UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE FUTUROS PROFESORES CHILENOS DE ENSEÑANZA MEDIA SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN: UNA EXPERIENCIA EN CONTEXTOS DE MICROENSEÑANZA

Tesis para optar al grado de Doctora en Educación Matemática

Autor: Yocelyn Parra Urrea
Director: Dr. Luis Pino-Fan

Osorno, Chile, 2021

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE FUTUROS PROFESORES CHILENOS DE ENSEÑANZA MEDIA SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN: UNA EXPERIENCIA EN CONTEXTOS DE MICROENSEÑANZA

Tesis Doctoral presentada por **Yocelyn Elizabeth Parra Urrea** para optar al grado de **Doctora en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos**, dirigida por el **Dr. Luis Roberto Pino Fan**, académico de la Universidad de Los Lagos.

Yocelyn Parra Urrea . . . .

Dr. Luis Pino-Fan . . . .

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE FUTUROS PROFESORES CHILENOS DE ENSEÑANZA MEDIA SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN: UNA EXPERIENCIA EN CONTEXTOS DE MICROENSEÑANZA

Esta Tesis de Doctorado ha sido desarrollada en el marco del proyecto de investigación Fondecyt N° 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto de investigación es el resultado de un extenso, complejo y fascinante período formativo en el que me acompañaron y contribuyeron personas a quienes expreso toda mi gratitud.

A Dios, por darme fortaleza y entereza para enfrentar diversos desafíos.

A mis padres, Luis y Laura, por ser los principales pilares en mi vida, por creer en mí y en mis expectativas, gracias por su amor, dedicación y por infundirme su fortaleza y perseverancia, por sus consejos que han guiado cada una de mis decisiones que me han permitido alcanzar mis metas.

A mi compañero de vida, Carlos, por estar conmigo en los momentos en que el estudio y el trabajo ocuparon mi tiempo y esfuerzo. Gracias por tu apoyo, generosidad y por alentarme a seguir adelante y cumplir mis ahnelos. Gracias por tu amor, por disfrutar mis logros y por contenerme en los momentos de dificultad. A ti amor, gracias por ser parte de todos mis sueños.

A mi hermano Alfredo por su apoyo, disposición y por confiar siempre en mí. A mi abuela, mis tíos, primos y todos mis niños, por compartir mis alegrías, por apoyarme en cada paso, por su enorme cariño y preocupación desde el momento que emprendí este nuevo desafío.

A mi director de tesis, Dr. Luis Pino-Fan, por su apoyo, confianza y aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta investigación, sino también en mi formación académica y en el cumplimiento de mis proyectos profesionales. Gracias por sus sabios consejos, por inculcarme el rigor académico y por su generosidad al compartir sus conocimientos y experiencias.

A mi amiga Daniela Araya, por su compañía y apoyo durante este sacrificado proceso en el que compartimos momentos que atesoraré siempre en mi memoria. A mis amigos Rodrigo y Priscilla por el inmenso apoyo emocional, porque a pesar de la distancia nos hemos acompañado y apoyado en los proyectos que hemos emprendido.

Al Dr. Walter Castro Gordillo por su hospitalidad y orientaciones que permitieron enriquecer mi proyecto de investigación durante mi estancia en la Universidad de Antioquia.

A mis compañeros del Doctorado por los momentos de discusión, convivencia y aprendizajes.

Finalmente, quisiera agradecer a la Universidad de Los Lagos y a los Académicos e Investigadores del programa de Doctorado en Educación Matemática, por su conocimiento, profundas reflexiones y por transmitir su gusto por la investigación en Educación Matemática.

RESUMEN

Determinar los conocimientos didáctico-matemáticos que requieren los profesores para que su enseñanza sea lo más efectiva posible es una problemática que ha desatado gran interés en la educación matemática. Sin embargo, son pocas las investigaciones que proponen instrumentos teórico-metodológicos específicos para la enseñanza de funciones que nos permitan explorar y caracterizar dichos conocimientos.

En esta investigación se presentan estrategias y herramientas teórico-metodológicas para orientar el diseño, la reflexión y la valoración sobre la práctica del profesor de matemáticas cuando realiza procesos de instrucción sobre la noción de función. Esto permitió caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de matemática chilenos cuando afrontan el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre funciones en contextos de microenseñanza.

Para lograr el objetivo central del estudio se propusieron tres fases: 1) Revisión sistemática de la literatura científica, para indagar los conocimientos requeridos por los profesores para gestionar la enseñanza de funciones; 2) Determinar el conocimiento didáctico-matemático de referencia descrito por medio de componentes e indicadores de idoneidad didáctica para la enseñanza de la noción de función; y 3) Aplicación de la herramienta para caracterizar el conocimiento de profesores chilenos en formación quienes desarrollan un proceso de instrucción sobre funciones en contexto de microenseñanza.

Para el desarrollo de la investigación se utilizaron las nociones teórico-metodológicas del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), las herramientas que propone el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y los contextos de microenseñanza -como espacios ricos y esenciales para la formación del profesorado-. Como conclusión del estudio, es posible observar que la propuesta teórico-metodológica diseñada en este estudio permite sistematizar los procesos de reflexión y valoración de la práctica docente (propia o la de otros) para la enseñanza de la función, y así determinar (o anticipar) acciones que permitan mejorar los procesos de enseñanza sobre este objeto matemático.

ABSTRACT

Determining the didactic-mathematical knowledge that teachers require for their teaching to be as effective as possible is a problem that has unleashed great interest in mathematics education. However, there are few investigations that proposes specific theoretical-methodological instruments for the teaching of functions that allow us to explore and characterise this knowledge.

This research presents theoretical-methodological strategies and tools to guide the design, reflection and assessment of the mathematics teacher's practice when carrying out instructional processes on the notion of function. This allowed us to characterise the didactic-mathematical knowledge of future Chilean mathematics teachers when they face the process of teaching and learning about functions in microteaching contexts.

To achieve the central objective of the study, three phases were proposed: 1) Systematic review of the scientific literature to investigate the knowledge required by teachers to manage the teaching of functions; 2) Determining the didactic-mathematical referential knowledge described by means of components and indicators of didactic suitability for the teaching of the notion of function; and 3) Application of the tool to characterise the knowledge of Chilean teachers in training who develop a process of instruction on functions in a microteaching context.

For the development of the research, the theoretical-methodological notions of the Didactic Mathematical Knowledge (DMK) model, the tools proposed by the Ontosemiotic Approach (OSA) and the micro-teaching contexts -as rich and essential spaces for teacher training- were used. As a conclusion of the study, it is possible to observe that the theoretical-methodological proposal designed in this study allows us to systematise the processes of reflection and evaluation of the teaching practice (our own or that of others) for the teaching of the function, and thus determine (or anticipate) actions that allow us to improve the teaching processes on this mathematical object.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN GENERAL

El análisis y reflexión de las prácticas docentes es una de las problemáticas que ha desatado gran interés en la educación matemática. Diversos estudios han reportado una variedad de dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje impidiendo que los estudiantes logren apropiarse, comprender y dar significado a la noción de función. La comprensión de este objeto matemático es fundamental para la construcción del conocimiento matemático avanzado debido a su carácter básico y modelizador. En el último cuarto de siglo la noción de función se ha convertido en un tema unificador en los planes de estudio de matemáticas dada su íntima relación con el cálculo infinitesimal y el análisis matemático.

La noción de función, ha sido objeto de especial atención en distintas aproximaciones teóricas, particularmente cuestiones relativas a la historia y epistemología de dicho objeto matemático, otras de índole cognitivas relacionadas a las dificultades que presentan los estudiantes cuando afrontan el aprendizaje de las funciones y cuestiones vinculadas a los procesos instruccionales donde se explicitan dificultades asociadas a las estrategias y metodologías de enseñanza. En este sentido, el interés de esta investigación es determinar el conocimiento didáctico-matemático de referencia para la enseñanza de funciones y en base a ello caracterizar el conocimiento de profesores chilenos en formación cuando afrontan la enseñanza de funciones en contextos de microenseñanza.

El trabajo que a continuación se presenta, se encuentra estructurado en cinco capítulos, a través de los que se va logrando el propósito de esta investigación. En el capítulo 1 de antecedentes se realiza una amplia revisión de literatura científica sobre: las distintas perspectivas y modelos del conocimiento del profesor, la problemática que subyace en la enseñanza-aprendizaje de las funciones, el origen y evolución de las funciones y las características de los contextos de microenseñanza. En este capítulo fue posible plantear una aproximación a las preguntas de investigación que orientarán este estudio.

En el capítulo 2, se explicitan las nociones teóricas y metodológicas que se utilizan a lo largo de la investigación, particularmente se hace referencia al Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) (Pino-Fan y Godino, 2015) y al Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). Además, se presenta la fundamentación teórica del planteamiento del problema, los objetivos y preguntas de investigación.

En el capítulo 3, se propone una herramienta teórico-metodológica que busca sistematizar componentes e indicadores de idoneidad didáctica (siguiendo el modelo propuesto por el enfoque ontosemiótico (EOS)) para cada una de las seis facetas que intervienen en los procesos de instrucción sobre funciones. De este modo, se presenta una herramienta que constituye el conocimiento didáctico-matemático referencial para la enseñanza-aprendizaje de la noción de función.

El capítulo 4, versa sobre la caracterización del conocimiento didáctico-matemático de dos profesores chilenos en formación cuando afrontan la enseñanza de la noción de función en contextos de microenseñanza. Este análisis permitió utilizar y validar los criterios de idoneidad didáctica diseñados para los procesos de instrucción sobre funciones.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan reflexiones y conclusiones finales, se da respuesta a las preguntas de investigación mediante la descripción de establecer en qué medida se cumplieron los objetivos específicos planteados. Además, se plantean las principales contribuciones del estudio, limitaciones, y líneas abiertas de investigación.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES GENERALES

1.1. Introducción

En este capítulo presentamos una revisión general de investigaciones vinculadas al problema de investigación que nos concierne: *El conocimiento didáctico-matemático requerido e implementado por los profesores sobre la noción de función*. Este capítulo está organizado en siete apartados: 1) Describiremos la problemática relativa a la formación de profesores; 2) Presentaremos un recorrido histórico-epistemológico sobre la noción de función; 3) Identificaremos las principales dificultades cognitivas para el aprendizaje de la noción de función; 4) Indagaremos sobre los medios y recursos utilizados por los profesores cuando afrontan la enseñanza sobre funciones; 5) Nos referiremos a los significados pretendidos por el currículo de matemática sobre la noción de función; 6) Definiremos los contextos de microenseñanza; y Finalmente presentamos una aproximación al problema de investigación.

1.2. Problemática relativa con la formación docente

Diversos estudios se han interesado por indagar la problemática referida con la formación de profesores. Esto principalmente por las dificultades que presentan los estudiantes para lograr una apropiación significativa de nociones matemáticas específicas y por las constantes reformas curriculares que exigen la actualización permanente de los docentes.

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores representa un campo de investigación fundamental,"la principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los estudiantes dependen de manera esencial de la formación de sus profesores". (Pino-Fan, 2014, p. 5)

1.2.1. Formación docente desde la perspectiva de Shulman

Uno de los autores precursores interesados en explorar las complejidades de la comprensión y transmisión del conocimiento del contenido fue Shulman quien propuso tres categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular. A continuación, se describen dichas categorías (Shulman, 1986, p. 9-10):

- *El conocimiento del contenido*: El conocimiento del contenido requiere ir más allá del conocimiento de los conceptos de un dominio (requiere comprender las estructuras del tema en la forma definida por eruditos). Para Schwab (1978), las estructuras de un tema incluyen tanto las estructuras sustantivas como las sintácticas. Las estructuras sustantivas son la variedad de formas en que los conceptos y principios básicos de la disciplina se organizan para incorporar sus hechos. La estructura sintáctica de una disciplina es el conjunto de formas en que se establece la verdad o la falsedad, la validez o la invalidez. Cuando existen conflictos respecto a un fenómeno dado, la sintaxis de una disciplina proporciona las reglas para determinar qué reclamo tiene mayor garantía. Una sintaxis es el conjunto de reglas para determinar lo que es legítimo decir en un dominio disciplinario y lo que 'rompe' las reglas. Los profesores no solo deben ser capaces de definir para los estudiantes las verdades aceptadas en un dominio, también deben poder explicar por qué una proposición particular se considera justificada, por qué es importante conocerla y cómo se relaciona con otras proposiciones, tanto dentro como fuera de la disciplina, tanto en la teoría como en la práctica.
- *El conocimiento pedagógico del contenido*: Conocimiento que va más allá del conocimiento del contenido en sí mismo, va a la dimensión del conocimiento del contenido para la ense-

ñanza. Incluye las formas más útiles de representación de las ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas; en una palabra, las formas de representar y formular el tema que lo hacen comprensible para otros. El profesor debe tener disponible un verdadero arsenal de formas alternativas de representación, algunas se derivan de la investigación mientras que otras se originan en la sabiduría de la práctica. El conocimiento pedagógico del contenido también incluye la comprensión de aquello que hace que el aprendizaje de un tema específico sea fácil o difícil, las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y orígenes traen consigo al aprendizaje de los temas y lecciones que se enseñan con mayor frecuencia. Si esas ideas preconcebidas son conceptos erróneos, los profesores necesitan saber cuáles son las estrategias que pueden ser más fructíferas para reorganizar la comprensión de los estudiantes.

- *Conocimiento curricular*: El currículo está representado por la gama completa de programas diseñados para la enseñanza de temas específicos en un nivel determinado, la variedad de materiales de instrucción disponibles en relación con los programas y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones. Además del conocimiento curricular para un determinado contenido en cierto nivel educativo, hay dos aspectos adicionales del conocimiento curricular. Se espera que un profesor esté familiarizado con los contenidos curriculares que sus estudiantes estén estudiando en otras disciplinas y la familiaridad con los contenidos que se han enseñado y se enseñarán en la misma área de estudio durante los años anteriores y posteriores en la escuela.

Posteriormente, Shulman extiende sus ideas y propone siete categorías para el conocimiento del profesor, lo que denomina *categorías del conocimiento base* (Shulman, 1987, p. 8):

- *El conocimiento del contenido*.
- *Conocimiento pedagógico general*: Refiere a los principios y estrategias generales de gestión y organización del aula que aparecen para hacer trascender el contenido.
- *Conocimiento curricular*: Comprensión particular de los materiales y programas que sirven como 'herramientas de trabajo' para los profesores.
- *El conocimiento del contenido pedagógico*: Esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es únicamente propio de los docentes, su forma especial de comprensión profesional.
- *Conocimiento de los estudiantes y sus características*.

- *Conocimiento de contextos educativos*: Van desde el funcionamiento del grupo o aula, el gobierno y la financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas.
- *El conocimiento de fines, propósitos y valores educativos, y sus fundamentos filosóficos e históricos*.

De acuerdo con Shulman (1987) entre las siete categorías, es de especial interés y relevancia el conocimiento del contenido pedagógico, dado que representa la integración del contenido y la pedagogía, además admite la comprensión de cómo los problemas y situaciones particulares se organizan, representan y adaptan a los diversos intereses y habilidades de los estudiantes logrando adecuados procesos de instrucción.

Shulman (1987) se interesa por responder preguntas como: ¿Cuáles son las fuentes del conocimiento base para la enseñanza? ¿Cuáles son los procesos de razonamiento y acción pedagógica? y ¿Cuáles son las implicaciones para la política de enseñanza y la reforma educativa? Para responder la primera inquietud, Shulman (1987, p. 8) menciona que hay al menos cuatro fuentes principales para alcanzar el conocimiento base para la enseñanza:

- Formación académica en la disciplina a enseñar.
- Los materiales y entornos del proceso educativo institucionalizado (por ejemplo, planes de estudio, libros de texto, organizaciones escolares y financiación, y la estructura de la profesión docente).
- La investigación sobre la escolarización, las organizaciones sociales, el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y los otros fenómenos sociales y culturales que afectan el quehacer de los profesores.
- La sabiduría de la práctica misma.

Fenstermacher (1978-1986, citado en Shulman, 1987) señala que el objetivo de la formación docente, no es adoctrinar o capacitar a los profesores para que se comporten de una manera prescrita. El propósito es formar a los profesores para que razonen sólidamente acerca de su enseñanza y para que se desempeñen con habilidad. El razonamiento sólido requiere tanto del proceso de reflexión sobre la práctica como de un conocimiento base adecuado sobre los hechos, principios y experiencias a partir de los cuales razonar y reflexionar. Estos conocimientos son fundamentales para elecciones y acciones en los procesos de enseñanza. La formación docente debe trabajar con las creencias que guían las acciones docentes, con los principios y la evidencia que subyacen las decisiones que toman los profesores.

Según Shulman (1987) existe un fuerte interés por investigar sobre aquello que los profesores deben saber. Los esfuerzos de las reformas van desde elevar los estándares de admisión a los programas de formación de profesores hasta establecer evaluaciones estatales y nacionales para docentes; insisten en que la preparación de los docentes requiere al menos cinco años de educación superior 'porque hay mucho que aprender', y organizan programas elaborados de inducción y tutoría para nuevos profesores porque el aprendizaje y la socialización más importante solo pueden ocurrir en un contexto escolar. Implícitas en todas estas reformas están las concepciones de la competencia docente. La concepción de la base de conocimiento de la enseñanza presentada por Shulman difiere de manera significativa de muchas de las que actualmente promueve la comunidad política. Los profesores no pueden ser evaluados adecuadamente observando su desempeño docente sin hacer referencia al contenido que están enseñando. Además, la concepción del razonamiento pedagógico enfatiza la base intelectual para el desempeño de la enseñanza, esto en lugar de solo el comportamiento. Si esta concepción se considera, tanto la organización como el contenido de los programas de formación de profesores y la definición de los fundamentos académicos de la educación requerirán una revisión. Así, una evaluación estatal para profesores se enfocaría en la capacidad del docente para razonar y reflexionar acerca de la enseñanza de temas específicos.

