



UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO  
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

**NORMAS PRESENTES EN LA EMERGENCIA DE LA FUNCIÓN LINEAL  
CUANDO SE TRABAJA CON SCRATCH**

POR

**ANA JACQUELINE LASTRA MILLAQUÉN**

Tesis presentada para optar al grado académico de  
**MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

Profesor guía: Dra. Elizabeth Hernández Arredondo

Osorno, Sur de Chile. Junio de 2021.





UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO  
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**NORMAS PRESENTES EN LA EMERGENCIA DE LA DE FUNCIÓN  
LINEAL CUANDO SE TRABAJA CON SCRATCH**

Tesis de Magíster presentada por *Ana Jacqueline Lastra Millaquén* dentro del Programa de Magíster en Educación Matemática para aspirar al grado de Magíster en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos, dirigida por la Dra. Elizabeth Hernández Arredondo, académica de la Universidad de Los Lagos.

---

Ana Jacqueline Lastra Millaquén

---

Dra. Elizabeth Hernández Arredondo





UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO  
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

## **NORMAS PRESENTES EN LA EMERGENCIA DE LA DE FUNCIÓN LINEAL CUANDO SE TRABAJA CON SCRATCH**

Esta Tesis de Magíster ha sido desarrollada al seno del Grupo de Investigación sobre Didáctica de la Matemática de la Universidad de Los Lagos (GIDMAT-ULAGOS), e inscrita a la línea de investigación “Historia, epistemología y aspectos socioculturales de las matemáticas”. Además, forma parte de acciones y desarrollos realizados en el marco del Proyecto Fondecyt 1200005, titulado “Desarrollo de competencias profesionales clave para la práctica pedagógica de profesores de matemáticas de enseñanza media”, y cuyo investigador responsable es el Dr. Luis Pino-Fan.



Se autoriza la reproducción y/o divulgación total o parcial, con fines académicos, mediante cualquier forma, procedimiento y/o tecnología de la presente obra, incluyendo la cita bibliográfica que reconoce la obra y a su autor.





## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar, agradezco a mi hija, que es el pilar fundamental en mi vida por su amor, cariño y apoyo incondicional, por darme fortaleza y motivación para seguir adelante en este proceso

A ti Claudio que me has apoyado en todo momento y en todas las nuevas metas que me he propuesto, por ser parte de mis logros y estar siempre a mi lado ayudándome a enfrentar los miedos y desafíos, por tu amor, cariño y compañía en todo momento de mi vida.

A mi directora de tesis Elizabeth Hernández Arredondo por su dedicación, paciencia, por guiarme en este proceso y aconsejarme e incentivar me a seguir adelante siempre.

Finalmente agradezco a la Universidad de Los Lagos y a los Académicos e investigadores del programa de Magíster en Educación Matemática, por su acogida y apoyo durante todo el proceso.



## TABLA DE CONTENIDO

|   |    |
|---|----|
| RESUMEN.....  | 16 |
| ABSTRACT .....  | 17 |
| INTRODUCCIÓN.....   | 18 |
| 1. ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA.....   | 20 |
| Introducción .....  | 20 |
| 1.1 Perspectivas investigativas sobre los procesos normativos en la sala de clases .....          | 20 |
| 1.2 Normas sociales, Normas socio matemáticas y otros principios .....                            | 22 |
| 1.3 Algunos resultados de investigaciones sobre normas.....                                       | 24 |
| 1.4 Los acercamientos al contrato didáctico desde algunos resultados de investigación .           | 25 |
| 1.5 Indicaciones ministeriales que invitan a la reflexión de procesos normativos en el aula.....  | 27 |
| 1.6 El currículo chileno y el aprendizaje de las funciones lineales .....                         | 29 |
| 1.6.1 Exploración de las de las funciones lineales en los libros de matemáticas de 8° básico..... | 33 |
| 1.7 La función lineal en el currículo chileno un acercamiento desde la investigación.....         | 37 |
| 1.7.1 La función lineal en recorrido breve en la historia de las matemáticas .....                | 39 |
| 1.8 Reportes de investigación sobre la función lineal.....  | 41 |
| 1.9 Problemática .....  | 43 |
| 2. MARCO TEÓRICO .....  | 45 |
| Introducción .....  | 45 |
| 2.1 Sobre el Enfoque Ontosemiótico .....  | 46 |
| 2.2 Procesos de Instrucción matemática .....  | 47 |
| 2.3 Dimensión Normativa.....  | 48 |

|  |    |
|--|----|
| 2.3.1 Las facetas normativas .....   | 50 |
| Normas Epistémicas .....   | 50 |
| Normas Cognitivas .....  | 51 |
| Normas Interaccionales .....   | 51 |
| Normas Mediacionales .....   | 52 |
| Normas Afectivas .....   | 52 |
| Normas Ecológicas .....  | 53 |
| Herramientas nuevas al sistema de normas .....                                   | 53 |
| 2.4 Aproximación instrumental .....  | 54 |
| 2.5 Pregunta y objetivos de investigación .....                                  | 56 |
| Objetivo general: .....  | 56 |
| Objetivos específicos: .....   | 56 |
| Pregunta de investigación: .....   | 56 |
| 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN .....  | 57 |
| Introducción.....  | 57 |
| 3.1 Tipo de metodología y diseño metodológico .....                              | 57 |
| 3.2 Participantes .....  | 58 |
| 3.3 Diseño de las tareas .....   | 58 |
| 3.4 Fases y Aplicación de las tareas .....                                       | 60 |
| Fase 1.....  | 60 |
| Fase 2.....  | 61 |
| Fase 3.....  | 61 |
| 3.5 Procedimiento de recolección, unidades de análisis y análisis de datos ..... | 62 |
| 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....   | 65 |
| Introducción .....   | 65 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.1 Profesor – Estudiante .....  | 66  |
| 4.1.1 Primera Clase: Actividad 1 .....   | 67  |
| 4.1.2 Segunda Clase: Actividad 2 .....   | 71  |
| 4.2 Estudiante – Estudiante.....   | 73  |
| 4.2.1 Primera Clase: Actividad 1 .....   | 73  |
| 4.2.2 Segunda Clase: Actividad 2 .....   | 75  |
| 4.3 Estudiante – Actividad.....  | 76  |
| 4.3.1 Primera Clase: Actividad 1 .....   | 77  |
| 4.3.2 Segunda Clase: Actividad 2 .....   | 79  |
| 4.4 Normas presentes en el dialogo grupal de la construcción de la Función línea ..... | 80  |
| 5. CONCLUSIONES.....   | 84  |
| Introducción .....   | 84  |
| 5.1 Respuestas a los objetivos de investigación .....                                  | 84  |
| 5.1.1 Respuesta a los objetivos específicos de investigación.....                      | 84  |
| 5.1.2 Respuesta al objetivo general de investigación.....                              | 88  |
| 5.2 Limitaciones de la investigación e implicaciones a futuro .....                    | 89  |
| 5.3 Consecuencias para la enseñanza.....   | 90  |
| REFERENCIAS .....  | 91  |
| ANEXOS .....   | 97  |
| Anexo A: Tarea 1 .....   | 97  |
| Anexo B: Tarea 2.....  | 100 |
| Anexo C: Tarea 3.....  | 102 |
| Anexo D: Tarea 4.....  | 104 |

## ANEXOS

Anexo A: Tarea 1

Anexo B: Tarea 2

Anexo C: Tarea 3

Anexo D: Tarea 4

## ÍNDICE DE TABLAS

|  |    |
|--|----|
| Tabla 1. Normas sociales presentadas por el MINEDUC (2020).....  | 28 |
| Tabla 2. Objetivos de aprendizaje propuestos por el MINEDUC (2012) .....                                     | 31 |
| Tabla 3. Representaciones previas y emergentes en los problemas de 8° Básico (Parra Urrea, 2015, p. 82)..... | 38 |
| Tabla 4. Algunas definiciones de función en la historia (Boyer, 1987) .....                                  | 40 |
| Tabla 5. Descripción de las situaciones problemas de las que se propusieron situaciones didácticas .....     | 59 |
| Tabla 6. Adaptación de la propuesta de tipologías de normativas Molina (2019) .....                          | 63 |
| Tabla 7. Análisis de Normas presentes en la gestión del profesor durante la clase 1 .....                    | 68 |
| Tabla 8. Análisis de Normas presentes en la gestión del profesor durante la clase 2 .....                    | 71 |
| Tabla 9. Análisis de Normas presentes en la interacción entre estudiantes durante la clase 1 .....           | 74 |
| Tabla 10. Análisis de Normas presentes en la interacción entre estudiantes durante la clase 2 .....          | 76 |
| Tabla 11. Análisis de Normas presentes en el desarrollo autónomo de los estudiantes clase 1 .....            | 77 |
| Tabla 12. Análisis de Normas presentes en el desarrollo autónomo de los estudiantes clase 2 .....            | 79 |
| Tabla 13. Estableciendo condiciones de la representación de la función lineal.....                           | 81 |
| Tabla 14. Estableciendo condiciones de la pendiente de la función lineal.....                                | 82 |
| Tabla 15. Estableciendo condiciones para una pendiente que toma valores pequeños o muy grandes.....          | 83 |
| Tabla 16. Caracterización y normas presentes en el desarrollo de un taller extracurricular                   | 88 |

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES E IMÁGENES

|   |    |
|---|----|
| Imagen 1. Problemas que involucran reconocer proporcionalidad directa, (MINEDUC, 2017, p. 153).....                                 | 33 |
| Imagen 2 Relación de la proporcionalidad directa con la función lineal (MINEDUC, 2017, p.154).....                                  | 34 |
| Imagen 3. Establecimiento de una relación entre proporcionalidad directa y las variables de una función (MINEDUC 2017, p. 155)..... | 35 |
| Imagen 4. Lección 24; Integración de diversas representaciones Libro Matemática (MINEDUC, 2017, p.161).....                         | 36 |
| Imagen 5. Dimensión normativa y sus tipos de normas (Godino, Batanero, & Font, 2017, p.14).....                                     | 50 |
| Imagen 6. Tipologías de normas (Molina, 2019) .....   | 54 |
| Imagen 7. Relaciones establecidas dentro del proceso de instrucción de un taller extracurricular.....                               | 66 |
| Imagen 8. Profesor A entregando instrucciones mientras el profesor B monitorea que se tengan las condiciones mínimas .....          | 67 |
| Imagen 9. Explicación del profesor A del uso del software.....  | 70 |
| Imagen 10. Trabajo autónomo de los estudiantes por parejas.....   | 74 |
| Imagen 11. Diagrama de normas movilizadas en análisis Profesor-Estudiante.....  | 86 |
| Imagen 12. Diagrama de normas movilizadas en análisis Estudiante-Estudiante.....  | 86 |
| Imagen 13. Diagrama de normas movilizadas en análisis Estudiante-Actividad.....   | 87 |
| Imagen 14. Diagrama de normas movilizadas (Profesor, Estudiante, Actividad).....  | 87 |

## ÍNDICE DE ABREVIATURAS

|         |                                    |
|---------|------------------------------------|
| EOS     | : Enfoque Ontosemiótico            |
| MINEDUC | : Ministerio de Educación de Chile |

## RESUMEN

La presente investigación, enmarcada en la línea del postgrado de la historia, epistemología y aspectos socioculturales de la matemática y apoyada en la noción de norma del Enfoque Ontosemiótico (EOS), explora las relaciones que surgen entre un grupo de estudiantes, el docente y la resolución de actividades cuando se interactúa con un programa computacional ‘Scratch’ para abordar el estudio de la función lineal. Para ello, se ha desarrollado una introspección de las facetas epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica; con el objetivo de identificar el tipo de normas que surgen cuando se generan los significados asociados a la función lineal, mediados por el uso de tecnologías de la información y comunicación.

La metodología usada es de corte cualitativo, se trata de un diseño fenomenológico con un estudio de casos múltiples y apoyado en la observación y análisis del contenido de las videograbaciones de un grupo de estudiantes de octavo grado de educación básica, que corresponden a aproximadamente 6 semanas de trabajo en una sesión semanal y un total de alrededor de 780 minutos de grabaciones de audio y vídeo.

El análisis muestra que los estudiantes recurren a una serie de normas como recursos, que les permite participar de manera coordinada entre ellos y /o con el profesor, y el uso de la tecnología. Sin embargo, identificamos que un papel primordial es el desarrollado por el profesor, pues, apoyado en su conocimiento ampliado del contenido, permite el surgimiento de normas y la conceptualización del objeto matemático trabajado durante la práctica educativa.

**PALABRAS CLAVE:** Función lineal, Lenguaje de Programación, Dimensión normativa.



## ABSTRACT

The present research, framed in the postgraduate line of history, epistemology and sociocultural aspects of mathematics and supported by the notion of norm of the Ontosemiotic Approach (EOS), explores the relationships that arise between a group of students, the teacher and the resolution of activities when interacting with a 'Scratch' computer program to address the study of the linear function. For this purpose, an introspection of the epistemic, cognitive, interactional, mediational, affective and ecological facets has been developed; with the objective of identifying the type of norms that arise when the meanings associated with the linear function are generated, mediated by the use of information and communication technologies.

The methodology used is of qualitative type, it is a phenomenological design with a multiple case study supported by the observation and analysis of the content of the video recordings of a group of students of eighth grade of basic education, that correspond to approximately 6 weeks of work in a weekly session and a total of about 780 minutes of audio and video recordings.

The analysis shows that students resort to a number of norms as resources, allowing them to participate in a coordinated manner among themselves and/or with the teacher, and the use of technology. However, we identify that a primordial role is the one developed by the teacher, since, supported by his expanded knowledge of the content, he allows the emergence of norms and the conceptualization of the mathematical object worked on during the educational practice.

**KEY WORDS:** Linear function, Programming Language, Normative dimension.

## INTRODUCCIÓN

Cada aula escolar puede concebirse como una microcultura, con cultura y normas propias, siendo estas últimas las que delimitan el tipo de actividad que surge; por ejemplo, la discusión, la reflexión, la toma de decisiones respecto al contenido, entre otros. Es decir, cada aula es diferente, pues se compone de diferentes actores. Por ello, no es extraño considerar la importancia de reflexionar acerca de ¿Cómo afectan los factores emergentes a esta microcultura y al desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes?

Es debido a lo anterior que, esta investigación se sitúa en desentramar las normas existentes y emergentes, pues al observar estas, nos encontraremos con la capacidad de reflexionar sobre los factores que intervienen para desarrollar una serie de prácticas idóneas en el aula de matemáticas cuando se media el saber a través del uso de tecnología. Uno de los propósitos más importantes de las investigaciones que exploran la interacción en educación, es comprender los procesos que apoyan y regulan el ciclo de enseñanza-aprendizaje.

Por ello, este proyecto se plantea la incorporación del uso de la tecnología como un medio que apoye la construcción de la noción de función lineal en un grupo de estudiantes de 8vo básico.

En el capítulo 1, se expone un recorrido breve a algunos resultados de investigación acerca de las normas presentes en el aula matemática y de los avances que se han hecho desde la investigación al estudio de la función lineal, además de encontrar la postura ministerial acerca de estos dos aspectos.

En el capítulo 2, se presentan los referentes teóricos que se toman del Enfoque Ontosemiótico utilizados para desarrollar esta investigación, los cuales están apoyados en las herramientas teórico-metodológicas y en particular, en el estudio de las facetas para analizar los procesos de instrucción matemática y los desarrollos teóricos sobre las normas presentes en la interacción.

En el capítulo 3 se encuentra descrita la metodología cualitativa que sustenta este trabajo, la cual es un estudio de casos múltiples apoyados en la técnica de recolección de datos a partir de una observación y un análisis de contenido de una serie de video-grabaciones desarrolladas dentro de un taller extracurricular.

En el capítulo 4 presenta el análisis de resultados, el cual ha sido dividido en tres tipos de interacciones que se observaron, a saber; profesor-Alumno, Alumno-Alumno y Alumno-

Actividad, en particular la exploración con la herramienta computacional, en este se hace una exploración al tipo de normas que aparecen en este proceso de interacción. Mientras en el capítulo 5, se encuentra una síntesis de los resultados obtenidos, respuestas a los objetivos de investigación, reflexiones finales del impacto de este trabajo en el aula y las conclusiones y líneas de trabajo emergentes.

## ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

### Introducción

Este capítulo permitirá contextualizar la investigación, visualizando la problemática que existe cuando se estudia la función lineal a través del uso del programa Scratch, para ello nos enfocamos en las normas que se presentan cuando emerge la noción del objeto matemático a tratar. Para este desarrollo, se tendrán en consideración tres dimensiones: El objeto matemático (la función lineal), el software a utilizar (Scratch) y las normas que surgen cuando estas dos variables se interrelacionan. A continuación, se presentarán los tópicos que se abordarán en este capítulo en diferentes momentos:

- ❖ Las normas presentes en el aula y su influencia en la educación.
- ❖ Función lineal y el currículo chileno
- ❖ Dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la función.
- ❖ Uso del software cuando se enseña matemática

### 1.1 Perspectivas investigativas sobre los procesos normativos en la sala de clases

En educación matemática uno de los objetivos fundamentales es fomentar el aprendizaje, pero este no puede dejar de verse como una actividad de carácter social, la cual se encuentra regulada implícita o explícitamente por otros en el aula, motivo por el cual, diversas investigaciones están dedicadas a explorar estas formas de gestión de las prácticas escolares, considerando que un área de emergencia se encuentra en las interacciones del aula.

Ginsburg (1997) y Waschescio (1998), señala que es necesario buscar los elementos sociales y culturales que intervienen en los episodios de acción e interacción en el aula que influyen de manera positiva o negativa en el desarrollo cognitivo del estudiante, llevando a los investigadores a revisar el énfasis en la actividad constructiva como un elemento dependiente de las influencias sociales y culturales.

La visión anterior, ha sido asumida por otros autores (Bowers, Cobb y McClain, 1999; Hershkowitz y Schwarz, 1999; Godino, Font, Wihelmi y Castro, 2009) quienes sostienen que, cada aula tiene su propia microcultura con normas propias que caracterizan todo tipo de actividad y discusión en este entorno a “lo que hace que un aula de matemáticas sea diferente de cualquiera otra es la naturaleza de las normas, más que su existencia o ausencia” (Güven y Dede, 2017, p. 265).

En otras palabras, hacer matemáticas escolares es una actividad de construcción social, más que de construcción individual al implicar una relación colectiva e interactiva (Bauersfeld, 1980); es por lo que, el proceso de desentrañar las interacciones humanas que ocurren en las aulas de matemáticas se torna complejo.

Numerosos estudios que han tenido como propósito investigar ¿cómo se aprenden y enseñan las matemáticas desde una perspectiva sociológica mediante el análisis general de la cultura del aula de matemática? Apoyados principalmente en el constructo de la microcultura del aula (Cobb, Stephan, McClain y Gravemeijer, 2001; Cobb, Wood, Yackel y McNeal, 1992; Godino, Font, Wihelmi y Castro, 2009). Las contribuciones de estas y otras investigaciones las expondremos en cuatro tradiciones de investigación. La primera será llamada interaccionista, la cual estudia patrones implícitos en la interacción del aula escolar, siendo estos de carácter normativo, pues se dan por asumidos como un código impuesto, por ejemplo: responder si el profesor lanza una pregunta (Bauersfeld, Kurmmheuer y Voigt, 1988; Voigt, 1994). Esta tradición ha sido ampliada por Cobb y Yackel (1996) quienes al presentar un enfoque constructivista social, han proporcionado un marco interpretativo para analizar importantes procesos como lo son las normas sociales y sociomatemáticas en el aula, apoyados por sus correlatos psicológicos donde aparecen: la naturaleza general de la actividad matemática y las creencias mostrando una naturaleza dinámica de la actividad matemática con énfasis explícito en la negociación colaborativa de normas compatibles con el problema.

La segunda tradición que denominaremos epistémica se apoya en un sistema epistemológico basado en el concepto de contrato didáctico de Brousseau (Brousseau 1984, 1997) donde el/la docente y los estudiantes tienen acuerdos implícitos y mutuos, por ejemplo, el/la docente debe conocer el contenido y se espera que lo enseñe a las/los estudiantes, donde el trabajo de

estos últimos es aprender el contenido que se les propone. En trabajos más recientes, entre ellos el de Patricio Herbst (2003) se enfatiza que el contrato existe a diferentes niveles, donde uno puede pensar en relaciones institucionalizadas más amplias de los profesores con los estudiantes y la asignatura. La reflexión de este último autor ha llevado a considerar que el contrato es una situación dinámica de negociación constante en el aula por profesores y estudiantes. Este último está cerca de las actividades sociales y normas sociomatemáticas de Cobb y Yackel (1996 y 1998).

La tercera tradición la llamaremos sociocultural, en esta se discute que las normas son perspectivas socioculturales. En esta tradición se ha trabajado para conectar la teorización sobre las normas en las aulas con otros procesos culturales en diferentes niveles (Gorgorio y Planas, 2005 y Herbel-Eisenmann, 2003).

La cuarta tradición la denominaremos integradora (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009) la cual busca integrar la riqueza de las conceptualizaciones de las tradiciones investigativas mencionadas anteriormente, respecto a las normas y de orquestar las diferentes nociones como parte de una dimensión normativa de los procesos de estudio; es decir, bajo el enfoque ontosemiótico, el estudio de las normas ha dado lugar a caracterizarlas dentro de la faceta de los procesos de estudio: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica.

En este trabajo nos interesa de manera particular plantear un estudio bajo la cuarta tradición investigativa debido a sus potencialidades. Por ello, se expondrán de manera sucinta algunos resultados y principios de las otras tradiciones que la visión integradora adapta, esto apoyará a la discusión y planteamiento del problema, con el fin de tener un mayor cúmulo de resultados que arrojen este trabajo.

## **1.2 Normas sociales, normas socio matemáticas y otros principios**

El primer principio que debemos considerar es que las dimensiones culturales y sociales en el aprendizaje de las matemáticas no son solo condiciones ambientales, sino que son de hecho, una parte integral de las matemáticas (Voigt, 1995). Así como la creencia que un/a

profesor/a o un/a alumno/a guardan acerca de ¿cómo debe darse las interacciones en la sala de clases?, dado que son factores que influyen en lo afectivo y en la negociación de los significados matemáticos presentes en la interacción social, pues de cierta manera el/la profesor/a es quien regula estas relaciones y que a partir de sus creencias deja en sus estudiantes registros de mensajes implícitos sobre la disciplina (Kang y Kim, 2016; Çakır y Akkoç, 2020). Por lo que el/la profesor/a es uno de los actores principales en el establecimiento de las normas (Cobb, 1999).

