias? Fundamenten su respuesta.
 - ¿Qué pueden concluir respecto a la prevalencia mensual y anual?
- Realicen un gráfico adecuado para representar los valores de la tabla.
 - ¿Cómo interpretan los resultados del gráfico?
 - ¿Qué gráfico no es conveniente utilizar para estos datos? ¿Por qué?
- Investiguen cómo afecta el consumo de alcohol a edad temprana en el organismo y confeccionen afiches informativos con datos e imágenes. Presenten su trabajo al resto del curso y discutan sobre la importancia de estar informados sobre sus efectos.

Figura 3. 36. Ejemplo tarea mixta - verbal (Fuente: Merino et al., 2015, p. 302-303)

La gran diversidad en los tipos de tareas en relación a la transición de registros da cuenta de la dificultad a la cual deben enfrentarse los estudiantes a la hora de desarrollar las tareas propuestas.

El hecho de que la mayoría de las tareas se relacionen con un registro verbal, ya sea en la representación inicial o final, da cuenta del carácter interpretativo que se espera desarrollar a través de la probabilidad y la estadística, y de manera particular de la variable aleatoria, dando sustento a su calidad de idea fundamental y su rol en la interpretación del mundo.

3.2.1.4 Significado de la noción de variable aleatoria pretendido por el libro de texto y programa de estudio

La figura 3.38 se presenta el detalle de los significados movilizados en las tareas analizadas, cada cuadrado representa una tarea. Tanto en el programa de estudio como en el texto del estudiante, se observó tareas relacionadas al significado S_1 -como variable de interés-, presente en el 48,03% (122) de las tareas del texto del estudiante y en un 78,13% (25) de las tareas presentadas en el programa de estudio; y al S_3 -como variable estadística- con un 41,73% (106) en el texto del estudiante y un 21,88% (7) en el programa de estudio.

Es importante mencionar que, si bien la unidad base de análisis fueron las tareas propuestas, en algunos casos se volvió necesario analizar por separado incisos de una misma tarea, ya que movilizaban diferentes tipos de significados, como el caso presentado en la figura 3.37, donde el inciso 1 y 2 movilizan el significado S_1 , como variable de interés, mientras que los incisos 3, 4 y 5 movilizan el significado S_3 , como variable estadística.

¿Qué es una población y una muestra?

Taller 1 El todo y la parte

En parejas realicen la siguiente actividad:

Un grupo de estudiantes realizó una encuesta en su colegio y la organizó en los siguientes gráficos:

Resultados del establecimiento educacional

Comedia	42%
Terror	10%
Infantil	23%
Acción	25%

Resultados de 7.º básico

Comedia	28%
Terror	11%
Infantil	23%
Acción	38%

Ayuda

Un subconjunto de un conjunto es una parte del conjunto completo. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

(Diagrama: Un círculo A contiene un círculo B.)

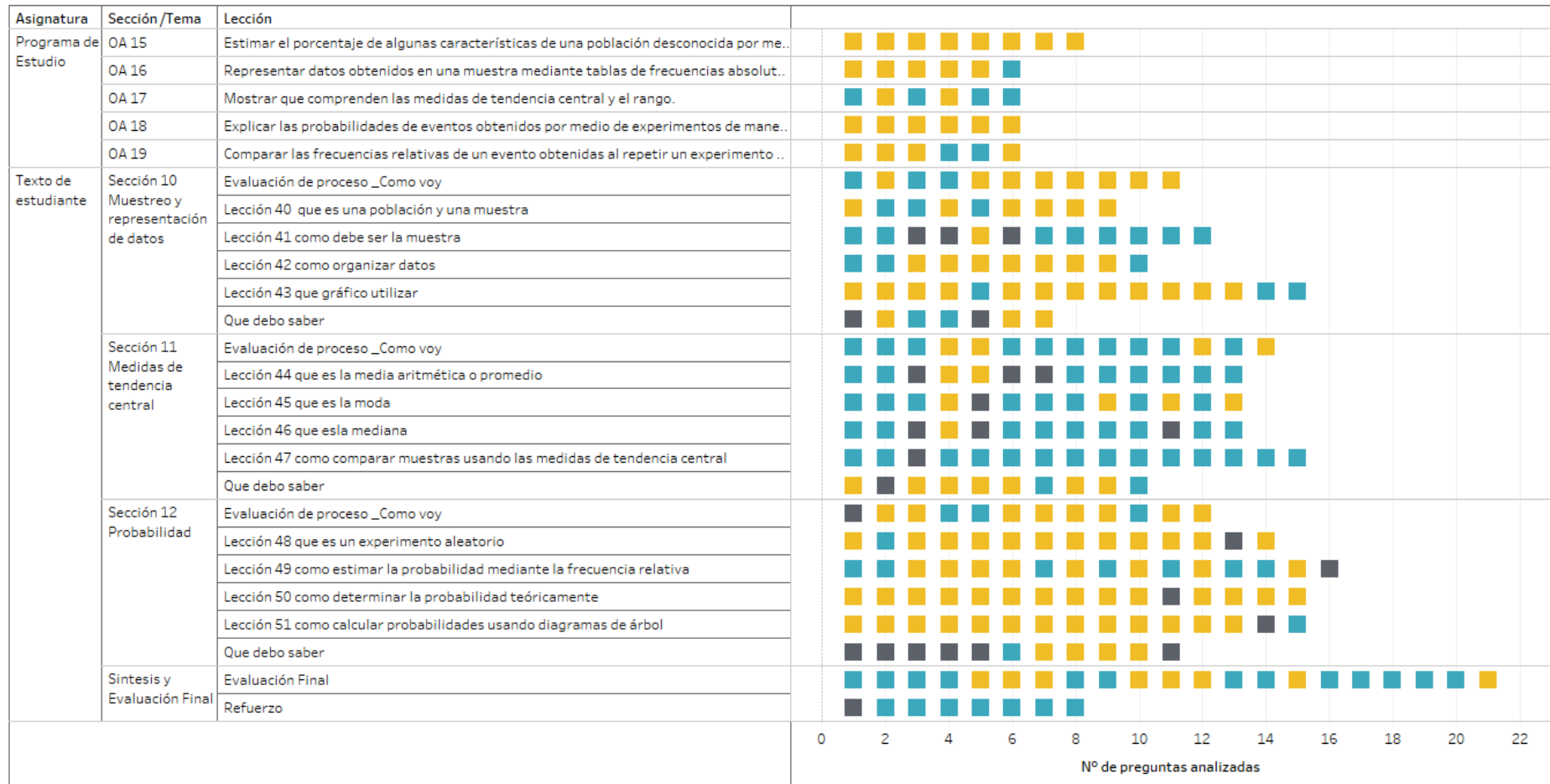
El conjunto B es un subconjunto de A.

1. Identifiquen qué se está investigando en la encuesta.
2. ¿Qué pueden inferir acerca de los estudiantes de este colegio?
3. ¿Se puede considerar al 7.º básico como un subconjunto de los estudiantes del colegio? ¿Por qué?
4. ¿Por qué varían los resultados al considerar solo el 7.º básico?
5. ¿Podrían decir que el 7.º básico es un buen representante del estudio realizado en todo el colegio? Justifiquen su respuesta.

Figura 3. 37. Ejemplo tarea con doble movilidad de significado

(Fuente: Merino et al., 2015, p. 284)

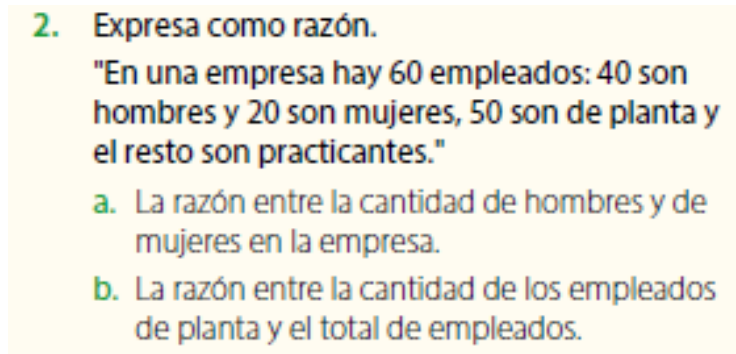
Significados movilizado en tareas 7º básico



Significado ■ Problema sin Clasificación ■ S1: Como variable de interés ■ S3: Como Variable estadística

Figura 3. 38. Resumen presencia de significados en el texto del estudiante y programa de estudio 7º básico (Fuente: Elaboración propia)

También se observó la presencia de tareas denominadas “Sin clasificación” a lo largo del texto, esta clase de tareas se presentaron por lo general relacionadas con la activación de conceptos previos o el refuerzo de un procedimiento de cálculo. Un ejemplo de esta clase de tareas se observa en la *figura 3.39*.



2. Expresa como razón.
"En una empresa hay 60 empleados: 40 son hombres y 20 son mujeres, 50 son de planta y el resto son practicantes."
a. La razón entre la cantidad de hombres y de mujeres en la empresa.
b. La razón entre la cantidad de los empleados de planta y el total de empleados.

Figura 3. 39. Ejemplo problema sin clasificación (Fuente: Merino et al., 2015, p. 290)

La *figura 3.40* muestra la presencia de significados por sección y objetivos de aprendizajes, podemos mencionar que los objetivos 15, “estimar el porcentaje de algunas características de una población” (Mineduc, 2016, p.164), y 18 “explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo: Estimándolas de manera intuitiva; utilizando frecuencias relativas; relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje” (Ibid), están vinculados solo a tareas relacionadas con S_1 . Otro aspecto a destacar es que las tareas presentadas a lo largo del texto movilizan el significado S_1 y S_3 en porcentajes similares (48,03% y 41,73% respectivamente) la distribución en la unidad de evaluación presenta una clara tendencia a las tareas relacionadas al significado S_3 con una presencia del 68,97%.

Presencia de significados por sección y objetivo de aprendizaje

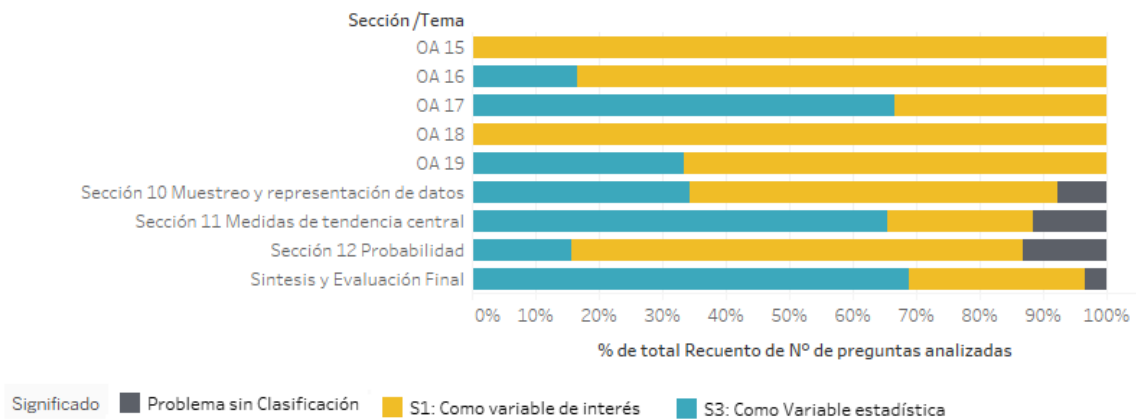


Figura 3. 40. Porcentaje de presencia de significados por secciones y objetivos de aprendizaje

(Fuente: Elaboración propia)

Significados y contextos

Los significados de un determinado objeto matemático se determinan con base en los contextos históricos en los cuales se fue desarrollando dicho objeto, es por ello que en la figura 3.41 se observa la relación entre los significados pretendidos por el libro de texto y programa de estudio de séptimo básico y los contextos históricos de la variable, en la figura no se visualiza el contexto física y astronomía y formal ya que no fue posible identificar ninguna tarea que movilizara dichos contextos.

Significados v/s contexto

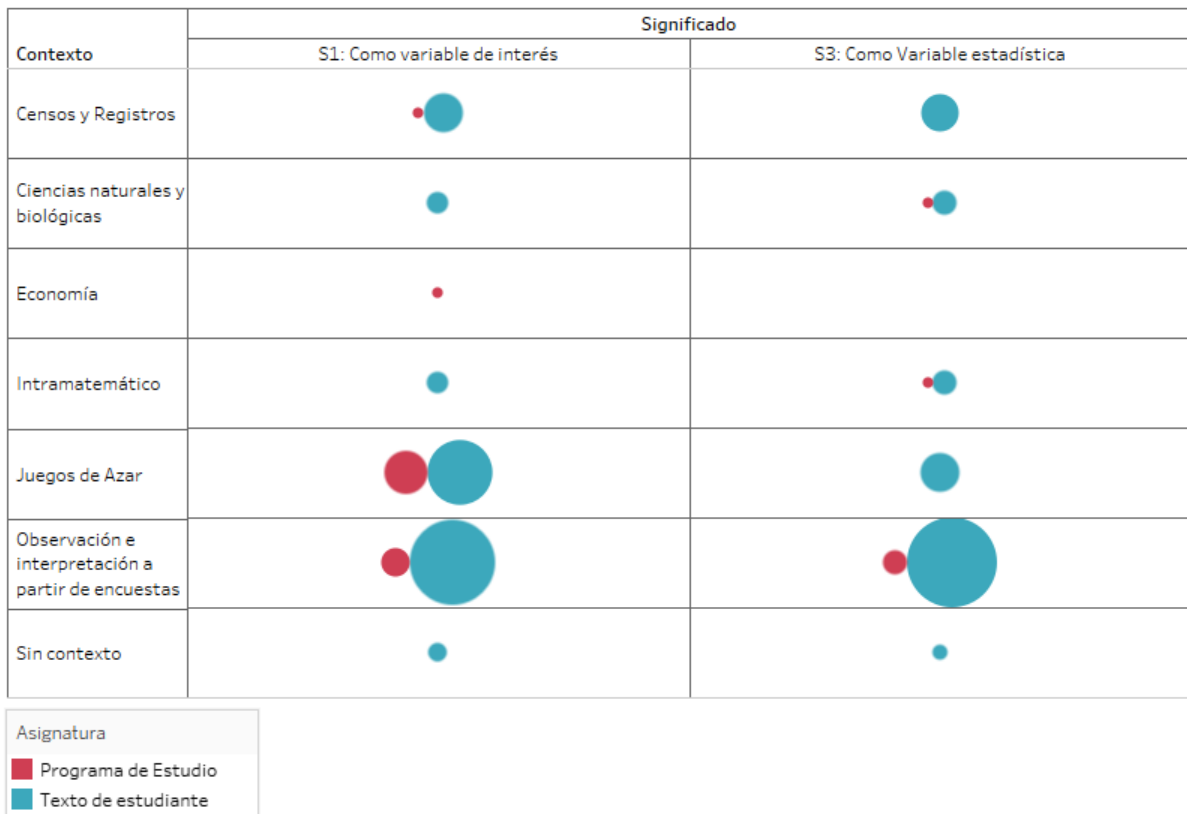


Figura 3. 41. Contextos históricos versus significados de la variable aleatoria del libro de texto y programas de estudio (Fuente: Elaboración propia)

En la figura anterior se puede observar que para el caso del texto del estudiante el significado S_1 es vinculado con cinco de los seis contextos observados, mostrando la mayor concentración en el vínculo S_1 -*observación e interpretación a partir de encuestas*, con un 50,85% (62); mientras que el programa de estudio lo vincula con cuatro contextos, presentando una mayor concentración en el vínculo S_1 -*juegos de azar*, con un 64% (16). Por su parte, el significado S_3 es vinculado a cinco de los seis contextos en el texto del estudiante, mostrando su mayor concentración en el vínculo S_3 -*observación e interpretación a partir de encuestas*, con un 65,09% (69); mientras que el programa de estudio lo vincula solo a 3 contextos, manteniendo la mayor concentración en el vínculo S_3 -*observación e interpretación a partir de encuestas*, con un 71,43% (5). Ambos significados se relacionan de manera transversal a los

contextos movilizados en las tareas analizadas, sin embargo, no se fomenta el trabajo de manera igualitaria, lo anterior permite concluir que el libro de texto y el programa de estudio no son representativos de los contextos históricos en relación a los significados de la variable aleatoria.

3.2.2 Análisis de la propuesta curricular para octavo básico

A continuación, presentamos el análisis de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de octavo básico. Para esto consideramos el Programa de Estudios (PE) o “Programa de Estudio para octavo Año Básico” propuesto por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc, 2016). Así mismo, consideramos el libro de texto de matemática e historia que sugiere el marco curricular elaborado por:

- Catalán, D., Pérez, U., Prieto, B., & Rupin, P. (2015). *Texto del estudiante. Matemática 8° básico*. Chile: Ediciones SM Chile S.A.
- Landa, L., & Pinto, V. (2015). *Texto del estudiante. Historia, Geografía y Ciencias Sociales 8° básico*. Chile: Ediciones SM Chile S.A.

El Programa de Estudios para octavo básico propuesto por el Ministerio de Educación de Chile se divide en cuatro unidades, cada una de estas asociadas a un Eje Temático. La noción de variable aleatoria se aborda en la Unidad 4, que está relacionada con el Eje Temático de Probabilidad y estadística. En dicha unidad se plantean tres aprendizajes esperados y para cada aprendizaje esperado una serie de indicadores de evaluación, tal como se muestra a continuación en la tabla 3.3

Tabla 3.3

Objetivos de aprendizaje e indicadores de logro eje estadística y probabilidad 8° básico

Fuente: Mineduc 2016

Objetivos de aprendizaje	Indicadores de evaluación
<p>OA 15 Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles: >>Identificando la muestra que está sobre o bajo el percentil. >>Representándolas con diagramas, incluyendo el diagrama de cajón, de manera manual y/o con <i>software</i> educativo. >>Utilizándolas para comparar poblaciones.</p>	<p>>>Organizan y agrupan datos en tablas o esquemas para formar distribuciones de frecuencias. >>Calculan, describen e interpretan las medidas de posición (cuartiles y percentiles). >>Representan las medidas de posición por medio de diagramas de cajón. >>Reconocen cuándo es adecuado utilizar alguna de las medidas para analizar una muestra. >>Comparan muestras de poblaciones, utilizando algunas de las medidas de tendencia.</p>
<p>OA 16 Evaluar la forma en que los datos están presentados: >>Comparando la información de los mismos datos representada en distintos tipos de gráficos para determinar fortalezas y debilidades de cada uno. >>Justificando la elección del gráfico para una determinada situación y su correspondiente conjunto de datos. >>Detectando manipulaciones de gráficos para representar datos.</p>	<p>Comparan información recolectada con su respectivo gráfico y hacen inferencias a partir de ella. >>Determinan cuándo un gráfico representa la muestra y cuándo no. >>Comparan muestras de poblaciones con distintos gráficos y estiman cuál representa mejor la información. >>Explican la elección de tipos de gráficos para representar determinada información. >>Explican de manera adecuada cuándo hay manipulación de la información y de su representación.</p>
<p>OA 17 Explicar el principio combinatorio multiplicativo: >>A partir de situaciones concretas. >>Representándolo con tablas y árboles regulares, de manera manual y/o con <i>software</i> educativo. >>Utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto.</p>	<p>>>Simulan experimentos que involucran elecciones al azar equiprobables reiteradas (de pocos pasos) y describen pictóricamente los resultados, vía árboles; por ejemplo: en situaciones como componer menús o tenidas mediante elecciones sucesivas equiprobables de platos y prendas de ropa; o caminos de pocos pasos en un paseo al azar, con elecciones equiprobables entre cada encrucijada con 2, 3 o 4 opciones. >>Simulan experimentos que involucran elecciones al azar equiprobables reiteradas (de pocos pasos).</p>

Por su parte el texto del estudiante presenta el estudio de elementos relacionados con la variable aleatoria en la unidad 4 titulada “Estadística y probabilidad”, La figura 3,42 detalla sus unidades, por su parte el libro de historia presenta cinco unidades las cuales a su vez están divididas en secciones.

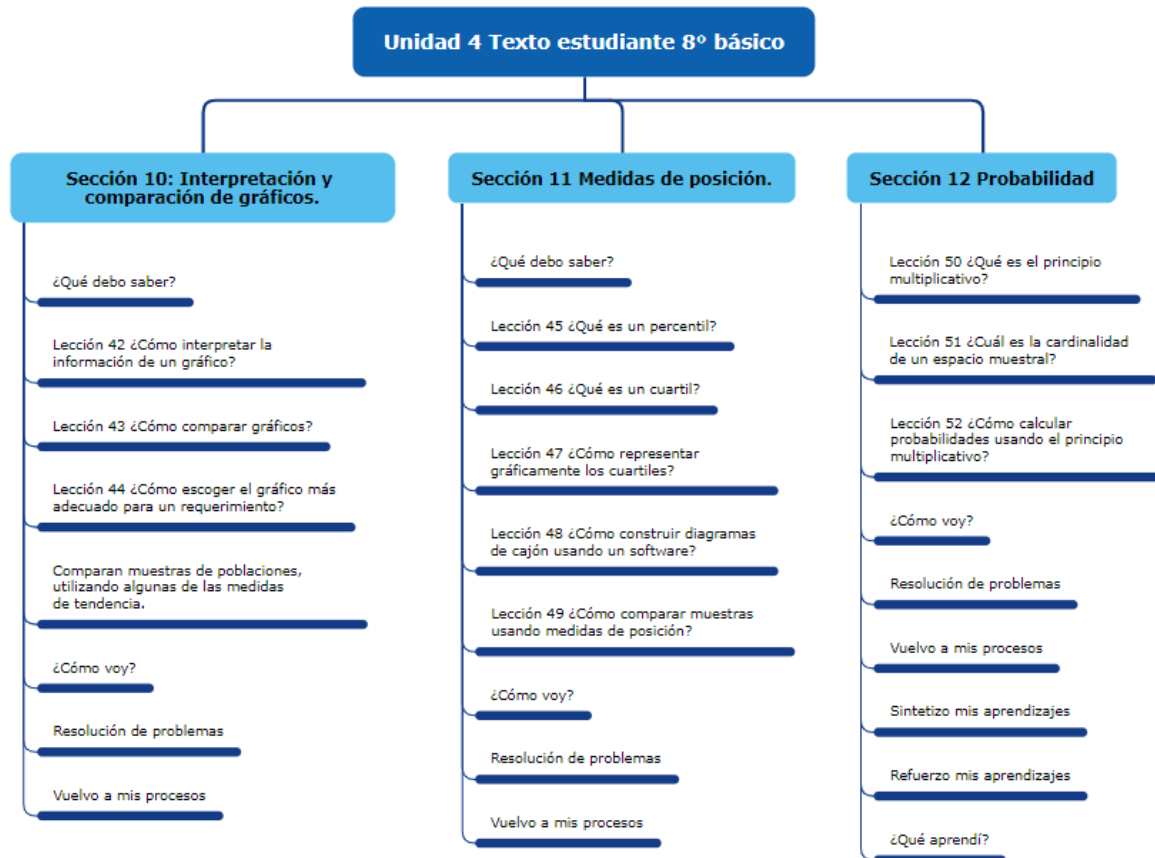


Figura 3. 42. Estructura unidad 4 texto del estudiante evaluación 8º básico

(Fuente: Catalán et al., 2015)

3.2.2.1 Contextos

La figura 3.43 presenta el resumen de la presencia de los contextos históricos de la variable aleatoria observados en las tareas propuestas a lo largo de cada objetivo de aprendizaje, sección y lección del programa de estudio y libro de texto.

ANÁLISIS CONTEXTO 8º BÁSICO

Asignatura	Sección/Tema	Lección	Contexto								
			Censos y registros	Ciencias naturales y biológicas	Economía	Intramatemático	Juegos de azar	Observación e interpretación a partir de encuestas	Sin contexto	Física y astronomía	Formal
Programa de Estudio	OA 15	Mostrar que comprenden las medidas de posición, p..	●			●			●		
	OA 16	Evaluar la forma en que los datos están presentados		●					●		
	OA 17	Explicar el principio combinatorio multiplicativo			●	●	●				
Texto de estudiante Matemática	Sección 10 interpretación y comparación de gráficos	Evaluación _Como voy	●						●		
		Lección 42 como interpretar la información de un gr..	●	●		●		●			
		Lección 43 como comparar gráficos	●		●	●		●			
		Lección 44 cómo escoger el gráfico más adecuado p..	●		●	●		●			
		Que debo saber		●				●	●		
	Sección 11 Medidas de posición	Evaluación _Como voy	●	●		●		●		●	
		Lección 45 qué es un percentil	●	●		●		●			
		Lección 46 qué es un cuartil	●			●		●			
		Lección 47 cómo representar gráficamente los cuar..	●		●	●		●			
		Lección 48 cómo construir diagramas de cajón usa..		●		●		●			
		Lección 49 cómo comparar muestras usando medid..	●	●	●	●		●			
		Que debo saber	●					●	●		
	Sección 12 Probabilidad	Evaluación _Como voy		●				●		●	
		Lección 50 qué es el principio multiplicativo						●			
		Lección 51 cuál es la cardinalidad de un espacio mue..	●	●		●		●	●		
		Lección 52 como calcular probabilidades usando el p..	●			●		●	●		
		Que debo saber		●		●		●	●		
	Síntesis y Evaluación Final	Evaluación final		●		●		●	●		
		Refuerzo	●	●		●		●	●		
	Texto estudiante Historia	Unidad 1 Edad m..	Lección 5 Expansión del comercio internacional			●					
Unidad 2 los españoles llegan..		Lección 5 que impacto tuvo la llegada de los español..			●						
		Lección 6 el impacto demográfico de la conquista	●								
Unidad 3 ¿somos herederos del m..		Lección 5 desarrollo del comercio colonial			●						
		Lección 6 la guerra de arauco y los denominados "in..			●						
Unidad 5 qué criterios se utiliz..	Lección 3 cuáles son las potencialidades y desafíos ..			●							
	Lección 4 qué desafíos defe enfrentar la población d..	●		●							

Figura 3. 43. Presencia de contextos programa de estudio y libro de texto 8º básico (Fuente: Elaboración propia)

Tanto en el programa de estudio como en el texto de matemática se observa una tendencia hacia el uso de contextos relacionados con la *observación e interpretación a partir de encuestas*, con un 47,43% (9) y un 39,39% (78) respectivamente; por su parte, en el texto de historia se observa la presencia de solo dos contextos, *censos y registros*, y *economía*, con una presencia de 41,67% (5) y 58,33% (7) respectivamente.

Por su parte, los contextos menos observados fueron *economía*, con una presencia menor al 6% tanto en el programa como en el texto del estudiante de matemática, y *ciencias naturales y biológicas*, el cual fue observado solo en el 10,53% (2) de las tareas analizadas en el programa de estudio y un 8,08 % (16). De igual modo, *censos y registros* solo se visualizó un 5,25% (1) en el programa de estudio y un 12,12% (24) en el texto del estudiante. Finalmente, cabe destacar que no se observaron tareas con contextos tales como el *formal y física y astronomía*, limitando la presencia de los contextos históricos en los estudiantes.

3.2.2.2 Tipos de Variables

La *figura 3.44* presenta el resumen de la presencia de los tipos de variables observadas en las tareas propuestas a lo largo de cada objetivo de aprendizaje, sección y lección. Se observa que el uso de variables de tipo discretas en relación a las continuas no presenta gran variación en el texto del estudiante, en donde las primeras se presentaron en el 23,23% (46) de los casos, mientras que las segundas en el 27,77% (53). Sin embargo, cuando se observa el programa de estudio, la balanza se inclina hacia el aspecto discreto con un 68,42% (13) de presencia, por su parte las variables el texto de historia presenta una inclinación al uso de variable continuas, las cuales fueron observadas en el 75% (9) de los casos.

ANÁLISIS TIPO DE VARIABLE 8º BÁSICO

Asignatura	Sección/Tema	Lección	Tipo de Variable			
			Nulo	Continua	Discreta	Mixta
Programa de Estudio	OA 15	Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles		●	●	
	OA 16	Evaluar la forma en que los datos están presentados		●	●	
	OA 17	Explicar el principio combinatorio multiplicativo	●		●	
Texto de estudiante Matemática	Sección 10 interpretación y comparación de gráficos	Evaluación _Como voy		●	●	●
		Lección 42 como interpretar la información de un gráfico	●	●	●	●
		Lección 43 como comparar gráficos	●	●	●	●
		Lección 44 cómo escoger el gráfico más adecuado para un requerimiento	●	●	●	●
		Que debo saber	●	●	●	●
	Sección 11 Medidas de posición	Evaluación _Como voy	●	●	●	●
		Lección 45 qué es un percentil	●	●	●	●
		Lección 46 qué es un cuartil	●	●	●	
		Lección 47 cómo representar gráficamente los cuartiles	●	●	●	
		Lección 48 cómo construir diagramas de cajón usando software	●	●	●	
		Lección 49 cómo comparar muestras usando medidas de posición	●	●	●	
		Que debo saber	●	●	●	
	Sección 12 Probabilidad	Evaluación _Como voy			●	●
		Lección 50 qué es el principio multiplicativo				●
		Lección 51 cuál es la cardinalidad de un espacio muestral	●		●	●
		Lección 52 como calcular probabilidades usando el principio multiplicativo	●	●	●	●
		Que debo saber	●		●	●
	Síntesis y Evaluación Final	Evaluación final	●	●	●	●
		Refuerzo	●	●	●	●
	Texto de estudiante Historia	Unidad 1 Edad ..	Lección 5 Expansión del comercio internacional		●	
Unidad 2 los españoles llega..		Lección 5 que impacto tuvo la llegada de los españoles a america en europa		●		
		Lección 6 el impacto demográfico de la conquista			●	
Unidad 3 ¿somos herederos del ..		Lección 5 desarrollo del comercio colonial		●		
		Lección 6 la guerra de araucó y los denominados "indios amigos"		●		
Unidad 5 qué criterios se util..		Lección 3 cuáles son las potencialidades y desafíos de la economía chilena		●		
		Lección 4 qué desafíos debe enfrentar la población de Chile		●	●	●

Figura 3. 44. Presencia de tipos de variable programa de estudio y libro de texto 8º básico (Fuente: Elaboración propia)

Es importante mencionar que, si bien la unidad base de análisis fueron las tareas propuestas, en algunos casos se volvió necesario analizar por separado incisos de una misma tarea que movilizan diferentes tipos de variables como el caso presentado en la *figura 3.45*, donde el inciso *a* se relaciona con una variable de tipo continua, mientras que el inciso *b* presenta una variable de tipo mixta.