1.2.2. Formación docente desde la perspectiva de Grossman

Grossman (1990, citado en Pino-Fan, 2014, p. 8-9) se apoya de los trabajos desarrollados por Shulman sobre el conocimiento base y reorganiza dichas ideas mediante el "*modelo del conocimiento del profesor*" que considera cuatro aspectos principales:

- *Conocimiento pedagógico general*: Incluye un cuerpo de conocimiento general, creencias y habilidades relacionadas con la enseñanza: conocimiento y creencias concernientes al aprendizaje y los aprendices; conocimiento de principios generales de instrucción tales como el tiempo de aprendizaje académico, gestión de aula y conocimientos y creencias sobre los fines y objetivos de la educación.
- *Conocimiento del contenido*: El conocimiento del contenido se refiere a los conceptos y hechos principales dentro de un campo y las relaciones entre ellos.

- *Conocimiento pedagógico del contenido*: Está compuesto de cuatro componentes centrales: concepciones de las propuestas para la enseñanza de un contenido, conocimiento de la comprensión de los estudiantes, conocimiento curricular y conocimiento de las estrategias instruccionales. El primer componente se refiere a los conocimientos y creencias sobre las propuestas para la enseñanza de un contenido en diferentes grados. Esas concepciones generales de la enseñanza de un contenido están reflejadas en los objetivos de los profesores para con la enseñanza de un contenido particular. El segundo componente incluye conocimiento de la comprensión de los estudiantes, concepciones, y concepciones erróneas de tópicos particulares en un área. Para generar apropiadamente representaciones y explicaciones, los profesores deberían tener algunos conocimientos sobre aquello que los estudiantes ya conocen sobre un tópico y aquello que podrían encontrar extraño. El tercer componente incluye conocimiento de los materiales curriculares disponibles para la enseñanza de un contenido particular, así como el conocimiento sobre el currículo horizontal y vertical para un tema. El cuarto componente incluye conocimiento de las estrategias instruccionales y representaciones para la enseñanza de un tópico particular. Los profesores con experiencia pueden poseer repertorios ricos de metáforas, experimentos, actividades, o explicaciones que son particularmente efectivos para la enseñanza de un tópico particular, mientras que los profesores principiantes todavía están en el proceso de desarrollar un repertorio de estrategias instruccionales y representaciones.

- *Conocimiento del contexto*: Los profesores deberían basarse en su comprensión del contexto particular en el que enseñan para adaptar su conocimiento general a las necesidades específicas de la escuela y de cada uno de los estudiantes. El conocimiento del contexto incluye: conocimiento de los distritos en que los profesores trabajan, incluyendo las oportunidades, expectativas y limitaciones planteadas por el distrito; conocimiento del entorno de la escuela, incluyendo la 'cultura' de la escuela, directrices departamentales, y otros factores contextuales en el nivel de la escuela que afectan la instrucción; y conocimiento de estudiantes y comunidades específicos, y los antecedentes de los estudiantes, familias, puntos fuertes, debilidades e intereses.

Investigaciones más recientes, han afirmado la temprana idea de Dewey (1983, citado en Grossman, Wilson y Shulman, 2005) los profesores requieren alcanzar conceptos que muchas veces estudian especialistas en la disciplina. Esto básicamente porque necesitan comprender dichas nociones de modo que puedan promover el aprendizaje en sus estudiantes. Sin duda, los profesores y especialistas tienen propósitos diferentes, por una parte el especialista está interesado en responder a problemáticas que surgen dentro de la misma disciplina y los profesores deben no solo conocer el contenido sino las diversas formas de contextualizarlo para efectuar procesos de instrucción más efectivos. "Los profesores de universidad y los profesores de primaria y secundaria no solamente enseñan el contenido de sus cursos, sino que modelan las prácticas y estrategias de enseñanza para los futuros profesores en sus clases" (Grossman, Wilson y Shulman, 2005, p. 5).

Grossman, Wilson y Shulman (2005) plantean que los profesores necesitan poseer un fundamento de conocimiento de la materia, esto para adquirir una mayor competencia de la disciplina. A partir de dicha cuestión se plantean la siguiente interrogante ¿En qué consistiría esa fundamentación? Para ello, sugieren cuatro dimensiones del conocimiento de la materia que influencian la enseñanza y aprendizaje de los profesores en formación (Grossman, Wilson y Shulman, 2005, p. 11-18):

- *Conocimiento del contenido*: se utiliza el término conocimiento del contenido para referirse a la 'materia' de una disciplina. Información objetiva, organización de principios, conceptos centrales. Un individuo con conocimiento del contenido puede identificar relaciones entre conceptos de la disciplina al igual que puede establecer relaciones con conceptos externos a la disciplina.
- *Conocimiento sustantivo para la enseñanza*: Incluyen los marcos exploratorios o paradigmas que son usados tanto para guiar la investigación en la disciplina como para dar sentido de los datos.
- *Conocimiento sintáctico para la enseñanza*: son los cánones de evidencia que son usados por los miembros de la comunidad disciplinaria para guiar la investigación en el campo. Son los medios por los que el nuevo conocimiento es introducido y aceptado en la comunidad.
- *Creencias acerca de la materia*: las creencias de los profesores acerca de la enseñanza y el aprendizaje están relacionadas con cómo piensan acerca de la enseñanza, cómo aprenden de sus experiencias y cómo se conducen las clases.

De acuerdo con Grossman, Wilson y Shulman (2005), los formadores de profesores deben permitir que los futuros docentes identifiquen y examinen las creencias que tienen acerca del contenido que enseñan. Asimismo, es necesario ayudar a que los profesores reconozcan las influencias que aquellas creencias tienen sobre lo que aprenden y lo que enseñan. De igual manera los docentes necesitan identificar sus creencias acerca del papel que juega la habilidad del estudiante en el aprendizaje de las matemáticas.

1.2.3. Formación docente desde la perspectiva de Ball y colaboradores

Por mucho tiempo la investigación se ha centrado en estudiar aspectos vinculados a la preparación que necesitan los profesores del contenido que enseñan, esto en lugar de indagar sobre el tipo de contenido que necesitan aprender. Las ideas propuestas por Shulman han tenido gran impacto en la comunidad de investigación, enfocando de inmediato la importancia fundamental del conocimiento del contenido en la enseñanza y en particular el conocimiento del contenido pedagógico (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Ball, Hill y Bass (2005) se interesan por estudiar aquello que necesitan saber y hacer los profesores para llevar a cabo de manera efectiva el trabajo de enseñar matemáticas. Ball y colaboradores consideran elemental que los docentes conozcan los temas y procedimientos que enseñan, por ello su atención se sitúa en cómo los profesores deben conocer ese contenido, qué necesitan saber sobre la disciplina y cómo y dónde podrían los docentes usar ese conocimiento en la práctica.

Ball y colaboradores apoyados en las ideas de Shulman proponen la noción de "*conocimiento matemático para la enseñanza*" Este modelo refiere al conocimiento matemático que los profesores necesitan para llevar a cabo su trabajo. Sin duda, los docentes necesitan saber el contenido que enseñan y que los estudiantes deben aprender. Sin embargo, una interrogante que surge es si los docentes requieren saber más, y si es así, ¿Qué necesitan saber y de qué manera necesitan saber estas matemáticas para usarlas en los procesos de enseñanza? La hipótesis que prevalece es que los docentes deben saber las matemáticas que están en el currículo, más algunos años de estudios adicionales en matemáticas universitarias. Una segunda conjetura es que los profesores necesitan conocer el currículo más el conocimiento del contenido pedagógico (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Ball, Thames y Phelps (2008) sugieren que la manera de decidir si a los profesores se les debe enseñar un contenido en particular, como el cálculo, es considerar cuándo y dónde influirá ese conocimiento sobre lo que deben hacer los docentes. El modelo del conocimiento matemático para la enseñanza propone un refinamiento a las categorías planteadas por Shulman. Particularmente se sugiere que las categorías de conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido pueden subdividirse en conocimiento de contenido común, conocimiento de contenido especializado y conocimiento en el horizonte matemático y por otro lado, se plantea el conocimiento de contenido y los estudiantes, conocimiento de contenido y la enseñanza y conocimiento curricular (ver figura 1.1) (Hill, Ball y Schilling, 2008).

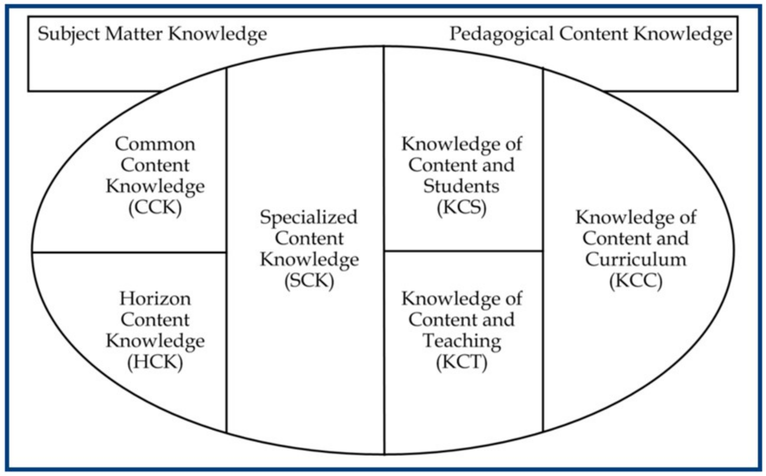


Figura 1.1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377

En relación con la categoría *Conocimiento del contenido*; Ball, Thames y Phelps (2008) definen el *conocimiento de contenido común* como aquello que está estrechamente relacionado con el conocimiento del contenido que se explicita en el currículo. Es decir, es el conocimiento que los profesores necesitan para poder realizar el trabajo que están asignando a sus estudiantes. *Conocimiento especializado del contenido* es definido como el conjunto de “conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza” (Ibíd., p. 400). Este conocimiento permite a los profesores “representar con exactitud ideas matemáticas, ofrecer explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, examinar y comprender los métodos inusuales de resolución de problemas” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377). *El conocimiento en el horizonte matemático* es descrito como “una toma de conciencia (más como un turista experimentado y apreciativo que como un guía de turismo) del gran paisaje matemático en el que la experiencia y la instrucción presentes están situadas”. Es decir, se trata de un tipo de conocimiento que puede guiar los siguientes tipos de actos y responsabilidades de enseñanza: “Hacer juicios sobre la importancia matemática, atención al significado matemático subyacente a lo que los estudiantes opinan, destacar y subrayar puntos clave, anticipar y hacer conexiones, notar y evaluar oportunidades matemáticas, detectar posibles confusiones o interpretaciones matemáticas erróneas” (Ball y Bass, 2009, citado en Pino-Fan, 2014, p. 10-11).

Asimismo, de la categoría *Conocimiento pedagógico del contenido*, se desprende la cuarta subcategoría, el *conocimiento del contenido y los estudiantes* entendida como aquella que vincula el conocimiento de los estudiantes y el conocimiento de las matemáticas. Los profesores deben anticipar lo que probablemente pensarán los estudiantes y predecir aquello que generará dificultades en su aprendizaje. Las actividades planteadas deben ser de motivadoras, desafiantes e interesantes para los estudiantes. Estas tareas requieren de la interacción entre la comprensión matemática específica y la familiaridad con los estudiantes y su pensamiento matemático. “Un elemento central de estas tareas es el conocimiento de las concepciones comunes de los estudiantes y los conceptos erróneos sobre el contenido matemático” (Ball, Thames y Phelps, 2008 p. 401). *El conocimiento del contenido y la enseñanza*, combina el conocimiento sobre la enseñanza y el conocimiento de las matemáticas. La enseñanza de la matemática requiere un conocimiento matemático para el diseño de la instrucción. Los docentes secuencian contenidos específicos para la enseñanza, eligen ejemplos para iniciar la instrucción y tareas que permita a los estudiantes profundizar el contenido. Asimismo, los profesores determinan las representaciones necesarias para abordar una noción matemática e identifican los diferentes métodos y procedimientos que favorecen el aprendizaje. Cada una de estas tareas requiere una interacción entre la comprensión matemática específica y la comprensión de los aspectos pedagógicos que afectan el aprendizaje del estudiante (Ibíd.). La última subcategoría descrita por Ball y colaboradores es el *conocimiento del currículo*.

1.2.4. Formación docente desde la perspectiva de Schoenfeld y Kilpatrick

Por su parte, Schoenfeld y Kilpatrick (2008, p. 322-348) establecen un conjunto de dimensiones para la enseñanza de las matemáticas:

- *Conociendo las matemáticas escolares en profundidad y amplitud*: El conocimiento de los docentes competentes en matemáticas escolares es amplio y profundo. Es amplio en cuanto a que los profesores tienen múltiples formas de conceptualizar el contenido del nivel educativo correspondiente, pueden representarlo de varias maneras, entender los aspectos clave de cada tópico y ver conexiones a otros temas en el mismo nivel. Es profundo en el sentido de que los profesores conocen los orígenes curriculares y las direcciones del contenido, dónde se enseñaron las matemáticas y hacia dónde se dirigen, y comprenden cómo las ideas matemáticas crecen conceptualmente. Este tipo de conocimiento permite a los docentes competentes priorizar y organizar el contenido para que los estudiantes conozcan las grandes ideas así como responder con flexibilidad a las preguntas planteadas por los estudiantes.

- *Conociendo los estudiantes como personas que aprenden*: Implica tener sensibilidad sobre lo que los estudiantes piensan, lo que proporciona información adicional sobre cómo los estudiantes dan sentido a las matemáticas y sobre cómo pueden construir sus conocimientos.

- *Conociendo a los estudiantes como aprendices:* Conocer a los estudiantes como aprendices se superpone sustancialmente con la categoría anterior, 'conocer a los estudiantes como pensadores' Esto supone ser consciente de la teoría del aprendizaje y de sus implicancias en el desarrollo de actividades propuestas en el aula y las interacciones con los estudiantes. Por ejemplo, lo que sucede cuando un estudiante va al frente de la sala de clases y se equivoca mientras trabajan en un problema. Existe una amplia gama de posibles respuestas a tal situación, que varían desde 1) hacer que el estudiante se siente y llamar a otro estudiante, 2) guiar al estudiante a través de una solución correcta, 3) usar la situación como una oportunidad para plantear y explorar los problemas matemáticos que conlleva la declaración del problema y el trabajo del estudiante al respecto. Lo que el profesor determine hacer depende en gran medida, del conocimiento que tiene sobre sus estudiantes como aprendices.

- *Diseñar y gestionar entornos de aprendizaje*: La creación de entornos de aprendizaje generalmente incluye acciones como: estudiantes tomando notas, intercambios de preguntas y respuestas diseñadas para reforzar y favorecer el aprendizaje, estudiantes comprometidos con las actividades propuestas, presentación del trabajo en la pizarra con correcciones por parte del profesor, entre otras. En ese contexto, la habilidad de 'diseñar y gestionar entornos de aprendizaje' permite que los estudiantes atiendan respetuosamente a lo propuesto por el docente y se comprometan en actividades intelectuales la mayor parte del tiempo.

- *Desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la 'enseñanza para la comprensión'*: La clase debe desarrollarse como una comunidad de aprendizaje; esto supone que los estudiantes tienen que adoptar ciertas normas sociales en la clase, tales como la obligación de explicar y justificar sus soluciones, deben intentar comprender el razonamiento de los otros estudiantes, preguntar si no comprenden, y desafiar los argumentos con los que no están de acuerdo.

- *Creación de relaciones que apoyan el aprendizaje*: La enseñanza es relacional, los profesores, los estudiantes y el contenido solo pueden entenderse en relación unos con otros. El profesor trabaja para organizar el contenido, las diversas representaciones del contenido y poner en relación a los estudiantes entre sí con el contenido. El aprendizaje de los estudiantes surge de estas relaciones mutuamente constitutivas.

- *Reflexionar sobre la propia práctica*: La reflexión es la clave fundamental para el crecimiento profesional de los profesores. Dewey (1904-1965) fue uno de los primeros en considerar el papel de la reflexión en la educación. Dewey (1933) consideró que la formación de docentes brindaba una oportunidad sin precedentes para que los futuros docentes reflexionen sobre los problemas de la práctica, pero también consideraba que la reflexión debía continuar a lo largo de la carrera docente. Como señala Mewborn (1996, p. 14) "En un contexto educativo

> reflexionar sobre la práctica de la enseñanza puede ayudar a los profesores a tomar decisiones inteligentes sobre futuras acciones de enseñanza".

1.2.5. Formación docente desde la perspectiva de Mishra y Koehler

Si bien Shulman no se refiere a la relación entre tecnología, pedagogía y contenido, esto no implica que se consideren temas menos relevantes. El enfoque de Shulman sigue estando vigente. Sin embargo, en la actualidad las tecnologías han llegado a la vanguardia del discurso educativo principalmente debido a la disponibilidad de una gama de nuevos recursos especialmente digitales que podrían facilitar el aprendizaje.

Estas nuevas tecnologías incorporan softwares, juegos educativos e innumerables aplicaciones que han cambiado la naturaleza del aula o tienen el potencial para hacerlo. Shulman estableció la importancia de ejemplificaciones como: las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas, en otras palabras, 'las formas de representar diversos conceptos'. Sin duda, las tecnologías han permitido una amplia gama de representaciones, analogías, ejemplos, explicaciones y demostraciones que pueden ayudar a visualizar y hacer que el contenido sea más accesible para los estudiantes. Aunque no todos los docentes han adoptado estas nuevas tecnologías por una serie de razones, incluido el temor al cambio y la falta de tiempo y apoyo, no se puede dudar el hecho de que estas tecnologías estarán cada vez más presentes en el contexto escolar. Los docentes constantemente tendrán que aprender a utilizar las nuevas herramientas, técnicas y habilidades a medida que las tecnologías actuales se vuelvan obsoletas (Mishra y Koehler, 2006).

