UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

ANÁLISIS DEL CURRÍCULO CHILENO EN EDUCACIÓN BÁSICA EN TORNO A LA DIVISIÓN COMO ISOMORFISMO DE MEDIDA

POR

YANET MARIBEL RIVERAS LEÓN

Tesis presentada para optar al grado académico de Magíster en Educación Matemática

Profesora guía: Dra. Maximina Márquez Torres

Osorno, sur de Chile. Enero de 2021

Si caminas solo, irás más rápido;
sí caminas acompañado, llegarás más lejos.
(Proverbio chino)

AGRADECIMIENTOS

Ante todo, quiero agradecer a Dios por darme la oportunidad de subir un peldaño más en mi formación profesional, pese a lo difícil y complejo que resultaba en ocasiones, pero a la vez fue una hermosa experiencia de aprendizaje que me enorgullece en lo profesional y personal.

Agradezco a mi directora de tesis la Dra. Maximina Márquez por apoyarme, guiarme y motivarme a seguir en este proceso, por corregir y estar pendiente de mí en todo momento.

A los académicos de la Universidad por acogerme, guiarme en este importante camino, a mis amigos Patricia Steger, Luis Ojeda y Juan Luis Prieto que siempre han estado pendiente y motivando para que este proceso llegara a su fin, mis compañeros de la cohorte 2018 – 2019 con quienes compartí hermosas experiencias.

También no quiero dejar de agradecer a mi familia por creer en mí siempre y en especial por sobre todo a mi compañero Fábio Salazar por su apoyo incondicional en este proceso que muchas veces se tornaba difícil.

Este trabajo se lleva a cabo en el marco del Proyecto Regular CR22/18 "CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA DE FUTUROS PROFESORES SOBRE LA DIVISIÓN MEDIDA", bajo la tutela de la Vicerrectoría de investigación y Postgrado de la Universidad de Los Lagos.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES E IMÁGENES

ÍNDICE DE ABREVIATURAS

AHMO	: Archivo Histórico Municipalidad de Osorno
MHNCH	: Museo de Historia Natural de Chile
AHMRE	: Archivo Histórico del Ministerio de Relaciones Exteriores

RESUMEN

El presente trabajo pretende analizar la perspectiva entorno a la *división* que promueven los programas de estudios y libros de texto emitidos por el Ministerio de Educación de Chile y justificar la importancia de realizar un análisis sobre los temas de este concepto, en enseñanza básica, debido a la relevancia que adquiere este material para el profesorado al momento de realizar sus clases, centrándonos desde 3° a 6° básico porque es a partir de ese nivel que se comienza con el algoritmo de la *división*, sin embargo existen actividades previas tales como agrupar elementos, descomponer cantidades, entre otras, las que se realizan en los niveles inferiores.

Para realizar este estudio nos hemos planteado el siguiente objetivo general el cual pretende evaluar los significados de la noción de *división* que considera el currículo chileno, tanto en los programas de estudio como en los libros de texto a la luz del Isomorfismo de medida expuestos por Vergnaud y los significados pretendidos y holísticos de referencia propuestos por el Enfoque Onto-semiótico. Para abordar esta problemática se plantean dos referentes teóricos; por un lado, la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1997) y por otro identificaremos los significados pretendidos y holísticos de referencia propuestos por el Enfoque Onto-semiótico (Godino, 1994), los cuales permiten examinar los significados involucrados en el concepto de *división* a la luz de lo que propone el currículo chileno. Para la realización de esta investigación la hemos abordado en tres fases, cada una de ellas con sus actividades que responden a los objetivos específicos que nos hemos planteado. En una primera fase hemos revisado bibliografía para explorar la noción de *división* a través de la historia, además hemos revisado literatura en relación a la noción de *división*, estrategias de resolución, dificultades que se presentan en torno a la misma. En una segunda fase, enfocadas en: analizar según Vergnaud los tipos de *división* y su estructura, así también revisión de programas de estudio y libros de texto de matemática de 1° a 6° básico, correspondientes al currículo chileno con la finalidad de identificar los conceptos implícitos en la noción de *división* presentes. Y por último una tercera fase, donde realizamos un análisis de los programas de estudio y libros de texto de 1° a 6° básico, para identificar las prácticas matemáticas que se sugieren para la noción de *división* desde el Enfoque Onto-semiótico. Los resultados muestran, por un lado, que en el currículo chileno existe una escases de problemas de Isomorfismo de medida, en especial cuando se trata de actividades de *división-medida*, dando mayor énfasis a los problemas de reparto equitativo, favoreciendo la búsqueda del algoritmo por sobre la resolución de problemas. Por otro lado, en relación al EOS, los resultados muestran que la mayoría de las actividades presentes están relacionados con el desarrollo del algoritmo de la división, transitando de lo verbal a lo concreto (3° y 4°) y de lo verbal a lo simbólico (5° y 6°).

Palabras clave: División, isomorfismo de medidas, Currículo chileno, enfoque onto-semiótico.

ABSTRACT

The current work aims to analyze the perspective around the division promoted by the study programs and textbooks issued by the Ministry of Education of Chile and justify the importance of carrying out an analysis on the topics of this concept, in primary education, due to the relevance that this material acquires for teachers at the time of their classes, focusing from 3rd to 6th grade because it is from that level that the division algorithm begins, however there are previous activities that are carried out in the lower levels.

To carry out this study we have set the following general objective which aims to evaluate the meanings of the notion of division considered by the Chilean curriculum, both in study programs and in textbooks in light of the Isomorphism of measurement exposed by Vergnaud and the purported and holistic meanings of reference proposed by the Onto-semiotic Approach.

To address this problem, two theoretical references are proposed; on the one hand, the Theory of Conceptual Fields by Vergnaud (1997) and, on the other, we will identify the intended and holistic meanings of reference proposed by the Onto-semiotic Approach (Godino, 1994), which allow us to examine the meanings involved in the concept of division in light of what the Chilean curriculum proposes. To carry out this research, we have approached it in three phases, each with its activities that respond to the specific objectives that we have set.

In a first phase, we have reviewed the literature to explore the notion of division throughout history, we have also checked literature in relation to the notion of division, resolution strategies, and difficulties that arise around it. In a second phase, focused on: analyzing according to Vergnaud the types of division and their structure, as well as reviewing study programs and math textbooks from 1^{st} to 6^{th} grade, corresponding to the Chilean curriculum in order to identify the concepts implicit in the notion of division present.

And finally a third phase, where we carry out an analysis of the study programs and textbooks from 1^{st} to 6^{th} grade, to identify the mathematical practices that are suggested for the notion of division from the Onto-semiotic Approach. The results show, on the one hand, that there are few problems of Isomorphism of measurement in the Chilean curriculum, especially when it comes to division-measurement activities, giving greater emphasis to the problems of equitable distribution, favoring the search of the algorithm over the solving problems. On the other hand, in relation to EOS, the results show that most of the activities present are related to the development of the division algorithm, moving from the verbal to the concrete (3^{rd} and 4^{th}) and from the verbal to the symbolic (5^{th} and 6^{th}).

Keywords: Division, Isomorphism of Measurements, Chilean Curriculum, Onto-semiotic Approach.

INTRODUCCIÓN GENERAL

La *división* es considerada una de las operaciones importantes dentro del currículum chileno como aquella operación que sirve para resolver problemas cotidianos de una manera más rápida y eficiente, los que se pueden desarrollar a través de la repartición de objetos equitativamente identificando cuando sobra algo luego de una repartición. Se espera que los estudiantes se familiaricen a muy temprana edad con acciones de reparto en partes iguales y a la vez que vayan buscando distintos mecanismos que le ayuden a encontrar una respuesta para saber qué hacer con lo que sobra en problemas donde la *división* tiene resto, llamada también *división* inexacta, además se espera que se comience trabajando las situaciones problemas apoyados de material concreto, luego cambien de registro a pictórico y simbólico (método COPISI), de esta forma para llegar finalmente al cálculo del algoritmo de la operación (Gutiérrez, Morales y Valdés, 2018, pp. 30 y 31).
En este trabajo pretendemos mostrar cómo el currículo chileno trabaja la noción de *división*, desde 1° a 6° año básico, desde la perspectiva de Vergnaud (1997) y el Enfoque Onto-semiótico (Godino, 1994); entendiendo por currículo la dupla formada por programas de estudios y libros de texto, estos dos instrumentos son proporcionados por el Ministerio de Educación de Chile, cuyos elementos son la base para que el profesor desarrolle y aplique sus clases en las aulas.

Por un lado, se pretende comprender cuáles son los tipos de divisiones según Verganud (1997) que se trabajan en la educación básica en Chile, por otra parte, poder identificar cuáles son los significados pretendidos por el currículo chileno en cuanto a la noción de *división*, los que podemos identificar a través de los significados pretendidos y holísticos de referencia según el Enfoque Onto-semiótico (EOS).

La presente investigación está estructurada en cuatro capítulos. En el capítulo I presentamos los antecedentes y la problemática donde realizamos un estudio histórico epistemológico de cómo se ha trabajado la *división* desde los antiguos griegos, egipcios, entre otros; posteriormente se revisaron algunas investigaciones enfocadas en cómo se aborda la *división* y los tipos de divisiones en países como por ejemplo España, México, entre otros. En el capítulo II, nos referiremos a las teorías en las cuales nos basaremos para realizar el análisis de los programas de estudio y libros de texto, es decir, la Teoría de los campos conceptuales propuestas por Vergnaud (1997) y el Enfoque Onto-semiótico (EOS). La teoría de los campos conceptuales nos permitirá centrar el análisis en la actividad cognitiva de las actividades propuestas por el currículum chileno y el Enfoque Onto-semiótico nos ayudará visualizar cuáles son los significados pretendidos y holísticos de referencias en los programas y libros de texto. En lo que respecta al capítulo III, nos referimos al análisis realizado de los libros de texto y programas de estudio luego de una revisión acabada desde 1° a 6° básico a la luz del Isomorfismo de medida propuesto por Vergnaud y los significados pretendidos en el Enfoque Onto-semiótico y por último en el capítulo IV hemos realizado las conclusiones respecto a los objetivos específicos que nos hemos planteado.

CAPÍTULO 1. Área Problemática y Antecedentes

1.1 Introducción.

En este trabajo abordaremos la problemática de investigación en dos apartados. La primera, hacemos un análisis histórico-documental sobre la noción de *división*, realizando un recorrido desde los griegos, egipcios, entre otros y cómo estos se enfrentaban a situaciones relacionadas con la resolución de problemas cotidianos, en los que estaba presente la *división*, llegando hasta aplicaciones que se le han asignado en el siglo XX. En el segundo apartado presentamos las principales dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje la noción de *división*. Se hace relevante abordar la *división* desde sus inicios y visualizar como se ha trabajado esta operación y cuáles han sido los obstáculos que se han presentado a lo largo de la historia.

1.2 Estudio Histórico – Documental de la Noción de División

La historia nos afirma que el surgimiento de los conceptos matemáticos y los procedimientos en la resolución de problemas datan de períodos muy antiguos, es decir, antes de Cristo, además los procesos de interpretación de estos tardaron muchos años; su comienzo se debe específicamente por una necesidad de intercambio de especies, agregar, calcular, entre otros. A pesar que el conocimiento matemático se presentó y desarrolló de una manera diferente en los pueblos, estos tenían en común los conceptos básicos de las matemáticas, tales como: concepto de número, figura, área, prolongación infinita de la serie natural, etc. (Ríbnikov, 1974).

Los conceptos matemáticos nacen principalmente a raíz de la necesidad que tiene el hombre de comunicar información, calcular, representar cantidades.

1.2.1. 1° De la época más remota a la antigua Babilonia y Egipto, inclusive.

A pesar de que no se tiene certeza del por qué, ni cuando nacen los números, Bell (1985), nos señala que solo se tienen datos históricos que tienen su origen en las culturas de Egipto y Mesopotamia, además se sabe que estas civilizaciones sentaron las bases para el trabajo de otros matemáticos que se dedicaron al estudio de esta ciencia.

Ribnikov (1974), nos menciona que para los egipcios los conocimientos matemáticos están principalmente en dos grandes papiros, uno de ellos es el papiro de Rhind, en el que se encuentran 84 problemas de aplicación, en los cuales se emplearon diferentes operaciones aritméticas para resolverlos, además se hicieron distintos cálculos para desarrollar problemas relacionados con la *división* proporcional. Al momento de escribir estos papiros ya estaba constituido un sistema de numeración, estos se escribían con distintas combinaciones de números claves. Con la ayuda de este sistema los egipcios resolvieron todo tipo de cálculos con números enteros, en cambio para el desarrollo de situaciones en las que se empleaban las fracciones se apoyaron en la creación de un aparato especial en el que interpretaban la fracción solo como parte de la unidad. Además se han formado diferentes métodos de operaciones matemáticas con números enteros y fracciones, siendo característico del sistema egipcio que estos procedimientos se reduzcan a sumas, en tanto para la resolución de situaciones problemáticas de multiplicación se utilizaba el método de la duplicación de las cantidades, método que también se utilizaba para resolver problemas relacionados con la *división*, primeramente se aplicaba la duplicación de los datos numéricos y posteriormente *división* sucesiva por la mitad, siendo esta operación al parecer la más compleja.

En tanto, para los babilonios era más fácil realizar cálculos de multiplicación que de *división,* es por eso que se conoce escasa información de esta operación, una de las formas que aplicaban era reunir incansables tablas que les eran útiles al momento de resolver sus operaciones, es por tal motivo que su aproximación a la *división* se realizaba a través de las fracciones que fuesen conocidas para ellos, buscando siempre que no se transformaran en un problema al momento de resolverlas, pues eran eliminadas automáticamente durante el proceso de resolución. A pesar que eran considerados expertos en cálculos no se conoce mucha evidencia de problemas relacionados con la operación de *división,* puesto que no tenían experticia para resolverlas.

En las tablillas utilizadas por los babilonios se reconocen muchas reglas que se utilizaban en el cálculo de operaciones aritméticas, las que estaban relacionadas con números enteros y fracciones, además de la existencia de tablas de multiplicar, las que de igual manera se utilizaban para el cálculo de la *división* usando los valores inversos (Ríbnikov, 1974). En tanto Bell (1985), menciona que las ampliaciones que se realizaron a los números naturales fueron a través de las fracciones que aplicaron los babilonios y egipcios como una forma de demostrar nuevos números, utilizando el método de la aplicación de una operación y luego realizar la inversa, por tratarse de operaciones ya conocidas, en el caso para resolver el siguiente problema, ¿Por qué número hay que multiplicar 6 para que dé como resultado 2? Primero se debe aplicar una multiplicación por $\frac{1}{2}$ y luego emplear una *división* por 2, siguiendo la regla que utilizaban, primero multiplicar y luego aplicar la operación inversa.

En este período, el principal aporte que se realizó a las matemáticas fue la ampliación que se le aplica a los números naturales a través de las fracciones, las que ya eran conocidas y trabajadas por los egipcios y babilonios, las aplicaciones que se le dieron fue realizar una operación y posteriormente su inversa, por ejemplo, al resolver problemas donde se debía aplicar una *división*, primero se multiplicaba y posteriormente se dividía por la mitad.

Tanto los egipcios como los babilonios eran civilizaciones consideradas pueblos con grandes conocimiento en cálculos matemáticos y quienes hicieron grandes aportes a las matemáticas, es poco lo que se conoce de ellos en relación al uso de la *división* por considerarse una de las operaciones difíciles de resolver, en el caso de los egipcios lograron resolver algunas situaciones en las que era necesario aplicar fracciones y/o proporciones, en tanto los babilonios la llevaron a cabo a través de la duplicación de los datos y luego aplicando el cálculo de la mitad de los mismos.

1.2.2. 2° La contribución griega, desde cerca de 600 años a. C., hasta aproximadamente el año 300 de nuestra era.

Según Bell (1985), los griegos realizaron dos importantes aportes a las matemáticas, el primero de ellos relacionado con el reconocimiento explícito de la demostración en geometría y aritmética, otro de los aportes es la conjetura en la que la naturaleza puede ser comprendida por los seres humanos a través de las matemáticas, es decir, cómo el lenguaje de las matemáticas ayuda a la comprensión de la complejidad de la naturaleza. En el caso de la aritmética se ocupaban del estudio de las propiedades de los números, en tanto Euclides demostró los teoremas fundamentales sobre la divisibilidad aritmética, el que más tarde dedujo Gauss, en él se daba a conocer que un número entero positivo se puede descomponer en el producto de dos números primos menores que él, correspondiente al teorema fundamental de la aritmética, a pesar de que a Euclides no se le atribuyen los teoremas, ya que no son descubiertos por él, fue el primero que los dio a conocer a través de demostraciones en los Elementos. Ambos aportes son atribuibles a los pitagóricos alrededor del siglo VI A. C., aunque no se sabe con certeza de su origen, más tarde Thales hace su primera demostración de su teorema en geometría, a pesar de ello no existen pruebas de que fuese él quien propuso definiciones, postulados, teoremas como un método universal de las matemáticas, reconociendo a los pitagóricos como la primera sociedad de científicos que trabajaron de manera colaborativa por el año 400 A. C.

Dentro de las matemáticas, la aritmética es la más fundamental, ya que brinda la base para las demás ramas que surgen de esta ciencia.

Boyer (1986, p 157), nos da a conocer que en el libro VII de Los elementos de Euclides, que dos proposiciones constituyen la regla de la teoría de números, la que actualmente se conoce como el "algoritmo de Euclides". Ella se aplicaba para el cálculo del máximo común divisor de dos números dados, consiste en un esquema que sugiere una aplicación inversa y repetida del axioma de Eudoxo, en la cual se menciona que dado dos números distintos se resta el menor *a* del mayor *b* repetidamente a este resto r_1 más pequeño que el menor, a continuación, se resta repetidamente *a* este resto r_1 de a hasta obtener un resto $r_2 < r_1$; luego se resta repetidamente r_2 de r_1 y así sucesivamente. Al final este proceso conducirá a un resto r_n que medirá a r_{n-1}, posteriormente a todos los restos anteriores, así como a *a* y a *b;* este número r_n será el máximo común divisor de *a* y de *b*.

Este proceso se lleva a cabo de la siguiente forma: dado dos números, se resta el número menor al número mayor tantas veces hasta que quede la menor cantidad posible, repitiendo el proceso las veces que sea necesario, lo que podemos ver es un proceso de relación de medida, considerando razones entre magnitudes; en el caso de números es importante destacar que siempre este proceso termina con un número finito de veces, ya que existe un máximo común divisor. (Gairín y Oller, 2013). En muchas ocasiones se nos presentan problemas de la vida diaria donde es necesario abordarlo desde las proporciones para su resolución, ya que nos brindan una importante herramienta de utilización, además es un tópico que es utilizado en distintas partes del mundo en el currículo (programas de estudio y libros de texto), desde ya hace un poco más de 200 años.

Si bien los griegos han realizado grandes aportes a las matemáticas tanto en la contribución que han realizado a la aritmética, a la geometría entre otras áreas, el mayor aporte es el que realizó Euclides en sus libros denominados "los elementos de Euclides" en la búsqueda del algoritmo, en estos escritos se sientan las bases para futuras investigaciones realizadas para las demás ciencias.

1.2.3. 3° Los pueblos orientales y semíticos —hindú, chino, persa, musulmán, judío.

Los conocimientos que se tienen de las matemáticas de la Antigua China es que se introdujeron las fracciones simples y las operaciones aritméticas. En la *división* de fracciones se buscaba un común denominador. En cuanto a los problemas que se trabajaban estaban relacionados con situaciones concretas los que se resolvían utilizando mayormente la regla de tres y divisiones proporcionales, de esta manera las situaciones problemáticas en las que era necesario utilizar la *división* para resolverlas eran reemplazadas por las proporciones simples y compuestas. (Ríbnikov, 1974).

Las matemáticas en la India Antigua tenían mucho en común con las de la China, ciencia muy antigua que predominaron los procedimientos de cálculo – algorítmico, la resolución de problemas consiste en realizar sucesivamente las operaciones en orden inverso. (Ríbnikov, 1974)

Boyer (1986), afirma que se cree que el sistema de numeración hindú posiblemente proviene de la comunicación que se tenía con las culturas occidentales como India, Persia, pues ellos tenían conocimiento de la notación posicional, otro de los orígenes pudo venir desde los chinos, ya que estos utilizaban nueve barras como un valor seudoposicional. El sistema numérico Hindú tiene su origen alrededor del año 662 sus escritos en Severo Sebokt, utilizando solo nueve signos para realizar sus cálculos, dos siglos más tarde aparece un símbolo que vino a llenar un espacio vacío denominado cero; a pesar de que es probable que los hindúes no son los que han creado un sistema numérico propio, se atribuye a ellos el orden que le dieron considerando tres combinaciones importantes, tales como: 1) una base decimal; 2) una notación posicional y 3) una forma cifrada para cada uno de los diez elementos básicos, esto permitió construir un sistema de numeración moderno. Para los hindúes las operaciones de suma y multiplicación eran muy parecidas a las nuestras, en cambio en el caso de la *división*, era considerada una *división* larga, pues uno de los métodos utilizados era similar al nuestro, en tanto la otra forma de resolver era ir eliminando a través de las restas e ir escribiendo las diferencias, en el caso de la figura 1, en el caso de la figura 2 se muestra un procedimiento en el que el dividendo aparece en el centro, puesto que las restas se realizan cancelando los dígitos y poniendo encima de los minuendos y no debajo como en la figura 1, a continuación se muestra un ejemplo con los dos métodos utilizados, por ejemplo 44.977 dividido entre 382.

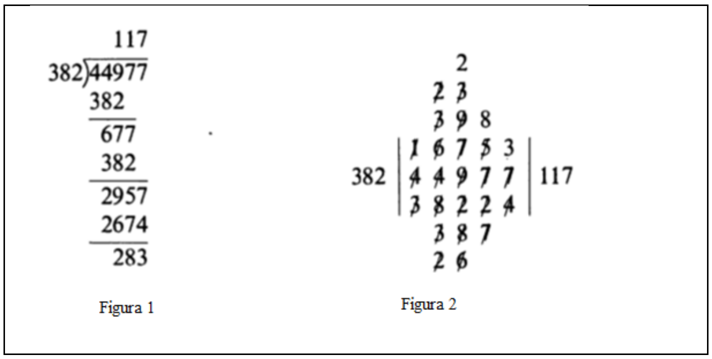


FIGURA 1. 1. ALGORITMO DE LA DIVISIÓN LARGA BOYER (1986)

El imperio musulmán aporta al mundo de las ciencias con más de media docena de libros relacionados con la astronomía y las matemáticas, además se funda la "Casa de la Sabiduría", lugar similar a una universidad, el que era comparado con un Museo de Alejandría, aquí se encontraba un matemático y astrónomo, quien hizo grandes aportes, en sus escritos trata temas relacionados con el astrolabio y el reloj de sol, además de dos libros de aritmética y álgebra muy importantes en la historia de las matemáticas (Boyer, 1986).

Por otro lado, mientras la civilización europea se desbarataba, Bell (1985), nos da a conocer que los musulmanes desarrollaban el álgebra y la aritmética tomada de la cultura india con la finalidad de prepararse para el Renacimiento europeo. En tanto los mahometanos fueron quienes llevaron a Europa la aritmética y el álgebra que procedía desde Grecia y la India, incluyendo la geometría griega. Además del aporte que realizaron los musulmanes al álgebra que dependía de la aritmética y la geometría, también se encuentra la trigonometría, rama que se le conoce como una parte separada de las matemáticas. Obra que se les atribuye a los musulmanes como lo más importante y original, pese a que no tiene importancia para las matemáticas actuales, pero si se llega a comparar con el álgebra de los hindúes, o la de los musulmanes.

El pueblo que mayormente profundizó en el cálculo del algoritmo de la *división* fueron los chinos, abordándolas desde la búsqueda del algoritmo de las fracciones y las proporciones simples y compuestas por medio de la utilización de la regla de tres, lo que ocasiona un cálculo más complejo de realizar, en tanto los hindúes realizaban dos formas para calcular el algoritmo de la *división* uno era muy similar al nuestro pero que ellos consideraban un tanto extenso, por último el pueblo musulmán a pesar de realizar grandes aportaciones a las ciencias, la astronomía, la aritmética entre otros es poco lo que se conoce del algoritmo de la *división*.