1 Completa cada tabla de frecuencias según la información dada. (25 puntos)

a. Se preguntó a un grupo de personas por el tiempo que dedica a realizar actividades físicas y se registraron sus respuestas.

Horas semanales dedicadas a realizar actividad física															
2	13	6	7	8	10	12	6	8	9	6	13	5	4	5	
9	10	12	13	7	11	4	10	7	7	8	8	8	11	9	10

Horas semanales dedicadas a realizar actividad física	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada
[2, 4[
[4, 6[
[6, 8[
[8, 10[
[10, 12[
[12, 14]			

b. Se realizó un estudio acerca del tipo y cantidad de vehículos de transporte público que transita por la ciudad en un día, y se determinó que hay 2000 taxis, 5000 buses, 8000 microbuses y 3000 colectivos.

Tipo de transporte	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Taxis		
Buses		
Microbuses		
Colectivos		
Total		

Figura 3. 45. Ejemplo de tarea que moviliza más de un tipo de variable

(Fuente: Catalán et al., 2015, p. 312)

El libro de texto solo entrega ciertas características de los tipos de variable de dentro de un apartado denominado “profundizar”; dichas definiciones se pueden apreciar en la *figura 3.47*. No se entrega una definición para variable estadística o variable aleatoria, la única definición en relación al concepto de variable se presenta en la *figura 3.46*.

Variable: símbolo que representa una cantidad que puede cambiar.

Figura 3. 46. Definición de variable entregada por el libro de texto 8° básico

(Fuente: Catalán et al., 2015, p. 361)

<p>Las variables cuantitativas describen una cantidad. Entre ellas es posible distinguir:</p> <ul style="list-style-type: none">• Variable discreta: puede asumir solo valores aislados dentro de un conjunto.• Variable continua: puede asumir cualquier valor dentro de un intervalo.	<p>Las variables cualitativas describen una cualidad. Entre ellas, tenemos:</p> <ul style="list-style-type: none">• Variable ordinal: es posible ordenar de manera ascendente o descendente los valores de la variable. Por ejemplo, la posición obtenida en una prueba deportiva.• Variable nominal: no es posible ordenar de manera ascendente o descendente los valores de la variable. Por ejemplo, el estado civil de una persona.
---	---

Figura 3. 47. Definición de variable cuantitativa y cualitativa texto 8° básico

(Fuente: Catalán et al., 2015, p. 293)

Además, no se observan acotaciones en torno a la importancia de diferenciar variables a la hora de analizar y representar los diferentes datos. Lo anterior puede producir errores en la comprensión de los diversos tipos de significados de la variable y de los conceptos relacionados con esta.

3.2.2.3 Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas

La *figura 3.48* resume el tipo y respectiva cantidad de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de las tareas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstas (o en las soluciones esperadas, en el caso de las tareas resueltas). Encontramos veintiocho clases de tareas las cuales nacen a partir de las diversas combinaciones posibles entre los tipos de representación inicial, transitoria y emergente, algunas tareas se visualizaron solo en el libro de texto otras solo en el programa de estudio y otras en ambos documentos.

Representaciones Movilizadas

Representación inicial	Representación Emergente			
	Gráfica	Simbólica	Tabular	Verbal
Mixta				●
Gráfica	●	●		● ● ●
Icónica				● ●
Simbólica	●	●		● ●
Tabular	● ● ●	●		● ● ●
Verbal	● ●	● ●	●	● ● ● ●

Representación transitoria	
■	Sin representación transitoria
■	Gráfica
■	Icónica
■	Simbólica
■	Tabular
■	Verbal

Figura 3. 48. Tipologías de tareas en relación a las representaciones inicial, transitoria y emergentes presentes en las tareas del texto escolar de 8° básico 8

(Fuente: Elaboración propia)

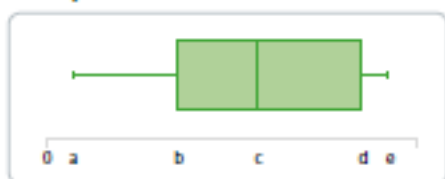
La primera refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello el estudiante debe transitar de lo gráfico a lo verbal y de lo verbal a una respuesta en registro gráfico. Un ejemplo se presenta en la *figura 3.49*.



Figura 3. 49. Ejemplo de tarea gráfica – verbal- grafica (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 302)

La segunda clase refiere a aquellas tareas en las cuales proporciona una representación gráfica la cual deberá de ser interpretada por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en registro simbólico. Un ejemplo de este tipo se aprecia en la *figura 3.50*. La tercera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase de tarea se presenta en la *figura 3.51*.

10. Observa el diagrama de cajón que representa un conjunto de datos.

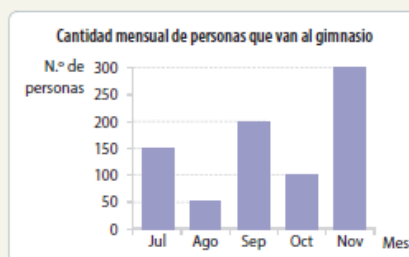


- Identifica cada indicador de posición (valor mínimo, cuartil 1, cuartil 2, cuartil 3 y valor máximo) con uno de los valores representados por las letras a, b, c, d y e. (2 puntos)
- Usa $<$, $>$ o $=$ para expresar la relación de orden que representa que el bigote izquierdo posee una extensión mayor que el bigote derecho. (3 puntos)
- Usa $<$, $>$ o $=$ para expresar relación de orden que representa que el compartimento izquierdo y el compartimento derecho del cajón tienen la misma extensión. (3 puntos)

Figura 3. 50. Ejemplo de tarea gráfica – simbólica (Fuente; Catalán et al., 2015, p. 358)

► Interpretar la información de un gráfico

- 3 Observa el gráfico que muestra la cantidad de personas de una villa que asisten mensualmente a un gimnasio. Luego, escribe V si la afirmación es verdadera y F si es falsa. (4 puntos)



- _____ Agosto y octubre fueron los meses en que asistieron menos personas al gimnasio.
- _____ En octubre, la cantidad de personas disminuyó en comparación con septiembre.
- _____ Noviembre fue el mes con la mayor asistencia de personas.
- _____ Entre los meses de julio y noviembre asistieron 500 personas al gimnasio.

Figura 3. 51. Ejemplo de tarea gráfica – verbal (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 291)

La cuarta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo gráfico a lo tabular y de lo tabular a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la figura 3.52.

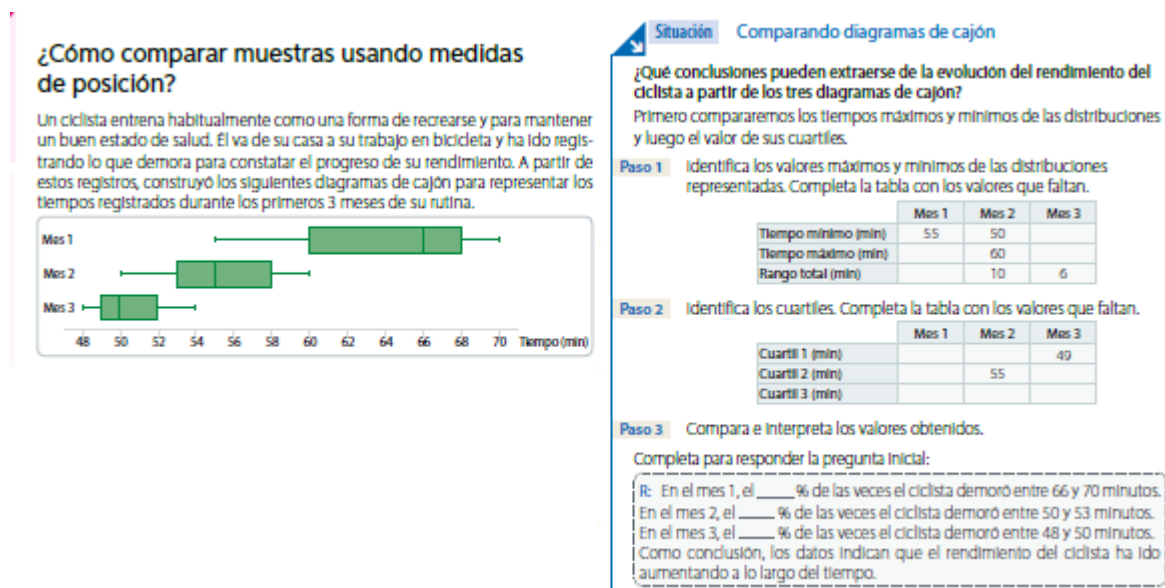


Figura 3. 52. Ejemplo tarea gráfica – tabular- verbal (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 326)

La quinta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación icónica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal, un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.53*.

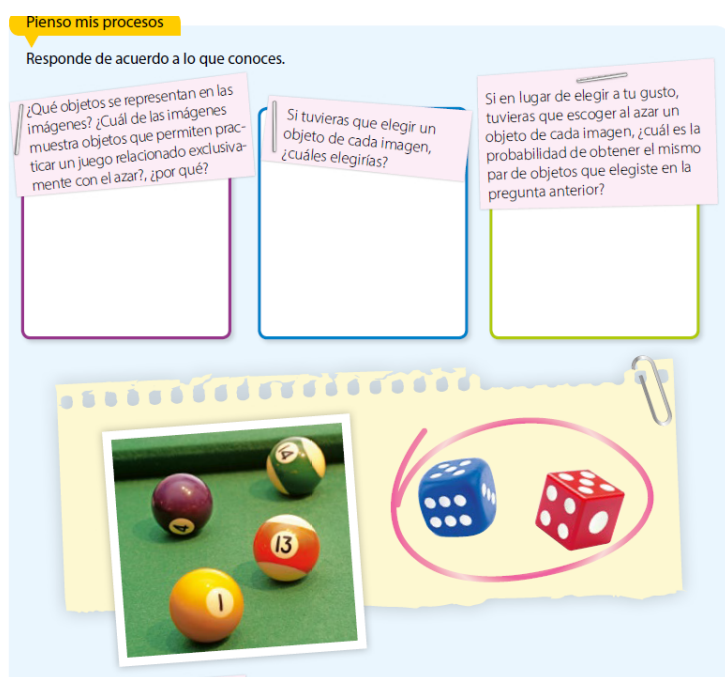


Figura 3. 53. Ejemplo tarea icónica – verbal (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 335)

La sexta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación icónica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello, el estudiante debe transitar de lo icónico a lo tabular y de lo tabular a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.54*.

Situación 3 Representando los resultados en un diagrama de árbol

Un juego consiste en lanzar una moneda y sacar una carta de una baraja con 4 cartas. ¿Cuál es la cardinalidad del espacio muestral de este experimento secuencial?

Para contestar, consideraremos que la moneda es de \$ 100 y que las cartas de la baraja son el rey de copas, el rey de oros, el as de espadas y el as de oros. Luego, construiremos un diagrama de árbol.

Paso 1 Dibuja el diagrama de árbol que representa los posibles resultados del juego.

Paso 2 Describe y cuenta todos los resultados. Para esto, puedes organizarlos en una tabla.

	(C, R1)	(C, R2)	(C, A1)	(C, A2)
	(S, R1)	(S, R2)	(S, A1)	(S, A2)

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

Figura 3. 54. Ejemplo tarea icónica – tabular- verbal (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 341)

La séptima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación simbólica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.55*. La octava clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación simbólica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.56*.

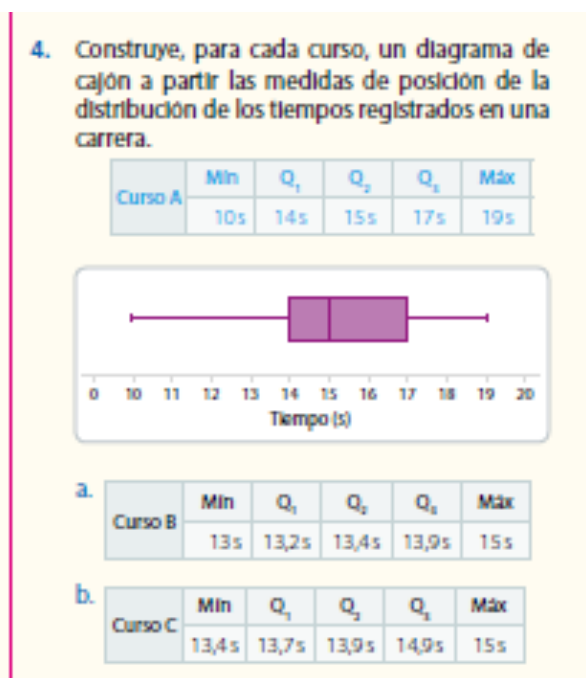


Figura 3. 55. Ejemplo tarea simbólica – gráfica (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 320)

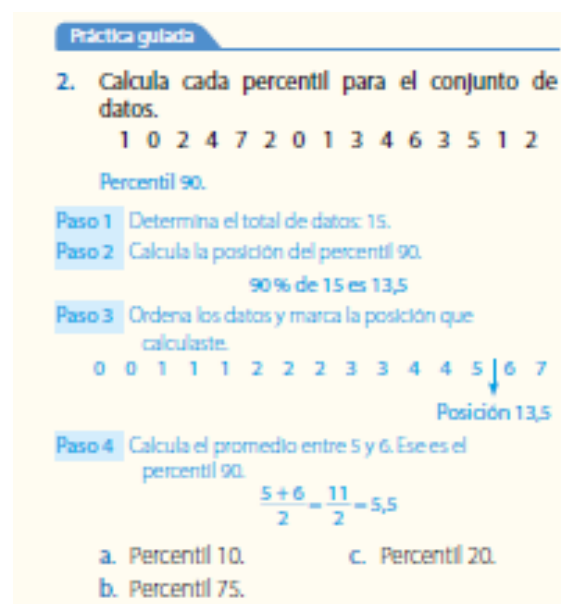


Figura 3. 56. Ejemplo tarea simbólica – simbólica (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 315)

La novena clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación simbólica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la figura 3.57, en donde al incorporar las etiquetas con valores numéricos sobre el gráfico este pierde su categoría de gráfico y se convierte en simbólico.

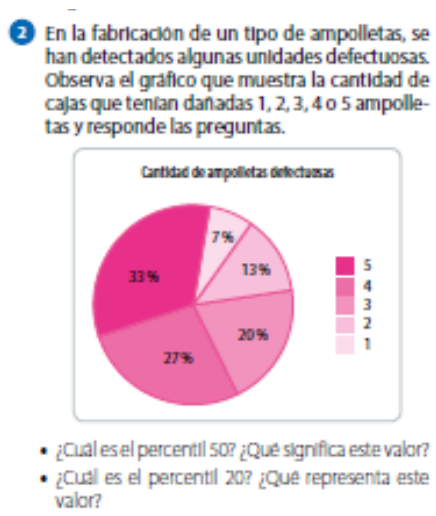


Figura 3. 57. Ejemplo tarea simbólica – verbal (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 295)

La décima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación simbólica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo simbólico a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en el inciso c de la tarea presentada en la *figura 3.58*.

Considera estas configuraciones:

Mujer	Hombre
$X_N X_N$: sana	$X_N Y$: sano
$X_N X_D$: portadora	$X_D Y$: daltónico
$X_D X_D$: daltónica	

¿Cuál es la probabilidad de que al combinar los genes de una madre $X_N X_D$ y de un padre $X_N Y$ el nuevo individuo sea daltónico?

¿Cuáles son todas las posibles configuraciones que se generan al combinar los genes de una madre portadora $X_N X_D$ y de un padre daltónico $X_D Y$? ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo individuo no sea daltónico?

Figura 3. 58. Ejemplo tarea simbólica – simbólica- verbal (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 287)

La décima primera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.59*.

Repaso

1. Representa en un gráfico de barras el número de inscritos en cada una de las tres ramas deportivas de un colegio.

Rama deportiva	Cantidad de inscritos
Tenis de mesa	12
Baby fútbol	23
Running	18

Figura 3. 59. Ejemplo tarea tabular – gráfica (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 295)

La décima segunda clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante que proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello el estudiante debe transitar de lo tabular a lo verbal y de lo verbal a una respuesta en registro gráfico. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.60*.

5. **Conecto con el Deporte.** Los Juegos Sudamericanos, también llamados juegos Odesur son un evento deportivo multidisciplinario en el cual participan atletas de todos los países de América del Sur, menos Guayana Francesa, y algunos países invitados de América Central y del Caribe. Su décima versión se realizó en Santiago el año 2014. En la siguiente tabla se muestra el medallero final.

Pais	Oro	Plata	Bronce	TOTAL
Brasil	110	69	79	258
Colombia	53	49	64	166
Venezuela	47	40	63	150
Argentina	46	57	56	159
Chile	27	52	50	129
Ecuador	14	22	37	73
Perú	9	13	18	40
Panamá	4	3	8	15
Paraguay	3	5	2	10
Uruguay	3	4	5	12
Surinam	1	0	4	5
Bolivia	0	0	4	4
Aruba	0	0	1	1
Guyana	0	0	0	0

- ¿Qué gráfico utilizarías para representar esta información?, ¿por qué?
- Representa la información del medallero en el gráfico que escogiste.

Figura 3. 60. Ejemplo tarea tabular – verbal - gráfica (Fuente: catalán et al., 2015, p. 303)

La décima tercera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta clase se presenta en la figura 3.61.

U. PERCENTIL 83.

Práctica guiada

3. Calcula los valores de los cuartiles a partir de la información de la tabla.

Cantidad de hermanos de un grupo de estudiantes		
Cantidad de hermanos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
0	3	3
1	9	12
2	6	18
3	18	36
4	3	39
5	2	41

Cuartil 1 (25%)	Cuartil 2 (50%)	Cuartil 3 (75%)
$0,25 \cdot 41 = 10,25$ $Q_1 = 1$	$0,5 \cdot 41 = 20,5$ $Q_2 = 3$	$0,75 \cdot 41 = 30,75$ $Q_3 = 3$

a. Cantidad de automóviles por familia

Cantidad de autos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
0	6	6
1	13	19
2	4	23
3	4	27

b. Número de calzado de los varones de un curso

Número de calzado	Frecuencia absoluta
38	7
39	4
40	5
41	3

Figura 3. 61. Ejemplo tarea tabular – simbólica (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 317)


La décima cuarta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.62*.

Norte Chico 1690-1800. Santiago: Universitaria.

Doc. 3 Envíos de oro y plata a España


Primera mitad del siglo XVII según el historiador Earl Hamilton				Segunda mitad del siglo XVII según el historiador Lutgaro García Fuentes			
Años	En maravedíes	Años	En maravedíes	Años	En maravedíes	Años	En maravedíes
1601-1605	10981 524 600	1626-1630	11 229 536 925	1651-1655	2 095 791 820	1676-1680	1 083 506 286
1606-1610	14 132 343 150	1631-1635	7 699 884 430	1656-1660	1 514 658 928	1681-1685	529 266 946
1611-1615	11 037 654 220	1636-1640	7 341 570 900	1661-1665	1 852 668 884	1686-1690	600 385 644
1616-1620	13 550 688 000	1641-1645	6 193 711 121	1666-1670	1 188 953 240	1691-1695	205 696 380
1621-1625	12 154 805 325	1646-1650	5 296 746 150	1671-1675	1 155 335 451	1696-1699	535 709 304

Recuperado de: http://www7.uc.cl/sw_educ/historia/america/html/2_1_1.html

Desafío 1 

Caracterizo la actividad minera colonial

- ¿Cómo se refleja en la obra de Guamán Poma lo descrito por Reginaldo de Lizárraga? **Doc. 1**
- ¿Cómo describe la minería de Chile el **Doc. 2**?
- ¿Qué conclusiones pueden extraer a partir de las cifras expuestas en el **Doc. 3**?

Desafío 2 

Elaboro un dossier

Inicia el trabajo sobre un dossier de economía colonial. Incluye en él información complementaria a la que se presenta en la lección.

Figura 3. 62. Ejemplo tarea tabular - verbal (Fuente: Landa y Pinto, 2015, p. 163)

La décima quinta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo tabular a lo gráfico y de lo gráfico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.63*.

Capítulo 3. Presencia de los significados de la variable aleatoria en el currículo chileno

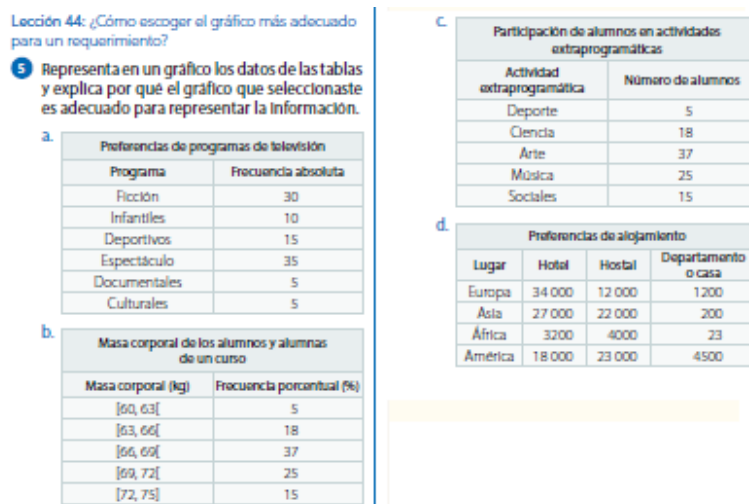


Figura 3. 63. Ejemplo tarea tabular – gráfica - verbal (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 307)

La décima sexta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo tabular a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en los incisos a, b y c de la figura 3.64.

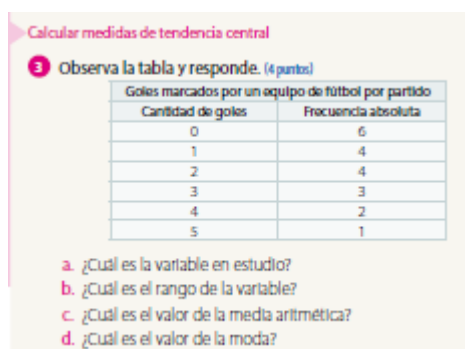


Figura 3. 64. Ejemplo tarea tabular - simbólica– verbal (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 313)

La décima séptima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Un ejemplo de esta clase se presenta figura 3.65.

7. Describe el procedimiento. Representa en un diagrama de cajón los datos presentados en la situación y describe paso a paso cómo realizas su construcción.
- En un estudio de mercado realizado por una automotora se obtuvieron los siguientes resultados respecto a los precios de venta:
- La mediana del precio de venta de los vehículos es de aproximadamente \$ 3 700 000.
 - El 25 % de los vehículos se vende en menos de \$ 2 300 000.
 - El 25 % de los vehículos se vende en más de \$ 4 200 000.
 - El 50 % de los vehículos se vende por un valor que va desde los \$ 1 200 000 a los \$ 3 700 000.
 - El precio de venta máximo es de \$ 5 400 000.

Figura 3. 65. Ejemplo tarea verbal – gráfica (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 321)

La décima octava clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.66*.

- Representar e interpretar un diagrama de árbol
- 4 Representa cada experimento en un diagrama de árbol. (2 puntos)
- a. Lanzamiento de un dado de seis caras y una moneda.
 - b. Lanzamiento de tres monedas.

Figura 3. 66. Ejemplo tarea verbal – simbólica (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 336)

La décima novena clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo tabular y de lo tabular a una respuesta en registro simbólico. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.67*.

- Aplica
5. Realiza las actividades. Luego, responde.
- a. Registra en tu cuaderno la altura de cada uno de tus compañeros y compañeras.
 - b. Con los datos obtenidos, construye una tabla de frecuencias porcentuales acumuladas.
 - c. Determina el valor mínimo, los cuartiles y el valor máximo de la distribución de datos.

Figura 3. 67. Ejemplo tarea verbal – tabular - simbólica (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 320)

La vigésima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación tabular. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.68*.

Representar datos en una tabla de frecuencias

2 Se preguntó a un grupo de familias por el número de celulares que poseen sus integrantes y sus respuestas fueron: 2, 4, 1, 1, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 2, 5, 3, 1 y 3. Considera que cada familia fue encuestada solo una vez.

Completa la tabla de frecuencias a partir de la información anterior. (20 puntos)

Cantidad de celulares	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada

Figura 3. 68. Ejemplo tarea verbal – tabular (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 290)

La vigésima primera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.69*.

6. Argumenta. Diego le dice a Mónica que el valor del percentil 75 es equivalente al valor del cuartil 3. ¿Es correcta la afirmación de Diego?, ¿por qué? Da argumentos que justifiquen tu respuesta.

Figura 3. 69. Ejemplo tarea verbal – verbal (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 317)

La vigésima segunda clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo gráfico y de lo gráfico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.70*.

cuartiles?

4 En la tabla se presentan las notas que tuvieron Carlos y Patricia en los controles de Historia y Geografía durante el primer semestre.

Carlos	7	3	5	4	6	2	7
Patricia	4	5	6	5	4	6	5

a. Representa los datos en un diagrama de cajón.
b. ¿Quién tuvo un mejor rendimiento en Historia y Geografía?

Figura 3. 70. Ejemplo tarea verbal –gráfica - verbal (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 330)

La vigésima tercera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo icónico y de lo icónico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta figura 3.71.

¿Cuál es la cardinalidad de un espacio muestral?

En un torneo de fútbol llegaron a las instancias finales 5 equipos: Las Águilas, Los Hipopótamos, Los Leones, Los Lobos y Los Tigres. Entre estos 5 equipos se definirán los 3 primeros lugares, que recibirán trofeos y medallas.

Situación 1 Analizando la utilidad de usar un diagrama de árbol

¿Es práctico usar un diagrama de árbol para calcular la cantidad de maneras en que los equipos se pueden repartir los 3 primeros puestos?

Paso 1 Construye un diagrama que muestre los lugares que ocuparon los equipos. Por ejemplo, supón que el primer lugar lo obtiene el equipo Los Hipopótamos. Entonces, el diagrama queda como se muestra en la imagen. Puedes ver que cada rama del árbol te indica una posible distribución para los tres primeros lugares. Por ejemplo, se ha destacado una de ellas, que muestra a Los Hipopótamos en primer lugar, a Los Leones en segundo lugar y a Las Águilas en tercer lugar.

¿Cuántas distribuciones hay en total en el diagrama?

Hay _____ distribuciones.

Paso 2 Evalúa si estas son todas las distribuciones posibles. Como cualquiera de los equipos puede obtener el primer lugar, puedes elaborar 4 diagramas similares al anterior, para completar un total de 5 diagramas. Por lo tanto, hay $12 \cdot 5 = 60$ maneras de ordenar los equipos.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial: R: _____

Figura 3. 71. Ejemplo tarea verbal –icónica - verbal (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 340)

La vigésima cuarta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una

representación verbal. Para ello, el estudiante debe transitar de lo verbal a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en el registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.72*.

Situación 3 Multiplicando las probabilidades para otro caso

Nuevamente considerando los diseños del blog de Valeria, ¿cuál es la probabilidad de que elija el diseño 2 y que el sector B sea verde?

Paso 1 Determina la probabilidad de cada experimento simple.
Elegir el diseño 2. Como, nuevamente, existe 1 posibilidad favorable y 3 posibles, esta probabilidad es $\frac{1}{3}$. Y la probabilidad de que el sector B sea verde es $\frac{2}{6}$, ya que existen 2 posibilidades a favor de 6 totales.

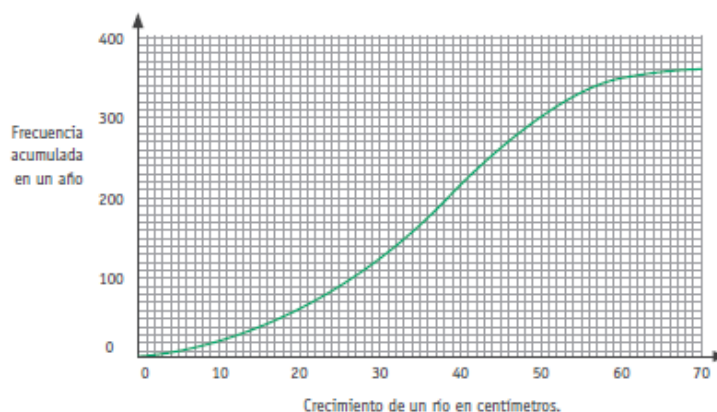
Paso 2 Aplica el principio multiplicativo y calcula la probabilidad buscada.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

Figura 3. 72. Ejemplo tarea verbal –simbólica - verbal (Catalán et al., 2015, p. 347)

La vigésima quinta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello, el estudiante debe transitar de lo gráfico a lo gráfico y de lo gráfico a una respuesta en el registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.73*.

1. La siguiente imagen muestra el crecimiento de un río en cm durante un año (365 días).



- › Determinan el gráfico que representa adecuadamente dicha información.
- › Determinan la media de acuerdo al gráfico.
- › Comparan los gráficos con sus compañeros y determinan cuál representa mejor la información.

Figura 3. 73. Ejemplo tarea gráfica –gráfica - verbal (Mineduc, 2016, p. 176)

La vigésima sexta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una

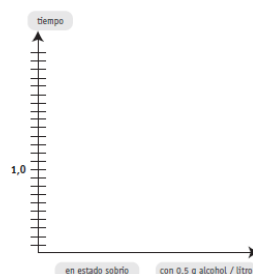
Capítulo 3. Presencia de los significados de la variable aleatoria en el currículo chileno

representación gráfica. Para ello, el estudiante debe transitar de lo tabular a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en el registro grafica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.74*.

4. Se sabe que la existencia de alcohol en la sangre disminuye la capacidad de reaccionar. En la tabla se registra el resultado de un experimento que midió el tiempo de reacción de 100 personas. Primero se aplicó el test a personas en estado sobrio y después se midió el tiempo de reacción a personas con 0,5 g de alcohol por litro en la sangre.