Actualmente, se considera que la tecnología constituye un conjunto separado de conocimientos y habilidades que deben aprenderse. La relación entre estas habilidades con el contenido y la pedagogía es inexistente o se considera que es relativamente trivial de adquirir y poner en práctica. No obstante, las relaciones entre el contenido, la pedagogía y la tecnología son complejas y matizadas. Las tecnologías a menudo vienen con sus propios imperativos que restringen el contenido que se debe cubrir y la naturaleza de las posibles representaciones. Por lo tanto, puede ser inapropiado ver el conocimiento de la tecnología como algo aislado del conocimiento de la pedagogía y el contenido (Ibíd.).

En contraste con una visión simple de la tecnología, Mishra y Koehler (2006, p. 1026-1029) proponen un modelo que enfatiza las conexiones, interacciones, posibilidades y limitaciones entre el contenido, la pedagogía y la tecnología:

- *El conocimiento del contenido*: Es el conocimiento sobre la materia específica que se debe aprender o enseñar. Los docentes deben conocer y comprender las materias que enseñan, incluido el conocimiento de situaciones, conceptos y procedimientos centrales dentro de un campo determinado; conocimiento de los marcos explicativos que organizan y conectan ideas; y conocimiento de las reglas de demostración (Shulman, 1986). Los profesores que no tienen estos conocimientos pueden tergiversar los contenidos con sus estudiantes (Ball y McDiarmid, 1990).

- *Conocimiento pedagógico*: Es el conocimiento profundo de los procesos y métodos de enseñanza y aprendizaje, además de los propósitos, valores y objetivos educativos generales. Esta es una forma genérica de conocimiento que está involucrada en todas las cuestiones del aprendizaje de los estudiantes, es decir, la gestión del aula, el desarrollo e implementación del plan de lecciones y la evaluación de los estudiantes. Incluye conocimientos sobre técnicas o métodos que se utilizarán en el aula; la naturaleza del público objetivo; y estrategias para evaluar la comprensión de los estudiantes. Un profesor con profundo conocimiento pedagógico entiende cómo los estudiantes construyen conocimiento, adquieren habilidades y desarrollan hábitos mentales y disposiciones positivas hacia el aprendizaje. Como tal, el conocimiento pedagógico requiere una comprensión de las teorías cognitivas, sociales y de desarrollo del aprendizaje.

- *Conocimiento pedagógico del contenido*: La idea de conocimiento del contenido pedagógico es coherente y similar a la idea de Shulman sobre el conocimiento de la pedagogía que es aplicable a la enseñanza de un contenido específico. Este conocimiento incluye saber qué enfoques de enseñanza se ajustan al contenido y también, saber cómo se pueden organizar los elementos del contenido para una mejor enseñanza. Este conocimiento es diferente del conocimiento de un experto en disciplina y también del conocimiento pedagógico general compartido por los docentes en todas las disciplinas. El conocimiento pedagógico del contenido se ocupa de la representación y formulación de conceptos, las técnicas pedagógicas, el conocimiento que hace que los conceptos sean difíciles o fáciles de aprender, de los conocimientos previos de los estudiantes y las teorías de la epistemología. También implica el conocimiento de estrategias de enseñanza que incorporan representaciones conceptuales apropiadas para abordar las dificultades y conceptos erróneos de los estudiantes y fomentar el aprendizaje significativo. También incluye el conocimiento de lo que aportan los estudiantes a la situación de aprendizaje, conocimiento que puede ser facilitador o disfuncional para la tarea de aprendizaje.

- *Conocimiento de la tecnología*: Es un conocimiento sobre tecnologías estándar, como libros de texto, pizarra, etc. y tecnologías más avanzadas, como softwares, aplicaciones digitales, etc. Esto involucra las habilidades requeridas para operar tecnologías particulares. En el caso de las tecnologías digitales, esto incluye el conocimiento de los sistemas operativos y el hardware de la computadora, y la capacidad de usar softwares, como procesadores de texto, hojas de cálculo, navegadores y correo electrónico. El conocimiento de la tecnología incluye conocimientos sobre cómo instalar y eliminar dispositivos periféricos, instalar y eliminar programas de software y crear y archivar documentos. La mayoría de los talleres y tutoriales de tecnología estándar tienden a centrarse en la adquisición de tales habilidades. Dado que la tecnología está cambiando continuamente, la naturaleza de los conocimientos tradicionales también debe cambiar con el tiempo. Por ejemplo, muchos de los ejemplos dados anteriormente (sistemas operativos, procesadores de texto, navegadores, etc.) seguramente cambiarán, y tal vez incluso desaparezcan, en los próximos años. La capacidad de aprender y adaptarse a las nuevas tecnologías seguirá siendo un importante desafío.

- *Conocimientos tecnológicos de contenidos*: Es el conocimiento sobre la manera en que la tecnología y el contenido se relacionan recíprocamente. Si bien la tecnología estándar restringe los tipos de representaciones posibles, las tecnologías avanzadas a menudo ofrecen diversas y variadas representaciones. Los profesores necesitan saber no solo el contenido que enseñan, sino también la manera en que el contenido se puede visualizar y manipular mediante aplicaciones tecnológicas.

- *Conocimiento pedagógico tecnológico*: Es el conocimiento sobre los componentes y herramientas de diversas tecnologías para ser utilizadas en entornos de enseñanza y aprendizaje. Además, del conocimiento sobre cómo la enseñanza se puede modificar producto del uso de tecnologías particulares. Es decir, este conocimiento refiere a la capacidad de identificar una variedad de herramientas para una tarea en particular, de elegir y usar un recurso tecnológico en virtud de su idoneidad. Esto incluye el conocimiento de las herramientas para mantener los registros de clase, la asistencia y la calificación, y el conocimiento de ideas genéricas basadas en la tecnología, como las consultas web, los foros de discusión y las salas de chat.

- *Conocimientos del contenido pedagógico tecnológico*: Es una forma emergente de conocimiento que va más allá de los tres componentes (contenido, pedagogía y tecnología). Este conocimiento es diferente del conocimiento de un experto en disciplina o tecnología y también del conocimiento pedagógico general compartido por los profesores en todas las disciplinas. El conocimiento del contenido pedagógico tecnológico es la base de una buena enseñanza con tecnología y requiere del entendimiento de los conceptos usando tecnologías; técnicas pedagógicas que utilizan tecnologías de manera constructiva para enseñar contenidos; el conocimiento que hace que los conceptos sean difíciles o fáciles de aprender y cómo la tecnología puede ayudar a corregir algunos de los problemas que enfrentan los estudiantes. Asimismo, se cuestiona cómo se pueden usar las tecnologías para construir conocimiento sobre el existente y para desarrollar nuevas epistemologías o fortalecer las antiguas. Los procesos de enseñanza aprendizaje idóneos, requieren un entretejido reflexivo de las tres fuentes clave de conocimiento: tecnología, pedagogía y contenido. Esto principalmente pues no existe una solución tecnológica única que se aplique a cada profesor, a cada curso o a cada visión de la enseñanza. La enseñanza de calidad requiere desarrollar una comprensión matizada de las complejas relaciones entre tecnología, contenido y pedagogía, y utilizar esta comprensión para desarrollar estrategias y representaciones apropiadas y específicas. La integración de la tecnología en la enseñanza debe considerar los tres temas no de forma aislada, sino más bien dentro de las complejas relaciones en el sistema definidas por los tres elementos clave.

1.2.6. Formación docente desde diversas perspectivas

Llinares, Valls, Roig (2008) señalan que el profesor de matemática debe poseer un amplio dominio sobre:

- *El conocimiento de y sobre las matemáticas*: conocer las matemáticas que se van a enseñar requiere conocer mucho más de lo que se explicita en el currículo escolar, es decir, desde la perspectiva de Ball (2000) se necesita un conocimiento especializado del contenido.
- *Conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas y los estudiantes*: Aprender a interpretar los razonamientos matemáticos de los estudiantes permitirá tomar decisiones instruccionales y con ello propiciar una enseñanza más eficaz.
- *Conocimiento sobre la enseñanza (gestión del contenido)*: Identificar conductas y aspectos en el aula que influyen en el aprendizaje de las matemáticas y buscar estrategias provenientes de la didáctica de la matemática para reforzar y/o favorecer la competencia matemática.

Según Llinares, Valls, Roig (2008) cuando los profesores en formación examinan los procedimientos usados por los estudiantes e indagan sobre la comprensión matemática adquirida por el aprendiz, pueden identificar y analizar qué aspectos son requeridos en el proceso de instrucción que permita maximizar el aprendizaje de sus estudiantes. Esto sin duda, consigue que profesores en formación puedan ampliar su conocimiento respecto a la pertinencia de ciertos procesos de enseñanza-aprendizaje y con ello establecer estrategias compatibles para un determinado modelo de aprendizaje.

Según Llinares, Valls y Roig (2008, p. 65-66) el análisis didáctico matemático de los procesos de instrucción permite al profesor en formación tener la oportunidad de:

- Empezar a caracterizar los conceptos y procesos matemáticos como objetos de enseñanza-aprendizaje (intentar verlos como nociones y procesos que han de ser aprendidos y no sólo como elementos componentes de un determinado dominio de conocimiento matemático).
- Identificar sus propias concepciones sobre el aprendizaje matemático, la enseñanza, su papel como profesores y las situaciones matemáticas como instrumentos de aprendizaje.
- Expresar sus propias ideas didácticas y desarrollarlas cuando interpretan los procesos de aprendizaje matemático de los estudiantes.

Para mejorar los procesos de enseñanza de las matemáticas es trascendental considerar tres aspectos fundamentales: (Llinares, Valls y Roig, 2008, p. 60)

- El potencial matemático de las tareas que los profesores proporcionan a sus estudiantes.
- Las características de la interacción en el aula.
- La manera en la que el profesor propicia el surgimiento de procesos relevantes de comunicación matemática en el aula.

Conforme con lo expresado por Lappan y Theule-Lubienski (1992, citado en Godino, Batanero y Flores, 2003) la formación del profesor basada exclusivamente en nociones matemáticas o psicopedagógicas vinculada a la gestión del aula de índole generalista no son suficiente, dada la complejidad cognitiva y didáctica que presentan los procesos de enseñanza-aprendizaje de conceptos y métodos matemáticos. Es decir, los aspectos epistemológicos de los objetos matemáticos, sus respectivas transposiciones didácticas, así como las dificultades y obstáculos que presentan los estudiantes son aspectos fundamentales del conocimiento del profesor (Cooney, 1994, citado en Godino, Batanero y Flores, 2003).

De acuerdo con Aichele y Coxford (1994, citado en Godino, Batanero y Flores, 2003, p. 1-2) la formación de profesores de matemática debe considerar aspectos complementarios como:

- La reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos que se pretende enseñar, y el estudio de las transformaciones que experimentan los mismos para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza.

- El conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas.
- La ejemplificación de situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos.

Aun cuando existen importantes avances en caracterizar el conocimiento que deberían tener los profesores para lograr que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea idóneo, Godino (2009) señala:

> Los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías muy generales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Esto permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos de los profesores de matemática. (p. 19)

1.2.7. Conocimiento del profesor sobre la noción de función, según Nyikahadzoyi

Nyikahadzoyi (2013) en su estudio describe el conocimiento requerido por los profesores de matemática para la enseñanza del concepto función. Para ello, se basó en el Conocimiento pedagógico del contenido propuesto por Shulman (1986); en el Conocimiento matemático para la enseñanza de Ball, Bass y Hill (2005) y en el Conocimiento de contenido pedagógico tecnológico de Mishra y Koehler (2006).

Nyikahadzoyi (2013) considera los dominios del conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento en el horizonte matemático, conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, conocimiento curricular, conocimiento tecnológico, conocimiento del contenido tecnológico, conocimiento pedagógico tecnológico y conocimiento del contenido pedagógico tecnológico en relación con la noción de función. A continuación, se define cada uno de los dominios descritos anteriormente (Nyikahadzoyi, 2013, p. 267-268):

- *Conocimiento del contenido común sobre el concepto de una función*: El conocimiento común del concepto función incluye tanto conocimientos procedimentales como conceptuales.

Es decir, el profesor comprende las definiciones y propiedades centrales de las funciones, las conexiones entre el concepto y otros conceptos matemáticos, desarrolla con éxito los problemas de los estudiantes e identifica respuestas incorrectas o definiciones inexactas del concepto de función. Representa el conocimiento de las características esenciales de una función. Freudenthal (1983) consideró las propiedades de arbitrariedad y univalencia de una función como características clave del concepto. La naturaleza arbitraria de la relación significa que las funciones no exhiben necesariamente una regularidad que pueda describirse mediante una expresión específica o un gráfico (Even, 1992). La naturaleza arbitraria, implica que la relación entre dos conjuntos no tiene que ser exclusivamente numérica. Cabe destacar que mientras la naturaleza arbitraria de las funciones está implícita en la definición de una función, el requisito de univalencia 'para cada elemento en el dominio solo hay un elemento en el rango' se establece explícitamente en la definición moderna de funciones.

- *Conocimiento de contenido especializado*: El conocimiento de contenido especializado se define como el conocimiento matemático que de manera única permite a los profesores realizar el trabajo de enseñanza de la matemática y que especialistas en otras disciplinas no podrían hacer (Ball, Bass y Hill, 2004). Poseer este conocimiento implica que los profesores conocen: diferentes significados de la noción de función, sus diversas representaciones, poseen una gran colección de ejemplos, conocen la importancia del concepto que le permite explicar y justificar la utilidad que posee. Además, es capaz de analizar matemáticamente si una respuesta o explicación poco convencional de un estudiante es razonable y matemáticamente correcta. El profesor posee el conocimiento para seleccionar definiciones que sean pedagógicamente apropiadas para los estudiantes. En el caso del concepto función, la familiaridad con las definiciones básicas de una función constituirá el conocimiento común del contenido, mientras que introducir una definición teórica como la descrita por Bourbaki podría no ser apropiado para estudiantes de cierto nivel escolar. Por lo tanto, dependiendo del contexto, los profesores de matemáticas deben saber qué definición usar. El trabajo con funciones como con cualquier otro objeto matemático, se realiza a través de diferentes representaciones. Los profesores de matemáticas deben poder elegir representaciones apropiadas según el contexto y la necesidad, para hacerlo necesitan conocer las debilidades inherentes de las diversas formas de representación. La familiaridad con las diferentes representaciones y la capacidad de traducir y formar vínculos entre ellas crean ideas que permiten una mejor comprensión del concepto, más profunda y completa (Kyvatinsky y Even, 2004). Los docentes deben tener un repertorio básico de tareas que incluye ejemplos poderosos que ilustran ideas y propiedades importantes como la univalencia y arbitrariedad (Freudenthal, 1983). Algunos de los ejemplos de una función ilustran un aspecto simple del objeto matemático, mientras que otros son complejos. Por ejemplo, mientras que las funciones lineales implican la idea de constantes que podrían confundirse con las cantidades variables, las funciones por partes muestran que la regla de correspondencia puede variar para diferentes rangos del dominio.

- *Conocimiento del contenido en el horizonte*: En el caso del concepto de función, se trata del conocimiento sobre los dominios matemáticos en un nivel dado y cómo se desarrolla y extiende a través del tiempo. A partir del plan de estudios de matemáticas, los profesores deben saber cómo el concepto de función se relaciona con otros objetos matemáticos tales como: regularidades, proporcionalidad, transformaciones isométricas, determinantes de matrices, límites, derivadas etc. Los profesores deben concebir las funciones como un objeto matemático básico y unificador. Idealmente, la noción de función deberá ser presentada mediante numerosos enlaces que ilustren las relaciones significativas con otros conceptos matemáticos. Además, sus mapas conceptuales deben converger claramente en la idea de que las funciones desempeñan un papel central en las matemáticas.

- *Conocimiento del concepto de una función y los estudiantes*: Este conocimiento incluirá la capacidad del profesor para anticipar y resolver errores y conceptos erróneos de los estudiantes, interpretar el pensamiento incompleto de los estudiantes, predecir cómo los estudiantes manejan tareas específicas y aquello que encontrarán interesante y desafiante. Este conocimiento es útil para calificar los ejercicios según su dificultad, diseñar instrumentos de evaluación, estimar el tiempo de procesamiento de una tarea para individuos y grupos de aprendizaje particulares, interpretar el pensamiento incompleto de los estudiantes y predecir cómo manejarán tareas específicas. Dado que el concepto de una función se puede representar utilizando diferentes representaciones en una variedad de contextos, es probable que los estudiantes se enfrenten a obstáculos cognitivos asociados con el uso de representaciones particulares. Los profesores de matemáticas deben ser conscientes de los obstáculos cognitivos asociados con el uso de cada representación. Sierpinska (1992) considera que el proceso de rechazo y superación de un obstáculo es una parte esencial de la construcción del conocimiento. Por lo tanto, esto requiere un gran esfuerzo de reconstrucción cognitiva por parte del estudiante. Los profesores deben estar familiarizados con los posibles conceptos erróneos de los estudiantes asociados con el uso de representaciones particulares de una función. Por ejemplo, los conceptos de patrones y regularidades se utilizan a menudo en las primeras etapas del currículo escolar como una forma de introducir o acercar al estudiante al concepto de función. Sin embargo, esto generalmente se presenta como un problema de 'adivinar mi regla', para determinar la fórmula interna que expresa la regla. Esta actividad, además de dar lugar al obstáculo epistemológico de que todas las funciones están dadas por una fórmula, hace que los estudiantes tengan la impresión de que cada relación debe expresarse mediante una regla explícita (Tall, 2001). No obstante, la asociación entre elementos del dominio y rango podría ser arbitrario (Kaput, 1992). Por otro lado, Eisenberg (1991) observó que, cuando las funciones se identifican solo con la representación algebraica, los aprendices terminan percibiendo las funciones como reglas con regularidades en las que se considera que un cambio en la variable independiente causa un cambio en la variable dependiente con la consecuencia de que los estudiantes no consideran funciones constantes como funciones. Eisenberg (1991) señaló que, cuando se representa gráficamente, la técnica de 'la línea vertical' se usa casi exclusivamente para determinar si un ejemplo dado es una función o no, lo que genera en los estudiantes la impresión de que todas las funciones pueden representarse gráficamente. Algunos planes de estudio refieren a los gráficos y tablas de valores como representaciones de una función, a pesar de que son representaciones parciales de funciones. La suposición de que las representaciones gráficas y tabulares dan una imagen completa de una función no es válida; por lo tanto, los docentes tienen que aprender a lidiar con el problema de la parcialidad. Sin duda, se ha evidenciado que los estudiantes tienen problemas para establecer vínculos entre las diferentes representaciones de una función y para manipular los símbolos relacionados con las funciones. Eisenberg (1991) observó que los estudiantes tienen problemas para manipular los símbolos relacionados con las funciones. Este problema no está en las matemáticas sino en la representación de las matemáticas. Por ejemplo, se encontró que la notación $f(x)$ en sí misma confundía a los estudiantes porque $f(x)$ representa tanto el nombre de una función como el valor de la función para un valor de entrada dado. Otra fuente importante de dificultades que presentan los estudiantes con la noción de función es su falta de flexibilidad para transitar por las diversas representaciones del objeto matemático. Schwartz y Dreyfus (1992) atribuyen esta dificultad al tratamiento de gráficas, tablas y representaciones de fórmulas como entidades estáticas e independientes.