Las normas en forma general pueden ser entendidas como formas de actuar en determinadas circunstancias y condiciones prescritas en un ambiente. Sin embargo, en el acercamiento de Cobb et al. (1992) usan este concepto bajo el sentido de que una norma sirve para especificar y satisfacer las expectativas que surgen en el aula a través, de la interacción entre el/la profesor/a y el alumnado, donde pueden entenderse como las regularidades en las actividades individuales o colectivas del salón de clases. Las normas se establecen y desarrollan a través de interacciones constantes entre estudiantes y profesor/a, por lo tanto, pueden diferir significativamente de un aula a otra Cobb y Yackel (1996). En otras palabras, una norma es una noción colectiva consensuada de manera explícita o implícita dentro de un contexto áulico, en donde se establecen expectativas y obligaciones que son negociadas entre los participantes estudiantes y el profesor.

Dentro de la tradición de investigación en educación matemática podemos encontrar dos tipos de normas: las Normas Sociales que se refieren a regularidades o patrones de interacción que reglamentan las interacciones sociales en el aula, las cuales están presentes en cualquiera de ellas, tanto en la de ciencias como en la de lenguaje, entre otras. Pero estas normas sociales se establecen en función al actor que las avizora, por ejemplo, un estudiante puede observar la clase centrado en su concepción de cómo debe ser una clase tradicional (Yackel y Cobb, 1996). Mientras que también hay otras que se denominan Normas Socio Matemáticas, estas son regularidades específicas a las matemáticas (Cobb y Yackel, 1996). Stephan (2020) alude a que las normas sociomatemáticas son los criterios normativos, mediante los cuales los estudiantes dentro de las comunidades crean y justifican su trabajo matemático. Los ejemplos de las normas sociomatemáticas incluyen negociar los criterios para lo que cuenta como una solución matemática diferente, eficiente o sofisticada y los criterios para lo que cuenta como una explicación matemática aceptable.

Ambos tipos de normas explicados anteriormente tienen presencia dentro de una microcultura áulica, la cual se relaciona con creencias respecto al rol de los participantes dentro de una actividad matemática, así como de las reflexiones en las que estos participan (Cobb, Stephan, McClain y Gravemeijer, 2001). En otras palabras, las normas y creencias evolucionan juntas (Yackel y Rasmussen, 2002).

Para el desarrollo de este trabajo se considera importante situar una idea de microcultura de aula, por lo que consideramos pertinente que el desarrollo y exploración del trabajo se situé en un Laboratorio de Matemáticas.

### **1.3 Algunos resultados de investigaciones sobre normas**

La potencialidad de los estudios sobre normas en el aula de matemáticas se relaciona al establecer como premisa que la riqueza de estas influye en la calidad de las actividades individuales y colectivas presentes en esta misma. Es decir, se considera como supuesto que establecer normas académicas idóneas en el aula de matemáticas, puede propiciar un aprendizaje efectivo. Dentro de los diferentes estudios sobre normas podemos encontrar trabajos situados en los distintos niveles educativos; desde escuelas primarias, hasta formación de profesores, situada en sus actores o bien en la práctica matemática enfocada principalmente en la resolución de problemas.

Los primeros reportes que se presentarán, son en función al nivel educativo en donde se han desarrollado, centrando su foco de análisis en el profesor y su gestión de estas normas (Cobb y Yackel, 1996; Levenson, Tirosh y Tsamir, 2006, 2009; Sekiguchi, 2005, López y Allal, 2007) en educación primaria, educación secundaria y media (Partanen y Kaasila, 2015), universidades ( Stylianou y Blanton 2002; Yackel et al., 2000), formación docente (Dixon, Andreasen y Stephan, 2009; McNeal y Simon, 2000; Sánchez y García, 2014; Van Zoest y Stockero, 2012) y desarrollo profesional (Clark, Moore y Carlson, 2008; Elliott et al., 2009; Tsai, 2004, 2007). Dentro de los criterios considerados en estos trabajos, nos encontramos que se han centrado en observar al profesor/a, la interacción de este/a con los/las estudiantes dentro de la microcultura y su gestión para el establecimiento de las normas sociomatemáticas o sociales.



Otro grupo de trabajos, se sitúan en la práctica matemática, con principal observación en el estudio de la resolución de problemas y la emergencia de las normas sociales y sociomatemáticas con énfasis en mejorar el desarrollo de contenidos matemáticos o procesos de estos (López y Allal, 2007; Tatsis y Koleza, 2008, Elliott et al., 2009; Levenson et al., 2006, Partanen y Kaasila, 2015; Stylianou y Blanton, 2002, Connelly, 2012; Sánchez y García, 2014; Molina y Pino-Fan, 2018), teniendo como resultado principal que hay procesos de establecimiento intencional de las normas que producen el proceso de enseñanza-aprendizaje, los cuales han dado registro de algunas mejoras en procesos o habilidades de temas matemáticos.

Por lo que la principal preocupación de este trabajo es retratar la condición actual del aula con el objetivo de negociar normas que pueden provocar inherentemente cambios en ellas y en la microcultura observada (Partanen y Kaasila, 2015).

A continuación, se mencionarán algunos trabajos que consideran como objeto medular de estudio, retomar la idea del contrato didáctico con el fin de establecer un acercamiento a los procesos de interacción en el aula. Nos interesa en particular, seguir observando las potencialidades de este concepto, pues la cuarta tradición en la que se sustentará este proyecto retoma algunos de sus principios y los inscribe bajo el Enfoque Ontosemiótico.

#### **1.4 Los acercamientos al contrato didáctico desde algunos resultados de investigación**

La noción de contrato didáctico es una piedra angular en la didáctica de la matemática, para este trabajo asumiremos la visión del contrato didáctico expresado por Guzmán, Pino-Fan y Hernández (2020) donde hacen una interpretación a los trabajos desarrollados por Brousseau (1998). Lo primero que señalan es que la existencia de este contrato se encuentra supeditada al disfuncionamiento del proceso de enseñanza- aprendizaje, en donde se puede percibir un inadecuado funcionamiento o irregularidades en los procesos de aprendizaje, quedando como evidencia las rupturas en el proceso de devolución que ocurre en el proceso de solución de situaciones adidácticas y/o didácticas; quedando de manifiesto que este contrato es implícito para el/la profesor/a, pero el investigador, con frecuencia, puede identificarlo en la gestión de un/a profesor/a en el aula y este esencialmente tiene que ver con el proyecto de enseñanza

del/ de la mismo/a, en particular, con sus metas y la metodología de la clase que realizará, la responsabilidad que dejará a los estudiantes para responder en forma autónoma a sus preguntas o propuestas de tareas.

De los elementos más importantes que tiene esta visión, es que el contrato didáctico es incierto, en tanto que el/la profesor/a no puede asegurar el éxito del aprendizaje del estudiantado, por lo que las paradojas son consecuencia de la incertidumbre del contrato didáctico.

Otras investigaciones se han apoyado en el uso de este constructo para observar la relación entre el contrato didáctico y las emociones que presentan los estudiantes y los profesores en la sala de matemáticas (García, 2013); en particular, mencionan que existen tantas emociones en la sala como contratos didácticos, situando su principal preocupación, en que las emociones provocadas por estos contratos pasan inadvertidas en la gestión de clases, es decir, el/la docente no se hace consiente de estas emociones y tampoco se empodera de ellas para redireccionar su gestión. Dentro de las señales que permiten dar registro de estas emociones, se encuentran las disposiciones fisiológicas, corporales y verbales que se observan cuando una persona refleja alguna emoción, el acto comunicativo considera estas señales que se sincronizan en el proceso.

En este ámbito, se dice que las creencias y expectativas que presentan los/las profesores/as y estudiantes, fomentan el mejoramiento de las condiciones de enseñanza; ya que pueden favorecer o limitar el aprendizaje. También se destaca que es necesaria la contextualización de los procesos de convivencia escolar, ya que deben variar de acuerdo con la naturaleza de cada establecimiento (García, 2013).

Segura (2004) presenta una potencialidad del contrato didáctico al organizar el desarrollo de una secuencia didáctica que permita resolver un sistema de ecuaciones lineales, en particular explotan algunos elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), como lo son: las situaciones de acción, de formulación y de acción.

También dentro de los trabajos investigativos que retoman el contrato didáctico como eje de reflexión, se sitúa el desarrollado por Godino et al. (2009) en su trabajo de la aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un Enfoque Ontosemiótico,

en este se da a conocer la integración entre el contrato didáctico y las normas en didáctica de las matemáticas como parte de una dimensión normativa de los procesos de estudio. La principal implicación de este trabajo es la toma de conciencia, por parte de investigadores y docentes, de la naturaleza normativa de los objetos matemáticos y didácticos y del conglomerado de normas que condicionan y soportan la actividad de estudio de las matemáticas. Se pretende resaltar la importancia, que la noción de norma o regla tiene en las teorías de Didáctica de las Matemáticas y motivar la necesidad de avanzar en la conceptualización de la dimensión normativa.

Primero, dice que el contrato educativo se centra en que la escuela debe educar para la ciudadanía y el desempeño profesional. La obligación de educar se concreta en la obligación de enseñar y de aprender, y proporcionar los medios necesarios. Las normas a veces se imponen explícitamente y otras veces son emergentes de las prácticas escolares. La toma de conciencia de las normas revela al mismo tiempo los grados de libertad que tiene el profesor. Las pautas de actuación reflejan una planificación global de su trabajo, al desarrollo de unidades didácticas, o a los modos de interacción con los estudiantes, el saber matemático y los recursos didáctico; lo que afecta o influye en las decisiones de los profesores (Godino et al., 2009).

Hasta aquí se han dialogado de las normas y el contrato didáctico desde las investigaciones, pero consideramos oportuno preguntarnos ¿cuál es el lugar de las normas dentro de las indicaciones ministeriales?, si es que las hay, esto para mostrar la pertinencia del trabajo propuesto.

### **1.5 Indicaciones ministeriales que invitan a la reflexión de procesos normativos en el aula**

Dentro de los documentos ministeriales en Chile encontramos Normas de Convivencia Escolar, donde se expresa que respeto a la incentivación de las normas son fundamentales para la correcta socialización de los estudiantes, enseguida se presenta una tabla resumen del tipo de Convivencia y el tipo de normas asociadas a esta (MINEDUC, 2020).

Tabla 1. Normas sociales presentadas por el MINEDUC (2020)

| TIPO DE CONVIVENCIA       | NORMA  |
|---------------------------|--|
| Convivencia respetuosa    | Escucho y miro al que habla.                               |
|                           | Saludos a mis profesores y compañeros al llegar a la sala. |
|                           | Mantengo limpio y ordenado mi escritorio.                  |
|                           | Agradezco cuando alguien me presta ayuda.                  |
|                           | Decido llegar a la hora.                                   |
|                           | Saludo y me despido de quienes están cerca de mí.          |
|                           | Soy respetuoso y dejo el baño limpio.                      |
|                           | Soy limpio y boto los papeles al basurero.                 |
|                           | Me lavo las manos, cuido de mí y de los demás.             |
|                           | No me burlo de los demás.                                  |
| Convivencia Inclusiva     | Incluyo a todos, aunque seamos diferentes.                 |
|                           | Soy paciente cuando otro tiene dificultades.               |
|                           | Incluyo en el grupo a los compañeros que están solos.      |
|                           | Invito a jugar a los que están solos.                      |
|                           | Ayudo al que lo necesita.                                  |
| Convivencia Dialogada     | Resuelvo mis diferencias conversando.                      |
|                           | Me pongo en los zapatos del otro.                          |
|                           | Doy mis opiniones sin herir a los demás.                   |
|                           | No le hago a los demás lo que no me gusta que me hagan.    |
| Convivencia Participativa | Pido la palabra cuando quiero hablar.                      |
|                           | Espero mi turno.   |
|                           | Camino con calma y así evito accidentes.                   |

Como se muestra en la tabla 1, se identifican varias normas de carácter social que deben existir en el aula. Si bien es una propuesta de aproximación desde el Ministerio de Educación, consideramos que es importante desarrollar una exploración a estas dentro de la sala de matemáticas y que no solo posean un carácter social, sino también matemático. Por ello consideramos que el EOS puede ser un aporte para nutrir en un futuro esta propuesta ministerial, dado que en el currículum de matemática se presentan normas que no se identifican como tal, sino que se destacan como factores importantes en la educación.

En todos los niveles educativos se señala que deben trabajar en la resolución de problemas. Resolver un problema implica no solo poner en juego un amplio conjunto de habilidades, sino también la creatividad para buscar y probar diversas soluciones. Al poner énfasis en la resolución de problemas, se busca, por un lado, que los/las estudiantes descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas. En este contexto, muchas veces lo que más aporta al aprendizaje del estudiantado no es la solución a un problema matemático, sino el proceso de búsqueda creativa de soluciones en cualquier área del conocimiento entre pares.

Con base en esto se hace importante para nosotros explorar la presencia de estas normas dentro del proceso de construcción de un objeto matemático, en particular de La Función Lineal.

A continuación, se presentarán las características de la función lineal desde la percepción ministerial en Chile, subsiguiente a esto se analizarán los acercamientos regionales desde la investigación a este objeto matemático.

## **1.6 El currículo chileno y el aprendizaje de las funciones lineales**

Dentro de las orientaciones curriculares en Chile, se presenta el estudio del álgebra a través de todos sus niveles de educación básica y media, entregando así las herramientas para el desarrollo de un pensamiento variacional, que comienza con situaciones de cambio y el acercamiento de los/las estudiantes a actividades de medición y variación en las cuales puedan observar ciertos patrones que posteriormente podrán ser modelados por algún tipo de función y representados utilizando diferentes medios tales como tablas, gráficos, expresiones analíticas y el lenguaje natural.

Al realizar un seguimiento de la noción de función en las bases curriculares, se observa que este objeto matemático es introducido para los niveles de 7° básico y 2° medio, presentado a través del eje temático de Álgebra y Funciones.

Según las bases curriculares (Ministerio de Educación, 2015) al finalizar este eje se busca que los/las estudiantes puedan usar metáforas para interiorizarse con el concepto de función

para luego poder manipular, modelar y encontrar soluciones a situaciones de cambios en diferentes ámbitos, como el aumento de ventas en un tiempo determinado.

En esta propuesta ministerial se espera que el/la estudiante exprese igualdades y desigualdades (ecuaciones e inecuaciones, respectivamente) y que comprenda la función lineal y cuadrática con sus respectivas representaciones. Posteriormente, se espera que logre la capacidad de transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes para resolver problemas justificando su procedimiento. También se pone énfasis en que ellos mismos sean capaces de transitar entre los distintos niveles de representación (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas, dando relevancia al modelamiento matemático. Por otro lado, se promueve el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) fundamentalmente como un apoyo para la comprensión del conocimiento matemático, para manipular representaciones de funciones y de objetos geométricos, o bien para organizar la información y comunicar resultados.

Según las Orientaciones didácticas (MINEDUC, 2012), se espera que el/la profesor/a utilice un modelo pedagógico que promueva la comprensión de conceptos matemáticos y no la mera repetición y mecanización de algoritmos, definiciones y fórmulas. Para esto, debe planificar cuidadosamente situaciones de aprendizaje en las que los/las estudiantes logren establecer vínculos entre los conceptos y las habilidades matemáticas y puedan demostrar la comprensión por sobre la mecanización.

Es necesario especificar la evolución de los objetivos que involucran específicamente la función lineal. Motivo por el que se hizo una revisión de los programas desde 7mo a 1ro medio con el propósito de observar cómo es abordado este objeto matemático y la implicancia de los conocimientos previos que se requieren para el desarrollo de este objeto matemático.

Como se muestra en la tabla 2, en séptimo básico realizan actividades con ecuaciones lineales, lo que permite tener conocimiento en el trabajo de coordenadas  $X$  e  $Y$ , gráfica de pares ordenados y manejo de expresiones algebraicas. Estos se transforman en conocimientos previos para introducir la noción de función en octavo básico; en donde se trabaja con mayor profundidad el objeto matemático de este trabajo, es por esto por lo que se selecciona este nivel educativo.

Es importante destacar que se incita a utilizar un medio tecnológico o software educativo para profundizar el aprendizaje de la función lineal. Si bien de manera manual quizás aprendan más detalles, técnicas y métodos de gráfica específicamente, el software permite que se valore la exactitud y la facilidad de tener un plano ampliado. Por otra parte, se invita a trabajar con situaciones de la vida real, generando una contextualización que permita acercar la abstracción de la función a la realidad del estudiantado. Además, la función lineal es primordial para trabajar con la función afín.

En primero medio, se refuerza o complejiza la función lineal, siendo aquí donde se finaliza su estudio específico; ya que se siguen utilizando estos conocimientos en sistema de ecuaciones lineales. En tercero medio, ya se comienza con función cuadrática, por lo que no se incluye en la tabla de progresión que se presenta a continuación.

Tabla 2. Objetivos de aprendizaje propuestos por el MINEDUC (2012)

| Unidad              | 7° BÁSICO  | 8° BÁSICO  | 1° MEDIO  |
|---------------------|--|--|---|
| Álgebra y funciones | <p><b>OA9</b><br/>Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>ax + b = c</math>; <math>x/a = b</math>, <math>a, b, c \in \mathbb{N}</math>; <math>a \neq 0</math></li> <li><math>ax + b &lt; c</math>; <math>ax + b &gt; c</math>; <math>x/a &lt; b</math>; <math>x/a &gt; b</math>, <math>a, b, c \in \mathbb{N}</math>; <math>a \neq 0</math></li> </ul> | <p><b>OA7</b><br/>Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>utilizando tablas.</li> <li>usando metáforas de máquinas.</li> <li>estableciendo reglas entre <math>x</math> e <math>y</math>.</li> <li>representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo.</li> </ul> <p><b>OA8</b><br/>Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma: <math>ax = b</math>; <math>x/a = b</math>, <math>a \neq 0</math>; <math>ax + b = c</math>; <math>x/a + b = c</math>; <math>ax = b + cx</math>; <math>a(x+b) = c</math>; <math>ax + b = cx + d</math> (<math>a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}</math>)</p> <p><b>OA10</b><br/>Mostrar que comprenden la función afín:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>generalizándola como la suma de una constante con una función lineal.</li> <li>trasladando funciones lineales en el plano cartesiano.</li> <li>determinando el cambio constante de un intervalo a otro,</li> </ul> | <p><b>OA5</b><br/>Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma <math>f(x,y)=ax+by</math>; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>creando tablas de valores con <math>a, b</math> fijo y <math>x, y</math> variable.</li> <li>representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con software educativo.</li> <li>escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando <math>c</math> en la ecuación <math>ax + by=c</math>; <math>a, b, c \in \mathbb{Q}</math> (decimales hasta la décima).</li> </ul> |

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  | de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo. <ul style="list-style-type: none"> <li>• relacionándola con el interés simple</li> <li>• utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.</li> </ul> |  |
|--|--|--|--|

Ahora nos centraremos específicamente en el nivel de 8° básico, ya que nuestros futuros sujetos de estudio se encuentran situados en este curso y es aquí donde se comienza a trabajar funciones en la Unidad 2 denominada “álgebra y funciones” donde el concepto es introducido como un cambio lineal.

En esta unidad los/las estudiantes tienen un primer acercamiento que se efectúa por medio de tablas y nociones sencillas sobre lo que es un cambio; se debe utilizar la idea de proporcionalidad directa para comenzar con esta introducción. La noción de función y sus representaciones toma mayor fuerza en la habilidad de modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, considerando problemas abiertos que pueden ser resueltos por medio de una función. Los estudiantes trabajan con ecuaciones e inecuaciones; el ámbito numérico ha sido ampliado desde los números enteros, trabajado en 7mo, a los números racionales. Este avance se puede trabajar desde lo concreto, con las representaciones utilizadas en años anteriores, hasta llegar a la manipulación simbólica que implican las ecuaciones y las inecuaciones. También conocerán la función afín y su relación con la función lineal; por lo tanto, los conocimientos iniciales de esta unidad son un prerrequisito para el último objetivo de la unidad. La función afín se relaciona con el interés simple, para que los/las estudiantes lo relacionen con situaciones financieras conocidas desde su entorno como lo expone el MINEDUC (2012).

Luego de observar la progresión de aprendizaje con respecto al objeto matemático (función lineal) en el currículo de Chile y el trabajo que se realiza específicamente en 8 básico. Posteriormente, se presentarán algunos ejemplos de este objeto, y cómo es desarrollado en los libros de texto distribuidos por el MINEDUC.



### 1.6.1 Exploración de las de las funciones lineales en los libros de matemáticas de 8° básico

En el libro de matemáticas de 8°básico (MINEDUC, 2017) se presenta la unidad de Álgebra y Funciones; donde la unidad se divide en tres secciones: (a) expresiones algebraicas, (b) ecuaciones e inecuaciones y (c) función lineal y afín.

En la sección de función lineal y afín se presentan problemas que se describirán a continuación.

Imagen 1. Problemas que involucran reconocer proporcionalidad directa, (MINEDUC, 2017, p. 153)

**2** Identifica las tablas en las que las variables  $x$  e  $y$  son directamente proporcionales. (5 puntos)

a.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 |
| y | 3 | 4 | 5 |

b.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 |
| y | 2 | 4 | 6 |

El problema anterior puede resolverse de distintas formas según sean las habilidades desarrolladas por el/la estudiante, lo más importante aquí es identificar la relación que se establece con la variable  $Y$  para el caso de cada inciso, por ejemplo, a)  $Y = X + 2$ , mientras que para b)  $Y = 2X$ . En esta reflexión el/la estudiante debería ser capaz de identificar cuál de ellas es una proporcionalidad directa.

Por ejemplo, la imagen 2 presenta la transición entre idea de una proporcionalidad directa a la función, esto a partir de la metáfora de una máquina, donde se colocan ciertas materias primas iniciales, seguidas por un proceso y se finaliza con cierto producto, esta metáfora es ampliamente usada en diversos libros de texto para mostrar el comportamiento de una relación y posteriormente de una función (Espinoza-Vásquez, Zacaryan, Carrillo, 2018).

## ¿Cómo relacionar la proporcionalidad directa y la función lineal?

Para elaborar 0,6 L de jugo de frutas no gasificado se deben incorporar 48 g de azúcares.



### Situación 1 Relacionando variables

¿Qué relación existe entre la cantidad de kilogramos de azúcares que se deben agregar al proceso y el número de litros de jugo embotellado?

Para responder, primero constatamos que si se quiere aumentar el número de litros de jugo embotellado, entonces se debe aumentar la cantidad de kilogramos de azúcares que se incorporan al proceso.

¿Qué ocurre con la cantidad de azúcares que se deben incorporar si el número de litros de jugo embotellado disminuye?

Del problema anterior, en el libro de texto se les solicita reflexionar acerca del modelo matemático (proporcionalidad directa), con el fin de que el/la estudiante a partir de ahí pueda establecer una relación entre las variables, entendiendo que de manera muy natural puede surgir variación dentro de un contexto real, con esta propuesta los estudiantes pueden establecer relaciones entre variables dependientes e independientes (Reséndiz, 2006).