TIEMPO DE REACCIÓN EN S	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
EN ESTADO SOBRIO	1	1	3	14	29	30	19	2	1	0	0	0
CON 0,5 g POR LITRO EN LA SANGRE	0	0	1	6	20	37	16	12	3	4	0	1

- › Determinan para ambas partes del test el valor mínimo, el valor máximo y los tres cuartiles.



- › Elaboran para ambas poblaciones los diagramas de caja y bigotes.

Figura 3. 74. Ejemplo tarea tabular- simbólica - gráfica (Mineduc, 2016, p. 172)

La vigésima séptima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello, el estudiante debe transitar de lo verbal a lo tabular y de lo tabular a una respuesta en el registro gráfica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.75*.

6. En un colegio, los alumnos encargados de la revista escolar Ventana hicieron una encuesta sobre los "amigos" que cada uno ha registrado en sus cuentas de redes sociales en internet. El equipo que prepara la representación obtuvo la siguiente lista original de la encuesta.

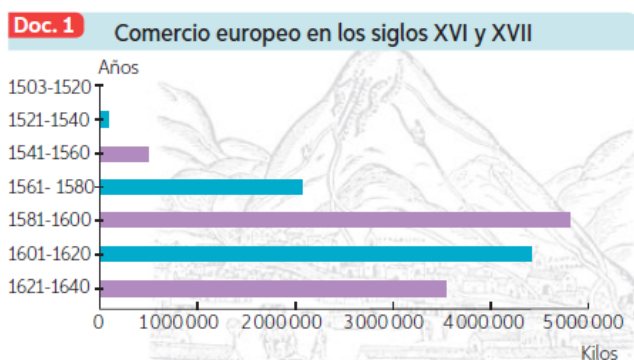
"AMIGOS"	5	9	10	14	15	16	20	25	27	28	30	31	33	35	42	49	55
MENCIONES	2	1	11	9	18	9	13	12	9	8	12	7	8	11	5	2	4

- › Agrupan las frecuencias absolutas en 6 intervalos del ancho 10.
- › Determinan las medidas de tendencia central: media, mediana y moda.
- › Confeccionan un gráfico de barras y marcan las medidas de tendencia central en el gráfico.
- › Elaboran un gráfico de líneas, señalando las marcas de clase en el eje horizontal.



Figura 3. 75. Ejemplo tarea verbal- tabular - grafica (Mineduc, 2016, p. 175)

La vigésima octava clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación mixta, es decir, se presenta al estudiante más de un tipo de representación a la vez, y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Varios ejemplos de esta clase se presentaron en el texto de historia, en la *figura 3.76* se presenta un ejemplo de esta clase.



▲ Hamilton, E. (2000). *El tesoro americano y la revolución de los precios en España, 1501-1650*. Madrid: Crítica.

Desafío 1



Comprendo los efectos económicos de la conquista de América

- a. ¿Qué relación puedes establecer entre el gráfico y lo planteado por Hamilton y por Vilar?

Doc. 3

Múltiples factores afectan los precios

“¿Es exacto –y en el caso de que así sea, cómo y cuándo– que la llegada de metales preciosos a Sevilla, cuya importancia para el alza de precios y el desarrollo del comercio en la propia España acabamos de ver, tuvo también repercusiones en Europa?

El problema es complejo:

- 1º porque otros factores, además de los metales (y, antes que los metales americanos, la plata alemana), pudieron hacer subir los precios en Europa sin que sea obligado explicar el aumento por el oro de América;
- 2º porque los aumentos no han sido netos, ni sobre todo iguales, en todos los países;
- 3º finalmente, porque al haber ‘manipulado’ muchos países, durante la primera mitad del siglo XVI, sus monedas internas (...) difícilmente se puede saber si los aumentos de precios están en relación con estas manipulaciones o con el oro de América”.

Vilar, P. (1974). *Oro y moneda en la historia. 1450-1920*. Barcelona: Ariel.

Doc. 2

Revolución de los precios

“A principios del siglo XVI, se produjo en España una tendencia a la subida de precios, primero y más rápidamente en Andalucía, en donde la subida continuó durante cien años, con prácticamente todos los máximos y mínimos por encima de años anteriores. (...) La principal causa de la revolución de los precios (...) fue el gran aumento de la oferta monetaria (...), la subida explosiva de la producción de plata tras la conquistas de México y Perú; el descubrimiento de las fabulosas minas de Zacatecas, Guanajuato y Potosí, y la introducción del proceso de amalgamación de mercurio en la minería a mediados del siglo XVI fue lo que generó la revolución de los precios”.

Hamilton, E. (2000). *El tesoro americano y la revolución de los precios en España, 1501-1650*. Madrid: Crítica.

Figura 3. 76. Ejemplo tarea mixta - gráfica (Landa y Pinto, 2015, p. 104)

Tanto en las representaciones iniciales como emergentes se observa una tendencia hacia el registro verbal esto da cuenta del carácter interpretativo que se espera desarrollar a través de

la probabilidad y la estadística en los estudiantes y, de manera particular, de la variable aleatoria. Lo anterior sustenta la calidad de ‘idea fundamental’ de la variable aleatoria, así como su rol en la interpretación del mundo.

3.2.2.4 Significado de la noción de variable aleatoria pretendido por el libro de texto y programa de estudio

La *figura 3.77* presenta el detalle de los significados movilizados en las tareas analizadas, cada cuadrado representa una tarea analizada. Tanto en el programa de estudio como en el texto del estudiante de matemática e historia se observó que las tareas relacionadas al significado S_1 , como variable de interés, presentan el mayor porcentaje con un 78,98% (15), 47,98% (95) y 58,33% (7) respectivamente. Por su parte, las tareas relacionadas con el significado S_3 , como variable estadística, se presentó en el 21,05% (4) de las tareas del programa de estudio, en un 21,72% (43) en el texto de matemática y en un 41,67% (5) en el texto de historia. No se observaron tareas relacionadas a los significados S_2 , como magnitud, y S_4 , como función, en ninguno de los tres casos.

Significados movilizado en tareas 8º básico

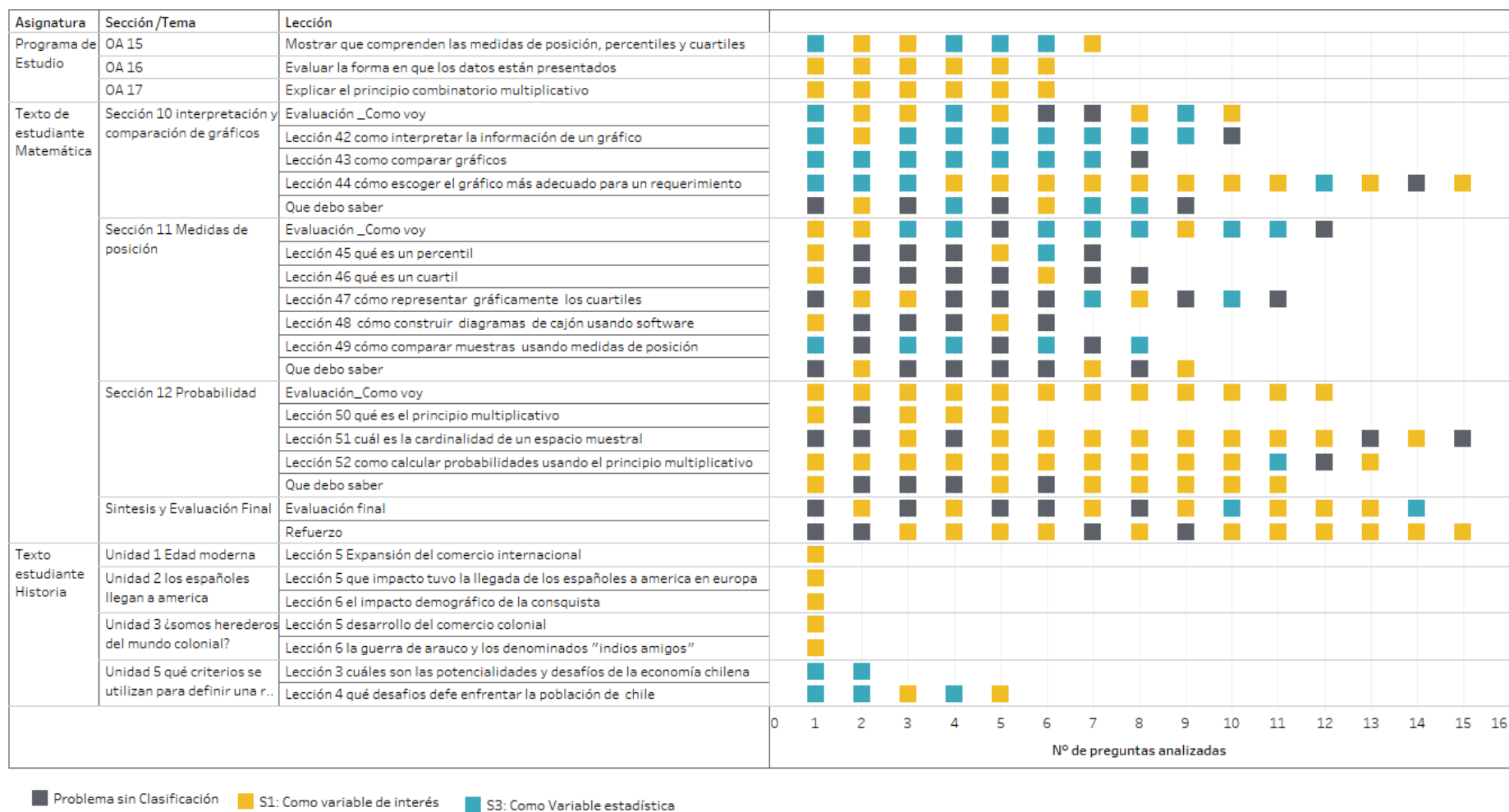


Figura 3. 77. Resumen presencia de significados en el texto del estudiante y programa de estudio 8º básico (Fuente: Elaboración propia)

Adicionalmente, se observó la presencia de tareas denominadas “Sin clasificación” a lo largo del texto de matemática, esta clase de tareas se presentaron por lo general relacionadas con la activación de conceptos previos o el refuerzo de un procedimiento de cálculo. Un ejemplo de esta clase de tareas se observa en la *figura 3.78*

Activo conceptos clave

2. El listado contiene algunos conceptos clave de esta sección. Úsalos para responder las preguntas.

cuartil porcentaje	diagrama de cajón medidas de posición	gráfico percentil
-----------------------	--	----------------------

a. ¿Cuál de los conceptos es desconocido para tí?, ¿qué crees que signifique?

b. ¿Qué par de conceptos crees que podrían estar relacionados entre sí?, ¿por qué?

c. ¿Qué concepto ya has trabajado previamente?, ¿cómo se define?

Figura 3. 78. Ejemplo problema sin clasificación (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 310)

Es importante mencionar que, si bien la unidad base de análisis fueron las tareas propuestas en el libro de texto, en algunos casos se volvió necesario analizar por separado incisos de una misma tarea, ya que movilizaban diferentes tipos de significados, como el caso presentado en la *figura 3.79*, donde el inciso a y b movilizan el significado S1, *variable de interés*, mientras que el inciso c moviliza el significado S3, *variable estadística*.

Lección 43: ¿Cómo comparar gráficos?

3 El gráfico presenta el porcentaje de instituciones en las que se inscribieron jóvenes chilenos, según su nivel socioeconómico.

Institución	Alto (%)	Medio (%)	Bajo (%)
CFT	3	22	34
IP	4	22	38
U. Cruch	76	35	21
U. Privada	17	21	7

Fuente: "Trabajo y estudios superiores en jóvenes chilenos", INJUV, 2012.

CFT: centro de formación técnica; IP: Instituto profesional; U. Cruch: universidad del Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas; U. Privada: universidad privada.

a. ¿Qué tipo de institución presenta más inscritos? Explica y justifica tu respuesta.

b. ¿Cuál es la preferencia de los jóvenes al momento de inscribirse en una institución superior de acuerdo a su nivel socioeconómico?

c. Si estuvieras interesado en manipular la información para hacer creer al lector que la mayoría de los jóvenes de nivel socioeconómico medio se inscriben en los institutos profesionales, ¿cómo lo harías? Explica.

Figura 3. 79. Ejemplo problema con más de un significado (Fuente: Catalán et al., 2015, p. 306)

La figura 3.80 muestra la presencia de significados por sección y objetivos de aprendizajes, podemos mencionar que los objetivos OA 16 “Evaluar la forma en que los datos están presentados” (Mineduc,2016, p.169) y OA 17 “Explicar el principio combinatorio multiplicativo” (Ibíd.) están vinculados exclusivamente a tareas relacionadas con el significado S_1 . De igual modo, se observó la tendencia al uso de este significado en las secciones de ambos textos de estudio.

Presencia de significados por sección y objetivo de aprendizaje

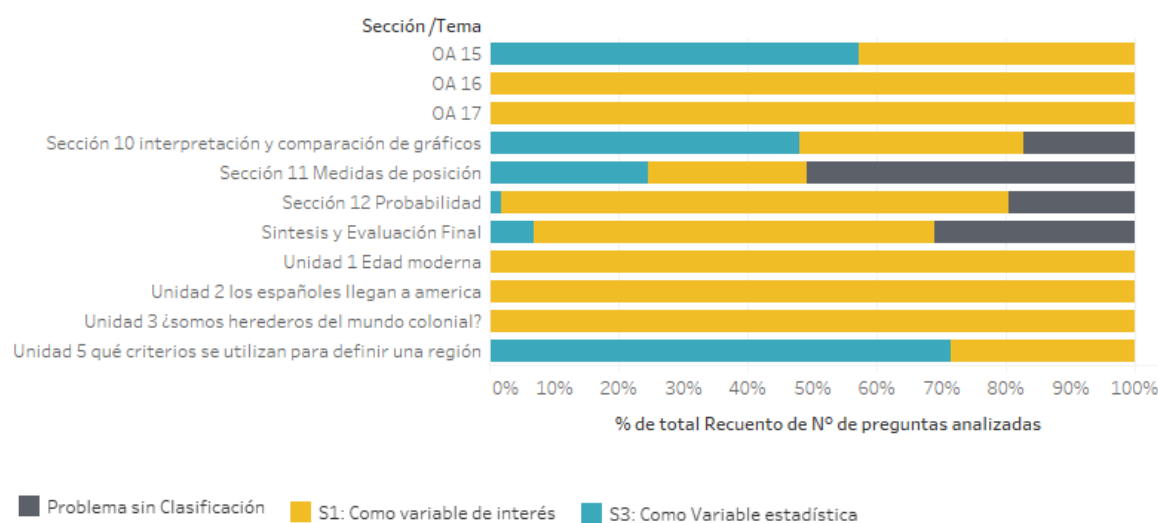


Figura 3. 80. Porcentaje de presencia de significados por secciones y objetivos de aprendizaje
(Fuente: Elaboración propia)

Significados y contextos

Los significados de un determinado objeto matemático se determinan con base en los contextos históricos en los cuales se fue desarrollando dicho objeto, es por ello que en la figura 3.81 se observa la relación entre los significados pretendidos por los libros de texto y programa de estudio de octavo básico y los contextos históricos de la variable. En la figura no se visualiza el contexto física y astronomía y el formal, ya que no fue posible identificar ninguna tarea que movilizara dichos contextos.

Significados v/s contexto

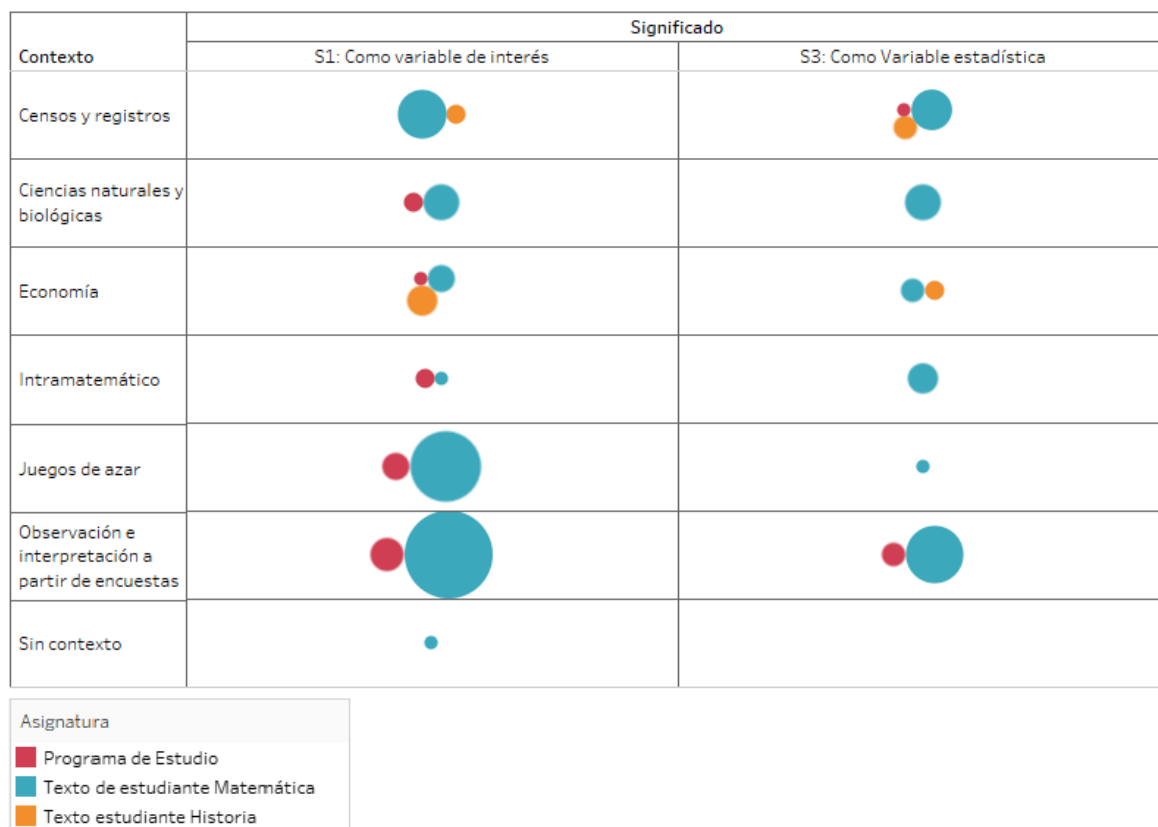


Figura 3. 81. Contextos históricos versus significados de la variable aleatoria en el programa de estudio y texto de matemática e historia 8° básico (Fuente: Elaboración propia)

En la figura anterior se puede observar que, para el caso del texto de matemática del estudiante, el significado S_1 es vinculado con seis de los seis contextos observados, mostrando la mayor concentración en el vínculo S_1 –*observación e interpretación a partir de encuestas*, con un 44,21% (42); mientras que el programa de estudio lo vincula con cinco, presentando nuevamente una mayor concentración en el vínculo S_1 –*observación e interpretación a partir de encuestas* con un 40% (6). Por su parte, el libro de historia vincula a S_1 con dos de los seis contextos, presentando una mayor concentración en el vínculo S_1 –*economía*, con un 71,43% (5). En torno al significado S_3 , podemos mencionar que es vinculado a los seis contextos observados en el texto de matemática del estudiante, mostrando su mayor concentración en el vínculo S_3 –*observación e interpretación a partir de encuestas*, con un 41,86% (18); mientras

que el programa de estudio lo vincula solo a dos contextos, manteniendo la mayor concentración en el vínculo S_3 -*observación e interpretación a partir de encuestas* con un 75% (3). En el texto de historia S_3 es vinculado a dos de los seis contextos observados, presentando una mayor concentración en el vínculo S_3 -*censos y registros*, con un 60% (3). Lo anterior permite concluir que el libro de texto y el programa de estudio no son representativos de los contextos históricos en relación a los significados de la variable aleatoria.

3.2.3 Análisis de la propuesta curricular para primero medio

A continuación, presentamos el análisis de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de primero medio. Para esto consideramos el Programa de Estudios (PE) o “Programa de Estudio para Primer año medio” propuesto por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc, 2016). Así mismo consideramos el libro de texto que sugiere el marco curricular elaborado por:

- Galasso, B., Maldonado, L., & Marambio, V. (2016). *Texto del estudiante. Matemática 1° Medio*. Chile: Santillana del Pacifico S. A. de Ediciones.

El Programa de Estudios para primero medio propuesto por el Ministerio de Educación de Chile se divide en cuatro Unidades, cada una de estas asociadas a un Eje Temático. La noción de variable aleatoria se aborda en la Unidad 4, que está relacionada con el Eje Temático de Probabilidad y estadística. En dicha unidad se plantean cuatro aprendizajes esperados y para cada aprendizaje esperado una serie de indicadores de evaluación, tal como muestra a continuación en la tabla 3.4.

Tabla 3.4

Objetivos de aprendizaje e indicadores de logro eje estadística y probabilidad 1° medio.
Fuente: Mineduc 2016

Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 12 Registrar distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una tabla de doble entrada y en una nube de puntos.	<ul style="list-style-type: none">• Elaboran y describen gráficos de dispersión en una y en dos dimensiones.• Reconocen estructuras lineales u otras, en las formas de las nubes de puntos.• Realizan encuestas en su entorno, preguntando dos características, y representan los resultados mediante gráficos de nube de puntos.• Describen nubes de puntos presentadas en el sistema de coordenadas.• Conjeturan de forma intuitiva si hay correlación entre las características registradas.
OA 13 Comparar poblaciones mediante la confección de gráficos “xy” para dos atributos de muestras, de manera concreta y pictórica: Utilizando nubes de puntos en dos colores. Separando la nube por medio de una recta trazada de manera intuitiva.	<ul style="list-style-type: none">• Registran datos de dos características provenientes de una o de dos poblaciones, en tablas de doble entrada, y representan los datos mediante nubes de puntos en dos colores.• Describen nubes de puntos e identifican y comentan puntos aislados en las nubes de puntos.• Argumentan acerca de coherencias o diferencias entre nubes de puntos de diferentes poblaciones.• Trazan de manera intuitiva la recta que separa de mejor forma la nube de puntos en dos poblaciones.
OA 14 Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con <i>software</i>	<ul style="list-style-type: none">• Elaboran o completan diagramas de árboles con las posibilidades de experimentos aleatorios, para representar los eventos y determinar sus probabilidades.• Reconocen la regla multiplicativa de la probabilidad a lo largo de una “rama” que conduce de la partida al tramo exterior.

educativo, en el contexto de la resolución de problemas.

- Reconocen la regla aditiva de la probabilidad en la unión de distintas “ramas”.
- Aplican la combinación de la regla aditiva y de la regla multiplicativa para determinar probabilidades de eventos compuestos.
- Calculan las probabilidades de eventos simples y compuestos.
- Resuelven problemas de la vida diaria que involucran las reglas aditiva y multiplicativa.

OA 15

Mostrar que comprenden el concepto de azar:

Experimentando con la tabla de Galton y con paseos aleatorios sencillos, de manera manual y/o con *software* educativo.

Realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas.

Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso.

Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

- Elaboran árboles o redes de caminos para marcar diferentes “paseos al azar”.
- Verifican que una “rama” o “camino” lleva a una meta en el margen del árbol, mientras que varios caminos llevan a una meta central.
- Reconocen una distribución de los datos (que se acumula en el centro) en repeticiones de experimentos aleatorios (tabla de Galton).
- Analizan estadísticas basadas en el mismo objetivo, reconociendo que son distintas en el detalle, aunque muestran coherencias en general.
- Resuelven problemas de la vida diaria que involucran estimaciones basadas en frecuencias relativas.

Por su parte el texto del estudiante presenta el estudio de elementos relacionados con la variable aleatoria en la unidad 4 titulada “Probabilidad y estadística”, esta unidad está dividida en tres secciones y, a su vez, cada sección se divide en lecciones tal como se puede apreciar en la *figura 3.82*

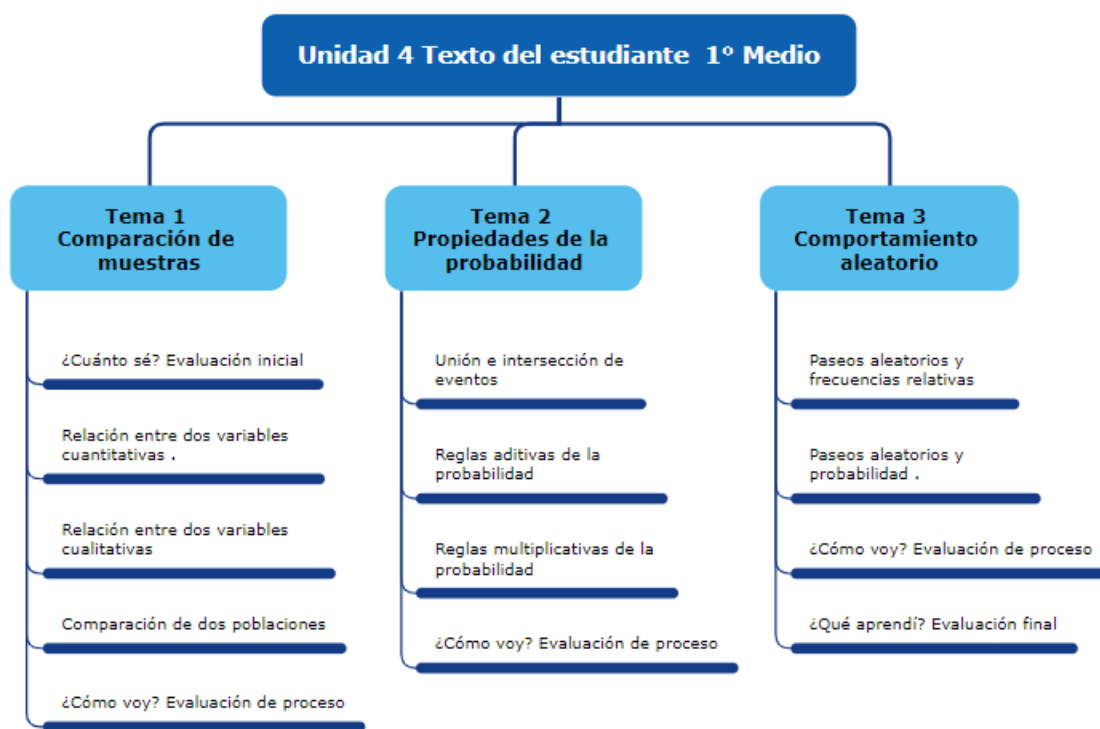


Figura 3. 82. Estructura unidad 4 texto del estudiante evaluación 1º Medio

(Fuente: Galasso et al., 2016)

3.2.3.1 Contextos

La figura 3.83 presenta el resumen de la presencia de los contextos históricos de la variable aleatoria observados en las tareas propuestas a lo largo de cada objetivo de aprendizaje, sección y lección del programa de estudio y libro de texto del estudiante.

En el programa de estudio se observó una tendencia hacia el uso de contextos relacionados con *observación e interpretación a partir de encuestas*, con un 47,06% (16); por su parte el texto del estudiante se decanta hacia el contexto *juegos de azar* presentado en el 50,54% (47).

ANÁLISIS CONTEXTO 1º MEDIO

Asignatura	Sección/Tema	Lección	Contexto									
			Censos y registros	Ciencias naturales y biológicas	Economía	Intramatemático	Juegos de azar	Observación e interpretación a partir de encuestas	Sin contexto	Física y astronomía	Formal	
Programa de Estudio	OA 12	Registrar distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una tabla de ..		●		●	●	●				
	OA 13	Comparar poblaciones mediante la confección de gráficos "xy" para dos atributos de muestras, de ma..		●				●				
	OA 14	Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de a..				●	●	●				
	OA 15	Mostrar que comprenden el concepto de azar.		●		●	●	●				
Texto de estudiante Matemática	Actividad complementaria	Actividad complementaria					●					
	Evaluación Final	Evaluación Final				●	●	●			●	
	Tema 1: Comparación y muestra	Comparación de dos poblaciones				●			●			●
		Evaluación de proceso 1							●			
		Evaluación inicial						●	●			
		Relación entre dos variables cualitativas	●						●			
		Relación entre dos variables cuantitativas	●	●		●			●			●
	Tema 2: Propiedades de la probabilidad	Evaluación de proceso 2						●				
		Reglas aditivas de la probabilidad						●	●			
		Reglas multiplicativas de la probabilidad		●				●	●			●
		Unión e intersección de eventos	●					●	●			
	Tema 3: Comportamiento aleatorio	Evaluación de proceso 3						●				
Paseos aleatorios y frecuencias relativas							●	●	●		●	
Paseos aleatorios y probabilidad			●				●	●	●		●	

Figura 3. 83. Presencia de contextos programa de estudio y libro de texto 1º medio (Fuente: Elaboración propia)

Cabe destacar que en este nivel se comienzan a observar algunas tareas vinculadas al contexto *formal*, al menos en el texto del estudiante en el 6,45% (6) de los casos. Por su parte, los contextos menos observados fueron *economía*, con una presencia de tan solo un 1,08% (1) en el texto del estudiante tanto y 0% en el programa de estudio; a este se le suman *ciencias naturales y biológicas*, el cual fue observado solo en el 11,76% (4) de las tareas analizadas en el programa de estudio y un 6,45 % (6) en el texto del estudiante, mismo porcentaje alcanzado por *censos y registros*. Finalmente, cabe destacar que no fue posible observar tareas vinculadas al contexto *física y astronomía*. Sin embargo, pese a la ausencia mencionada, resulta interesante destacar la presencia de problemas clásicos en el desarrollo de la variable aleatoria, tales como el problema del duque de toscana o el problema de la apuesta interrumpida, trabajados por Cardano, Pascal, Fermat y Huygens, quienes “enfocaron su interés por la predicción de los juegos de azar en establecer las normas necesarias para tener un juego equitativo” (Ruiz, 2013, p.132). Las *figuras 3.84 y 3.85* son un ejemplo de lo comentado.