1.2.4. 4° Europa durante el Renacimiento y la Reforma, aproximadamente los siglos XV y XVI.

Según D´Amore (2005), los algoritmos que se utilizan en la actualidad son derivados de los árabes, con precedentes desde la India, los que en los siglos XIII, XIV y XV, llegaron a Europa y se utilizaba material concreto tales como: el uso de ábacos y piedras, hubo una gran resistencia por lo que pasaron siglos antes que los académicos del mundo europeo, aceptasen estos “instrumentos” de cálculo, los que eran rápidos y menos complicados de aplicar.

Los pueblos civilizados a lo largo de su historia se han preocupado del estudio de las matemáticas, llegando a nosotros a través de dos corrientes, como lo son la forma y el número, en tanto los números consideran la aritmética y el álgebra, y por consiguiente la forma se relaciona con la geometría, uniéndose en el siglo XVII conformando la corriente del análisis matemático. No se sabe con certeza desde cuándo y dónde se comienzan a deducir y analizar los distintos postulados, lo único que se sabe es que se inicia con los griegos en los años 550 a. C., sin embargo, se cree que los egipcios y los babilónicos alrededor del 2000 a. C ya habían admitido la necesidad de realizar demostraciones deductivas con la finalidad de comprobar cálculos matemáticos relacionados con la vida diaria. Por ende, se ha valorado la presencia de las matemáticas, desde Babilonia y Egipto hasta la fecha, como una fuente importante para resolver problemas complejos de la vida cotidiana. Los babilónicos fueron los compiladores de las tablas aritméticas que registra la historia, ya que era más fácil multiplicar que dividir, por lo que evitaban resolver divisiones complejas eliminándolas automáticamente durante el momento en que trabajaban. La aritmética del sistema decimal egipcio, era apta para realizar las operaciones de adición, la sustracción. La multiplicación y la *división*, se aplicaban a problemas sencillos, las divisiones eran consideradas una de las operaciones más complejas, por lo que se desarrollaban por medio de fracciones unitarias, las que en algunas circunstancias se debían resolver por medio de una ecuación debido a su dificultad. (Bell, 1985).

El hombre a lo largo de la historia ha construido diferentes algoritmos para la resolución de problemas de multiplicación y *división*, así los señala Maza (1991), quien además menciona que las distintas culturas que se han dedicado a la creación de algoritmos, lo han realizado de manera independiente, la que no ha sido tal, pues cada una de ellas ha ido tomando una parte de otra cultura, haciendo modificaciones a la ya existente, esto no ha permitido un desarrollo creciente de los algoritmos presentados por los distintos pueblos. Algunos de los algoritmos han sido registrados en forma escrita, entre los que podemos mencionar son, tablillas de barro, pedazo de mármol, pergaminos, entre otros.

Por lo mencionado anteriormente es importante estudiar el aspecto histórico del algoritmo de las operaciones para comprender el porqué de su utilización y en qué contextos eran utilizadas, de esta manera se logra la comprensión del por qué adopta dicha forma y no otra. Si se desea fomentar la comprensión del algoritmo es necesario comprenderlo desde su nacimiento, observando las dificultades que tuvieron que vencer las distintas culturas hasta llegar a la forma que han adoptado. Agregar que el algoritmo de la *división* se debe enseñar inmediatamente después de la multiplicación, no solamente porque la *división* es la operatoria inversa, sino porque para los estudiantes les resulta más difícil que la multiplicación.

1.2.5. 5° Los siglos XVII y XVIII.

En este período Descartes relaciona el álgebra literal con las curvas geométricas, estableciendo el isomorfismo entre los números reales y el campo de los segmentos de recta. Se requería definir las operaciones con segmentos de tal forma que los segmentos constituyeran un campo, suma y diferencia entre ellos es un segmento, la dificultad con la multiplicación y *división* de segmentos obligó a Viéte a introducir el álgebra de formas, la que fue superada por Descartes mediante el segmento de unidad y la construcción del cuarto segmento proporcional. Además, el cálculo aritmético fue enriquecido con la utilización de logaritmos y las tablas correspondientes, en tanto en el desarrollo del cálculo se reveló el concepto de número negativo y la situación de desigualdad de las fracciones decimales comparativas con las ordinarias. Ribnikov (1974)
Las matemáticas toman relevancia haciendo aportes prácticos en el desarrollo de otras ciencias, teniendo además grandes transformaciones en el álgebra, geometría analítica, entre otras, es en este período donde se les dan distintas aplicaciones a las distintas ramas de las matemáticas.

1.2.6. 6° El siglo XIX.

Si bien en este período no se mostraron avances en la aritmética, se apoyaron de lo que ya se conocía de ella para el trabajo realizado, ya que se realizaron importantes avances en el estudio de las ciencias y las matemáticas es por eso que se reconoce como la época de las matemáticas modernas por las constantes transformaciones, entre ellos están los trabajos de Abel y Galois sobre resolución de ecuaciones algebraicas en radicales, ascendiendo conceptos del álgebra abstracta a uno más general llamado grupo, la creación y el desarrollo de esta teoría se convierten en los principales problemas del álgebra moderna. Otro de los aportes a las matemáticas es el realizado a la geometría hiperbólica no euclideana por Lobachevski, Bolyai y Gauss, generando transformaciones de carácter revolucionario, los que provocaron cambios en el aspecto de la geometría relacionados con las matemáticas. En este período Gauss realizando sus primeros descubrimientos en el álgebra y utilizando las operaciones ya conocidas logró resolver problemas de la búsqueda de raíces y observó la relación que existe entre estos problemas y la *división* de la circunferencia en partes iguales, lo que se demuestra que si se tiene un polígono de 17 lados este se puede inscribir en el círculo mediante el apoyo de instrumentos geométricos como lo son la regla y compás. Ribnikov (1974).

1.2.7. 7° El siglo XX.

Durante este período se realizan distintas investigaciones relacionadas con las matemáticas, entre ellas la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990) donde se trabajan problemas de Estructuras multiplicativas, en la que se distinguen dos grandes relaciones multiplicativas (este tipo de problemas comparten una multiplicación o una *división*): Isomorfismo de Medida y Producto de Medida. En el caso de los problemas de Isomorfismo de medida se conocen tres tipos de problemas: Multiplicación, *División-partitiva* y *división-medida.*

En Chile el tipo de *división* que mayormente es abordada por el profesor en las aulas está relacionada con el reparto equitativo, por ejemplo el estudiante debe repartir en partes iguales una cantidad y encontrar el cociente, la mayoría estas divisiones tienen resto cero, estas actividades están enfocadas principalmente en la búsqueda del algoritmo, ejercicios que están relacionados con la *división* exacta, también se trabajan aquellas divisiones en las que sobra una cantidad pero con menor frecuencia, a este tipo de *división* se les denomina divisiones inexactas, este es el nombre con el cuál son presentadas a los alumnos. Esta operación (división), es considerada la más compleja de por los estudiantes.

1.3. Dificultades en torno de la *división*.

En este apartado nos referiremos a la noción de *división*, el cual se trabaja en educación primaria. La dificultad que conlleva el proceso ha sido ocasión para realizar distintas investigaciones, desde la introducción al desarrollo del algoritmo. Una de las formas en cómo se puede ayudar en las mejoras de las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de la *división*, pueden estar relacionadas con el tipo de material que se les proporciona a los profesores, ya sean libros de textos u otro tipo de recursos que ayuden a estos en la enseñanza. (Flores y Piñeiro, 2016).

Diferentes estudios se han referido a la enseñanza y aprendizaje de algoritmos aritméticos, los que han sido motivo de discusión en cuanto al proceso de cómo se enfoca el concepto y cuáles son los procedimientos que se utilizan para llevar a cabo la enseñanza de los algoritmos.

En cuanto a la búsqueda de algoritmos en resolución de problemas, De Castro y Escorial (2007), señalan que se han realizado talleres con estudiantes, en los que se les ha solicitado resolver problemas de estructuras aditivas y estructuras multiplicativas. Durante el trabajo se plantearon problemas de multiplicación, *división* reparto y *división* agrupamiento, utilizando el conteo de elementos. Las situaciones problemáticas que se desarrollaron fueron cercanos a los estudiantes relacionados con acciones vividas anteriormente y el material que se les proporcionó para resolver era el que ellos elegían. Sin embargo, al resolver los problemas en los que debían aplicar el algoritmo de la *división* presentaron mayor dificultad por considerarse esta operación de mayor complejidad. Los resultados de esta investigación también muestran que muchas veces los profesores se ven enfrentados a varias dificultades al momento de trabajar los problemas en el aula, ya que a pesar que se mencionan en la planificación o diseño pedagógico estos casi siempre aparecen muy esporádicamente y poco contextualizados, y más aún cuando se trabaja con la *división*, siendo los ejercicios los que predominan en las aulas, además el material que se selecciona para el trabajo con los alumnos en muchas ocasiones no es el más apropiado lo que en lugar de lograr aprendizajes genera dificultades, originando en los niños frustración y distanciamiento hacia las matemáticas.

Los problemas de *división* han sido y son considerados por naturaleza los más complejos de las operaciones aritméticas, así lo detalla Saíz (1994), quien realiza una investigación, cuyo objetivo era ver algunas de las dificultades que presentan los niños al resolver problemas de *división*, con la finalidad de aportar a los maestros con algunas estrategias que le permitieran dar solución a los inconvenientes que presentaran los estudiantes, los profesores que participaron estaban interesados en revertir la falta de aprendizaje con los que ellos se enfrentaban al dar la clase con este tipo de actividades, la principal preocupación que enfrentan los profesores que muchas veces carecen de estrategias para enseñar a los alumnos, o de qué operación utilizar en el caso de presentar una situación problemática, si se refiere a una *división* o multiplicación, ya que la distinción de una u otra les cuesta mucho a los niños, pues las indicaciones de los profesores muchas veces tampoco ayudaban en la elección y de esta forma llegar prontamente a resultados óptimos. Otro de los errores que presentaban era al resolver divisiones con resto, les costaba mucho la interpretación de este.

Las actividades previas a la *división* deben estar apoyadas de mucho material concreto, donde los niños manipulen, descompongan cantidades, formen números, entre otras actividades previas, de tal manera que vayan construyendo el concepto para que en futuras actividades las puedan realizar sin dificultades. Ya que las principales dificultades que presentan los estudiantes al momento de resolver problemas de *división* es que estos son muy poco comunes para los estudiantes, alejados a su realidad, el material a utilizar en la mayoría de las ocasiones es escaso, por lo general el material más utilizado por el profesor es el libro de texto, a pesar de considerarse una de las operaciones más complejas de desarrollar, no se le ha dado la importancia de seleccionar el material y problemas reales y contextualizados para que el estudiante se familiarice de una manera más cercana al resolver situaciones en las que debe aplicar el algoritmo de la *división*.

1.3.1. Estudios con estudiantes sobre los problemas de División.

La noción de *división* debe ser trabajada por los estudiantes con problemas que estén enfocados en la construcción de esta y basada en el desarrollo de habilidades, es por eso que se han realizado algunos trabajos relacionados con el tema. Bien lo señala Ordoñez (2019) quien menciona que se han desarrollado investigaciones en los cuales se trabaja la *división*, donde se han aplicado problemas enfocados en el desarrollo de habilidades, pese a que los estudiantes desconocen cómo resolver esta operación, el concepto de reparto equitativo es un concepto intuitivo para los estudiantes, ya que el realizarlo es muy natural para ellos, pues está dentro de las actividades que realizan constantemente, además que la enseñanza basada en el desarrollo de habilidades permite que los estudiantes logren construir sus propios conocimientos dándose cuenta de la relación que existe entre el divisor y resto, lo que permite que los niños comprendan la noción de *división* y no que aprendan la operación de memoria, de esta manera se evitan conflictos en futuros problemas.

En cuanto a los problemas de Isomorfismo de medida, García y Suárez (2011), señalan que este tipo de problemas aparece en la mayoría de las actividades propuestas para desarrollar la multiplicación en la educación básica y en los niveles superiores. Los problemas están relacionados con *división* simple, búsqueda de la unidad, estos presentan menor dificultad que los problemas simples de *división*, se encontró que los problemas de isomorfismo de medida en los que el enunciado se presenta empleando representación verbal-icónica y verbal-tabular, son más fáciles de comprender, puesto que estos en su mayoría se apoyan por el dibujo, lo que facilita el proceso, expresando un mayor éxito por parte de los estudiantes.

En relación a los distintos niveles de éxito y dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas de estructura multiplicativa, entre ellos los de isomorfismo de medida: *división-medida* y *división-partitiva*, Ivars y Fernández (2016), revelan que los estudiantes presentan mayores dificultades al resolver problemas de *división-medida* en relación a los de *división-partitiva*, esto se debe a que es una acción que realizan a diario sin darse cuenta y de manera intuitiva, siendo este tipo de actividades más familiar, en el caso de los problemas de *división-medida* presentan mayor dificultad por considerarse una actividad que se trabaja con menor frecuencia en las aulas.

Muchas veces cuando los estudiantes se enfrentan a problemas de campo conceptual de las estructuras multiplicativas, problemas de isomorfismo de medida del tipo *división-reparto*, carecen de estrategias que les permitan desarrollar con éxito las actividades. Se cree que estas dificultades están relacionadas con el tipo de lenguaje, la notación y de dominio de conceptos involucrados, así lo señalan, Bustamante y Vaca (2014), estas carencias ayudan a que los resultados sean bajos en las pruebas estandarizadas.

Se han realizado varias investigaciones en las cuales se selecciona a estudiantes de distintos lugares para que realicen problemas en los deben aplicar problemas de multiplicación y *división*, García, Vásquez y Zarzosa (2013), dan a conocer que durante la intervención se descubrió que los estudiantes presentan dificultades en la resolución de las operaciones de multiplicación y *división*, en especial cuando había cantidades superiores a la decena, motivo por el cual se tuvo que destinar de tiempo extra para corregir este tipo de problemas, combinando los procedimientos de enseñanza.

De igual manera, Lago, Rodríguez, Enesco, Jiménez y Dopico (2008), señalan que al realizar el análisis de una investigación en la cual los estudiantes debían resolver problemas de *división-partitiva* y *división-medida* con resto, los estudiantes no tuvieron grandes dificultades al momento de señalar que deberían aplicar una *división* para resolver el problema correctamente, siendo los problemas de *división – partitiva* los más fáciles de resolver, sin embargo los problemas de *división-medida* fueron los más difíciles; en innumerables veces se ha argumentado que resolver problemas no rutinarios por los estudiantes son los más complejos, tal vez se debe a que los algoritmos son aplicados de manera mecánica, realizando cálculos sin comprender el verdadero significado del uso de estos algoritmos.

En relación a los procesos de enseñanza de la *división* y lo difícil que resulta para los profesores explicar este contenido y lo complejo que es para los estudiantes la comprensión del mismo, Aravena y Morales (2019), señalan que las dificultades se deben principalmente al tipo de recurso que se emplea en la enseñanza del algoritmo de la *división*, es por ello que realizan una investigación donde estudiantes debían resolver problemas de reparto e interpretación del resto, al realizar este tipo de actividades los niños tuvieron dificultades y cuando se les presenta un problema de agrupamiento no la reconocen como *división*. La investigación concluye que para los alumnos es necesario construir o utilizar alguna estrategia que les permita encontrar una respuesta a la tarea solicitada, sin embargo, esta pierde sustento cuando se dan cuenta que necesitan de otra operación para resolver correctamente el algoritmo presentando dificultades en las tablas de multiplicar, lo que no provoca un problema al realizar el cálculo, ya que son capaces de recurrir a otras estrategias para obtener un resultado.

Muchas veces los estudiantes carecen de estrategias que les ayuden en la comprensión de problemas de *división-medida*, ya que estos no saben qué deben realizar en este tipo de situaciones, así lo señala Márquez, Hernández y García (2019), consideran que les resulta muy difícil relacionar el enunciado del problema con la operatoria a realizar. Sin embargo, en Chile, resolver este tipo de problemas de isomorfismo de medida es de suma importancia, pues están presentes en toda la educación general básica y en cursos superiores. La investigación pretendía caracterizar las distintas estrategias que utilizan los estudiantes de séptimo básico al resolver problemas de estructura multiplicativa; relacionados con isomorfismo de medida, específicamente en los de *división-medida*. Los resultados permitieron evidenciar las estrategias que utilizaron los estudiantes al resolver problemas de *división-medida*, lo que arrojó que menos del 50% de los estudiantes resolviera correctamente problemas de *división-medida*, donde intervienen números naturales, sin embargo solo un 39% de los alumnos logró realizar correctamente problemas donde debían buscar el algoritmo de la *división* de un número entero por una fracción, en este caso no logrando interpretar el resto, si bien los estudiantes presentan una gran variedad de procedimientos utilizados los resultados fueron deficientes, a pesar de que el currículo chilenos señala como eje transversal la resolución de problemas, sin embargo esto evidencia que los profesores no presentan una gran variedad de estrategias para la enseñanza de la resolución de problemas.

Si bien la multiplicación y *división* son operaciones que se trabajan principalmente desde el segundo ciclo de educación primaria (tercero y cuarto) de manera formal, no quiere decir que no se aborde desde los pre escolares de manera informal, Ramírez y De Castro, (2014) realizaron un trabajo, cuyo objetivo era "desarrollar estrategias informales de modelización directa para resolver problemas de multiplicación y *división* de complejidad creciente", la cual estaba formada por tres fases, una progresión que permitía alcanzar el objetivo plateado y una gran variedad de actividades que tenían por finalidad alcanzar habilidades de orden superior, siempre enfocadas en el logro del objetivo. Una vez presentado los problemas a los estudiantes, estos debían resolver y explicar cómo llegaron al resultado, de tal manera que todos comprendan lo que están realizando, además en su resolución siempre se apoyaron de material manipulativo que cada niño considerara adecuado para su resolución. Durante el proceso de desarrollo, los estudiantes resolvieron actividades relacionadas con multiplicación y *división* sin grandes dificultades y sin tener conocimiento formal de las operaciones antes mencionadas, logrando que los alumnos modelasen, razonen, argumenten y comuniquen sus procesos, articulando sus ideas, lo que nos demuestra que partir con actividades desde lo más simple a lo más complejo y siempre apoyados de material concreto, los estudiantes lograran en un futuro articular estos aprendizajes cuando el contenido se trabaje de manera formal en la sala de clases, transformándose en algo conocido y de fácil comprensión.

Diversas investigaciones realizadas a estudiantes de distintos países revelan que al aplicar problemas de *división-medida* y *división- partitiva* dejan en evidencia que los problemas que presentan mayores dificultades son los de *división-medida*, por considerarse estos más complejos de resolver, en muchas ocasiones los estudiantes no saben qué realizar, puesto que los niños no entienden los enunciados de las situaciones problemática, por encontrarse el valor desconocido en un espacio de medida. Cabe destacar que en ocasiones este tipo de problemas es abordado en menor medida en las aulas y por ende estas situaciones son las más complejas de desarrollar por los estudiantes, ya que son desconocidos por ellos, además en muchas oportunidades el material o el tipo de problema que se plantea no es el más apropiado, tendiéndose a desarrollar problemas memorísticos, poco cercanos al alumnado y en muchas ocasiones estos problemas no consideran el resto en el planteamiento del problema.

1.3.2. Estudio sobre los conocimientos de los profesores cuando abordan problemas de isomorfismo de medida

La resolución de problemas en el currículo chileno juega un papel muy importante. Según Benavides, Villarraga, Castro y Brieba, (2004), tomado de Stanic y Kilpatrick,1989, la resolución de problemas en la matemática se utiliza como contexto, habilidad o arte. En el caso de tomarse como contexto se utiliza como medio para obtener un objetivo, la que debe estar relacionada con la motivación, justificación, recreación, entre otros. De igual manera un problema se ve relacionado con desarrollo de muchas habilidades que sebe ser enseñada en el currículo y se aborda desde problemas rutinarios y no rutinarios. Por último, la resolución de problemas como arte, vista desde la perspectiva de Polya, donde hace referencia a las actitudes adecuadas y métodos para la resolución de problemas.

La importancia de la resolución de problemas de matemáticas dentro del currículo chileno se centra en que los programas de estudios deben permitir a los estudiantes (Benavides, Villarraga, Castro y Brieba, 2004, p. 810):

> Construir conocimiento nuevo a través de la resolución de problemas; Resolver problemas que surjan en matemáticas y en otros contextos; Aplicar y adaptar una amplia variedad de estrategias para resolver problemas; Controlar y reflejar el proceso de resolución de problemas.

En relación al conocimiento que tienen los futuros profesores, Fernández, Callejo y Márquez (2014), realizaron una investigación cuyo objetivo era saber cuál era el conocimiento que poseían los estudiantes para maestros al momento de abordar problemas de *división-medida* y cómo estos interpretaban las respuestas que daban los alumnos. Los estudiantes para maestro tuvieron la tarea de interpretar los resultados de los escolares, una vez realizado el cuestionario un alto porcentaje de Estudiantes para Maestros desarrolló correctamente los problemas, siendo el procedimiento más utilizado la d*ivisión* por sobre otras operaciones como lo son restas y sumas repetidas, si bien tuvieron éxito en la resolución de estos problemas no se puede expresar lo mismo al momento realizar un análisis de los procedimientos utilizados por los escolares, esto se debe principalmente porque carecen del conocimiento especializado de matemática lo que le permite analizar y plantear otras formas de resolver este tipo de problemas a los estudiantes, lo que deja en evidencia la necesidad de desarrollar en los futuros profesores la interpretación de los distintos procedimientos de resolución de problemas de estructuras multiplicativas y su interpretación en el marco curricular, pudiendo en un futuro ocasionar dificultades al momento de enseñar los contenidos a los estudiantes.

De igual manera Montero y Callejo (2018), están interesadas en saber cómo los estudiantes para maestros ven de forma profesional el dominio de las fracciones y sus operaciones, es por eso que se les solicitó cuál era la interpretación que daban a las respuestas que presentaban los estudiantes de primaria en la resolución de problemas de *división-medida* con fracciones, una vez analizadas las respuestas de los alumnos por parte de los estudiantes para maestros se obtuvieron las siguientes conclusiones, al finalizar el experimento se ha demostrado que los futuros profesores han ampliado el conocimiento de las estrategias utilizadas por los estudiantes de primaria, por lo que se demuestra un avance en la interpretación que estos tenían con respecto a las respuestas de los escolares, por lo tanto los estudiantes para maestros interpretaron y discriminaron de muy buena manera las estrategias multiplicativas, sin embargo tuvieron dificultades en las estrategias aditivas, por lo que se ha considerado un futuro estudio con énfasis en el uso de la unidad iterativa en las estrategias aditivas.

Ivars, Buforn y Llinares (2016), En una investigación realizada a estudiantes para maestros con problemas de *división-medida* con fracciones, donde el objetivo principal era mirar profesionalmente los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en escolares, para ello consideraron importante que para realizar esta mirada se debe seguir una trayectoria de aprendizaje que permite visualizar los procesos de manera estructurada, la investigación está centrada en la comprensión que tienen los estudiantes de las fracciones; el seguir esta ruta de aprendizaje tiene por finalidad que los estudiantes para profesores puedan obtener información relevante sobre el conocimiento que tienen los estudiantes con respecto a las fracciones las que son útiles para la toma de decisiones.

Orús y Fregona (2012) realizan una investigación con profesores cuyo objetivo era "estudiar la secuencia de enseñanza de la *división*", puesto que este contenido siempre genera conflictos en el profesorado, se abordó desde tres ejes, como "un problema relacionado con la didáctica de la matemática, como problema en la formación docente y como un ejemplo de la utilización de los recursos". Durante el desarrollo de los talleres se les acompaño a los docentes en todo momento, antes, durante y después de realizar las clases a los estudiantes con la finalidad de ir incorporando y adecuando los distintos materiales que estos desarrollaban con los niños en las salas de clases, de tal manera de realizar un seguimiento efectivo; entre las actividades que se realizaron fue analizar investigaciones relacionadas con la enseñanza de la división, análisis de situaciones problemáticas que los profesores realizan en sus clases los que se podrían resolver realizando una *división* si esta fuese conocida para ellos, se les pide a los profesores que den posibles respuestas que podrían dar los alumnos, de tal manera que estos visualicen que los estudiantes podrían resolver esos problemas a través de una operación conocida para ellos. Luego de realizada la secuencia de actividades que aportaron a la comprensión de los problemas relacionados con la *división* se obtuvieron las siguientes conclusiones, profundizar en la formación de números (decenas), propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, definición de la división con coeficiente entero, terminología empírica utilizada en la sala de clases, entre otros.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente podemos decir que la mayor dificultad que presentan los estudiantes para maestros es interpretar las respuestas de los alumnos cuando desarrollan problemas de *división-medida*, ya que los analizan desde una mirada como reparto equitativo, pues la mayoría de los problemas que se trabajan en su etapa escolar están relacionados con situaciones de reparto equitativo, es decir problemas de *división-partitiva*.