Imagen 3. Establecimiento de una relación entre proporcionalidad directa y las variables de una función (MINEDUC 2017, p. 155)

¿Qué modelo matemático se puede plantear para describir la relación que existe entre las variables **A** y **J** de la situación 1?

Primero recordemos las definiciones de **J** y **A**.  
**J**: número de litros de jugo embotellado.  
**A**: cantidad de kilogramos de azúcares que se deben incorporar.

**Paso 1** Define la constante de proporcionalidad de la relación existente entre **J** y **A** como el siguiente cociente constante.

$$\frac{A}{J} = 80$$

**Paso 2** Confirma que para conocer la cantidad de azúcares que hay que agregar al proceso basta multiplicar el número de litros de jugo que se desea embotellar por 80.

Escribe para completar los enunciados:

Para embotellar 0,3 L de jugo hay que agregar:  
 $80 \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$  g de azúcares

Para embotellar 0,9 L de jugo hay que agregar:  
 $80 \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$  g de azúcares

Para embotellar 90 L de jugo hay que agregar:  
 $80 \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$  g de azúcares

**Paso 3** Escribe la relación matemática existente entre las variables **A** y **J**.

**R:** El modelo matemático que relaciona las variables **A** y **J** se puede escribir como:  
 $A(J) = 80J$

¿Podrías haber definido la constante de proporcionalidad como el cociente  $\frac{J}{A}$ ? ¿En qué cambiaría el desarrollo realizado y esta respuesta?

Escribe para completar el enunciado:

El modelo matemático que acabo de obtener, que es \_\_\_\_\_, recibe el nombre de función lineal, en que **J** es la variable independiente y **A** es la variable dependiente.

Para finalizar, en la lección 24 (Imagen 4) de ese mismo libro de texto (MINEDUC, 2017) se presenta la función lineal, continúa usando la metáfora de máquina, y se incorpora el uso diagrama sagital con el fin de establecer condiciones entre una relación y una función a partir del uso del dominio y el contra dominio (recorrido), también se les pide graficar el modelo en un plano cartesiano con el fin de establecer una imagen visual de la función y que esta permita verificar las propiedades de linealidad.

A continuación, se describe el tipo de acciones que se solicita enseñar al estudiantado durante esta práctica.

- 1) Se presentan problemas que permiten analizar y representar la función lineal
- 2) Se incorporan los conceptos de dominio y recorrido
- 3) Modelación de la expresión algebraica
- 4) Se incorpora el concepto de pendiente: “el concepto  $m$  de una función lineal  $f(x)=mx$  coincide numéricamente con la pendiente de la recta representada en el plano cartesiano”
- 5) Se pide graficar las funciones y se realizan preguntas como: ¿Cómo crees que será el gráfico de una función con pendiente negativa?, ¿crecerá o decrecerá en el sentido positivo del eje  $x$ ?
- 6) Problemas de análisis tabular

Imagen 4. Lección 24; Integración de diversas representaciones Libro Matemática (MINEDUC, 2017, p.161)

1. Determina la función lineal asociada a cada tabla de valores.

a.

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| x | 5  | 6  | 7  | 8  |
| y | 15 | 18 | 21 | 24 |

b.

|   |   |     |     |     |
|---|---|-----|-----|-----|
| x | 2 | 9   | 15  | 19  |
| y | 1 | 4,5 | 7,5 | 9,5 |

c.

|   |     |     |     |      |
|---|-----|-----|-----|------|
| x | 0,6 | 0,8 | 1,2 | 2,3  |
| y | 4,8 | 6,4 | 9,6 | 18,4 |

2. Modela las situaciones mediante una función lineal. Usa las variables que se indican.

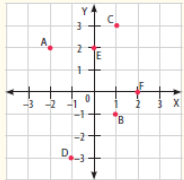
a. Un automóvil gasta 8 litros de bencina ( $b$ ) en recorrer 100 kilómetros ( $d$ ).

b. Una persona necesita 16 duraznos ( $d$ ) y 2 kg de azúcar ( $a$ ) para preparar una mermelada.

c. El nivel de agua ( $h$ ) de un estanque es de 19 cm para un tiempo ( $t$ ) de 60 minutos.

d. En un supermercado, una persona que compra 0,5 kg de queso fresco ( $q$ ) debe pagar \$1500 ( $p$ ).

3. Determina las coordenadas de los puntos representados en el plano cartesiano.



4. Representa los puntos en un plano cartesiano.

a. A(2, 4)

5. Determina la expresión que representa a la función descrita.

La función  $f$  asigna a un número su quinta parte:  
 $f(x) = \frac{x}{5}$

a. La función  $g$  asigna a un número su triple.  
 b. La función  $h$  asigna a un número su mitad.  
 c. La función  $i$  asigna a un número su inverso aditivo.  
 d. La función  $j$  relaciona un número con el doble de su inverso aditivo.

6. Completa con los números que ingresan o salen en cada máquina, según la definición dada.


función  $f$   
 Entrada  $-4, -1, 0, 3$  →  $-6x$  → Salida  $24, 6, 0, -18$

a. Entrada  → función  $g$   $4,5x$  → Salida  $-45, -27, -13,5; 40,5$

b. Entrada  → función  $g$   $-0,25x$  → Salida  $2; 0,75; -0,5; -1,75$

c. Entrada  $-10, -5, 4, 9$  → función  $g$   $-\frac{2}{5}x$  → Salida

7. Determina la función representada. Además, escribe su dominio y su recorrido.



Función:  $h(x) = -2x$   
 Dom =  $\{-2, -1, 0, 3\}$   
 Rec =  $\{-6, 0, 2, 4\}$

A partir de lo expuesto en la sección 24, se identifica la intención de estimular el tránsito entre las diversas representaciones. A partir de esta revisión en los libros de texto, pueden surgirnos tres interrogantes ingenuas, la primera en el terreno epistémico ¿Qué relaciones holísticas se privilegian de la función lineal en el currículo chileno?, la segunda en lo cognitivo ¿Qué errores y/o dificultades enfrentan los/las estudiantes al resolver problemas

sobre función lineal? y la tercera con base en lo sociomatemático ¿Cómo se establecen acuerdos para que los/las estudiantes construyan al objeto matemático función lineal? Para clarificar estos cuestionamientos, es que, en el siguiente apartado, se presentará una reflexión con base en la investigación realizada desde otros trabajos, los cuales nos aportarán un nicho a los desafíos que aún se presentan en el contexto educativo, que es desde donde se inscribe este proyecto.

### **1.7 La función lineal en el currículo chileno, un acercamiento desde la investigación**

Para explorar el tipo de significados que el currículo chileno desarrolla sobre la función lineal, en breve, presentaremos algunos de los principales resultados de un trabajo que se tituló: “Significados pretendidos por el currículum chileno sobre la noción de función” es un trabajo de tesis para optar al grado de magister (Parra-Urrea; 2015).

La aportación de este trabajo es que Parra-Urrea (2015) se enfoca en los resultados del análisis del currículum realizado en el nivel de octavo básico, que es el grado y el currículo que usaremos para el desarrollo de este trabajo. Para este análisis, el autor se apoya en el programa de estudio y los libros del programa de octavo básico, donde se presenta una visualización de los significados pretendidos y realiza una clasificación de los problemas propuestos de la noción de función, que dan como resultado las configuraciones epistémicas, que serán claves para el diseño de las actividades de esta investigación. El trabajo hace uso del EOS y de las herramientas que brinda este, en particular, de la configuración epistémica la cual brinda una deconstrucción de los significados asociados a la función a partir de explorar un conjunto de entidades intervinientes y emergentes en actividades de libros de texto (Reina, Wilhelmi y Lasa, 2012).

Enseguida se presenta un resumen breve de la configuración epistémica que Parra-Urrea (2015) identifica al analizar el currículo chileno.

#### **1. Situaciones/problemas**

- Problemas para ejemplificar definiciones introducidas
- Problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas
- Problemas contextualizados para reforzar los conocimientos ‘adquiridos’

2. Los elementos lingüísticos identificados en las definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones/problema.

- Verbal, tabular, simbólico y, en menor medida, el gráfico.

3. Conceptos/definiciones de función:

- Valor de entrada, valor de salida, dominio, recorrido, variable dependiente, variable independiente, tabla y par ordenado.

4. Propiedades/proposiciones

- Dichas proposiciones se establecen en el sentido de describir la regla de correspondencia, sea por medio de las relaciones dentro de las tablas o por medio de descripciones verbales.
- Otro tipo de proposiciones hacen referencia a explicaciones adicionales a la definición dada, o bien a justificaciones/argumentos de los procedimientos realizados.

A continuación, se presenta la tabla 3, que evidencia el tránsito entre un tipo de representación a otro, en primer lugar, se muestra el tránsito de lo verbal a lo simbólico para después ir de lo simbólico a lo tabular (S), luego muestra el tránsito de lo simbólico a lo tabular y de lo tabular a la gráfica de la función (T).

Tabla 3. Representaciones previas y emergentes en los problemas de 8° Básico (Parra Urrea, 2015, p. 82).

| Representaciones para F(x) |           |        |         |           |         |         |
|----------------------------|-----------|--------|---------|-----------|---------|---------|
| Emergentes                 |           | F(x)   |         |           |         |         |
|                            |           | Verbal | Gráfica | Simbólica | Tabular | Icónica |
| Previas                    |           | Verbal | Gráfica | Simbólica | Tabular | Icónica |
| F(x)                       | Verbal    |        |         | *         | S *     |         |
|                            | Gráfica   |        |         |           |         |         |
|                            | Simbólica |        | T *     |           | *       |         |
|                            | Tabular   |        |         |           |         |         |
|                            | Icónica   |        |         |           |         |         |

Finalmente se concluye lo siguiente, en cuanto a los significados pretendidos por el currículum chileno sobre la noción de función (Parra Urrea, 2015):

- 1) La noción de función es introducida como una relación entre variables.
- 2) La función como expresión analítica ya que generalmente la función es presentada como una expresión algebraica.

El trabajo desarrollado por Parra-Urrea (2015) y el análisis breve desarrollado sobre el libro de texto nos lleva a reflexionar ¿Cuál es el nivel de desarrollo sobre la función lineal que se incentiva en este grado escolar? Por ello, se hará un breve recorrido por algunos pasajes históricos en la construcción de este concepto, pero aclaramos que nuestra intención no es polemizar y/o profundizar, solo comparar el desarrollo histórico versus el desarrollo propuesto por el Ministerio de Educación de Chile; la intención es identificar situaciones que nos aporten para el desarrollo de una secuencia de actividades.

### **1.7.1 La función lineal en recorrido breve en la historia de las matemáticas**

Este rastreo se hace siguiendo la idea de Youschkevitch (1976) quien distingue varias etapas principales del desarrollo del concepto de función hasta la mitad del siglo XIX.

Por ello expondremos de manera sucinta las tres etapas que se consideran cruciales para el desarrollo de la noción de función, que son: La edad antigua, edad media y la edad moderna. Durante la Edad antigua, se encuentran clasificadas las matemáticas desarrolladas por antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China, India, Grecia. Dentro de los principales aportes en este periodo a la noción de función, es que esta se encuentra ligada a situaciones de cambio y variación asociadas inicialmente a la observación de los astros, es decir, en casos particulares. Por ejemplo, en la matemática Babilónica (2000 a. C. – 600 a. C.) se destacan diversos trabajos realizados en los cuales se registraban datos referentes a los períodos de divisibilidad de un planeta y al ángulo de éste con respecto al Sol (Bell, 1997). Por ejemplo, dentro de la cultura griega se utiliza la herramienta de la proporcionalidad logrando describir cuantitativamente la relación establecida entre dos magnitudes homogéneas y específicamente los aportes de Ptolomeo, quien por medio del cómputo de cuerdas de un círculo empieza a bosquejar lo que hoy conocemos como funciones trigonométricas. En este período se utilizan tres formas diferentes de representación: las

tablas, la descripción verbal o retórica y el lenguaje sincopado (se utilizan ciertas abreviaciones) (Boyer, 1987).

Lo que, si se ha logrado concluir a partir de investigaciones dentro de la historia de las matemáticas antiguas, es que estas culturas tenían como principal limitante la representación; por ello, el pensamiento matemático de la antigüedad no creó una noción general de cantidad variable o de una función (Youschkevitch, 1976, p. 40).

En la edad media, el interés estuvo centrado en el estudio cualitativo del cambio y el movimiento. En este periodo, surgen conceptos como el de cantidad variable, velocidad instantánea y aceleración. Se destaca el trabajo de Nicolás Oresme, quien creó una representación gráfica y geométrica para representar las situaciones de cambio y específicamente las relaciones existentes entre las magnitudes físicas involucradas, apareciendo de esta manera una primera aproximación al concepto de función como una relación de dependencia (Boyer, 1987).

Se destaca los trabajos experimentales de Galileo a partir de los cuales se establecen leyes entre magnitudes apoyadas en la idea de proporciones (Bell, 1997). Dentro de las dificultades en este periodo histórico, se encuentra que los matemáticos de esta época consideraban las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas como algo diferente a las igualdades estrictamente numéricas. Existía un nivel desproporcionado, entre el nivel de abstracción de las teorías y la falta de un instrumento matemático para su desarrollo. Continuaba también la disociación entre número y magnitud.

En la época moderna, se destacan los estudios de Descartes, quien con sus aportes a la geometría analítica permitió avanzar hacia la concepción de función como una relación de dependencia. Así mismo, sobresalen los trabajos de Newton, Leibniz y Euler quienes realizaron aportes a la simbolización del álgebra y dieron las primeras definiciones de función (Boyer, 1987). En este periodo, surgen algunas de las definiciones de función que aún se usan hoy en día, enseguida se presenta la tabla 4, con el condensado de estas.

*Tabla 4. Algunas definiciones de función en la historia (Boyer, 1987)*

| Año  | Autor  | Definición   |
|------|--------|--|
| 1827 | Cauchy | Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede |



|      |             |  |
|------|-------------|--|
|      |             | deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable.      |
| 1834 | Lobachevsky | El concepto general exige llamar función de $x$ a un número, el cual se da para cada $x$ y paulatinamente varía junto con $x$ . El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida. |
| 1837 | Dirichlet   | Si una variable $y$ está relacionada con otra variable $x$ de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a $x$ hay una regla según la cual queda determinando un único valor de $y$ , entonces se dice que $y$ es una función de la variable independiente $x$ .           |
| 1858 | Riemann     | Se dirá que $y$ es función de $x$ si a todo valor de $x$ corresponde un valor bien determinado de $y$ cualquiera que sea la forma de la relación que une a $x$ y a $y$ .   |

En breve, se presentará un barrido de algunas de las dificultades encontradas cuando se trabaja con función lineal en el aula matemática.

### 1.8 Reportes de investigación sobre la función lineal

La noción de función es un objeto matemático muy explorado debido a su importancia en el desarrollo académico del estudiante, ya que es considerado un concepto fundamental en la matemática, es la base para desarrollar temas matemáticos avanzados y permite modelar fenómenos físicos, químicos, entre otros.

Por otro lado, este concepto causa muchas dificultades para su aprendizaje satisfactorio y la razón de estas dificultades parece centrarse en su complejidad y generalidad, ya que presenta

muchas facetas y una multiplicidad de representaciones que contiene además una variedad de conceptos asociados que manifiestan diferentes niveles de abstracción.

En el aspecto curricular, el estudio de la función está presente en todos los niveles de la enseñanza, desde la básica hasta la superior, estas características hacen que este concepto sea muy interesante para la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

A continuación, se presentan algunas investigaciones que exponen la complejidad de la enseñanza y aprendizaje de la noción lineal.

La búsqueda se enfocó en investigaciones que se enmarcan en la enseñanza-aprendizaje de la función lineal, donde el uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza de las funciones se presenta como una constante que se repite a modo de propuesta para facilitar el desarrollo de este objeto matemático. Esta revisión estará centrada en las actas de los simposios de la Sociedad española de investigación en educación matemática (SEIEM).

En la indagación, se ha encontrado que el tema de las funciones ha estado presente en los simposios de la SEIEM, sobre todo en los últimos 6 años, donde se han presentado estudios sobre el pensamiento funcional, las relaciones funcionales y el uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza de las funciones, la geometría y el pensamiento matemático.

Entre las investigaciones encontradas destacan:

- 1) Una propuesta didáctica que incorpora el uso de la herramienta tecnológica, GeoGebra, para la representación gráfica de la función cuadrática fomentando el pensamiento matemático avanzado. Participaron 23 estudiantes de 3º ESO pertenecientes al Instituto de Innovación Tecnológica Calderón de la Barca de Pinto (Madrid). (Arnal, Baeza, y Claros, 2018).
- 2) Estudio centrado en las estructuras que identifican los estudiantes de 2º de primaria la generalización y el significado que les atribuyen a las letras mediante un problema de generalización, contextualizado que involucra la función  $f(x)=x+3$  (Torres, Cañadas, y Moreno, 2018).
- 3) Una investigación con estudiantes de primaria, centrado en las estructuras del patrón, la generalización y la relación estructuras-generalización. Se analizan de forma comparativa las respuestas de los estudiantes a varias cuestiones sobre un problema que involucra una función lineal (Pinto y Cañadas, 2017).

- 4) Estudio que aborda el pensamiento funcional en estudiantes de primaria, donde se analizan las producciones escritas de los estudiantes, proporcionando evidencias de diversas vinculaciones entre las variables de la relación funcional planteada en la tarea, así como distintas representaciones para explicarlas. (Bastías y Moreno, 2016).
- 5) Estudio Cualitativo de la implementación de un modelo de enseñanza y aprendizaje diseñado para trabajar la función cuadrática con tabletas. Los resultados muestran como el análisis y los conocimientos previos son claves en el proceso de modelización (Ortega y Puig, 2015).

La revisión de estos trabajos permite evidenciar que el estudio del objeto matemático de función ha estado presente en las investigaciones realizadas en otros países, siendo un tema de interés para la comunidad educativa que principalmente se enfoca en dos dimensiones de exploración: 1) el uso de tecnología y 2) el análisis de algunos procesos cognitivos específicos. Algunas investigaciones señalan en este sentido, que en los últimos años se ha reflexionado en las líneas futuras que se trazan emergiendo aquellas que se sitúan al análisis del currículum, la tecnología, la programación, el lenguaje; entre otras (Sutherland y Rojano, 2012).

## **1.9 Problemática**

Actualmente existe una serie de programas computacionales que han sido desarrollados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, aportando nuevos escenarios de trabajo experimental. Los resultados de estudios empíricos sobre el uso de la programación arrojan resultados importantes en el desarrollo de ideas como variable y variación (Hoyles y Sutherland, 1992), de aquí surge la propuesta de implementar el uso del lenguaje de la programación de Scratch para el desarrollo de la función lineal en estudiantes.

Por otro lado, el uso de la tecnología transforma el estudio de la matemática a partir de todo lo nuevo que aparece al incorporarla en el aula de clases, surgiendo así nuevas dificultades que debe atravesar el profesor o la profesora (Artigue, 2011), el uso de la tecnología produce cambios en las relaciones, ya que su inserción puede llegar a ser compleja en la integración al trabajo docente. A partir de esto, se piensa que es necesario implementar normas que

ayuden a la integración de estas herramientas en el aula de clases, normas que deben estar dirigidas a los/las futuros docentes.

Así mismo, con la integración de la tecnología en el aula de clases surgen nuevos desafíos, que deben ser estudiados y analizados para luego entregar propuestas que puedan ser generalizadas. Estudios que tomen en cuenta todo lo que está inmerso en el uso de las tecnologías en el aula de clase como los cambios que se producen en el profesor, en el estudiante etc.

Considerando lo antes expuesto y teniendo en cuenta que la dimensión normativa que se genera en estos nuevos espacios de trabajo es un elemento que identificamos poco explorado; este estudio se apoyará en el Enfoque Ontosemiótico para explorar las formas en que se modifican estos espacios de trabajo, es decir, cómo las normas de interacción regulan el aprendizaje de la función lineal cuando se usa un software en un taller extracurricular (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009). Enseguida se expondrán los principios teóricos que regulan nuestro proyecto.

### 2. MARCO TEÓRICO

#### Introducción

En el capítulo 1 se plantearon algunos desafíos en el proceso de interacción, en esta breve introducción desarrollaremos un resumen de algunos principios y resultados investigativos que apoyarán al desarrollo de este trabajo.

Las diferentes tradiciones investigativas en educación matemática coinciden en que metodológicamente:

- ❖ las normas se identifican determinando regularidades en los patrones de interacciones sociales (Cobb y Yackel, 1996).
- ❖ Los análisis de estas ofrecen una descripción del aula, de su estructura y de las formas de interacción presentes, es decir, de la microcultura (Lampert, 1990).
- ❖ Las componentes de una actividad matemática en donde se sitúa el estudio de estas son: los problemas, las soluciones, las explicaciones y las justificaciones (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009)
- ❖ Los tipos de resultados empíricos que se entregan se han dedicado a caracterizar la microcultura del aula de matemáticas (Cobb et al., 1992).

Así es como la visión que ofrecen algunas de las tradiciones investigativas en general, suelen enfocarse en los/las estudiantes o el/la profesor/a, o bien en la interacción entre estos. No obstante, el asumimos en la cuarta tradición investigativa a la que denominamos integración, tiene por objetivo tener un abanico más amplio para poder observar estas interacciones. Por lo que enseguida, se exponen los aspectos de este marco que nos permitirán observar las interacciones.

## 2.1 Sobre el Enfoque Ontosemiótico

El enfoque Ontosemiótico es un marco teórico que integra diversas nociones teóricas sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática (Godino, Batanero y Font, 2017). Este permite comparar y articular las principales teorías existentes del conocimiento matemático, otorgando una mirada holística de los procesos que intervienen en la enseñanza y aprendizaje de la matemática: proponiendo cinco niveles de análisis para el proceso de instrucción (Font, Planas y Godino, 2010), a saber: 1. Análisis de tipos de problemas y sistema de prácticas. 2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos. 3. Análisis de trayectorias e interacciones didácticas. 4. Identificación del sistema de normas y metanormas 5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Dentro de las dimensiones que ha explorado y potenciado este enfoque, se encuentran los procesos de estudio de la matemática, los cuales conciben que están regulados y condicionados por un sistema de normas, las que se hacen presentes en la dimensión normativa.

Estos procesos normativos se encuentran inscritos dentro de un sistema de prácticas, las cuales son entendidas como *“toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartidas en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas”* (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

Es por lo que una práctica puede ser interpretada, en términos de acción reflexiva, situada, intencional y mediada por recursos lingüísticos y materiales. Para nuestro propósito, concebimos interesante situar este sistema de prácticas en la construcción de la noción de función lineal en estudiantes de 8vo. básico, dentro de un taller extracurricular que será mediado por el uso de tecnología (Scratch), puesto que el estudio de las matemáticas tiene lugar bajo la dirección de un docente y en interacción con otros estudiantes; para autores como Pino-Fan, Assis y Godino (2015) el análisis debiera progresar, desde la situación-problema y las prácticas matemáticas necesarias para su resolución, a las configuraciones de

objetos y procesos matemáticos, y posteriormente al estudio de las interacciones entre docente y estudiante.