El error del duque de Toscana

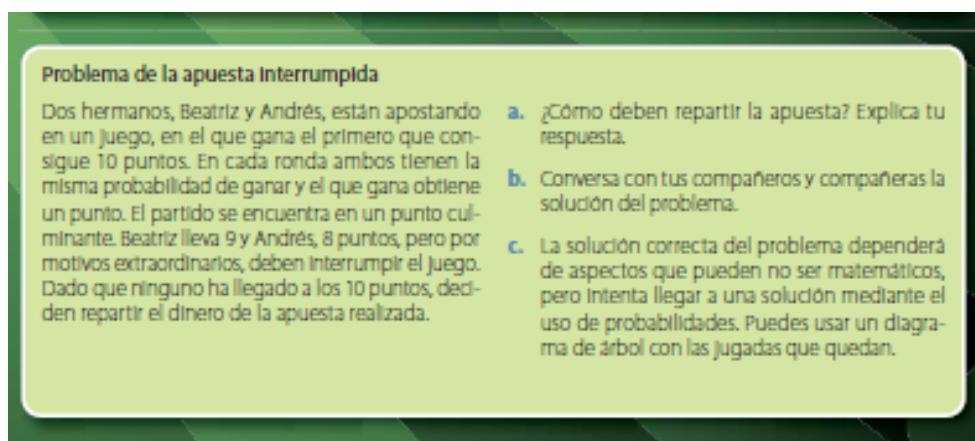
Alrededor del año 1560, el duque de Toscana, un gran jugador de juegos de azar, había observado que a lo largo de su experiencia al lanzar tres dados y sumar sus puntos, el 10 aparecía con más frecuencia que el 9, a pesar de que, según él, para ambas sumas había seis maneras de lograrlas.

Para él, las maneras de sumar 9 eran:		
1+6+2	1+3+5	1+4+4
2+2+5	2+3+4	3+3+3

Y las maneras de sumar 10 eran:		
1+3+6	1+4+5	2+2+6
2+3+5	2+4+4	3+3+4

- ¿Qué error cometió el duque de Toscana en sus cálculos?
- Según la regla de Laplace, ¿cuál es el espacio muestral al lanzar tres dados?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 9? ¿Y que la suma sea 10?
- ¿Qué puedes concluir sobre este error? Explica tu respuesta.

Figura 3.84. Ejemplo de problema Duque de Toscana (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 280)



Problema de la apuesta Interrumpida

Dos hermanos, Beatriz y Andrés, están apostando en un juego, en el que gana el primero que consigue 10 puntos. En cada ronda ambos tienen la misma probabilidad de ganar y el que gana obtiene un punto. El partido se encuentra en un punto culminante. Beatriz lleva 9 y Andrés, 8 puntos, pero por motivos extraordinarios, deben interrumpir el juego. Dado que ninguno ha llegado a los 10 puntos, deciden repartir el dinero de la apuesta realizada.

- ¿Cómo deben repartir la apuesta? Explica tu respuesta.
- Conversa con tus compañeros y compañeras la solución del problema.
- La solución correcta del problema dependerá de aspectos que pueden no ser matemáticos, pero intenta llegar a una solución mediante el uso de probabilidades. Puedes usar un diagrama de árbol con las jugadas que quedan.

Figura 3.85. Ejemplo problema de la apuesta interrumpida (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 281)

3.2.3.2 Tipo de Variables

La figura 3.86 presenta el resumen de la presencia de los tipos de variables observadas en las tareas propuestas a lo largo de cada objetivo de aprendizaje, sección y lección del programa de estudio y libro de texto del estudiante. Se observa un mayor uso de variables de tipo discretas en relación a las continuas, con un 61,76% (21) de presencia en el programa de estudio y un 31,18% (29) en el texto del estudiante; por su parte, el uso de variables continuas alcanzó un 35,29% (12) en el programa de estudio y tan solo un 11,83% (11) en el texto del estudiante. Sin embargo, cabe destacar que este último se decantó por el uso de variables de tipo mixtas, es decir tareas que movilicen variables de tipo cualitativa y cuantitativa a la vez.

ANÁLISIS TIPO DE VARIABLE 1º MEDIO

Asignatura	Sección/Tema	Lección	Tipo de Variable				
			Nulo	Continua	Discreta	Mixta	
Programa de Estudio	OA 12	Registrar distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una tabla de doble entrada y en una nube de puntos.		●	●	●	
	OA 13	Comparar poblaciones mediante la confección de gráficos "xy" para dos atributos de muestras, de manera concreta y pictórica.		●			
	OA 14	Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera ma..		●	●		
	OA 15	Mostrar que comprenden el concepto de azar.		●	●		
Texto de estudiante Matemática	Actividad complementaria	Actividad complementaria			●	●	
	Evaluación Final	Evaluación Final	●	●	●	●	
	Tema 1: Comparación y muestra	Comparación de dos poblaciones	Comparación de dos poblaciones	●	●	●	
		Evaluación de proceso 1	Evaluación de proceso 1		●		
		Evaluación inicial	Evaluación inicial			●	●
		Relación entre dos variables cualitativas	Relación entre dos variables cualitativas		●	●	●
		Relación entre dos variables cuantitativas	Relación entre dos variables cuantitativas	●	●	●	
	Tema 2: Propiedades de la probabilidad	Evaluación de proceso 2	Evaluación de proceso 2				●
		Reglas aditivas de la probabilidad	Reglas aditivas de la probabilidad			●	●
		Reglas multiplicativas de la probabilidad	Reglas multiplicativas de la probabilidad		●	●	●
		Unión e intersección de eventos	Unión e intersección de eventos			●	●
	Tema 3: Comportamiento aleatorio	Evaluación de proceso 3	Evaluación de proceso 3				●
		Paseos aleatorios y frecuencias relativas	Paseos aleatorios y frecuencias relativas	●		●	●
		Paseos aleatorios y probabilidad	Paseos aleatorios y probabilidad				●

Figura 3. 86. Presencia de tipos de variable programa de estudio y libro de texto 1º medio (Fuente: Elaboración propia)

Un ejemplo de uso de variable mixta se aprecia en la *figura 3.87*, en las cuales se pretende movilizar variables de tipo cualitativa y cuantitativa, o solo cualitativas, esta clase de variables se concentra entre la primera y tercera sección de la unidad “interpretación y comparación de gráficos” y “probabilidad”.

3. Una persona se encuentra en la calle, a 3 pasos de su casa, y decide efectuar el siguiente experimento: toma una moneda y la lanza al aire. Si obtiene una cara, avanza un paso y si obtiene un sello, retrocede un paso.
 - a. El evento “al quinto lanzamiento la persona avanza un paso”, ¿es independiente de los resultados que haya obtenido en los cuatro lanzamientos anteriores?
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona llegue a su casa después de 3 lanzamientos?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona llegue a su casa después de 4 lanzamientos?
 - d. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona se encuentre a 6 pasos de su casa después de 4 lanzamientos?
 - e. ¿Es probable que la persona nunca llegue a su casa realizando este experimento? Justifica tu respuesta.

Figura 3.87. Ejemplo de tarea con variable mixta (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 262)

También se presentaron algunos casos *nulos* en los cuales no se define una variable en particular o esta queda sujeta a la elección de los estudiantes, la *figura 3.93* ejemplifica este tipo de situación, las cuales son posibles de apreciar a lo largo de las secciones propuestas, sobre todo cuando se pretenden activar conceptos previos.

4. Junto con un compañero o una compañera planteen tres situaciones de la vida real que se puedan considerar como paseos aleatorios.

Figura 3. 88. Ejemplo de tarea con variable nula (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 272)

El libro de texto no entrega ningún tipo de definición en torno a los tipos de variables, ni observaciones en torno a la importancia de distinguir entre los tipos de variables a la hora de analizar su comportamiento.

3.2.3.3 Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas

La *figura 3.89* resume el tipo y respectiva cantidad de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de las tareas como en las soluciones y explicaciones que se proponen

para éstas (o en las soluciones esperadas, en el caso de las tareas resueltas). Como podemos observar en la figura, en cuanto al tipo de representaciones, encontramos dieciséis clases de tareas, las cuales nacen a partir de las diversas combinaciones posibles entre los tipos de representación inicial, transitoria y emergente.

Representaciones Movilizadas

Representación inicial	Representación Emergente		
	Gráfica	Simbólica	Verbal
Gráfica			●
Icónica		●	● ● ●
Simbólica	●		●
Tabular	●		● ● ● ●
Verbal	●	●	● ● ● ● ●

Representación transitoria	
■	Sin representación transitoria
■	Gráfica
■	Simbólica
■	Tabular

Figura 3. 89. Tipologías de tareas en relación a las representaciones inicial, transitoria y emergentes presentes en las tareas del texto escolar de 1° medio (Fuente: Elaboración propia)

La primera refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la figura 3.90.

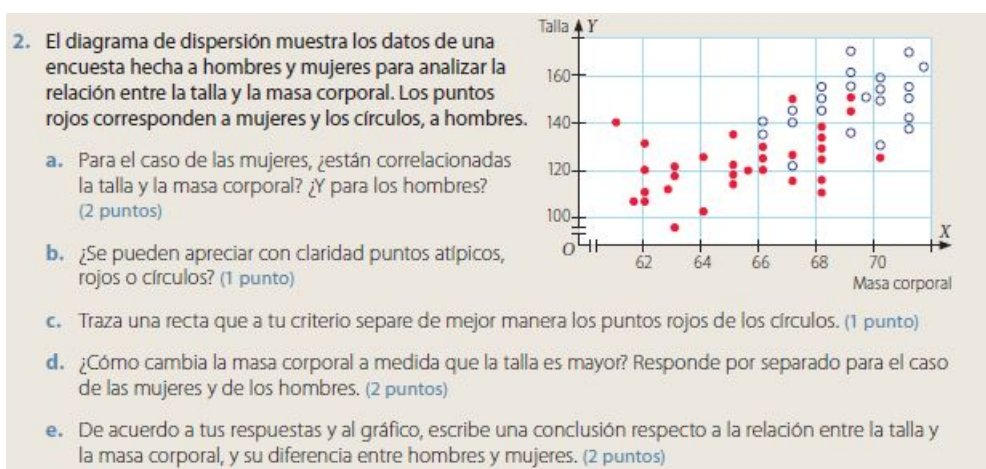


Figura 3. 90. Ejemplo de tarea gráfica – verbal (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 282)

La segunda clase refiere a aquellas tareas en las cuales se proporciona una representación icónica la cual deberá de ser interpretada por los estudiantes con la finalidad proporcionar una respuesta en registro simbólico. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.91*.

2. Para el dado honesto, aplica la regla de Laplace para determinar la probabilidad de cada resultado posible.

a. $P(\text{1}) = \square$	d. $P(\text{4}) = \square$
b. $P(\text{2}) = \square$	e. $P(\text{5}) = \square$
c. $P(\text{3}) = \square$	f. $P(\text{6}) = \square$

Figura 3. 91. Ejemplo de tarea icónica – simbólica (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 244)

La tercera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación icónica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase de tarea se presenta en los incisos a, b, c, d y e de la tarea presentada en la *figura 3.92*.

2. Julia realiza el experimento aleatorio de extraer las cuatro tarjetas de la bolsa, una tras otra, y ver la palabra que resulte, tenga o no sentido.

- Usa un diagrama de árbol para determinar todas las posibles palabras que se pueden formar.
- Describe el evento de las palabras que empiezan con la letra B. Nómbralo por E_1 .
- Describe el evento de las palabras que terminan con la letra Z. Nómbralo por E_2 .
- Describe el evento correspondiente a la unión de los eventos E_1 y E_2 .
- Describe el evento correspondiente a la intersección de los eventos E_1 y E_2 .
- Calcula la probabilidad de los eventos E_1 , E_2 , $E_1 \cup E_2$ y $E_1 \cap E_2$.
- ¿Observas alguna relación entre las probabilidades obtenidas? Descríbela.




Figura 3. 92. Ejemplo de tarea icónica – verbal (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 250)

La cuarta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación icónica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo icónico a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *Figura 3.93*.

Ejemplo 3 Observa la tómbola de la imagen. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola verde o una roja?

Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos.

- 1 Identificas los eventos involucrados. El evento A se puede definir como aquel en que la bola extraída es verde y el evento B , como aquel en que la bola extraída es la roja.
- 2 Determinas si los eventos son disjuntos. Los eventos son disjuntos, ya que una bola no puede tener dos colores.
- 3 La probabilidad de la unión de los eventos será calculada por:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- 4 Realizas los cálculos considerando que los resultados del experimento son equiprobables y se puede usar la regla de Laplace.
$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ y } P(B) = \frac{3}{6}, \text{ por lo que } P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Respuesta: La probabilidad de que la bola extraída sea verde o roja es $\frac{2}{3}$.

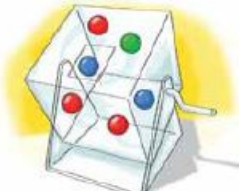


Figura 3. 93. Ejemplo de tarea icónica – simbólica- verbal (Fuente: Galasso. et al., 2016, p. 254)

La quinta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación simbólica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica, un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.94*.

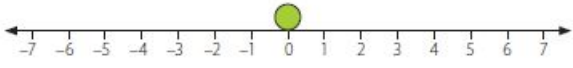
1. Representa los siguientes datos como nube de puntos.
 - a. $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 9), (12, 3), (1, 3)\}$
 - b. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$
 - c. $\{(1, 0), (10, 3), (3, 10), (4, 4), (8, 7), (9, 1), (2, 10)\}$
 - d. $\{(0, 1), (2, 6), (3, 2), (5, 6), (2, 2), (3, 1), (6, 2)\}$

Figura 3. 94. Ejemplo de tarea simbólica – gráfica (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 232)

La sexta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación simbólica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.95*.

Ejemplo 1 Lee la situación y responde.

Considera la recta numérica de la imagen, en la que se sitúa una pelotita en el 0.

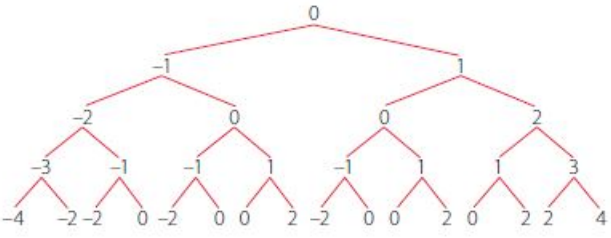


Se realiza el siguiente experimento: Se lanza una moneda al aire. Si sale cara, avanza la pelotita una posición hacia la derecha, si sale sello, una posición hacia la izquierda. El experimento se hace 4 veces.

¿Cuántas opciones tiene la bolita de terminar en la posición marcada con 0?

Para responder a la pregunta puedes seguir estos pasos:

- 1 La forma más sencilla de revisar todas las posibles opciones que tiene para posicionarse la bolita es construir un diagrama de árbol.



- 2 Buscas los resultados de interés, en este caso que la bolita se encuentre situada en la posición 0, y las cuentas.

Respuesta: Existen 6 opciones de terminar en la posición marcada con el 0 después de efectuar 4 veces el experimento.

Figura 3. 95. Ejemplo de tarea simbólica - verbal (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 270)

La séptima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.96*.

Capítulo 3. Presencia de los significados de la variable aleatoria en el currículo chileno

La siguiente tabla corresponde a datos obtenidos mediante una encuesta que se les realizó a 10 personas sobre su masa corporal y edad.

Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Edad	10	13	15	14	11	17	19	15	17	11
Masa corporal	28	34	43	40	31	52	63	42	53	31

Representa los datos de la tabla en una nube de puntos.

Para graficar los datos, puedes seguir estos pasos:

- ▶ Debes generar los puntos que conformarán la nube, es decir, los pares ordenados (edad, masa corporal) para cada persona; por ejemplo, a la persona 1 le corresponde el par (10, 28) y a la persona, 5 el par (11, 31).
- ▶ Construyes un plano cartesiano en el que el eje X representa la edad y el eje Y, la masa corporal. Luego, ubicas los puntos.

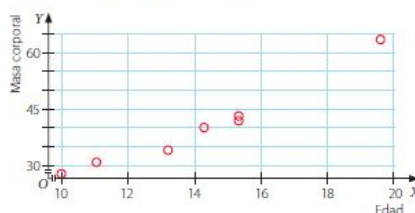


Figura 3. 96. Ejemplo de tarea tabular – gráfica (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 229)

La octava clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.97*.

3. De la página web <http://datos.gob.cl/> se puede obtener mucha información de estudios o encuestas del Gobierno de Chile. A continuación se muestra información obtenida de esta página.

Defunciones según grupo de edad, por región, gran grupo de causas de muertes y sexo. Chile, 2010

	Total	< 1	1 a 4	5 a 9	10 a 19	20 a 44	45 a 64	65 a 79	80 y más
Hombres	52 237	1 038	171	111	661	5 047	12 255	17 722	15 232
Mujeres	45 693	824	141	77	306	2 067	7 207	13 265	21 806

- a. ¿Por qué crees que los datos fueron presentados en una tabla de doble entrada?
- b. ¿Cómo piensas que se obtuvieron los datos? Averigua y comprueba si estabas en lo correcto.
- c. ¿Qué porcentaje de las personas que fallecieron en ese año tenía menos de 20 años?
- d. ¿Qué grupo etario y de qué sexo fue el que tuvo mayor registro de decesos?
- e. ¿De qué otra manera se podrían haber representado los datos? Explica tu respuesta.
- f. Si al año siguiente se siguiera con este mismo patrón, ¿qué tan probable es que una persona fallecida sea una mujer de edad mayor o igual que 65 años?
- g. ¿Observas alguna relación entre la edad y el sexo en la cantidad de defunciones? Explica tu respuesta.

Actitud

Cuando uses información oficial o de un autor, debes indicar y citar de manera adecuada las fuentes que utilizaste. Hay muchas formas de hacer esto. Averigua algunas.

Figura 3. 97. Ejemplo de tarea tabular – verbal (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 237)

La novena clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo tabular a lo gráfico y de lo gráfico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.98*.

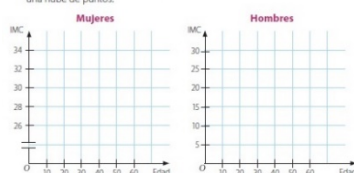
Capítulo 3. Presencia de los significados de la variable aleatoria en el currículo chileno

Comparación de dos poblaciones

De una población se extrae una muestra de 12 hombres y 12 mujeres, a los cuales se les preguntó su edad y se les midió el IMC (índice de masa corporal). Los datos se registraron en las siguientes tablas:

Mujer	Edad	IMC	Hombre	Edad	IMC
1	34	29	1	22	19
2	45	31	2	39	25
3	18	27	3	25	22
4	23	28	4	40	21
5	29	30	5	28	20
6	36	29	6	32	31
7	57	34	7	51	24
8	20	30	8	33	22
9	45	27	9	44	21
10	31	29	10	19	16
11	54	31	11	58	26
12	41	25	12	51	24

- Representa, para los hombres y para las mujeres, las variables Edad - IMC en una nube de puntos.



- Escribe una conclusión sobre la relación IMC - Edad en hombres y mujeres a partir de las tablas.

Hombres ▶ _____

Mujeres ▶ _____

- Escribe una conclusión sobre la relación IMC - Edad en hombres y mujeres a partir de las nubes de puntos que construiste. ¿Siguen algún patrón?

Hombres ▶ _____

Mujeres ▶ _____

- A partir de las tablas o de las nubes, compara la relación IMC - Edad de los hombres y mujeres. Escribe una conclusión.

- ¿Qué dificultad presenta la forma en que se muestran los datos al momento de hacer comparaciones de las poblaciones? Explica.

- Propón una forma de representar los datos para poder realizar una comparación de las poblaciones de manera sencilla.

Conexión con La salud

Existen muchos métodos para identificar si se tiene exceso de masa corporal, pero entre los más utilizados está el llamado índice de masa corporal (IMC), que es la razón que existe entre la masa corporal medida en kilogramos, y el cuadrado de la estatura medida en metros.



IMC = $\frac{\text{Masa corporal (kg)}}{\text{Estatura}^2 (\text{m}^2)}$

Figura 3. 98. Ejemplo de tarea tabular - gráfica – verbal (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 238)

La décima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello, el estudiante debe transitar de lo tabular a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la figura 3.99.

- Lee la situación y responde.

Para un estudio se realizó una encuesta a 54 mujeres sobre la cantidad de hijos que tenía. Lamentablemente, después de registrar los resultados se produjo un problema en la computadora que almacenaba los datos y se perdieron algunos, quedando solo la siguiente tabla:

Resultados de una encuesta		
Cantidad de hijos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	9	
1		$\frac{1}{9}$
2	18	
3		
4		$\frac{1}{6}$

- Completa los datos que faltan en la tabla anterior.
- Si se escoge una mujer al azar de este grupo, ¿cuál es la probabilidad empírica de que ella tenga 2 o 4 hijos?

Figura 3. 99. Ejemplo tarea tabular – simbólica- verbal (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 272)

La décima primera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta clase se presenta en la figura 3.100.

Capítulo 3. Presencia de los significados de la variable aleatoria en el currículo chileno

1. Se lanzan dos dados honestos en una mesa lisa. Calcula la probabilidad de los siguientes eventos.
 - a. Que la suma de los puntos sea 8.
 - b. Que la suma de los puntos sea 10.
 - c. Que la suma de los puntos sea 8 o 10.
 - d. Que se obtenga el mismo puntaje en ambos dados.
 - e. Que la suma de los puntos sea 8 o que se obtenga igual puntaje en ambos dados.
 - f. Que la suma de los puntos sea menor que 7 o que se obtenga igual puntaje en ambos dados.
 - g. Que la suma de los puntos sea 8 o se obtenga al menos un número primo de puntos en uno de los dados.
 - h. Que la suma de los puntajes sea un número primo o en ambos dados se obtenga el mismo puntaje.
 - i. Que la suma de los puntajes sea un número par o un número primo.

Figura 3. 100. Ejemplo de tarea verbal - simbólica (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 256)

La décima segunda clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.101*.

2. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

El estudio busca establecer una relación, aproximada, entre la edad de una persona y su pulso a partir de los datos. Esta relación permitiría determinar cuál debería ser el pulso aproximado de una persona conociendo su edad.

- a. ¿Se puede observar en el gráfico algún tipo de relación entre la edad y el pulso de una persona? Describe con tus palabras.

- b. La relación entre la edad y el pulso, ¿es la misma para los hombres y las mujeres? Justifica.

- c. A partir de los datos, ¿qué harías para determinar el pulso que debería tener una persona de 63 años o de 42 años? Explica tu estrategia.

Figura 3. 101. Ejemplo de tarea verbal – verbal (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 277)

La décima tercera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo gráfico y de lo

gráfico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.102*.

4. Junto con un compañero o compañera, realiza la siguiente actividad.
 - a. Cada uno elija una variable cuantitativa distinta para analizar y apliquen una encuesta a cada uno de sus compañeros.
 - b. Organicen los datos en un gráfico de dispersión.
 - c. Verifiquen si existe correlación entre las características que eligieron. En caso de que no la haya, ¿observan algún otro tipo de relación en los datos?
 - d. Repitan la actividad anterior un par de veces consultando a otras personas. ¿Varían sus conclusiones al cambiar la muestra?

Figura 3. 102. Ejemplo de tarea verbal- gráfica – verbal (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 232)

La décima cuarta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.103*.

4. En un restaurante se ofrecen promociones para almorzar, las cuales están compuestas de una comida y una bebida, donde los clientes pueden elegir entre las siguientes:
 - Comida: hamburguesa, pizza o completo
 - Bebida: jugo, agua o bebida cola
 - a. Construye un diagrama de árbol para obtener todos los casos posibles de promociones. (1 punto)
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que en una promoción el cliente pida una bebida cola? (1 punto)
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que en una promoción el cliente pida una hamburguesa o una pizza? (2 puntos)

Figura 3. 103. Ejemplo de tarea verbal- simbólica - verbal (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 330)

La décima quinta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo tabular y de lo tabular a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.104*.

Ejemplo 2 Lee la situación y responde.

A un joven, fanático de los autos rojos, le gustaría saber cuál es la probabilidad de que en una hora observe uno desde su balcón. Decidió anotar en una hoja el color de cada auto que pasara por la calle, y obtuvo lo siguiente:

A	V	R	N	V	B	A	R	N	A
V	B	A	N	R	A	N	V	V	B
R	V	R	V	A	N	V	B	N	R

Donde A: Azul, B: Blanco, R: Rojo, N: Negro y V: Verde.

A partir de los datos, ¿cuál es la probabilidad empírica de que pase un auto rojo en una hora?

1 Construyes la tabla de frecuencias para poder obtener las frecuencias relativas.

Colores de auto		
Color	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Azul	6	$\frac{6}{30}$
Blanco	4	$\frac{4}{30}$
Negro	6	$\frac{6}{30}$
Rojo	6	$\frac{6}{30}$
Verde	8	$\frac{8}{30}$
Total	30	1

2 Observas la frecuencia relativa del evento de interés y obtienes la probabilidad empírica. En este caso, el evento es ver un auto rojo, cuya frecuencia relativa es $\frac{6}{30}$, que simplificada es $\frac{1}{5}$.

Respuesta: La probabilidad empírica de ver un auto rojo en una hora es de $\frac{1}{5}$, que es igual a 0,2.

Figura 3. 104. Ejemplo de tarea verbal – tabular - verbal (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 271)

Finalmente, la décima sexta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo gráfico y de lo gráfico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta figura 3.105.

8. Construyen una nube de puntos que resulta del lanzamiento repetido de dos dados, uno amarillo y uno blanco.
 - Marcan en el plano cartesiano los puntos que corresponden a los pares de lanzamientos. La coordenada x representa los puntos del dado amarillo y la coordenada y representa la adición de ambos dados.
 - Comentan la forma de la nube obtenida.

Figura 3. 105. Ejemplo de tarea verbal – grafica - verbal (Fuente: Mineduc, 2016, p. 167)

Pese a la diversidad de tareas planteadas tanto en este nivel correspondiente a primero medio como en los anteriores de octavo y séptimo básico, el tránsito entre tipos de representaciones no se fomenta de manera equitativa, en el 54,33% (69) de los casos se solicita al estudiante transitar de lo verbal a lo verbal, pasando por alguna representación transitoria. En el 30,7%, en el otro extremo, se observa un nulo uso de la representación gráfica tanto como representación inicial y transitoria, y solo un 2,3% (3) como emergente. Lo anterior podría resultar perjudicial considerando que gran parte de la información a la cual se enfrentan los estudiantes en la vida cotidiana suele presentarse a través de algún tipo de representación gráfica.

3.2.3.4 Significado de la noción de variable aleatoria pretendido por el libro de texto y programa de estudio

La figura 3.107 presenta el detalle de los significados movilizados en las tareas analizadas, tanto en el programa de estudio como en el texto del estudiante de matemática, cada cuadrado representa una tarea.

Para este nivel correspondiente a primero medio, al igual que en los casos anteriores, solo fue posible observar tareas vinculadas a los significados *S1 como variable de interés*, y *S3, como variable estadística*. Además, un reducido grupo (8,6%) de las tareas fueron sin clasificación; éstas estaban vinculadas al refuerzo de algunos conceptos previos, en el libro de texto del estudiante. Un ejemplo de esta última clase de tareas se observa en la *figura 3.106*.

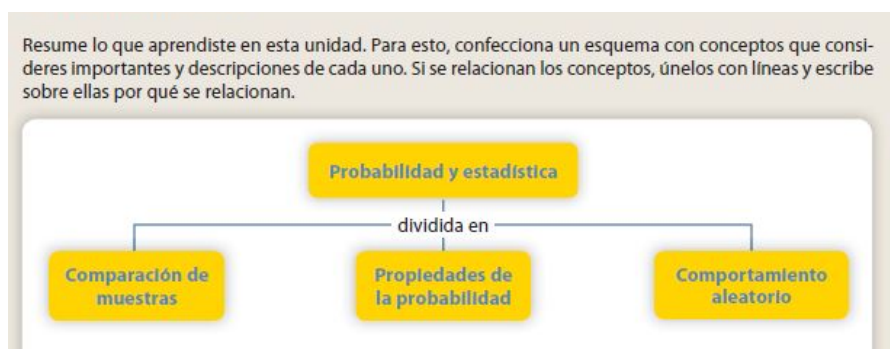
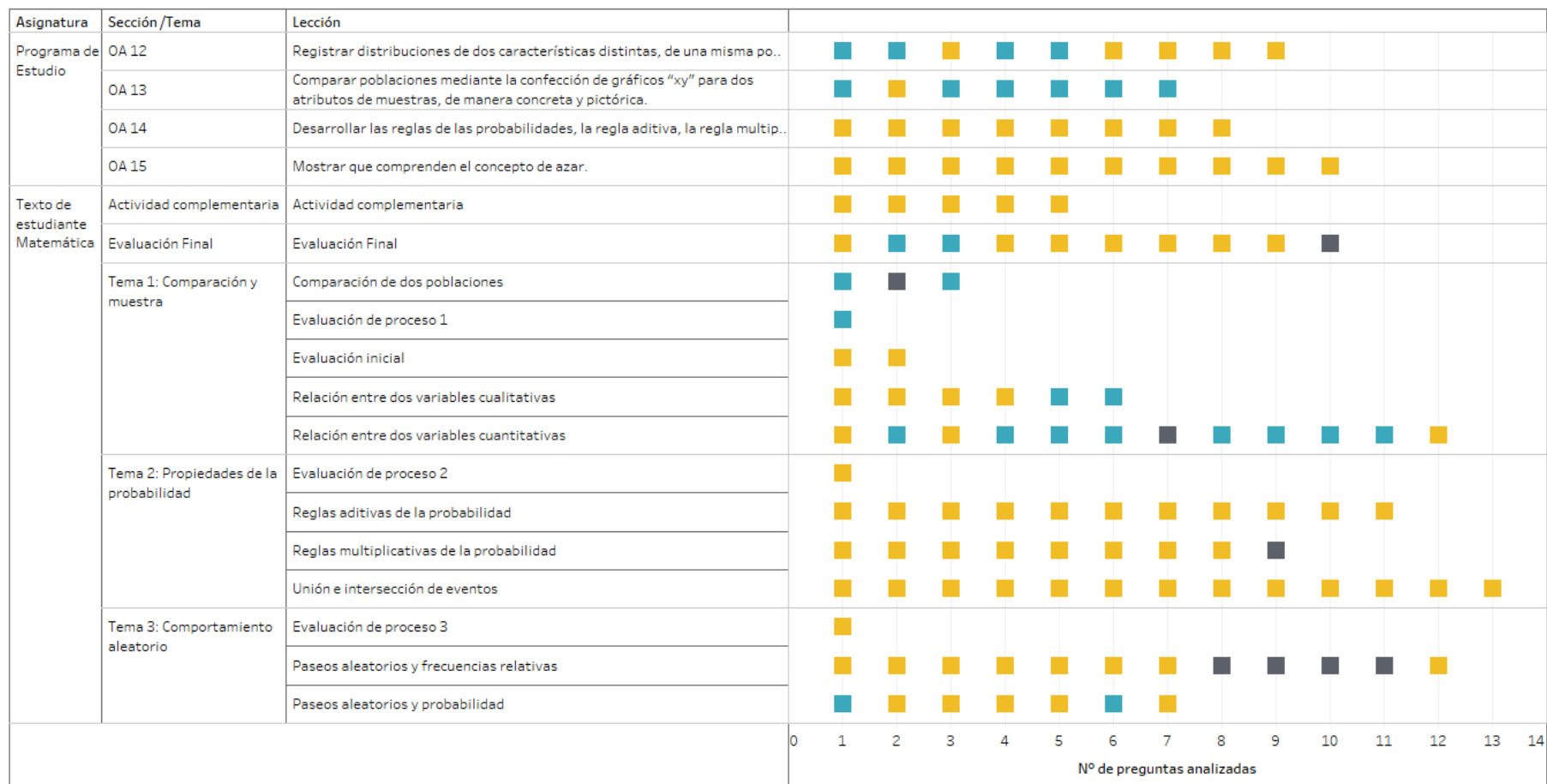


Figura 3. 106. Ejemplo problema sin clasificación (Fuente: Galasso et al., 2016, p. 285)

Significados movilizado en tareas 1º Medio



■ Problema sin Clasificación ■ S1: Como variable de interés ■ S3: Como Variable estadística

Figura 3. 107. Resumen presencia de significados en el texto del estudiante y programa de estudio 1º Medio (Fuente: Elaboración propia)

Tanto en el programa de estudio como en el texto del estudiante se observa una tendencia al uso de tareas vinculadas al significado S1 variable aleatoria como variable de interés, presentes en el 70,59% (24) y 73,12% (68) de los casos respectivamente; por su parte las tareas relacionadas a S3 alcanzaron un 29,41% (10) de presencia en el programa de estudio y solo un 18,28% (17) en el texto del estudiante.