En relación al análisis de libros de texto, cabe destacar que al revisar la literatura se encuentra poca evidencia del análisis de libro de texto en relación a la *división*, siendo este un tema que debe abordarse por la importancia de las dificultades que presentan los niños en la escolaridad, no se ha encontrado en la literatura información al respecto.

Se realizó una revisión acabada de 5 revistas relacionadas con las ciencias (Enseñanza de las Ciencias, Bolema, PNA, Relime y ZDM), desde el 2013 al 2019, en ellas se encontraron escasos estudios relacionados con los libros de textos y su uso como uno de los principales instrumentos que utiliza el profesor para desarrollar sus clases.

En la revisión de la literatura de estas revistas científicas mencionadas anteriormente, desde el 2013 al 2019, hemos conseguido 52 artículos relacionados con análisis de libros de texto, en los cuales se trabajan temas relacionados con Geometría, Estadísticas, Álgebra, Ciencias relacionados con la Química, Biología, Física, entre otros temas, pero ninguno relacionado con la búsqueda de cocientes, o problemas relacionados con *división*, además hemos buscado investigaciones relacionadas con *división,* de las que hemos conseguido 9 las que están enfocadas en la búsqueda del algoritmo, estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver problemas aritméticos, lo que nos deja en evidencia el escaso análisis de los libros de texto centrados en la *división* por eso es importante la realización de este estudio y tomando en consideración lo que nos dice la literatura que el principal instrumento del profesor para realizar las clases se centra mayoritariamente en los libros de texto le damos especial relevancia a este estudio.

La literatura nos da a conocer las principales dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas de isomorfismo de medida relacionados con la división, esto se debe principalmente a que en muchas ocasiones los alumnos no comprenden los enunciados de los problemas, lo que deja en evidencia la escasa variedad de situaciones problemáticas que aplica el profesor en el aula, no es el caso de búsqueda del algoritmo, ya que en este tipo de actividad no existen grandes dificultades por considerarse conocidos y familiares para ellos.

Capítulo 2: Metodología, Marco Teórico, Problema y pregunta de Investigación

2.1. Introducción.

En este capítulo presentaremos La Teoría de los Campos conceptuales de Vergnaud (1997), específicamente los problemas de Isomorfismo de medida de *división-medida* y *división-partitiva*, además complementaremos con los significados pretendidos y significados holísticos de referencia propuestos en el Enfoque Onto-semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática.

2.2. Vergnaud y los Problemas de Estructura Multiplicativa.

2.2.1 Teoría de los Campos Conceptuales De Vergnaud

Una de las teorías en la cual está basada nuestra investigación, es la Teoría de los Campos Conceptuales propuesta por Vergnaud, esta teoría nos permitirá centrar la investigación en las actividades cognitivas que son desarrolladas por los estudiantes y presentadas en los libros de texto y programas de estudio en Chile. Por ser una teoría centrada en la psicología propone estudiar el transito que existe entre los procesos conceptuales y el conocimiento del contenido. Esta teoría nos ofrece un marco para el aprendizaje, que tiene como principal objetivo la comprensión entre la familiarización y rupturas del conocimiento de los niños y adolescentes. Vergnaud (1990), define conocimiento como el saber-hacer del saber que es expresado a otros, en tanto cuando se refiere a la familiarización y ruptura, se refiere a los aprendizajes de los adultos, los que son adquiridos en el tránsito de la niñez a la adultez el que se da a través de los procesos cognitivos.

Moreira (2002) nos dice que Vergnaud organiza el conocimiento en campos conceptuales del cual, el dominio por parte del sujeto ocurre en un largo período, el que se da de acuerdo a la madurez, experiencia y/o aprendizaje. Para él, campo conceptual es un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectadas unas con otras y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición. Cabe señalar que el dominio del campo conceptual ocurre a lo largo del tiempo, es decir, pueden pasar en meses o tal vez en años, ya que con el pasar del tiempo aparecen nuevos dominios los que deben ser estudiadas en forma progresiva hasta que los estudiantes las dominen, no sirve de mucho que se rodeen de las dificultades conceptuales, las que deben ser superadas en la medida que son detectadas y enfrentadas, lo que no ocurre solo una vez.

La teoría de los campos conceptuales supone que el amago del desarrollo cognitivo es la conceptualización, la que es considerada como la piedra angular de la cognición, posteriormente, se debe prestar toda la atención a los campos conceptuales y el análisis conceptual de las situaciones para las cuales los estudiantes desarrollan sus esquemas, en la escuela o fuera de ella.

Definiendo la teoría de los campos conceptuales podemos señalar que es considerada una teoría compleja, ya que busca involucrar la necesidad de abarcar una perspectiva teórica, la que se compone de conceptos y teoremas necesarios para operar eficientemente en esas situaciones, los que se deben presentar a los estudiantes por medio de símbolos, conceptos y operaciones, a través de los diferentes niveles cognitivos. Por otro lado, mencionar que esta teoría tiene sus bases en el desarrollo del pensamiento lógico de Piaget y en el desarrollo próximo de Vigotsky. Aunque para Vergnaud fija sus intereses en los campos conceptuales de las estructuras aditivas y las multiplicativas con el fin de estudiar las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a este tipo de situaciones, ya que le parecía que los problemas que tenían los alumnos era diferentes en estas estructuras, (Vergnaud, 1997).

2.2.2 Problemas de Estructura Multiplicativa

Los problemas de estructuras multiplicativos son definidos por Vergnaud (1990), como un conjunto de situaciones, para resolver este tipo de situaciones es necesario la aplicación de una multiplicación o *división* o una combinación de ambas operatorias, además requiere de un análisis cognitivo para ser resueltos. En las estructuras multiplicativas propuestas por Vergnaud, considera que en cada uno de los problemas se deben considerar dos conceptos importantes que son el *aprendizaje y la enseñanza*, estos conceptos cobran sentido para los estudiantes tanto en las situaciones como en los problemas que se van a desarrollar, los que pueden ser teóricos o prácticos, es por esta razón que se debe realizar un análisis del papel que juega el lenguaje utilizado, la simbología y los conceptos utilizados. En cuanto a los problemas de estructura multiplicativa, Ríos (2010, pp. 27), los define como aquellos que requieren de una multiplicación, *división*, regla de tres, etc. Para su resolución, este tipo de problemas se inicia con la multiplicación y *división*, las cuales requieren que el niño tenga uso y dominio de los números, que conozca su simbolización y que haya adquirido la estructura aditiva (suma y resta); se justifica porque multiplicar es sumar reiteradas veces una misma cantidad, mientras que dividir es restar reiteradas veces una misma cantidad.

Según Vergnaud (1997) se distinguen tres tipos de clasificación de estructuras multiplicativas: isomorfismo de medida, un solo espacio de medida y producto de medidas, en nuestro caso se trabajará con el isomorfismo de media, puesto que es de nuestro interés visualizar que tipos de *división* se encuentran presentes en el currículo chileno (libros de texto y programas de estudio), si se trabaja el resto o no y por sobre todo tener una idea de lo que se está trabajando en las salas de clases con los estudiantes. Las estructuras multiplicativas se clasifican en:

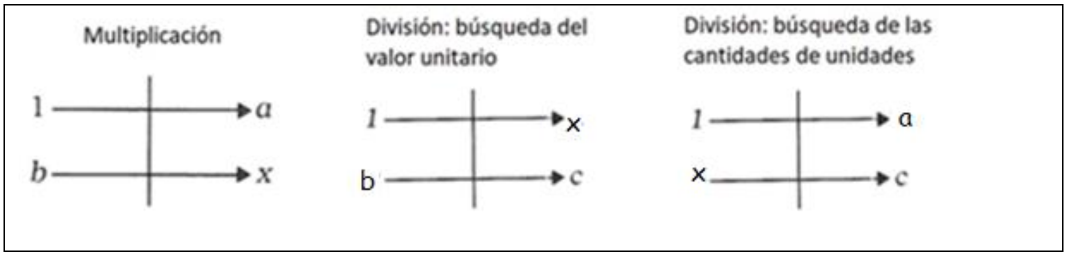


FIGURA 2. 1. REPRESENTACIÓN DE PROBLEMAS DE ISOMORFISMO DE MEDIDA (VERGNAUD, 1997)

Isomorfismo de medida: pone en juego cuatro cantidades, por lo que se conoce como una relación cuaternaria, donde intervienen dos magnitudes. En este tipo de clasificación se distinguen tres grandes clases de problemas:

Multiplicación: son aquellas en las que se conoce el valor unitario, pero se desconoce el valor total. Por ejemplo: "Maximiliano junta láminas para su álbum de fútbol. Él tiene 6 sobres con 10 láminas cada uno. ¿Cuántas láminas tiene en total?" (Urrea, Córdova y Quezada, 2017, p. 277).

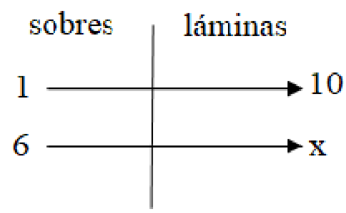


FIGURA 2. 2. EJEMPLO DE MULTIPLICACIÓN (URREA, CÓRDOVA Y QUEZADA, 2017, P. 277)

División-partitiva: son aquellos en los que intervienen cuatro cantidades: dos datos (los dos pertenecientes a distintos espacios de medida), la unidad y una cantidad desconocida, que es el valor unitario, es decir la cantidad x que se corresponde con la unidad. Por ejemplo: "Ema ayuda a su mamá a confeccionar canastos de mimbre. Si hacen 45 canastos y los deben repartir de manera equitativa entre 9 clientes, ¿cuántos le corresponden a cada uno?" (Urrea, Córdova y Quezada, 2017, p. 203).

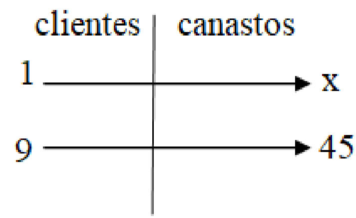


FIGURA 2. 3. EJEMPLO DE DIVISIÓN-PARTITIVA (URREA, CÓRDOVA Y QUEZADA, 2017. P. 203)

División-medida: son aquellos en los que intervienen cuatro cantidades: dos datos (los dos pertenecientes a un mismo espacio de medida), la unidad y una cantidad desconocida de un espacio de medida. El valor unitario (es decir la cantidad x que se corresponde con la unidad) es conocido. Por ejemplo: “Andrea resuelve cada día 6 problemas matemáticos distintos. Tiene una libreta con 48 problemas diferentes por solucionar. ¿En cuántos días resuelve los 48 problemas?” (Ejemplo de *División-medida*, Urrea, Córdova y Quezada, 2017, p. 278).

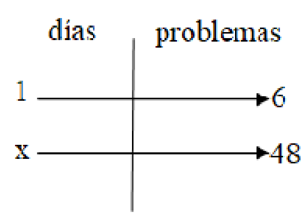


FIGURA 2. 4. EJEMPLO DE DIVISIÓN-MEDIDA (URREA, CÓRDOVA Y QUEZADA, 2017, P. 278).

2.3. Enfoque Ontosemiótico (EOS)

Además de la Teoría de los campos conceptuales de Vergnaud hemos decidido también utilizar el Enfoque ontosemiótico. Por un lado, la teoría de los campos conceptuales nos permite ver cuáles son los tipos de división que podemos identificar, si se trabaja el resto o no y por otro lado tenemos el EOS que nos permite hacer una revisión más minuciosa y detallada de los elementos que componen los libros de texto y programas de estudio, por lo tanto, uno es complemento del otro. Lo que quiere decir que Vergnaud es más general en cambio el EOS es más específico, lo que nos permitió realizar un análisis profundo y detallado.

En relación al Enfoque Onto-semiótico, Godino, Batanero y Font (2007), realizan un recorrido por lo que ha sido la construcción de este enfoque y cómo esta herramienta ha sido fundamental en el análisis de la investigación en didáctica de la matemática, la que ha permitido visualizarla desde distintas aristas.

Font y Godino (2006, p. 68), señalan que una de las dificultades es como diseñar programas relacionados con la formación de profesores, que estén enfocados en ciertos temas relacionados con el conocimiento didáctico ha sido una dificultad, ya que este se ve reflejado principalmente en el uso de los libros de textos, pues estos instrumentos constituyen un elemento fundamental en el desarrollo de las actividades en el aula se ha considerado una "ontología" más amplia la cual consta de 6 elementos, *1) lenguaje, 2) situaciones – problema, 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas, 5) proposiciones, teoremas, propiedades, entre otros y 6) argumentación*, ya que la que consideran algunos países en sus currículo, era considerada muy simple para realizar el análisis de los objetos matemáticos presentes en los textos, es por esta razón que se han tomado estos seis elementos primarios los que al enlazarse forman las configuraciones epistémicas.

El constructo de la configuración epistémica se puede utilizar en el análisis matemático de cualquier tipo de libro de texto y época; siendo útiles tanto en el análisis global como en una unidad didáctica.

2.3.1. Sistema de Prácticas

Dentro del EOS Godino y Batanero (1994), definen la noción de sistemas de prácticas como:

> "a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y

> problemas", las prácticas pueden estar relacionadas con acciones individuales o grupales de la institución. Los sistemas de prácticas individuales están definidos de acuerdo a la actividad matemática, las que se relacionan como sistema de práctica significativa, definiéndose como: Una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (pp. 334 - 335).

En ese mismo sentido, Godino y Batanero (1994) también se define la institución como:

> Una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen (p. 336).

De igual manera define los sistemas de prácticas institucionales como: "sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas: Está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I" (p. 337).

2.3.2. Objetos Intervinientes

Para Godino y Batanero (1994), en el EOS el objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge de los sistemas de prácticas, las que disponen de cualidades propias al resolver un problema. En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, entre otros), estos objetos son utilizados para hacer matemáticas y son representadas de manera textual o parcial, además pueden ser presentados de forma diferente según sea la institución de la que se trate, se puede definir como: "*Objeto institucional Op: Es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de Pi(C). Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de 0I* (p. 338). En un campo de problemas pueden nacer distintos objetos que están relacionados entre sí. En tanto en los objetos personales tiene su esencia en el aprendizaje de la persona que aprende y se define como:

> "Sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas: Está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación Pp (C)". "Objeto personal Op Es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de Pp (C)" (p. 339).

Además, en el EOS se reconocen configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, proponiendo la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios: (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 7):

- *Elementos lingüísticos, (términos, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)*
- *Situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)*
- *Conceptos – definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)*
- *Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)*
- *Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)*
- *Argumentos (enunciados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos de otro tipo, ...)*

Estos 6 tipos de entidades primarias forman parte de entidades conceptuales y procedimentales, siendo además considerados insuficientes para realizar la descripción de objetos matemáticos.

2.3.3. Significados

En el EOS los objetos matemáticos son mencionados y descritos desde distintas prácticas, las que pueden ser consideradas como las definiciones del objeto (recta, punto, derivada), los significados de los objetos deben estar relacionados con la acción que realiza el sujeto referido al objeto, además se menciona que debe existir una diferencia entre una dimensión personal e institucional. El significado de un objeto matemático se define como *el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones–problemas en las que dicho objeto interviene.* (Pino-Fan, 2014, p. 45). Por lo tanto, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo cual da origen a los *significados institucionales y significados personales respectivamente.* Godino y Batanero (1994) definen estos significados de la siguiente manera*:*

> "Significado de un objeto institucional OI es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge OI en un momento dado". Por otro lado, los significados personales están definidos como: "Significado de un objeto personal Op es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto Op en un momento dado" (pp. 340-341).

2.4. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El currículo chileno considera a la *división* como una de las operaciones importantes, ya que se le atribuyen aplicaciones que son útiles en muchos contextos de la vida diaria de los seres humanos, sin embargo, es considerada una de las operaciones más complejas en los procesos de enseñanza aprendizaje. En lo que se refiere a la enseñanza resulta difícil para los profesores plantear actividades que estén enfocadas en la aplicación de esta operación, también el material que se utiliza con frecuencia no es el más apropiado y por ende estas dificultades generan conflictos en los estudiantes al comprender el proceso que se requiere para aprender esta operación, lo que nos llevó a interesarnos por conocer más sobre las dificultades de los problemas de isomorfismo de medida.

Luego de revisar la literatura nos demuestra que existen distintos obstáculos para la implementación de actividades relacionados con los problemas de estructuras multiplicativas, las que pueden ser epistemológicas, ontológicas y didácticas. Las que podemos definir:

- Epistemológicas, no se trabaja la noción de *división* desde la génesis de esta operatoria, es decir no se aborda desde la construcción de la operación, con situaciones problemas que estén relacionados con acciones que realizan a diario, de tal modo de que los estudiantes se den cuenta por sí solos que están realizando una *división*.
- Ontológicas, están relacionadas con los términos abstractos, es decir aquí entran los símbolos y signos.
- Didácticos, son los relacionados con los procesos que utiliza el docente para enseñar el contenido, es decir, como se apoya el profesor para lograr aprendizajes en sus estudiantes. El material que se utiliza con los estudiantes muchas veces no es el más adecuado, enseñándose la *división* de memoria, lo que en la mayoría de las ocasiones genera un problema más que un aprendizaje.

Si consideramos estos tipos de obstáculos que existen en el aprendizaje de las estructuras multiplicativas (*división – medida y división – partitiva*), podemos ver que los estudiantes presentan dificultades en la compresión de la *división*, ya que según la literatura los profesores presentan inconvenientes en los tres aspectos antes mencionados y por ende la enseñanza de esta operatoria es trabajada con menor profundidad, puesto que es abordada de manera aislada, no considerándose contenidos previos.

Con respecto a lo señalado y expresado desde la antigüedad (epistemología) la *división* fue, ha sido y es considerada una de las operaciones más complejas, ya que como menciona la historia desde la antigua Grecia, la cultura China, la cultura egipcia, entre otras, los matemáticos pasaban mucho tiempo queriendo descifrar y resolver problemas donde estaba presente la *división*. Las dificultades han estado siempre presentes en el desarrollo de esta operación lo que queda demostrado que hasta hoy en día los estudiantes presentan mayores dificultades en el desarrollo de este algoritmo, siendo la más compleja de todas.

Con respecto a lo señalado anteriormente surgen algunas interrogantes que están relacionadas con los procesos de enseñanza aprendizaje de la división, los que surgen desde el trabajo en el aula y cómo este se aborda en los libros de texto, ¿se trabajan los conceptos previos al aprendizaje de la *división*? ¿La noción de *división* se comprende desde la génesis? ¿Se enseña de manera mecánica el proceso de la *división* y no la comprensión de esta?

Para dar respuesta a las interrogantes anteriormente señaladas, podemos mencionar, que si bien la noción de *división* se trabaja desde 1° básico de manera implícita, lo cual se expresa en los libros de textos y programas de estudio (currículo), implementadas por el Ministerio de Educación (MINEDUC), éstas actividades no son bien enfocadas por el docente para un futuro trabajo, ya que se aborda de manera aislada y no se logra relacionar la progresión de las actividades, pues las actividades previas a la enseñanza de la *división* no son consideradas. Continuando la pregunta, ¿la noción de *división* se aborda desde la génesis?, es decir, ¿se consideran actividades previas para la comprensión a partir de una secuenciación que permite ir desde lo más simple a lo más complejo?

2.5. Pregunta de investigación

En el transcurso del trabajo nos han surgido muchas interrogantes relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la *división*, tales como las siguientes:

¿Considera los programas y libros de textos en el currículo chileno los problemas de isomorfismos de medida? ¿Le da importancia a la interpretación del resto en la división?

¿Cuáles son los significados de la noción de división que considera el currículo chileno?

Para dar respuesta y analizar en mayor profundidad a las interrogantes mencionadas anteriormente nos hemos planteado el siguiente Objetivo General.

2.6. Objetivos de Investigación

2.6.1. Objetivo General

Teniendo en cuenta los estudios previos, nos planteamos el siguiente objetivo:

O. G: Evaluar los significados de la noción de *división* que considera el currículo chileno, tanto en los programas de estudio como en los libros de texto a la luz del Isomorfismo de medida expuestos por Vergnaud y los significados pretendidos y holísticos de referencia propuestos en el Enfoque Onto-semiótico.

Para responder a las preguntas y para conseguir el objetivo general, nos hemos plateado los siguientes objetivos específicos:

2.6.2. Objetivos específicos

- OE1: Identificar los significados pretendidos por el currículo chileno a la noción de *división* desde el EOS.
- OE2: Identificar qué conceptos y procedimientos están implícitos en la noción de *división* presentes en los libros de texto.
- OE3: Describir y analizar las actividades propuestas en el currículo chileno para el desarrollo de la noción de división desde la perspectiva de Vergnaud (isomorfismo de medidas).

2.7. METODOLOGÍA

Esta investigación trata de un estudio cualitativo (Hernández, Fernández y

Baptista, 2014), cuando hablamos de estudios cualitativos nos referimos a que las preguntas e hipótesis se pueden encontrar presentes en todo momento del trabajo, es decir, antes, durante y después de recoger los datos, las cuales a medida que se avanza con el trabajo se pueden ir clasificando de acuerdo a la importancia y perfeccionando para posteriormente responderlas.

En el desarrollo de este trabajo estamos interesadas en evaluar los significados de la noción de *división* que considera el currículo chileno, tanto en los programas de estudio como en los libros de texto a la luz del Isomorfismo de medida expuestos por Vergnaud y los significados pretendidos y holísticos de referencia propuestos en el Enfoque Onto-semiótico. Asumiremos en este trabajo como currículo a la dupla "programas de estudio y libros de texto" propuestos por el Ministerio de Educación chileno (Mineduc).

La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud nos permitirá observar cómo se aborda la noción de *división* y los tipos de *división* que se trabajan en la educación básica en Chile y el Enfoque Onto-semiótico (EOS), nos permitirá ver los significados pretendidos y holísticos de referencia, es decir realizar un análisis más detallado, permitiendo observar los elementos que no es posible ver de manera fácil con la teoría propuesta por Vergnaud.

Para el análisis nos centraremos, en la revisión de los programas de estudio y libros de texto de primero a sexto básico, centrando nuestra investigación en los ejes que aborden el tema de *división*.

Para esta investigación se analizarán los libros de texto entregados por el Ministerio de Educación de 1° a 6° de Educación Básica.

Para esta investigación nos centramos en los problemas de isomorfismo de medida porque consideramos que según lo observado en la literatura, son los que presentan mayor dificultad en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de *división*.

2.8. FASES DE LA INVESTIGACIÓN

Para los logros de los objetivos de la investigación nos hemos propuesto las siguientes fases.

Fase 1. Actividades relacionadas con el OE1:

- Realiza una revisión de bibliografía para explorar la noción de *división* a través de la historia.
- Revisión de la literatura en relación a la noción de *división*, estrategias de resolución, dificultades que se presentan en torno a la misma.

Fase 2. Actividades relacionadas con el OE2:

- Analizar según Vergnaud los tipos de *división* y su estructura,
- Revisión de programas de estudio y libros de texto de matemáticas (de primero a sexto básico), correspondientes al currículo chileno con la finalidad de identificar los conceptos implícitos en la noción de *división* presentes.

Fase 3. Actividades relacionadas con el OE3:

- Analizar los programas y libros de texto de primero a sexto básico, propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, para identificar las prácticas matemáticas que se sugieren para el estudio de la noción de *división*.

2.8.1. Recolección de datos

Para el desarrollo de este estudio se realiza una profunda revisión de los programas de estudio y libros de texto de matemática propuestos por el Ministerio de Educación de Chile desde 1° a 6° básico, con la finalidad de poder identificar en currículo chileno los significados de la noción de *división*.