- *Conocimiento del concepto de función y enseñanza*: Los profesores deben conocer diferentes formas de introducir una noción matemática específica, diversas secuencias de tareas, explicaciones, representaciones, definiciones y ejemplos adecuados para un grupo de aprendizaje en particular. Además debe adaptar la planificación de sus lecciones en relación con los cambios en la composición de la clase. En el caso de la noción de función, los docentes deben ser conscientes de las ventajas y desventajas de instrucción de las representaciones particulares. Cada representación del concepto función, podría generar una serie de obstáculos cognitivos que requieren reconstrucción cognitiva en situaciones de aprendizaje posteriores (Tall, 2001). Introducir la noción de función a partir de la metáfora 'es una máquina' da lugar a una serie de obstáculos cognitivos que requieren reconstrucción cognitiva en desarrollos posteriores. Según Tall (2001) una debilidad importante de la enseñanza del concepto de función es que no se presenta con un dominio y rango 'explícitos'. El dominio se puede introducir de forma natural como un conjunto de posibles entradas. Para la función real existe un rango natural, es decir, los números reales. Esto puede incorporar la creencia de que una función siempre tendrá un dominio y rango natural en lugar de que el dominio y el rango sean especificables en la definición. Schwartz y Dreyfus (1992) observaron que las representaciones algebraicas de una función eran ambiguas por dos posibles razones. Primero, en algunos casos, no hay una fórmula algebraica única que represente una función dada. Por ejemplo, las expresiones $y = 4x - 12$ y $y = 4(x-3)$ representan la misma función lineal. Sin embargo, la ambigüedad surge debido al error de asumir el dominio de una función a partir de la representación algebraica. Por ejemplo, si las expresiones $y = x + 3$ y $y = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ representan la misma función depende de cómo se haya definido el dominio de la función. Schwartz y Dreyfus (1992) también señalaron que el problema con la representación gráfica de una función es que la información sobre una función dada en forma gráfica siempre es parcial debido a la elección de una ventana de visualización. Por su parte, la representación tabular de una función no es única. Las representaciones tabulares de una función son simplemente todas las tablas posibles obtenidas al elegir un conjunto de valores x con los valores y correspondientes. Como en el caso de la representación gráfica de una función, la información sobre una función en la representación tabular es siempre parcial, ya que solo se dan partes del dominio y el rango (Schwartz y Dreyfus, 1992). Debido a que cada formato de representación tiene diferentes limitaciones o fortalezas en diferentes contextos, es beneficioso para el docente tener la opción de qué representaciones emplear y el conocimiento necesario para hacer tal elección. El conocimiento de las teorías psicológicas sobre el desarrollo del concepto de una función es esencial en la planificación de actividades de aprendizaje para los estudiantes, ya que estas teorías intentan explicar cómo se desarrolla el concepto en la mente de los estudiantes. Las teorías parecen enfatizar que el nuevo aprendizaje se construye mejor sobre el aprendizaje previo. Los estudios (Schifter y Fosnot, 1993) sugieren que los docentes eficaces deben prestar atención a las formas de pensar de los estudiantes sobre las tareas o conceptos matemáticos. Los profesores deben identificar las concepciones actuales de una función por parte de los estudiantes y luego utilizar la concepción actual de los estudiantes para reformular la enseñanza de las funciones.

- *Conocimientos de Curriculo*: permite que los profesores califiquen libros escolares y materiales adicionales por su contenido, representaciones y definiciones, comentarios, ejemplos y ejercicios para grupos de aprendizaje particulares relacionados con los objetivos de su clase. Por ejemplo, basándose en su conocimiento del plan de estudios, un profesor no confiaría en un libro de texto que abogue por el uso del enfoque deductivo para enseñar mediante el cual se espera que los estudiantes construyan el concepto de una función. Vinner (1989) y Dreyfus (1990) coincidieron en que el uso de definiciones como puntos de partida para enseñar nuevos conceptos creaba problemas en el aprendizaje de las matemáticas y que son un claro testimonio del conflicto entre las estructuras de las matemáticas tal como las conciben los matemáticos y los procesos cognitivos de adquisición de conceptos.

- *Conocimiento tecnológico*: Es el conocimiento sobre tecnologías estándar, como libros y pizarras, y tecnologías digitales más avanzadas, esto incluye el conocimiento de los sistemas operativos y el hardware de la computadora, y la capacidad de usar softwares, procesadores de texto, hojas de cálculo, navegadores y correo electrónico.

- *Conocimiento pedagógico tecnológico*: El profesor debería saber que existe una variedad de herramientas (por ejemplo, calculadoras gráficas y sistema de álgebra computacional) para una tarea en particular, además debe tener la capacidad de elegir una herramienta en función de su idoneidad, determinar estrategias para usar los recursos de la herramienta y el conocimiento de las estrategias pedagógicas y la capacidad de aplicar estas estrategias utilizando las tecnologías disponibles. Se espera que un profesor de matemáticas con un profundo conocimiento pedagógico tecnológico comprenda cómo los estudiantes construyen el conocimiento de la noción de función y cómo adquieren habilidades para ingresar en un software una expresión algebraica que representa una función para obtener su representación gráfica.

- *Conocimiento del contenido tecnológico*: Aunque las tecnologías estándar limitan los tipos de representaciones posibles, las nuevas tecnologías a menudo permiten representaciones más nuevas y variadas del concepto de función y una mayor flexibilidad para visualizar sus representaciones (Tall, 2001). Con la llegada de las tecnologías digitales, los profesores necesitan saber, no solo el concepto de una función, sino también la manera en que la noción puede ser manipulada con la aplicación de la tecnología.

- *Conocimiento tecnológico, pedagógico del contenido*: Si los docentes desean o pueden integrar la tecnología en su enseñanza dependerá de una serie de factores, entre ellos, su propia experiencia con la tecnología, las limitaciones impuestas por su ubicación en la enseñanza y la calidad de su capacitación en la tecnología. En los últimos tiempos, las calculadoras con sistemas integrados de álgebra computacional se están volviendo más comunes en las investigaciones actuales sobre el aprendizaje de las matemáticas y son vistas cada vez más como un medio para proporcionar acceso a nuevas formas de pensar acerca de los conceptos matemáticos. Sin embargo, es necesario seguir investigando para describir este conocimiento de los profesores cuando abordan la noción de función. Más específicamente, los estudios de investigación pueden centrarse en caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas sobre: 1) Representaciones múltiples para usar en la enseñanza del concepto de función usando tecnología; 2) Dificultades de los estudiantes con el concepto de una función y cómo abordarlas utilizando la tecnología; 3) Estrategias y métodos de instrucción para enseñar el concepto de una función utilizando tecnología; 4) Materiales curriculares disponibles para enseñar el concepto de una función usando tecnología; 5) Evaluación de estándares para determinar la comprensión de los aprendices del concepto de una función en un entorno rico en tecnología.

1.3. Estudio histórico-epistemológico sobre la noción de función

La conceptualización de un objeto matemático no debe concebirse como un producto estático y acabado, por el contrario, su enseñanza debe orientarse hacia las concepciones y obstáculos que lo originaron y consolidaron a través de la historia (Mesa y Villa-Ochoa, 2009). Conocer el significado holístico de referencia de los objetos matemáticos es fundamental dado que a partir de dicho significado la institución y/o el profesor, determinan cuál o cuáles serán los significados pretendidos, los efectivamente implementados y los evaluados en el proceso de instrucción matemática (Pino-Fan, 2014). Además, la historia de la matemática presenta situaciones problemáticas interesantes que pueden motivar el estudio de una noción matemática específica y con ello favorecer los procesos de enseñanza-aprendizaje.

El objeto matemático función es el resultado de numerosas generalizaciones realizadas, a través de una evolución de más de 2000 años. A continuación se presenta un estudio histórico-epistemológico sobre la noción de función desarrollado en (Parra-Urrea, 2015, p. 3-24). Esto nos permitirá describir el origen, evolución y determinar el significado holístico de referencia.

1.3.1. La función como correspondencia

Se entiende por Matemática Antigua a aquella que se desarrolló en las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India. Durante la época antigua aun cuando la idea abstracta de variable no existía comienzan a desarrollarse manifestaciones que implícitamente contienen la noción de función. Diversas evidencias de la época como marcas sencillas en restos óseos conllevaron a la idea de contar, generando una correspondencia entre un conjunto dado de objetos y una secuencia de números para contar. Así es que la noción de función tiene sus raíces en el desarrollo del concepto de número. (Sastre, Rey y Boubée, 2008)

> Durante la época de los babilónicos (2000 a. C. - 600 a. C.), se registraron tablas y papiros que contienen información relevante con respecto a los conocimientos matemáticos de estos pueblos. Los matemáticos babilónicos estaban interesados en los cálculos astronómicos en los que realizaron una compilación de las efemérides del sol, la luna y los planetas. Estudiaron problemas de variaciones continuas, tales como la luminosidad de la luna en intervalos de tiempo iguales o los períodos de visibilidad de un planeta en relación con el ángulo que éste forma con el sol. Utilizaban en sus cálculos tablas sexagesimales de cuadrados (ver figura 1.2) y de raíces cuadradas, de cubos y de raíces cúbicas, otras contienen las potencias sucesivas de un número dado, de forma análoga a las actuales tablas de antilogaritmos. También se han encontrado tablas de valores de n^2+n para valores naturales de n. Conocían la suma de la progresión geométrica $1+2+2^2+...$, para sucesivos términos, así como la suma de la serie de los cuadrados $1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2$ para distintos valores de n. Estas tablas están dispuestas en dos columnas, de forma análoga a las tablas de valores que acostumbran a construir nuestros estudiantes para cualquier función $f(x)$ (Ruiz, 1998, p. 149-150).

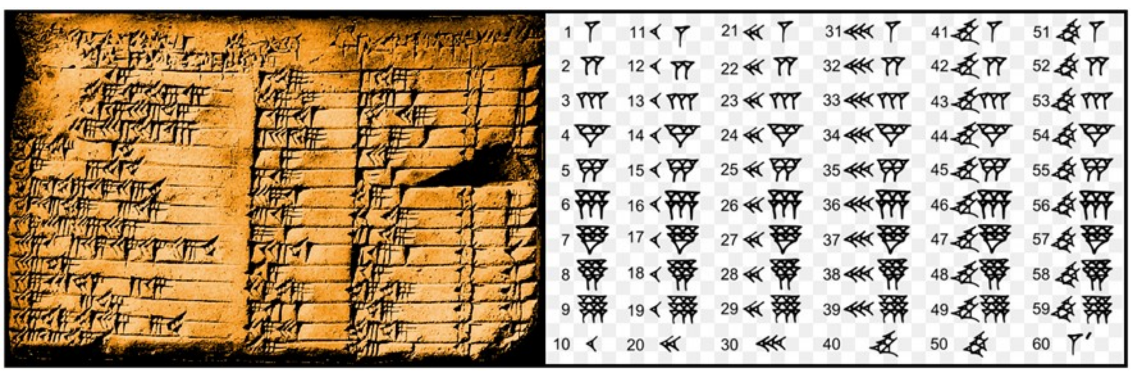


Figura 1.2. Tablilla de Plimpton (tabla babilónica 1800 a.C.)

De esta manera el desarrollo de la noción de función surge implícitamente en forma de correspondencias numéricas definidas por operaciones aritméticas. Durante esta época "no se utilizaban letras para representar cantidades variables, los mismos términos como anchura, longitud, área y volumen servían para tal propósito (7 longitud + 5 longitud = 12 longitud)" (Ibíd., p. 150). No se puede asegurar que los babilónicos expresaran sus resultados de manera general, pues en las tablas sólo existe el estudio de casos particulares.

> El hecho de que no se haya conservado la formulación general de estas tablas no significa necesariamente que no existiera en el pensamiento antiguo prehelénico consciencia de la generalidad de dichas reglas o principios. Si no hubiera, de una manera u otra, una regla general subyacente, sería muy difícil de explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo tipo. (Boyer, 1986, citado en Ruiz, 1988, p. 150)

Investigadores como Youschkevitch (1976, citado en Ruiz, 1998), aseguran que no existió una idea del objeto matemático función durante la época antigua. No obstante, Pedersen (1974, citado en Cañón, 1993) señala:

> [...] si concebimos una función no como una fórmula, sino como una relación más general que asocia elementos de un conjunto de números (por ejemplo, puntos del tiempo $t, t2, t3, t4, ...$) con los elementos de otro conjunto (por ejemplo alguna variable angular en el sistema planetario), es obvio que las funciones en este sentido abundan en el Almagest. Solamente falta la palabra: la cosa está allí y lo está representada claramente por las muchas tablas de elementos correspondientes de tales conjuntos. (p. 170)

De esta manera desde lo propuesto por Pedersen (1974, citado en Cañón, 1993) y desde nuestra actual noción de función, es posible reconocer instancias concretas de la idea general del objeto función, aun cuando se trate de un anacronismo utilizar el término función para nombrar ciertas correspondencias. Es así como durante la época antigua bajo la idea de tablas de correspondencia provenientes de fenómenos naturales se puede vislumbrar una noción intuitiva del objeto matemático función.

1.3.2. La noción de función como magnitudes variables

La noción de función como “relación entre magnitudes variables, está asociada al estudio de fenómenos sujetos al cambio, tales como el calor, la luz, la distancia, la velocidad, etc., que pueden poseer distintos grados de intensidad y cambian continuamente entre ciertos límites dados” (Ruiz, 1998, p. 191). A partir de estas indagaciones se estableció la noción de cantidades variables dependientes e independientes.

> El estudio de tablas numéricas obtenidas a partir de mediciones de valores cambiantes de diferentes magnitudes, condujeron a una primera aproximación de ciertas relacio-

> nes funcionales, es decir pasar de una simple tabulación de datos empíricos a la búsqueda de regularidades, implica la existencia de un cierto 'instinto de funcionalidad'. (Ibíd., p. 191-192)

Todas las situaciones ligadas a los fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables son las problemáticas que, desde la matemática prehelénica, movilizan esta acepción de la noción de función.

Según Sastre, Rey y Boubée (2008) los griegos de igual forma trabajaron con problemas que tenían implícita la noción de función, no logrando reconocerla ni simbolizarla. A principios del siglo II a.C., astrónomos se acogieron al sistema babilónico de almacenamiento de fracciones y casi al mismo tiempo, compilaron tablas de cuerdas de un círculo. La tabla de cuerdas, creada por el astrónomo, geómetra y geógrafo griego Ptolomeo describe: Para un círculo de radio determinado, estas tablas daban la longitud de las cuerdas en función del ángulo central correspondiente, que crecía con un determinado aumento. Eran similares a las modernas tablas del seno y coseno, y marcaron el comienzo de la trigonometría (p. 143). Ptolomeo calculó las cuerdas de la siguiente manera: usó una circunferencia cuyo diámetro medía 120 unidades. Tabuló la longitud de una serie de cuerdas cuyos puntos finales estaban separados por un arco de n grados, para valores de n que van de $0,5$ a 180 grados, con incrementos de $0,5$. En notación moderna, la longitud de la cuerda correspondiente a un arco de θ grados es: $Cuerda(\theta) = 120 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (ver figura 1.3)

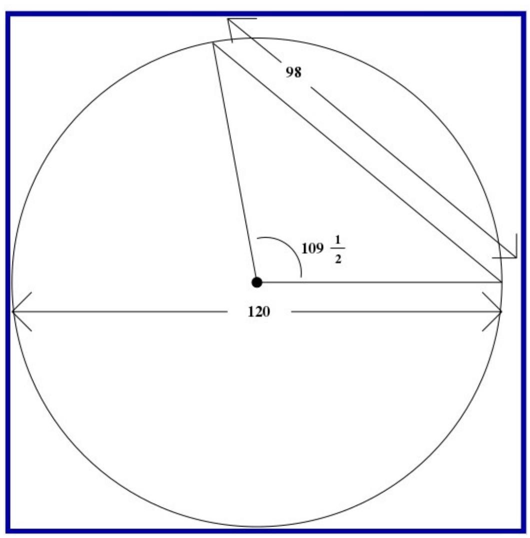


Figura 1.3. Representación de la relación entre el ángulo central y la longitud de la cuerda descrita por Ptolomeo

Si bien estos estudios sobre las relaciones entre magnitudes geométricas variables, no reconocían explícitamente al concepto de función, pueden ser considerados como los primeros antecedentes aportados por la cultura griega (Ibíd.).

La idea de variabilidad no eran desconocidas al pensamiento helénico. Los problemas de movimiento, de continuidad, del infinito habían sido examinados desde la época de Heráclito y de Zenón, y además una gran parte de la filosofía natural aristotélica estaba consagrada al estudio de estas cuestiones. De esta manera es posible afirmar que “en el pensamiento helénico existía una idea primitiva del objeto matemático función contenida en las nociones de cambio y relación entre magnitudes variables” (Ruiz, 1998, p. 151). Los filósofos griegos consideraban el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas, es así que Aristóteles opone, la física que concierne a los objetos en movimiento de la matemática, entendida como una ciencia estrictamente teórica (Ibíd.).