Es importante mencionar que, al igual que en séptimo y octavo básico, si bien la unidad base de análisis fueron las tareas propuestas, en algunos casos se volvió necesario analizar por separado incisos de una misma tarea, ya que movilizaban diferentes tipos de significados, como el caso presentado en la *figura 3.108* donde el inciso a, b, c, d y e movilizan el significado S1, como variable de interés, mientras que los incisos f y g movilizan el significado S3, como variable estadística.

3. De la página web <http://datos.gob.cl/> se puede obtener mucha información de estudios o encuestas del Gobierno de Chile. A continuación se muestra información obtenida de esta página.

**Defunciones según grupo de edad, por región,
gran grupo de causas de muertes y sexo. Chile, 2010**

	Total	< 1	1 a 4	5 a 9	10 a 19	20 a 44	45 a 64	65 a 79	80 y más
Hombres	52 237	1 038	171	111	661	5 047	12 255	17 722	15 232
Mujeres	45 693	824	141	77	306	2 067	7 207	13 265	21 806

- ¿Por qué crees que los datos fueron presentados en una tabla de doble entrada?
- ¿Cómo piensas que se obtuvieron los datos? Averigua y comprueba si estabas en lo correcto.
- ¿Qué porcentaje de las personas que fallecieron en ese año tenía menos de 20 años?
- ¿Qué grupo etario y de qué sexo fue el que tuvo mayor registro de decesos?
- ¿De qué otra manera se podrían haber representado los datos? Explica tu respuesta.
- Si al año siguiente se siguiera con este mismo patrón, ¿qué tan probable es que una persona fallecida sea una mujer de edad mayor o igual que 65 años?
- ¿Observas alguna relación entre la edad y el sexo en la cantidad de defunciones? Explica tu respuesta.

Actitud

Cuando uses información oficial o de un autor, debes indicar y citar de manera adecuada las fuentes que utilizaste. Hay muchas formas de hacer esto. Averigua algunas.

Figura 3.108. Ejemplo tarea con doble movilidad de significado (Fuente: Galasso et al., 2016, p.

La figura 3.109 muestra la presencia de significados por sección y objetivos de aprendizajes. Podemos mencionar que el objetivo de aprendizaje 16, “Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas”, (Mineduc,2016, p.161) se vincula exclusivamente al significado S1. Del mismo modo se repite para el objetivo de aprendizaje 15, “Mostrar que comprenden el concepto de azar”. Un caso interesante de destacar es el objetivo de aprendizaje 12, el cual presenta una tendencia cercana al 80% hacia el significado S1, como variable de interés.

Presencia de significados por sección y objetivo de aprendizaje

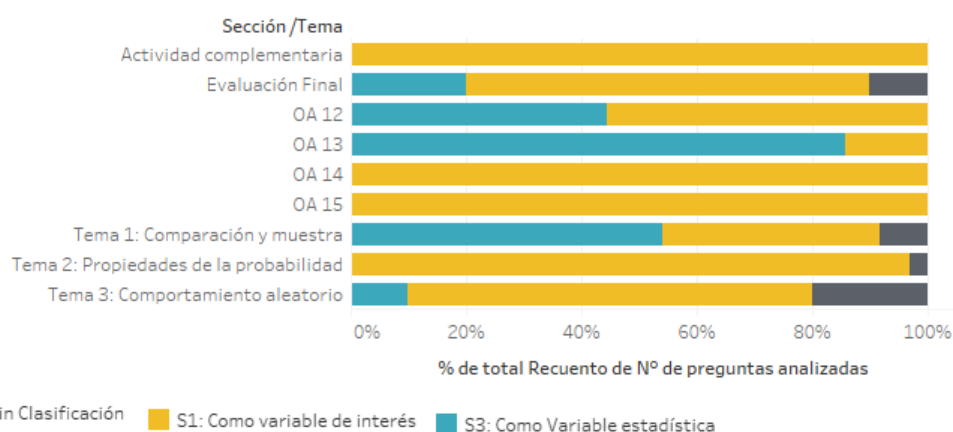


Figura 3. 109. Porcentaje de presencia de significados por secciones y objetivos de aprendizaje

(Fuente: Elaboración propia)

Sin embargo, tanto la descripción del objetivo como los indicadores de evaluación asociados a este, declarados en el programa de estudio, están vinculados a conceptos relacionados con S3, *variable aleatoria como variable estadística*, ya que están asociados a describir características de una población o elaboración de encuesta tal como se puede apreciar en la figura 3.110.

<p>OA 12 Registrar distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una tabla de doble entrada y en una nube de puntos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Elaboran y describen gráficos de dispersión en una y en dos dimensiones. • Reconocen estructuras lineales u otras, en las formas de las nubes de puntos. • Realizan encuestas en su entorno, preguntando dos características, y representan los resultados mediante gráficos de nube de puntos. • Describen nubes de puntos presentadas en el sistema de coordenadas. • Conjeturan de forma intuitiva si hay correlación entre las características registradas.
---	---

Figura 3.110. Objetivo de aprendizaje 12 con sus indicadores de evaluación (Fuente: Mineduc, 2016, p. 161)

Significados y contextos

Los significados de un determinado objeto matemático se determinan con base en los contextos históricos en los cuales se fue desarrollando dicho objeto, es por ello que en la figura 3.111 se observa la relación entre los significados pretendidos por el libro de texto y el programa de estudio de primero medio, y los contextos históricos de la variable.

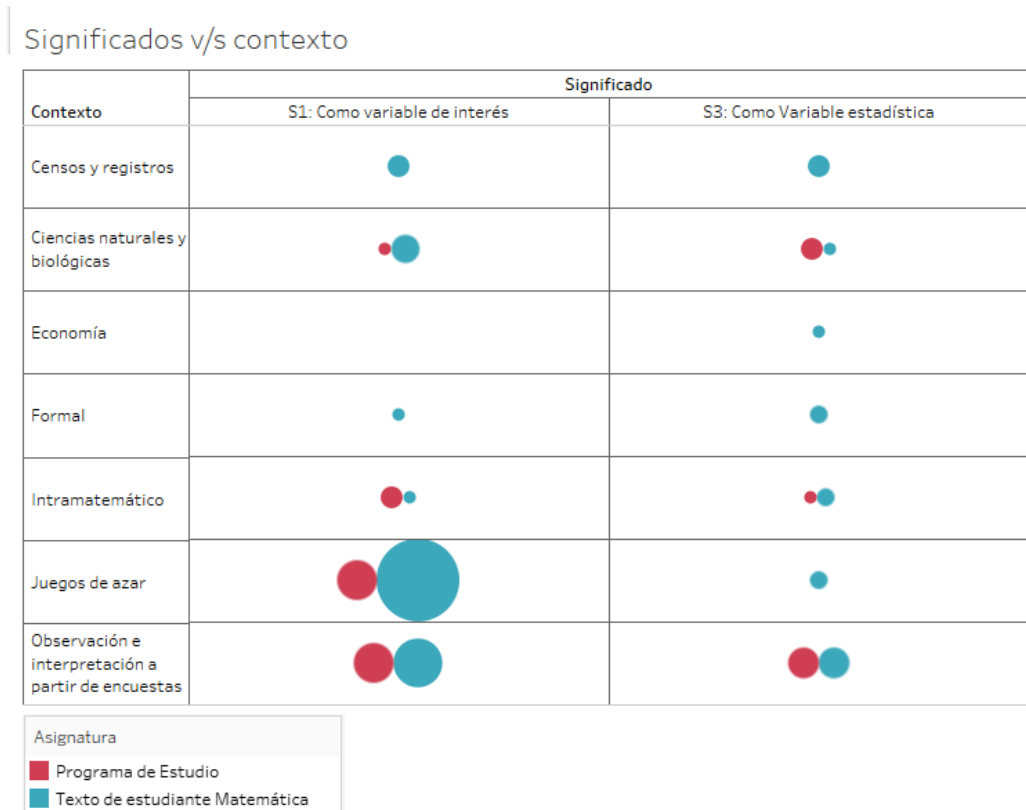


Figura 3. 111. Contextos históricos versus significados de la variable aleatoria en el texto y programa de estudio de primero medio (Fuente: Elaboración propia)

En la figura se puede observar que para el caso del texto de matemática del estudiante el significado S_1 como variable de interés es vinculado con seis de los siete contextos observados, mostrando la mayor concentración en el vínculo S_1 – *juegos de azar*, con un 63,24% (43); mientras que el programa de estudio lo vincula con cuatro, presentando un empate con la mayor concentración en los vínculos S_1 – *juegos de azar*, y S_1 – *Observación en interpretación de encuestas*, con un 41,67% (10) en ambos casos. En torno al significado S_3 variable aleatoria como variable estadística podemos mencionar que es vinculado a los siete contextos observados en el texto de matemática del estudiante, mostrando su mayor concentración en el vínculo S_3 – *observación e interpretación a partir de encuestas*, con un 35,29% (6); mientras que el programa de estudio lo vincula solo a tres contextos, manteniendo la mayor concentración en el vínculo S_3 – *observación e interpretación a partir de encuestas*, con un 60% (6).

3.2.4 Análisis de la propuesta curricular para segundo medio

A continuación, presentamos el análisis de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas de segundo medio. Para esto consideramos el Programa de Estudios (PE) o “Programa de Estudio para segundo año medio” propuesto por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc, 2016). Así mismo, consideramos el libro de texto de matemática e historia que sugiere el marco curricular:

- Chacón, A., García, G., Rupin, P., Setz, J., & Villena, M. (2017). *Texto del estudiante. Matemática 2° Medio*. Chile: Ediciones SM Chile S.A.

- Lucchini S., Salinas, C., Rupin, P., Susarte, S., & Ariztía, C. (2017). *Texto del estudiante. Historia, Geografía y Ciencias Sociales 2° Medio*. Chile: Ediciones Santillana Chile S.A.

El Programa de Estudios para segundo medio propuesto por el Ministerio de Educación de Chile se divide en cuatro Unidades, cada una de estas asociadas a un Eje Temático. La noción de variable aleatoria se aborda en la Unidad 4, que está relacionada con el Eje Temático de Probabilidad y estadística. En dicha unidad se plantean tres aprendizajes esperados y para cada aprendizaje esperado una serie de indicadores de evaluación, tal como muestra a continuación en la tabla 3.5.

Tabla 3.5

Objetivos de aprendizaje e indicadores de logro eje estadística y probabilidad 2° medio. Fuente: Mineduc 2016

Objetivo de aprendizaje	Indicadores de Evaluación
OA 10	
Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas:	
Definiendo la variable.	• Reconocen la diferencia entre las variables utilizadas en álgebra y las variables aleatorias.
Determinando los posibles valores de la incógnita.	• Definen variables aleatorias finitas en experimentos aleatorios.
Calculando su probabilidad.	• Determinan los valores que puede tomar la variable aleatoria finita.
Graficando sus distribuciones.	• Aplican correctamente la terminología $X = xi$, en la cual los xi representan los valores que puede tomar la variable aleatoria.
	• Determinan las probabilidades de una variable aleatoria aplicando la terminología $P(X = xi)$.
	• Elaboran tablas y gráficos para representar la distribución de una variable aleatoria finita.

OA 11

Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

- Realizan permutaciones de hasta cinco elementos, con material concreto o pictóricamente.
- Reconocen el patrón con el cual se aumenta el total de posibilidades si se agrega un elemento.
- Aplican el término “ $n!$ ” en la resolución de problemas azarosos.
- Combinan las permutaciones con el sorteo al azar, con o sin reposición.
- Resuelven problemas de juegos de azar y de la vida cotidiana, aplicando combinatoria y permutaciones.

OA 12

Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad:

Revisando
informaciones
de los medios
de
comunicación.
Identificando
suposiciones
basadas en
probabilidades.
Explicando
cómo una
probabilidad
puede
sustentar
suposiciones
opuestas.
Explicando
decisiones
basadas en

- Identifican artículos de diarios o revistas, cuyo contenido se relaciona con probabilidades.
- Reconocen situaciones en las cuales se utilizan datos azarosos para planificar proyectos.
- Transfieren resultados de experimentos azarosos a situaciones de la vida real.
- Reducen un problema de la vida diaria para simularlo en un experimento al azar.
- Aplican las reglas multiplicativa, aditiva y de la combinatoria de probabilidades, para tomar decisiones que involucran frecuencias relativas de procesos de producción, de seguridad, etc.
- Comparan resultados obtenidos de manera probabilística teórica, resultados basados en creencias y resultados estimativos.

situaciones
subjettivas o en
probabilidades.

Por su parte, el texto del estudiante presenta el estudio de elementos relacionados con la variable aleatoria en la unidad 4 titulada “Estadística y probabilidad”, esta unidad está dividida en tres secciones y a su vez cada sección se divide en lecciones, destacando entre ellas la sección 2 denominada *variable aleatoria*, tal como se puede apreciar en la *figura 3.112*. Por su parte el libro de historia presenta cinco unidades las cuales a su vez están divididas en secciones.

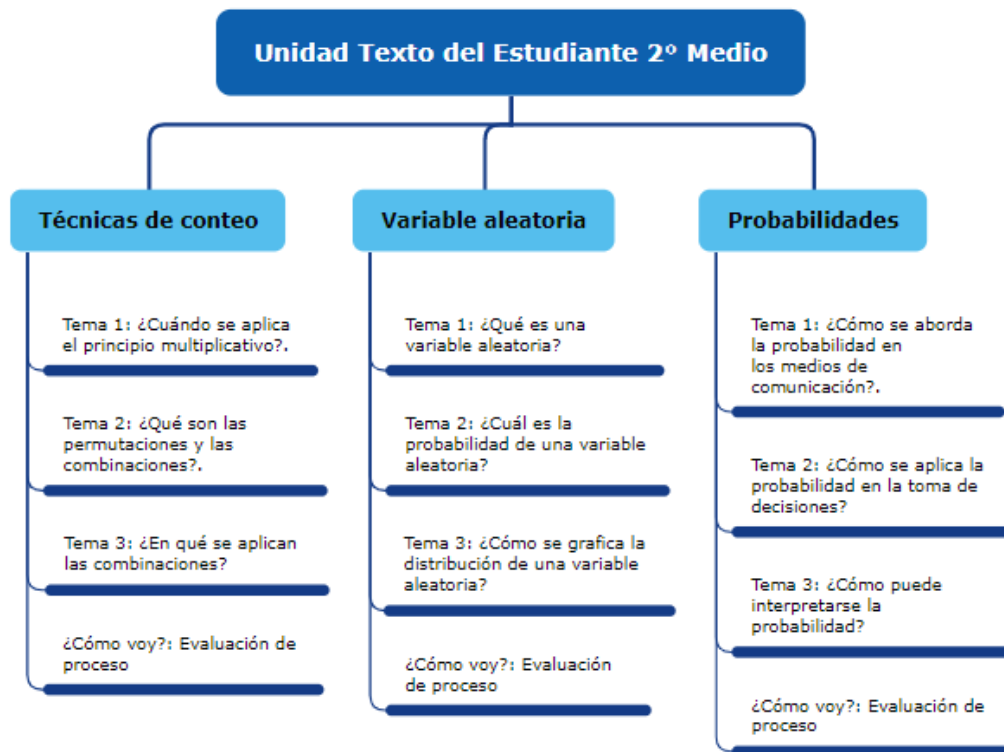


Figura 3.112. Estructura unidad 4 texto del estudiante evaluación 2º medio

(Fuente: Chacón, et al., 2017)

3.2.4.1 Contextos

La *figura 3.113* presenta el resumen de la presencia de los contextos históricos de la variable aleatoria observados en las tareas propuestas a lo largo de cada sección y lección de la unidad 4.

Un aspecto a destacar en este nivel es la presencia del contexto física y astronomía en el programa de estudio, sin embargo, este corresponde solo a un caso. Por su parte el texto de matemática del estudiante presenta una clara tendencia hacia el contexto *observación e interpretación a partir de encuestas*, presente en el 48,59% (86) de las tareas, en contraposición a contextos como *economía y física y astronomía* los cuales no fueron posibles de observar en dicho texto, pero esto se compensa en el texto de historia del estudiante en el cual el 58,22% (14) de los casos corresponden a contexto *economía*. El programa de estudio de matemática por su parte, potencia las tareas vinculadas a contextos relacionados con *observación e interpretación a partir de encuestas* en el 58,33% (14), seguidos de *datos y azar* con 29,17% (7), en el otro extremo se encuentran los contextos *formal e intramatemático* los cuales no fue posible observar en dicho documento.

ANÁLISIS CONTEXTO 2º MEDIO

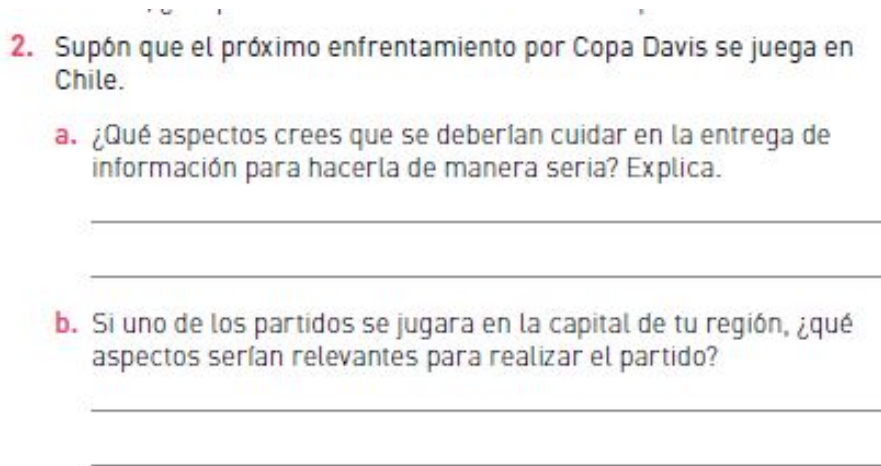
Asignatura	Sección /Tema	Lección	Contexto										
			Censos y Registros	Ciencias Naturales y Biológicas	Economía	Intramatemático	Juegos de azar	Observación e interpretación a partir de encuestas	Sin contexto	Física y astronomía	Formal		
Programa de Estudio	OA 10	Mostrar que comprenden las variables aleatorias fi..						●	●				
	OA 11	Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla pa..		●				●	●				
	OA 12	Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad e..			●				●		●		
Texto de estudiante Matemática	Lección 9 Técnicas de conteo	Evaluación de Proceso				●		●	●				
		Exploro						●	●				
		Tema 1: Cuando se aplica el principio multiplicativo				●		●	●	●			
		Tema 2: Que son las permutaciones y las combinaci..				●	●	●	●	●		●	
	Tema 3: En que se aplican las combinaciones					●	●	●	●	●			
	Lección 10 Variable aleatoria	Evaluación de proceso	●			●		●	●	●			
		Exploro						●	●	●	●		
		Tema 1: Que es una variable aleatoria	●					●	●	●			
		Tema 2: Cual es la probabilidad de una variable alea..	●				●	●	●	●		●	
	Tema 3: Como se grafica la distribución de una varia..				●	●	●	●	●			●	
	Lección 11 Probabilidades	Evaluación de proceso	●	●					●	●			
		Exploro		●					●	●	●		
		Taller de habilidades	●						●	●			
		Tema 1: Como se aborda la probabilidad en los medi..		●					●	●			
		Tema 2: Como se aplica la probabilidad en la toma d..	●						●	●			
Tema 3: Como se puede interpretar la probabilidad	●						●	●					
Síntesis y Evaluación ..	Evaluación Final		●		●		●	●			●		
Texto estudiante Historia	Unidad 1 crisis totalitarismo y guerra	Lección 1: El periodo de entreguerras			●								
		Lección 2: la segunda guerra mundial			●								
	Unidad 2 Chile en la 1º mitad del siglo XX	Lección 2: Transformaciones económicas			●								
		Lección 3: Transformaciones sociales	●										
	Unidad 3 Chile y el mundo durante la guerra fría	Lección 1: El mundo en la segunda mitad del siglo XX	●										
		Lección 2: Chile en el contexto de la guerra fría	●		●								
		Lección 3: El mundo a fines del siglo XX	●		●								
	Unidad 4 Quiebre de la demoracia y de la dict..	Lección 1: El periodo de 1970 a 1973			●								
		Lección 2: La dictadura militar	●		●								
	Unidad 5 Transición p..	Lección 2: la sociedad Chilena actual y sus desafíos	●		●								

Figura 3. 113. Presencia de contextos programa de estudio y libro de texto 2º Medio

(Fuente: Elaboración propia)

3.2.4.2 Tipo de Variables

La figura 3.115 presenta el resumen de la presencia de los tipos de variables observadas en las tareas propuestas a lo largo de cada objetivo de aprendizaje, sección y lección. Se observa que tanto el libro de texto como en el programa de estudio de matemática usa con mayor frecuencia variables de tipo discreta en la tarea propuesta, esto se refleja en el 63,28% (112) y 87,50% (21) de los casos respectivamente, mientras que el texto o de historia se decanta por el uso de variables continuas en el 62,50% (15) de los casos, porcentaje muy alejado del 8,33% y el 1,69% observados en el programa y texto de estudio respectivamente. Resulta interesante destacar que en el 14,69% de las tareas analizadas en el texto de matemática el tipo de variable fue clasificada como *nula* ya que no se explicita se dejaba a decisión del estudiantado. Un ejemplo de este tipo de presenta en la figura 3.114.



2. Supón que el próximo enfrentamiento por Copa Davis se juega en Chile.

a. ¿Qué aspectos crees que se deberían cuidar en la entrega de información para hacerla de manera seria? Explica.

b. Si uno de los partidos se jugara en la capital de tu región, ¿qué aspectos serían relevantes para realizar el partido?

Figura 3. 114. Ejemplo de tarea con variable nula (Fuente: Chacón, A. et al., 2017, p. 297)

ANÁLISIS TIPO DE VARIABLE 2º MEDIO

Asignatura	Sección/Tema	Lección	Tipo de Variable				
			Nulo	Continua	Discreta	Mixta	
Programa de Estudio	OA 10	Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas.			●		
	OA 11	Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de ev..		●	●		
	OA 12	Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad.	●	●	●		
Texto de estudiante Matemática	Lección 9 Técnicas de conteo	Evaluación de Proceso			●	●	
		Exploro	●		●	●	
		Tema 1: Cuando se aplica el principio multiplicativo	●		●		
		Tema 2: Que son las permutaciones y las combinaciones	●		●	●	
		Tema 3: En que se aplican las combinaciones			●	●	
	Lección 10 Variable aleatoria	Evaluación de proceso			●		
		Exploro	●		●	●	
		Tema 1: Que es una variable aleatoria			●	●	
		Tema 2: Cual es la probabilidad de una variable aleatoria			●		
	Lección 11 Probabilidades	Evaluación de proceso	●	●	●	●	
		Exploro	●		●		
		Taller de habilidades			●	●	
		Tema 1: Como se aborda la probabilidad en los medios de comunicación	●	●	●	●	
		Tema 2: Como se aplica la probabilidad en la toma de decisiones			●	●	
		Tema 3: Como se puede interpretar la probabilidad	●		●	●	
	Síntesis y Evaluaci..	Evaluación Final	●		●	●	
	Texto estudiante Historia	Unidad 1 crisis totalitarismo y gu..	Lección 1: El período de entreguerras		●		
			Lección 2: la segunda guerra mundial		●		
		Unidad 2 Chile en la 1º mitad del siglo ..	Lección 2: Transformaciones económicas		●		
Lección 3: Transformaciones sociales					●		
Unidad 3 Chile y el mundo durante la guerra fría		Lección 1: El mundo en la segunda mitad del siglo XX			●	●	
		Lección 2: Chile en el contexto de la guerra fría		●	●		
		Lección 3: El mundo a fines del siglo XX		●	●		
Unidad 4 Quiebre de la demoracia y de l..		Lección 1: El período de 1970 a 1973		●			
		Lección 2: La dictadura militar		●			
Unidad 5 Transició..		Lección 2: la sociedad Chilena actual y sus desafíos		●		●	

Figura 3. 115. Presencia de tipos de variable programa de estudio y libro de texto 2º Medio

(Fuente: Elaboración propia)

El libro de texto solo entrega una definición en torno a la variable aleatoria y a la variable aleatoria de tipo discreta, las cuales son posibles de apreciar en la *figura 3.116*, pero no entrega una definición para las variables continuas; tampoco se observa un apartado que mencione la importancia de identificar el tipo de variable con el cual se trabaja para definir el tratamiento más adecuado de esta.

Variable: cantidad que puede tomar distintos valores.
Variable aleatoria: función en la que a cada suceso elemental de un experimento aleatorio le corresponde un único valor numérico.
Variable aleatoria discreta: puede tomar una cantidad finita de valores.

Figura 3. 116. Definiciones en torno a los tipos de variables del texto segundo medio

(Fuente: Chacón et al., 2017, p. 366)

3.2.4.3 Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas

La *figura 3.117* resume el tipo y respectiva cantidad de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de las tareas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstas (o en las soluciones esperadas, en el caso de las tareas resueltas). Como podemos observar en la *figura 3.123*, en cuanto al tipo de representaciones, encontramos diecinueve clases de tareas, las cuales nacen a partir de las diversas combinaciones posibles entre los tipos de representación inicial, transitoria y emergente.

La primera refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.118*.

Representaciones Movilizadas

Representación inicial	Representación Emergente		
	Gráfica	Simbólica	Verbal
Mixta			●
Gráfica	●	●	● ●
Iconica		●	●
Simbólica		●	●
Tabular	●	●	●
Verbal	● ●	●	● ● ● ●

Representación transitoria	
■	Sin representación transitoria
■	Gráfica
■	Simbólica
■	Tabular
■	Verbal

Figura 3. 117. Tipologías de tareas en relación a las representaciones inicial, transitoria y emergentes presentes en las tareas del texto escolar de 2° medio (Fuente: Elaboración propia)

7 Para cada uno de los siguientes gráficos, que muestran la función de probabilidad de una variable aleatoria X , construye el gráfico que muestre su función de distribución.

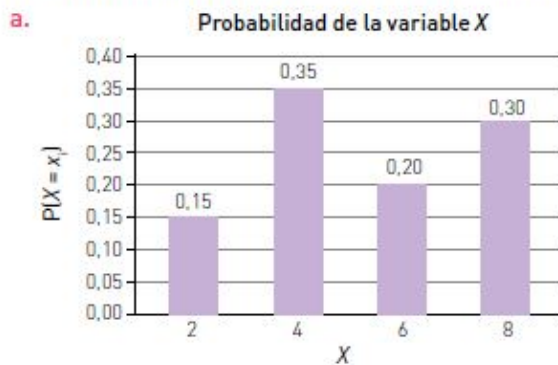


Figura 3. 118. Ejemplo de tarea gráfica – gráfica (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 292)

La segunda clase refiere a aquellas tareas en las cuales proporciona una representación gráfica la cual deberá de ser interpretadas por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en registro simbólico. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.119*.

4. Para cada uno de los siguientes gráficos (de distribución de probabilidad de una variable aleatoria), determina cuál es la función de probabilidad correspondiente.