En general, en este sistema de prácticas nos interesa observar epistémicamente ¿Qué representa la función lineal para ese grupo en particular de estudiantes? Y de manera ontológica ¿Cómo construyen dicho objeto matemático los estudiantes? En esta última, suponemos que nos enfrentaremos a una serie de contextos formales e informales que median la práctica y la construcción de la noción de la función lineal, por ello consideramos imperativo atender prontamente las herramientas teóricas y metodológicas que este marco de análisis nos provee para reconocer las interacciones, con base en esto recurriremos a estudiar los procesos de instrucción y posteriormente las normas asociadas a estos, así como algunos de los resultados más recientes de los mismos.

## **2.2 Procesos de Instrucción matemática**

El aula de matemáticas es concebida como una microcultura, en ella el proceso de instrucción comprende distintas dimensiones interconectadas: 1. Epistémica; (significados institucionales), se distribuye a lo largo del tiempo de enseñanza de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos), 2. Cognitiva; en la que pueden estar presentes el docente (funciones del profesor) y el discente (funciones de los estudiantes) quienes desarrollan los significados personales (aprendizajes), 3. Mediacional; (recursos materiales) aquí se explora la distribución de los recursos tecnológicos utilizados y la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos, 4. Interaccional; con secuencia de interacciones entre el/la profesor/a y los/las estudiantes, orientadas a la fijación y negociación de significados, 5. Afectiva; (Actitudes, emociones, sentimientos, motivaciones y afectos) la que tiene una distribución temporal de los estados afectivos y 6. Ecológica; que corresponde a un sistema de relaciones con el entorno social, político, económico que soporta y condiciona el proceso de estudio. Cada una de estas dimensiones se puede modelizar como un proceso de enseñanza aprendizaje.

Las dimensiones expresadas anteriormente, tienen asociadas una serie de elementos secuenciados temporalmente (tareas, acciones, etc.) y que son los que permiten el proceso de

instrucción matemática; es decir, en cada proceso de instrucción de un mismo objeto se ponen a disposición los diferentes elementos del significado pretendido de este (Godino, 2002).

En cada proceso instruccional, de acuerdo con Godino, Contreras y Font (2006), con cada experiencia particular de enseñanza de un contenido matemático se producen una serie de estados posibles y no otros. En otras palabras, las dimensiones asociadas al proceso de instrucción producen una trayectoria muestral de este, el cual describe una secuencia particular de funciones o componentes que se sitúan a lo largo del tiempo. Distinguiremos seis tipos de procesos y sus correspondientes trayectorias muestrales: la Trayectoria epistémica, la Trayectoria docente, las Trayectorias discentes, la Trayectoria mediacional, las Trayectorias cognitivas y las Trayectorias emocionales. Al estudiar las normas presentes en el proceso de instrucción de la función lineal, más de una de estas trayectorias serán desarrolladas, aunque el énfasis estará situado básicamente en tres de ellas que describiremos a continuación Godino, Contreras y Font (2006, p, 6).

- a) Trayectoria docente: distribución de las tareas/acciones docentes a lo largo del proceso de instrucción.
- b) Trayectorias discentes: distribución de las acciones desempeñadas por /las estudiantes (una para cada estudiante).
- c) Trayectoria mediacional: representa la distribución de los recursos tecnológicos utilizados (libros, apuntes, manipulativos, software, etc.).

### **2.3 Dimensión Normativa**

Con el fin de poder explorar el proceso de instrucción es necesario reconocer y comprender las normas (sistema de normas) asociadas a este y que le permiten regular este proceso. Según Godino et al. (2009)

La dimensión normativa, o sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, que generaliza las nociones de contrato didáctico (Brousseau, 1990) y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es uno de los factores explicativo de los fenómenos didácticos. (p. 2)



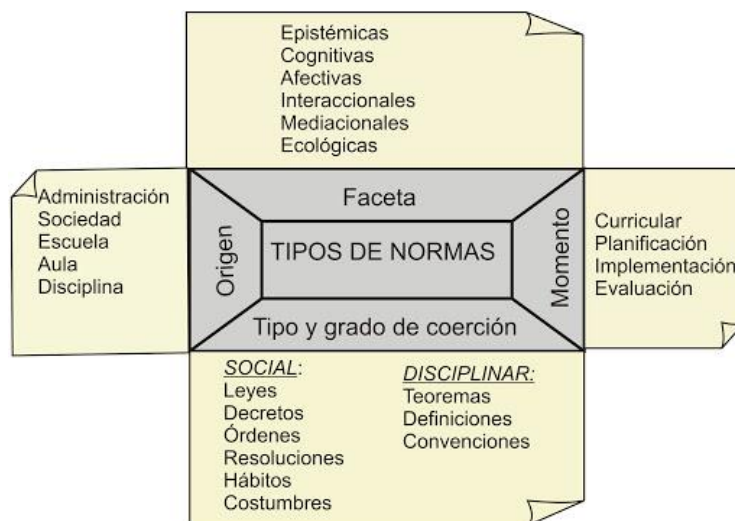
En los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas intervienen normas, acuerdos, hábitos, costumbres y tradiciones, estos elementos son abordados a través de la dimensión normativa (D'Amore, Font, y Godino, 2007).

El trabajo desarrollado por Godino et al. (2009) respecto a normas, se sustenta en las siguientes premisas:

- Un proceso de instrucción solo se comprende en función a las reglas del juego del lenguaje propuesto por sus participantes. En otras palabras, el sistema de normas regula el proceso de instrucción y que dan respuesta a «¿Qué ha ocurrido aquí y por qué?».
- La Didáctica de las Matemáticas debe dar las condiciones para realizar una meta-acción, es decir una valoración de las acciones del proceso de instrucción para responder: «¿Sobre qué aspectos se puede incidir para la mejora de los procesos de instrucción y cognición en matemáticas?».
- El tercer supuesto, del que comenzamos, es que por criterio de idoneidad se debe entender a una regla de corrección que establece ¿cómo debería realizarse un proceso de instrucción?
- Las nociones como «contrato didáctico», «normas sociales y sociomatemáticas», se usan para referirse al conjunto de reglas del «juego de lenguaje», en el que participan profesores/as y estudiantes cuando intervienen en un proceso de cognición e instrucción.

Las dimensiones propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) para la dimensión normativa son: epistémica, cognitiva, mediacional, instruccional, afectiva y ecológica, como se presentan en la imagen 5.

Imagen 5. Dimensión normativa y sus tipos de normas (Godino, Batanero, & Font, 2017, p.14)



La imagen 5, tiene como propósito mostrar los tipos de norma y sus relaciones, las que se desarrollarán a continuación. En la dimensión normativa, se identifican diferentes tipos de normas, que se clasifican por faceta, momento, origen y tipo de grado de coerción. Este trabajo estará situado en los tipos de normas que se exponen en la faceta.

### 2.3.1 Las facetas normativas

En el enfoque Ontosemiótico, las facetas normativas regulan el proceso de estudio de la matemática en un contexto institucional determinado (Godino, Font, Wilhelmi, y De Castro, 2008), abordando las interacciones entre el contenido matemático y factores psicológicos, pedagógicos, tecnológicos, sociológicos y afectivos.

### Normas Epistémicas

Godino, Font, Wilhelmi y De Castro (2009) las definen como: *“un conjunto de normas que determinan la actividad matemática que es posible desarrollar en la institución”* (p. 65) es decir, son aquellas normas que determinan las configuraciones epistémicas y las prácticas matemáticas, dichas configuraciones posibilitan la regulación de los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje y las representaciones que se utilizan en

dichos contenidos. Las normas epistémicas esencialmente son componentes de tales configuraciones (lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, etc.) que regulan la práctica matemática en un contexto específico.

En términos del EOS, estas normas establecen las configuraciones epistémicas y las prácticas matemáticas que dichas configuraciones posibilitan. Esta faceta aborda aspectos relacionados con el conocimiento del profesor, que ayudan a analizar los conocimientos del contenido matemático utilizado en el proceso instruccional.

El EOS considera necesario contemplar una ontología formada por: lenguaje, situaciones-problemas, conceptos, procedimientos, proposiciones, propiedades y argumentos. Estos elementos forman las configuraciones epistémicas, “herramienta que nos permite ver la estructura de los objetos que posibilitan la práctica matemática” (D'Amore, Font, y Godino, 2007).

### **Normas Cognitivas**

Para la faceta cognitiva, el EOS señala que la enseñanza supone la participación del estudiante en las prácticas, que sostiene los significados institucionales y el aprendizaje para que finalmente el/la estudiante se apropie de dichos significados (Godino, Font, Wilhelmi, & De Castro, 2008). Se refiere al conjunto de normas relacionadas con ¿cómo aprenden los sujetos? y ¿cómo se les debe enseñar?, en esta faceta se busca el análisis de los significados personales que surgen del proceso de aprendizaje.

El proceso de enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas, que soporta significados institucionales y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación de aprendizajes por parte del estudiante.

### **Normas Interaccionales**

Serán aquellas que organizan la interacción entre los sujetos (Docente y discente), el medio y la herramienta. En particular, Godino, Font, Wilhelmi, y De Castro (2008) las definen como el sistema que regula las interacciones entre personas implicadas en procesos de estudio matemático generando reglas y nuevas pautas. Estas normas están sujetas a reglas hábitos, tradiciones, compromisos y convenios. El objetivo fundamental de estas son interacciones

didácticas, es que logren el aprendizaje idóneo de los/las estudiantes. Recordemos que para el EOS el aprendizaje es concebido como la apropiación de significados que por medio de participación de la comunidad de prácticas que identifican los conflictos semióticos, propone los medios adecuados para resolverlos.

### **Normas Mediacionales**

Conjunto de normas que regulan el uso de medios tecnológicos y temporales, algunos de estos medios tienen un uso restringido en el aula debido al contrato mediacional. Esta faceta también incorpora las normas que regulan la gestión del tiempo de estudio y fijan los usos de los espacios en un centro educativo (Godino, Font, Wilhelmi, y De Castro, 2008).

Hoy el proceso de enseñanza-aprendizaje se apoya en el uso de medios técnicos (libros, ordenadores...). El uso de los diferentes medios o recursos que participan en el aula, se encuentran secundados por una serie de reglas de uso que condicionan los procesos de estudio. Los diferentes currículos escolares hacen énfasis a generar aulas equipadas con medios (electrónicos, físicos, de diferente índole) que permitan el mejor desarrollo de las clases.

### **Normas Afectivas**

Conjunto de normas que regulan el entorno afectivo y emocional en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta faceta se presentan las normas que regulan la motivación, presentación contenidos atractivos y fomentan la autoestima de los/las estudiantes. El alumno o la alumna asume la responsabilidad y compromiso ético con el estudio (Godino, Font, Wilhelmi, y De Castro, 2008). A partir de esto, una regla afectiva será, pues, que el/la docente debe buscar o inventar situaciones matemáticas ricas, que pertenezcan al campo de intereses a corto y medio plazo de los/las estudiantes, con ello se puede tener un estudiantado motivado que posea una actitud positiva al proceso de enseñanza-aprendizaje. Es decir, la idea aquí es generar ecosistemas áulicos atractivos para los/las estudiantes.

## **Normas Ecológicas**

Estas normas se refieren a aspectos del entorno social, político, económico, etc. que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta faceta se presentan normas que regulan el uso de las herramientas tecnológicas o que están relacionadas con proyectos de innovación (Godino, Font, Wilhelmi, y De Castro, 2008).

A través de estas normas se realizará el análisis que intenta abarcar la instrucción matemática de conocimientos y el aprendizaje de los/las estudiantes, los factores afectivos y emocionales, interacciones interpersonales, las reglas sobre el uso de herramientas tecnológicas, además de los aspectos sociales, políticos y económicos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

## **Herramientas nuevas al sistema de normas**

Algunos nuevos aportes al sistema de normas desde el EOS, los encontramos en el siguiente trabajo: “Sistema de normas que influyen en procesos de argumentación: un curso de geometría del espacio como escenario de investigación” de Molina (2019) que, si bien es cierto que este estudio no aborda el mismo objeto matemático relacionado al presente trabajo, se desarrolla una propuesta para hacer más operativas estas facetas a partir de una serie de cuestionamientos propuestos para cada fase, como se puede visualizar en la siguiente imagen.

Imagen 6. Tipologías de normas (Molina, 2019)

|                    | Norma [N]   | Metanorma [M]  |
|--------------------|---|--|
| Epistémica [Fe]    | a. ¿Qué matemáticas aprender?<br>Definición [D], Procedimiento [P];<br>Proposición [P]; Lenguaje [L].   | Creencias, concepciones, reflexiones sobre objetos de la actividad (Normas sociomatemáticas)   |
| Cognitiva [Fc]     | a. ¿Cómo aprenden los sujetos? ( <i>e.g.</i> participando resolución de problemas)<br>b. ¿Cómo se les debe enseñar? ( <i>e.g.</i> , Mediante resolución de problemas) | a. Creencias, concepciones, reflexiones sobre cómo aprendo ( <i>e.g.</i> para resolver un problema debo...)<br>b. Expectativas sobre las responsabilidades del profesor ( <i>e.g.</i> , el profesor debe resolver dudas o darme una evaluación del trabajo realizado). |
| Afectiva [Fa]      | a. ¿Cómo motivar a los estudiantes?<br>b. ¿Qué ambiente favorece que los estudiantes asuman su responsabilidad?<br>c. ¿Qué tipo de tareas se propone?                 |  |
| Interaccional [Fi] | a. ¿Cómo interaccionan los individuos y por medio de qué lenguajes? (Normas sociales)   | Concepciones, creencias, reflexiones sobre el proceso de instrucción que motivan la elección de recursos y modos de interacción.   |
| Mediacional [Fm]   | a. ¿Qué medios se pueden utilizar?<br>b. ¿Cuándo?<br>c. ¿Para qué?<br>d. ¿De qué manera?  |  |
| Ecológica [Fec]    | a. ¿Cómo el entorno social, político y económico influye sobre el tipo de prácticas matemáticas?  |  |

En este estudio se presenta el desarrollo de las facetas normativas del enfoque Ontosemiótico (EOS), con el fin de realizar el análisis de las normas que condicionan el proceso de aprendizaje de la función lineal y así identificar los significados emergentes en este proceso.

## 2.4 Aproximación instrumental

Al estar este trabajo situado en el uso de la tecnología, consideramos importante hacer un barrido rápido a algunas construcciones de la teoría de la aproximación instrumental debido a su coherencia y pertinencia en la tarea de comprender las complejas relaciones entre los sujetos y las tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

La idea central de la aproximación instrumental (AI) gira entorno a la conceptualización del instrumento, la actividad instrumentada del sujeto, la mediación instrumental, la génesis instrumental y los sistemas de instrumentos (Rabardel, 1999).

Una noción importante que se destaca del enfoque instrumental es su naturaleza antropocéntrica, reflejada en su conceptualización del objeto antropotécnico, donde fundamentalmente se promueve un punto de vista centrado en los sujetos, donde estos son los llamados a usar, cooperar y controlar el funcionamiento de los objetos e instrumentos.

Rabardel hace un acercamiento desde la perspectiva instrumental en el campo de la Didáctica de las Matemáticas estudiando la influencia profunda de los instrumentos en el aprendizaje de las Matemáticas. Los artefactos, las herramientas y los signos por ser desarrollos de esta historia social y cultural, presentan una fuerte influencia en el sujeto, por tanto, constituyen formas que componen y median la construcción del conocimiento en el sujeto. Al respecto Rabardel (1999) considera que:

“La Mediación Instrumental aparece en las propuestas de Vigotsky como un concepto central para pensar y analizar las modalidades por las cuales los instrumentos influyen la construcción del saber.” (p. 2)

Según Rabardel (1999) las génesis hacen parte integral del proceso de aprendizaje de las matemáticas, por lo que se deben considerar en el diseño y puesta en escena de las secuencias didácticas.

Así mismo Trouche (2002) indica que, para construir la noción didáctica de orquestación instrumental, esta debe estar conformada por los siguientes cuatro elementos:

- 1) Un conjunto de individuos: generalmente encarnados por un/a profesor/a (o un equipo de profesores/as) y un grupo de estudiantes.
- 2) Un conjunto de objetivos: relacionados con la intencionalidad de la clase, el tipo de tareas a desarrollar y las condiciones bajo las cuales se desarrolla el trabajo. Dichos objetivos se encuentran mediados por las necesidades de tipo curricular a nivel institucional (e incluso nacional).
- 3) Una configuración didáctica: esta categoría engloba la estructura general del dispositivo. Es una configuración flexible de acuerdo con el diseño de las secuencias didácticas que se pretenden movilizar en el contexto de la clase.
- 4) Un conjunto de modos de explotación de dicha configuración: en el sentido que lo concibe Chevallard (1992), como una coordinación entre el hardware, el software didáctico y un sistema de explotación didáctico.

## **2.5 Pregunta y objetivos de investigación**

Luego de toda esta revisión sobre resultados de investigación y referentes teóricos para ubicar nuestra problemática, ha quedado evidenciada la importancia que tiene presentar las formas de interacción que se trabajan en la sala de clases e identificar cómo estas afectan al proceso de enseñanza-aprendizaje. Lo anteriormente nombrado, tiene como fin hacer propuestas de mejora en los procesos de instrucción y entender que las relaciones personales que se establecen aquí dejan huella significativa en nuestra forma de construir el conocimiento. En esta misma línea, enseguida se presentan los objetivos y pregunta de investigación:

### **Objetivo general:**

OG. Categorizar el tipo de normas que aparecen cuando se consensua sobre el significado de la función lineal al usar scratch.

### **Objetivos específicos:**

OE1. Identificar las normas que emergen cuando se institucionalizan los significados de la función lineal con scratch.

OE2. Clasificar las diferentes normas que surgen cuando los estudiantes exploran las funciones lineales haciendo uso de scratch.

### **Pregunta de investigación:**

¿Qué tipo de normas surgen cuando se construye los significados de la función lineal mientras los estudiantes se apoyan en el uso de scratch?



### 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

#### Introducción

La presente investigación se ubica en un paradigma cualitativo, esta busca documentar cómo los discentes participan en el desarrollo de un discurso, con el que se aproximan a algunas ideas de la función lineal en un taller extracurricular, en particular, el propósito es identificar y reflexionar con respecto a las normas que emergen en el momento que los/las estudiantes de 8° básico trabajan en parejas, con apoyo de la herramienta tecnológica llamada Scratch.

Para ello, el diseño fenomenológico de este trabajo se apoya en el análisis de algunas transcripciones seleccionadas que permitirán describir y caracterizar los factores que inciden en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática cuando se utiliza una herramienta tecnológica; este análisis se desarrollará a partir de la observación para el análisis del contenido presentado en grabaciones de audio y video que se realizaron como actividad dentro de la clase. En esta ocasión, el investigador tomará el rol de observador participante, debido a que será quien implemente las actividades en el aula y a partir del desarrollo de la actividad deberá observar y capturar la información necesaria para el análisis. Debido a lo anterior, se considerará apropiado un estudio de casos múltiples.

#### 3.1 Tipo de metodología y diseño metodológico

En este apartado se desarrolla la metodología propuesta para este estudio, la cual se ubica en un paradigma cualitativo, interpretativo y descriptivo desde la postura (Miles y Huberman, 1994), al encontrarse esta investigación reflexionando sobre las normas que emergen del concepto de función, cuando se utiliza una herramienta tecnológica en estudiantes de 8° básico.

El enfoque cualitativo permitirá describir y caracterizar los factores que inciden en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática cuando se utiliza una herramienta tecnológica.

Como se dijo anteriormente, el investigador tomará el rol de observador participante, es decir, este sujeto, estará presente en el escenario de estudio, a la vez que cumple la función de recoger datos. Según Taylor y Bogdan (1986) "involucra la interacción social entre el investigador y los informantes en el medio de los últimos, y durante la cual se recogen los datos de modo natural y no intrusivo".

El objetivo de la video grabadora consiste en capturar aquellas escenas que permitan describir los tipos de normas que influyen en una clase cuando se estudia la función lineal a través de una herramienta tecnológica.

### **3.2 Participantes**

Para este estudio se utilizó la técnica de muestra por conveniencia donde los sujetos son seleccionados dada la conveniente accesibilidad y proximidad para el investigador.

Los sujetos de estudio son un grupo de 13 estudiantes, aproximadamente, de entre 13 y 14 años, quienes se encuentran cursando octavo año de educación básica en una escuela particular subvencionada; los estudiantes con los que se trabaja son considerados una población vulnerable, pues son de escasos recursos y están interesados en el uso de las herramientas tecnológicas para aprender matemáticas.



### **3.3 Diseño de las tareas**

Para esta investigación se han planteado cuatro secuencias didácticas de carácter interactivo, incorporando el software scratch para el aprendizaje de la función lineal. Enseguida se presentan actividades con problemáticas cercanas a la vida cotidiana de los/las estudiantes, donde se presentan variables con números enteros y posteriormente decimales.

Para el diseño de las actividades se hizo una revisión del currículum y de la investigación de Yocelyn Parra (2015), enfocándonos en las configuraciones epistémicas resultantes de esta investigación. Luego de tener identificado ¿cómo se establece el estudio de la función lineal en 8° básico?, se encamina el diseño de las actividades satisfaciendo los parámetros

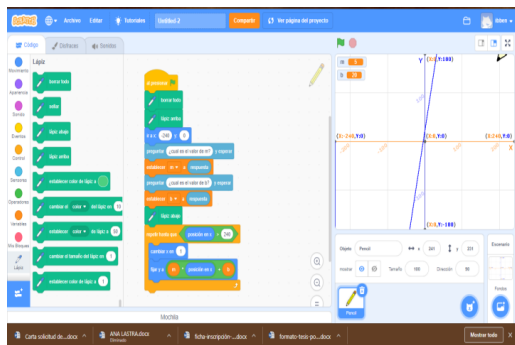
propuestos por el currículum y las configuraciones epistémicas, de esta manera los problemas se plantean con el fin de favorecer la movilización de la función como correspondencia, relación entre variables y/o expresión analítica, para permitir la transición entre los diferentes tipos de representaciones semióticas, logrando actividades como las que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 5. Descripción breve de las situaciones problemas de las que se propusieron situaciones didácticas (ver anexos).

| Situación Problema   | Descripción  |
|--|--|
| <p>Situación 1:<br/>El furgón escolar recorre 70km diarios para recoger a los estudiantes y llevarlos al colegio. Si el rendimiento del furgón es de 6km por litros de combustible.</p>  | <p>Las actividades en base a este problema conducen el aprendizaje a través de:<br/>Análisis tabular.<br/>Identificar el tipo de relación.<br/>Identificar las variables.<br/>Transitar entre representación algebraica a la tabular.<br/>Comunicar estrategias de resolución usada.</p> |
| <p>Situación 2:<br/>La función lineal es una recta que pasa por el origen de la forma <math>Y= m X</math> ¿qué sucede si variamos el valor <math>m</math>?</p>                          | <p>Promueve:<br/>Análisis gráfico.<br/>Observar cambios cuando se utilizan números negativos y decimales.<br/>Tránsito entre representación gráfica y algebraica.</p>  |

### Situación 3:

La función afín es una recta que no pasa por el origen de la forma  $Y=mX+b$  ¿qué sucede si variamos el valor b?