Capítulo 3: Análisis

3.1. INTRODUCCIÓN

El presente capítulo describe el análisis realizado de la noción de *división* según los campos conceptuales a la luz del Isomorfismo de medida propuestos por Vergnaud (1997) y los significados pretendidos expresados en el Enfoque Onto-semiótico (1994) del currículo chileno propuesto por el Ministerio de Educación, para ello hemos realizado una revisión acabada de los libros de texto y programas de estudio de 1° a 6° básico, los que se describen a continuación. Nos hemos apoyado de estas dos teorías, ya que ambas son complemento, por un lado la Teoría de los campos conceptuales nos permite visualizar cuales son los tipos de *división* que encontramos en el currículo chileno y como se trabaja la interpretación del resto y por otro lado el Enfoque ontosemiótico nos permite analizar en profundidad los elementos que intervienen en las actividades presentes en los libros de texto y programas de estudio que son proporcionados por el Ministerio de Educación a las escuelas públicas y subvencionadas de Chile.

3.2. Dificultades de la Enseñanza-Aprendizaje de problemas de isomorfismo de medida.

La investigación se centra en el análisis de libros de textos chilenos, por lo que se considera necesario contextualizar: En Chile el currículum se expresa en un Marco Curricular, además, en planes de estudio, programas de estudio y textos escolares. El Marco curricular es el instrumento que organiza la forma de trabajo en cada uno de los niveles y de allí se desprenden los demás instrumentos, entre los que mencionamos están: los planes de estudio dictan la organización del tiempo y las actividades curriculares. Los programas de estudios señalan los objetivos de aprendizaje, las orientaciones donde se especifican los contenidos, habilidades que los estudiantes deben alcanzar al término del proceso académico. Los textos de estudio son el instrumento que utiliza tanto el profesor para realizar su clase como el estudiante para ejercitar los contenidos.

Las bases curriculares del Ministerio de Educación (Mineduc, 2012), sugieren a los profesores brindar oportunidad a sus estudiantes en el desarrollo de competencias en la resolución de problemas, poniendo en práctica estrategias que les permita ser usadas en situaciones diversas, a través de la búsqueda de soluciones al enfrentarse a diversos problemas relacionados con el mundo real, el aprender matemáticas proporciona a los estudiantes la capacidad de darle sentido al mundo y actuar en él de manera crítica y responsable. El propósito formativo con el cual se enseña matemáticas en Chile es enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas contribuyendo al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo de los estudiantes, proporcionando la matemática herramientas conceptuales para analizar información cuantitativa presente en noticias, publicidad, opiniones, etc.

3.3. ANÁLISIS DE DATOS.

El ministerio de educación de Chile en el Marco curricular (2009, pp. 5), instrumento que orienta el funcionamiento de los establecimientos educacionales, en él se define los aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar al término de su etapa escolar, es de carácter obligatorio y es el referente con el cual se construyen los planes de estudio, programas de estudio y textos escolares. Estos instrumentos son indispensables para el desarrollo de las clases y el trabajo con los estudiantes en el aula, los que son definidos de la siguiente manera:

a) Planes de estudio, define el tiempo semanal en que se deben organizar las actividades curriculares que los estudiantes deben realizar en ese período determinado, por cada nivel; en el caso de matemáticas el tiempo destinado para el trabajo es de 6 horas semanales en educación básica con y sin escolar completa.

b) Programas de estudio, en este instrumento se encuentran los objetivos de aprendizaje que conforman cada unidad, además se entregan las orientaciones donde se especifican los contenidos, habilidades que los estudiantes deben alcanzar al término del proceso académico. Estos programas están organizados en dos unidades por semestre, cada una con sus respectivos objetivos, en cada uno de los objetivos se encuentra una serie de ejemplos de actividades sugeridas relacionadas con el desarrollo de habilidades que van desde lo más simple a lo más complejo; estos ejemplos de actividades ayudan a complementar las actividades presentadas en los libros de textos.

c) Textos escolares, aquí se detallan y desarrollan los contenidos y objetivos planteados en los programas de estudio, los que se mencionan de manera clara y coherente con el marco curricular, los que posteriormente son realizados por los estudiantes para el logro de sus aprendizajes.

d) Objetivos Fundamentales, se refiere a los aprendizajes que deben lograr los estudiantes en cada uno de los niveles, tanto en educación básica como en enseñanza media. Los que están relacionados con los conocimientos, habilidades y actitudes de tal manera de favorecer el desarrollo integral de los educandos para que puedan desenvolverse en distintos ámbitos de la vida.

e) Conocimiento, está compuesto por conceptos, sistemas conceptuales e información sobre hechos, procedimientos, procesos y operaciones.

f) Habilidades, se refiere a las capacidades que se pueden desarrollar en los estudiantes sean estas cognitivas y/o las relacionadas con una actividad motriz.

En la educación chilena se trabaja la noción de *división* desde 1° básico con actividades que están relacionadas de agrupar elementos, estas actividades ayudan a que los estudiantes comprendan el concepto de repartir, a medida que el alumno va avanzando en los distintos niveles las actividades relacionadas con la *división* se van complejizando. La *división* se encuentra presente en la unidad número 1, correspondiente a la Unidad de números y Operaciones.

El currículo chileno declara en las bases curriculares (2018, p. 217), que su principal objetivo en la enseñanza básica es buscar el desarrollo del pensamiento matemático, para el logro de este propósito plantea cuatro habilidades que son de vital importancia, resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar. Estas habilidades deben trabajarse en cada uno de los cinco ejes en los que se divide la educación básica desde 1° a 6° básico, los que son: números y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición y datos y probabilidades. En cada uno de estos ejes se trabajan distintos objetivos de aprendizajes; estos objetivos promueven diferentes actitudes, las que están relacionadas con: manifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico, abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas, manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de las matemáticas, manifestar una actitud positiva frente a sí mismo y sus capacidades, demostrar una actitud de esfuerzo y perseverancia y expresar y escuchar ideas de forma respetuosa, todas estas actitudes deben estar plasmadas en las distintas actividades que los estudiantes deben desarrollar en el aula con el fin de lograr el propósito de la asignatura.

Cabe destacar que las bases curriculares y programas de estudios son los elementos esenciales para que los docentes preparen sus clases, pues desde allí se desprenden los objetivos de aprendizaje los que deben estar presentes en el desarrollo de las actividades a trabajar en el aula con los estudiantes. Los programas de estudio además de contener los objetivos de aprendizajes que cada docente debe llevar a cabo en las distintas salas de clases, contienen actividades sugeridas que van en función del trabajo con cada uno de los objetivos de aprendizaje, enfocados en el desarrollo de habilidades que los estudiantes deben alcanzar al término de la etapa escolar. Al realizar el contraste entre estos instrumentos (programas de estudio y libros de texto) nos hemos dado cuenta que las actividades plasmadas en los libros de texto no cubren en su totalidad estos objetivos, solo lo hacen de manera parcial, lo que nos da a conocer que lo que se desarrolla en las salas de clases con los estudiantes está bastante alejado de lo que realmente se debiera trabajar, ya que la mayoría de las actividades planteadas en los libros de texto pretenden desarrollar en los estudiantes habilidades de orden inferior y un aprendizaje memorístico, coartando el desarrollo de habilidades de índole superior, pues los textos escolares son uno de los elementos fundamentales por no decir, el único elemento que la gran mayoría de los profesores del sector público utilizan para el desarrollo de la clase y el trabajo de los estudiantes tanto en el aula como fuera de ella; esto se pudiera estar relacionado con los bajos resultados en las pruebas estandarizadas.

El siguiente cuadro muestra los objetivos que están relacionados con la *división* en los distintos niveles desde 1° a 6° año básico. Para ello hemos considerado algunos descriptores relacionados con la *división*, los cuales fueron tomados de los programas de estudio de 1° a 6° básico.

TABLA 3. 1. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DEL PROGRAMA DE EDUCACIÓN BÁSICA DE 1° A 6° BÁSICO.

Descriptores	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**
Describe y aplica estrategias de cálculo mental	OA7	OA6	-	OA2	OA2	-
Cuenta y agrupa	OA8	OA1	-	-	-	-
Comprende la división en contexto de tablas	-	-	OA9	OA6	-	-
Demuestra que comprende fracciones	-	-	OA11	OA8	OA7 OA8	OA5
Identifica, escribe y resuelve fracciones en diferentes registros de representación	-	-	-	OA9 OA10	OA9	OA5 OA7
Usa y fundamenta propiedades de la multiplicación y división	-	-	-	OA4	OA2	-
Realiza cálculos que involucra las 4 operaciones	-	-	-	-	OA5	OA2

Demuestra que comprende la división con dividendo de tres dígitos y divisores de un digito: interpretando el resto, resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios	-	-	-	-	OA4	-
Demuestra que comprende el concepto de razón de manera concreta, pictórica y simbólica en forma manual y/o usando software educativo	-	-	-	-	-	OA3

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 3.1, nos muestra los descriptores que se encuentran presentes a lo largo de toda la enseñanza básica son “Describe y aplica estrategias de cálculo mental” y “Demuestra que comprende fracciones”. También es importante resaltar que el descriptor que está relacionado con resolver problemas rutinarios y no rutinarios sólo se observa en 5° año básico.

Para realizar el análisis hemos dividido los seis niveles en dos grupos, el primer grupo está formado por 1°, 2° y 3° año básico y el segundo compuesto por 4°, 5° y 6°, ya que consideramos que los primeros 3 años se prepara para la introducción de las operaciones como multiplicación y *división*, y en los años posteriores se hace la introducción de los algoritmos, algunas de las actividades presentes en los libros de texto, las que deben ser desarrolladas los estudiantes tienen relación con: agrupar elementos, restas repetidas o secuencias, repartir equitativamente apoyado de material gráfico, restas repetidas. A continuación, se muestra la Tabla 3.2 que presenta un resumen de las actividades presentadas en los libros de 1° a 3°.

TABLA 3. 2. ACTIVIDADES PRESENTADAS EN LOS LIBROS DE TEXTOS EN RELACIÓN A LA DIVISIÓN DE 1° A 3° BÁSICO.

Curso	Resta repetida o secuencias	Agrupar elementos	Repartir equitativamente	Algoritmo de la división	Interpretación del resto
1°	37	18	17	0	0
2°	19	21	54	0	0
3°	9	42	17	42	0
Total	**65**	**81**	**88**	**42**	**0**

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en la Tabla 3.2, a medida que se avanza en los niveles, van disminuyendo las actividades relacionadas con resta repetida, a partir de tercero básico aparece el cálculo de algoritmo de la *división* en ejercicios o problemas, sin embargo, los estudiantes se pueden apoyar en representaciones gráficas (dibujos) y/o material concreto para resolverlos. Es importante destacar que la gran mayoría de las actividades a realizar están relacionadas con el cálculo de algoritmo, con una relación ternaria $a \ x \ b = c$ (y no cuaternaria como recomienda Vergnaud (1997); además de ser poco contextualizados y todos similares, donde están enfocados principalmente en la búsqueda del cociente. Siendo estos en su mayoría la búsqueda del algoritmo como un ejercicio simple, los que se resuelven a través de material concreto o representaciones por dibujos, en los que el estudiante debe agrupar elementos de manera memorística, no permitiendo al estudiante pensar en buscar su propio método y el desarrollo de habilidades de índole superior, tal como lo señalan las Bases curriculares y programas de estudio.

Al observar la tabla 3.2. nos podemos dar cuenta que a medida que avanzamos en niveles van desapareciendo las actividades en las que su representación está expresada en forma pictórica, apareciendo los ejercicios en los que se debe aplicar el algoritmo para llegar al resultado, solicitando a los alumnos relacionar el cociente con la multiplicación a través del uso de las tablas, lo que nos demuestra que se espera que los estudiantes desarrollen actividades relacionadas con la *división* de manera memorística, además al igual que en los niveles anteriores los libros de texto carecen de resolución de problemas, de igual manera presentan un déficit de problemas contextualizados, no así con las actividades donde debe buscar el algoritmo, ya que la gran mayoría de las actividades están relacionadas con este tipo de ejercicio.

A continuación, mostraremos algunos ejemplos extraídos de los libros de textos, material que es recibido por cada uno de los estudiantes al comenzar el año escolar, el que es utilizado por los alumnos en las salas de clases para la adquisición de contenidos y desarrollo de habilidades para desenvolverse en una vida futura. Entre los ejemplos que señalaremos a continuación están relacionados con la estructura de isomorfismo de medida, según Vergnaud 1997, (*división-medida*, *división-partitiva* y *Regla de tres*), para ello comenzaremos con 3° básico, curso que como lo señalamos anteriormente se comienza con el algoritmo de la *división*.

En cuanto a los problemas de *división-medida*, en 3° básico podemos encontrar ejemplos como el siguiente:

Ejemplo 3.1. Problema de *división-medida* (Urrea, Córdova y Quezada, 2017, p. 278).

b. La municipalidad de una comuna compró 45 contenedores de reciclaje y entregará 5 contendores por sector. ¿Para cuántos sectores le alcanzan los 45 contenedores?

Para resolver este problema los alumnos se encuentran frente a un problema de una relación cuaternaria, según Vergnaud (1997), pues intervienen cuatro términos y no tres como se trabaja comúnmente en las aulas.

En lo que respecta a los problemas de *división-partitiva*, hemos encontrado situaciones como el ejemplo 3.2, este tipo de problemas son los que predominan en los libros de textos y por ende son los más trabajados en las aulas de clases, por ser estos de más fácil reproducción en el que los estudiantes deben agrupar elementos para llegar al cociente.

Ejemplo 3.2. Problema de división-partitiva (Urrea, Córdova y Quezada, 2017, p. 276)

Tengo 42 huevos que debo guardar en bandejas de a 6. ¿Cuántas bandejas necesito para guardar todos los huevos?

Dentro de los problemas de regla de tres, en 3° básico hemos encontrado un solo problema, ejercicio que es muy poco común conseguir en las actividades a desarrollar por los estudiantes en los libros de texto, especialmente en los niveles más bajos concentrándose este tipo de actividad en los niveles superiores cuando se abordan las razones y proporciones.

Ejemplo 3.3. Problema de regla de tres (Urrea, Córdova y Quezada, 2017, p. 199)

a. Una ranita de Darwin se come 7 insectos cada tres minutos. ¿Cuántos se comerá en 15 minutos?

Además de los ejemplos anteriores hemos encontrado problemas en los que se utilizan elementos poco conocidos para los estudiantes, tal como lo muestra el ejemplo 3.4, el que se trata de una relación cuaternaria (1 frasco de peumo –3kg de mermelada, 27 frascos –x kg mermelada), para el desarrollo de esta actividad el estudiante necesita desarrollar una multiplicación para encontrar el resultado.

Ejemplo 3.4. Problema de multiplicación (Urrea, Córdova y Quezada, 2017, p. 202).

c. Para preparar mermelada se necesitan 3 kg de peumo por frasco. Si se completan 27 frascos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de peumo se utilizaron?

En lo que se refiere a los problemas de isomorfismo de medida propuestos por Vergnaud (1997), en 4° básico hemos encontrado principalmente aquellos relacionados con la multiplicación y reparto equitativo, encontrándose muy pocos aquellos relacionados con *división-medida*, el ejemplo 3.5 nos presenta un problema de *división-medida*.

Ejemplo 3.5. Problema de *división-medida* (Rodríguez, García, Romante, y Verdejo, 2018, p. 79).

8. Para ordenar su álbum de fotografías, Mónica colocó 5 fotos en cada página. Si tiene 35 fotos, ¿cuántas páginas ocupará?

En lo que se refiere a problemas donde es necesario aplicar la regla de tres no hemos encontrado en este nivel, puesto que la gran mayoría de las actividades están relacionadas con problemas de reparto equitativo, es decir los relacionados con división-partitiva, tal como se presenta en el ejemplo3.6.

Ejemplo 3.6. Problema de división-partitiva (Rodríguez, García, Romante, y Verdejo, 2018, p. 83).

b. En un colegio hay 76 estudiantes de 4° básico distribuidos en 2 cursos con la misma cantidad de alumnos. ¿Cuántos estudiantes tienen cada curso?

Al revisar el libro de texto correspondiente a 5° básico, y buscar cuáles son los problemas relacionados con Isomorfismo de medida según Vergnaud (1997), hemos encontrado problemas de *división-medida*, *división-partitiva* y regla de tres, en el ejemplo 3.7 presentamos un problema de *división-partitiva*.

Ejemplo 3.7. Problema de *división-partitiva* (Ho Kheong, Kee Soon y Ramakrishnan, 2017, P. 14*)*

¿Sabías que las latas se pueden reciclar para producir elementos con aluminio reciclado?
Se estima que con 5 latas recicladas se puede fabricar el envase de un aerosol.

Envases de aerosol que se pueden fabricar con latas recicladas					
Cantidad de envases	1		6		27
Cantidad de latas	5	15		75	

En el ejemplo 3.8, representamos un problema de *división-medida*, problemas que son muy escasos de encontrar en los libros de texto y por ende casi no se trabajan en las clases con los estudiantes.

Ejemplo 3.8. Problema de *división-medida* (Ho Kheong, Kee Soon y Ramakrishnan, 2017, P. 111*)*

a. Un carpintero corta un trozo de madera en 5 partes de igual medida. Cada parte mide 75 mm de largo. ¿Cómo expresarías, en centímetros y milímetros, el largo inicial del trozo de madera?

Al igual que los problemas de *división-medida* los problemas de regla de tres también se encuentran escasamente en los libros de texto, pese a que estos aparecen en las razones y proporciones en niveles superiores, no existe un acercamiento a este tipo de situaciones, en el ejemplo 3.9 presentamos un problema de regla de tres.

Ejemplo 3.9. Problema de regla de tres (Ho Kheong, Kee Soon y Ramakrishnan, 2017, P. 57*)*.

a. Si 5 kg de pan cuestan $ 4 750, ¿cuánto se pagaría por 50 kg de pan?

De la misma forma hemos revisado el libro de texto de 6° básico, encontrando problemas de Isomorfismo de medida principalmente en los números decimales, ya que en este nivel se trabajan situaciones problemáticas en las que se encuentra presente más de una operación. En el ejemplo 3.10 presentamos un problema de *división-medida*.

Ejemplo 3.10. Problema de *división-medida* (Maldonado y Castro, 2016, p. 58)

b. La temperatura de un horno aumenta en 3,18 °C por segundo. ¿Cuál será su temperatura luego de 45 s?

El ejemplo 3.11 nos muestra un problema de división-partitiva, este tipo de actividades son mucho más recurrentes en todos los niveles por considerarse una operación más simple de resolver, es decir repartir en partes iguales una cantidad, lo que resulta fácil tanto para enseñar como aprender a encontrar el resultado.

Ejemplo 3.11. Problema de *división-partitiva* (Maldonado y Castro, 2016, p. 65)

a. Héctor lleva 5 bolsas con jugo de 1,75 kg en total. Si todas tienen la misma masa, ¿cuántos kilogramos tiene cada bolsa?

TABLA 3. 3. ACTIVIDADES PRESENTADAS EN LOS LIBROS DE TEXTO EN RELACIÓN A LA DIVISIÓN DE 4° A 6° BÁSICO.

Curso	Resta repetida	Agrupar elementos	Repartir equitativamente	Algoritmo de la división		Interpretación del resto	
				Ejercicio	Problema	ejercicio	Problema
4°	1	14	20	51	15	0	0
5°	3	0	0	69	13	3	8
6°	0	0	0	33	22	0	0
Total	**4**	**14**	**20**	**153**	**50**	**3**	**8**

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 3.3, se observa que en el último curso (6° básico) analizado las actividades se concentran en su totalidad en la búsqueda del algoritmo de la *división*, los que están relacionados con el desarrollo de ejercicios por sobre la resolución de problemas, cuestión similar en los niveles anteriores, además deja de lado las demás actividades relacionadas con la *división*. Es importante señalar que los problemas en donde es necesario interpretar el resto son casi nulos en los niveles de 4°, 5° y 6° año de enseñanza básica, de los cuales hemos analizado.

Haciendo énfasis en aplicar el algoritmo de la *división* más en ejercicios que en resolución de problemas, en el caso de los problemas la pregunta realizada va en relación al cociente que, a otro elemento de la *división*, siendo estas preguntas muy similares en todos los problemas encontrados en los niveles analizados. Al observar la tabla podemos concluir que además de ser escasos los problemas son poco contextualizados, dejando de lado los aquellos relacionados con la interpretación del resto, salvo en 5° básico que aparecen algunos problemas y ejercicios donde se hace necesario la interpretación para llegar a una respuesta.

Luego de haber realizado este análisis nos enfocamos en los tipos de estructuras de isomorfismo de medida, propuestos por Vergnaud (1997), para ello hemos realizado la tabla 3.4 en la que se presenta otra clasificación por nivel, hemos comenzado desde 3° básico, nivel en cual se comienza a desarrollar el algoritmo de la *división*, arrojando lo siguiente:

TABLA 3. 4. TIPO DE DIVISIÓN SEGÚN VERGNAUD (1997)

Curso	Multiplicación	División-medida	División-partitiva	Regla de tres
3°	15	8	10	1
4°	8	6	7	0
5°	10	3	4	5
6°	7	8	8	4
Total	**40**	**25**	**29**	**9**

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 3.4, hemos realizado un análisis de los tipos de *división* según Vergnaud, los que se conocen como problemas de estructuras de isomorfismo de medidas, podemos comprobar que los libros de texto centran sus actividades principalmente en los problemas de multiplicación por sobre las actividades relacionadas con los tipos de *división*, en cuanto se refiere a los problemas de *división-partitiva* y *división-medida*, podemos ver que en los cuatro cursos analizados donde se trabaja la *división* se encuentran distribuidos casi en la misma cantidad, sin embargo podemos observar que en el caso de los problemas relacionados con el uso de regla de tres son muy escasos y en algunos cursos son nulos.

3.4. ANÁLISIS DE LA NOCIÓN DE DIVISIÓN EN EL CURRÍCULO CHILENO, SEGÚN EL EOS.

Como ya hemos dado a conocer en el apartado anterior hemos analizado el currículo chileno, desde cuáles son los tipos de *división* y como se trabaja la interpretación del resto, en este apartado haremos el análisis desde el Enfoque ontosemiótico para realizar un estudio más detallado y complementar con cuáles son los elementos que se encuentran presentes en las actividades que hemos revisado, tanto en los libros de texto como en los programas de estudio.
Hemos decidido comenzar con tercero básico, considerando que desde este grado se trabaja de manera explícita la noción de *división*, según las evidencias encontradas en los programas de estudios y libros de textos.