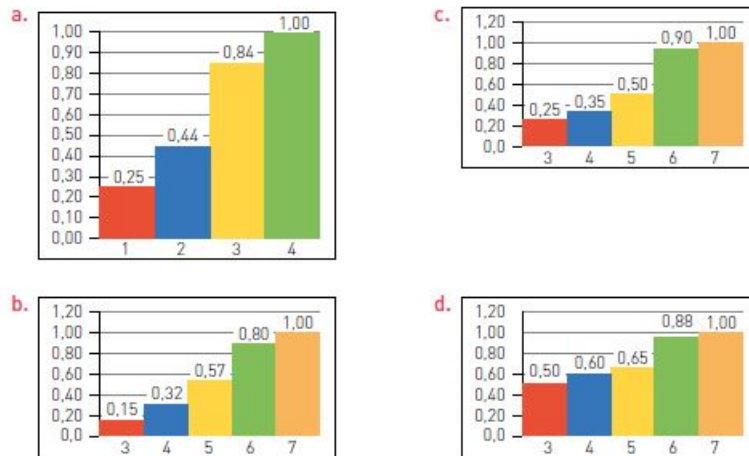
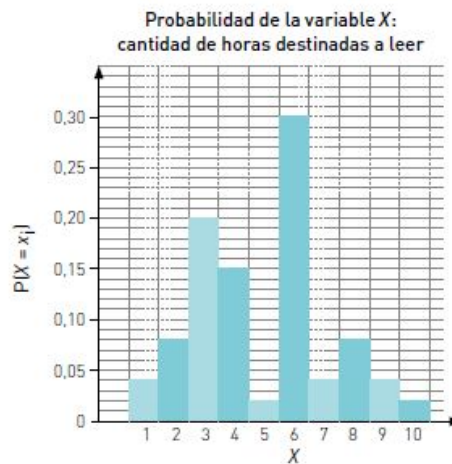


Figura 3. 119. Ejemplo de tarea gráfica – simbólica (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 289)

La tercera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase de tarea se presenta en la *figura 3.120*.

2. Analiza el gráfico y responde.

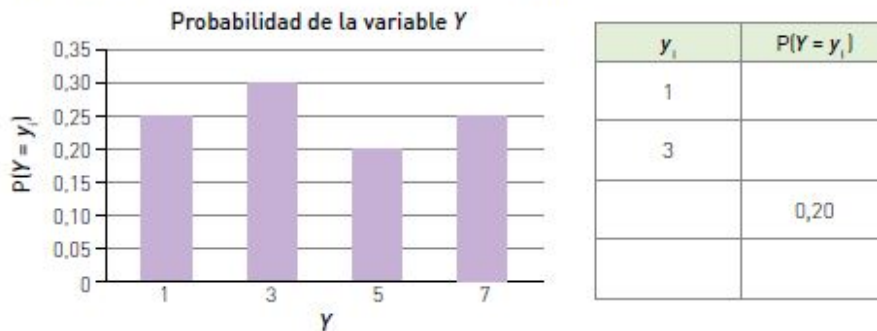


- a. ¿Cuál es la probabilidad de que $X = 2$?
-
- b. ¿Cuál es la probabilidad de elegir, entre todos los encuestados, a un estudiante que destine a leer 7 horas?
-

Figura 3. 120. Ejemplo de tarea gráfica – verbal (Fuente: Chacón. et al., 2016, p. 285)

La cuarta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación gráfica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo gráfico a lo tabular y de lo tabular a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *Figura 3.121*.

1. Analiza el gráfico y completa la tabla. Luego, responde.



- ¿Cuál es el recorrido de la variable aleatoria Y?

- ¿Cuál es la probabilidad de que $Y = 5$?

- ¿Existen valores de la variable que tengan la misma probabilidad de ocurrir?


Figura 3. 121. Ejemplo de tarea gráfica – tabular- verbal (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 285)

La quinta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación icónica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.122*, en donde si bien las instrucciones generales entregadas están en un registro verbal, la imagen adjunta (icono) es de gran relevancia ya que a partir de la información entregada en este registro el estudiante debe llevar a cabo lo solicitado en la tarea, es por ello que como representación inicial prima el registro icónico.

5. Considera la siguiente tómbola:

Se extrae una bolita, se registra su color y se deja aparte. Luego, se repite el proceso tantas veces como sea necesario. A partir de ello se han definido las siguientes variables aleatorias:

- X: extracciones necesarias hasta sacar la segunda bolita roja.
- Y: extracciones necesarias hasta sacar la segunda bolita amarilla.
- Z: extracciones necesarias hasta sacar la primera bolita negra.




Escribe en cada caso los elementos del espacio muestral correspondientes a los siguientes valores.

- a. $X = 3$
- b. $Y = 5$
- c. $Z = 4$

Figura 3. 122. Ejemplo de tarea icónica-simbólica (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 277)

La sexta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación icónica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.123*.

7. Cuatro personas (simbolizadas por cada color) caminan en fila hacia una mesa redonda. Manteniendo el orden, se sientan en ella como se muestra.



- a. Representa todos los ordenamientos posibles en la fila y todos los ordenamientos posibles en la mesa circular.
- b. Considera los ordenamientos alrededor de la mesa: ¿hay ordenamientos que sean equivalentes entre sí?, ¿por qué? Comenta con tus compañeros y compañeras.
- c. Por cada ordenamiento en la mesa circular, ¿cuántos ordenamientos hay que son equivalentes con él?
- d. ¿Qué relación hay entre la cantidad de permutaciones en fila y la cantidad de ordenamientos que hay alrededor de una mesa circular? Explica.

¿Qué tipo de razonamiento utilizaste? Explica.

Figura 3. 123. Ejemplo de tarea icónica - verbal (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 255)

La séptima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación simbólica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.124*.

6. Escribe en cada caso una expresión con factoriales que sea equivalente a la dada. Explica.

- a. $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$
- b. $(a + 1) \cdot (a + 2) \cdot (a + 3) \cdot \dots \cdot (a + n)$

Figura 3. 124. Ejemplo de tarea simbólica – simbólica (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 255)

La octava clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación simbólica y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.125*.

5. Explica con tus palabras por qué las siguientes igualdades son correctas.

a. $\frac{7!}{5!} = 6 \cdot 7$

b. $8! \cdot 9 = 9!$

Figura 3. 125. Ejemplo de tarea simbólica – verbal (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 254)

La novena clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello, el estudiante debe transitar de lo tabular a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro gráfico. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.126*, en donde se observa una relación entre los incisos a, b y c.

9 Una variable aleatoria X tiene la siguiente función de probabilidad:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0,2	n	$2n$	$4n$	$5n$

a. ¿Cuál es el valor de n ? Luego, completa la tabla de la función de probabilidad.

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0,2				

b. Completa la siguiente tabla.

X	0	1	2	3	4
$P(X \leq x)$					

c. Grafica la función de probabilidad de X y su función de distribución de probabilidad.

Figura 3. 126. Ejemplo de tarea tabular - simbólica – gráfica

(Fuente: Chacón et al., 2017, p. 293)

La décima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.127*.

3. Los accidentes en las fábricas generalmente tienen su origen en fallas humanas o en las condiciones inseguras del lugar de trabajo. En algunos casos, también incide el horario en que se realice el trabajo. En cierta fábrica se produjeron, el año pasado, 30 accidentes, cuyos porcentajes por combinación de factores se expresan en el siguiente cuadro.

Turno	Condiciones inseguras	Fallas humanas
Matutino	5 %	32 %
Vespertino	6 %	25 %
Nocturno	2 %	30 %

Se elige aleatoriamente un reporte de accidente de entre los 30 reportes. Calcula la probabilidad de que el accidente:

- Haya ocurrido en el turno de noche.
- Se deba a una falla humana.
- Se haya producido durante los turnos vespertino o nocturno.

Figura 3. 127. Ejemplo de tarea tabular – simbólica (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 304)

La décima primera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación tabular y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la figura 3.128.

¿Qué aprendí hoy?

Antes del desarrollo de una elección presidencial, tres empresas de estudios de opinión realizan encuestas para medir las preferencias de los electores respecto tres de los candidatos. Observa:

	Candidato			No sabe/no responde
	A	B	C	
Empresa 1: ¿Por cuál de los siguientes candidatos votaría?	41 %	32 %	20 %	7 %
Empresa 2: ¿Cuál de los siguientes candidatos cree que ganará la elección?	52 %	27 %	15 %	6 %
Empresa 3: ¿Cuál de los siguientes candidatos le gustaría que gane la elección?	44 %	31 %	22 %	3 %

- ¿Qué diferencias observas entre los resultados obtenidos por las diferentes empresas? Explica a qué pueden deberse.
- ¿Cuál de las empresas presenta resultados que permiten determinar mejor la probabilidad de ganar de cada candidato?, ¿por qué?
- ¿Qué probabilidad le asignarías a cada candidato de ganar la elección, considerando los resultados de las tres encuestas? Explica.

Figura 3. 128. Ejemplo de tarea tabular - verbal (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 301)

La décima segunda clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo simbólico y de lo simbólico a un registro gráfico. Un ejemplo de esta clase se presenta en la relación entre los incisos a y b de las tareas presentadas en la figura 3.129.

¿Qué aprendí hoy?

- 1** Se lanzan tres monedas al aire y se registra la cantidad de sellos obtenidos.
 - a. Determina la función de probabilidad de la variable aleatoria.
 - b. Grafica su función de probabilidad y su función de distribución.
- 2** Cantidad de cubos que se pueden extraer de una caja que contiene 3 esferas y 4 cubos al sacar 2 cuerpos de la caja.
 - a. Determina la función de probabilidad de la variable aleatoria y grafícala.
 - b. Grafica su función de probabilidad y su función de distribución.

Figura 3. 129. Ejemplo de tarea verbal–símbolica- gráfica (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 289)

La décima tercera clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo verbal y de lo verbal a una respuesta en registro gráfico. Un ejemplo de esta clase se presenta en la *figura 3.130*.

- 5.** El gráfico de la función de probabilidad de una variable aleatoria que toma los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5 tiene una primera columna cuya altura es 0,8. Sin dibujar el gráfico, comenta con tus compañeros:
 - a. ¿Cómo caracterizarían la forma del gráfico de la función de probabilidad?
¿Cómo deben ser las demás columnas? Expliquen.
 - b. ¿Qué forma tendrá el gráfico de la función de distribución de probabilidad?
¿Cómo será la línea trazada por los puntos medios de los extremos de las columnas? Argumenten y construyan un gráfico para ejemplificar.

Figura 3.130. Ejemplo de tarea verbal- verbal – gráfica (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 289)

La décima cuarta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación simbólica. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.131*.

- 2.** En el control de calidad de una fábrica se extrae uno de sus productos al azar para verificar si tiene fallas o no. Se ha estimado que la probabilidad de que un producto tenga fallas es igual a 0,02, independiente de los resultados previos. Para realizar el control de calidad se extraen 10 unidades del producto. Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:
 - a. Dos de las unidades tienen fallas.
 - b. A lo más 4 unidades tienen fallas.
 - c. Las unidades con fallas son a lo menos 2, pero no más de 5.

Figura 3. 131. Ejemplo de tarea verbal- simbólica (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 282)

La décima quinta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.132*.

¿Qué conocimientos tienes sobre probabilidades? Escribe tres ideas.

¿Qué tipo de decisiones pueden ser fundadas en alguna probabilidad? Explica.

Figura 3. 132. Ejemplo de tarea verbal - verbal (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 294)

La décima sexta clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo simbólico y de lo simbólico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta *figura 3.133*.

1. Para el experimento "lanzar 4 monedas simultáneamente", se define la variable aleatoria X : número de sellos obtenidos.
 - a. ¿Qué valores puede tomar X ?
 - b. ¿Cuál es el dominio de la variable aleatoria X ?
 - c. Determina los eventos correspondientes a $X = 3$. ¿Cuántos son los casos posibles?
 - d. ¿Cuáles son los eventos para los cuales $X = 1$?, ¿cómo los podrías describir?
 - e. ¿En qué casos se cumple $1 < X \leq 3$? Explica.

Figura 3.133. Ejemplo de tarea verbal – simbólica- verbal (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 275)

La décima séptima clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo tabular y de lo tabular a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la relación de los incisos 1, 2, 3, 4 y 5 de la tarea presentada en la *figura 3.134*.

EL PROBLEMA DE MONTY HALL

CONSTRUCCIÓN

- Con las tijeras, corten tres tarjetas idénticas para simular las condiciones del concurso. En una de ellas escriban detrás la palabra "premio" y dejen las otras dos en blanco.
- En otra hoja, escriban A, B y C para identificar las puertas.

Materiales

- ✓ Una hoja de papel o cartulina.
- ✓ Tijeras.

¿CÓMO SE USA?

Existe un problema clásico que se conoce como "El problema de Monty Hall", llamado así por el animador de un programa de televisión. Consiste en que un concursante se enfrenta a tres puertas, en una de las cuales hay un premio y las otras dos están vacías.

- 1 ¿Qué escogerían ustedes, cambiar de puerta o mantenerla?, ¿por qué?
- 2 Analicen cuáles son las probabilidades de ganar el premio en la primera escena, y cómo cambian cuando el presentador abre una de las puertas.
- 3 Con las tarjetas, reproduzcan la situación varias veces, cuenten los resultados y completen la siguiente tabla en cada caso.
- 4 De acuerdo a lo que observan, ¿qué le conviene más al concursante?
- 5 Justifiquen, utilizando probabilidades, por qué es mejor una opción u otra. ¿Coincide con la idea que tenían inicialmente?

Tarjeta	Resultado	
	Ganó el premio	Lo perdió
Se mantuvo		
Se cambió		

Figura 3. 134. Ejemplo de tarea verbal – tabular- verbal

(Fuente: Chacón et al., 2017, p. 316- 317)

La décima octava clase refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación verbal y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. Para ello el estudiante debe transitar de lo verbal a lo gráfico y de lo gráfico a una respuesta en registro verbal. Un ejemplo de esta clase se presenta en la figura 3.135.

7. Se planifica realizar, por separado, una encuesta de tres preguntas a tres grupos diferentes de una población: pregunta 1 al grupo A, pregunta 2 al grupo B y pregunta 3 al grupo C.
 - Pregunta 1: ¿Subirá el precio del cobre el próximo año?
 - Pregunta 2: ¿Bajará el cambio del peso chileno el próximo año?
 - Pregunta 3: ¿Subirán las exportaciones de Chile el próximo año?

Sobre la base de los porcentajes recibidos, ¿se puede estimar la probabilidad de ocurrencia de los tres eventos? Conjeturan acerca de posibles fallas en la planificación de la encuesta. Explican y comunican las conjeturas.

Observaciones a la o el docente

Se sugiere poner énfasis en la necesidad de usar las tecnologías de la información en forma responsable. (OA F)

© Historia, Geografía y Ciencias Sociales OA g de 2° medio.

Figura 3.135. Ejemplo de tarea verbal – gráfica - verbal (Fuente: Mineduc, 2016, p. 169)

Y, por último, la décima novena clase, la cual fue posible de observar solo en el texto de historia, refiere a aquellas tareas que proporcionan en su planteamiento una representación mixta, es decir, se presenta al estudiante más de un tipo de representación a la vez, y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación verbal. En la *figura 3.136* se presenta un ejemplo de esta clase.

Recurso 22 (fuente secundaria)

La siguiente fuente destaca el papel del Estado en la supervisión y control de las migraciones que se dieron desde las oficinas salitreras hacia las ciudades luego de la crisis económica.

La Gran Depresión obligó una vez más a los trabajadores del salitre y a sus familias a movilizarse. (...) Entre septiembre de 1930 y febrero de 1931, 46 459 personas (22 415 hombres, 9 072 mujeres y 14 972 niños) abandonaron los campos salitreros de Antofagasta e Iquique y se trasladaron en barcos de vapor a Santiago y otras ciudades más pequeñas de la provincia. Las autoridades públicas intentaron controlar y supervisar el proceso de migración inversa y organizaron la distribución uniforme de los trabajadores a lo largo del país para evitar la peligrosa concentración de desempleados en grandes ciudades como Santiago y Valparaíso. De acuerdo con las instrucciones de la Dirección del Trabajo, los trabajadores del nitrato cesantes debían ser enviados a sus lugares de origen (siempre y cuando confirmasen que tenían parientes para apoyarlos), o bien donde hubiera oportunidades de trabajo.

Vergara, A. Los trabajadores chilenos y la Gran Depresión, 1930-1938. En: Drinot, P. y Knight, A. (coord.). *La Gran Depresión en América Latina*. D. F., México: Fondo de Cultural Económica, 2015.

Recurso 23 (fuente estadística)

El siguiente gráfico muestra el aumento del gasto fiscal en distintos sectores de la administración.

Gasto fiscal por sector

Año	Salud	Educación	Defensa	Administración pública
1932	~10.000	~40.000	~100.000	~100.000
1934	~15.000	~50.000	~70.000	~100.000
1936	~20.000	~60.000	~100.000	~120.000
1938	~25.000	~70.000	~110.000	~130.000

Díaz, J., Lüders, R. y Wagner, G. *La república en cifras 1810-2000*. EH Clio Lab-Iniciativa Científica Milenio, 2010.

Actividades (9 TRABAJO COLABORATIVO Actividad)

1. Considerando la información expuesta en los Recursos 22, 23 y 24, ¿cómo se demuestran en cada uno de ellos los cambios del rol del Estado durante la primera parte del siglo XX?
2. ¿Qué cambios y continuidades puedes establecer entre la influencia del Estado en materias sociales y económicas durante la época estudiada y la actual? Respondan junto con un compañero haciendo una lista en sus cuadernos en la que uno establezca los cambios y otro las continuidades.
3. Evalúa los cambios que tuvo el rol del Estado durante la primera parte del siglo XX. Para hacerlo, relaciona la información de esta página con la Lección 1: ¿cómo se vincula el nuevo rol económico del Estado con los cambios políticos que se vivieron en la primera parte del siglo XX? Puedes responder teniendo en cuenta alguno de los siguientes aspectos: la crisis del sistema parlamentario, la Constitución de 1925, el Frente Popular o los gobiernos radicales.

Recurso 24 (fuente iconográfica)

Atendiendo a los cambios en el rol del Estado, en 1937 se aplicó, por primera vez, un plan regulador del centro de Santiago. Este proyecto tenía asociado un plan de empleo que buscaba proporcionar ingresos a la población desempleada por la crisis de 1929 e incluyó la construcción de un barrio cívico alrededor de La Moneda, tal como se aprecia en la siguiente imagen.

Vista a la Alameda y la Plaza de la Constitución desde el Palacio de La Moneda (ca. 1950). Archivo Fotográfico de la Dirección de Arquitectura.

Figura 3. 136. Ejemplo de tarea Mixta - verbal (Fuente: Lucchini et al., 2017, p. 95)

Un aspecto a destacar en este nivel correspondiente a segundo medio es el aumento en el uso de la representación gráfica, inicialmente de manera transitoria y emergente, alcanzando un 5,32% (12) en relación al total de preguntas analizadas. Si bien, puede parecer

una cifra bastante baja, es destacable considerando su nulo uso de manera inicial y transitoria en el nivel anterior.

3.2.4.4 Significado de la noción de variable aleatoria pretendido por el libro de texto y programa de estudio

La *figura 3.138* presenta el detalle de los significados movilizados en las tareas analizadas, cada cuadrado representa una tarea analizada. La figura despliega el detalle por tipo de documento, sección y lección. Se destaca la aparición por primera vez del significado *S4, variable como función*, en el texto de estudiante con un 17,51% (31) de presencia. Por su parte, las tareas vinculadas al significado *S1, variable aleatoria como variable de interés*, se posiciona en primer lugar tanto en el libro de texto como en el programa de estudio, con un 54,24% (96) y un 75% (18) respectivamente. Un ejemplo de este se puede apreciar en la *figura 3.137*. En torno al significado *S3 variable aleatoria como variable estadística*, podemos comentar que representaron el 75% (18) de las tareas analizadas en el texto de historia, el 12,5% (3) en el programa de estudio y un 9,6% (17) en el texto de matemáticas, la *figura 3.139* presenta un ejemplo de este tipo.

¿Qué debo saber?

1. Determina en cada caso la cantidad pedida.
 - a. Una tienda ofrece poleras de cuatro tallas distintas: S, M, L y XL, todas ellas en cinco colores diferentes. ¿Cuántos tipos de poleras distintas tiene la tienda?
 - b. En el problema anterior, ¿cuántos tipos de poleras habría si, además, tuvieran las modalidades con y sin cuello?

Figura 3. 137. Ejemplo tarea movilizadora de significado S1 como variable de interés

(Fuente: Chacón et al., 2017, p. 250)

4. Reúnete con 3 compañeros y busquen, en diarios, revistas o medios digitales, artículos, noticias e informaciones que estén relacionadas con probabilidades.
- ¿A qué tema se refiere la información presentada? Escojan, por ejemplo, alguna de las siguientes categorías:
 - probabilidad en pronósticos de tiempo;
 - probabilidad en el desarrollo económico;
 - probabilidad de contraer alguna enfermedad;
 - probabilidades electorales;
 - probabilidad en expectativas de sobrevivencia.
 - ¿Cuál es, específicamente, la información de probabilidad presentada?
 - ¿La probabilidad presentada es teórica o se obtuvo a partir de la frecuencia relativa de un resultado?
 - ¿Cómo se presenta la información? (Por ejemplo, a través de un gráfico, numéricamente, mediante una frase del tipo “3 de cada 5 personas”, etc.) ¿De qué otras formas se podría presentar? Muestran algunos ejemplos.
 - ¿Qué conclusiones se presentan a partir de la información dada?
 - ¿Existen algunas inexactitudes o errores en la información presentada? Expliquen.
 - ¿Se observan algunas manipulaciones de la información?, ¿cuáles creen que son sus motivos? Comenten.
- Presenten sus conclusiones al curso y discutan los puntos anteriores con sus compañeros y compañeras.

Figura 3. 139. Ejemplo tarea movilizadora de significado S3 como variable estadística

(Fuente: Chacón et al., 2017, p. 301)

Tal como se mencionó, en este nivel de segundo medio se observan tareas relacionadas con el significado S4 *como función*, las cuales están presentes en la sección 10 “variable aleatoria”, en el proceso de evaluación de la unidad del texto del estudio y en algunos casos en el programa de estudio. Un ejemplo de este tipo de tarea se presenta en la figura 3.140.

21 Se lanzan dos dados piramidales con 4 caras congruentes, marcadas con los números 0, 1, 2 y 3. Luego, la variable aleatoria X definida tiene la siguiente función de probabilidad:

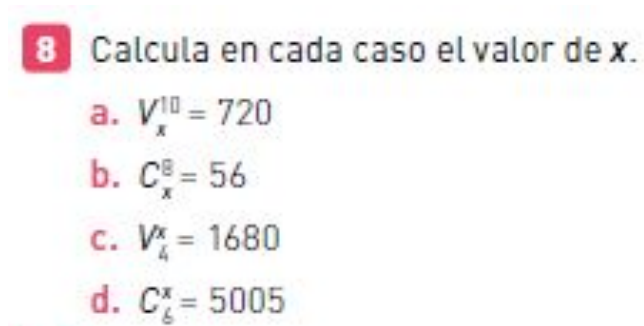
X	0	1	2	3	4	6	9
$P\{X = x\}$	0,4375	0,0625	0,125	0,125	0,0625	0,125	0,0625

- ¿Cuál es la variable aleatoria correspondiente? Determina una que corresponda a los valores de la tabla.
- ¿Es posible determinar otra variable aleatoria? Discute con tus compañeros.
- Determina y grafica la función de probabilidad de la variable aleatoria X .
- ¿A qué corresponde, en palabras, $P\{0 < X \leq 4\}$?
- Determina dos eventos tales que su probabilidad acumulada sea igual a 0,1875. ¿Cómo se pueden describir con palabras?

Figura 3. 140. Ejemplo tarea movilizadora de significado S4 como función (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 324)

Al igual que en séptimo básico, octavo básico y primero medio, se observaron tareas “Sin clasificación” a lo largo de las tareas propuestas en el texto, esta clase de tareas se

presentaron por lo general relacionadas con la activación de conceptos previos o el refuerzo de un procedimiento de cálculo. Un ejemplo de esta clase de tareas se observa en la *figura 3.141*.



8 Calcula en cada caso el valor de x .

- $V_x^{10} = 720$
- $C_x^8 = 56$
- $V_4^x = 1680$
- $C_6^x = 5005$

Figura 3. 141. Ejemplo problema sin clasificación (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 269)

En relación a la presencia de significados por sección y objetivos de aprendizajes mostrados en la *figura 3.142*, se observa que el objetivo de aprendizaje 10, “Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas” (Mineduc 2016, p. 154), y la lección vinculada con variable aleatoria, presentan los primeros indicios de tareas relacionadas con el significado S4, *variable como función*, para ninguno de los casos se supera el 50% de presencia, pero representa un paso considerable ya que no se pudo apreciar ningún caso en los textos y programas de estudio de séptimo básico, octavo básico y primero medio.

Presencia de significados por sección y objetivo de aprendizaje

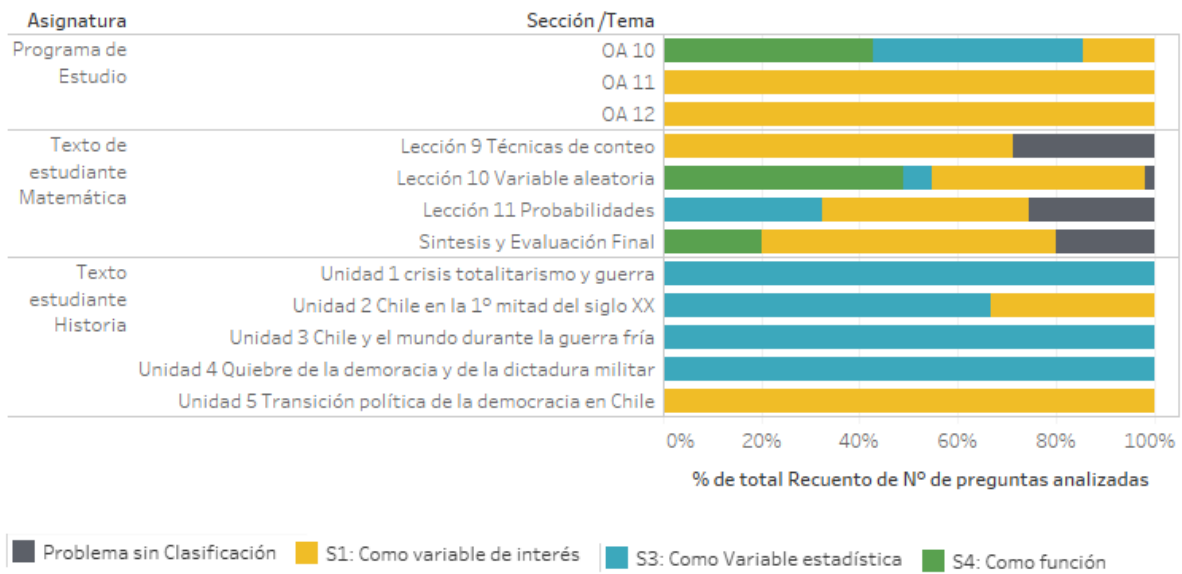


Figura 3. 142. Porcentaje de presencia de significados por secciones y objetivos de aprendizaje (Fuente: Elaboración propia)

En torno a definiciones el libro de texto entrega la definición presentada en la *figura*

3.143, en la cual se presenta a la variable aleatoria como función

Glosario

Variable aleatoria: función que toma sus valores de acuerdo con los resultados de un experimento aleatorio. Así, su dominio es el espacio muestral y el recorrido corresponde a valores numéricos según se defina la función. Se utiliza la notación $X(x)$.

Figura 3. 143. Definición variable aleatoria libre de texto 2º medio

(Fuente: Chacón et al., 2017, p. 274)

En complemento a la definición entregada anteriormente, se entrega la siguiente acotación en el apartado resumen presentado en la *figura 3.144*.

En resumen

Una **variable aleatoria** es una función que, a cada posible resultado de un experimento, le asigna un número real. Por lo general, se denotan las variables aleatorias con letras mayúsculas X, Y, Z, etc.

La ventaja del concepto de variable aleatoria es que nos permite centrar la atención en alguna característica común que tengan los elementos del espacio muestral y que pueden ser de nuestro interés, más que los resultados mismos del experimento aleatorio.

Figura 3. 144. Complemento a la definición variable aleatoria libre de texto 2° medio

(Fuente: Chacón et al., 2017, p. 274)

No se observan ejemplos antes o después de las definiciones entregadas que pudiesen favorecer la comprensión de los estudiantes. Solo como una forma de complementar la idea de recorrido de la variable aleatoria, se presenta la tabla de la *figura 3.145*, pero no se aprecia ningún tipo de explicación ni diagrama que apoye los datos entregados en la tabla en torno al recorrido y dominio de la variable aleatoria.

A veces, la combinatoria nos puede ayudar a contar las posibilidades correspondientes a uno de los valores del recorrido. En este caso:

Puntos	Corresponde a	Es como contar de cuántas maneras se puede escoger	Cálculo	Casos Posibles
0	Perder las 3 partidas.	0 elementos de 3.	$\binom{3}{0} = 1$	1
3	Ganar una partida y empatar las otras 2.	1 elemento de 3.	$\binom{3}{1} = 3$	4
	Empatar las 3 partidas.	0 elementos de 3.	$\binom{3}{0} = 1$	
4	Ganar una partida, empatar una y perder una.	El orden de 3 elementos.	3!	6

Figura 3.145. Tabla recorrido variable aleatoria texto 2° medio

(Fuente: Chacón et al., 2017, p. 27)

Además de las definiciones en torno a variable aleatoria, se presentan las definiciones sobre la función de probabilidad y función de distribución, las cuales son posibles de apreciar en la *figura 3.146* y *3.147* respectivamente.