### Promueve:

Reconocer diferencias gráficas entre función lineal y afín.

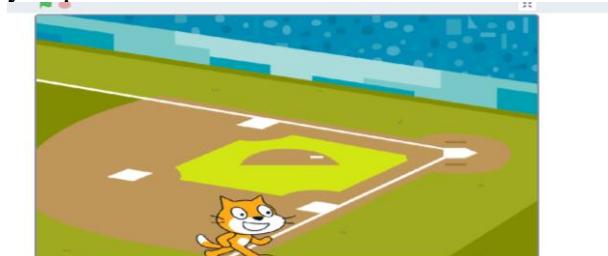
Observar cambios según valor de pendiente.

Tránsito entre representación gráfica y algebraica.

Comunicar estrategias de resolución de problemas.

### Situación 4:

El gatito Scratch está jugando beisbol y acaba de batear un jonrón, por lo que puede desplazarse sobre el diamante del juego, en al menos tres puntos distintos, a saber, el punto A, el punto B y el punto C.



### Promueve:

Implementar el uso de coordenadas en el espacio.

Representar de forma algebraica el recorrido.

## 3.4 Fases y Aplicación de las tareas

### Fase 1

Revisión y análisis del currículum chileno e investigaciones desarrolladas en torno al estudio de la función en el nivel de 8° básico para identificar como se aborda el aprendizaje de este objeto. Siguiendo estos parámetros, diseñar las actividades que permitirán ver las relaciones que emerjan cuando se utilice el software Scratch para el estudio de función lineal entre estudiantes, docente y la actividad planeada.

## **Fase 2**

Implementar la secuencia didáctica en un taller extracurricular realizando grabaciones de la clase de implementación, lo que permitirá la recolección de los datos para el posterior análisis. Para la implementación de las actividades, se organizó a los estudiantes en parejas con la sugerencia del profesor, luego se les daban las instrucciones a medida que pasaban de una tarea a otra entregándoles apoyo cuando lo solicitaban.

*Sobre las actividades de exploración y desarrollo:*

Las actividades planteadas son enmarcadas dentro de un taller extracurricular, donde se desarrollarán actividades semi-guiadas, las cuales tienen por objetivo el desarrollo de la noción temprana de función lineal.

Las actividades del taller se dividen en tres puntos, a saber;

1. Una actividad exploratoria que consta de conocer las nociones previas que poseen los estudiantes sobre la función lineal (ver ANEXO A). Esta se estima en una sesión de aproximadamente una hora y 30 minutos.
2. Introducción al lenguaje y manejo de scratch, esta actividad es totalmente guiada y tiene como propósito introducir al estudiante a un manejo semi autónomo del programa computacional. El tiempo considerado para estas actividades es de dos sesiones (Ver ANEXO B y C) de aproximadamente una hora y treinta minutos cada una de ellas.
3. Aplicación de cuatro actividades semi-guiadas, las cuales buscan desarrollar los significados parciales caracterizados de la función lineal. El tiempo estimado son cuatro sesiones (Ver ANEXOS) de aproximadamente una hora y treinta minutos para cada una de ellas.

## **Fase 3**

Se realizará una transcripción de las grabaciones identificando los momentos destacados de la interacción y analizando las situaciones en la búsqueda del o los momentos en que el estudiante logre los significados de función pretendidos por el currículo de matemáticas.

### **3.5 Procedimiento de recolección, unidades de análisis y análisis de datos**

Los métodos de recopilación de datos son la técnica de observación participante en el taller extracurricular y las notas de campo tomadas por el investigador durante y después de las sesiones. El proceso de recopilación de datos se completó en alrededor de mes y medio. En la recopilación de datos, fue importante centrarse en las actividades matemáticas colectivas; planificación, implementación y evaluación de procesos relacionados con las actividades; los patrones de comportamiento; y los métodos de interacción de estudiantes y profesores (Cobb et al., 2001)

Miles y Huberman (1994) entienden el análisis como un constante ir y venir reflexivo y analítico entre cuatro categorías de análisis que denominan recolección de datos, reducción, presentación de datos, extracción y verificación.

Los datos recopilados son de diferente naturaleza, en este caso, se realizarán grabaciones del audio con producciones escritas de las sesiones del taller, por otro lado, se obtendrán las hojas de las actividades con los desarrollos en cada sesión y los diseños computacionales originados por los estudiantes para dar respuesta a ellas.

El análisis de los datos se apoya en dos niveles:

1. Las normas que emergen mientras se construye la noción de función lineal.
2. La emergencia de la noción de función lineal.

Para la identificación de normas se consideraron en el análisis de datos apoyado en un análisis de contenido (es decir, en la sección observación y determinación de normas). Se utilizó el método de análisis de datos comparativos constantes para revelar las diferencias cualitativas de las microculturas del aula. Se realizó un microanálisis produciendo categorías y ofreciendo relaciones entre categorías, luego se llevaron a cabo algunos de los procesos de análisis comparativo constante como la codificación abierta, axial y selectiva.

Se observó cada grabación y se describió el tipo de interacciones presentes en el aula, después de ello se hizo una selección de segmentos destacados de las sesiones, los cuales se transcribieron en orden cronológico. Luego, las transcripciones y las notas de campo de cada aula se analizaron por separado para determinar los patrones de interacción al considerar algunos puntos dados en un análisis de muestra.

Para el análisis de la clase se utilizarán grabaciones de video realizadas en la aplicación de la actividad. La búsqueda estará orientada al lenguaje utilizado, las interacciones entre los estudiantes, profesor-estudiantes y estudiantes-Actividad (pero su foco situado en la herramienta), con el propósito de capturar los instantes en que emerja la noción de función lineal, la apropiación de la herramienta tecnológica, entre otros aspectos. A partir de lo anterior, es que se ha desarrollado una adaptación al trabajo desarrollado por Molina (2019) como se presenta en la tabla, para un correcto análisis de los datos

Tabla 6. Adaptación de la propuesta de tipologías de normativas Molina (2019)

| Faceta            | Norma  |
|-------------------|--|
| <b>Epistémica</b> | <p>¿Qué matemáticas aprender?</p> <p>a. Definición: La ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente <math>m</math> es: <math>f(x) = mx</math><br/>Y la función afín <math>f(x) = mx + b</math><br/>Variable dependiente, independiente, pendiente.</p> <p>b. Procedimiento: Determinar el tipo de relación de las variables a partir del análisis tabular, Interpretación de la representación gráfica, Identificar cambios de la gráfica a partir del lenguaje algebraico.</p> <p>c. Proposición: estudiar la función a través de sus diferentes tipos de representaciones y lograr transitar entre las representaciones, utilizar la noción de proporcionalidad directa, interpretación gráfica, tabular y algebraica, transmitir de forma escrita y oral los procedimientos realizados.</p> <p>d. Lenguaje: Resuelven las tareas utilizando el lenguaje algebraico, simbólico y tabular.</p> |
| <b>Cognitiva</b>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿Cómo aprenden los estudiantes del colegio?: a través del tránsito entre las diversas representaciones.</li> <li>- ¿Cómo se les debe enseñar?: Permitiendo el análisis de las diferentes representaciones y que se pueda transitar entre estas.</li> </ul>  |
| <b>Afectiva</b>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿Cómo se motivan los estudiantes?: con la herramienta tecnológica, la tarea de escribir una carta con el procedimiento motivaba a las niñas.</li> <li>- ¿Qué ambiente favorece que los estudiantes asuman responsabilidad?</li> <li>- Una vez que se entrega la actividad a los estudiantes asumen la responsabilidad.</li> <li>- Grupo que asume la responsabilidad solo en el momento en que el profesor se acerca a ver lo que han hecho.</li> <li>- ¿Qué tipos de tareas se propone?: Tareas de análisis tabular, gráfico y simbólico.</li> </ul>   |

|                      |   |
|----------------------|---|
| <b>Interaccional</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿Cómo interactúan los individuos y por medio de qué lenguajes?: algunos estudiantes hablan sobre los problemas buscando la solución y preguntan al profesor sus dudas, otros realizan pruebas de ensayo y error, otros solamente van plasmando en el papel sus respuestas.</li> <li>- ¿Qué tipo de argumentos entregan y cómo justifican sus respuestas?</li> <li>- El profesor escucha a sus estudiantes e interpreta sus ideas.</li> <li>- Los estudiantes son exigentes con el profesor, es decir, participan, comunican ideas, hacen preguntas etc. La mayor parte de los estudiantes hace preguntas y trata de comunicar sus ideas, sin embargo, hay otros niños que se ponen nerviosos a la hora que se acerca el profesor y no son capaces de preguntar ni transmitir ideas.</li> </ul> |
| <b>Mediacional</b>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿Qué medios se pueden utilizar según la disposición del colegio?: uso de recursos tecnológicos (laboratorio de computación).</li> <li>- ¿Cuándo? Tres días de las semanas, 2 horas diarias.</li> <li>- ¿Para qué? Para la realización de toda la actividad.</li> <li>- ¿De qué manera se usan los medios? Se utilizó el software Scratch para el estudio de la función lineal.</li> </ul>  |
| <b>Ecológica</b>     | <ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿Cómo el entorno social, político y económico influye sobre el tipo de prácticas matemáticas?</li> </ul>   |



### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

#### Introducción

En el presente capítulo se darán a conocer las situaciones presentadas durante la aplicación de la investigación en el curso seleccionado. Aquí, es importante mencionar que no se dan a conocer normas explícitas, establecidas por los docentes o en conjunto con los estudiantes. Debido a esto, es que se hablará de situaciones de aula vistas y analizadas a partir de los videos obtenidos de las grabaciones de las clases completas. Durante el transcurso de la clase, la mayor parte de lo sucedido no presenta un diálogo claro; son más bien los movimientos, gestos y breves conversaciones los que se distinguen al estar más cerca de las cámaras y estas formas de comunicación humana acompañada de la bitácora del investigador, es en lo que se fundamenta el análisis.

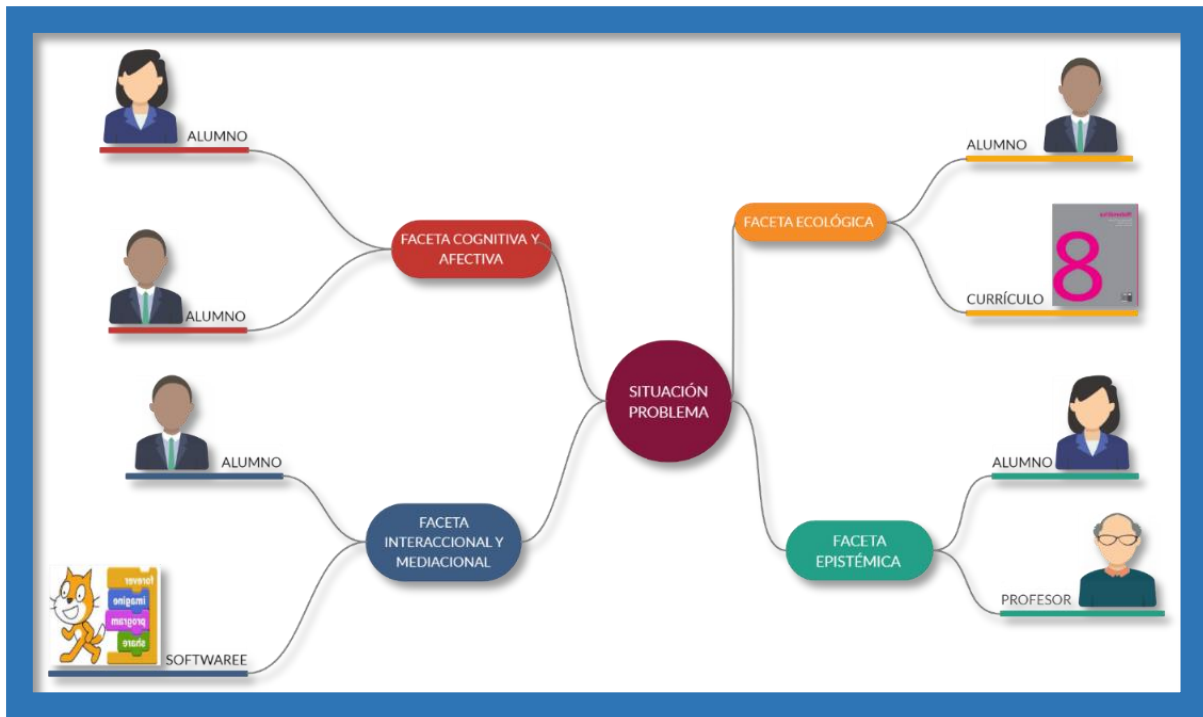
Para precisar el objetivo del trabajo, se utiliza la propuesta del EOS ante los tipos o faces de normas que se presentan en la enseñanza dentro del aula. Ante este contexto, se distinguen tres grandes ámbitos para analizar:

- ❖ Relación entre profesor – estudiante
- ❖ Relación entre estudiantes
- ❖ Conexión entre Estudiantes – Actividad

En cada una de ellas, se visualizarán los comportamientos ante la actividad 1 y la actividad 2 (solo se reportan estas debido a que, por el estallido social del año 2019 en Chile, se complejizó la toma de datos y la asistencia constante de los sujetos de estudio), siempre observando las normas presentes. Por otra parte, es necesario aclarar que durante la clase y el análisis hay dos profesores presentes (A y B).

A continuación, en la imagen 7, se presenta el tipo de relaciones establecidas dentro del proceso de instrucción de un taller extracurricular para la construcción de la noción de función lineal apoyada en el uso del software scratch.

Imagen 7. Relaciones establecidas dentro del proceso de instrucción de un taller extracurricular



#### 4.1 Profesor – Estudiante

En esta sección, se analizará la relación que existe entre el profesor y los estudiantes participantes de esta investigación durante el periodo de clases. Es un factor muy importante para tener en consideración, ya que es la base para que el proceso de enseñanza – aprendizaje resulte adecuadamente dentro de un ambiente grato y de confianza. Además, cabe de destacar que, si esta relación es deficiente en términos positivos, puede existir la posibilidad de afectar en el rendimiento de los estudiantes. Por ello, se van a detectar sucesos que reflejan este aspecto y se identificarán las normas que lo abordan, y que podría dar sugerencias para una mejora en el caso que sea necesario.

A continuación, se presentará lo ocurrido en la primera actividad, y luego lo de la segunda actividad. El análisis usado se apoya en un análisis de contenido, pero la estrategia utilizada consistió en la revisión sistemática de los vídeos, siguiendo los siguientes momentos:

1. Selección de segmentos y asignación de tipo de norma según la faceta
2. Transcripción de algunos segmentos destacados en los cuales se presenta de manera recurrente la presencia de una norma en un grupo de estudiantes.

### 4.1.1 Primera Clase: Actividad 1

En la tabla 7, se puede observar lo acontecido en el transcurso de la primera clase, donde se trabajó la primera actividad. Se pueden distinguir varios tipos de normas: interaccional (6), cognitiva (2), mediacional (3) y afectiva (4).

Como se puede visualizar, la norma enfocada a las interacciones es la más reconocida o practicada durante la primera clase, la cual será analizada junto a la norma relacionada a lo afectivo y cognitivo. La número 1 consiste en la importancia de dar instrucciones con respecto a la actividad para orientar a los estudiantes, como se evidencia en la imagen 8, de este modo, mejora la sintonía y clarifica los enunciados propuestos. Por otro lado, en la número 2 se hace mención con respecto al trabajo de resolver dudas o inquietudes, esto permite guiar el aprendizaje del estudiante, e impulsa el cuestionamiento de los hechos o procedimientos realizados. Los profesores siempre estarán dispuestos a resolver inquietudes con el fin de obtener mejores resultados. También, se dan situaciones donde el profesor entrega ejemplos (número 6) para guiar en lo que deben hacer los estudiantes. Esto indica, a partir de la norma cognitiva, que los estudiantes necesitan ejemplificar y ser más concretos en sus actividades; al hacer esto, aterrizan en sus conocimientos previos o situaciones ya vividas, siendo un acercamiento de lo desconocido a la realidad. A pesar de que se dan estos momentos durante la clase, existen problemas de comunicación entre el profesor A y algunos estudiantes.

*Imagen 8. Profesor A entregando instrucciones mientras el profesor B monitorea que se tengan las condiciones mínimas*



En la situación 5, se muestra un problema donde el profesor A no comprende lo que pregunta una dupla de estudiantes; lo que conlleva a pensar en ¿qué tan seguido pasa en la sala de clases este tipo de dificultades de comunicación? muchas veces, los estudiantes tienen dificultades para expresar sus consultas, y otras veces el profesor esta desconcentrado o preocupado por cosas externas a la clase; lo que influye en la comunicación dentro del aula. En la 7, cabe destacar la importancia de supervisar el trabajo de los estudiantes, aun cuando sea un trabajo a-didáctico, esto puede ser un problema, dado que nada asegura que trabajen constantemente en la actividad o se animen a preguntar. No todos los estudiantes se atreven a preguntar ante todos, algunos esperan a que el profesor se acerque para hacer consultas u observaciones. En caso contrario, como se puede observar en la 8 y 12, el profesor B genera mayor confianza en los estudiantes, al supervisar y preocuparse por el avance de estos. El interés debe estar por parte de ambos actores, y así obtener un ambiente grato para realizar la actividad.

En la 10, se evidencia un hecho que puede ocurrir regularmente sin dar mayor importancia y suele pasar cuando un docente tiene mala o poca relación con sus estudiantes; en consecuencia, ellos se rehúsan a aceptar correcciones, siendo poco receptivos a los consejos o sugerencias, ya sean personales o relacionadas a la actividad. Esto afecta en los sentimientos de los estudiantes de forma negativa, si bien ellos realizan la actividad, quizás las sugerencias sean adecuadas y correctas en esa circunstancia, pero la poca empatía estropea el trabajo realizado. Sin embargo, en la 9, se ve que intenta generar un cambio en el ambiente tenso que se trabaja, y el profesor A insta a los estudiantes a que tengan confianza en lo que están haciendo, sin tener miedo a equivocarse. Esto mejora un poco lo visto anteriormente, ya que los estudiantes se sienten más libres de responder sin el sentimiento negativo de inseguridad ante lo que hacen. Además, como se puede ver en la 11, el profesor A promueve la confianza con la herramienta, lo que va ligado a lo dicho anteriormente.

*Tabla 7. Análisis de Normas presentes en la gestión del profesor durante la clase 1*

| <b>N°</b> | <b>SUCESO O NORMA</b>   | <b>TIPO DE NORMA</b> |
|-----------|---|----------------------|
| <b>1</b>  | El profesor A lee instrucciones para la primera actividad (0:56) (A). | Interaccional        |

|           |  |                            |   |
|-----------|--|----------------------------|---|
| <b>2</b>  | Se puede preguntar si hay dudas (1:36), (9:14).  | Cognitiva<br>Interaccional | - |
| <b>3</b>  | El profesor A es paciente cuando comienzan a utilizar el programa. Se fija de que todos tengan las herramientas y que comiencen con las mismas posibilidades y/o condiciones (4:30) (A).                                 | Mediacional                |   |
| <b>4</b>  | Explica la funcionalidad del medio tecnológico (7:57) y la realización con el problema a trabajar. (A)   | Mediacional                |   |
| <b>5</b>  | Se visualiza que el profesor A no puede responder de forma inmediata y concreta, o comprender la pregunta; ya que hace que parta desde el comienzo de la primera actividad la secuencia en el programa (9:15). (A)       | Interaccional              |   |
| <b>6</b>  | Entrega ejemplos para la comprensión (10:00) y explica (10:50), (11:00) ... (A)  | Cognitivo                  |   |
| <b>7</b>  | El profesor A se acercaba solo a los que tenían dudas. No supervisaba el trabajo continuo. (A)   | Interaccional              |   |
| <b>8</b>  | El profesor B se preocupaba más de los estudiantes, supervisaba y se paseaba en toda la sala. (A)  | Interaccional              |   |
| <b>9</b>  | La docente pide confianza y que no tengan miedo en responder. Explica el propósito de la actividad (18:20). (A)  | Afectivo                   |   |
| <b>10</b> | No es buena la relación entre el grupo de estudiantes y la profesora, ya que no son receptivos a lo que ella dice al explicar detalles de la actividad en forma individual. Sus gestos no reflejan simpatía (26:40). (A) | Interaccional - Afectivo   |   |
| <b>11</b> | La docente incentiva al grupo que verifiquen sus respuestas por medio de la herramienta. (A)   | Afectivo - Mediacional     |   |

|    |   |          |
|----|---|----------|
| 12 | Hay más confianza con el profesor (14:00) (C) | Afectivo |
|----|---|----------|

Las situaciones basadas en normas mediacionales son prácticamente lo expuesto anteriormente y la conexión de ello con Scratch. Primero, es importante destacar que el profesor A se preocupa en que todos tengan los archivos en sus computadores antes de las explicaciones o instrucciones (número 3). Es relevante que todos tengan las mismas oportunidades y condiciones al momento de realizar una actividad en el aula, sobre todo cuando se trata de tiempo. De esta manera, ellos no sienten presión o desconformidad con el trabajo. Por otra parte, en la número 4, se dan a conocer los pasos que deben seguir y el uso que le deben dar a la herramienta como se evidencia en la imagen 9. Esto es un factor importante, ya que es un medio que no habían utilizado y que permite un trabajo más continuo. Los problemas permiten un análisis de situaciones matemáticas, guiado con preguntas de reflexión, permitiendo que Scratch agilice los procesos cognitivos e incentive el trabajo de los estudiantes. También, al ser un medio tecnológico, permite exactitud para verificar supuestos y respuestas.

*Imagen 9. Explicación del profesor A del uso del software*



Sin duda, esta clase ha sido la que más ha dado situaciones para analizar entorno a las normas propuestas por el EOS. Al ser la primera actividad, es todo nuevo para los estudiantes y son momentos de adaptación, ya en la siguiente actividad cambian las condiciones de trabajo.

#### 4.1.2 Segunda Clase: Actividad 2

En la tabla 8, se puede observar lo acontecido en el transcurso de la segunda clase, donde se trabajaría la segunda actividad. Se puede distinguir varios tipos de normas: interaccional (1), cognitiva (2), mediacional (3) y afectiva (3).