3.4.1 Análisis epistémico del programa del estudio.

El programa de estudio propuesto para tercero básico del Ministerio de Educación de Chile, está organizado en cuatro unidades, las cuales están relacionadas con cinco ejes temáticos. La noción de *división* está enmarcada en las unidades 2 y 3, en el eje de Números el cual se trabaja de forma transversal en todas las unidades, en la unidad 2 se plantean siete objetivos de aprendizaje de los cuales dos están relacionados con la noción de *división*, O_A 8) Demostrar que comprenden las tablas de multiplicar hasta 10 de manera progresiva: › usando representaciones concretas y pictóricas › expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales › usando la distributividad como estrategia para construir las tablas hasta el 10 › aplicando los resultados de las tablas de multiplicación hasta 10 x 10, sin realizar cálculos › resolviendo problemas que involucren las tablas aprendidas hasta el 10; O_A9) Demostrar que comprenden la *división* en el contexto de las tablas hasta 10 x 10: › representando y explicando la *división* como repartición y agrupación en partes iguales, con material concreto y pictórico › creando y resolviendo problemas en contextos que incluyan la repartición y la agrupación › expresando la *división* como una sustracción repetida › describiendo y aplicando la relación inversa entre la *división* y la multiplicación, aplicando los resultados de las tablas de multiplicación de las tablas hasta 10 x 10, sin realizar cálculos; en cambio, en la unidad 3 se plantean nueve objetivos de aprendizaje en la cual solo dos están relacionados con la noción de *división*, los cuales son el O_A 8 y O_A 9 de la unidad 2 pero con distintos ámbitos numéricos, el O_A8) Demostrar que comprenden las tablas de multiplicar del 7 y 9 de manera progresiva: › usando representaciones concretas y pictóricas › expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales › usando la distributividad como estrategia para construir las tablas del 7 y el 9 › aplicando los resultados de las tablas de multiplicación del 7 y el 9, sin realizar cálculos › resolviendo problemas que involucren las tablas aprendidas hasta el 10; el O_A 9) Demostrar que comprenden la *división* en el contexto de las tablas del 7 y el 9: › representando y explicando la *división* como repartición y agrupación en partes iguales, con material concreto y pictórico › creando y resolviendo problemas en contextos que incluyan la repartición y la agrupación › expresando la *división* como una sustracción repetida › describiendo y aplicando la relación inversa entre la *división* y la multiplicación › aplicando los resultados de las tablas de multiplicación hasta 10x10, sin realizar cálculos; Cabe destacar que cada uno de los objetivos de aprendizaje tiene una gran variedad de indicadores de evaluación, que es lo que se espera que logren los estudiantes al finalizar el trabajo de los distintos Objetivos de Aprendizaje, los que a continuación se presentan en las siguientes imágenes:

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA_08	
Demostrar que comprenden las tablas de multiplicar de 3, 6, 4 y 8 de manera progresiva: **› usando representaciones concretas y pictóricas** **› expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales** **› usando la distributividad como estrategia para construir las tablas hasta el 8** **› aplicando los resultados de las tablas de multiplicación de 3, 6, 4 y 8, sin realizar cálculos** **› resolviendo problemas que involucren las tablas aprendidas hasta el 10**	› Identifican situaciones de su entorno que describen la agrupación en grupos de elementos iguales. › Representan un "cuento matemático" que se refiere a una situación de combinar grupos iguales, por medio de una expresión numérica. › Ilustran y representan una suma de grupos de elementos iguales por medio de una multiplicación. › Representan concretamente una multiplicación como una adición repetida de grupos de elementos iguales. › Crean un "cuento matemático" de una multiplicación dada; por ejemplo: para 3 x 4. › Representan una multiplicación en forma concreta, pictórica y simbólica, usando una matriz de puntos. › Crean una matriz de punto, para demostrar la propiedad conmutativa; por ejemplo: 2 x 3 = 3 x 2. › Resuelven problemas de la vida cotidiana, usando la multiplicación para su solución. › Repiten las tablas de multiplicación de memoria.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA_09	
Demostrar que comprenden la división en el contexto de las tablas de 3, 6, 4 y 8: **› representando y explicando la división como repartición y agrupación en partes iguales, con material concreto y pictórico** **› creando y resolviendo problemas en contextos que incluyan la repartición y la agrupación** **› expresando la división como un sustracción repetida** **› describiendo y aplicando la relación inversa entre la división y la multiplicación** **› aplicando los resultados de las tablas de multiplicación hasta 10x8, sin realizar cálculos**	› Identifican situaciones de su entorno que describen una repartición en partes iguales. › Representan un "cuento matemático" que se refiere a una situación de repartición en partes iguales, usando fichas. › Crean un "cuento matemático" dada una división. › Relacionan la multiplicación con la división, utilizando una matriz de puntos, y la describen con expresiones numéricas. › Aplican la relación inversa entre la división y la multiplicación en la resolución de problemas.

FIGURA 3. 1. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE E INDICADORES DE EVALUACIÓN, UNIDAD 2 (MINEDUC, 2013, PP. 88-89)

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA_8	
Demostrar que comprenden las tablas de multiplicar hasta 10 x 10 de manera progresiva: **› usando representaciones concretas y pictóricas** **› expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales** **› usando la distributividad como estrategia para construir las tablas hasta 10 x 10** **› aplicando los resultados de las tablas de multiplicación hasta 10 x 10, sin realizar cálculos** **› resolviendo problemas que involucren las tablas aprendidas hasta el 10**	› Identifican situaciones de su entorno que describen la agrupación de elementos iguales. › Representan un "cuento matemático" que se refiere a una situación donde se combinan grupos iguales por medio de una expresión numérica. › Ilustran y representan una suma de grupos de elementos iguales por medio de una multiplicación. › Representan concretamente una multiplicación como una adición repetida de grupos de elementos iguales. › Crean un "cuento matemático" de una multiplicación dada; por ejemplo: para 3 x 4. › Representan una multiplicación en forma concreta, pictórica y simbólica, usando una matriz de puntos. › Crean, para demostrar la propiedad conmutativa, una matriz de puntos; por ejemplo: 2 x 3 = 3 x 2. › Resuelven problemas de la vida cotidiana, usando la multiplicación para su solución.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA_9	
Demostrar que comprenden la división en el contexto de las tablas hasta 10 x 10: **› representando y explicando la división como repartición y agrupación en partes iguales, con material concreto y pictórico** **› creando y resolviendo problemas en contextos que incluyan la repartición y la agrupación** **› expresando la división como un sustracción repetida** **› describiendo y aplicando la relación inversa entre la división y la multiplicación** **› aplicando los resultados de las tablas de multiplicación hasta 10x10, sin realizar cálculos**	› Identifican situaciones de su entorno que implican repartir en partes iguales. › Representan con fichas un "cuento matemático" que se refiere a una situación de repartición en partes iguales por medio de una expresión numérica. › Crean un "cuento matemático" de división dada; por ejemplo: para 6 : 3. › Relacionan la multiplicación con la división, utilizando una matriz de puntos y describiéndola con expresiones numéricas. › Aplican la relación inversa entre la división y la multiplicación en la resolución de problemas.

FIGURA 3. 2. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE E INDICADORES DE EVALUACIÓN, UNIDAD 3 (MINEDUC, 2013, PP. 115-116)

El propósito tanto de la unidad 2 como de la 3 en el eje de números es (MINEDUC, 2013):

> Los objetivos de aprendizaje de esta unidad abarcan 4 ejes de la matemática: Números y operaciones, Patrones y álgebra, Geometría y Medición. Los estudiantes realizaran trabajos con patrones, los que les ayudará a descubrir las relaciones numéricas de múltiplos, con el fin de comprender las tablas de multiplicación de 3, 4, 6 y 8, como también las divisiones relacionadas (p. 85). En lo que respecta la unidad n°3 continúan el trabajo con patrones y las tablas de multiplicación más difícil, las del 7 y 9 y las divisiones relacionadas. En ambas unidades el aprendizaje se ve fortalecido por un trabajo en el cual se relacionan las multiplicaciones entre

> sí, por medio del uso de la distributividad. Hacia el fin de cada unidad, y asegurando la comprensión, los estudiantes aplican las tablas de multiplicación del 3, 4, 6, 8, 7 y del 9, como también las demás hasta el 10 x 10, y las divisiones en el contexto de las tablas, en forma progresiva, de memoria y sin realizar cálculos, y, por ende, usan su progreso en la destreza de cálculo (p 113).

En lo que respecta a contenidos en ambas unidades se proponen las Tablas de multiplicación del 3, 4, 6, 8, 7 y 9 por considerarse estas dos últimas más complejas de aprender, además de las divisiones en contexto de las tablas. De esta forma el programa de estudio de tercer grado intenta introducir la noción de *división* a través del uso de tablas de multiplicar como la acción inversa.

3.4.2 Análisis para la propuesta curricular para tercero básico.

Con respecto al libro de texto sugerido por el Ministerio de Educación (Mineduc) para tercero básico (Urrea, Córdova y Quezada, 2017), presenta la noción de *división* en la Unidad 2 y 3, cada una de las unidades está dividida en 5 y 4 temas respectivamente, encontrándose en el tema 3 la noción de *división* y en la tercera unidad en el tema 1. A continuación realizamos el análisis de las unidades en el cual se introduce la noción de *división*.

<u>Configuración epistémica.</u>

El primer elemento de las configuraciones epistémicas tiene relación con las *situaciones/problemas* propuestos en los libros de texto, hemos identificado cuatro tipos: 1) Problemas contextualizados de reparto equitativo, 2) Problemas contextualizados de *división*, 3) Ejercicios de *división* mediante restas repetidas y mediante el algoritmo de la *división* (combinación de estrategias) y 4) La multiplicación como método de comprobar el resultado de la *división*. Los *elementos lingüísticos* identificados encontrados son de tipo verbal, gráfico y simbólico. Al iniciar con la noción de división se comienza con actividades relacionadas con la resta repetida con una *situación/problema* contextualizado, el cual se presenta de manera gráfica y que se puede *representar* con material concreto, el que podemos observar a continuación en la siguiente figura.

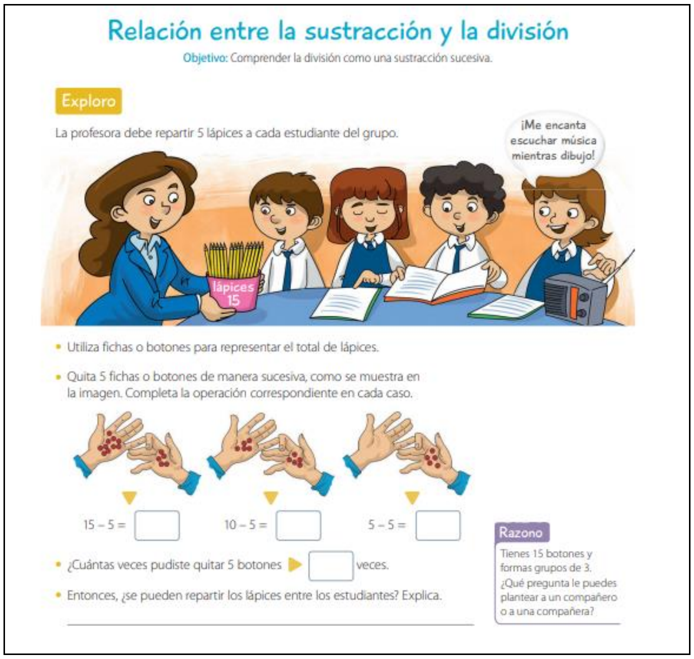


FIGURA 3. 3. EJEMPLO DE PROBLEMAS TIPO 1 (URREA, CÓRDOVA Y QUEZADA, 2017, P. 144)

Al observar la imagen nos podemos dar cuenta que los estudiantes al realizar estas actividades deben contar con el recordar *conceptos previos*, tales como la resta repetida, contar y agrupar elementos, que le sirven en la comprensión del problema, del mismo modo al desarrollar la actividad aparecerán *conceptos emergentes*, tales como repartir elementos de un grupo mayor, quitar de manera sucesiva, que le ayudaran en la resolución del problema, como por ejemplo: las *propiedades/proposiciones* que hemos identificado las que podemos visualizar en las figura 3.3; el algoritmo de la resta, también se pueden representar en situaciones de reparto equitativo, quitando cada vez la misma cantidad al minuendo, contando cada una de las veces como el cociente de la *división*, en tanto en el algoritmo de la *división*, se presenta a través de la búsqueda del cociente con actividades de reparto equitativo y situaciones en las cuales se deben agrupar cantidades, como lo muestran las figuras 3.4 y 3.5.

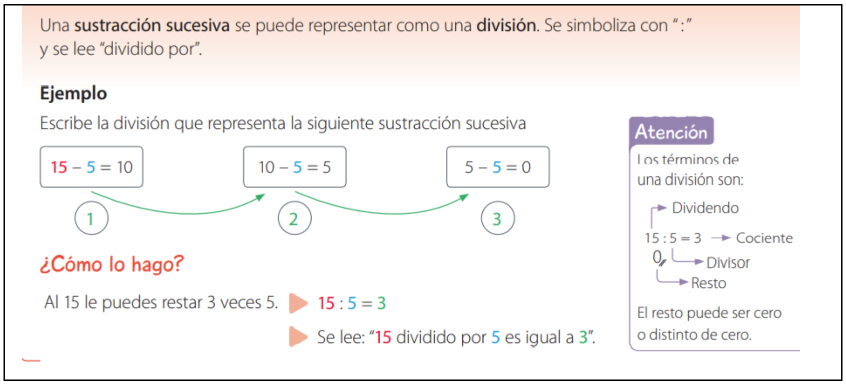


FIGURA 3. 4. EJEMPLO DE PROBLEMAS TIPO 3 (URREA, CÓRDOVA Y QUEZADA, 2017, P. 145)

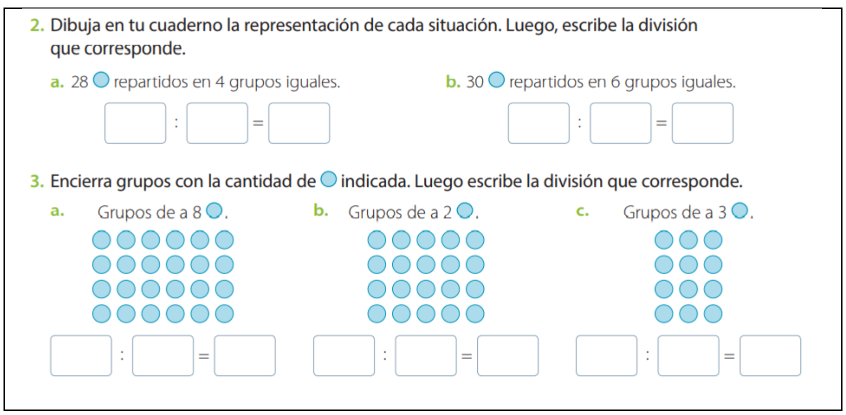


FIGURA 3. 5. EJEMPLO DE PROBLEMA TIPO 3 (URREA, CÓRDOVA Y QUEZADA, 2017, P. 150)

<u>Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas.</u>

La siguiente tabla nos muestra el resumen de las representaciones que se expresan en los distintos planteamientos de las actividades que se proponen en los libros de texto.

TABLA 3. 5. REPRESENTACIONES PREVIAS Y EMERGENTES EN LOS PROBLEMAS DE 3° BÁSICO.

Representación para la noción de división					
Emergentes / Previos		División			
		Verbal	Concreta	Gráfica	Simbólica
División	Verbal		•		
	Concreta			•	•
	Gráfica				•
	Simbólica				•

Fuente: elaboración propia.

Como podemos visualizar en la tabla anterior, se distinguen cinco tipos de representaciones en la que los estudiantes transitan desde las representaciones apoyados con material concreto a expresar situaciones de manera gráfica, como lo muestra la figura 3.6.


Situaciones de reparto y de agrupación

Objetivo: Comprender situaciones de reparto y de agrupación en partes iguales.

Exploro

La profesora de Educación Física divide a los 20 estudiantes en las estaciones de trabajo que se muestran, de modo que en cada una de ella haya igual cantidad de estudiantes.

Estación 1

Estación 3

Estación 2

Estación 4

- Representa a cada estudiante con un ●.
- Reparte los 20 ● en cantidades iguales. Para ello, dibuja un ● por estación de trabajo hasta que se acaben.

Estación 1

Estación 2

Estación 3

Estación 4

- Entonces, ¿cuántos estudiantes habrá en cada estación de trabajo? Explica.

FIGURA 3. 6. EJEMPLO DE PROBLEMA TIPO 3 (URREA, CÓRDOVA Y QUEZADA, 2017, P. 146)

3.4.3 Significado de la noción de división pretendido por el currículo de tercero básico

Según lo analizado en los apartados anteriores, es posible determinar los significados pretendidos en el currículo chileno, de la noción de *división*, en ambos instrumentos se presenta la noción de *división* a los estudiantes con actividades parecidas, es decir relacionadas con resta repetida y actividades en las cuales debe relacionar la multiplicación con la *división*, pero como la operatoria inversa.

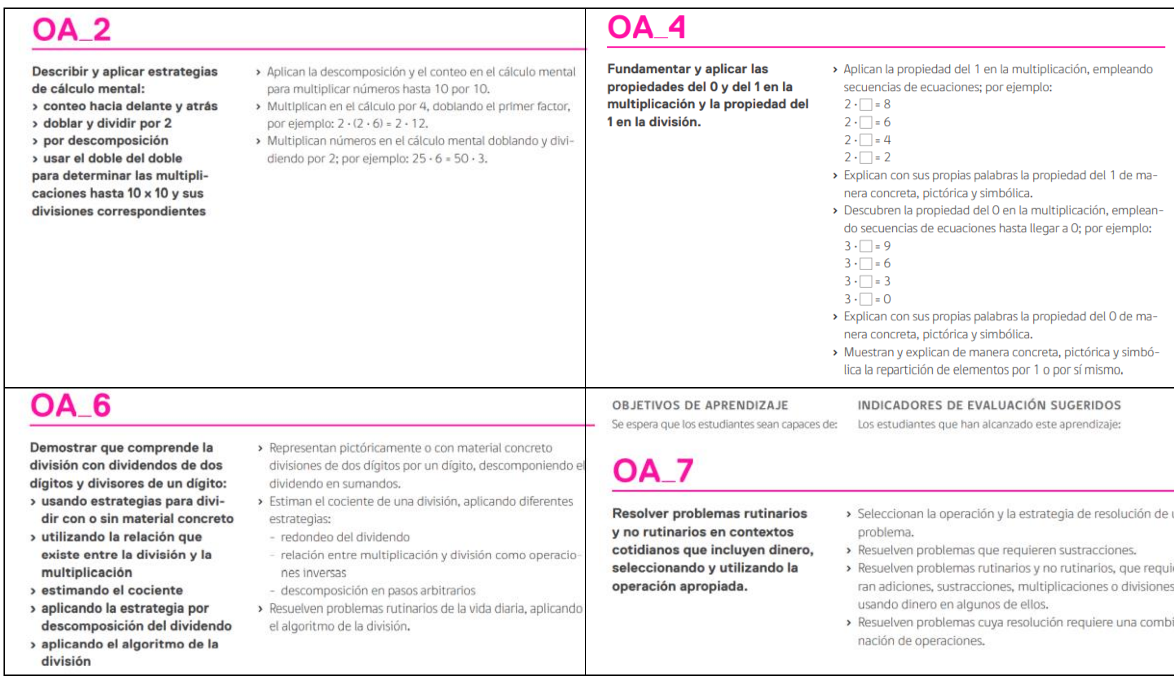
Según lo anterior podemos concluir que los significados pretendidos en el currículo chileno, la noción de *división* se presenta como *resta repetida* y como la *operación inversa de la multiplicación*.

3.5. Análisis para la propuesta curricular para cuarto básico.

En el siguiente apartado presentamos el análisis de los significados pretendidos en el currículo de cuarto año básico, propuestos por el Ministerio de educación chileno (Mineduc, 2013), también consideramos el libro de texto propuesto por el marco curricular: *Rodríguez, García, Romante y Verdejo (2018), Texto del estudiante. Matemática 4° básico.*

3.5.1. Análisis epistémico de los programas de estudio.

El programa de estudios para cuarto año básico está formado por cuatro unidades, repartidas en dos por semestre, además de cinco ejes temáticos asociados a las unidades. La noción de *división* se trabaja en la unidad n°1 en el Eje de Números y Operaciones. La Unidad está formada por siete Objetivos de Aprendizaje de los cuales cuatro están relacionados directamente con la noción de *división*, O_A2) Describir y aplicar estrategias de cálculo mental: › conteo hacia adelante y atrás › doblar y *dividir* por 2 › por descomposición › usar el doble del doble para determinar las multiplicaciones hasta 10 x 10 y sus divisiones correspondientes, O_A4) Fundamentar y aplicar las propiedades del 0 y del 1 para la multiplicación y la propiedad del 1 para la *división*, O_A6) Demostrar que comprenden la *división* con dividendos de dos dígitos y divisores de un dígito: › usando estrategias para dividir, con o sin material concreto › utilizando la relación que existe entre la *división* y la multiplicación › estimando el cociente › aplicando la estrategia por descomposición del dividendo › aplicando el algoritmo de la *división*, O_A7) Resolver problemas rutinarios en contextos cotidianos, que incluyen dinero, seleccionando y utilizando la operación apropiada. Cada uno de estos Objetivos de Aprendizaje contiene distintos indicadores de evaluación que se espera que los estudiantes logren al finalizar cada uno de ellos, lo que se muestra en la figura 3.7.



OA_2

Describir y aplicar estrategias de cálculo mental:
› conteo hacia delante y atrás
› doblar y dividir por 2
› por descomposición
› usar el doble del doble para determinar las multiplicaciones hasta 10 x 10 y sus divisiones correspondientes

› Aplican la descomposición y el conteo en el cálculo mental para multiplicar números hasta 10 por 10.
› Multiplican en el cálculo por 4, doblando el primer factor, por ejemplo: 2 · (2 · 6) = 2 · 12.
› Multiplican números en el cálculo mental doblando y dividiendo por 2; por ejemplo: 25 · 6 = 50 · 3.

OA_4

Fundamentar y aplicar las propiedades del 0 y del 1 en la multiplicación y la propiedad del 1 en la división.

› Aplican la propiedad del 1 en la multiplicación, empleando secuencias de ecuaciones; por ejemplo:
2 · □ = 8
2 · □ = 6
2 · □ = 4
2 · □ = 2
› Explican con sus propias palabras la propiedad del 1 de manera concreta, pictórica y simbólica.
› Descubren la propiedad del 0 en la multiplicación, empleando secuencias de ecuaciones hasta llegar a 0; por ejemplo:
3 · □ = 9
3 · □ = 6
3 · □ = 3
3 · □ = 0
› Explican con sus propias palabras la propiedad del 0 de manera concreta, pictórica y simbólica.
› Muestran y explican de manera concreta, pictórica y simbólica la repartición de elementos por 1 o por sí mismo.

OA_6

Demostrar que comprende la división con dividendos de dos dígitos y divisores de un dígito:
› usando estrategias para dividir con o sin material concreto
› utilizando la relación que existe entre la división y la multiplicación
› estimando el cociente
› aplicando la estrategia por descomposición del dividendo
› aplicando el algoritmo de la división

› Representan pictóricamente o con material concreto divisiones de dos dígitos por un dígito, descomponiendo el dividendo en sumandos.
› Estiman el cociente de una división, aplicando diferentes estrategias:
- redondeo del dividendo
- relación entre multiplicación y división como operaciones inversas
- descomposición en pasos arbitrarios
› Resuelven problemas rutinarios de la vida diaria, aplicando el algoritmo de la división.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE
Se espera que los estudiantes sean capaces de:

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:

OA_7

Resolver problemas rutinarios y no rutinarios en contextos cotidianos que incluyen dinero, seleccionando y utilizando la operación apropiada.

› Seleccionan la operación y la estrategia de resolución de un problema.
› Resuelven problemas que requieren sustracciones.
› Resuelven problemas rutinarios y no rutinarios, que requieran adiciones, sustracciones, multiplicaciones o divisiones, usando dinero en algunos de ellos.
› Resuelven problemas cuya resolución requiere una combinación de operaciones.

FIGURA 3. 7. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE E INDICADORES DE EVALUACIÓN, UNIDAD 1 (MINEDUC, 2013, PP. 54-55)

El propósito de la unidad 1 del eje de números es (Mineduc, 2013):

> En esta unidad los estudiantes continúan el trabajo con números naturales hasta 10.000, ampliando el ámbito numérico en las operaciones de 100 a

1.000 y la tabla de valor posicional de 1.000 a 10.000. Reconocen que el sistema decimal de números naturales y las propiedades de las operaciones se mantienen al traspasar al nuevo ámbito numérico. Siguen con la composición y descomposición de números naturales para usarlas tanto en el cálculo mental como en el entendimiento de los algoritmos de la multiplicación y la *división*. Comprenden el rol del 0 en la adición y del 0 y el 1 en la multiplicación y la *división*. Aplican los algoritmos de la multiplicación y la *división* en la resolución de problemas rutinarios en contextos cotidianos. Desarrollan estrategias para reconocer las operaciones adecuadas con las cuales se resuelven los problemas que involucran una o más operaciones. En este nivel se trabajan los siguientes contenidos relacionados con la noción de *división*: *› División por descomposición › División por sustracción repetida › División aplicando algoritmo* (p. 53).

Con respecto a las *situaciones/problemas* que se platean en los programas de estudio hemos encontrado actividades relacionadas con la noción de *división* en las cuales se espera que los estudiantes luego de resolver puedan argumentar y comunicar información. El tipo de problemas es contextualizado, sin embargo, se le da énfasis en la búsqueda del algoritmo a través de la descomposición en decenas y unidades, relacionando las operaciones de multiplicación y *división*. En cuanto a las *propiedades/proposiciones*, se pretende que los estudiantes logren resolver las *situaciones/problemas* aplicando la descomposición de las cantidades a través de la aplicación de la propiedad distributiva, luego puedan argumentar y comunicar la acción realizada.