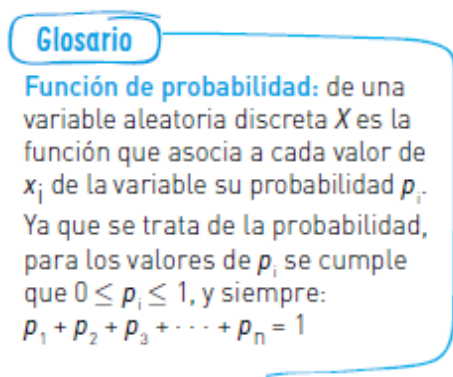


Figura 3. 146. Definición de función de probabilidad libro de texto 2° medio (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 279)

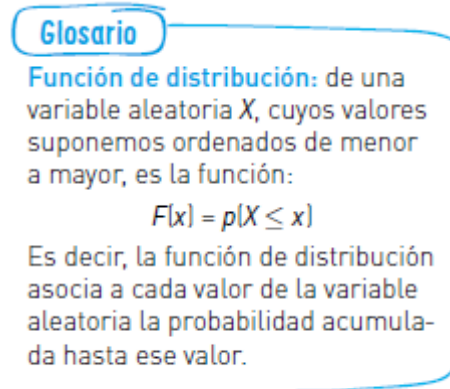


Figura 3. 147. Definición de función de distribución libro de texto 2° medio (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 284)

Significados y contextos

Los significados de un determinado objeto matemático se determinan con base en los contextos históricos en los cuales se fue desarrollando dicho objeto, es por ello que en la figura 3.148 se observa la relación entre los significados pretendidos por los libros de texto y el programa de estudio de 2° medio. En el texto de matemática se observa que el significado S1 variable aleatoria como variable de interés es vinculado a cinco de los 8 contextos observados, centrándose en el vínculo *S1-Observación en interpretación a partir de encuestas*, con un 56,25% (54). Por su parte, el programa de estudio también vincula este significado a cinco de los contextos, dejando el intramatemático e incorporando física y astronomía; sin embargo, a pesar de dicho cambio la mayor concentración sigue en el vínculo *S1-Observación en interpretación a partir de encuestas*, con un 66,67% (12). Por otro lado, el texto de historia vincula dicho significado a solo dos contextos, dando mayor prioridad al vínculo *S1-Economía*, con un 66,67% (4). El significado S3 como variable estadística, es vinculado por el texto de matemática a cuatro de los 8 contextos, dejando fuera *física y astronomía, formal e intramatemático*, el mayor vínculo se centra en *S3-Censos y registros*,

Significados v/s contexto

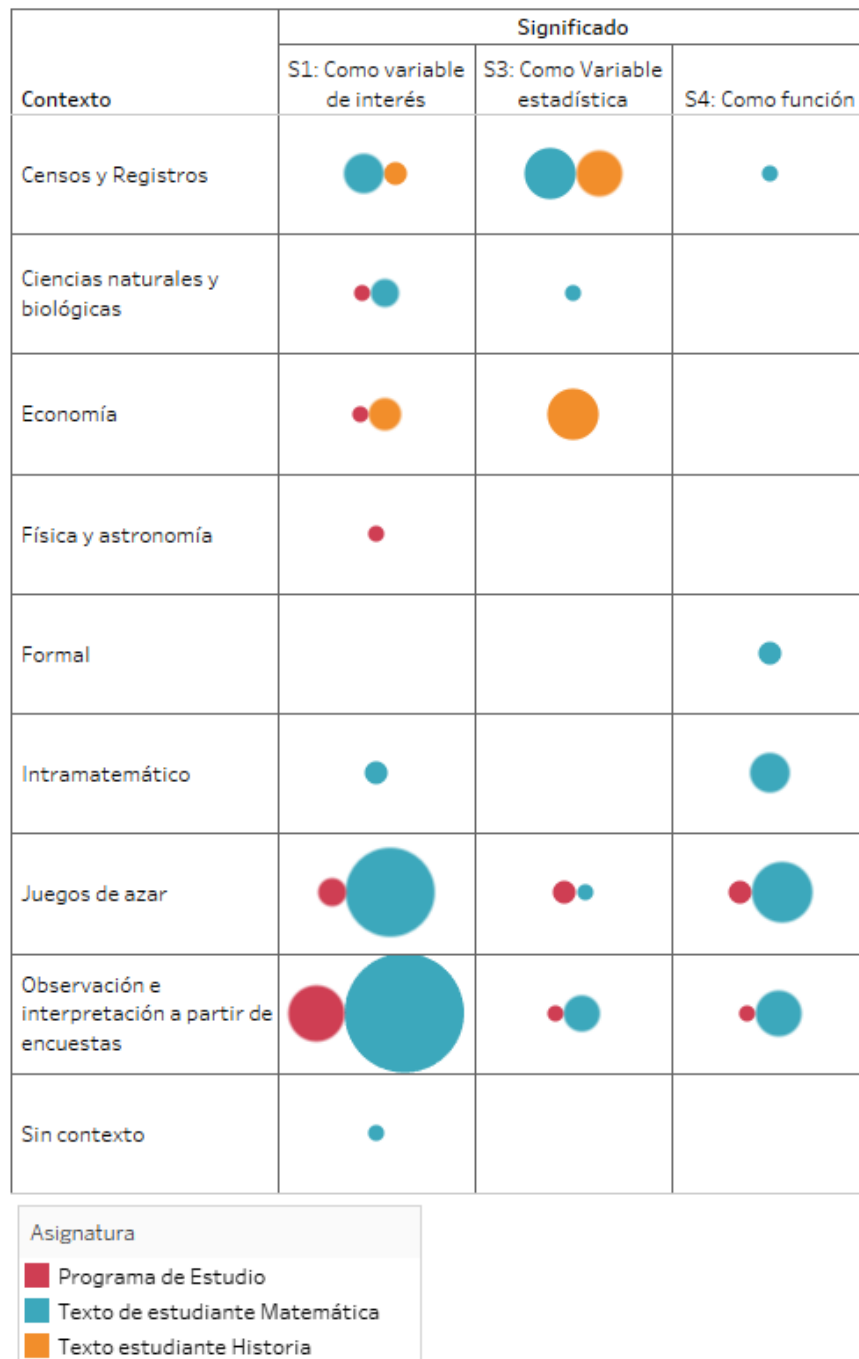
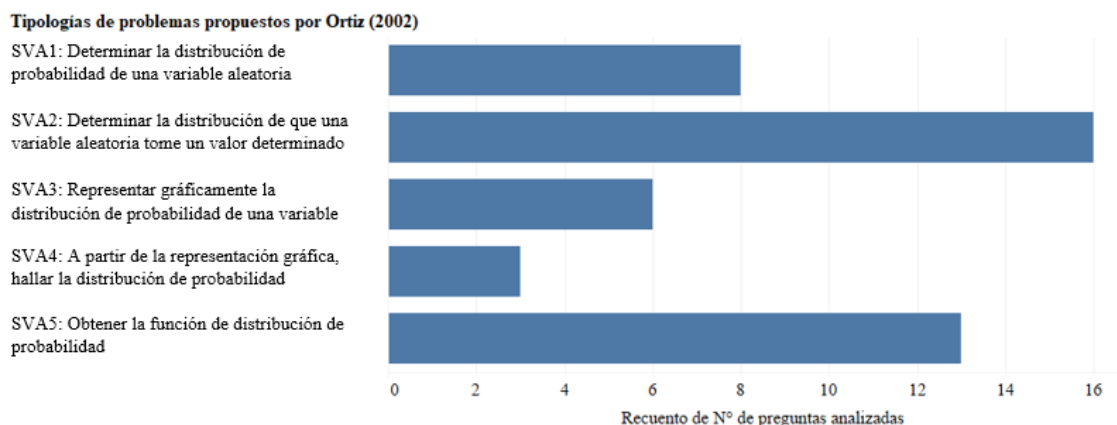


Figura 3. 148. Contextos históricos versus significados de la variable aleatoria en el texto y programa de estudio de 2° medio (Fuente: Elaboración propia)

con un 58,82% (10). Por su parte, el programa de estudio vincula el significado S3 a solo dos contextos, presentando la mayor concentración en el vínculo *S3-Juegos de azar* con un 66,67% (2); finalmente el texto de historia vincula el significado a dos contextos centrándose en el vínculo *S3-Economía*, con un 55,56%. El significado S4 como función, fue posible de apreciar solo en los documentos relacionados con matemática, en el caso del texto del estudiante este fue vinculado a cinco de los contextos presentando una mayor tendencia al vínculo *S4- Juegos de azar* con un 45, 16% (14), mientras que el programa de estudio vincula dicho significado a solo dos contextos, repitiendo la tendencia *S4- Juegos de azar*.

Tipologías de problemas movilizadas en el significado S4 como función

En la *figura 1.149* se presenta la cantidad de tareas propuestas relacionadas con el significado S4, variable como función, en relación a las tipologías definidas por Ortiz (2002), las cuales fueron descritas previamente en la sección de metodología del capítulo 2. De las diez tipologías definidas fue posible identificar cinco de ellas. En algunos casos dentro de una misma tarea fue posible identificar más de una tipología en incisos distintos



|

Figura 3.149. Tipologías de ejercicios Ortiz en relación a las tareas relacionadas al significado S4 variable como función (Fuente: Elaboración propia)

Algunos ejemplos de las tipologías comentadas se pueden apreciar en las figuras 3.150 y 3.151.

7 Construyan dos gráficos, ubicando en el eje de las abscisas los posibles valores de la variable aleatoria, y en el eje de las ordenadas, la probabilidad de que la variable aleatoria tome cada valor. Utilicen barras del mismo ancho sin dejar espacios entre ellas.

- Grafiquen la función de probabilidad $f(x)$.
- Grafiquen la función de distribución $F(x)$, es decir, la que describe la probabilidad de los valores menores o iguales a un valor del dominio de la variable aleatoria.

Figura 3.150. Ejemplo de tarea con tipología SVA1, SVA4 (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 284)

3. En el torneo de ajedrez descrito (página 270), la regla de Bilbao para el resultado de cada partida corresponde a una variable aleatoria X .

- ¿Cuál es el $\text{dom}(X)$?
- ¿Cuáles son todos los valores posibles para $X(x)$? Explica.
- ¿De cuántas maneras es posible obtener 5 puntos?

A veces, la combinatoria nos puede ayudar a contar las posibilidades correspondientes a uno de los valores del recorrido. En este caso:

Puntos	Corresponde a	Es como contar de cuántas maneras se puede escoger	Cálculo	Casos Posibles
0	Perder las 3 partidas.	0 elementos de 3.	$\binom{3}{0} - 1$	1
3	Ganar una partida y empatar las otras 2.	1 elemento de 3.	$\binom{3}{1} - 3$	4
	Empatar las 3 partidas.	0 elementos de 3.	$\binom{3}{0} - 1$	
4	Ganar una partida, empatar una y perder una.	El orden de 3 elementos.	$3!$	6

- Explica con tus palabras la forma de calcular las posibilidades para los casos restantes utilizando combinatoria. Compara tu explicación con tus compañeros.
- Completa la siguiente tabla.

Puntos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Posibilidades										

Figura 3.151. Ejemplo de tarea con tipología SVA1, SVA2 y SVA6 (Fuente: Chacón et al., 2017, p. 275)

3.3 RESUMEN SIGNIFICADOS PRETENDIDOS POR EL CURRÍCULO CHILENO SOBRE LA NOCIÓN DE VARIABLE ALEATORIA

El análisis realizado de los Programas de Estudio y los libros de texto propuestos por el Ministerio de Educación revela que en la actualidad el curriculum chileno presenta una tendencia hacia el significado S1 de la variable aleatoria, como variable de interés, con una presencia del 54,90% (476) de las tareas analizadas, seguido del significado S3, como variable estadística, con un 26,53% (230), y a medida que se avanza en los niveles se logra apreciar algunos destellos del significado S4, como función, particularmente en 2° medio. Lo anterior se puede observar en la *figura 3.152*.

Evolución significados a lo largo del Currículum

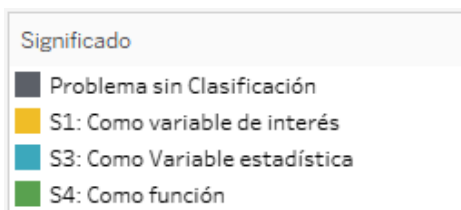
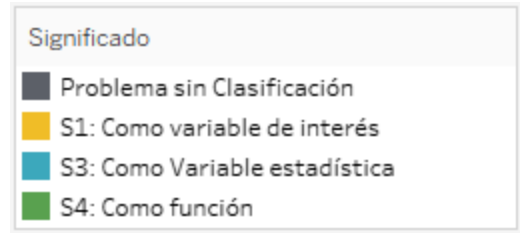
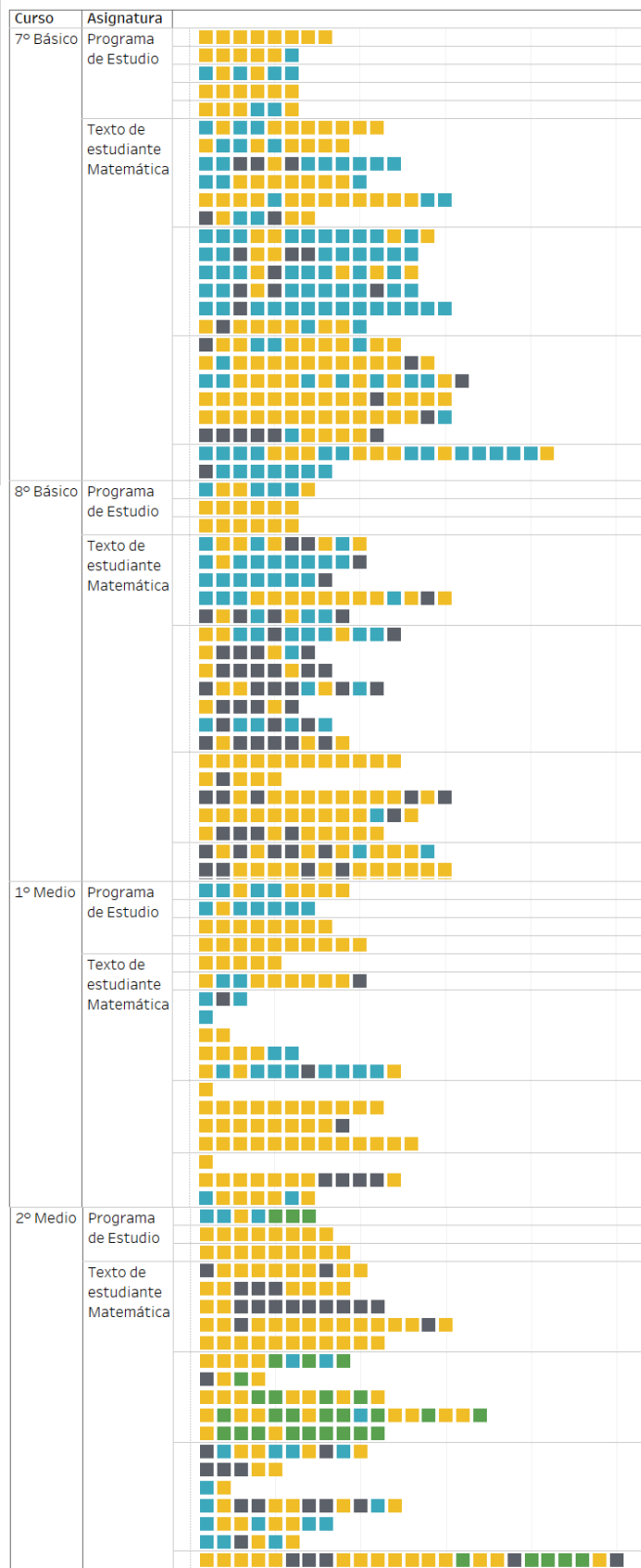


Figura 3.152. Presencia de significados por nivel educativo (Fuente: Elaboración propia)

Detalle Evolución de Significados a lo largo del Curriculum



La figura 3.153 muestra el colorido recorrido de los significados de la variable aleatoria en el currículo chileno. Cada cuadrado representa una tarea analizado y el color simboliza el significado asociado. Desde esta perspectiva se logra apreciar con claridad la tendencia por el uso del significado S1, como variable de interés, del que se dio cuenta a lo largo de cada uno de los análisis presentados por cada curso.

Figura 3.153. Detalle Presencia de significados por nivel educativo (Fuente: Elaboración propia)

3.3.1 Contextos de uso de la variable aleatoria a lo largo del curriculum

En relación a los contextos en los que se utiliza la variable aleatoria, presentes en el currículo chileno, podemos comentar que a nivel general los contextos más utilizados en el texto y programa de estudio de matemática son la *observación e interpretación a partir de encuestas*, con un 44, 52% (370), y *juegos de azar*, con un 25,27% (210). El resto de los contextos presentaron una presencia menor al 10%, siendo los contextos menos utilizados el de *Economía*, con un 1,32% (11), el *Formal* con un 1,08% (9), y *Física y Astronomía*, con un 0,12% (1). La *figura 3.154* presenta la evolución de los contextos históricos utilizados.

Evolución de contextos a lo largo del curriculum

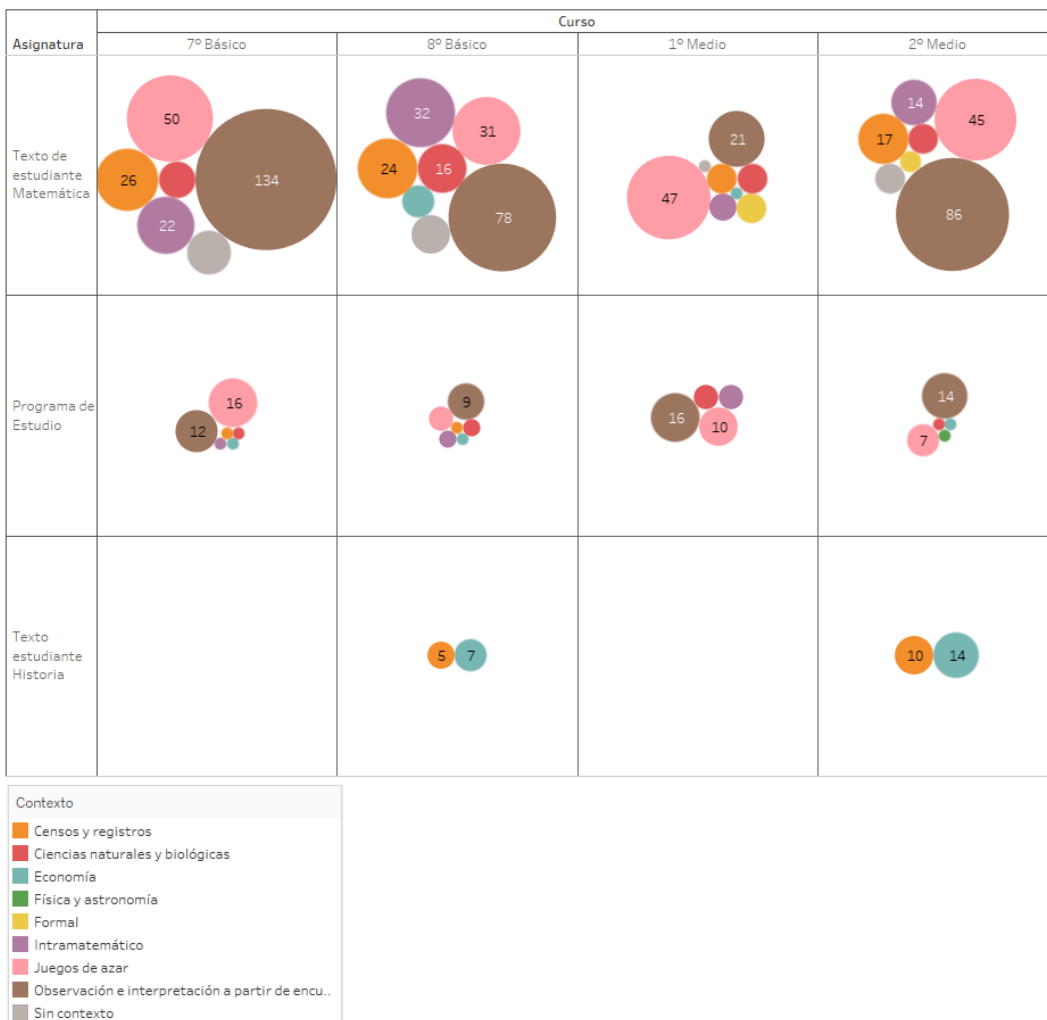


Figura 3.154. Presencia de contextos históricos por nivel educativo (Fuente: Elaboración propia)

Frente a esta situación, el texto de historia se presenta como un gran complemento para fomentar contextos como el contexto economía, ya que en el 58,33% (21) de las tareas analizadas se movilizó dicho contexto; además, cabe destacar que los contextos presentados no solo están ligados a un contexto económico cualquiera, sino un contexto cargado de pertinencia territorial lo que podría resultar más significativo para los estudiantes.

3.3.2 Evolución de la variable aleatoria en función de su tipo a lo largo del curriculum

Por otro parte, el uso de variables en las tareas analizadas presenta una clara tendencia hacia las *variables discretas*, presentes en un 43,71% (379) de los casos. La figura 3.155 presenta la evolución del uso de los tipos de variables

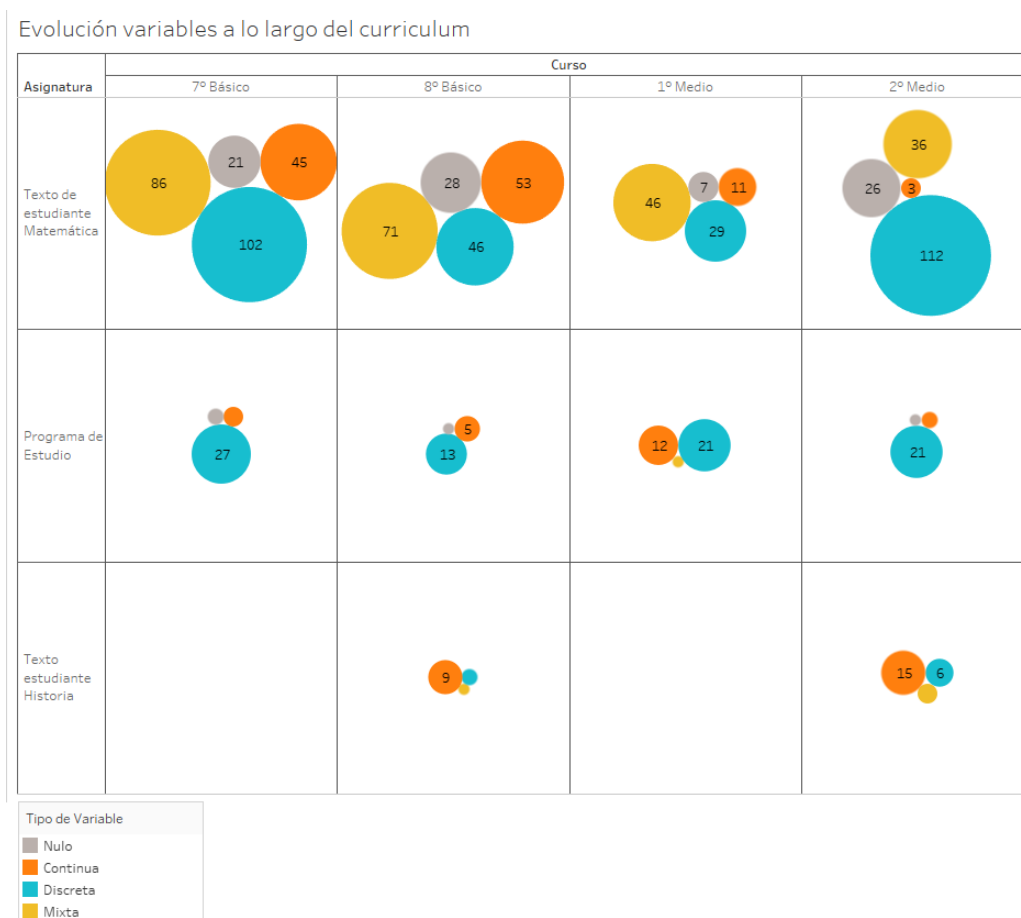


Figura 3.155. Presencia de tipos de variable por nivel educativo (Fuente: Elaboración propia)

Mientras que las *variables continuas* alcanzan solo un 18,22% (158) de presencia. Por su parte las variables mixtas, que involucran el uso de variables cualitativas, representan un 28,14% (244). Por último, se observa que en el 9,92% (86) de los casos, la variable se considera *nula*, ya que esta no se explicita de ninguno modo, o se deja a criterio del estudiante.

3.3.3 Representaciones utilizadas para el estudio de la variable aleatoria

Las combinaciones posibles entre tipos de representaciones iniciales, emergentes y transitorias, dieron origen a 38 tipos de tareas a lo largo de los cuatro niveles educativos, las cuales fueron ejemplificadas en los apartados anteriores. A modo resumen, cabe mencionar que las representaciones iniciales con mayor presencia son entregadas de manera verbal, con un 61,59% (534). Por otra parte, solo el 2,54% (22) de las tareas presentaron representaciones iniciales mixtas; es decir, desafiar al estudiante entregando información a través de diferentes tipos de representaciones, los pocos ejemplares encontrados se lograron visualizar principalmente en los textos de historia. En torno a las representaciones transitorias, se observa que solo el 26,53% (230) solicitan una representación previa a la emergente, y de estas el 66,96% (154) correspondía a una representación de tipo simbólica asociada a algún tipo de cálculo. Finalmente, las representaciones emergentes son solicitadas casi en su totalidad de manera verbal, representando el 91,74% (211) de las tareas analizadas, esta tendencia se puede apreciar claramente en la *figura 3.156*.

Representación inicial	Representación Emergente / Curso													
	Gráfica				Simbólica				Tabular		Verbal			
	7° Básico	8° Básico	1° Medio	2° Medio	7° Básico	8° Básico	1° Medio	2° Medio	7° Básico	8° Básico	7° Básico	8° Básico	1° Medio	2° Medio
Mixta											•	•		•
Gráfica	•••	•		•	•	•		•			•••	•••	•	•
Icónica							•	•			••	••	••	•
Simbólica		•	•		•	•		•	•		•	••	•	•
Tabular	••	••	•	•	•	•		•			•••	•••	••	•
verbal	••	••	•	••	•	••	•	•	•	•	••••	••••	••••	••••

Sin representación transitoria
 Gráfica
 Icónica
 Simbólica
 Tabular
 Verbal

Figura 3.156. Presencia de tipos representaciones por nivel educativo (Fuente: Elaboración propia)

3.3.4 Relación contextos versus significados a lo largo del curriculum

La íntima relación de los contextos y significados comentados en reiteradas ocasiones a lo largo de este trabajo hace necesario incluir en el cierre de este capítulo los vínculos pretendidos por el curriculum en torno a contextos y significados, *la figura 3.157* muestra gráficamente estas relaciones. Tanto el significado S1 como variable de interés como el significado S3 como variable estadística son vinculados mayoritariamente al contexto *observación e interpretación a partir de encuestas*, con un 43,7% (208) y un 49,13% (113) respectivamente; por su parte, el significado S4 como función presenta un mayor vínculo con el *contexto juegos de azar*, con un 47,06% (16).

Significados v/s contexto

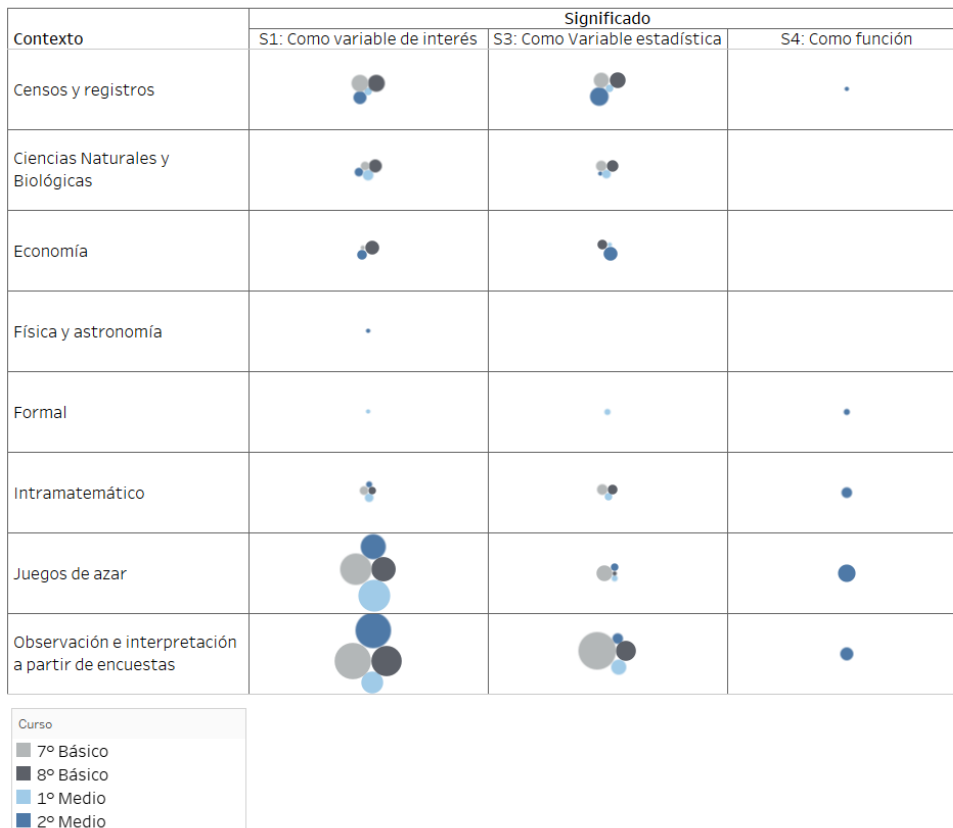


Figura 3.157. Resumen contextos versus significados de la variable aleatoria en el curriculum

(Fuente: Elaboración propia)

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se presentó en detalle el análisis de los seis textos escolares con sus respectivos programas de estudios, cuatro de los cuales están vinculados a la asignatura de matemática y dos a la asignatura de historia, geografía y ciencias sociales. Los textos y programas abarcan desde 7° básico a 2° medio. El análisis realizado se basó en el marco teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, descrito en el Capítulo 2, y parte de la premisa de que un objeto matemático obtiene significado en el sujeto a través de las prácticas significativas (operativas y discursivas) que este realiza de forma activa y muchas de las cuales están vinculadas a las tareas/situaciones problemas propuestas en los libros de texto, debido al amplio uso de este como recurso en el aula. El marco teórico nos ha permitido abordar con precisión nuestro objetivo de investigación, tal como se da cuenta a continuación.

4.2 CONCLUSIONES SOBRE OBJETIVOS

Objetivo general

Como objetivo general de nuestra investigación, nos planteamos Caracterizar los significados sobre la variable aleatoria pretendidos por el currículo chileno de Educación Media <libros

de texto, programas de estudio>, para la enseñanza de dicha noción. A continuación, se discute el logro de los objetivos específicos propuestos para alcanzar este objetivo general en el trabajo:

4.2.1 Sobre el objetivo específico OE-1

OE1: Determinar los significados de referencia de la variable aleatoria (prácticas, objetos matemáticos primarios intervinientes en las prácticas) a través de un estudio de tipo documental, tomando como base la literatura científica sobre el tema desarrollado en el área de la didáctica de la matemática y de la estadística.