En esta ocasión, el profesor A no entrega instrucciones con respecto a la segunda actividad (número 1), lo que puede afectar en los procesos cognitivos de los estudiantes; ya que es algo que marca el inicio de la clase y orienta en qué tienen que hacer. Debido a lo anterior, los estudiantes tuvieron que descubrir por si mismos o preguntar en caso de dudas. Al igual que en la actividad 1, el programa que están trabajando ayuda a complementar la abstracción matemática y simplificar los procesos cognitivos de los estudiantes beneficiando su aprendizaje y aumentando su curiosidad para la reflexión (suceso número 5).

Durante el desarrollo de la clase, existe un problema fundamental, el cual consiste en que no todos los computadores están encendidos ni tienen la actividad 2, como queda evidenciado en el suceso número 2. Lo anterior, provoca un retraso en el propósito de la clase, teniendo menos tiempo del previsto. Queda en evidencia la importancia de supervisar el trabajo de los estudiantes para ver las dificultades que estos tienen, siempre hay que estar atentos ante alguna necesidad. Además, como se puede ver en la número 3, el profesor A tiene dificultades al encender los computadores, generando un mayor retraso. Esto conlleva a que los estudiantes se deben cambiar de lugar a otros computadores, perdiendo aún más tiempo. Los problemas técnicos surgidos en el momento pueden retrasar por bastante tiempo lo planeado; siendo una desventaja al trabajar con tecnología.

*Tabla 8. Análisis de Normas presentes en la gestión del profesor durante la clase 2*

| <b>N°</b> | <b>SUCESO O NORMA</b>   | <b>TIPO DE NORMA</b> |
|-----------|---|----------------------|
| <b>1</b>  | No existen instrucciones previas para la actividad dos (A).   | Cognitiva            |
| <b>2</b>  | El profesor A no se preocupa de que todos los computadores estén encendidos al momento de trabajar en ellos, se percatan cuando se supervisa el trabajo (16:04) (Resolución (24:43)) (A). | Mediacional          |

|          |   |                          |
|----------|---|--------------------------|
| <b>3</b> | El profesor A presenta dificultades con la tecnología.  | Mediacional              |
| <b>4</b> | Por lo general se prohíbe comer o beber algo en la sala de clases, aun así, el profesor B bebe algo en la sala y los estudiantes también desean hacerlo (21:39) (A) | Afectiva                 |
| <b>5</b> | El profesor A invita a analizar el comportamiento en el programa para entender la dinámica (26:30) (A).   | Cognitiva – Mediacional  |
| <b>6</b> | Hay mayor confianza entre los estudiantes y el profesor B al momento de inquietudes y dialogar las actividades (29:20) (A).   | Afectiva - Interaccional |

El profesor B quizás no piensa en cómo puede afectar lo que hizo durante la clase frente a un grupo de estudiantes (número 4), siendo importante establecer reglas que incluyan a los estudiantes y profesores. Este tipo de situaciones genera desconformidad y resentimiento en el grupo curso, pensando en por qué un profesor si puede hacer cosas que un estudiante no. Para evitar situaciones como estas, se deben establecer normas genéricas desde el comienzo ya que se debe ser empáticos frente a lo que se les restringe y ser conscientes frente al actuar docente. También queda en evidencia, a pesar de lo que se comentó anteriormente, que este docente tiene mejor relación con los estudiantes en comparación al profesor A. La confianza, al igual como se muestra en la actividad 1, permite que la clase se desarrolle con resultados positivos y se resuelvan todas las dudas posibles. El diálogo como norma interaccional (situación 6), ayuda y beneficia complemente los aprendizajes esperados. Se avanza con mayor continuidad y éxito.

Si bien, no son tantos los casos que se presentaron en esta oportunidad, estos si concuerdan con lo analizado anteriormente. Es correcto decir que la base de una clase exitosa está en las relaciones interpersonales que se dan dentro del aula. Son muchos los factores que influyen en la educación, pero el cómo un estudiante se siente anímicamente ante un profesor, afectará ámbitos cognitivos y afectivos primordiales en los procesos de la actividad. Quizás no se



relacionen con el resultado final, pero si en el proceso de reflexión, análisis y asimilación del objeto matemático en la realidad.

Como se pudo apreciar hasta el momento el tipo de normas generales que promocionan el profesor son de carácter social y procuran la gestión del aprendizaje. Si bien la estructura de este espacio de cooperación es un taller extracurricular parece que, al tener estas características, el trabajo con el aula se transformó, dotándolo de mucha flexibilidad y de bastante dispersión con respecto a la gestión de los tiempos.

## **4.2 ESTUDIANTE – ESTUDIANTE**

En esta sección, se analizará la relación que existe entre los estudiantes, ya sea dentro del equipo de trabajo o como grupo curso; todo enfocado en lo ocurrido durante la gestión de la actividad, centrándonos en cómo interactúan y la finalidad o consecuencia de sus acciones, con el establecimiento de algunas normas. Sin duda, las relaciones pares son de gran ayuda al momento de hacer un trabajo autónomo, dado que se apoyan entre ellos y pueden obtener mejores resultados, comparado al trabajo individual sin reflexionar o conversar las posibles respuestas o comportamientos de la matemática aplicada en el programa.

A continuación, se presentará lo ocurrido en la primera actividad, y luego lo de la segunda. Esto permitirá demostrar la importancia de las relaciones personales dentro del aula.

### **4.2.1 PRIMERA CLASE: ACTIVIDAD 1**

En la tabla 9, se puede observar lo acontecido en el transcurso de la primera clase, donde se trabajaría la primera actividad. Se puede distinguir varios tipos de normas: interaccional (4), cognitiva (2) y afectiva (3).

El trabajo realizado en las clases fue en equipo (número 1), lo cual invita a la reflexión grupal para una mayor profundidad en el aprendizaje. Los estudiantes pueden debatir sus distintas perspectivas frente al objeto matemático tratado y los problemas presentados, lo cual indica que entre ellos son un complemento. Como se ve en la número 4, a los estudiantes les acomoda trabajar más en parejas, ya que avanzan en sus actividades y dialogan las preguntas de la actividad como se evidencia en la imagen 10. Además, conversan con respecto a lo que

ven en el programa y comprenden con mayor intensidad. Sin embargo, es necesario la guía de un profesor.

*Imagen 10. Trabajo autónomo de los estudiantes por parejas.*



También se dieron situaciones donde conversaban entre duplas distintas (hombres). Lo cual indica que los estudiantes tienen buena comunicación. El trato que existe entre ellos es agradable y no de egoísmo con sus contestaciones, están dispuestos a resolver dudas de otros o comparar sus respuestas (número 5). En caso contrario, en una dupla de mujeres (número 6), se menciona un caso donde una de las estudiantes carga con el trabajo de escribir todas las respuestas de la actividad mientras la otra piensa en las respuestas, luego con el paso del tiempo, se da cuenta que su compañera también puede ayudarla en lo que hace, logrando así consensuar las respuestas y obteniendo la seguridad de lo desarrollado.

*Tabla 9. Análisis de Normas presentes en la interacción entre estudiantes durante la clase 1*

| <b>N°</b> | <b>SUCESO O NORMA</b>   | <b>TIPO DE NORMA</b>      |
|-----------|---|---------------------------|
| <b>1</b>  | Trabajo en pareja o grupal (1:10) (A)   | Afectivo                  |
| <b>2</b>  | Trabajo en equipo para la reflexión en conjunto (8:40), (0:15) (A)                              | Cognitivo - Interaccional |
| <b>3</b>  | Es un trabajo más autónomo (A).   | Cognitivo – Afectivo      |
| <b>4</b>  | Se visualiza que el trabajo en pareja funciona, porque dialogan lo que sucede en la herramienta | Interaccional             |

|          |  |                          |
|----------|--|--------------------------|
|          | tecnológica y también reflexionan guiándose por preguntas (A).   |                          |
| <b>5</b> | Entre hombres se observa que conversan sus respuestas grupales (11:30). Se visualiza que comparan respuestas y realizan consultas. (C)         | Interaccional            |
| <b>6</b> | En la dupla de mujeres se ve que una de ellas carga con el trabajo (12:15) pero después conversan dudas y así obtienen mejores resultados. (C) | Afectivo - Interaccional |

Al observar situaciones que contemplan la norma afectiva, se pueden considerar que trabajan en parejas o grupos (número 2) y realizan un trabajo autónomo (número 3). Para la primera, es necesario recalcar que el trabajo entre dos es más liviano y rápido, por ende, el trabajo mental no es tan agotador y puede ser más productivo y beneficioso. Por otra parte, al ser un trabajo autónomo de los estudiantes, entran a reflexionar mayoritariamente por ellos mismos. Además, existían ocasiones donde resolvían entre ellos las dificultades que se les presentaban durante la actividad. Por ende, su mentalidad o la resolución de problemas, aumenta sus habilidades y capacidades intelectuales que apoyan su desempeño en la vida cotidiana.

#### **4.2.2 SEGUNDA CLASE: ACTIVIDAD 2**

En la tabla 10, se puede observar lo acontecido en el transcurso de la segunda clase, donde se trabajaría la segunda actividad. Se puede distinguir varios tipos de normas: interaccional (2) y afectivo (1).

Como ha sucedido en la otra actividad, los estudiantes dialogan sus respuestas (número 1), recalcando que tienen buena comunicación y se apoyan mutuamente. Se obtienen mejores resultados cuando trabajan en conjunto, además son conscientes de que no pueden cargar todo el trabajo a un solo compañero; es decir, todos aportan para responder la actividad. Lo negativo de esta clase, es que una pareja de estudiantes no tenía computador, estaban relajados y tampoco pedían ayuda o instrucciones. Es evidente, que los estudiantes a veces

esperan que el profesor haga todo o les entregue todo listo para trabajar, no son tan autónomos en esta situación (número 2).

Quizás no es mucho lo vivido en esta clase, pero son datos importantes para considerar.

*Tabla 10. Análisis de Normas presentes en la interacción entre estudiantes durante la clase 2*

| <b>N°</b> | <b>SUCESO O NORMA</b>  | <b>TIPO DE NORMA</b>     |
|-----------|--|--------------------------|
| <b>1</b>  | El único grupo de tres integrantes dialogan su actividad y se turnan para anotar las respuestas. (15:45) (A) | Interaccional            |
| <b>2</b>  | Había una pareja que no tenía computador y estaban junto a otro dúo (16:45) (A)                              | Afectiva - Interaccional |

### **4.3 ESTUDIANTE – ACTIVIDAD**

En esta sección, se analizará la conexión entre los estudiantes y la actividad realizada en Scratch. Si bien es la primera vez que ellos trabajan con este programa, resulto amigable para ellos y se podía observar que se animaron a manipular la herramienta para cumplir con los propósitos de la actividad. Es necesario que los estudiantes estén familiarizados con las actividades a realizar, o se les den bastantes instrucciones o ejemplos en caso contrario. En caso de las TICS, una demostración de cómo se utilizan sería adecuado para evitar malos resultados o sentimientos negativos ante la actividad y asignatura. Todas las actividades deben ser adaptadas a las habilidades y necesidades según los tipos de estudiantes que se encuentran en la sala, por lo que en general el uso de los computadores tiende a ser más atractivo para los usuarios, motivándose a trabajar con mayor constancia y responsabilidad. A continuación, se presentará lo ocurrido en la primera actividad y posteriormente lo ocurrido en la segunda.

### 4.3.1 PRIMERA CLASE: ACTIVIDAD 1

En la tabla 11, se puede observar lo acontecido en el transcurso de la primera clase, donde se trabajó la primera actividad. Se puede distinguir varios tipos de normas: interaccional (2), cognitiva (2), afectiva (3), mediacional (3) y epistémica (1).

Los estudiantes tienen buena relación entre ellos y dialogan bastante, lo que a veces provoca que se desvíen en las actividades, en este punto, lo interaccional pasa a ser como un distractor para responder adecuadamente y a tiempo lo solicitado (número 5). Sin embargo, el hablar de otros temas no correspondientes a la clase, permite que en grupo se organicen para terminar a tiempo, ejemplo de esto es que ellos se turnan al anotar las respuestas en la guía (número 6), lo que aliviana la carga para todos los estudiantes.

En el suceso 1, los estudiantes comienzan con actividades básicas y listas en los computadores. Scratch al ser un programa ya codificado desde antes, los estudiantes sólo deben ingresar datos para ver el comportamiento. Esto facilita el manejo de la herramienta y realización de la actividad, además, los procesos cognitivos son más simples y rápidos.

El suceso 3 muestra que la actividad, en temas epistémicos, contiene preguntas para reflexionar. Se analiza el comportamiento de los problemas en el programa, lo que permite una mayor comprensión y entendimiento del objeto matemático y los procedimientos que involucra, además esas preguntas aportan información en lo cognitivo, que genera mayor profundidad en los pensamientos.

*Tabla 11. Análisis de Normas presentes en el desarrollo autónomo de los estudiantes clase 1.*

| <b>N°</b> | <b>SUCESO O NORMA</b>   | <b>TIPO DE NORMA</b>       |
|-----------|---|----------------------------|
| <b>1</b>  | No tienen que programar, la codificación de las actividades está lista. Sólo se modifica ingresando datos (0:27) (A). | Cognitivo –<br>Mediacional |
| <b>2</b>  | No era necesario terminar toda la actividad 1 en la primera clase (0:44) (A).   | Afectivo                   |
| <b>3</b>  | Preguntas de análisis con respecto a lo que va ocurriendo en el software (8:30) (A).                                  | Epistémico - Cognitivo     |

|          |  |                          |
|----------|--|--------------------------|
| <b>4</b> | Casi todos los estudiantes tienen un computador (A).   | Mediacional              |
| <b>5</b> | Hay ocasiones donde tienden a conversar de otros temas. Se preocupan de inglés y no se concentran en la actividad (C). | Interaccional            |
| <b>6</b> | Algunos se turnan para anotar las respuestas de la actividad en la guía (C).   | Afectivo - Interaccional |
| <b>7</b> | Al ser clases grabadas, era un elemento distractor e incómodo para algunos (C).  | Afectivo                 |
| <b>8</b> | Se entregaba una guía con la actividad propuesta por pareja o grupo.   | Mediacional              |

En lo mediacional, lo importante es que todos los estudiantes tenían a su disposición un computador para trabajar (número 4), aun cuando era en grupo o pareja. También, tenían a su disposición una guía por equipo (número 8), no siendo esto un impedimento; ya que la disposición en el aula facilita trabajar con una sola guía. Quizás para un único grupo pudo ser dificultoso, ya que estaban de frente y no veían la guía al mismo tiempo. Es necesario que la actividad esté en papel y no en Word en el PC; ya que permite ir comparando en el momento lo realizado en el computador y las preguntas en la hoja, siendo más inmediato y cómodo para los estudiantes, de esta forma, pueden anotar las respuestas en la misma hoja, donde tenían el espacio suficiente y no necesitaban de un cuaderno extra.

Durante el transcurso de la clase, se deja claro que no es necesario terminar la actividad en ese horario (número 2). De esta manera, se previene la presión que puedan sentir los estudiantes al realizar su actividad, permitiendo que se concentren más en la reflexión y en la observación. Sin embargo, en el suceso número 7, queda evidenciado que los estudiantes se distraen por la clase grabada, se aprecia que estaban preocupados de dónde estaban las cámaras para no mostrar sus rostros o hablar más despacio; esto denota una timidez por parte de los estudiantes e incomodidad. La mayor conexión y beneficio que obtuvieron de la herramienta fue que esta les entregaba cálculos e imágenes, invitando a la

observación y análisis. La actividad se hace más fácil cuando se utiliza un medio tecnológico. Además, es más atractivo y diferente para los estudiantes.

#### 4.3.2 SEGUNDA CLASE: ACTIVIDAD 2

En la tabla 12, se puede observar lo acontecido en el transcurso de la segunda clase, donde se trabajaría la segunda actividad. Se puede distinguir varios tipos de normas: mediacional (2), interaccional (1), cognitiva (2) y epistémica (1).

Al comienzo de la clase se entrega una guía a cada equipo, para que se orienten con algún material manual y aplicarlo en lo tecnológico. Anteriormente se han presentado las consecuencias positivas o beneficios que tiene este factor, aun así, se reconoce un acontecimiento importante (número 4) relacionado a los elementos que utilizan los estudiantes. Ellos escriben con lápiz grafito para borrar en el momento que se equivocan, demostrando la flexibilidad al momento de realizar la actividad, así no se sienten presionados al equivocarse, son libres de anotar sus impresiones con respecto a lo observado y si no les parece o un profesor les corrige, lo pueden cambiar. No hay miedo ante el error.

*Tabla 12. Análisis de Normas presentes en el desarrollo autónomo de los estudiantes clase 2*

| <b>N°</b> | <b>SUCESO O NORMA</b>  | <b>TIPO DE NORMA</b>    |
|-----------|--|-------------------------|
| <b>1</b>  | Se les entrega una guía por pareja o grupo (A)   | Mediacional             |
| <b>2</b>  | Actividades: introducir datos – observar – conversar y reflexionar – escribir respuestas (A).  | Epistémica – Cognitiva  |
| <b>3</b>  | Van 20 minutos de la primera clase, trabajando la segunda actividad y se puede ver que un nuevo dúo aun no comienza su actividad producto del problema con los computadores (A). | Interaccional           |
| <b>4</b>  | Los estudiantes utilizan lápiz grafito para borrar y corregir sus respuestas cuando se equivocan (27:55) (A)   | Cognitivo - Mediacional |

Un detalle importante de esta clase es que una pareja de estudiantes perdió mucho tiempo para realizar su tarea, ya que, por problema en los computadores, no hacían cosas productivas relacionadas al objetivo de la clase. Esta situación, afecta directamente en el rendimiento de ellos y no logran conectar completamente con lo solicitado, posteriormente se logra solucionar el problema, pero casi al finalizar la clase.

Los estudiantes tienen que sentirse atraídos y motivados por las clases, aprender a solucionar sus problemas y pedir ayuda a los profesores cuando estos no se percaten de las situaciones complicadas.

Por lo general, ambas actividades consisten en lo presentado en el número 2. Son metodologías que permiten agilizar el ámbito cognitivo del estudiante. El observar, reflexionar, conversar y analizar, son habilidades que ellos deben desarrollar y son necesarias durante el proceso de aprendizaje.

Hasta este momento el tipo de normas que se han repostado son más de carácter social en la parte interaccional. Enseguida se presentará una serie de normas de carácter matemático, que emergieron dentro de los espacios en que los estudiantes compartían reflexiones en gran grupo con los profesores.

#### **4.4 Normas presentes en el diálogo grupal de la construcción de la Función lineal**

Las normas anteriores evidenciaron el proceso interaccional entre profesor, estudiante y actividad; a partir de lo cual, podemos decir que estas son de carácter social y que permitieron gestar el proceso de instrucción, sin embargo, en este estudio nos interesa también percatarnos del objeto matemático, es decir, qué fueron capaces de establecer los estudiantes con el uso de la herramienta Scratch en un taller extracurricular. Para ello, se platicarán de manera breve aquellas normas que pusieron de manifiesto los estudiantes y que compartieron.



Tabla 13. Estableciendo condiciones de la representación de la función lineal

| N° | SUCESO O NORMA (transcripción del fragmento)  | TIPO DE NORMA                                 |
|----|---|---|
| 1  | <p>Situación grupo está probando la aplicación del problema 2.</p> <p>Al ver la gráfica de la función las estudiantes E7 y E9: dicen a coro “Es lineal”</p> <p>E8: yo, no la veo que pase.</p> <p>Luego prueban con otros valores de ‘y’.</p> <p>E7: (→) Gestualiza y con las manos dibuja la función lineal en el aire y hace el gesto de haber pasado muy rápido.</p> <p>E9: la cosa es que es lineal.</p> <p>Luego siguen ingresando números y viendo el comportamiento del gráfico.</p> | <p>Epistémica – Cognitiva<br/>Mediacional</p> |

En la tabla anterior 13 se evidencia una de las primeras normas que aparecen en la discusión del grupo, esta tiene que ver con la representación gráfica de la función lineal. Como se puede leer en la transcripción anterior, los estudiantes relacionan la representación tabular de la actividad 1 con una representación gráfica (de una línea recta). La parte de mediación que gestiona el programa se encuentra en la versatilidad que permite generar al agregar valores a la tabla.

Enseguida la tabla 14 se establece otra norma de carácter cognitivo-epistémico, pero que se apoya en el uso del software para establecer características de la pendiente de la función lineal.

Tabla 14. Estableciendo condiciones de la pendiente de la función lineal

| N° | SUCESO O NORMA (transcripción del fragmento)  | TIPO DE NORMA                                    |
|----|---|--|
| 1  | <p>Grupo 2</p> <p>E2: tío, cuando es negativo, la recta va hacia el otro lado (haciendo referencia al valor de la pendiente)</p> <p>Profesor: Exacto.</p> <p>E2: gestualiza y mueve la mano en dirección contraria</p>  | <p>Epistémica – Cognitiva</p> <p>Mediacional</p> |
| 2  | <p>Grupo 3</p> <p>Probando la aplicación para el problema 2</p> <p>Gráfico de la función.</p> <p>E8: va a ir de arriba pa' no de abajo pa' arriba.</p> <p>E7: (se acerca el profesor) con los números negativos va a ir de izquierda a derecha.</p> <p>E9: cuando ingresamos un numero negativo va de arriba abajo va de izquierda a derecha o ¿derecha a izquierda?</p> <p>Profesor: pero se lee de al frente del computador.</p> <p>E7: Entonces es de izquierda a derecha.</p> | <p>Epistémica – Cognitiva</p> <p>Mediacional</p> |

En los diálogos desarrollados por los equipos de trabajo 2 y 3 de la tabla 14, notamos que los estudiantes dialogan acerca de las condiciones en las que la pendiente de la función lineal es creciente o decreciente ( $m > 0$  y  $m < 0$ ); si bien por la edad los estudiantes no usan esos conceptos, el comportamiento de la función si lo asocian al tipo de representación gráfica, es decir, el sentido que tendrá la recta que se pinta en la pantalla.

Tabla 15. Estableciendo condiciones para una pendiente que toma valores pequeños o muy grandes

| N° | SUCESO O NORMA (transcripción del fragmento)  | TIPO DE NORMA                         |
|----|---|---------------------------------------|
| 1  | <p>Grupo 4</p> <p>E4: Tío, es que cuando le coloqué 1 hizo esto, cuando le puse 20 hizo esto (dibuja recta con las manos en la pantalla del computador).</p> <p>Profesor: entonces ¿cuál es tu conclusión?</p> <p>E4: es que cada vez que sea mayor la línea va a ser así (gesto: dibuja con las manos una recta en la mesa).</p> <p>E4: Cuanto más grande va a estar más apegada al eje.</p> | Epistémica – Cognitiva<br>Mediacional |

En la tabla 15 presentada anteriormente, los estudiantes establecen relaciones de la pendiente de la función a los valores posibles que se obtendrían con ella.