> En los elementos de Euclides los objetos matemáticos y las relaciones son estáticas: se estudian los objetos fijos y sus relaciones. Esta filosofía estática de la matemática fue la razón por la que, a lo largo de mucho tiempo, los matemáticos pensaron y hablaron en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables. Esto condujo a las proporciones y ecuaciones, y no a la noción de función. (Ruiz, 1998, p. 151-152)

Esta idea hacia las matemáticas, estuvo aferrada en la mente de los matemáticos durante mucho tiempo, observaban los entes matemáticos como algo ‘estático’. “Consideraban las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas como algo diferente a las igualdades estrictamente numéricas. Esta concepción de la ‘variabilidad’ como característica exclusiva de las magnitudes físicas, puede considerarse un obstáculo para el desarrollo de las funciones” (Ibíd., p. 152). Esta concepción perduró con Oresme, Galileo y Leibniz.

“La costumbre de expresar todas las relaciones entre las cosas bajo forma de proporciones es un obstáculo al desarrollo de la noción de función” (René Contret, 1985 citado en Ruiz, 1998, p. 151-152). Esto particularmente porque cuando trabajaban con proporciones no admitían relacionar magnitudes diferentes, es decir, siempre se relacionaban cantidades de la misma naturaleza. Por ejemplo, las áreas de los círculos o los volúmenes de las esferas son proporcionales al cuadrado y al cubo, respectivamente de sus radios. No conciben que esta proporción sea válida simplemente para los radios, esto dado que pertenecen a magnitudes diferentes, es decir, se relaciona área o volumen con longitud. Sin duda, este modo de pensar impide visualizar relaciones de dependencia entre magnitudes diferentes que hubiese aproximado a la idea de relaciones funcionales (Ibíd.).

Durante la época antigua no existió interés por estudiar la función como objeto matemático, pues la matemática estaba orientada al estudio de magnitudes físicas y geométricas consideradas como tangibles y que a su vez podían ser medibles con instrumentos típicos de la época.

1.3.3. La función como representación gráfica

Con la caída de Roma en el año 476 se da inicio a la Edad Media la que finaliza en 1453 con la caída de Constantinopla. Si bien durante esta época se cree que la matemática se mantuvo estática, lo cierto es que se produjeron importantes aportaciones, entre ellas destaca la contribución de los árabes quienes además de rescatar las obras helenas, proporcionaron a occidente de la aritmética y sentaron las bases del álgebra (Sastre, Rey y Boubée, 2008).

Durante la edad media la evolución de la noción de función se asoció al estudio y análisis de fenómenos sujetos al cambio, en particular al movimiento, (entre sus interrogantes, se destaca: ¿Por qué los planetas brillan?, ¿Por qué el viento sopla?, ¿Por qué se forma el arcoiris? ¿Por qué la lluvia cae y el fuego sube?). Además, implícitamente se definían las funciones por una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante representaciones gráficas. Durante esta época no se logra establecer el objeto matemático función, a través de una expresión algebraica (Ibíd.).

> A partir del siglo XIII, las matemáticas tienden a ocupar un lugar cada vez más importante en las ciencias de la naturaleza, se va poniendo en duda la estricta demarcación de Aristóteles entre la matemática y las ciencias físicas, quien señala que la física y las matemáticas son muy diferentes, la matemática representa una ciencia abstracta y las causas del cambio se encontrarían en las cosas materiales. Por su parte Platón manifiesta que las matemáticas son la herramienta para definir la causa. Según Crombie (1979), desde siglo XII al siglo XVII, la historia de las ciencias europeas puede ser considerada como una penetración progresiva de las matemáticas junto con el método experimental, en aquello que se creía que pertenecía exclusivamente a las ciencias físicas. (Ruiz, 1998, p. 156)

La evolución de la noción de función se beneficiará con aportaciones de las escuelas de filosofía natural de Oxford y París. Filósofos como Grosseteste y Bacon afirman que las matemáticas son el principal instrumento para estudiar los fenómenos naturales. La aparición de dicha filosofía natural traerá aparejada la concepción de leyes de naturaleza funcional para explicar dichos fenómenos. Pero las cosas medibles eran concebidas como ‘cantidades continuas’ incluido el tiempo, y por ello, la razón entre esas cantidades será expresada por medio de las relaciones entre puntos, rectas y superficies. Durante esta época el lenguaje empleado para expresar las relaciones de funcionalidad es el lenguaje verbal o el geométrico (Cañón, 1993).

Los nuevos métodos de la física matemática fueron desarrollándose en conexión con la idea de relación funcional, es decir:

> Existía una concepción sistemática de las variaciones concomitantes entre causa y efecto; expresando el fenómeno que debía ser explicado (la variable dependiente como la llamamos ahora) como una función de las condiciones necesarias y suficientes de su producción (las variables independientes), se puede mostrar exactamente cómo están relacionados los cambios de la primera con los de la segunda. (Crombie, 1979, citado en Ruiz, 1998, p. 157-158)

El estudio de la variación se inicia con la representación gráfico-geométrica, construida por Nicolás Oresme (1323 - 1382), como método para representar y analizar los fenómenos cambiantes. Nicolás de Oresme, antes del año 1361 se cuestionó ¿Por qué no hacer un dibujo o gráfica de la manera en que las cosas varían? De allí es que surge una idea primitiva de lo que en la actualidad llamamos representación gráfica de la noción de función. Todo lo que varía se sepa medir o no, escribía Oresme, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo (Ibíd.).

Oresme desarrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas. En su obra *Tractatus de latitudinibus formarum*, las funciones aparecen dibujadas por primera vez, trasladando al plano lo que hasta entonces habían hecho los geógrafos sobre la esfera. Mantuvo incluso los nombres, y llamó longitud y latitud a lo que hoy llamamos abscisa y ordenada (Sastre, Rey y Boubée, 2008). Su objetivo era representar por una figura las intensidades de una cualidad que depende de otra. De manera similar al pensamiento griego, estableció la noción de número y de magnitud, la primera la asociaba al conjunto de unidades mientras que la segunda se refería a lo medible. Oresme señala, "toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua, de esta manera se puede inferir que Oresme interpretaba la noción de número diferente a la noción de magnitud" (Youschevitch, 1976, citado en Ruiz, 1998, p. 159).

Oresme asoció el cambio físico con figuras geométricas considerando que todo lo que varía se puede imaginar como una cantidad continua representada mediante un segmento rectilíneo. Así, en la representación gráfica del cambio de la velocidad a través del tiempo, utilizaba una línea horizontal para representar el tiempo 'longitud' y a las velocidades en los diferentes instantes, las ubicaba en líneas verticales 'latitud' (Sastre, Rey y Boubée, 2008).

En la figura 1.4 se observa la representación de una velocidad que decrece uniformemente desde el valor *OA* en *O*, a cero en *B*, quedando dibujado un triángulo. El rectángulo *OBDC*, determinado por *E* (punto medio de *AB*) tiene la misma área que el triángulo *OAB* y representa un movimiento uniforme a lo largo del mismo intervalo de tiempo.

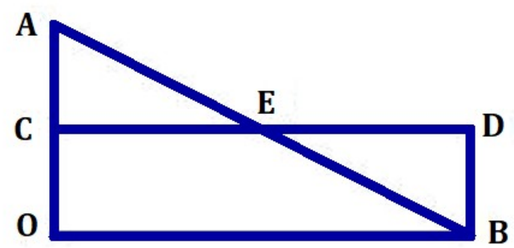


Figura 1.4. Movimiento uniforme

Oresme consideró tres tipos de figuras o de configuraciones diferentes (D'hombres, 1987, citado en Ruiz, 1998, p. 159-160):

- *Uniformemente uniformes*. Si se considera la representación de la velocidad según el tiempo, podemos asociar una figura uniformemente uniforme a una velocidad constante debido a que las intensidades son iguales, indistintamente al tiempo que se tome. Oresme dibuja una gráfica velocidad-tiempo en la que los puntos de una recta horizontal representan los sucesivos instantes de tiempo (o longitudes) y, para cada uno de estos instantes, traza un segmento (o latitud) perpendicular a la recta en dicho punto, cuya longitud representa la velocidad en ese instante. En este caso se obtiene un rectángulo (ver figura 1.5).

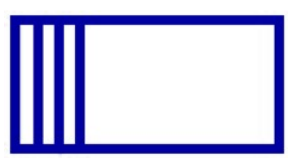


Figura 1.5. Movimiento uniformemente uniforme

- *Uniformemente deformes*. La figura uniformemente deforme corresponde a una velocidad con aceleración constante. En tal caso, la línea borde es una recta pero la figura que se obtiene es un triángulo o un trapecio, depende de la intensidad inicial de la cualidad. Oresme señalaba, "Es aquella en la que si tomamos tres puntos de la recta considerada, la razón de la distancia entre el primero y el segundo, a la distancia entre el segundo y el tercero, es como la razón del exceso de la intensidad del primer punto sobre el segundo al exceso del segundo sobre el tercero" (ver figura 1.6) (Youschevitch, 1976, citado en Ruiz, 1998, p. 160). A esta descripción corresponde la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $(x_1,y_1),(x_2,y_2):\dfrac{(y-y_1)}{(y_2-y_1)}=\dfrac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}$. La línea de intensidad, como se observa en la figura 1.6, está representada por la hipotenusa de un triángulo rectángulo, o por el lado superior inclinado de un cuadrilátero que tenga dos ángulos rectos.

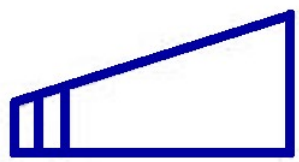


Figura 1.6. Movimiento uniformemente deforme

- *Deformemente deformes*. Corresponden a las aceleraciones constantes de la velocidad. Así, todos los casos en donde la línea borde no sea una recta corresponden a casos deformemente deformes (ver figura 1.7).

Figura 1.7. Movimiento deformemente deforme

Oresme "no gráfica curvas en un sistema de coordenadas, pero su obra es un paso importante para la invención de la geometría analítica y para la introducción del movimiento en la geometría, aspecto no considerado en la matemática griega (Jaimes, 2012, p. 5). En el siglo XIV los escolásticos de Merton se interesaron por el estudio del movimiento y la velocidad obteniendo importantes resultados como la regla de Merton la que señala:

> Si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme durante un intervalo de tiempo dado, la distancia total es tal como aquella que se tendría durante el mismo intervalo de

> tiempo con una velocidad uniforme igual al promedio de su velocidad inicial y su velocidad final (es decir, su velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo) Lo anterior puede expresarse como sigue: $s = \frac{1}{2}(V_0 + V_1)t$ en donde t es la longitud del intervalo considerado. (Cantoral y Farfán, 2004, citado en Pino-Fan, Godino y Font, 2011, p. 155-156)

Oresme con su método geométrico logró demostrar la regla de Merton referente a velocidad media. En su trabajo se puede observar cómo se da inicio a la matemática de la variación y el cambio, contexto en el que a través de estudiar la velocidad y el movimiento, surge implícitamente la noción de función, ya que si analizamos por ejemplo la regla de Merton, se puede observar la relación que existe entre el tiempo y la velocidad. Además, se logró mirar la descripción de las leyes que gobiernan los fenómenos reales, y se realizó una gran aproximación a las cantidades continuas al poder imaginarlas en una recta, que posteriormente serían definidos con mayor detalle y formalidad por Descartes y Fermat.

1.3.4. La función como expresión analítica

Durante los siglos XV-XVI si bien no se identifican grandes avances y/o aportaciones en la matemática, se distinguen dos aspectos fundamentales de desarrollo: el perfeccionamiento del simbolismo algebraico y la conformación definitiva de la trigonometría como una rama particular. Ambos aspectos, favorecerán el desarrollo de la noción de función, la primera respecto a la representación simbólica y la segunda respecto al estudio de funciones trigonométricas como consecuencia del desarrollo de la astronomía (Ruiz, 1998). Según lo establecido por Youschkevitch (1976, citado en Ruiz, 1998):

> El desarrollo de la teoría de las funciones se basó principalmente en tres aspectos: el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, la creación del álgebra simbólico-literal, y la extensión del concepto de número al de números reales (a fines del siglo XVI abarcaba no sólo el campo de los reales sino también el de los imaginarios y complejos). (p. 165)

El álgebra permitió a Fermat (1601 - 1665) y a Descartes (1596 - 1650) “el descubrimiento de la ‘representación analítica’. Comenzó a formarse la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas, de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de coordenadas” (Ruiz, 1998, p. 165). “Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva” (Descartes, citado en Boyer, 1986, p. 437). De acuerdo con Boyer, esta proposición constituye uno de los enunciados más relevantes de la historia de las matemáticas, ya que no sólo introduce la geometría analítica, sino que también la idea de variable algebraica. La relevancia del método utilizado por Descartes y Fermat se suscita en el hecho de permitir traducir cualquier problema de geometría plana en un problema algebraico equivalente. “Este fue el primer puente entre dos áreas diferentes de la matemática” (Diudonné, 1989, citado en Ruiz, 1998, p. 165). El hecho de que las rectas, los círculos y las cónicas de un plano se pudieran definir por ecuaciones de la forma $P(x,y) = 0$, donde P es un polinomio con coeficientes reales de primer o segundo grado, condujo a los matemáticos al estudio de curvas con ecuaciones de este tipo pero sin ninguna restricción en el grado. De esta forma nace una nueva rama de las matemáticas, la geometría analítica. Así es que Eves (1969; citado en Ruiz (1998) señala, “la Geometría analítica resulta ser un método notablemente fértil, tanto para resolver problemas como para descubrir nuevos resultados en Geometría” (p. 166).

Vieta, matemático francés, fue el precursor del uso de letras para representar las variables, constituyó las magnitudes conocidas como consonantes y las magnitudes desconocidas como vocales. Descartes, por su parte, utilizó las últimas letras del abecedario para las incógnitas y las primeras para los coeficientes, tal como en la actualidad son utilizadas (Jaimes, 2012).

> Galileo, matemático y físico italiano (1564 - 1642), contribuyó en la construcción de la noción de función e introdujo lo numérico en las representaciones gráficas y expresó las leyes del movimiento a las que incorporó el lenguaje de la teoría de las proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional, lenguaje que junto con la teoría de la época encubrió aspectos de la variación continua. En su obra se encuentran numerosas expresiones de relaciones funcionales. (Sastre, Rey y Boubée, 2008, p. 145)

Con la obra de Descartes (1596 - 1650) se produce un significativo avance, pues este físico matemático francés, buscaba liberar a la Geometría del exceso de figuras, pero también buscaba darle sentido o significado al álgebra por medio de la geometría. Descartes estableció que una curva se construye solamente con poseer una ecuación algebraica. En su afán de dar sentido al álgebra por medio de la geometría desarrolló la idea de introducir la función en forma analítica y con ello fue el precursor en establecer que una ecuación en x e y es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables, de modo que los valores de una de ellas pudiera calcularse a partir de los correspondientes valores en la otra variable (Sastre, Rey y Boubée, 2008).

Descartes refuta la idea de que sólo sean legítimas las curvas factibles de ser construidas con regla y compás, y presenta nuevas curvas generadas por construcciones mecánicas. Clasifica las curvas en 'mecánicas' y 'geométricas' y se describen como:

> Una curva es geométrica si la podemos imaginar descrita por un movimiento continuo o bien por diversos movimientos sucesivos, de manera que los últimos vengan determinados por los anteriores. En cambio, las mecánicas son las que resultan de dos movimientos independientes que no guardan entre sí una relación que pueda ser medida. La curva geométrica es para Descartes la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre un regla se transmite por los diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva. (Ramos, 2005, p. 79)

Esta manera de entender la curva y la introducción implícita del sistema de coordenadas permite a Descartes "hallar la expresión algebraica de la curva y le lleva a definir claramente el objeto de la Geometría Analítica, las curvas geométricas y las técnicas que se han de utilizar para su estudio: la teoría de las ecuaciones" (Ibíd., p. 80). De acuerdo con lo planteado por Font (2000a, citado en Ramos, 2005):

> Los trabajos de Descartes son muy interesantes porque parten de las dos metáforas clásicas sobre las curva: 1) Las curvas son secciones; 2) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones, para añadirles una tercera metáfora: 3) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones. El análisis de estas condiciones permite hallar una ecuación que cumplen los puntos de la curva. (p. 80)

La distinción de Descartes entre curvas 'geométricas' y 'mecánicas', dio lugar a que Gregory (1638 - 1675) realizara la distinción entre funciones 'algebraicas' y 'trascendentes'. En 1667, este matemático dio la definición más explícita del siglo XVII, definiendo una función como: "una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable" (Sastre, Rey y Boubée, 2008, p. 146).

> Fermat (1601 - 1665) aplicó el análisis de Vieta a los problemas de lugares geométricos y presentó en un estilo moderno, con las notaciones de Vieta, los principios

> fundamentales de la Geometría Analítica "Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de cada una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva" (Collette, 1985, p. 23). A pesar de que Fermat escribió sobre estos temas antes que Descartes publicara sus trabajos, su obra fue publicada de manera póstuma a la de Descartes. (Ramos, 2005, p. 80)

Fermat visualizó la arbitrariedad en que parámetros y variables se unen para formar expresiones algebraicas, estando la representación gráfica condicionada a como se relacionan los elementos de la representación algebraica. Asimismo, expone muy claramente la idea de que una ecuación con dos incógnitas es una expresión algebraica de las propiedades de la curva. Según Font (2000a; citado en Ramos, 2005):

> Mientras que Descartes considera curvas generadas por movimientos de las cuales busca la ecuación, Fermat introduce curvas dadas por ecuaciones algebraicas. Se entiende que Descartes se preocupa más de la traducción de la gráfica a la expresión simbólica, mientras que Fermat se preocupa más de la traducción de la expresión simbólica a la gráfica. (p. 80)

En este mismo sentido Newton, en el año 1736, publicó su libro *Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum*, en su obra considera:

> Las variables como generadas por el movimiento continuo de puntos, rectas y planos, más que como agregados estáticos de infinitesimales. A una cantidad variable le llama "fluente" y la representa por las letras x, y, a su cambio relativo "fluxión" que representa por $\dot{x}$ e $\dot{y}$. En dicho libro, Newton considera que el problema fundamental del cálculo es el siguiente: dada una relación entre fluxiones, obtener una relación entre sus respectivas fluyentes y recíprocamente. (Ramos, 2005, p. 80)

Cabe destacar que en la primera publicación de Newton divulgada en el año 1687, utiliza "métodos de demostración geométricos, seguramente debido a que consideraba que este tipo de demostraciones era más comprensible para sus contemporáneos y expone un método alternativo a los infinitesimales y al método de las fluxiones: las cantidades divisibles evanescentes" (Ramos, 2005, p. 81).