Para lograr este objetivo, y como primera fase de nuestro estudio, en el Capítulo 1 (apartado 1.3) realizamos una revisión y análisis documental de los trabajos históricos–epistemológicos realizados en torno al objeto variable aleatoria, recogiendo información sobre los contextos de uso, las problemáticas y sucesos relevantes que fueron contribuyendo tanto para el surgimiento de dicho objeto matemático, como para su fundamentación y posterior formalización. Dicho estudio se llevó a cabo considerando que la determinación del significado holístico, de un objeto matemático, demanda de un estudio histórico–epistemológico sobre el origen y evolución del mismo, el que permite reconocer la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto (Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, 2017).

Posterior a la indagación y revisión de la literatura, se caracterizaron e identificaron los significados parciales del objeto *variable aleatoria* en relación a los procesos históricos y elementos primarios involucrados en el desarrollo. Finalmente, para alcanzar este primer objetivo específico, se identificaron ocho contextos de uso los cuales, siguiendo los supuestos

teóricos del enfoque ontosemiótico, nos ayudan a delimitar un significado parcial para el objeto variable aleatoria y, por tanto, cada uno de esos sistemas de prácticas implicados en dichos contextos permiten la activación de una configuración epistémica de objetos matemáticos primarios. Estos significados son: *S1-variable aleatoria como variable de interés*, *S2-variable aleatoria como magnitud*, *S3-variable aleatoria como variable estadística*, y *S4-variable aleatoria como función*. La descripción pormenorizada, que da cuenta del logro de este primer objetivo específico, y que da lugar a estos cuatro significados parciales de la noción de variable aleatoria, puede encontrarse en el apartado 1.3 del capítulo 1 y 2.4.2 del capítulo 2.

Es importante mencionar que, dado que nuestro objeto de estudio no es un objeto puramente matemático sino un híbrido entre la estadística y la matemática, los usos de la variable aleatoria se ven afectados por los cambios que sufre la sociedad a lo largo del tiempo, es por ello que en muchos casos los contextos son transversales a más de un significado, siendo imposible asociar un único contexto a un único significado sin perder la riqueza de éste. Lo anterior da cuenta de la complejidad que implica el objeto de estudio.

4.2.2 Sobre el objetivo específico OE-2

OE2: Identificar las prácticas matemáticas (explícitas e implícitas) y los objetos matemáticos primarios que emergen de ellas, propuestas en los libros de texto y programas de estudio del currículo de educación media, para la enseñanza de la variable aleatoria

Para alcanzar este objetivo específico podemos señalar que los análisis presentados en el capítulo 3 han permitido identificar los tipos de variables, definiciones y representaciones iniciales, emergentes y transitorias intervinientes en las prácticas

institucionales de los textos analizados. En torno a las variables se identificó una mayor presencia a lo largo del curriculum de las variables de tipo *discretas*, tal como se puede apreciar en los apartados 3.2.1.2 para 7° básico, 3.2.2.2 para 8° básico, 3.2.3.2 para 1° medio, 3.2.4.2 para 2° medio y 3.3.3 a nivel general. Estos hallazgos pudiesen ser una alerta en consideración a investigaciones como las Hawkins, Joliffe y Glickman (1992) quienes describen que dentro los errores que cometen los estudiantes universitarios en sus primeros cursos de estadísticas se encuentra la aproximación de una distribución binomial mediante la distribución normal, lo que se debe a la no diferenciación entre lo discreto y lo continuo, por otro lado Kachapova y Kachapov (2011) fortalecen esta idea comentando que los conceptos erróneos de algunos estudiantes sobre la probabilidad se relacionan con variables aleatorias continuas, que hacen un tema más difícil que las variables aleatorias discretas. Uno de los conceptos erróneos es definir una variable aleatoria continua como una variable con un conjunto de valores contables.

En torno a las definiciones entregadas por los textos y programas de estudio, no se logra identificar definiciones claras o apartados que mencionen la importancia de identificar los tipos de variable utilizada y como estas determinan aspectos tan importantes como el tipo de presentación más adecuada o en niveles superiores los tipos de pruebas estadísticas posible de aplicar en un determinado estudio.

Sobre las representaciones, se observa una clara tendencia hacia las representaciones de tipo verbal tanto de manera inicial como emergente, mientras que para las transitorias se suele decantar por el tipo simbólico, tal como se puede apreciar en los apartados 3.2.1.3 para 7° básico, 3.2.2.3 para 8° básico, 3.2.3.3 para 1° medio, 3.2.4.3 para 2° medio y 3.3.4 a nivel general.

Estos hallazgos coinciden con el estudio realizado por Alvarado y Segura (2012) en donde se menciona que respecto de las representaciones más utilizadas para presentar las distribuciones muestrales en libros de texto clásicos y modernos para ingeniería se encuentran las notaciones y símbolos, sin embargo de manera particular en los libros de texto relacionados con administración y economía además del lenguaje simbólico se potencia el lenguaje gráfico, esto se pudiese asemejar a lo observado en los textos de historia, ya que del 58% (21) de las tareas observadas enmarcaban dentro de un contexto relacionado a economía el 67% (14) tenían a la componente gráfica en su representación inicial, de igual modo cabe destacar dentro de los textos de historia la presencia de representaciones iniciales mixtas es decir la presentación de información en más de un tipo de representación que debe ser interpretada para dar respuesta a lo solicitado, este tipo de casos nos parece que debiesen ser estudiados en detalle para determinar su valor en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, frente a conceptos como la variable aleatoria, las medias muestrales, medidas de posición, medidas de dispersión, medidas de tendencia central entre otros. Respecto de la componente gráfica, nos parece relevante comentar que solo se pudo observar como representación inicial en el 12% (97) del total de tareas analizadas textos de matemáticas y programas de estudio, con una tendencia a la baja a medida en que los años académicos avanzan, a partir de esto nos surgen preguntas sobre ¿Cómo puede afectar esto en la comprensión de los estudiantes de objetos matemática como la variable aleatoria y su distribución? Shaughnessy (2007) indica que algunos de los errores más comunes en torno a la interpretación de gráficos en los estudiantes son la confusión de los ejes en el gráfico, representación incorrecta de los intervalos en un histograma de frecuencias, representar variables no relacionadas en una misma gráfica o usar un gráfico no adecuado para los datos representado, a partir de esto cabe preguntarse si la baja presencia de la componente gráfica en los libros de texto pudiese

estar fomentado los errores comentados por Shaughnessy (2007) u otros tipos de errores posibles.

4.2.3 Sobre el objetivo específico OE-3

OE3: Estudiar la representatividad de los significados pretendidos en el currículo de enseñanza media, respecto del significado holístico de referencia sobre la variable aleatoria, destacando la relación de estos significados con los contextos en los que son puestos en juego.

Para alcanzar este objetivo específico podemos señalar que los análisis, presentados en el capítulo 3, han permitido estudiar la representatividad de los significados pretendidos, por cada uno de los niveles y a lo largo del curriculum. En los apartados 3.2.1.1 para 7° básico, 3.2.2.1 para 8° básico, 3.2.3.1 para 1° medio, 3.2.4.1 para 2° medio y 3.3.2 a nivel general, se puede apreciar la tendencia de uso en torno a los contextos históricos de la variable en los textos y programas de estudio, dando cuenta de una fuerte presencia de contextos tales como *observación e interpretación a partir de encuestas* en desmedros de otros como *economía o física y astronomía*. Por otra parte, en los apartados 3.2.1.4 para 7° básico, 3.2.2.4 para 8° básico, 3.2.3.4 para 1° medio, 3.2.4.4 para 2° medio y 3.3.1 junto con el apartado 3.3.5 a nivel general, se muestra la representatividad de los significados de la variable aleatoria pretendidos en cada uno de los niveles educativos y a lo largo del curriculum, en ellos se puede apreciar una mayor representatividad del significado *S1-como variable de interés* y la nula presencia del significado *S2-como magnitud*. De igual modo, se presenta en dichos apartados el vínculo entre los contextos y significados históricos de la variable por cada nivel y a lo largo del curriculum.

Un aspecto a destacar es la presencia del significado S4 variable aleatoria como variable de interés en segundo medio a través de una unidad completa dedicada a este concepto, esto representa un gran avance en relación a los hallazgos encontrados por Ortiz (2002), en los cuales existía una escasa presencia de vocabulario relacionado con variables aleatorias o se limitaban a menciones implícitas o algunas menciones explícitas pero sin mayor profundización, sin embargo es necesario se hace necesario observar con mayor detención la antesala que se presenta a este capítulo tanto en el mismo año como en los años anteriores ya que los resultados observados indican una tendencia al uso de tareas vinculadas al significado S1 como variable de interés cuyo objetivo es más bien descriptivo en relación a aquello que puede ser más o menos frecuente o más o menos probable, es por ello que a partir de ahí cabe preguntarse ¿Qué clase de dificultades presentan los estudiantes al enfrentarse a tareas vinculadas al significado S4? ¿Existirán nociones del significado S1 como variable de interés que sirvan como base para el desarrollo del significado S4? ¿Cómo elaborar secuencias didácticas que favorezcan el tránsito entre diversos significados?

En torno a los contextos de uso los resultados encontrados se mantienen los hallazgos encontrados por Ortiz (2002) siendo el principal contexto de uso los juegos de azar relacionados, por un lado, con los tipos de espacios muestrales (sucesos equiprobables) y la asignación de probabilidades (laplaciana). Lo que podría indicar que se desea facilitar el tema de los estudiantes a través de elementos que le resulten más familiares. No obstante, igual que creemos que esto trae como consecuencia una restricción importante en el dominio de las aplicaciones de la probabilidad y la estadística y de manera particular con la variable aleatoria mostradas a los estudiantes, una propuesta para expandir el campo de aplicaciones sería vincular la asignatura de historia desde el eje de probabilidad y estadística con otras asignaturas como

historia, geografía y ciencias sociales, física, química o biología o las especiales técnicas que puedan tener dentro de la oferta curricular a través de trabajo interdisciplinario.

4.2.4 Sobre el Objetivo General OG

Para lograr este objetivo, nos apoyamos en las nociones teóricas antes descritas a lo largo del capítulo 2 y de la identificación de los significados de la variable aleatoria comentados en el capítulo 1 y 2, ambas acciones vinculadas al cumplimiento del OE1. Posteriormente, a través del análisis de las prácticas institucionales observables en las tareas de los libros de texto y programa de estudio, logramos caracterizar algunos de los elementos primarios involucrados en dichas prácticas, por ejemplo, las representaciones y definiciones, logrando alcanzar el OE2. Finalmente, en paralelo a la identificación de los elementos primarios, analizamos la representatividad de los significados de la variable aleatoria y su relación con los contextos históricos de esta, alcanzando el OE3. Esto nos proporcionó herramientas teóricas y metodológicas que nos permitieron caracterizar los significados sobre la variable aleatoria pretendidos por el currículo chileno de educación, para la enseñanza de dicha noción, dado así cumplimiento a nuestro objetivo general plantado.

Como resultado de la investigación realizada, podemos señalar que se evidencia que el currículo chileno se basa fundamentalmente en el significado *S1-variable aleatoria como variable de interés*, ligado mayoritariamente a contextos relacionados con la *observación e interpretación a partir de encuestas y juegos de azar*, no se observan tareas vinculadas al significado *S2 como magnitud* relacionadas con el concepto de error o variación. Se logra apreciar la presencia de tareas vinculadas al significado *S4 como función en segundo medio* ubicadas en una unidad titulada variable aleatoria lo que representa un gran avance respecto de hallazgos anteriores como los de Ortiz (2002), en donde la presencia del objeto variable

aleatoria era casi nula. Sin embargo se torna necesario observar en detalle las tareas propuestas en las nuevas bases curriculares de tercero y cuarto medio en la unidad titulada probabilidades y estadísticas descriptiva e inferencial, cuyos temarios incluirán nociones como: modelo probabilístico, media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, distribuciones binomial y normal, inferencia, intervalos de confianza, pruebas de hipótesis entre otros, para determinar si las tareas vinculadas al significado S4 como función presentan una buena antesala para estos.

En torno a los contextos de uso resulta importante establecer estrategias que permitan una mayor diversidad de aplicaciones en los textos de matemática ya que contextos como juegos de azar siguen ocupando los primeros lugares de uso en desmedro de áreas como censos y registros, física y astronomía, ciencias biológicas entre otros, que pudiesen enriquecer la experiencia del estudiante e incluso hacerlo a los objetos matemáticos como variable aleatoria, media muestrales de manera más significativa, en este punto propones como estrategia el vínculo del eje probabilidad y estadística con otras asignaturas.

Respecto de los tipos de variables se observa una tendencia hacia el uso de variables de tipo discretas y escasas definiciones textuales en los textos sobre el concepto de variable, variable discreta y continua, lo que consideramos se debería fortalecer en estos niveles educativas para evitar la aparición de errores como los comentados por Hawkins, Joliffe y Glickman (1992) y Kachapova y Kachapov (2011) en la etapa universitaria. En torno a las representaciones destacamos la presencia de tareas de tres tipos en torno al transito de representaciones, primero aquellas que transita de un registro inicial a otro emergente de mismo tipo, por ejemplo una tarea en registro gráfico cuya respuesta se solicita en registro gráfico en segundo lugar están aquellas que transitan de un registro inicial a otro emergente

de diferente clase por ejemplo una tarea que presenta un registro inicial tabular y se solicita una respuesta en registro simbólico y por último están aquellas tareas que para llegar de su registro inicial al emergente necesitan para por uno transitorio por ejemplo aquel caso en donde se presenta una representación de tipo inicial, luego debe ser traspasada a un registro gráfico para entregar una respuesta final en registro verbal, por otro lado respecto del tipo de representación más utilizada, se encuentra el registro tanto de manera inicial como emergente se encuentran las tareas de registro verbal y simbólico y en menor medida las tareas de registro gráfico.

4.3 PRINCIPALES APORTACIONES DEL TRABAJO

Desde el punto de vista teórico, nuestro trabajo contribuye a mostrar un ejemplo de aplicación de la teorización de Godino y Batanero (1994; 1997) y colaboradores como Font y Pino-Fan (2013), sobre los significados de los conceptos matemáticos y los tipos de elementos que lo componen, así como sobre las dimensiones institucional del conocimiento. El análisis de los significados y tipologías de elementos de la variable aleatoria, la comparación de su presencia o ausencia en los libros de texto o las variaciones con que se presentan cada uno de ellos, permite mostrar la diversidad de significados que, sobre un mismo objeto, presentan diferentes libros de texto, incluso en un mismo nivel educativo. Así, una primera aportación del estudio es precisamente el estudio de tipo teórico realizado, así como la lista de elementos de significado, en sus diversas tipologías que se han identificado para la variable aleatoria. Esta categorización de significados y elementos ha sido la base para la categorización de las unidades de análisis de los textos y por lo tanto base del método de análisis utilizado en el desarrollo de esta tesis.

Por otra parte, creemos que puede tener una aplicación directa como guía en el análisis de otros libros de texto, en la construcción de instrumentos de evaluación y en el diseño de unidades didácticas para la enseñanza de esta noción. Por su parte, el estudio realizado sobre los libros de texto puede contribuir a otros investigadores a desarrollar problemática en torno al análisis de los libros de texto o sobre la variable aleatoria. Finalmente, resaltamos la aportación metodológica que suponen las variables utilizadas y el proceso seguido en el análisis de los libros de texto y programas de estudio, lo que implicó la creación de una base de datos ligada a un software de visualización, logrando análisis más dinámicos sin perder el detalle en cada tarea, este formato pudiese suponer una guía metodológica para futuras investigaciones.

4.4 LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Entre las limitaciones que se identifican se encuentran el tamaño de la muestra de estudio, la cual no pudo incluir los textos ni programas de 3° y 4° medio debido a la desactualización de estos en relación a las bases curriculares puestas en marcha el presente año (2020), haciendo imposible contar con dichos recursos ni al inicio ni en etapas intermedias de esta investigación. Otra de las limitaciones encontradas radica en la identificación de tipologías de tareas para los significados *S1-como variable de interés*, *S2-como magnitud* y *S3-Como variables estadísticas*, para las cuales no fue posible determinar a través de la literatura tipologías de problemas, a diferencia del significado *S4-como función* para el cual se utilizaron las planteadas por Ortiz (2002) con algunas actualizaciones. Si bien, es importante comentar que para cada una de las tareas analizadas se fueron recolectando observaciones que pudiesen dar luces de tipologías, no fue posible analizar dichas

observaciones para plantearlas debido a las limitaciones de extensión de una tesis de magister, de igual modo la limitación comentada impidió analizar la variable en otras áreas además de historia como física, química o biología, todas ellas vinculadas a los contextos históricos de desarrollo de la variable aleatoria.

4.5 FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACIÓN

A partir de los resultados y limitaciones comentadas en el apartado anterior, algunas de las futuras líneas de investigación que se desprenden de esta son:

1) la extensión del estudio a otros niveles educativos, en niveles inferiores a 7° básico o superiores a 2° medio, logrando así reconstruir los significados pretendidos a lo largo de todo el curriculum;

2) extensión del análisis a otras áreas de estudio como física, química y biología;

3) elaboración de guías didácticas que reflejen un posible trabajo interdisciplinario entre matemática e historia desde el eje de estadística y probabilidad;

4) elaboración de tipologías de tareas para significados S1 como variable de interés, S2 como magnitud y S3 como variable estadística;

5) elaboración de evaluaciones para libros de texto;

6) elaboración de instrumentos para evaluar y desarrollar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores en formación y de los profesores en ejercicio, sobre la variable aleatoria

4.6 PUBLICACIONES O PRESENTACIONES SOBRE LA INVESTIGACIÓN

Durante el desarrollo de la tesis fue posible presentar avances de los resultados obtenidos en diversos foros nacionales o internacionales.

- Carrera, B., Pino-Fan, L., Alvarado, H., Lugo-Armenta, L. (2020). Practices on the discrete random variable proposed in the mathematics chilean curriculum of secondary education. In M. Inprasitha, N. Changsri, N. Boonsena (Eds.), *Interim Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 72-80). Khon Kaen, Thailand: PME.
- Carrera, B., Pino-Fan, L., Alvarado, H. (2020) Prácticas sobre la variable aleatoria propuestas en el currículo de educación media (Bachillerato). *1° Encuentro virtual la investigación y el aula de matemática*. Matedumat, México. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=jyFFwdaF0RQ&t=24s>
- Carrera, B., Pino-Fan, L., Alvarado, H. (2019) Prácticas Sobre La Variable Aleatoria Discreta Propuestas en el Currículo Chileno de Matemática de Enseñanza Media, *XXIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática Universidad Austral de Chile Sede Puerto Montt*. SOCHIEM, Puerto Montt, Chile

BIBLIOGRAFÍA

- Alvarado, H., y Batanero, C. (2008). Significados del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios Pedagógicos*, 34 (2), 7-28.
- Alvarado, H., y Segura, N. (2012). Significados de las distribuciones muestrales en textos universitarios de estadística. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 7 (2), 54-71.
- Agencia de la Calidad. (2018). *Aprendiendo de los errores Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas SIMCE y sus implicancias pedagógicas*. Recuperado de <https://www.agenciaeducacion.cl>
- Alatorre, S. (1998). Acerca del tratamiento didáctico de la probabilidad. *Correo del Maestro* 26, p. 23-35.
- Alquicira, Z. (1998). *Probabilidad: Docencia y praxis. Hacia una fundamentación epistemológica*. (tesis de maestría). Cinvestav, México.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Recuperado de <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/didacticaestadistica.pdf>
- Batanero, C (2002). Los retos de la cultura estadística. Conferencia inaugural. *Jornadas inteamericanas de Enseñanza de la Estadística*. Buenos Aires, Argentina.

- Batanero, C. Burrill, G., Reading, C. y Rossman, A. (2008). Proceedings of the Joint ICMI /IASE Study Teaching Statistics in School Mathematics. *Challenges for Teaching and Teacher Education*. Monterrey, México.
- Batanero, C. Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) (2011). Teaching statistics in school mathematics- challenges for teaching and teacher education. *A Joint ICMI/IASE Study*. New York.
- Begle, E. G. (1973). Some lessons learned from SMSG. *Mathematics Teacher*, 66, p. 207-214.
- Borovcnik, MG y Bentz, HJ. (1991). Investigación empírica para comprender la probabilidad. En R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), Encuentros fortuitos: Probabilidad en la educación (págs. 73-105). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- Borovcnik, M., Bentz, HJ y Kapadia, R. (1991). Una perspectiva probabilística. En R. Kapadia y M. Borovcnik. (Eds.). Encuentros casuales: probabilidad en la educación (págs. 27–71). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Broers, N. J. (2009). Using propositions for the assessment of structural knowledge. *Journal of Statistics Education*, 17(2). DOI: 10.1080/10691898.2009.11889513
- Carreño, X., Muñoz, V., Ochsenius, H., y Rodriguez, M. (2013). *¿Cuánto saben de matemática los docentes que la enseñan y cómo se relaciona ese saber con sus prácticas de enseñanza? Proyecto FONIDE: F611150, MINEDUC*. Recuperado de: <https://centroestudios.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/100/2017/07/Informe-Final-F611150-PUC-Beatriz-Rodr%C3%ADguez.pdf>

- Catalán, D., Pérez, U., Prieto, B., y Rupin, P. (2015). *Texto del estudiante. Matemática 8° básico*. Chile: Ediciones SM Chile S.A.
- Centro De Micro Datos. (2013). *Servicio de implementación del sistema de seguimiento al uso de texto escolares en uso durante el 2013 resultados finales*. Recuperado de: <https://biblioteca.digital.gob.cl>.
- Chacón, A., García, G., Rupin, P., Setz, J., y Villena, M. (2017). *Texto del estudiante. Matemática 2° Medio*. Chile: Ediciones SM Chile S.A.
- Chevallard (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée sauvage
- Del Valle, J. E. (2015). *Guía didáctica del docente matemática 7° básico*. Santiago, Chile: Ediciones SM Chile
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Fey, J. T. (1980). Mathematics education research on curriculum and instruction. En R. J. Shumway (Ed), *Research in Mathematics Education* (pp. 388-432). Reston: NCTM.
- Gal, I. (2002). Statistical literacy: meanings, components responsibilities. *International Statistical Review*,70(1), pp. 1-25). Disponível Recuperado de: <https://iase-web.org/documents/intstatreview/02.Gal.pdf>. Acesso em 10/01/2020.
- Galasso, B., Maldonado, L., y Marambio, V. (2016). *Texto del estudiante. Matemática 1° Medio*. Chile: Santillana del Pacifico S. A. de Ediciones.

- Galasso, B., & Mena, S. (2016). *Cuaderno de ejercicios. Matemática 1° Medio*. Chile: Santillana del Pacifico S. A. de Ediciones.
- García, M. (1971). Desarrollo histórico de la teoría de probabilidad. *Estadística Española*, (71), 51-86.
- Ghiglione, R. y B. Matalón (1991). *Les enquêtes sociologiques. Théories et pratique*. París: Armand Colin.
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. In A. Sierpiska, J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Godino, J. D., & Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados semióticos. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247- 265.

- Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
- Griffiths, M. (2010). Maximizing a probability: A student workshop on an application of continuous distributions. *Journal of Statistics Education*, 18(2). DOI: 10.1080/10691898.2010.11889490
- Guernica Consultores S.A. (2016). Estudio de Uso y Valoración de Textos Escolares: *Informe final*. Encargado por MINEDUC y Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe (UNESCO). Santiago, Chile: María Pía Olivera Vidal.
- Haedo, A. S. (2001). An overview of the teaching of statistics at schools and University in Argentina. *Proceedings of the 53rd Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI* (Book 2, pp. 165-167). Seoul: International Statistical Institute
- Hawkins, A., Jolliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. Essex: Longman.
- Heitele, D. (1975). Un Enfoque Epistemológico Sobre Ideas Estocásticas Fundamentales. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Huygens, C. (1714). *Libellus de ratiociniis in ludo aleae or the value of all chances in games of fortune*. London: T. Woodward. (Trabajo original publicado en 1657). Recuperado de: www.york.ac.uk/depts/math/histstat/huygens.pdf
- Kachapova, F., & Kachapov, I. (2012). Students' misconceptions about random variables. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(7), 963-971. DOI: [10.1080/0020739X.2011.644332](https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.644332)

- Konior, J. (1993). Research into the construction of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 251-256.
- Landa, L., y Pinto, V. (2015). *Texto del estudiante. Historia, Geografía y Ciencias Sociales 8° básico*. Chile: Ediciones SM Chile S.A.
- Leemis, L.M., Lockett, D.J., Powell, A.G., & Vermeer, P.E. (2012). Univariate Probability Distributions, *Journal of Statistics Education*, 20(3), DOI: [10.1080/10691898.2012.11889648](https://doi.org/10.1080/10691898.2012.11889648)
- Lucchini S., Salinas, C., Rupin, P., Susarte, S., & Ariztía, C. (2017). *Texto del estudiante. Historia, Geografía y Ciencias Sociales 2° Medio*. Chile: Ediciones Santillana Chile S.A.
- Magel, R. C. (1998). Using cooperative learning in a large introductory statistics class. *Journal of Statistics Education*, 6(3). DOI: 10.1080/10691898.1998.11910621
- Merino, R., Muñoz, V., Pérez, U., & Rupin, P. (2015). *Texto del estudiante. Matemática 7° básico*. Chile: Ediciones SM Chile S.A.
- Miller, T. K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. En L. Pereira Mendoza (Ed.). *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 1221-1222). Singapur: IASE.
- Moivre, A. de (1756). *The doctrine of chances or a method of calculating the probability of events in play, 3rd edition*. London: A. Millar.

- Ortiz, J.J. (2002). *La Probabilidaad en los libros de texto*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada
- Parra, Y. (2015). *Significados Pretendidos Por El Currículo De Matemáticas Chileno Sobre La Noción De Función* (tesis de maestría). Universidad de los Lagos, Santiago, Chile.
- Piaget, J. (2004). *Biología y Conocimiento. (14° Ed.)*. México, D. F., México: Siglo Veintiuno Editores.
- Pino-Fan, L., Godino, J.D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada [The epistemic facet of mathematical and Referencias didactic knowledge about the derivative]. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pino-Fan, L. R.; Castro Gordillo, W. F.; Godino, J. D. & Font Moll, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 34 (2), 123-150. Recuperado en : <http://ve.scielo.org/pdf/pdg/v34n2/art08.pdf>
- Pino-Fan, L. (2014). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Granada: Universidad de Granada.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore the mathematical dimension and the epistemic facet of didactic-mathematical knowledge of teachers. *CERME 9, WTG 20: Mathematics teacher knowledge, beliefs and identity*. Recuperado en <http://www.cerme9.org/products/twg20/>

Pino-Fan, L. (2017). Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado en: <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/pino-fan.pdf>

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y., & Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 11(23), 201-220.

Pino, G., y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática, *Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49(1), 53-64

Riveiro, C., y Pavan, A. (2002). Interfaces entre la literacia estadística e las competencias críticas e comportamental. *Yupana*, 12 (18), 54-68.

Rodríguez, D., & Valldeoriola, J. (2009). *Metodología de la Investigación*. Barcelona: Eureka Media, SL.

Ruiz, B. (2013). *Análisis epistemológico de la variable aleatoria y comprensión de objetos matemáticos relacionados por estudiantes universitarios* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España

Stephenson, P., Richardson, M., Gabrosek, J., & Reischman, D. (2009). How LO can you GO? Using the Dice-Based Golf Game GOLO to Illustrate Inferences on Proportions

and Discrete Probability Distributions. *Journal of Statistics Education*, 17(2). DOI: 10.1080/10691898.2009.11889523

Ministerio de Educación. (2009). *Ley general de Educación*. Recuperado de <https://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=1006043>

Ministerio de Educación. (2015). *Bases curriculares 7 ° básicos a 2 ° medio*. Recuperado de <https://www.curriculumnacional.cl>

Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds), *Teoría y Práctica en Educación Matemática*, (pp. 17-62). Sevilla: Alfar.

Ríos, S. (1967). *Métodos estadísticos*. Madrid: Del Castillo.

Robert, A y Robinet, J. (1989). *Enoncés d'exercices de manuels de seconde et representations des auteurs de manuels (IREM)*. París: Universidad de París.

Romberg, T. A. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*, (pp. 850-869). New York: Mac Millan.

Santis, A. A. (2015). *Matemática 7° básico Cuaderno de ejercicios*. Santiago, Chile: Ediciones SM Chile

Santis, A., Muñoz, V., & Diaz, M. (2017). *Guía didáctica del docente matemática 2° Medio*. Chile: Ediciones SM Chile S.A.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1010). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc, y NCTM.

Unidad de Curriculum Evaluación MINEDUC. (2016). *Matemática Programa 7° Básico*. Santiago. Recuperado de: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18982_programa.pdf

Unidad de Curriculum Evaluación MINEDUC. (2016). *Historia Programa 8° Básico*. Santiago. Recuperado de: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18975_programa.pdf

Unidad de Curriculum Evaluación MINEDUC. (2016). *Matemática Programa 8° Básico*. Santiago. Recuperado de: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18983_programa.pdf

Unidad de Curriculum Evaluación MINEDUC. (2016). *Matemática Programa 1° Medio*. Santiago. Recuperado de: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34359_programa.pdf

Unidad de Curriculum Evaluación MINEDUC. (2016). *Matemática Programa 2° Medio*. Santiago. Recuperado de: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34360_programa.pdf

Unidad de Curriculum Evaluación MINEDUC. (2016). *Historia Programa 2° Medio*. Santiago. Recuperado de: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34441_programa.pdf

Unidad de Currículum y Evaluación MINEDUC.(2019). Decreto *Bases curriculares 3° Medio 4° Medio*. Santiago. Recuperado de:
<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Bases-curriculares/>

Weber, R. P. (1985). *Basic content analysis*. Londres: Sage.

Zacharopoulou, H. (2006). Two learning activities for a large introductory statistics class. *Journal of Statistics Education*, 14(1). DOI: [10.1080/10691898.2006.11910577](https://doi.org/10.1080/10691898.2006.11910577)