Uno de los elementos que podemos observar en los diálogos anteriores, es que los estudiantes buscaron la validación de sus observaciones con el profesor B, hecho que se ha reportado anteriormente.

### 5. CONCLUSIONES

#### Introducción

En este capítulo se encuentran las reflexiones a partir de los resultados de investigación desarrollados durante este trabajo, el cual se enfocó principalmente en explorar los procesos de interacción presentes en un taller extracurricular donde los estudiantes se enfrentaban a construir el significado de la función lineal apoyados en el uso de un software (scratch).

En el primer apartado se presentan los resultados a los objetivos de investigación, seguidos de una explicación de las limitaciones que se encontraron en el desarrollo de este estudio y finalmente las consecuencias que mis resultados pueden apoyar al desarrollo de la enseñanza.

#### 5.1 Respuestas a los objetivos de investigación

##### 5.1.1 Respuesta a los objetivos específicos de investigación

OE1. Identificar las normas que emergen cuando se institucionalizan los significados de la función lineal con scratch.

Lo primero que podemos decir de este objetivo, es que el uso del software en la actividad fue un elemento muy relevante para que los estudiantes reflexionaran sobre las características de una función lineal y el establecimiento de normas. Por otro lado, también notamos que el estudiante busca de manera constante la aprobación de un profesor en su proceso de construcción del significado de la función lineal. En general encontramos tres normas.

N1. La función lineal tiene la representación gráfica de una recta.

N2. La orientación de la recta se debe al signo de la pendiente ( $m > 0$ ,  $m < 0$  y  $m = 0$ ).

N3. Las características del valor que tome la pendiente ( $m \rightarrow 0$  o  $m \rightarrow \infty$ ) harán que esta tenga mayor o menor grado de inclinación.

Como puede notarse, se establecieron normas que están asociadas a ciertos significados parciales (propiedades) de la función lineal, y a pesar de que hubo otros tipos de significados presentes en las actividades, los estudiantes de manera autónoma no pudieron alcanzar a establecerlos y tampoco los mencionaron, de manera grupal no lograron institucionalizarlos para hacer uso de estos, tales como establecer una distinción entre una relación y una función, diferencia entre la función lineal y la función afín; entre otras.

Algunos de los factores que se consideran pudieron afectar para que no se diera la movilización de otro tipo de normas matemáticas están en función al trabajo del profesor o profesores, los cuales parecen no considerar como relevante el surgimiento de otro tipo de nociones asociadas a función lineal; esto puede deberse a que no lo manejan o que lo ven como una simple definición, por ejemplo, el caso de establecer una distinción clara entre relación y función.

OE2. Clasificar las diferentes normas que surgen cuando los estudiantes exploran las funciones lineales haciendo uso de scratch.

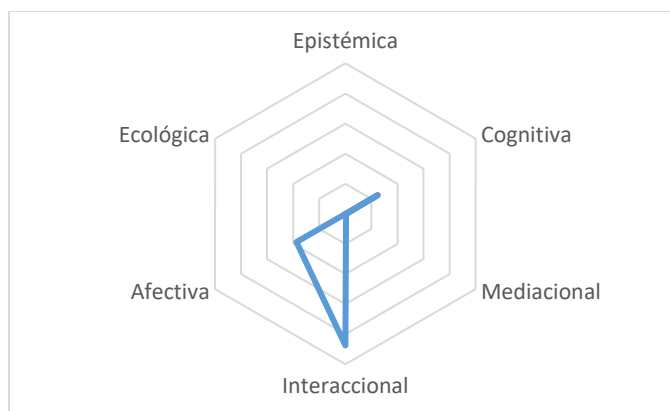
La clasificación de las normas se apoyó en las facetas normativas que regulan el proceso de estudio de la matemática en un contexto institucional determinado (Godino, Font, Wilhelm, y De Castro, 2008), abordando las interacciones entre el contenido matemático y factores: psicológicos, pedagógicos, tecnológicos, sociológicos y afectivos presentes. Se concluye, que aquellas normas en donde se pudieron institucionalizar significados a partir de la interacción entre los estudiantes, la actividad y el software, siempre requirieron de la presencia del profesor para que este validara el resultado.

En general para el grupo de sujetos de estudio fue difícil concebirlos como seres con trabajo autónomo, de este modo, las normas estuvieron cargadas de una relación trídica (profesor, alumno, medio (actividad computacional)).

A partir de la revisión de las normas en estos tres actores en general, es decir, a partir de las dimensiones en los que se realizaron el análisis (Profesor-Estudiante, Estudiante-Estudiante y Estudiante-Actividad) se ha identificado que el trabajo desarrollado en el proceso de interacción de la clase se encuentra mayormente cargado a cierto tipo de normas, como se muestra en seguida:

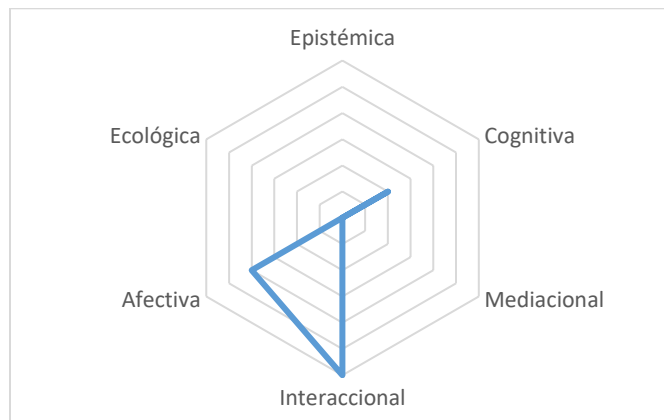
En el caso del Profesor-Estudiante: cuando se situó como punto de análisis la interacción que surgía entre el profesor-estudiante para la solución de las actividades, se ha identificado que en esta interacción hay un fuerte desarrollo de normas interaccionales y mediacionales, lo que sucede pues el profesor está muy preocupado por el desarrollo de la actividad de manera colaborativa y deja de vista el desarrollo de otros aspectos importantes en su gestión, como establecer normas de carácter epistémico y ecológica.

*Imagen 11. Diagrama de normas movilizadas en análisis Profesor-Estudiante*



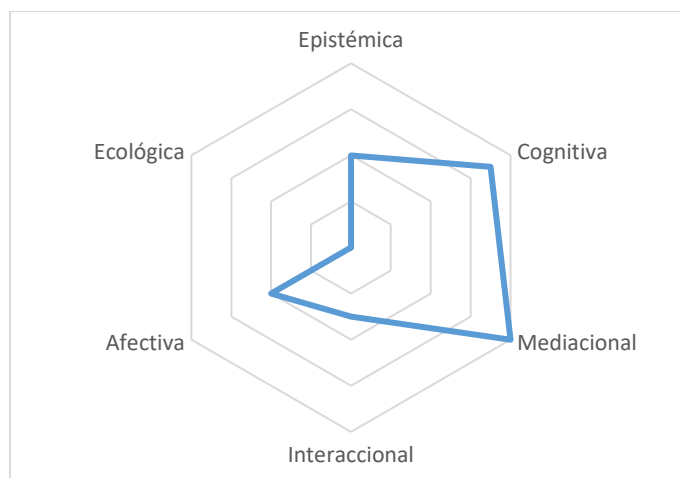
En el caso de Estudiante-Estudiante: El trabajo entre estos, aun cuando se propone autónomo, es necesario ir monitoreando, es decir, elaborar estrategias para evitar la dispersión. En la aplicación de las actividades el establecimiento de normas desarrolladas por estos estaba en lo interaccional y posteriormente en lo afectivo, cabe aclarar que la preocupación afectiva no estaba propiamente en el desarrollo de la actividad, sino en factores externos que influyen en la atención que daban los estudiantes al desarrollo de la actividad propuesta.

*Imagen 12. Diagrama de normas movilizadas en análisis Estudiante-Estudiante*



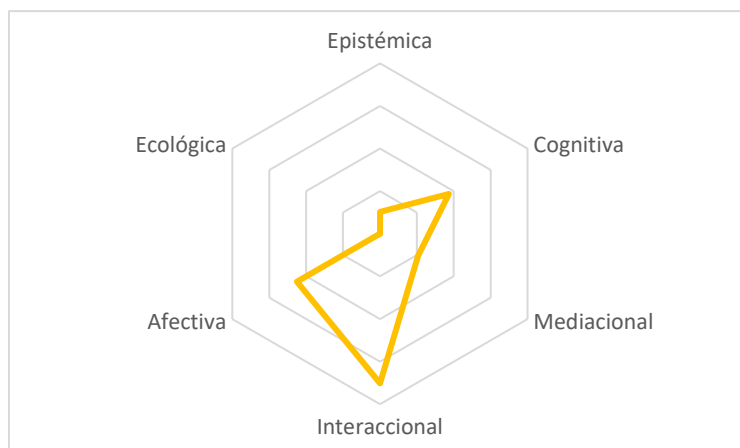
En el caso del Estudiante-Actividad: en la interacción del estudiante con la actividad, se identifican la movilización de una serie de normas básicamente apoyadas en lo mediacional y lo cognitivo. Sin embargo, se sigue percibiendo la ausencia de preocupación por aspectos como el ecológico, aun cuando el diseño estaba apoyado en la movilización de aspectos curriculares, no hubo preocupación por que se hicieran evidentes en la gestión de la actividad.

Imagen 13. Diagrama de normas movilizadas en análisis Estudiante-Actividad



Finalmente, el diagrama de la movilización de las normas es como el que se muestra en la imagen 14 durante toda la sesión considerando la relación triádica (Profesor, Estudiante Actividad) mostrando que el trabajo se apoyó en particular en la generación de normas de carácter interaccional, quedando ausentes aquellas que apoyen el trabajo matemático.

Imagen 14. Diagrama de normas movilizadas (Profesor, Estudiante, Actividad)



Lo que deja un desafío en la formación de estos profesionales de la educación en donde queda claro que una actividad bien diseñada puede aportar al desarrollo de otras normas en las clases, pero que la conciencia de la existencia de estas y su promoción es una actividad que el docente debe tener claro como parte de sus competencias docentes.

### 5.1.2 Respuesta al objetivo general de investigación

OG. Categorizar el tipo de normas que aparecen cuando se consensua sobre el significado de la función lineal al usar scratch.

El tipo de normas surgen cuando se construyen los significados de la función lineal, mientras los estudiantes se apoyan en el uso de scratch, las cuales clasificamos en dos grandes categorías siguiendo con las tradiciones investigativas, por un lado, las de carácter social y por otro las de carácter matemático, como se presenta en la siguiente tabla.

*Tabla 16. Caracterización y normas presentes en el desarrollo de un taller extracurricular*

|            | Sociales  | Matemáticas  |
|------------|---|--|
| Profesor   | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Entregar información clara y precisa de la actividad a desarrollar.</li> <li>2. Monitorear constantemente a los estudiantes.</li> <li>3. Garantizar que todos los estudiantes cuenten con acceso a los materiales necesarios para realizar la actividad.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Uso del cuestionamiento como herramienta para la reflexión de los estudiantes.</li> </ol>  |
| Estudiante | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Trabajar en equipo y dialogar sus observaciones.</li> <li>2. Validar sus resultados frente a su profesor titular y no otro.</li> <li>3. Separar las tareas presentes en la actividad.</li> </ol>  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Seguir las instrucciones, manipular el software, dialogar sobre los resultados obtenidos y establecer respuestas a lo solicitado.</li> </ol> |



|  |   |  |
|--|---|--|
|  | <p>4. Solo consultar y apoyarse en el profesor titular.</p> <p>5. Evitar ser grabados y/o ser escuchados en su reflexión.</p> |  |
|--|---|--|

Como se puede apreciar en la tabla 16, se presenta un resumen del tipo de normas presentes en las clases, a partir de esto, podemos notar que generalmente las normas son de carácter social y que estas influyeron de manera preponderante para el desarrollo de la actividad, recalcando que el uso del software fue muy novedoso e incentivó la motivación de los estudiantes.

Esta actividad también pone en evidencia las debilidades del sistema educacional chileno, en general las aulas en Chile cuentan con más de un docente en aula, por ejemplo, está la presencia del profesor titular, el profesor de educación diferencial y/o el ayudante del profesor (o practicante), es decir, en el aula se cuenta con más de un profesor, pero los estudiantes de manera implícita solo buscan el apoyo y la validación de uno de ellos. En el caso de esta investigación, luego de la observación de las actividades, se aprecia que los estudiantes buscar apoyo en el profesor B.

Estas normas de carácter social regularon de manera constante el buen funcionamiento de la actividad, otro ejemplo es la invitación a trabajar por equipo, pero los estudiantes, se dispersan en otros asuntos y no consideran su responsabilidad, por ejemplo, evitan reflexionar en conjunto y asignan tareas a cada integrante que posteriormente conjuntan.

Por ello este trabajo me parece importante, porque nos permite ver que algunas propuestas ministeriales, son importantes y se encuentra presentes en el aula, sin embargo; su funcionamiento no es del todo adecuado.

## **5.2 Limitaciones de la investigación e implicaciones a futuro**

En la exploración de este estudio nos encontramos con una serie de factores que influyeron para que no se pudiera recuperar gran parte de los resultados, como fue, la mala calidad del audio del vídeo, la disposición del aula, el estallido social en Chile, entre otros.

A través de este trabajo se ha podido observar que la implementación de tecnología en el aula va más allá de solo entender el funcionamiento de un software, hay toda una preparación del aula y del instrumento a implementar, y por sobre todo la importancia de la actitud del profesor frente a sus estudiantes.

### **5.3 Consecuencias para la enseñanza**

La consecuencia fundamental que se deriva de este estudio consiste en poder brindar una visión que guíe el camino a la implementación de la tecnología en el aula, mostrando diversos factores que influyeron en la implementación de Scratch, y que el enfoque en las normas favorece el análisis del aula de matemática usando tecnología, promoviendo mejoras enfocadas en propiciar un ambiente óptimo para alcanzar el objetivo principal que es construir un significado matemático.

También se considera que deja líneas de investigación abiertas, como es el diseño de ciclos de formación en donde el profesor incorpore la promoción de las normas como un elemento clave de su clase para el desarrollo idóneo de esta.

## REFERENCIAS

- Arnal, M., Baeza, M., & Claros, J. (2018). Representación de funciones cuadráticas en 3° ESO. Una propuesta que combina el uso de Geogebra y el pensamiento matemático avanzado. *Investigación en educación matemática XXII, SEIEM*, (pág. 609). Gijón.
- Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 13-33.
- Bastías, K., & Moreno, A. (2016). Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5° curso primaria. *Investigación en Educación Matemática XX, SEIEM.*, (pág. 565). Málaga.
- Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational studies in mathematics, 11 (1)*, 23-41.
- Bauersfeld, H., Krummheuer, G., & Voigt, J. (1988). interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies. *Foundations and methodology of discipline of mathematics education*, 174-188.
- Bell, E. T. (1997). *Historia de la matemática*. Fondo de Cultura Económica.
- Bowers, J., Cobb, P., & McClain, K. (1999). The evolution of mathematical practices: A case study. *Cognition and instruction, 17 (1)*, 25-66.
- Boyer, C. (1987). *Historia de la Matemática*. Alianza universidad textos.
- Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in the teaching and learning mathematics. *Theory of mathematics education, 54*, 110-119.
- Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield). *Dordrecht, NL: Kluwer*.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques (Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balachef, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield) Grenoble: La pensée sauvage. *Revue des science de l'éducation, 26 (2)*, 470-472.
- Cakir, A., & Akkoc, H. (2020). Examining socio-mathematical norms related to problem posing: A case of gifted and talented mathematics classroom. *Educational studies in mathematics, 105 (1)*, 19-34.
- Chevallard, Y. (1992). Intégration et viabilité des objets informatiques. *CORNU, B. (Ed) L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*.
- Clark, P. G., Moore, K. C., & Carlson, M. P. (2008). Documenting the emergence of "speaking with meaning" as a sociomathematical norm in professional learning community discourse. *The journal of mathematical behavior, 27 (4)*, 297-310.

- Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Mathematical thinking and learning*, 1 (1), 5-43.
- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational psychologist*, 31 (3-4), 175-190.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practice. *The journal of the learning sciences*, 10 (1-2), 113-163.
- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American educational research journal*, 29 (3), 573-604.
- Connelly, F. T. (2012). Classroom sociomathematical norms for proof presentation in undergraduate in abstract algebra. *The journal of mathematical behavior*, 31 (3), págs. 401-416.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 28(2), 49-77.
- De Herrero, S. M. (2004). Sistema de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, RELIME*, 7 (1), 49-78.
- Elliott, R., Kazemi, E., Lesseig, K., Mumme, J., Carroll, C., & Kelly-Petersen, M. (2009). Conceptualizar el trabajo de liderazgo de tareas matemáticas en el desarrollo profesional. *Diario de formación docente*, 60 (4), 364-379.
- Espinoza-Vasquez, G., Zakaryan, D., & Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista latinoamericana de investigación matemática educativa, RELIME*, 21 (3), 301-324.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (26), 9 - 25.
- García, V. G. (2013). Emociones de estudiantes y profesores en la sala de clases: una mirada desde el contrato didáctico. *Diálogos Educativos*, 26, 60-95.
- Ginsburg, H. (1997). The myth of deprived child: New thoughts on poor children. *Ethnomathematics: challenging eurocentrism in mathematics education*, 129-154.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Researches en didactique des mathématiques*, 26 (76), 237-284.
- Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26(1), 39-88.

- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2017). *enfoqueontosemiotico.ugr.es*. Obtenido de <http://www.enfoqueontosemiotico.ugr.es>
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & De Castro, C. (2008). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Acta Latinoamericana Educativa vol. 21* (págs. 656 - 666). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M., & Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 27 (1), 59-76.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113.
- Gorgorió, N., Herbel-Eisenmann, B., Hoffmann, A. J., & Seah, W. T. (2003). The role of beliefs, values and norms in mathematics classroom: A conceptualization of theoretical lenses. *Research pre-session of national council of teacher of mathematics annual meeting*. San Antonio Texas.
- Gorgorió, N. y Planas, N. (2005). Social representations as mediators of mathematics learning in multiethnic classrooms. *European Journal of Psychology of Education*, 20(1), 91-104.
- Güven, N. D., & Dede, Y. (2017). Examining social and socialmathematical norms in diferent clasroom microcultures: Mathematics teacher education perspective. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 17 (1), 265-292.
- Herbel-Eisenmann, B. (2003). Examining “norms” in mathematics education literature: Refining the lens. In NCTM 2003: Beliefs, values, & norms symposium.
- Herbst, P. G. (2003). Using novel tasks in teaching mathematics: Three tensions affecting the work of the teacher. *American educational research journal*, 40 (1), 197-238.
- Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (1999). The emergent perspective in rich learning enviroments: Some roles of tools and ativities in the construction of sociomathematical norms. *Educational Studies in Mathematics*, 39 (1), 149-166.
- Hoyles, C., & Sutherland, R. (1992). *Logo Mathematics in the Classroom*. Londres: Routledge.
- Kang, S. M., & KIm, M. K. (2016). Sociomathematical norms and the teacher’s mathematical belief: A case study from a Korean in-service elementary teacher. *Eurasia journal of mathematics, science & technology education*, 12 (10), 2733-2751.
- Lampert, M. (1990). When the proble is not question and the solution is not the answer: Mathematical knowing an teaching. *american educational research journal*.

- Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2006). Mathematically and practically-based explanations: Individual preferences and sociomathematical norms. *International journal of science and mathematics education*, 4 (2), 319-344.
- López, L. M., & Allal, L. (2007). Sociomathematical norms and the regulation of problem solving in the classroom microcultures. *International journal of educational research*, 46 (5), 252-265.
- Miles, M., & Huberman, A. (1994). *Qualitative data analysis*.
- MINEDUC (2020). Ministerio de Educación, Chile. Obtenido de <http://convivenciaescolar.mineduc.cl/plan-nacional-convivencia-escolar-y-aprendizaje-socioemocional>
- MINEDUC (2015). Ministerio de Educación, Chile. *Bases curriculares. 7° a 2° medio*.
- MINEDUC (2017). Ministerio de Educación, Chile. *Texto del estudiante de matemática, 8° básico*. Ediciones SM Chile S.A.
- Molina, O., & Pino-Fan, L. (2018). Diferencias entre discursos colectivos (verbales) e individuales (escritos) al hacer demostraciones en geometría: una explicación a partir del sistema de normas. *Educación matemática*, 30 (2), 73-105.
- Molina, O. (2019). Sistemas de normas que influyen en procesos de argumentación; un curso de geometría del espacio como escenario de investigación. *Tesis Doctoral*.
- Ortega, M., & Puig, L. (2015). EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON TABLETAS A TRAVÉS DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN. *Investigación en Educación Matemática XIX*, (págs. 451-458). Alicante.
- Parra Urrea, Y. E. (2015). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función lineal. (*Doctoral dissertation, Tesis de magister publicada*) Universidad de Los Lagos. Chile.
- Partanen, A. M., & Kaasila, R. (2015). Sociomathematical norms negotiated in the discussions of two small groups investigating calculus. *international journal of science and mathematics education*, 13 (4), 927-946.
- Pino-Fan, L. R., Assis, A., & Godino, J. D. (2015). Análisis del proceso de acoplamiento entre las facetas epistémicas y cognitiva del conocimiento matemático en el contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones. *Educación matemática*, 27 (1), 37-64.
- Pinto, E., & Cañadas, M. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. *Investigación en Educación Matemática XXI, SEIEM.*, (págs. 407-416). Zaragoza.
- Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Bailleul M. (Ed) Actes de la dixième université d'été de didactique*

*des mathématiques. Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instruments informatiques et de l'écrit.*

- Reina, L., Wilhelmi, M. R., & Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional: Sentidos y desafíos en educación secundaria. *Educación matemática, 24* (3), 67-69.
- Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista latinoamericana en matemática educativa, RELIME, 9* (3), 435-458.
- Retamal, I. G., Pino-Fan, L. R., & Arredondo, E. H. (2020). Paradojas didácticas observadas en la gestión de los Teoremas de Euclides. *Bolema: Boletim de Educacao matemática, 34* (67), 651-677.
- Sánchez, V., & García, M. (2014). Sociomathematical and mathematical norms related to definition in pre-service primary teacher's discourse. *Educational studies in mathematics, 85*, 305-320.
- Sekiguchi, Y. (2005). Development of mathematical norms in an Eighth-grade Japanese classroom. *International group for psychology of mathematics education, 4*, 153-160.
- Stephan, M. (2020). Normas sociomatemáticas en educación matemática. (S. Lerman, Ed.) Springer, Cham. Obtenido de Enciclopedia de educación matemática: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0\\_143](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_143)
- Stylianou, D. A., & Blanton, M. L. (2002). Sociocultural factors in undergraduate mathematics: The role of explanation and justification. *In proceeding of the second annual conference on the teaching of mathematics*. Crete, Greece.
- Sutherland., R., & Rojano, T. (2012). Technology and curricula in mathematics education. *en S. Lerman (ed.), Encyclopedia of Mathematics Education Nueva York, Springer.*
- Tatsis, K., & Koleza, E. (2008). Normas sociales y sociomatemáticas resolviendo problemas colaborativos. *Revista europea de formación del profesorado, 31* (1), 89-100.
- Taylor, S., & Bogdan, R. (1986). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. *Paidós.*
- Torres, M., Cañadas, M., & Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significados de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2° de primaria. *Investigación en educación matemática XXII, SEIEM*, (págs. 574-583). Gijón.
- Trouche, L. (2002). Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs. En: Guin, D. & Trouche, D. (Ed) Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique. *Grenoble.*
- Tsai, W. (2004). Apoyar a los maestros en el desarrollo de normas de enseñanza basadas en el aprendizaje de los niños. En M. Hoines, & A. Fuglestad (Ed.), *28° conferencia del grupo internacional de psicología de la educación matemática, 4*, págs. 329-336.