En general para Newton la función es una herramienta fundamental que se usa, pero que no es objeto de estudio en sí misma. Las gráficas de funciones eran consideradas no como un agregado estático de infinitesimales, sino como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la que se puede expresar mediante una fórmula (generalmente en forma implícita). Esta manera de entender las gráficas de funciones es muy evidente en la obra de Newton (Ibíd.).

> Leibniz (1646 - 1716) matemático alemán fue el primer autor en utilizar la palabra función en 1692 (Struik, 1969). Leibniz usó esta palabra para referirse a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada. Por ejemplo, Leibniz afirmaba que una tangente es una función de una curva. (Iacobacci, 1965, citado en Sastre, Rey y Boubée, 2008, p. 147)

> Leibniz introdujo las palabras: constante, variable, coordenadas y parámetro en términos de un segmento de constante arbitrario o cantidad. Clasificó a las curvas en: ‘algebraicas’, las representadas por una ecuación de cierto grado y ‘transcendentes’, las representadas por una ecuación de grado infinito o indefinido. Leibniz no utilizaba el concepto de función como lo entendemos en la actualidad, ya que para él, una curva estaba formada por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños. (Sastre, Rey y Boubée, 2008, p. 147)

La primera consideración de una función como Expresión Analítica se evidencia en el artículo de Jean Bernoulli en 1718: “Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes” (Bernoulli, 1718, citado en Boyer, 1986, p. 531). Es en este mismo artículo que Bernoulli propone “la letra griega φ para designar la ‘característica’ de una función (término utilizado basado en los trabajos de Leibniz), escribiendo el argumento sin paréntesis: φx” (Ruiz, 1998, p. 174).

Es en el siglo XVIII cuando el estudio de la función es considerada esencial dentro de la matemática. Euler (1707 - 1783), matemático y físico suizo quien había sido precedido por una familia de matemáticos suizos (los Bernoulli Johann y Jacob), en su obra Introduction in analysis infinitorum publicada en 1748 analiza detenidamente la noción de función. Comienza estableciendo que: “una constante es una cantidad definida que toma siempre un solo y único valor, mientras que una variable puede tomar valores en un conjunto (o un subconjunto) de números complejos” (Ruiz, 1998, p. 175).

La definición propuesta por Euler del objeto matemático función es, "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes" (D'hombres, Dahan, Bkouche, Houzel y Guillemot, 1987, citado en Ruiz, 1998, p. 175).

Si bien Euler no define qué es una expresión analítica, la que fue definida formalmente en el siglo XIX, para dar a esta definición la mayor posibilidad de generalidad, Euler admitía tanto valores reales como imaginarios del argumento. Una función conceptuada como una expresión analítica se obtiene mediante una clase de operaciones aritméticas, las potencias y raíces. A ellas se adjuntó las funciones trascendentes elementales: e^z, lnz y las funciones trigonométricas (Ruiz, 1998).

Euler estableció funciones algebraicas y trascendentes, las primeras formadas por operaciones algebraicas, y las últimas necesitan para su formación operaciones trascendentes. Euler complementó esta clasificación con la introducción de funciones uniformes y multiformes, pares e impares, y definió criterios para su determinación. Sin embargo, al restringirse en la consideración de función como expresiones analíticas, todas las funciones las consideraba representadas por una serie de potencias: $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n + ...$. Más tarde es ampliada la expresión analítica para potencias de la variable z, no sólo enteras, sino cualesquiera, afirmando que toda función de z puede ser transformada en una expresión de la forma: $f(z) = Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + ...$ (siendo $\alpha, \beta, \delta, ...$ números cualesquiera). Esta afirmación tan rotunda, no es de extrañar, ya que en la época de Euler casi la totalidad de las funciones utilizadas eran analíticas (Ibíd.).

> En el siglo XVIII, los matemáticos más importantes (Euler, Lagrange, etc.) consideraban que cualquier función se podía representar por una serie entera, siempre que no fuese una función definida a trozos. Euler consideraba que a cada expresión analítica le correspondía una gráfica cartesiana, y que expresiones analíticas, que de entrada parecían diferentes, podían tener la misma gráfica. Pero consideraban que a gráficas diferentes correspondían expresiones analíticas diferentes. En la terminología de Euler, las gráficas definidas a trozos eran discontinuas o mixtas o irregulares. (Ramos, 2005, p. 82)

Según Boyer (1986), Euler en 1734 fue el primero en utilizar la notación de función $f(x)$. Por su parte el matemático francés Lagrange (1736 - 1813), propone la siguiente definición para la noción de función:

> Llamaremos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la que estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades

> que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas. (Lagrange, citado en Grattan-Guinness, 1984, p. 133)

Los matemáticos desde Euler hasta Cauchy siglo XIX parecían estar de acuerdo con la naturaleza arbitraria de las funciones, pero en la práctica ellos pensaban en las funciones como expresiones analíticas o curvas. El problema de la cuerda vibrante, relacionada con vibraciones infinitamente pequeñas de una cuerda finita, homogénea y fijada en sus dos extremos, conllevó a que Euler, generalizara el concepto de función, esto con la finalidad de propiciar la existencia de una correspondencia biunívoca entre las funciones y las curvas. Para Euler, las funciones discontinuas, en general, no se pueden expresar analíticamente y por consiguiente la definición dada inicialmente era demasiado limitada para encontrar solución a este problema. El tipo de función que mediaba en la solución de la ecuación del problema de las cuerdas vibrantes, no estaba necesariamente definido por expresiones analíticas, sino tal como lo expresara Euler, por un gráfico obtenido por el trazo libre de la mano (Jaimes, 2012). La necesidad de considerar funciones mixtas en determinados problemas llevó a Euler a buscar una definición de función que englobase a todas las curvas que no se podían definir por una sola expresión, pero que se podían dibujar por el movimiento libre de la mano. En su libro '*Institutiones calculi differentialis*' publicado en el año 1755 dio la siguiente definición:

> Si ciertas cantidades dependen de otras, de tal manera que si las otras cambian, estas cantidades cambian también, entonces se llama estas cantidades funciones de las últimas; esta denominación tiene la máxima amplitud y contiene, en ella misma, todas las maneras por las que una cantidad puede ser determinada por otras. Si, por consiguiente, x designa una cantidad variable, entonces las otras cantidades que dependen de x de cualquier manera, o que están determinadas por x, se llaman funciones de x. (Lacasta y Pascual, 1998, citado en Ramos, 2005, p. 83)

1.3.5. La función como correspondencia arbitraria

Durante el siglo XIX se fueron creando las condiciones necesarias para el tratamiento de las funciones como correspondencias de tipo muy general. Es así que Cauchy (1827) da la siguiente definición:

> Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable. (Cauchy, 1827, citado en Youschkevitch, 1976, p. 58)

Por su parte Lobachevsky, en el año 1834, afirmó:

> El concepto general exige llamar función de x a un número, el que se da para cada x y paulatinamente varía junto con x. El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida. (Lobachevsky, 1834, citado en Ribnikov, 1987, p. 229)

Esta nueva acepción de la noción de función es definida ampliamente por Dirichlet en 1837, quien la enuncia de la siguiente manera:

> Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que se atribuye un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable dependiente x. (Dirichlet, 1837, citado por Boyer, 1986, p. 687)

Como se ha descrito anteriormente, las funciones hasta ese momento se concebían como expresiones analíticas o curvas, siendo Dirichlet el primero en considerar la noción de función como ‘correspondencia arbitraria’. De este modo, propone un ejemplo explícito de una función que no admite ser representada mediante una expresión analítica ni mediante una gráfica o curva. Así, para evidenciar lo arbitraria que podía ser la regla de correspondencia, Dirichlet propuso una “función de ‘muy mal comportamiento’: Sean c y d dos números reales distintos; cuando x sea racional sea $y = c$, y cuando x es irracional sea $y = d$. Esta función es tan patológica que es discontinua para todos los valores de x” (Ruiz, 1998, p. 183).

Posteriormente Riemann (1858) constituye la siguiente definición: “Se dirá que y es función de x si a todo valor bien determinado de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que una a x y a y” (Riemann, 1858, citado en Ruiz, 1998, p. 183).

1.3.6. La función a partir de la Teoría de Conjuntos

A medida que avanza la Matemática, va haciéndose cada vez más abstracta, ocurre lo mismo con la definición de la noción de función. Los desarrollos en el campo del álgebra abstracta y de la topología dan lugar al surgimiento de nuevas definiciones teóricas conjuntistas. El grupo Bourbaki, en 1939, definió función como una correspondencia entre dos conjuntos de una forma semejante a la dada por Dirichlet en 1837:

> Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x, se dice que y es el valor de la función en el elemento x, y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función. (Monna, 1972; Youschkevitch, 1976, citado en Sastre, Rey y Boubée, 2008, p. 152)

> Bourbaki también formuló una definición de función equivalente, como un conjunto de pares ordenados (Kleiner, 1989). En sus palabras: "una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano $E \times F$". La forma de ver una función por Bourbaki difiere del punto de vista de Dirichlet en que el dominio y el codominio no están restringidos al conjunto de números reales. En la definición de Dirichlet el dominio de la función es un intervalo finito de números reales y el codominio está formado por números reales. (Sastre, Rey y Boubée, 2008, p. 152)

Bourbaki establece los usos del signo $f(x)$ de la siguiente manera: valor específico o imagen siendo ésta una expresión numérica o algebraica. Puntos por los cuales puede ser entendido como el valor o posición en el plano. Es posible visualizar a partir de lo anterior, y a diferencia de Cauchy quien entiende la función como una relación, que Bourbaki la define como una correspondencia y junto con Dirichlet propician el ingreso y uso del signo para designar a la función. Al igual que en las obras de Cauchy, se puede percibir un predominio de expresiones algebraicas. El surgimiento de f volcó a entender a $f(x)$ como un objeto con el que se puede operar, analizar, manipular, pero principalmente con el que se podrá determinar a la función, es decir f, ya que estudiando estas imágenes es que se puede caracterizar a la función (Ibíd.).

A fines del siglo XIX, surge la teoría de conjuntos con Cantor. Su impacto se extiende al desarrollo de la topología, el álgebra y el análisis funcional entre otros. La influencia que dicha teoría posee sobre la noción de función, permite establecer la definición formal del objeto matemático función:

> Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una función f definida en un conjunto X y con valores en Y es una ley mediante la que se hace corresponder a cada elemento de X un elemento de Y. Se dice también que f es una aplicación de X en Y. Para un elemento genérico $x \in X$ denotaremos habitualmente por $f(x)$ el elemento y correspondiente a ese x, y se dirá también que $f(x)$ es el valor de la función f en x, esto se expresa a veces mediante la igualdad $y = f(x)$. Para denotar que f es una aplicación de X en Y, se escribe ordinariamente $f : X \to Y$, y a veces también $x \to f(x)$, esta última indica, más bien la operación de pasar de un elemento cualquiera $x \in X$ a su transformado $f(x) \in Y$. En ocasiones, por emplear un lenguaje geométrico se habla de transformación de X en Y, en lugar de función o aplicación definida en X y con valores en Y. (Fernández, 1976, citado en Ruiz, 1998, p. 186)

En el intento de precisar y dar mayor rigor a la definición de este objeto matemático, se llega a la determinación de:

> Una función como la terna $f = (G, X, Y)$, en donde G,X,Y son conjuntos que verifican las siguientes condiciones: a) $G \subseteq X \times Y$; b) Para todo $x \in X$ existe una y sólo una $y \in Y$, tal que $(x, y) \in G$, G es la gráfica de la función f. El único elemento y de Y tal que $(x, y) \in G$ se llama valor de la función f en x, y se utiliza para designarlo $y = f(x)$. Es evidente que la gráfica G es el conjunto de pares de la forma $(x, f(x))$ donde $x \in X$, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función. A X se le denomina conjunto de partida de f, y a Y conjunto de llegada de f. (Godemat, 1971, citado en Ruiz, 1998, p. 186-187)

Russell, por su parte, establece la siguiente definición:

> La idea de función es tan importante, y a menudo ha sido considerada con referencia exclusiva a los números, que será conveniente llenar nuestras mentes con ejemplos de funciones no numéricas. Por muchas razones es conveniente identificar la función y la relación, es decir, si $y = f(x)$ es equivalente a xRy, donde R es una relación, es conveniente hablar de R como de la función, pero se debe recordar que la idea de

> funcionalidad es más importante que la de relación. (Russell, 1967, citado en Ruiz, 1998, p. 187)

Es así que Mosterín (1981, citado en Ruiz, 1998, p. 187) considera, "R es una función $\leftrightarrow \forall x, y, z, (x, y) \in R$ y $(x, y) \in R \rightarrow y = z$". Por otro lado, Hausdorff establece la siguiente definición:

> El concepto de función es casi tan fundamental y primitivo como el concepto de conjunto. Una relación funcional está formada por pares de elementos, al igual que un conjunto está formado por elementos individuales. Los pares ordenados hacen posible la introducción de la noción de función. Así, para una función univalente $f(a)$, lo único que cuenta es que para un a dado, $f(a)$ debe estar unívocamente determinado por algún criterio definido (dado anteriormente por un conjunto de pares P). Es innecesario conocer si este criterio puede ser dado o no en términos de 'expresiones analíticas' o bien de otra manera. Es también innecesario conocer si algún caso con los instrumentos que tenemos a nuestra disposición nos permiten o no encontrar siempre para un valor de a la determinación actual de $f(a)$. Lo que nosotros hemos dicho aquí sobre la noción general de función, definido por Dirichlet, podría haber sido dicho sobre el concepto de conjunto de Cantor. El conjunto de los racionales está bien definido, aunque no conozcamos si π^{π} pertenece o no a dicho conjunto, la función $f(a)$ que es igual a 1 si a es racional, y 0 si a es irracional, está bien definida, aunque no conozcamos el valor de $f(\pi^{\pi})$. (Hausdorff, 1978, citado en Ruiz 1998, p. 188)

Freudenthal (1983, citado en Ruiz, 1998, p. 188) señala "aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático".

1.4. Estudios sobre las dificultades cognitivas en el aprendizaje de funciones

Diversas investigaciones han permitido evidenciar las principales dificultades que presentan los estudiantes para lograr una aprehensión significativa de la noción de función. Según Duval (2006), epistemológicamente una diferencia básica entre las matemáticas y otros dominios del conocimiento científico es que los objetos matemáticos, en contraste con los fenómenos de astronomía, física, química, biología, etc., son abstractos, es decir, no son accesibles por instrumentos (microscopios, telescopios, aparatos de medición). La única forma de tener acceso a ellos es mediante signos y representaciones semióticas. Esto implica que para alcanzar, pensamiento matemático se requieren dos actividades cognitivas:

- Para realizar cualquier actividad matemática, será necesario siempre recurrir a alguna representación semiótica.
- Los objetos matemáticos nunca deben confundirse con las representaciones semióticas que se utilizan.

En este sentido, el problema crucial de la comprensión matemática para los estudiantes de distintos niveles educativos, nace del conflicto cognitivo entre las dos actividades descritas anteriormente, surge así la pregunta ¿Cómo pueden distinguir el objeto representado de la representación utilizada si no pueden acceder al objeto matemático sin representaciones semióticas? Esto implica que la capacidad de cambiar de un sistema de representación a otro es a menudo el umbral crítico para el progreso en el aprendizaje y para la resolución de problemas en matemáticas (Ibíd.).

El rol que desempeñan las representaciones en el proceso de enseñanza aprendizaje es fundamental si se pretende que los estudiantes logren una correcta comprensión de la noción de función. Duval (1999, citado en Ferrari, 2001) señala:

> Las representaciones semióticas,son producciones constituidas por el empleo de símbolos, relativas a un sistema particular de signos (lenguaje, escritura algebraica, gráficos cartesianos, etc.) las que pueden ser convertidas en representaciones 'equivalentes' en otros sistemas semióticos. Tales sistemas deben permitir el cumplimiento de las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: la formación de representaciones en un registro semiótico particular, así como las dos actividades ligadas a la propiedad fundamental de toda representación semiótica, su *transformabilidad* en otras representaciones que conserven todo el contenido de la representación inicial o una parte del mismo. Esta última abarca tanto la transformación de las representaciones de un objeto en un mismo registro, denominado *tratamiento*, como de un registro a otro, la *conversión*. (p. 16)

Es decir, además de identificar las representaciones semióticas vinculadas a una noción matemática específica, es fundamental transitar, dentro de un mismo registro, de una representación a otra. Ferrari (2001) define *tratamiento* como:

> Aquella actividad cognitiva que transforma las representaciones de algún objeto matemático en un mismo registro, es decir, se trata de una transformación interna al registro de representación, que se realiza de acuerdo con las reglas propias al sistema, llamadas 'reglas de expansión', para obtener otras representaciones que pueden constituir una ganancia de conocimientos en comparación con las representaciones iniciales. (p. 17)

Por ejemplo, se realiza un tratamiento cuando se tiene una representación algebraica de una función polinómica y se realiza una factorización de la misma. Es decir, dada $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2+2x+1$ se le aplica el tratamiento de factorización para obtener la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x+1)^2$. Es importante considerar que el *tratamiento* de la función original no debe alterar el dominio ni el codominio de la función resultante, en caso contrario el tratamiento implicaría un cambio profundo del objeto matemático inicial. Esto último no respetaría la definición dada.