En relación a los conceptos importantes que se mencionan para trabajar la noción de la *división* tenemos: sustracción repetida, doblar, dividir, descomposición, divisor, repartir, cociente, entre otros.

Con la finalidad de complementar las configuraciones epistémicas es necesario revisar el libro de texto sugerido por el Mineduc para el nivel.

3.5.2 Análisis epistémico del libro de texto sugerido por el Mineduc.

En relación al libro de texto sugerido por el Ministerio de Educación para cuarto básico (*Rodríguez, García, Romante, y Verdejo, 2018)*, trabaja la *división* en la Unidad n° 1 llamada “Números y operaciones, patrones y álgebra”. La unidad está dividida en tres lecciones, la división se encuentra en la lección dos denominada operaciones.

Configuración epistémica.

El primer elemento de las configuraciones epistémicas está relacionado con el tipo de *situaciones/problema* propuesto por el libro de texto. En relación a ello hemos encontrado cinco tipos de problemas: 1) problemas contextualizados de reparto equitativo, 2) problemas contextualizados de *división*, 3) ejercicios de *división* mediante resta repetidas y mediante el algoritmo de la *división* (combinación de estrategias), 4) la multiplicación como método de comprobar resultado de la *división* y 5) aumentar el cociente cuando se incluye el resto en la operación. Los *elementos lingüísticos* identificados en las diferentes actividades están relacionados con *situaciones/problemas* de tipo verbal, gráfico y simbólico. Al desarrollar cada uno de los temas de la lección relacionados con la *división* van acompañados de definiciones.

Al dar una definición para la *división* hace la relación de la multiplicación con la *división* como la operación inversa una de la otra. (Rodríguez, García, Romante y Verdejo, 2018).

“Para resolver una multiplicación, a veces conviene resolver otra más sencilla, pero con el mismo resultado. Para ello, se puede aplicar la estrategia doblar y dividir por 2 según convenga” (p. 61). En esta afirmación encontramos otra de las configuraciones epistémicas que tiene relación con los *procedimientos* que se deben llevar a cabo para realizar la situación problemática.

La figura 3.8, presenta una *situación/problemática* en la que se debe buscar el algoritmo utilizando la estrategia de doblar y dividir por dos tiene relación con el *procedimiento* a utilizar, favoreciendo el cálculo mental para resolver multiplicaciones.

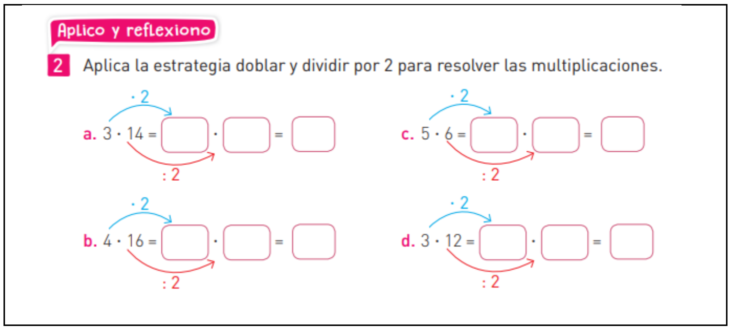


FIGURA 3. 8. EJEMPLO DE PROBLEMA DEL TIPO 3 (RODRÍGUEZ, GARCÍA, ROMANTE Y VERDEJO, 2018, P. 61)

Este tipo de problema se enmarca en el tipo 3 de nuestra clasificación que tiene que ver con una combinación de operaciones para encontrar el algoritmo.

Otra de las definiciones que se presentan en el libro de texto tiene que ver con la búsqueda del cociente de la *división*, representando cada uno de los términos de manera gráfica y agrupando de forma equitativa, además las clasifica en divisiones exactas e inexactas y las define en relación al resto. En este caso nos encontramos frente a las *proposiciones/propiedades*, según las configuraciones epistémicas.

"Para dividir números de 2 dígitos por otros de un dígito puedes seguir el algoritmo descrito en la actividad 1. Por ejemplo: 68 : 4"

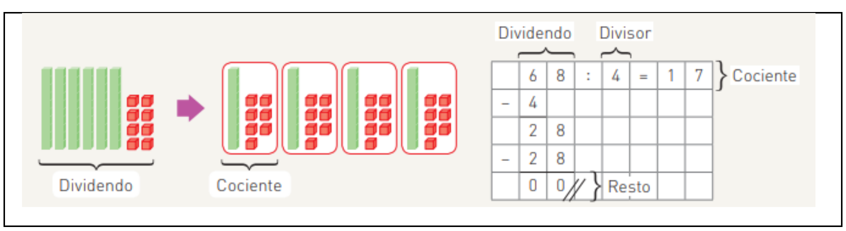


FIGURA 3. 9. EJEMPLO DE REPARTO EQUITATIVO (RODRÍGUEZ, GARCÍA, ROMANTE Y VERDEJO, 2018, P. 81)

"Cuando el dígito de mayor valor posicional del dividendo sea menor que el divisor, se debe considerar un número de 2 dígitos del dividendo. Por ejemplo: 38 : 7

- *Una división exacta tiene un resto igual a 0.*
- *Una división inexacta tiene un resto distinto de 0.''*

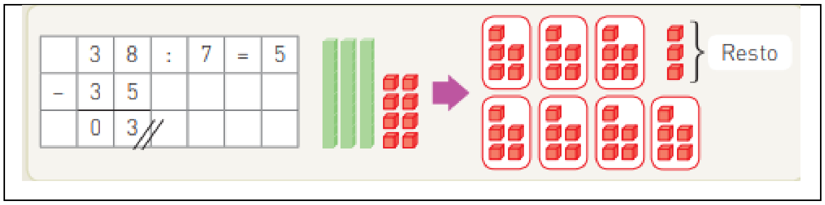


FIGURA 3. 10. EJEMPLO DE REPARTO EQUITATIVO (RODRÍGUEZ, GARCÍA, ROMANTE Y VERDEJO, 2018, P. 81)

La definición expresada anteriormente es utilizada para que los estudiantes tomen como referencia para resolver otras actividades del mismo tipo. La figura 3.11 nos muestra el tipo de actividad que se espera desarrollen los alumnos.

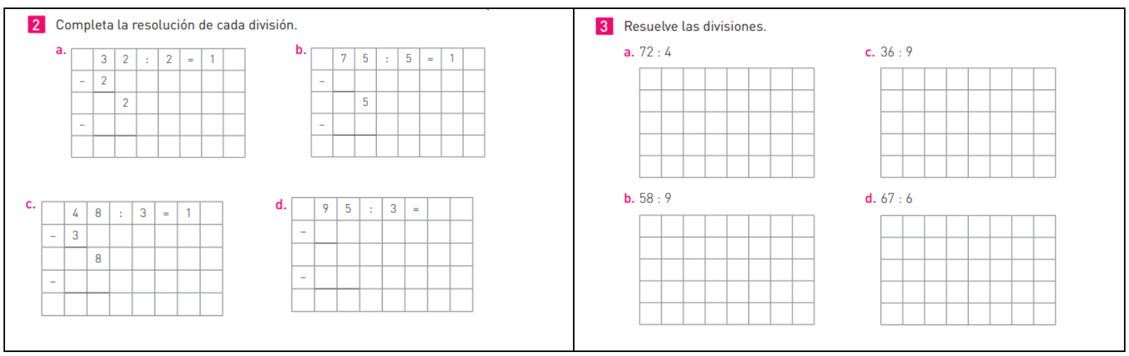


FIGURA 3. 11. ACTIVIDAD, BÚSQUEDA DEL COCIENTE (RODRÍGUEZ, GARCÍA, ROMANTE Y VERDEJO, 2018, PP. 81-82)

<u>Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de tareas.</u>

La tabla 3.6, nos muestra las distintas representaciones que se encuentran presente en los diferentes planteamientos de los problemas a desarrollar.

TABLA 3. 6. REPRESENTACIONES PREVIAS Y EMERGENTES EN LOS PROBLEMAS DE 4° BÁSICO.

Representación para la noción de división					
Emergentes / Previos		División			
		Verbal	Concreta	Gráfica	Simbólica
División	Verbal	•		•	
	Concreta				
	Gráfica				•
	Simbólica				•

Fuente: elaboración propia.

De la tabla anterior se puede visualizar que existen cuatro tipos de representaciones de los problemas a trabajar. En la figura 3.12 se muestra un problema verbal en el que los estudiantes deben representar la operación y argumentar la situación problemática presentada.

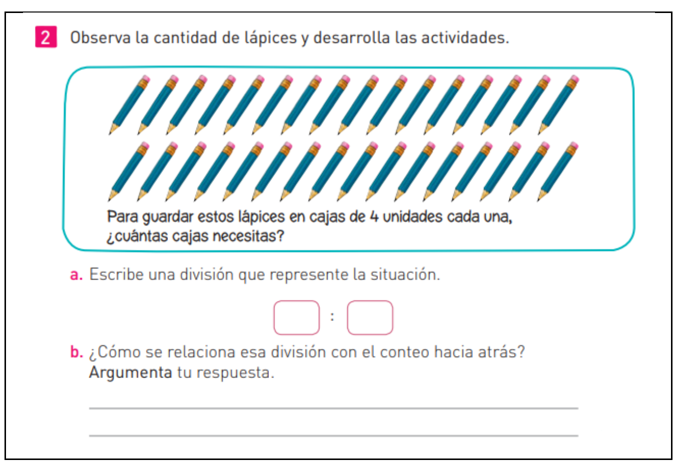


FIGURA 3. 12. EJEMPLO DE TAREA CLASE 1 (RODRÍGUEZ, GARCÍA, ROMANTE Y VERDEJO, 2018, P. 58)

La representación dos corresponde a un problema de tipo verbal la cual se debe representar de manera gráfica, como lo muestra la figura 3.13.

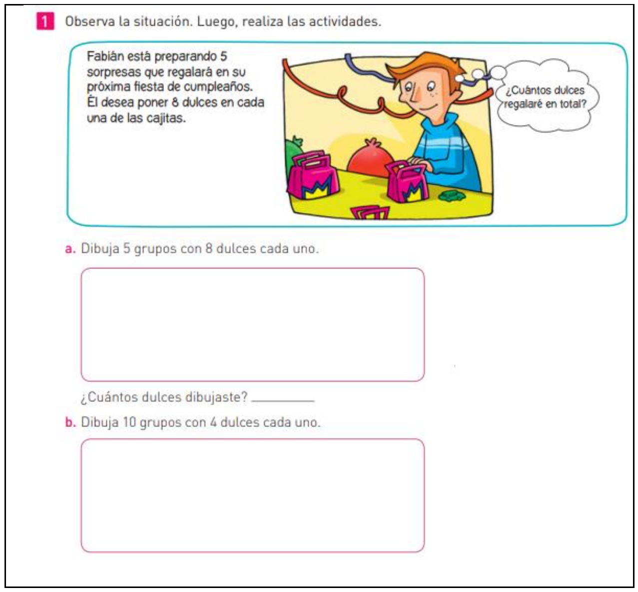


FIGURA 3. 13. EJEMPLO DE TAREA CLASE 2 (RODRÍGUEZ, GARCÍA, ROMANTE Y VERDEJO, 2018, P. 60)

La tercera representación que podemos observar tiene relación con que la situación problemática de forma gráfica se les pide expresar de manera simbólica, tal como lo muestra la figura 3.14.

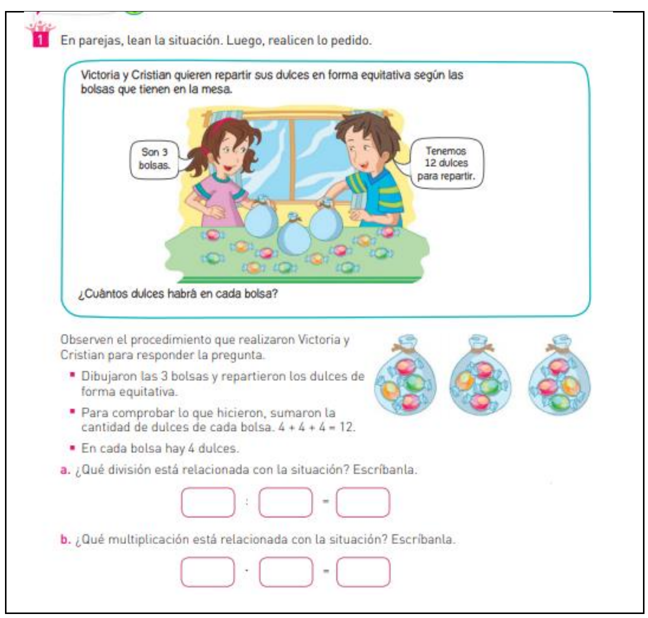


FIGURA 3. 14. EJEMPLO DE TAREA CLASE 3 (RODRÍGUEZ, GARCÍA, ROMANTE Y VERDEJO, 2018, P. 74)

En cuanto a la representación de problemas expresados de manera simbólica a simbólica encontramos la búsqueda del algoritmo como lo muestra la figura 3.15.

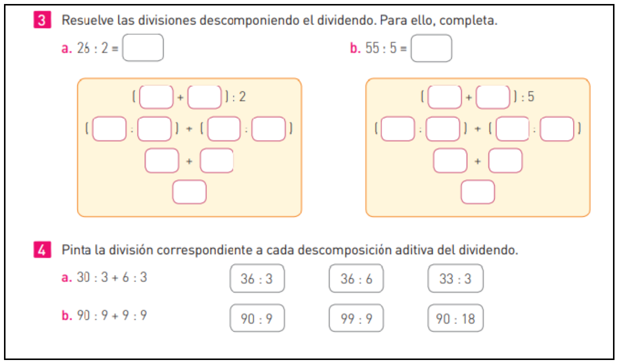


FIGURA 3. 15. EJEMPLO DE TAREA CLASE 4 (RODRÍGUEZ, GARCÍA, ROMANTE Y VERDEJO, 2018, P. 74)

3.6. Análisis de la propuesta curricular para Quinto básico.

En el siguiente párrafo presentamos los significados pretendidos presentes en el currículo de matemáticas de quinto básico, programa de estudio el cual es propuesto por el Ministerio de Educación (Mineduc, 2013), de igual manera analizaremos el libro de texto sugerido.

Fong Ho, GanKee y Chelvi (2017*), Texto del estudiante. Matemática 5° básico.*

3.6.1 Análisis epistémico del programa de estudio.

El programa de estudio para quinto básico del Ministerio de Educación, está formado por cuatro unidades, y cinco ejes temáticos, cada uno de ellos están asociados a las unidades. La noción de *división* se encuentra en la unidad uno en el eje de números, la cual está compuesta por ocho Objetivos de Aprendizaje: O_A2) Aplicar estrategias de cálculo mental para la multiplicación: › anexar ceros cuando se multiplica por un múltiplo de 10 › doblar y dividir por 2 en forma repetida › usando las propiedades: conmutativa, asociativa y distributiva, O_A4) Demostrar que comprenden la *división* con dividendos de tres dígitos y divisores de un dígito: › interpretando el resto › resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que impliquen divisiones, O_A5) Realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones, aplicando las reglas relativas a paréntesis y la prevalencia de la multiplicación y la *división* por sobre la adición y la sustracción cuando corresponda, O_A 6) Resolver problemas rutinarios y no rutinarios que involucren las cuatro operaciones y combinaciones de ellas: › que incluyan situaciones con dinero › usando la calculadora y el computador en ámbitos numéricos superiores al 10.000. Al observar los objetivos de aprendizaje antes mencionados podemos ver que tres de ellos, es decir el O_A2, O_A5 y O_A6 requiere de la aplicación de además de la *división* otras operaciones o aplicación de propiedades, de tal forma que nos permita encontrar el algoritmo, sin embargo, en el O_A 4 hace solo referencia a la *división* e interpretación del resto en distintas *situaciones/problemas*. Cabe señalar que a cada uno de los objetivos de aprendizaje le corresponden indicadores de evaluación, los que deben estar relacionados con las actividades a trabajar con los estudiantes, tal como se muestra a continuación.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA_2 **Aplicar estrategias de cálculo mental para la multiplicación:** **› anexar ceros cuando se multiplica por un múltiplo de 10** **› doblar y dividir por 2 en forma repetida** **› usando las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva**	› Determinan productos cuando uno de los factores es múltiplo de 10, 100 o 1 000. › Calculan multiplicaciones, aplicando mitades y dobles. Por ejemplo: $34 \cdot 5 = 17 \cdot 10$. › Calculan multiplicaciones, aplicando repetidamente dobles y mitades. Por ejemplo: $12 \cdot 25 = 6 \cdot 50 = 3 \cdot 100$. › Aplican la propiedad distributiva en multiplicaciones, descomponiendo en múltiplos de 10. Por ejemplo $102 \cdot 4 = (100 + 2) \cdot 4 = 100 \cdot 4 + 2 \cdot 4$. › Doblan multiplicaciones dadas para realizar multiplicaciones. Por ejemplo: para calcular 12 x 3, piensan en 6x3 y la doblan. › Usan las propiedades conmutativa y asociativa para multiplicar números. Por ejemplo: $25 \cdot (3 \cdot 4) = 25 \cdot (4 \cdot 3) = (25 \cdot 4) \cdot 3 = 100 \cdot 3 = 300$.
OA_4 **Demostrar que comprende la división con dividendos de tres dígitos y divisores de un dígito:** **› interpretando el resto** **› resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que impliquen divisiones**	› Modelan la división como el proceso de reparto equitativo, usando bloques de base diez, y registran los resultados de manera simbólica. › Explican el resto de una división en términos del contexto. › Ignoran el resto de divisiones en el contexto de situaciones. Por ejemplo: determinan que 5 equipos de 4 personas cada uno se pueden formar con 22 personas. › Redondean cocientes. › Expresan restos como fracciones. › Expresan restos como decimales. › Resuelven un problema no rutinario de división en contexto, usando el algoritmo y registrando el proceso.
OA_5 **Realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones con expresiones numéricas, aplicando las reglas relativas a paréntesis y la prevalencia de la multiplicación y la división por sobre la adición y la sustracción cuando corresponda.**	› Realizan operaciones combinadas de sumas y restas. › Realizan operaciones combinadas de sumas y restas que involucran paréntesis. › Calculan expresiones desconocidas en igualdades en que intervienen sumas y restas. › Resuelven sumas y/o restas de multiplicaciones y/o divisiones. › Aplican reglas de paréntesis en la operatoria con expresiones numéricas.
OA_6 **Resolver problemas rutinarios y no rutinarios que involucren las cuatro operaciones y combinaciones de ellas:** **› que incluyan situaciones con dinero** **› usando la calculadora y el computador en ámbitos numéricos superiores al 10 000**	› Seleccionan y usan una estrategia para estimar la solución de un problema dado. › Demuestran que la solución aproximada a un problema no rutinario dado, no requiere de una respuesta exacta. › Determinan respuestas aproximadas. › Estiman la solución de un problema dado y lo resuelven. › Resuelven problemas matemáticos relativos a cálculos de números, usando la calculadora. › Identifican qué operación es necesaria para resolver un problema dado y lo resuelven. › Determinan lo razonable de una respuesta a un problema no rutinario. › Evalúan la solución de un problema en su enunciado. › Explican la estrategia utilizada para resolver un problema.

FIGURA 3. 16. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE E INDICADORES DE EVALUACIÓN, UNIDAD 1 (MINEDUC, 2013, PP. 55-57)

El propósito de la unidad n°1 es (Mineduc, 2013):

> "*Se espera que, en esta unidad, los estudiantes profundicen el trabajo con números naturales, ampliando el ámbito numérico a números de hasta más de 6 cifras, representando, describiendo, comparando, aproximando y estimando estos números, demostrando la comprensión de multiplicaciones y divisiones, y aplicando estrategias de cálculo mental y escrito en el contexto de la resolución de problemas en contextos diversos*" (Mineduc, 2013, p. 53).

En cuanto a las *situaciones/problemas* presentes en los programas de estudio se espera que los estudiantes al desarrollar las actividades sean capaces de argumentar y comunicar, además de representar de manera gráfica la información de tal manera que puedan comprender de forma más fácil los problemas. Las actividades a desarrollar que se presentan son contextualizadas y se pretende que se conecten con otras asignaturas de tal manera que los estudiantes logren relacionar la información de manera transversal. En cuanto a los *elementos/lingüísticos* presentes, se espera que expresen información de manera verbal y simbólica utilizando algunos conceptos claves, tales como: producto, cociente, resto, entre otros.

3.6.2 Análisis epistémico del libro de texto sugerido por el Mineduc.

En relación al libro de texto sugerido por el Ministerio de Educación de Chile para Quinto básico, presenta la *división* en la unidad 1 denominada, *Números naturales, operaciones y patrones*, la cual está dividida en cuatro lecciones, con respecto a la *división* se encuentra en la lección dos de la *multiplicación y división* y en la lección tres de *estrategias de cálculo y problemas*.

Ho Kheong, Kee Soon y Ramakrishnan, (2017), texto para el estudiante de 5° básico.

<u>Configuración epistémica</u>.

Para iniciar el análisis de la configuración epistémica presente en los libros de texto, tomaremos el primer elemento que se refiere a las *situaciones/problemas*, en relación a ello hemos encontrado cuatro elementos: 1) completa la resolución de un problema y lo comprueba, 2) problemas contextualizados de *división* interpretando el resto, 3) ejercicios de *división* mediante reagrupación de centenas, decenas y unidades, 4) la multiplicación como método de comprobar el resultado de la *división*. En relación a los *elementos lingüísticos* hemos encontrado *situaciones/problemas* de tipo verbal, gráfico de tipo tabular, pictórico en menor medida, además de simbólicos. De la misma forma las *representaciones* se expresan con material concreto, pictórico y simbólico. En cuanto a los *conceptos/definiciones* hemos encontrado conceptos previos y emergentes; previos: mitad, mitad de números pares, propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, estimar cocientes, *división*, entre otros. De igual manera en los conceptos emergentes: dividir reagrupando centenas, decenas y unidades, resolver problemas interpretando el resto de una *división*. Además de *propiedades* relacionadas con reglas relativas a paréntesis y la prevalencia de la multiplicación y *división* por sobre la adición y sustracción cuando corresponda. De igual manera podemos considerar como *procedimiento* aquella actividad donde los estudiantes deben reagrupar elementos en decenas y centenas para resolver una *división*.

En quinto básico relaciona la multiplicación con la *división* para encontrar el producto, por ejemplo: "*El producto de 12 • 5 es equivalente al de 6 • 10*", es decir, "*Puedes doblar y dividir por 2 en forma sucesiva*", tal como se muestra en la figura 3.17.

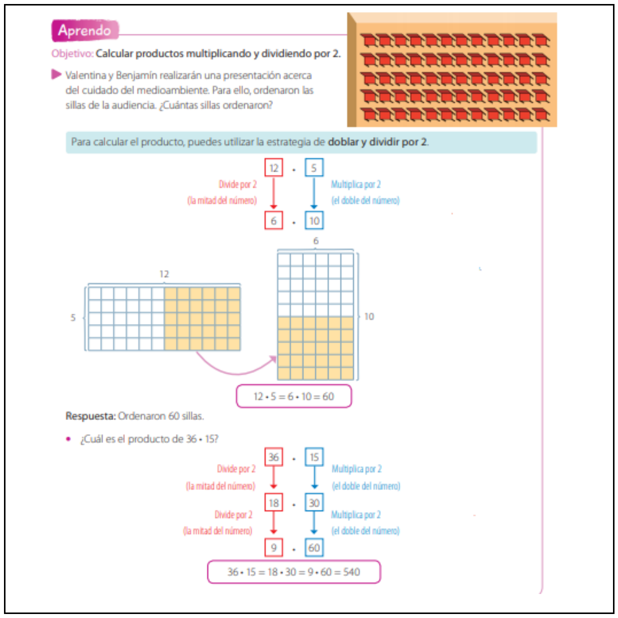


FIGURA 3. 17. EJEMPLO DE PROBLEMA (HO KHEONG, KEE SOON Y RAMAKRISHNAN, 2017, P. 58)

Encontramos también *situaciones/problemas* en las cuales para encontrar la solución se le solicita al estudiante que aplique la descomposición en centenas, decenas y unidades, tal como se muestra en la figura 3.18.