- Tsai, W. (2007). Interacciones entre las normas de enseñanza de las comunidades del aula. En J. Wood, H. Lew, K. Park, & D. Seo (Ed.), *31° Conferencia del grupo internacional de psicología de educación matemática*, 4, págs. 217-224.
- Van Zoest, L. R., & Stockero, S. L. (2012). Capitalizing on productive norms to support teacher learning. *Mathematics teacher educator*, 1 (1), 41-52.
- Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational studies in smathematics*, 26, 275-298.
- Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures*, 163-201.
- Waschescio, U. (1998). The missing link: Social and culture aspects insocial constructivist theories. (F. In Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio, Edits.) *The Culture of matematics classroom. Cambrige University press*, 221-241.
- Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. In Beliefs: A hidden variable in mathematics education? *Springer, Dordretch*, 313-330.
- Yackel, E., Cobb, P., & Wood, T. (1998). The interactive constitution of mathematical meaning in one second grade classroom: An ilustrative example. *The journal of mathematical behavior*, 17 (4), 469-488.
- Youschkevitch, A. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences, Vol 16*, 37-85.



## **ANEXOS**

Anexo A: Tarea 1

Anexo B: Tarea 2

Anexo C: Tarea 3

Anexo D: Tarea 4

## Anexo A: TAREA 1

Escuela Candelaria Carelmapu

Curso: 8° Básico

Fecha:

Nombre:

Edad:

Sexo:

### Actividades para trabajar función lineal con Scratch



#### Instrucciones

Para resolver los problemas debes leer cuidadosamente cada una de las indicaciones y responder ampliamente a los distintos cuestionamientos que encuentres. El objetivo de las actividades es realizar las tareas indicadas y dar respuesta a las preguntas que se hacen después de cada problema.

Para la solución de los problemas, podrás hacer uso de un archivo *Scratch*, recuerda solo abrir el archivo indicado para cada tarea.

## Problema 1

### Situación Problema

Un furgón escolar recorre 70 kilómetros (km) diarios para recoger a algunos estudiantes y llevarlos al colegio. Si el rendimiento del furgón es de 6 km recorridos por cada litro (l) de combustible.



Figura1. actividad\_1 el furgón escolar

**Tarea 1.** En esta tarea haremos uso del archivo **Actividad\_1.sb3**, el cual es una aplicación creada en *Scratch*, en esta encontraran dos tablas que representan las variables del problema expuesto anteriormente (figura1).

En esta aplicación pueden ingresar la cantidad de **kilómetros recorridos**. Cada vez que realicen esta acción, observen cómo se transforma la tabla correspondiente al **Gasto Combustible**.

- Ingresar los siguientes valores a la tabla 5, 10, 15, 20, 25, 30 y explicar qué sucede con los valores de la tabla gastos combustibles.

|  |
|--|
|  |
|--|

- Piensen qué sucederá, si el valor de la variable que agregan es cada vez más alto.

|  |
|--|
|  |
|--|

- Identificar la variable dependiente e independiente y por qué lo son.

### Kilómetros Recorridos

¿Por qué?

### Gastos Combustible

¿Por qué?

- Dialoguen en equipo y escriban qué relaciones o patrones se identifican dentro de las tablas.

- Establezcan por equipo una fórmula para calcular el gasto de combustible, dados la cantidad de kilómetros recorridos

- ¿Por qué o cómo se te ocurrió esta fórmula?

- Escriban una carta a un niño en otro país, donde les platiquen su técnica en la creación de la fórmula para resolver este tipo de problemas (como si fuera una receta o un acordeón para el examen). Pueden enumerar los pasos, hacer dibujos, y todo lo necesario para que se entienda.

Fecha: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_/

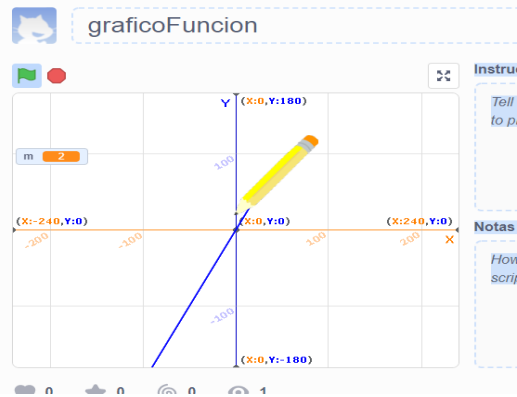
Para: \_\_\_\_\_ del país de: \_\_\_\_\_

De: \_\_\_\_\_ del país de: CHILE

**Problema 2**

**Situación problema:**

La función lineal es una recta que pasa por el origen de la forma  $Y = m X$   
¿qué sucede si variamos el valor  $m$ ?



**Figura 2.** actividad\_2 La función lineal

**Tarea 2.** En seguida se presenta una aplicación desarrollada en **Scratch** denominado **Actividad\_2.sb3**, donde se gráfica la función  $Y = m X$  para el problema expuesto inicialmente.

¿Qué pasa si cambiamos el valor de la pendiente  $m$ ? para ello grafiquemos las siguientes funciones.

- $y = 1x$
- $y = 20x$
- $y = 50x$
- ❖ Explicar los cambios que observan en las rectas que se grafican

- ❖ ¿Qué pasará con la recta si se agregan valores negativos?  
Expliquen qué se les ocurre hacer y qué valores proponen tomar.

- ❖ Y si los valores fueran números decimales. Por ejemplo,  $m=0,5$  o  $m= - 0,3$ , ¿qué pasa con las rectas?

- ❖ ¿Se encuentran diferencias de la representación gráfica entre los valores positivos grandes que asignaron a la pendiente y los valores pequeños menores a uno? Justifiquen su respuesta.

- ❖ ¿Se encuentran diferencias de la representación gráfica entre los valores negativos que asignaste a la pendiente y los valores

mayores a -1? Justifiquen su respuesta.

- Escriban una carta a un niño de otro país, donde le platicuen sus reflexiones sobre las características de la función lineal y su pendiente, de ser necesario pueden desarrollar dibujos, o cualquier otro medio para que el niño les entienda.

Fecha: \_\_\_/ \_\_\_/ \_\_\_/

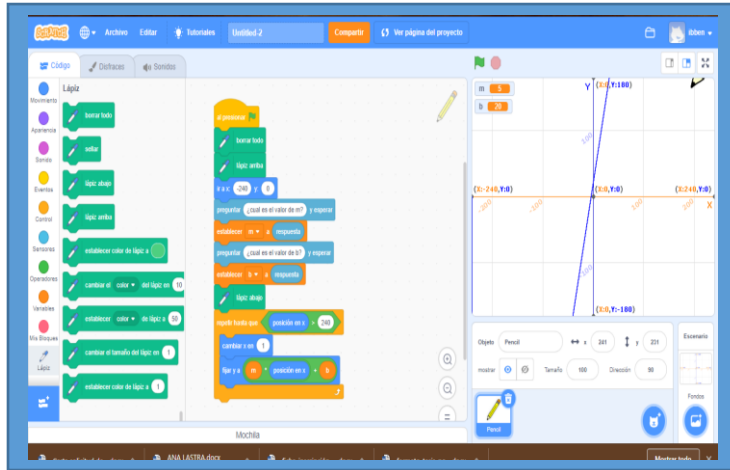
Para: \_\_\_\_\_ del país de: \_\_\_\_\_

De: \_\_\_\_\_ del país de: CHILE

**Problema 3**

**Situación problema:**

La función afín es una recta que no pasa por el origen de la forma  $Y=mX+b$  ¿qué sucede si variamos el valor  $b$ ?



**Figura 3.** actividad\_3 La función afín

**Tarea 3.** En seguida se presenta una aplicación desarrollada en **Scratch** denominado **Actividad\_3.sb3**, donde se gráfica la función  $Y=m X +b$  para el problema expuesto inicialmente.

¿Qué pasa si cambiamos el valor de la ordenada al origen  $b$ ? para ello grafiquemos las siguientes funciones.

5  $y = 5x + 2$

6  $y = 5x + 4$

7  $y = 5x + 6$

❖ Explicar los cambios que observen en las rectas que se grafican

❖ ¿Qué pasará con la recta si se agregan valores negativos al parámetro  $b$ ?

-  $y = 5x - 2$

-  $y = 5x - 4$

-  $y = 5x - 6$

- ❖ ¿Qué diferencias encuentran entre la función afín y la función lineal? o ¿en qué son similares?, de ser necesario pueden hacer dibujos para apoyar su reflexión



- ❖ Elaboren un enunciado, un dibujo o un problema que consideren divertido para enseñar la diferencia entre la función afín y la función lineal a sus compañeros.

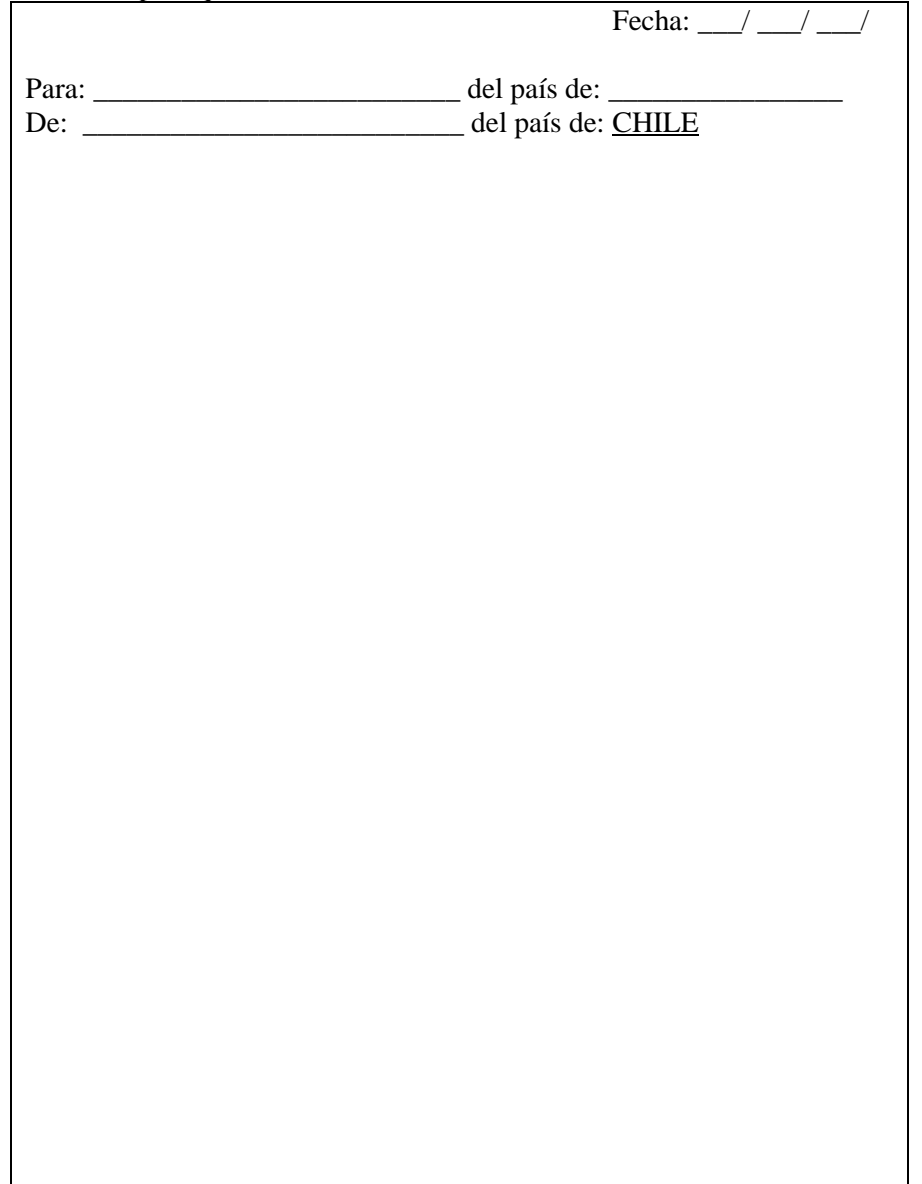


- Escriban una carta a un niño de otro país, donde le platicuen sus reflexiones sobre las características de la función afín y ordenada al origen, de ser necesario pueden desarrollar dibujos, o cualquier otro medio para que el niño te entienda.

Fecha: \_\_\_/ \_\_\_/ \_\_\_/

Para: \_\_\_\_\_ del país de: \_\_\_\_\_

De: \_\_\_\_\_ del país de: CHILE

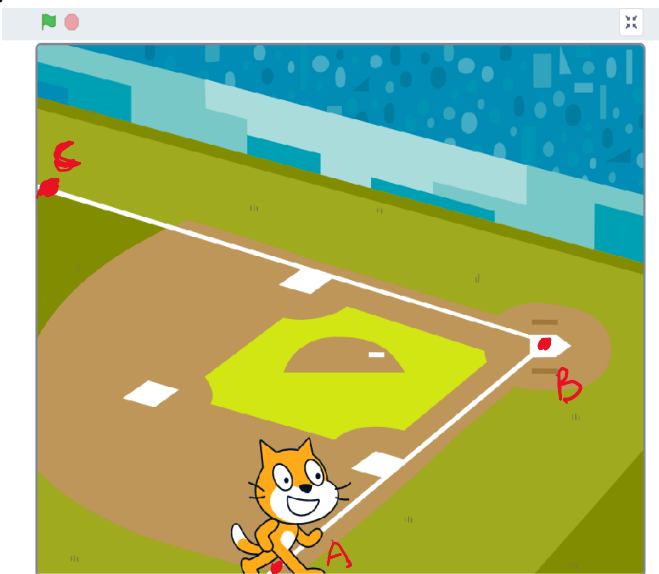




**Problema 4**

**Situación Problema**

El gatito Scratch está jugando beisbol y acaba de batear un jonrón, por lo que puede desplazarse sobre el diamante del juego, en al menos en tres puntos distintos, a saber, el punto A, el punto B y el punto C.



**Figura4.** actividad\_4 el juego de beisbol

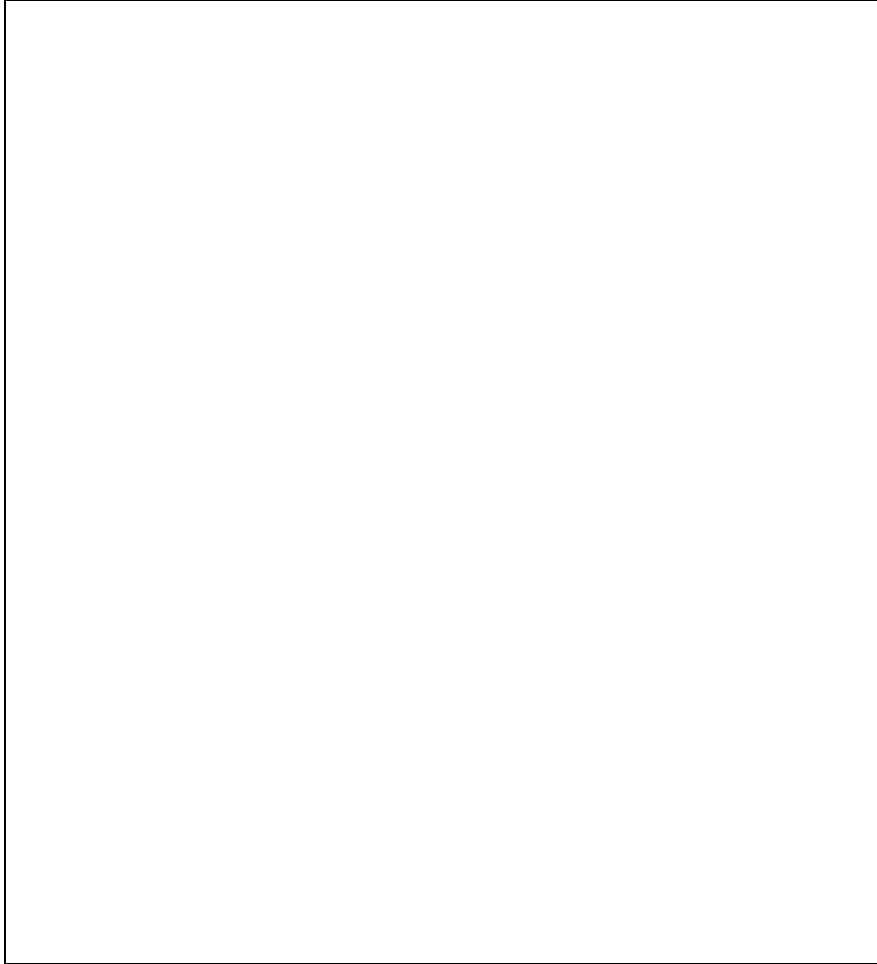
**Tarea 4.** En esta tarea haremos uso del archivo **Actividad\_4.sb3**, el cual es una aplicación creada en **Scratch**, en esta explorarán el algoritmo de desplazamiento del gatito de Scratch para que se desplace sobre las bases del diamante de beisbol (figura4).

- ¿Cuántas coordenadas debo ingresar en el algoritmo para que el gato haga el recorrido y por qué consideran eso?

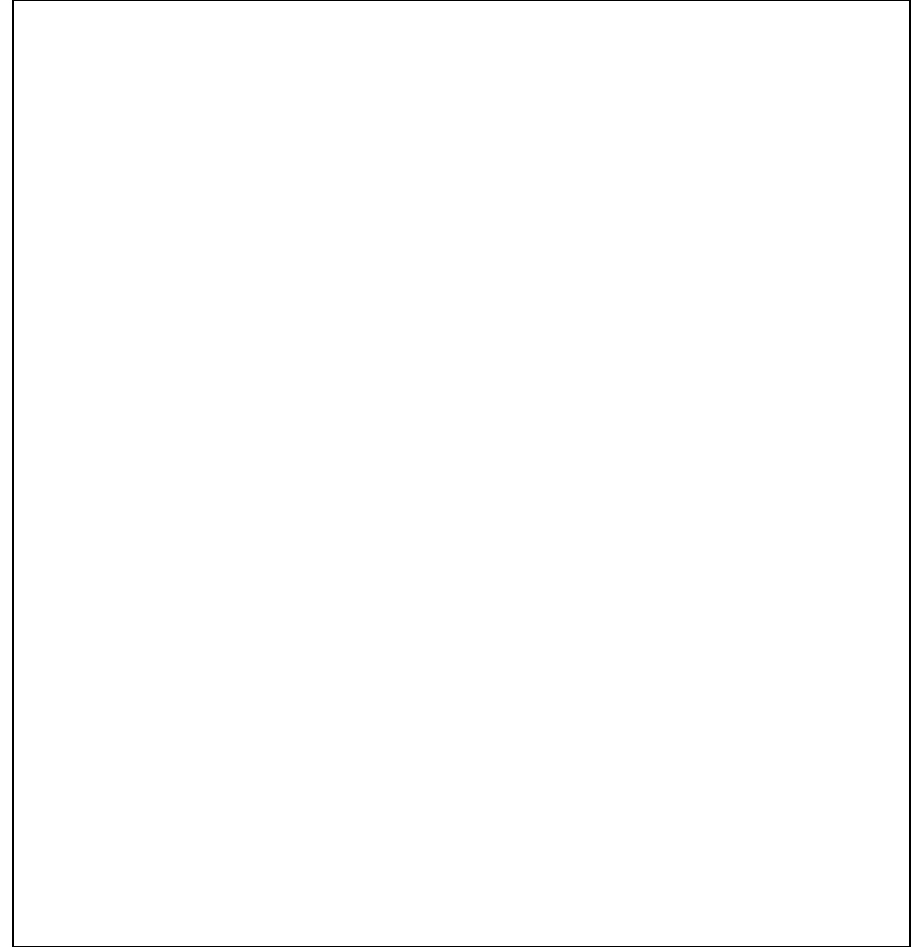
- ¿Qué podrían hacer para que el gato realice un recorrido de forma diagonal en el campo de futbol, es decir, que valla del punto A al punto C? ¿cuántas coordenadas se necesitarían para este nuevo recorrido?

- Exploren entre compañeros de equipo que comandos pueden usar para lograr que el gatito se desplace en esa pendiente y sobre esos puntos. Para ello, les proponemos jugar un lapso pequeño de tiempo con el gatito Scratch, pensando en desarrollar las siguientes acciones.
- **Acción 1:** Desplazamiento del gatito Scratch sobre el segmento AB
- **Acción 2:** Desplazamiento del gatito Scratch sobre el segmento BC
- **Acción 3:** Desplazamiento del gatito Scratch sobre el segmento AC

- Ahora que han explorado lo suficiente, relaten qué hicieron para lograr que el gatito se desplazará sobre el segmento AB; es decir, ¿qué comandos usaron y cómo se les ocurrió? ¿qué puntos usaron, fueron los únicos o hicieron varios ensayos? ¿tuvieron alguna estrategia para hacerlo más ágil o rápido?



- Ahora que han explorado lo suficiente, relaten qué hicieron para lograr que el gatito se desplazará sobre el segmento BC; es decir, ¿qué comandos usaron y cómo se les ocurrió? ¿qué puntos usaron, fueron los únicos o hicieron varios ensayos? ¿tuvieron alguna estrategia para hacerlo más ágil o rápido?



- Ahora que han explorado lo suficiente, relaten qué hicieron para lograr que el gatito se desplazará sobre el segmento AC; es decir, ¿qué comandos usaron y cómo se les ocurrió? ¿qué puntos usaron, fueron los únicos o hicieron varios ensayos? ¿tuvieron alguna estrategia para hacerlo más ágil o rápido?

- Escriban una carta a un niño de otro país, donde le platicuen su estrategia y sus ideas en cuanto a los comandos o la programación que usaron para que el gatito Scratch se hiciera el recorrido sobre los tres puntos del diamante del juego beisbol, de ser necesario pueden desarrollar dibujos, o cualquier otro medio para que el niño te entienda.

Fecha: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_/

Para: \_\_\_\_\_ del país de: \_\_\_\_\_

De: \_\_\_\_\_ del país de: CHILE