Tal como se ha descrito anteriormente, otra actividad cognitiva esencial es transitar de un registro a otro. En este caso Ferrari (2001) define *conversión* como:

> Aquella actividad cognitiva que consiste en transformar las representaciones producidas en un sistema de representaciones a otro, de tal manera que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. Es por tanto, una transformación externa al registro de la representación inicial constituyéndose en la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los estudiantes. (p. 17)

Por ejemplo, se realiza una conversión cuando a partir de la representación algebraica de una función construimos la gráfica asociada.

Duval (2006), establece que las actividades de tratamiento y conversión son procesos cognitivos muy diferentes, "son dos fuentes separadas de la incomprensión en el aprendizaje de las matemáticas. Si el tratamiento es lo más importante desde un punto de vista matemático, la conversión es básicamente el factor decisivo para el aprendizaje" (p. 103). En este mismo sentido, Even (1998) señala que la capacidad de identificar y representar el mismo objeto matemático en diferentes representaciones, y la flexibilidad en el movimiento de una representación a otra son cruciales en el aprendizaje de la matemática, ya que permite a los estudiantes identificar relaciones ricas y significativas con respecto a una noción matemática, además de desarrollar una comprensión más profunda de los objetos matemáticos. Por su parte, Greeno y Hall (1997) sostienen que a través de las representaciones es posible comunicar información con respecto a una noción matemática y de lo que se ha comprendido de ella. Duval (1999, citado en Ferrari, 2001, p. 19) señala:

> En la fase de aprendizaje, la articulación de registros de representación juega un papel fundamental en la conceptualización de la noción de función. Es así que el análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos en el aprendizaje enfrenta tres fenómenos estrechamente ligados:
>
> - La diversificación de los registros de representación semiótica, pues cada registro plantea preguntas específicas que son muy diferentes entre sí.
> - La diferenciación entre representante y representado o al menos entre forma y contenido de una representación semiótica.
> - La coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica disponibles, pues el conocimiento de las reglas de correspondencia entre dos registros distintos no es suficiente para que puedan ser movilizados y utilizados conjuntamente.

En este sentido Duval (2002), explicita que los estudiantes no logran una comprensión en matemáticas si no incorporan a su 'estructura cognitiva' los diversos registros de representaciones semióticas asociados a una noción matemática específica. En ocasiones los estudiantes no logran visualizar que dos representaciones refieren al mismo objeto matemático y perciben dichas representaciones como nociones matemáticas diferentes. Por ejemplo: una función lineal puede representarse mediante la siguiente expresión algebraica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ y en el plano cartesiano mediante una recta. No obstante, podría ocurrir que los estudiantes asocien esta representación gráfica a la ecuación de la recta y no a una relación funcional de números reales. Los registros de representación no tienen significados independientes; sus significados están conectados al objeto matemático respectivo (Kaput, 1987). Sin embargo, no se puede acceder a todas las nociones del objeto a través de un registro de representación. Por ejemplo, no se puede acceder a la noción de continuidad de una función lineal a través de un registro tabular (Ibíd.).

En Chile se evidencian dificultades en contenidos matemáticos específicos asociados con el álgebra, dentro de esta área el trabajo con funciones es tratado en general desde un punto de vista estrictamente formal, generando una serie de obstáculos y dificultades en la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos (Aravena, 2001). En este mismo sentido, Artigue (1995) señala que las dificultades cognitivas presentes en los estudiantes son producto de los hábitos de enseñanza tradicional, pues el gran predominio que en ella se otorga al registro algebraico (simbólico-formal) impide a los estudiantes lograr flexibilidad para transitar de un registro a otro. De acuerdo con Jaimes (2012), centrarse exclusivamente en procesos algorítmicos conlleva a considerar la función matemática, como una fórmula mecánica, donde la construcción de tablas será un simple requisito y/o la graficación estará carente de interpretación. Conjuntamente, la falta de articulación entre las diversas representaciones de la noción de función impide ver este objeto matemático como una herramienta que aumenta la capacidad de visualizar, precisar, interpretar y comprender diversos fenómenos donde está inmersa la función.

Por su parte, Ospina (2012), establece que las representaciones son el medio por el cual disponen los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles y accesibles a otros. Éstas, además de cumplir una función de comunicación, tienen una función de objetivación, son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, del funcionamiento cognitivo del pensamiento, del tratamiento de la información, de la toma de conciencia y de la comprensión.

Sierpinska (1992), señala la importancia de proporcionar a los estudiantes un amplio espectro de formas de representar la noción de función, a fin de evitar que dichas representaciones se identifiquen con una función en particular. Además, se refiere a las dificultades que presentan los estudiantes para establecer el vínculo entre diferentes representaciones de funciones: fórmulas, gráficos, diagramas, descripciones verbales, etc. En este mismo sentido, indica que los estudiantes tienen problemas en la interpretación de gráficos y al manipular símbolos relacionados con funciones tales como: $f(x)$, $x \mapsto y$, etc. El lenguaje utilizado cuando se aborda la noción de función podría provocar en los estudiantes ambigüedades en la comprensión del objeto. Esto se ejemplifica en situaciones tales como: $f(x)$ representa tanto el nombre de una función como el valor de la función f en x. Otras dificultades en la construcción de nociones matemáticas se vincula a la restricción de representaciones presentadas en los procesos de enseñanza. Las formas habituales de representación en algunos objetos matemáticos, como la noción de función, no son suficientes para que los estudiantes construyan el significado holístico del objeto ni para lograr comprender toda la gama de sus aplicaciones. Janvier (1987), en su investigación sobre la noción de función establece que:

> Las representaciones asociadas al concepto de función se pueden clasificar en cuatro clases (expresión analítica, tabla, gráfica y expresión verbal), que aunque idealmente contienen la misma información, ponen en acción diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La representación gráfica conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La expresión analítica conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representa-

> ción verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar las otras tres. (p. 169)

De forma similar a lo descrito por Janvier, en el campo de las relaciones funcionales, se pueden considerar cuatro formas principales de representación: gráfico, tabla numérica, expresión algebraica, y descripción situacional. Cada forma de representación ilustra aspectos relevantes de una función dada en diferentes aspectos. Las formas gráficas de representación, por ejemplo, permiten a los estudiantes visualizar la covariación. En contraste, las expresiones algebraicas acentúan el aspecto de la correspondencia dentro de las funciones: para cada valor x, hay un valor y correspondiente (Thompson, 1994; Confrey y Smith, 1995, citado en Nitsch et al., 2013).

Diversas son las dificultades que presentan los estudiantes para identificar lo que es realmente una función matemática. Una de las investigaciones que centraron su interés en este aspecto, evidenciaron la brecha existente entre definiciones dadas por los estudiantes y los criterios utilizados en las tareas de reconocimiento de objetos funcionales dadas en registros diferentes (Vinner, 1983, citado en Artigue, 1995). Los criterios establecían una concepción de la noción de función organizada no en torno a la definición conjuntista, sino alrededor de prototipos comunes encontrados de la asociación entre función-fórmula, o de la asociación función-curva. Estos criterios conducían a rechazar funciones y a admitir objetos no funcionales. Además, no existía coherencia global, pues los criterios dependían significativamente del registro de representación utilizado (Artigue, 1995).

De acuerdo con Sfard (1992) y Vinner y Dreyfus, (1989) algunos estudiantes albergan la creencia:

> Una función solo existe si se ha creado una regla algebraica legítima para describirla; Diferentes representaciones algebraicas de funciones que producen los mismos valores (por ejemplo, $f(x) = x^2$ y $g(0) = 0$, $g(x+1) = g(x) + 2x + 1$) son funciones diferentes; Los gráficos son iconos para mostrar y extraer información puntual sobre una función; Una función representada en un formato gráfico debe tener un buen comportamiento (simétrica , regular, suave y continua); Una función representada en un formato tabular no es una función porque la tabla muestra valores discretos en lugar de continuos, y las representaciones gráficas, tabulares y algebraicas de funciones representan diferentes ejemplos de funciones. (citado en Adu-Gyamfi y Bossé, 2013, p. 170-171)

Las diferentes formas de construir imágenes mentales con respecto a una noción matemática, se interrelacionan con la capacidad de los estudiantes para utilizar diferentes representaciones matemáticas. Vinner y Tall (1989) señalan que la estructura cognitiva asociada a un objeto matemático involucra además de las definiciones formales, imágenes mentales, representaciones, modelos, ejemplos y contraejemplos, relaciones con otras nociones matemáticas, etc.

En este mismo sentido, Ruiz (1998) establece que diversas son las definiciones de nociones matemáticas introducidas en los programas de matemática. Sin embargo, los estudiantes no usan necesariamente la definición cuando se enfrentan a tareas, ejemplos o contraejemplos de la noción de función. En la mayoría de los casos, deciden con base en una imagen conceptual que incluye representaciones visuales (gráficos, diagramas sagitales, símbolos tales como "$f(x) =$", o bien "$y =$"), es decir, se considera todo un conjunto de esquemas mentales asociadas a dicho objeto matemático (Vinner y Dreyfus, 1989).

Ferrari (2001), considera habitual ver algunos aspectos de la matemática general y de funciones en particular de manera gráfica. Sin embargo, los estudiantes no tienen una 'imagen del concepto' de función. Parecen tender a procesar la información y resolver ejercicios analíticamente, no visualmente. Ejemplo de esta dicotomía entre el gráfico de una función y la función en sí misma, es el caso presentado por la totalidad de los alumnos de cálculo entrevistados respecto a hallar la inversa de una función conocido su gráfico y su expresión analítica (Eisenberg, 1991; citado en Ferrari, 2001). El 90 % fue capaz de hacerlo en forma analítica y el 55 % de los mismos justificar su repuesta, en tanto que sólo el 30 % "reflejó la gráfica respecto a la recta $y = x$" dando indicios de su conocimiento respecto del mecanismo geométrico, pero ninguno de ellos fue capaz de justificar dicho proceso, demostrando la existencia de un divorcio entre el concepto de función y su interpretación visual.

Artigue (1998), establece cuatro categorías asociadas a las dificultades y complejidad matemática de la noción de función. Estas han sido identificadas en investigaciones previas y las define como:

- *Dificultades en la identificación de aquello que realmente es una función y en la identificación de las sucesiones como un caso de funciones*: habitualmente los estudiantes cuando utilizan criterios para corroborar el carácter funcional de un objeto matemático no acuden necesariamente a la definición formal de la noción de función (Vinner y Dreyfus, 1989). Los criterios utilizados se corresponden más bien con los prototipos y asociaciones tales como función-fórmula o bien función-curva. De esta forma el objeto matemático se puede considerar una función o no, según la forma de su representación semiótica: así, la función $f : x \to f(x) = 2$ podría no reconocerse como función ya que la expresión algebraica no depende de x. No obstante, si se presenta mediante su representación gráfica es posible que sea reconocida dado que estará representada mediante una recta.

- *Dificultades para sobrepasar una concepción puramente de tipo proceso de la noción de* *función y llegar a ser capaz de relacionar con flexibilidad sus dimensiones de proceso y de objeto para desarrollar una concepción procedimental (Tall y Thomas, 1991)*: esta dificultad se suscita cuando los estudiantes tienen que considerar como iguales funciones definidas por procesos equivalentes pero diferentes. El trabajo en análisis es complejo si los estudiantes sólo pueden apoyarse en una concepción de tipo proceso, pues se requiere además considerar a las funciones como objetos que se pueden incluir en procesos más complejos como la integración y diferenciación y también considerar clases de funciones definidas por propiedades específicas: funciones continuas.

- *Dificultades para relacionar los diferentes registros semióticos (Duval, 1995) que permita representar y trabajar con funciones*: esta dificultad recae en lo complejo que resulta la conversión entre los diversos registros de representación, particularmente la conversión de un registro gráfico a un registro algebraico. Además de dificultades vinculadas al uso simultáneo de informaciones que se refieren a nociones diferentes pero dentro de un mismo registro.

- *Dificultades para trascender los modos de pensamiento numérico y algebraico*: desde Euler, el análisis es un campo matemático organizado en torno a la noción de función, a los procesos de variación, al pensamiento funcional. Según investigaciones realizadas en Francia (Pitohué, 1996) los estudiantes que han oído de funciones durante tres años, no perciben realmente cuál es el interés y utilidad del pensamiento funcional.

Akkoc y Tall (2003), contrastan la simplicidad matemática del concepto de función que es apreciada por algunos estudiantes y el espectro de complicaciones cognitivas que la mayoría de los estudiantes tienen para hacer frente a la noción de la función en sus diversas representaciones. Los datos empíricos sugieren que un pequeño número de estudiantes generalmente utilizan la definición coloquial del concepto de función para vincular e identificar relaciones funcionales en una gama de diferentes formas de representación. Otros estudiantes no presentan la sofisticación para ver esta simplicidad. Algunos de ellos se centran en el concepto central solo para formas prototípicas de los diagramas de conjuntos y pares ordenados. Sin embargo, los gráficos y las representaciones algebraicas se ven en el mejor de los casos como ejemplos de funciones trabajadas con anterioridad.

De acuerdo con Figueiredo (2010), la introducción de la noción de función, en el nivel prealgebraico tiende a basarse en representaciones verbales y tabulares. No obstante, rápidamente la construcción de dicha noción se centra en representaciones algebraicas y geométricas. Es habitual de los procesos de enseñanza-aprendizaje, encontrarse con dificultades por parte de los estudiantes en lo que respecta a actividades que involucran representaciones algebraicas, cuando la representación geométrica resolvería el problema de forma estratégicamente más eficiente. Asimismo, la relación de los estudiantes con las representaciones de la noción de función parece ser más fácil que la que poseen con la propia definición. Sin duda, el significado que los estudiantes logran adquirir del objeto función es más significativo en la medida que transitan por sus diversas representaciones (Ibíd.).

La capacidad de identificar y representar el mismo objeto matemático en diferentes representaciones, y la flexibilidad en el movimiento de una representación a otra, son cruciales en el aprendizaje de la matemática ya que permite a los estudiantes visualizar relaciones ricas, y desarrollar una comprensión más profunda de los conceptos (Even, 1998). Por su parte, Kaldrimidou e Ikonomou (1998) y Gagatsis y Shiakalli (2004) consideran que cada una de las distintas representaciones de la función determina un aspecto diferente de la noción matemática y todas estas juntas contribuyen a una representación global de la misma, ninguno de ellos por separado puede describir la noción global de función.

1.5. Estudios sobre recursos utilizados en la enseñanza de funciones

La enseñanza tradicional centrada en procesos mecánicos y técnicas algorítmicas que se alternan con conceptos y definiciones, dificulta el aprendizaje de nociones vinculadas al cálculo. Esto trae consigo "elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas. Estos ha sido reportados en los últimos treinta años con respecto a cursos de cálculo en el nivel medio y superior de educación" (Salinas y Alanís, 2009, p. 359). Diversas investigaciones se han interesado por determinar procesos de enseñanza que exhiban variados recursos para abordar nociones teóricas vinculadas al cálculo, entre ellas el uso de las TIC ha tenido un importante protagonismo. En este sentido, Font (2009) señala:

> Utilizar graficadores dinámicos facilita, aunque sea de manera inconsciente, estructurar las gráficas como trazas de puntos. El uso, explícito o implícito, de las metáforas dinámicas del tipo la 'gráfica es un camino' tiene sus ventajas, pero también sus inconvenientes como se evidencia en el estudio de Font (1999). En dicha investigación se constató que cuando los docentes utilizan de manera inconsciente un discurso dinámico se produce en los estudiantes algunas dificultades como la creencia que, cuando movían el punto A, pensaban que el nuevo punto continuaba siendo el punto A y que la nueva recta tangente era la misma que antes pero con diferente inclinación. De hecho,

> es como si estructurasen la situación en términos de una persona que se mueve (punto A) con un saco en la espalda (recta tangente) por una carretera que primero sube y después baja (gráfica) y considerasen que la persona y el saco siempre son los mismos a pesar de estar en diferentes lugares y tener diferente inclinación. (p. 27)

En la práctica, la noción de función (dado esencialmente por la definición) resulta cognitivamente difícil de alcanzar y los estudiantes acceden al concepto a través de ejemplos de variadas formas (Akkoc y Tall, 2002, p. 26):

- La representación verbal de una función en lenguaje formal o coloquial (cotidiano),
- Diagramas de conjuntos (que representa una función por dos conjuntos y flechas entre ellos),
- Una caja de función (que representa una relación de entrada-salida),
- Un conjunto de pares ordenados (considerados teóricamente como conjuntos),
- Una tabla de valores (a menudo calculada usando una fórmula o procedimiento de computadora),
- Un gráfico (dibujado por computadora o a mano),
- Una fórmula.

Gómez Chacón y Joglar Prieto (2010), estudian el desarrollo y la interacción de cuatro componentes: cognitivas, didácticas, técnicas y afectivas en profesores en formación, cuando aprenden cómo enseñar funciones exponenciales y logarítmicas en un escenario multimedia y con softwares de geometría dinámica (Geogebra). Asimismo, señalan que para lograr una comprensión adecuada de la noción de función se requiere de la capacidad de transitar desde la representación algebraica a la gráfica y viceversa. Por lo tanto, es esencial visualizar la gráfica de una función con su expresión algebraica y tabular y es aquí donde Geogebra puede tener un gran impacto. Es decir, las dificultades que pueden presentar actividades de modelación con funciones pueden ser apoyadas con el uso de TIC.

En su estudio Gómez Chacón y Joglar Prieto (2010, p. 491-492) proponen un modelo para determinar y clasificar las competencias necesarias para enseñar matemáticas con tecnología:

- *Competencia 1*: Contenido matemático y resolución de problemas (Conocimiento matemático).