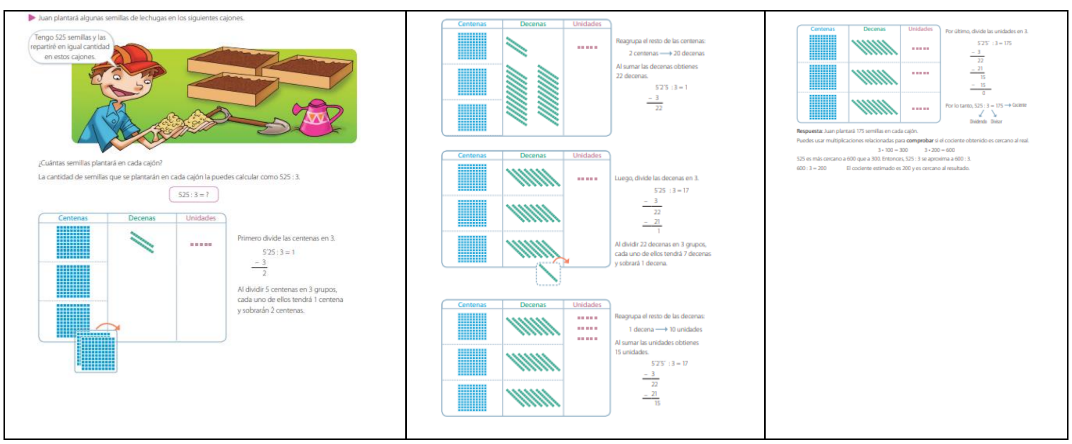


FIGURA 3. 18. EJEMPLO DE PROBLEMA (HO KHEONG, KEE SOON Y RAMAKRISHNAN, 2017, PP. 67-69)

Otra de las *situaciones/problemas* que hemos encontrado que están relacionadas con la interpretación de resto, a lo que en el libro de texto le dan la denominación de *división* exacta e inexacta haciendo alusión a aquellas divisiones en las que el resto es cero como exacta y las inexactas con resto. A continuación, presentamos un ejemplo en la figura 3.19.

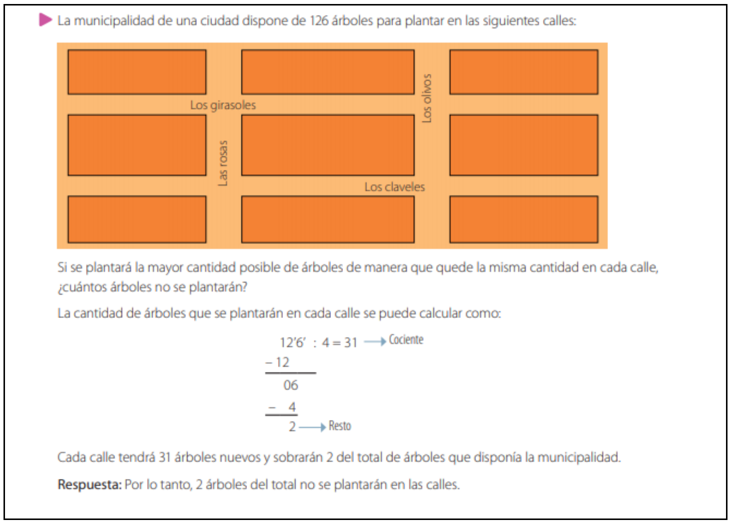


FIGURA 3. 19. EJEMPLO DE PROBLEMA (HO KHEONG, KEE SOON Y RAMAKRISHNAN, 2017, P. 71)

<u>Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas</u>

La tabla 3.7 resume el tipo de planteamientos de las tareas que se espera que desarrollen los estudiantes en relación a los distintos problemas.

TABLA 3. 7. REPRESENTACIONES PREVIAS Y EMERGENTES DE LOS PROBLEMAS DE 5° BÁSICO.

Representación para la noción de división					
Emergentes / Previos		División			
		Verbal	Concreta	Gráfica	Simbólica
División	Verbal	•			•
	Concreta				
	Gráfica				•
	Simbólica				•

Fuente: Elaboración propia.

En cuanto al tipo de problemas podemos observar que encontramos cuatro clases de problemas, en el primer caso tenemos una *situación/problema* en que se expresa de manera verbal y se espera que se responda de manera verbal. Por ejemplo:

10 **Resuelve los siguientes problemas.**

a. Mariana, Benjamín, Carolina y Daniel estimaron el cociente de 468 : 5. Estas son sus respuestas:

Nombre	Respuesta
Mariana	2500
Benjamín	450
Carolina	90
Daniel	9

Explícale a un compañero o compañera cuál de las respuestas es más cercana al cociente real.

FIGURA 3. 20. EJEMPLO DE PROBLEMA (HO KHEONG, KEE SOON Y RAMAKRISHNAN, 2017, P. 73)

La segunda clase tiene relación con verbal simbólica, la *situación/problema* se expresa de manera verbal, pero se pide al estudiante que represente la solución de manera simbólica, por ejemplo:

6 **Analiza y responde. Luego, justifica con ejemplos.**

a. Si un número es dividido por 2, ¿cuáles son los posibles restos?

b. Si un número es dividido por 3, ¿cuáles son los posibles restos?

FIGURA 3. 21. EJEMPLO DE PROBLEMA (HO KHEONG, KEE SOON Y RAMAKRISHNAN, 2017. P. 72)

En cuanto a la tercera clase de *situaciones/problemas* hemos encontrado cuando la actividad es presentada de manera gráfica y se espera que la solución se exprese de manera simbólica, tal como lo muestra la figura 3.21.

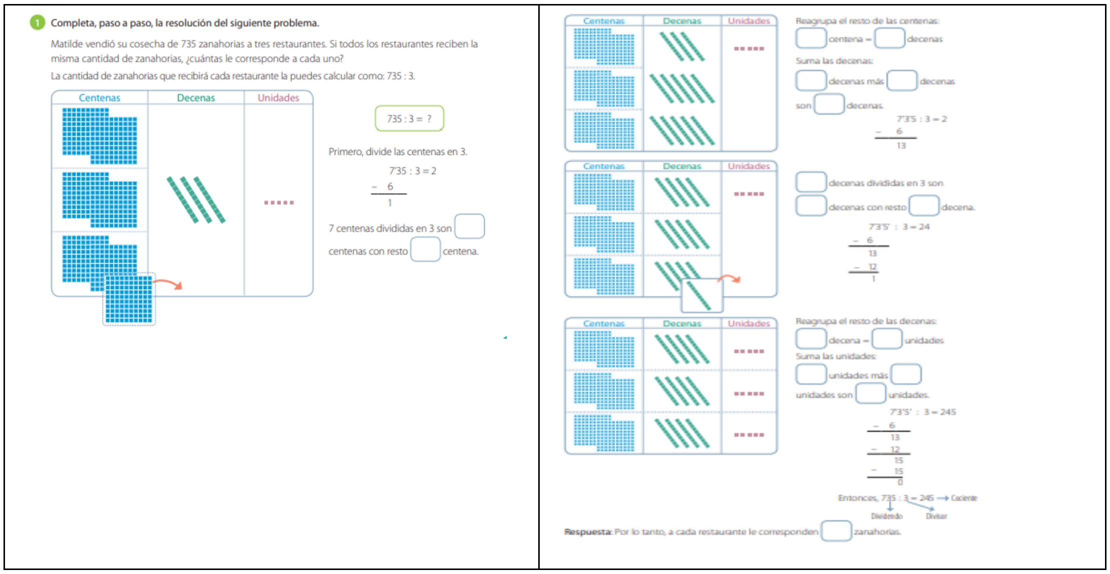


FIGURA 3. 22. EJEMPLO DE PROBLEMA (HO KHEONG, KEE SOON Y RAMAKRISHNAN, 2017, PP. 69-70)

En la cuarta clasificación hemos visualizado las *situaciones/problemas* en las que la actividad se expresa de manera simbólica y se espera que la solución también se represente de manera simbólica. Por ejemplo:

4 Estima cada cociente.

a. 569 : 5
b. 417 : 2
c. 322 : 6
d. 126 : 4

FIGURA 3. 23. EJEMPLO DE PROBLEMA (HO KHEONG, KEE SOON Y RAMAKRISHNAN, 2017, PP. 69-70)

3.7. Significado de la noción de división pretendido en el currículo chileno.

Con respecto a los significados pretendidos en el currículo chileno en sexto grado realizamos un análisis en el programa de estudio y libro de texto.

Maldonado y Castro (2016), Texto del estudiante. Matemática 6° básico.

3.7.1 Análisis de la propuesta curricular para sexto básico

El programa de estudio de sexto básico del Ministerio de Educación de Chile (Mineduc, 2013), está dividido en cuatro unidades y cinco ejes temáticos los que están relacionados con las unidades, en lo que se refiere a la noción de *división* se encuentra presente en la unidad n°1 en el eje de números. La unidad está formada por ocho objetivos de aprendizaje, cada uno de ellos con sus respectivos indicadores de evaluación, los cuales se espera que los estudiantes logren al finalizar de trabajarlos. En relación al trabajo con la *división* se encuentra presente en los objetivos de aprendizaje 2, 7 y 8, O_A2) Realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones en el contexto de la resolución de problemas, utilizando la calculadora en ámbitos superiores a 10 000, O_A7) Demostrar que comprende la multiplicación y la *división* de decimales por números naturales de un dígito, múltiplos de 10 y decimales hasta la milésima de manera concreta, pictórica y simbólica y O_A8) Resolver problemas rutinarios y no rutinarios que involucren adiciones y sustracciones de fracciones propias, impropias, números mixtos o decimales hasta la milésima.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
OA_2	
Realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones en el contexto de la resolución de problemas, utilizando la calculadora en ámbitos superiores a 10 000.	› Estiman la solución de un problema que involucra sumas y restas y verifican la estimación, resolviéndolo. › Estiman la solución de un problema que involucra multiplicaciones y divisiones y verifican la estimación, resolviéndolo. › Determinan lo razonable de una respuesta para un problema. › Realizan cálculos con la calculadora en el contexto de la resolución de problemas.
OA_7	
Demostrar que comprende la multiplicación y la división de decimales por números naturales de un dígito, múltiplos de 10 y decimales hasta la milésima de manera concreta, pictórica y simbólica.	› Multiplican un número decimal hasta el décimo por un número natural: - de manera pictórica, transformando a fracción de denominador 10 el decimal - transformando a fracción de denominador 10 el decimal y expresando la multiplicación como suma de fracciones - usando estimaciones para ubicar la coma. Por ejemplo, 2,3 · 7 es aproximadamente16, y como 23 · 7 = 161 entonces 2,3 · 7 = 16,1 › Dividen, por escrito, un número decimal hasta el décimo por un número natural, usando estimaciones para ubicar la coma. Por ejemplo, para dividir 3,5:5, estiman que el resultado está entre 0 y 1 y como 35:5=7, entonces 3,5:7=0,7. › Explican estrategias para multiplicar y dividir un número decimal hasta el milésimo por un número natural.
OA_8	
Resolver problemas rutinarios y no rutinarios que involucren adiciones y sustracciones de fracciones propias, impropias, números mixtos o decimales hasta la milésima.	› Identifican qué operaciones son necesarias para resolver un problema y lo resuelven. › Interpretan números representados como fracciones o decimales en el contexto de problemas. › Suman y restan las fracciones o los decimales involucrados en el problema. › Verifican si el número decimal o la fracción obtenida como resultado es pertinente con el enunciado del problema.

FIGURA 3. 24. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE E INDICADORES DE EVALUACIÓN, UNIDAD 1 (MINEDUC, 2013, P. 52)

El propósito de la unidad 1 es (Mineduc, 2013), "... *los estudiantes inicien el trabajo con múltiplos de números naturales, con números primos y compuestos, y que los utilicen en la resolución de problemas que involucran estos conceptos"*. (Mineduc, 2013, p. 51).

En relación a los contenidos que se espera que se trabajen están: determinar múltiplos, *descomposición en factores primos, problemas de números naturales por un número decimal y división de un número decimal por un número natural*. (Mineduc, 2013, p. 51).

En lo que se refiere a las *situaciones/problemas* planteados en los programas de estudio hemos encontrado actividades donde deben aplicar una multiplicación, *división* para resolverlo, además de resolución de problemas apoyados del uso de calculadora. En cuanto a los *elementos/lingüísticos* establece términos asociados, como, por ejemplo: *la décima parte de una cierta cantidad*. Con respecto a la *justificación/argumentación* se espera que los estudiantes al resolver problemas puedan argumentar el motivo de su decisión comunicando la elección a sus compañeros.

En cuanto a los *conceptos/definiciones* no se evidencian términos nuevos, ya que como se viene trabajando la noción de *división* desde tercero básico, lo conceptos son conocidos para los estudiantes. En relación a los *procedimientos* utilizados hace referencia a la elección de una de las operaciones a utilizar luego de leer el problema, que puede ser multiplicación y/o *división*.

3.7.2 Análisis epistémico del libro de texto sugerido por el Mineduc.

En relación al libro de texto sugerido por el Ministerio de Educación de Chile para sexto básico (Maldonado y Castro, 2016*)*, este presenta el estudio de la *división* en la Unidad 1 de Números y Operaciones, la cual está dividida en cuatro temas, encontrándose la *división* en el tema 1 de "*operaciones, múltiplos y factores*", tema 3 de "*números decimales*".

Configuración epistémica.

Como primer elemento de la configuración epistémica tenemos las *situaciones/problemas* hemos encontrado actividades en los números decimales en lo que se refiere a: divisiones de un número decimal por un número natural, y usando estimaciones para ubicar la coma. Con respecto a los *elementos lingüísticos* identificamos actividades de tipo verbal, gráfico y simbólico, iniciando el tema con problemas de manera gráfica de tal manera de relacionar la fracción decimal con el número decimal.

En relación a la definición de *división* hemos encontrado las siguientes:

"*Para dividir un número decimal por un número natural, realizas la operación y en el cociente ubicas la coma al momento de utilizar la primera cifra decimal del dividendo. Luego, continúas dividiendo. También puedes emplear una representación gráfica."* (Maldonado y Castro, 2016, p. 61)

Otra definición está relacionada con:

"*Para dividir dos números decimales debes considerar la cantidad de cifras decimales del dividendo y las del divisor y luego multiplicar por 10, 100, 1 000, ... según aquel que tenga mayor cantidad de cifras decimales*." (Maldonado y Castro 2016, P. 62)

La figura 3.25 expresa las definiciones anteriores.

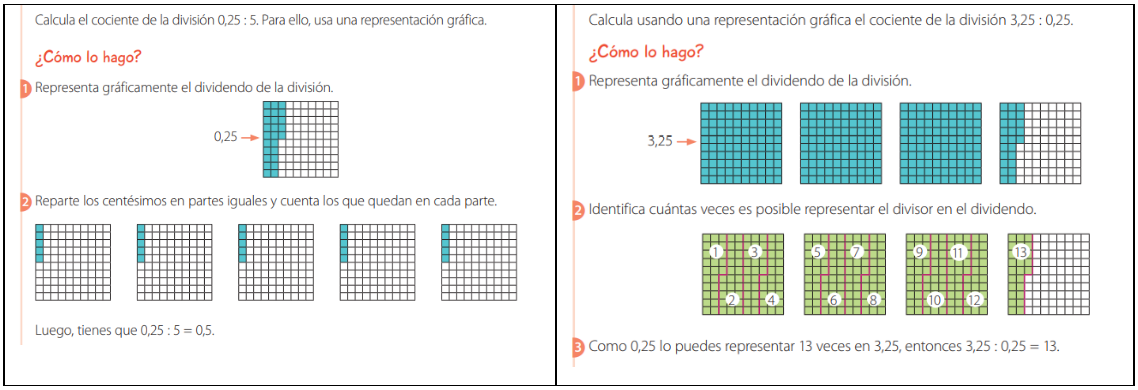


FIGURA 3. 25. EJEMPLO DE ACTIVIDAD DIVISIÓN DE NÚMEROS DECIMALES (MALDONADO Y CASTRO, 2016, PP. 61-62)

Otro ejemplo de cómo se presenta la *división* de un número decimal por un número natural, en esta actividad se aplica el cálculo del algoritmo sin alguna explicación que facilite la comprensión del procedimiento que está realizando el estudiante tal y como se muestra en la figura 3.26.

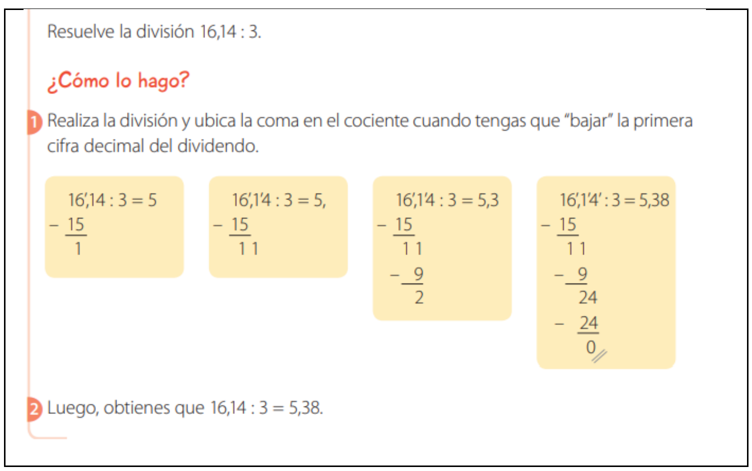


FIGURA 3. 26. EJEMPLO DE ACTIVIDAD DE DIVISIÓN DE NÚMEROS DECIMALES (MALDONADO Y CASTRO, 2016, P. 61)

Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas

En la tabla 3.8 se resumen los tipos de representaciones que se relacionan con los planteamientos de las distintas tareas que se presentan en este nivel.

TABLA 3. 8. REPRESENTACIONES PREVIAS Y EMERGENTES EN LOS PROBLEMAS DE 6° BÁSICO.

Representación para la noción de división					
Emergentes / Previos		División			
		Verbal	Concreta	Gráfica	Simbólica
División	Verbal	●			●
	Concreta				
	Gráfica				●
	Simbólica	●		●	●

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos observar en la tabla anterior hemos encontrado seis tipos de problemas presente, el primero de ellos una expresión verbal al resolver se expresa de manera verbal, tal como se muestra en la figura 3.27.

5. Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. Al dividir un número decimal por otro decimal mayor, el resultado es siempre mayor que 1.
b. Al calcular el cociente entre 0,01 y 0,010, se obtiene un número menor que 1.
c. Al dividir el número 1 por un número decimal menor que él, siempre resulta un número decimal.
d. Al dividir un número decimal por otro número decimal, se puede obtener un número natural o un número decimal.

FIGURA 3. 27. EJEMPLO DE ACTIVIDAD (MALDONADO Y CASTRO, 2016, P. 64)

En lo que se refiere a *situaciones/problemas* de la segunda clasificación relacionada con expresiones que se expresan de manera verbal y al resolver se expresa de forma simbólica, podemos observar lo siguiente:

7. Crea una pregunta para cada problema que se pueda responder resolviendo divisiones de números decimales. Luego, resuélvelo.

a. En un saco hay 13,5 kg de lentejas, los que se quieren distribuir en bolsas de 0,75 kg.
b. Nicolás saldrá de viaje en su automóvil, por eso compra 22,8 L de bencina, por los que pagó $ 16 644.
c. Lucía es una ciclista que todos los días recorre la misma distancia y en 15 días ha recorrido 262,5 km.

FIGURA 3. 28. EJEMPLO DE ACTIVIDAD (MALDONADO Y CASTRO, 2016, P. 64)

En cuanto a las actividades del tercer tipo, en la cual una expresión de manera simbólica al momento de desarrollarla se presenta de forma gráfica, tenemos:

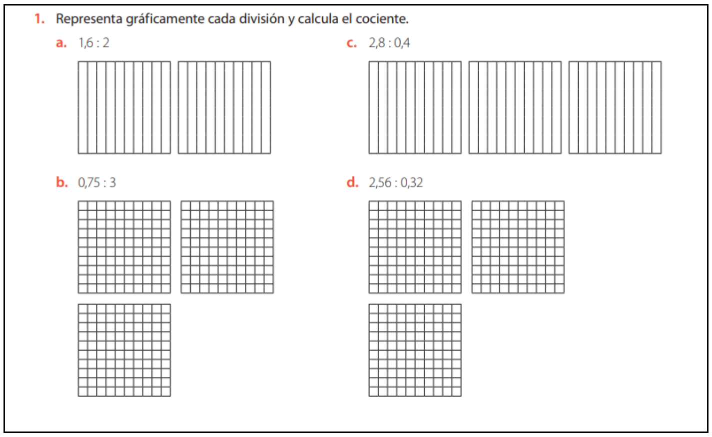


FIGURA 3. 29. EJEMPLO DE ACTIVIDAD (MALDONADO Y CASTRO, 2016, P. 63)

En relación a la cuarta clasificación de *situaciones/problemas* que están relacionados con representación simbólica y cuya expresión una vez desarrollada se debe presentar de manera hemos encontrado las siguientes actividades:

8. Reúnete con un compañero o una compañera y calculen las siguientes divisiones. Luego, cada uno resuelva las divisiones usando la recta numérica, comparen y expliquen sus procedimientos. Finalmente, analicen si existe alguna regularidad en este tipo de divisiones y escríbanla.
a. 1,4 : 1 b. 1,4 : 10 c. 0,8 : 10 d. 5,5 : 100

FIGURA 3. 30. EJEMPLO DE ACTIVIDAD (MALDONADO Y CASTRO, 2016, P. 64)

Con respecto a las *situaciones/problemas* en las que se presentan a los estudiantes de manera simbólica y una vez desarrollada la actividad se expresa de forma gráfica, hemos encontrado las siguientes actividades, tal como se muestran en la figura 3.31.

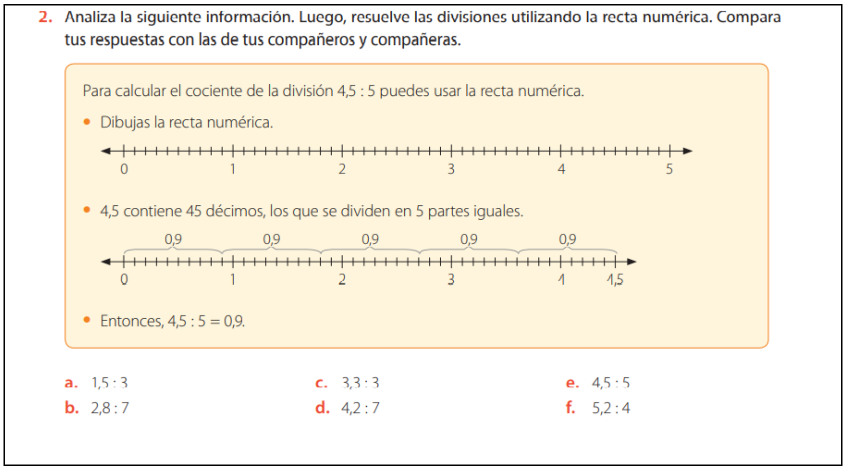


FIGURA 3. 31. EJEMPLO DE ACTIVIDAD (MALDONADO Y CASTRO, 2016, P. 63)

En relación a las situaciones/problemas en las cuales se presentan inicialmente de manera gráfica y una vez resuelta la actividad se presenta de forma simbólica, tal como se presenta en la siguiente figura:

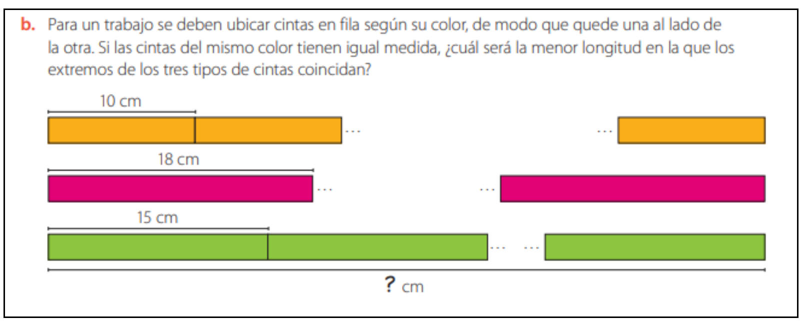


FIGURA 3. 32. EJEMPLO DE ACTIVIDAD (MALDONADO Y CASTRO, 2016, P. 31)

Capítulo 4: Conclusiones y recomendaciones

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo realizamos las conclusiones que dan respuesta a los objetivos específicos que nos hemos planteado en nuestra investigación luego de los resultados obtenidos, además de las limitaciones encontradas y las posibles líneas de investigación que se podrían realizar en relación a la noción de *división*.

4.2. Conclusiones finales relacionadas con los Objetivos específicos

Luego de revisar de una manera acabada los libros de texto y programas de estudio de 1° a 6° básico proporcionados por el Ministerio de educación y visualizar cómo enfoca el currículo chileno la noción de *división* nos damos cuenta que si bien la declara de manera explícita en los primeros niveles de educación básica las actividades desarrolladas en los libros de texto no son conectados con los contenidos que se trabajan en los niveles superiores, lo que se observa es que se abordan de manera parcializada.
Respecto a lo señalado anteriormente damos respuesta a los objetivos específicos que nos hemos planteado.

4.2.1. Objetivo específico 1 (OE1)

Como primer objetivo específico nos hemos plateado: "Identificar los significados pretendidos por el currículo chileno a la noción de *división* desde el EOS"

En cuanto a los significados holísticos de referencia presentes en la dupla curricular hemos visualizado que la mayoría de las actividades presentes están relacionadas con la búsqueda del algoritmo de la división, transitando de lo verbal a lo concreto en los niveles de 3° y 4° básico, en lo que respecta a 5° y 6° desde lo verbal a lo simbólico, dejando de lado la transición de lo verbal a lo gráfico, y de lo concreto a lo gráfico y de lo gráfico a lo simbólico lo que en un futuro puede ocasionar dificultades en la comprensión de problemas cuando se requiera el cambio de registro.

En relación a los problemas de Isomorfismo de medida expuestos por Vergnaud (1997), una parte de ellos se encuentra presente en los libros de texto dándole énfasis a los problemas de multiplicación y *división-partitiva*, siendo los con menor presencia los de *división-medida* y en menor medida regla de tres, lo que deja una falencia en los procesos de aprendizaje y enseñanza de los estudiantes, además por ser el libro de texto el instrumento que mayormente utiliza el docente para realizar sus clases.

4.2.2. Objetivo específico 2 (OE2)

Como segundo objetivo específico nos hemos planteado lo siguiente: "Identificar qué conceptos y procedimientos están implícitos en la noción de *división* presentes en los libros de texto".

Luego de revisar los libros de texto hemos visto que desde primero básico el currículo chileno enfoca la noción de *división* con actividades relacionadas con agrupar cantidades, repartir una cierta cantidad de objetos en partes iguales, resta repetida, estas actividades son previas al iniciar la *división*. Todas las actividades antes mencionadas tienen relación con la *división* y son previas a ella. En la figura 4.1 mostramos un ejemplo en el que aparece de manera implícita la noción de *división*, ya que se solicita a los estudiantes que repartan en una cierta cantidad una cantidad mayor, lo que pudiera estar relacionada con la idea de *división-partitiva*, según la clasificación que realiza Vergnaud.

b. Tengo 36 pinches que quiero repartir en 4 bolsas con igual cantidad. ¿Cuántos pinches habrá en cada bolsa?

FIGURA 4. 1. ACTIVIDAD DE REPARTO EQUITATIVO (URREA, CÓRDOVA Y QUEZADA, 2017, P. 145)

4.2.3. Objetivo específico 3 (OE3)

Con respecto al tercer objetivo específico que nos hemos planteado tiene relación con: "Describir y analizar las actividades propuestas en el currículo chileno para el desarrollo de la noción de *división* desde la perspectiva de Vergnaud (isomorfismo de medida)".

Al revisar y analizar las actividades propuestas en el currículo chileno (libros de texto y programas de estudio) podemos observar que desde los primeros años de escolaridad se explicitan actividades relacionadas con la noción de *división* y estas van en forma progresiva, por ejemplo podemos observar que presentan actividades de agrupar elementos, repartir objetos, todas son actividades previas, además van acompañadas del uso de material concreto o también pueden ser expresadas de manera pictórica, tal como lo podemos visualizar en la figura 4.2.

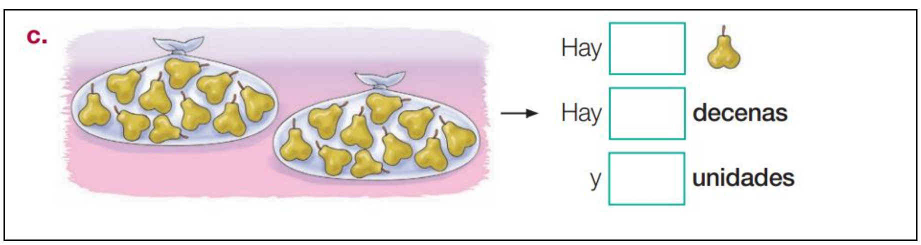


FIGURA 4. 2. ACTIVIDAD DE AGRUPAR ELEMENTOS (CORTÉS, C. 2018, P. 111)

Otra de las actividades previas a la noción de *división* que hemos visualizado en los libros de texto tiene relación con el estudiante debe agrupar elementos según la cantidad que se indica, tal como lo mostramos en la figura 4.3.

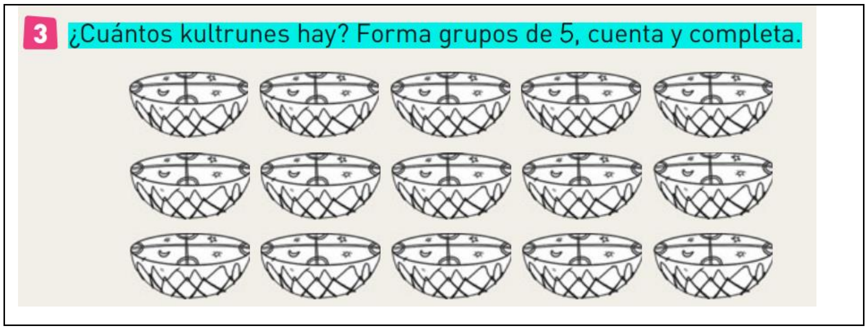


FIGURA 4. 3. ACTIVIDAD DE REPARTO EQUITATIVO (AYALA, FRÍAS Y BENAVIDES, 2017, P. 221)

Además, hemos encontrado actividades relacionadas con la resta repetida donde el estudiante debe resolver una *división* en la que debe ir quitando siempre la misma cantidad a un número dado, el que podemos visualizar en la figura 4.3.

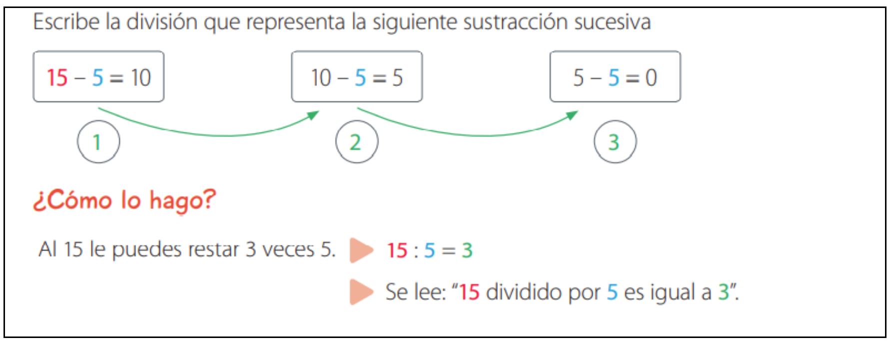


FIGURA 4. 4. ACTIVIDAD DE RESTA REPETIDA (URREA, CÓRDOVA Y QUEZADA, 2017, P. 145)

Con respecto a los ejemplos de actividades presentados en las figuras anteriores podemos darnos cuenta que todas son actividades previas a la noción de *división* las que están presentes en los libros de texto, sin embargo, todas estas actividades no se relacionan entre sí y cada una se aborda de manera aislada. Además, los ejercicios que principalmente se encuentran presentes en el currículo chileno están relacionados con reparto equitativo donde el estudiante debe encontrar el cociente, es decir la mayoría de las actividades están relacionadas con *división-partitiva*, lo que nos deja en evidencia que los ejercicios necesitan de una operación simple para llegar a la solución, además de que la mayoría de las actividades están relacionadas con la búsqueda del algoritmo de la *división* lo que nos muestra que muchas de sus acciones no necesitan de un mayor trabajo cognitivo para llegar a una solución enfocándose en el desarrollo de habilidades de índole inferior, generando en el estudiantado un aprendizaje memorístico.

Aunado a lo anterior, en el único curso que se trabaja la interpretación del resto es en 5° básico, siendo este de poca relevancia, ya que solo cuenta con tres ejercicios y ocho problemas.

También cabe señalar que las actividades plasmadas en los libros de textos no cubren en su totalidad los objetivos planteados en los programas de estudio provocando un déficit en el logro de los objetivos por parte de los estudiantes, pues muchos de los docentes utilizan como su única herramienta de apoyo para las clases este instrumento.

Finalmente, se observa que se da mayor relevancia a la realización de ejercicios que en la resolución de problemas (153 ejercicios y 50 problemas de 4° a 6°).

4.3. Limitaciones y futuras líneas relacionadas con la investigación

Luego de una revisión acabada de los programas de estudio y libros de texto nos encontramos con que las actividades relacionadas con los problemas de Isomorfismo de medida en el currículo chileno son escasas, dándose énfasis en la búsqueda del algoritmo, lo que deja en evidencia que las actividades realizadas en la sala de clases están relacionadas casi en su totalidad de reparto equitativo, privilegiando actividades en relación de la búsqueda del algoritmo y no en la resolución de problemas contextualizados. Esto nos lleva a pensar que sería de suma importancia analizar los libros que utilizan las instituciones privadas para poder comparar con los resultados obtenidos en este estudio.

Otra de las limitaciones que nos encontramos durante la investigación es que luego de revisar literatura relacionada con las dificultades en relación a los problemas de isomorfismo de medida en especial *división-partitiva* y *división-medida* y su relación con los libros de texto nos dimos cuenta que existen muy pocos trabajos relacionados con este tema, otra de las dificultades es que en Chile existen escasos trabajos referidos al desarrollo de actividades de problemas de isomorfismo de medida. Sería interesante poder ampliar la investigación e indagar las dificultades que presenta la noción de división en el currículo chileno.

Por otra parte, se puede abordar desde el trabajo realizado por el profesor, analizando las clases realizadas por los profesores cuando trabajan la noción de *división* con los estudiantes.
También se pueden analizar los diseños pedagógicos (planificaciones), si estos tienen coherencia en la secuenciación de las actividades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Aravena, A. y Morales, A. (2019), Construcción del algoritmo de la división en estudiantes de cuarto año básico de una escuela chilena. *PNA*, Vol. 13 Núm. 3, Pág. 147-171.

Ayala Altamirano, C., Frías Barea, M. y Benavides Oyarzún, M.C. (2017), Texto del estudiante. Matemática 2° básico, Chile SM Chile S.A.

Bases curriculares. (2012). Primero a sexto básico Ministerio de Educación de Chile. Santiago de Chile. Pág. 414. ISBN 978-956-292-743-7

Bell, E. T. (1969), Historia de las Matemáticas, Nueva York, Pág. 553

Benavides, M. Villagra, M. Castro, E y Brieba C. (2004). La resolución de problemas en el currículo chileno. Reflexiones, Marcos de Antecedentes e Ilustraciones. *Acta Latinoameriacana de Matemática Educativa*. Vol. 17.

Boyer, C. (1986), Historia de la matemática, alianza universidad textos. *Madrid, España.*

Cortés Toro, C. (2018), Texto del estudiante. Matemática 1° básico, Chile Cal y Canto, Chile S.A.

D´Amore, B; Fandiño Pinilla, M., I. (2005), Historia y epistemología de la Matemática como bases éticas universales. Un homenaje a D´Ambrosio Uribitan, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia.

De Castro Hernández, C.; Escorial González, B. (2007). *Resolución de problemas aritméticos verbales en la educación infantil: Una experiencia de enfoque investigativo*. Universidad Autónoma de Madrid. CSEU La Salle, España. Pp. 23-47

Fernández, A. y Puig, L. (enero, 2003), *Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria*. Trabajo presentado en VI Simposio de la SEIEM, Universidad de Valencia, España. Recuperado en https://www.researchgate.net/publication/28231339

Fernández Verdú, C., Callejo de la Vega, M. L. y Márquez Torres, M. (2014), Conocimiento de los estudiantes para maestros cuando interpretan respuestas de los estudiantes de primaria a problemas de división-medida. Enseñanza de las Ciencias. Vol. 3. Núm. 32. Pp. 263-280

Flores Martínez, P; Piñeiro, J. L. (diciembre, 2016). *La introducción a la división en educación* *primaria. Un análisis comparativo*. Trabajo presentado en XVI congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Matemáticas, Ni más Ni menos. Granada. Recuperado de https://thales.cica.es/xviceam/actas/pdf/com32.pdf

Font, V. y Godino, J. D. (2006), La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educación Matemática Pesquí*, Sao Paulo, Brasil. Vol. 8. Núm. 1, Pp. 67 – 98.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. D. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. *82*, Núm. 1 Pp. 97-124.

García Alcalá, A.; Vásquez Maldonado, J.; Zarzosa Escobedo, L. (2013), Solución estratégica a problemas matemáticos verbales de una operación. El caso de la multiplicación y división. Educación Matemática, Vol. 25. Núm. 3, Pp. 123-128.

García, M.; Suárez, A.; (2011). Procedimientos de resolución de problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas. En P. Perry (Ed), Memorias del 20º Encuentro de Geometría y su Aplicación (pp. 213-220). Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica nacional.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *The* ontosemiotica proach to r*echerch in mathematics education. ZDM. The International Journalon Mathematics Education. Vol. 39- N° 1-2. Pp. 127-135*

Gutiérrez Guzmán, N., Morles Estruch, N. y Valdés Figueroa, F. (2018), Progresiones de aprendizaje en espiral en Matemática, Ministerio de educación Chile División de Educación General Unidad de educación especial, Chile, Santiago. Pp 30 - 31.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación. *Editorial Mc Graw Hill Educación*, Sexta edición, México D.F.

Ho Kheong, F., Kee Soon, G. y Ramakrishnan (2015), Texto para el estudiante. Matemática 5° básico, Chile Santillana Chile, S.A.

Ivars, P.; Buforn, Á. y Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente", *Acta Scientiae*, 18(4), 48-66.

Ivars, P.; Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación Matemática*, Vol 28, Núm. 1, Pp. 9-38.

Lago, M.O.; Rodríguez, P.; Enesco, I.; Jiménez, L. y Dopico, C. (2008). Me sobran cuatro y no sé qué hacer con ellas. Un estudio sobre los problemas de división con resto en 1° de ESO. *Anales de Psicología*, 24 (2), Pp. 201-212.

Maldonado Rodríguez, L. y Castro Maldonado, C. (2016), Texto del estudiante. Matemática 6° básico, Chile Santillana Chile S.A.

Márquez, M. Hernández, E. y García, J. (2019). Estrategias en la resolución de problemas de división-medida por estudiantes de sétimo básico en Chile. *Espacios.* Vol. 40. Núm. 33. Pág. 10.

Maza Gómez, C.; (1991), Enseñanza de la Multiplicación y División. *Vallehermoso, Madrid: Síntesis.*

Mineduc. (2013). Programa de Estudio para primer año de Educación General Básica Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile. Páginas 192. ISBN 978-956-292-383-5

Mineduc. (2013). Programa de Estudio para segundo año de Educación General Básica Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile. Páginas 206. ISBN 978-956-292-384-2

Mineduc. (2013). Programa de Estudio para tercer año de Educación General Básica Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile. Páginas 212. ISBN 978-956-292-385-9

Mineduc. (2013). Programa de Estudio para cuarto año de Educación General Básica Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile. Páginas 194. ISBN 978-956-292-373-6

Mineduc. (2013). Programa de Estudio para quinto año de Educación General Básica Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile. Páginas 202. ISBN 978-956-292-374-3

Mineduc. (2013). Programa de Estudio para sexto año de Educación General Básica Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago de Chile. Páginas 192. ISBN 978-956-292-376-7

Montero, E. y Callejo, M. L. (2018), Cómo interpretan los estudiantes para maestro respuestas de alumnos de primaria a problemas de división-medida con fracciones. *Investigación en*

Educación Matemática XXII. SEIEM. Pág. 10.

Moreira, M. A.; (2002), La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área; *Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 7, Núm.1, Pág. 28.

Oller Marcén, A. M.; Gairín Sallán, J. M. (2013), "La génesis histórica de los conceptos de la razón y proporción y su posterior aritmetización". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 10. Núm. 13. Pág. 23.

Ordoñez Montañez, C. C. (mayo, 2019). *Enseñanza de la división, basada en justificaciones, con estudiantes de primaria*, Comunicación presentada en XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática Medellín, Colombia, Universidad de Medellín y Universidad de Antioquía, Medellín – Colombia.

Orús, P. y Fregona, D. (septiembre, 2012). *Como enseñar la división en la escuela primaria. Un ejemplo de utilización de los recursos del CRDM – GB para la investigación del profesorado*. Presentado en XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Universidad Internacional de Andalucía en Baeza (Jaén), Andalucía, España. Recuperado de http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/

Parra Urrea, Y.; (2015), *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función*, Tesis para optar el grado de Magíster, Universidad de Los Lagos, Santiago, Chile.

Parra Urrea, Y.; Pino-Fan, L. (2017), *Análisis Ontosemiótico de libros de texto chilenos: el caso del concepto función*, Trabajo presentado en Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, Recuperado de enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*, Tesis para optar el grado de doctor, Universidad de Granada, Granada, España.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2014). Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años. Épsilon. Revista de Educación Matemática, Vol. 31, Núm.3, Pp. 41-56.

Ríbnikov, K. (1974), Historia de las Matemáticas. Moscú, Pág. 248.

Ríos, K. (2010), *Problemas de estructura multiplicativa: una propuesta psicopedagógica con* *estudiantes de 5º grado de primaria de una escuela pública del Distrito Federal*, Tesis para obtener el grado de Licenciada en Psicología Educativa, Universidad Pedagógica nacional, México D.F.

Rodríguez Rojel, R., García Orellana, D., Romante Flores, P. y Verdejo Lagunas, A. (2018), Texto para el estudiante. Matemáticas 4° básico, Chile SM Chile S.A.

Saíz, I. (1994), "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir". En Parra, C. & Saíz, I. (comps.), Didáctica de las Matemáticas, Buenos Aires, Argentina. Ed. Paidós.

Urrea Vásquez, A., Córdoba Hermosilla, C. y Quezada Soto, C. (2017), Texto para el estudiante. Matemática 3° básico, Chile Santillana Chile S.A.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10, Núm. 3, Pp. 133-170.

Vergnaud, G. (1997). El niño, la matemática y la realidad. México: Trillas.

ANEXOS.

A continuación, se adjuntan los objetivos de aprendizaje de 1° a 6° básico de los cuales hemos sacado los descriptores de la tabla 3.1.

<table>
<tr><th>Curso</th><th>Objetivo de Aprendizaje</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1°</td><td>OA_7. Describir y aplicar estrategias de cálculo mental para las adiciones y sustracciones hasta 20:
- Conteo hacia adelante y atrás
- Completar 10
- Dobles</td></tr>
<tr><td>OA_8. Determinar las unidades y decenas en números del 0 al 20, agrupando de a 10, de manera concreta, pictórica y simbólica.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2°</td><td>OA_1. Contar números del 0 al 1000 de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10 y de 100 en 100 hacia adelante y hacia atrás, empezando por cualquier número menor que 1000</td></tr>
<tr><td>OA_6. Describir y aplicar estrategias de cálculo mental para adiciones y sustracciones hasta 20:
- Completar 10
- Usar dobles y mitades
- Uno más uno menos
- Dos más dos menos
- Usar la reversibilidad de las operaciones</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3°</td><td>OA_9. Demostrar que comprenden la división en el contexto de las tablas 10 x 10:
- Representando y explicando la división como repartición y agrupación de partes iguales, con material concreto y pictórico
- Creando y resolviendo problemas en contextos que incluyan la repartición y la agrupación
- Expresando la división como una sustracción repetida
- Describiendo y aplicando la relación inversa entre la división y la multiplicación de las tablas hasta 10 x 10, sin realizar cálculos</td></tr>
<tr><td>OA_11. Demostrar que comprenden las fracciones de uso común $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$:
- Explicando que una fracción representa la parte de un todo, de manera concreta, pictórica, simbólica, de forma manual y/o con software educativo
- Describiendo situaciones en las cuales se puede usar fracciones
- Comparando fracciones de un mismo todo, de igual denominador</td></tr>
</table>

Curso	Objetivos de Aprendizaje
4°	OA_2. Describir y aplicar estrategias de cálculo mental: - Conteo hacia adelante y hacia atrás - Doblar y dividir por 2 - Por descomposición - Usar el doble del doble Para determinar las multiplicaciones hasta 10 x 10 y sus divisiones correspondientes.
	OA_4. Fundamentar y aplicar las propiedades del 0 y del 1 para la multiplicación y la propiedad del 1 para la división.
	OA_6. Demostrar que comprenden la división con dividendos de dos dígitos y divisores de un dígito: - Usando estrategias para dividir, con o sin material concreto - Utilizando la relación que existe entre la división y multiplicación - Estimando el cociente - Aplicando la estrategia por descomposición del dividendo - Aplicando el algoritmo de la división
	OA_8. Demostrar que comprende las fracciones con denominadores 100, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2: - Explicando que una fracción la parte de un todo o de un grupo de elementos y un lugar en la recta numérica - Describiendo situaciones en las cuales se puede usar fracciones - Mostrando que una fracción puede tener representaciones diferentes - Comparando y ordenando fracciones (por ejemplo: $\frac{1}{100}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$) con material concreto y pictórico
	OA_9. Resolver adiciones y sustracciones de fracciones con igual denominador (denominadores 100, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2) de manera concreta y pictórica, en el contexto de la resolución de problemas.
	OA_10. Identificar, escribir y representar fracciones propias y los números mixtos hasta el 5, de manera concreta, pictórica y simbólica, en el contexto de la resolución de problemas.
5°	OA_2. Aplicar estrategias de cálculo mental para la multiplicación - Anexar ceros cuando se multiplica por un múltiplo de 10 - Doblar y dividir por 2 en forma repetida - Usando las propiedades: conmutativa, asociativa y distributiva
	OA_4. Demostrar que comprenden la división con dividendos de tres dígitos y divisores de un dígito: - Interpretando el resto - Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que impliquen divisiones

	OA_5. Realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones, aplicando las reglas relativas a paréntesis y la prevalencia de la multiplicación y la división por sobre la adición y sustracción cuando corresponda
	OA_7. Demostrar que comprenden las fracciones propias: - Representándolas de manera concreta, pictórica y simbólica - Creando grupos de fracciones equivalentes – simplificando y amplificando – de manera concreta, pictórica y simbólica, de forma manual y/o software educativo - Comparando fracciones propias con igual y distinto denominador de manera concreta, pictórica y simbólica.
	OA_8. Demostrar que comprenden las fracciones impropias de uso común de denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 y los números mixtos asociados: - Usando material concreto y pictórico para representarlas, de manera manual y/o con software educativo - Identificando y determinando equivalencias entre fracciones impropias y números comunes - Representando estas fracciones y estos números mixtos en la recta numérica
	OA_9. Resolver adiciones y sustracciones con fracciones propias con denominadores menores o iguales a 12: - De manera pictórica y simbólica - Amplificando o simplificando
6°	OA_2. Realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones en el contexto de la resolución de problemas, utilizando la calculadora en ámbitos superiores a 10000.
	OA_3. Demostrar que comprenden el concepto de razón de manera concreta, pictórica y simbólica, en forma manual y/o usando software educativo
	OA_5. Demostrar que comprenden las fracciones y números mixtos: - Identificando y determinando equivalencias entre fracciones impropias y números mixtos, usando material concreto y representaciones pictóricas, en forma manual y/o usando software educativo.
	OA_7. Demostrar que comprenden la multiplicación y división de decimales por números naturales de un dígito, múltiplos de 10 y decimales hasta la milésima de manera concreta, pictórica y simbólica.

Fuente: Elaboración propia.