- *Competencia 2*: Organización del plan de estudios, planificación de la instrucción matemática (Conocimiento pedagógico e institucional).
- *Competencia 3*: Uso de recursos y materiales (Dispositivos y herramientas digitales).
- *Competencia 4*: Componente personal y afectivo (actitudes, emociones personales, creencias, posición de identidad profesional, prácticas sociales en el aula, habilidades interpersonales y creatividad).

En relación con la competencia 3 (*Uso de recursos y materiales*), Gómez Chacón y Joglar Prieto (2010, p. 492) distinguen tres niveles de la competencia:

- Administrar y crear archivos / documentos de manera adecuada con un procesador de textos científico y con software de matemáticas dinámicas (por ejemplo, MS-Word, MathType y GeoGebra). Navegar por Internet (buscar material) y gestionar textos o artículos de referencia.
- Editar documentos de texto de cierta complejidad (por ejemplo, MS-Word). Utilizar correctamente un procesador de textos científico (por ejemplo, MathType). Editar archivos y administrar comandos básicos (Geogebra): gráfico de una función, intercepción de gráficos. Utilizando deslizadores.
- Manipular e interpretar gráficos complejos en 2 dimensiones con GeoGebra; Modelar matemáticamente los problemas reales con GeoGebra; Aprender a encontrar varias soluciones diferentes para un problema dado con GeoGebra; Interpretar los resultados.

En cuanto a la competencia 4 (*Componente personal y afectivo*) Gómez Chacón y Joglar Prieto (2010, p. 492-493) definen cuatro niveles:

- Enseñanza y aprendizaje de matemáticas en entornos tecnológicos: motivación para el uso de dispositivos digitales; creencias matemáticas; posición profesional de identidad profesional matemática.
- Expresar sus propias ideas de manera estructurada e inteligible, tanto verbalmente como por escrito: Establecer diálogos con compañeros, profesores y estudiantes.
- Transmitir convicción y seguridad: Adecuarse correctamente a situaciones y contextos (registros formales y coloquiales conocidos); Ser oportunos y transmitir información relevante.

- Conectarse fácilmente con la audiencia que captura su atención con ejemplos interesantes; Hacer que los contenidos 'difíciles' parezcan 'fáciles' (sin caer en la trivialización); Adaptar adecuadamente a la audiencia o lector; Transmitir entusiasmo por el tema explicado. Escuchar y ser paciente con las respuestas y reacciones de los estudiantes.

Según Gómez Chacón y Joglar Prieto (2010), el profesor de matemática 'adquiere' las competencias 1 (Componente cognitivo) y 2 (componente didáctico) en su proceso formativo, mediante asignaturas disciplinares y de educación matemática. Sin embargo, las competencias 3 y 4 descritas anteriormente se perciben más débiles en futuros profesores. Por tanto, es fundamental fomentar que los profesores en formación alcancen en su proceso formativo las otras competencias. Otro aspecto importante es que el aprendizaje de funciones utilizando Geogebra evidencia que las habilidades técnicas requeridas para usar softwares y resolver una tarea matemática están estrechamente vinculadas con la comprensión conceptual de la noción de función. Además, los profesores en formación reconocen que el uso de las tecnologías les da libertad para experimentar nuevas nociones y establecer conjeturas.

Font y Acevedo (2003), aun cuando no estudian directamente las concepciones de los profesores, establecen cómo éstos tienen la creencia de que el uso de metáforas dinámicas en su discurso facilita la comprensión de los estudiantes sobre funciones.

> Las metáforas se caracterizan por crear un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se trasladen una serie de características y estructuras. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultar otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Otra de las funciones que cumple la metáfora es la de conectar diferentes sentidos y, por tanto, ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto matemático. (Acevedo y Font, 2004, p. 156)

Sin embargo, los profesores creen que los efectos en la comprensión de los estudiantes cuando se utilizan metáforas son inocuos; contrariamente a lo que cree el profesor, los estudiantes estructuran su conocimiento sobre las funciones en los términos metafóricos que ha utilizado el profesor de manera inconsciente (Acevedo, Font y Giménez, 2004). La representación de diversas situaciones muchas veces está influenciada por el uso de metáforas como la forma en que intentamos explicar o bien conceptualizar aquello que nos parece abstracto y que requerimos visualizar de manera tangible. Las investigaciones sobre el pensamiento metafórico han identificado diferentes clases de metáforas. Una de ellas es 'una función es una máquina'. Algunos textos escolares chilenos introducen por primera vez la noción de función mediante la siguiente definición, "Una función es una relación que asigna a cada valor de la variable independiente x un solo valor de la variable y. Opera según una regla para producir exactamente un valor de salida por un valor de entrada" (Bennett et al., 2014, p. 206). Dicha definición se establece sobre la base de la clásica metáfora de la 'máquina' que produce un 'único' valor de salida para cada valor de entrada, la que es presentada de manera muy sucinta previa a dicha definición. Mesa (2004), explicita que los profesores tienden a privilegiar la metáfora de la máquina para ilustrar un proceso de transformación, esto por sobre definiciones que utilicen términos como el de relación, correspondencia, etc. Font (2000, citado en Acevedo y Font, 2004) señala:

> Las gráficas se han estructurado históricamente a partir de las siguientes metáforas: a) Las curvas son secciones b) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones c) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y el análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva. d) La gráfica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$. (p. 157)

Cabe destacar que las gráficas de relaciones funcionales se expresaban hasta la aritmetización del análisis como trayectorias de un punto en movimiento. Esto se evidencia en la obra de Newton donde se hace mención"a un punto que se mueve sobre una parábola, una hipérbola, etc. Sin embargo, a partir de los trabajos, de Fourier, Cauchy y Dirichlet, entre otros se aceptaron, como gráficas de funciones, curvas que no podían ser trayectorias" (Font y Acevedo, 2003, p. 408). En este sentido, se observa en los procesos de enseñanza-aprendizaje sobre funciones el uso de metáforas como:

> las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y el análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva o bien una variación de esta metáfora: La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica, está presente en frases como 'viene por aquí', 'pasa por cero cero', etc.". (Font y Acevedo, 2003, p. 412)

Es decir, el profesor ha explicado algo estático en términos dinámicos, lo que supone una metáfora que no tiene controlada, y no es consciente de sus consecuencias. Esto evidencia que con la intención de facilitar la atención y comprensión del objeto matemático el profesor presenta la gráfica en términos dinámicos generando un obstáculo didáctico como por ejemplo, tener la creencia que un punto se mueve. Actualmente hay graficadores informáticos y calculadoras gráficas cuyo uso conlleva entender la gráfica como la trayectoria de un punto. En este mismo sentido, Font y Acevedo (2003) manifiestan:

> Los profesores no son conscientes del uso de metáforas, algunos tienen la creencia que su uso no genera errores conceptuales más bien facilita la comprensión, por tanto, no las controlan y no perciben que algunos estudiantes podrían conceptualizar situaciones de una manera incorrecta dada la imprecisión de dicha metáfora. Sin duda, mediante la metáfora estructuramos una situación en términos de otra, y se corre el peligro de trasladar aspectos del dominio de partida que no son aplicables en el dominio de llegada. Por ejemplo, suponer que "una gráfica es la traza de un punto que se mueve como un objeto" puede facilitar que algunos alumnos entiendan que la gráfica es como un auto, siempre el mismo, que se mueve sobre una carretera, en lugar de considerar la gráfica como una carretera formada por un conjunto de puntos diferentes. (p. 414)

De acuerdo con Font y Acevedo (2003), el uso de metáforas dinámicas tiene sus ventajas y sus inconvenientes. La sugerencia no es renunciar a ellas, sino que el objetivo ha de ser un uso controlado, siendo conscientes de que no todo son ventajas. Por otra parte, según Iaderosa y Malara (2001, citado en Figueiredo, Contreras y Blanco, 2015) en Italia la noción de función se introduce utilizando fenómenos físicos sencillos, que permiten identificar relaciones funcionales representadas algebraicamente. Sin embargo, en cursos más avanzados la noción de función es tratada como una correspondencia arbitraria unívoca entre elementos de dos conjuntos. Esto permite inferir que el estudio de este objeto matemático puede efectuarse de manera similar a su evolución histórica.

Según Tassara Detzel y Ruiz (2004), una manera de dar sentido a la noción de función es que en la resolución de problemas aparezca como la herramienta más adecuada para llegar a la solución. Además, "considerar para su enseñanza aquellas situaciones en la que las funciones sirvan de modelo para el estudio del comportamiento de un fenómeno y aquellas en las que las funciones permitan expresar la dependencia entre las variables" (Ibíd., p. 40). Es importante tener en consideración que luego de este tratamiento es fundamental estudiar las funciones desde un contexto puramente matemático donde se presenten sus propiedades y relación con otros objetos matemáticos.

Los ejemplos tienen un papel preponderante en el aprendizaje, Zaslavsky, Harel y Manaster (2006, citado en Figueiredo, Contreras y Blanco, 2012) evidencian que en la práctica docente, la selección y uso de ejemplos permite describir la relación que existe entre el conocimiento base del profesor y el conocimiento que adquieren sus estudiantes a partir de las actividades ejemplificadoras propuestas. Según Rowland et al. (2003; 2005, citado en Figueiredo, Contreras y Blanco, 2012) los profesores noveles manifiestan especiales dificultades en la elección y secuenciación de ejemplos. Figueiredo, Contreras y Blanco (2012, p. 83-89) proponen un sistema de categorías para diferenciar las características de los ejemplos utilizados por profesores cuando enseñan la noción de función. Estas categorías se definen como:

- *Definición/Presentación*: Son los ejemplos que se presentan a los estudiantes inmediatamente después de presentar la definición, un procedimiento, o enunciar un teorema, pasando de una situación general, que es la definición, procedimiento o enunciado, a situaciones concretas del concepto. Los ejemplos del concepto de función pueden presentarse en cualquiera de sus representaciones; gráfica, numérica y algebraica, que suelen ser las principales, pero no las únicas. La representación escogida será aquella que responda a los objetivos asumidos, por eso puede ser un ejemplo puramente matemático, configurar una situación de la vida real o de otra ciencia. Es decir, los ejemplos inicialmente propuestos, suponen un primer contacto con el concepto para mostrar o sugerir aspectos generales y fundamentales del concepto de función. En esta fase, es aconsejable presentar contraejemplos básicos, necesarios para la exclusión de aquellos casos que puedan inducir falsas generalizaciones o conducir a errores en la conceptualización. *Ejemplo: describir la función compuesta mediante una representación icónica (diagramas sagitales).*

- *Abordaje Inicial Autónomo*: Después del primer acercamiento al concepto y a características fundamentales, surgen los primeros ejercicios típicos de aplicación del procedimiento o las primeras situaciones problemáticas que incluyen el concepto o teorema. Una de las diferencias entre estos ejemplos y los de la primera categoría reside en el hecho de que la autonomía del estudiante en relación con el ejemplo deberá ser mayor, el papel del profesor deberá ser menos activo, a fin de promover una mayor participación del estudiante. En el caso del concepto de función, los ejemplos deben permitir a los estudiantes tomar conciencia de las distintas perspectivas desde las que puede establecerse relación entre dos cantidades. Con estos ejemplos se pretende que el estudiante, en situaciones específicas, afronte las primeras preguntas, las primeras dudas sobre los procedimientos y solicite aclaraciones. Estos ejemplos ya promueven una actitud más inquisitiva por parte del estudiante, fomentan su curiosidad, con la ventaja de que son situaciones fáciles de tratar. *Ejemplo: Calcule los valores de x para los que se anula la función* $0{,}2x - 8 = a(x)$.

- *Clarificación y profundización*: Ejemplos de este tipo surgen después de la fase exploratoria del concepto de función, cuando los estudiantes emprenden la tarea de profundizar en él, en sus diversas representaciones y descubrir sus peculiaridades. Los ejemplos de esta categoría son la respuesta a aquellas situaciones de dificultad que deberían ser esperadas por los docentes. Los profesores con experiencia deberían preverlas con más facilidad y salir airosos de estas situaciones de contingencia. Los ejemplos dedicados a las situaciones de duda de los estudiantes pueden presentarse antes que la dificultad surja, pero la presentación, calidad del ejemplo o número de ejemplos empleados dependen de la capacidad de previsión, experiencia y originalidad del profesor y a veces suponen una transformación de ejemplos previstos para adaptarlos a la circunstancia sobrevenida. Dependiendo del concepto, los ejemplos podrían ser menos planeados y más espontáneos o, si son planeados, están sujetos a alguna modificación que se muestre necesaria. Así, los ejemplos pueden presentar un aspecto formal o presentarse en forma de contraejemplo, analogía, metáfora, colección de ejemplos, cadena lógica de implicaciones, etcétera. Como se puede ver, son ejemplos que, aunque sean elegidos, pretenden, por un lado, clarificar y ampliar las características cognoscibles del concepto y por otro, eliminar las dudas y obviar situaciones de confusión. *Ejemplo:* La ilustración de un caso de correspondencia que no verifica la definición de función y que se presenta mediante una representación gráfica (ver figura 1.8).

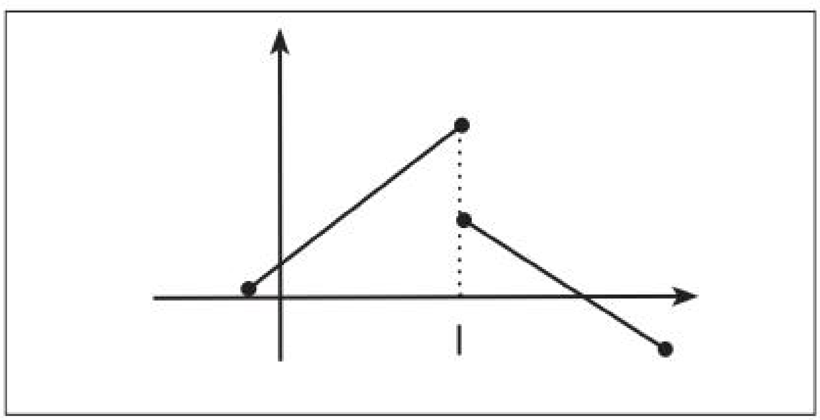


Figura 1.8. Ejemplo categoría clarificación y profundización. (Figueiredo et al., 2012, p. 87)

- *Aplicaciones Internas*: Las aplicaciones internas son una forma de ejemplificar y lograr mayor profundización del concepto y del tipo de función en estudio. Estas aplicaciones pueden incluir contenidos o conceptos enseñados anteriormente o relacionarse con otros que serán enseñados posteriormente. El tratamiento de las situaciones que envuelvan este tipo de ejemplos requiere un mayor grado de profundización en el concepto, de refinamiento de sus características esenciales (Skemp, 1979) por parte del estudiante, permitiendo la interpretación e interacción con la situación o bien en el caso de ser un problema, su resolución. Surgen al final de un proceso que deberá integrar todas las herramientas necesarias para la aplicación del concepto en una situación matemática cualquiera en la que figure el concepto de función. Su propósito es dinamizar la profundización del concepto y las diversas formas con que pueda ser representado y obligan al estudiante a utilizar todos los recursos disponibles sobre el concepto y sus articulaciones con otros conceptos. Son ejemplos que, por su complejidad, no pueden ser presentados oralmente; son presentados de forma escrita para que su interpretación y análisis se pueda hacer repetidamente, si es necesario. *Ejemplo:* (ver figura1.9)

Considere la función . $h(x) = x^3 - 12x$

a) Determine la función derivada de h. Represente gráficamente la función derivada.
b) De acuerdo con lo que observa en el gráfico, complete la tabla, y retire sus conclusiones.

	$-\infty$				$+\infty$
x					
Signo de $h'(x)$					
Variación y Extremos de $h(x)$					

c) Esboce el gráfico de h y verifique sus conclusiones.

Figura 1.9. Ejemplo categoría aplicaciones internas. (Figueiredo et al., 2012, p. 88)

- *Aplicaciones Externas*: Estos ejemplos son de aplicación a la vida real y a otras ciencias. El tipo de ejemplos de esta categoría es similar a los de la categoría anterior, solo difieren en su ámbito de aplicación. Son ejemplos que pueden configurar ejercicios o problemas, pero pertenecen a esta categoría porque implican un mayor grado de dificultad. Surgen como aplicación efectiva y global del concepto en relación con una situación determinada que obliga al estudiante a poner en perspectiva sus conocimientos desde diversos ángulos y mostrar su capacidad para encuadrarlo en una representación de las funciones. De igual modo que en los ejemplos de la cuarta categoría, el objetivo de estos es permitir profundizar en el concepto y las diversas representaciones que presenta. Sin embargo, por ser de aplicación a otras disciplinas y a la vida real, eso solamente acontece cuando el grado de refinamiento del concepto incluye la flexibilidad en su utilización. *Ejemplo:* (ver figura 1.10)

Durante varias semanas Tráfico viene pesquisando la velocidad del tráfico en una autovía.

Se verificó que en un día normal de la semana, entre las 13 horas y las 18 horas, la velocidad del tráfico es de, aproximadamente $v\ (t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 40\ km/h$, donde t es el número de horas transcurridas después del mediodía.

¿A que horas, dentro del intervalo de tiempo mencionado, el tráfico se mueve más rápidamente? ¿Y a que horas se mueve más lentamente?

Figura 1.10. Ejemplo categoría aplicaciones externas. (Figueiredo et al., 2012, p. 88)

1.6. Estudios sobre los significados pretendidos por el currículo

Tassara, Detzel y Ruiz (2004), identifican cómo la noción de función ha sido presentada en libros de texto de principios de los años 90 y en textos actuales. Si bien concluyen que existen cambios en cómo se afronta este objeto matemático transitando de textos cuya estructura se basa en la enseñanza tradicional, es decir, a partir de diagramas, con una definición basada en la idea de correspondencia entre conjuntos, con actividades apoyadas en procesos mecánicos y algorítmicos referidos a objetos parciales en que se ha 'dividido' la noción de función (dominio, fórmulas, elementos de sus representaciones gráficas) a libros actuales donde se destaca la importancia de la unicidad, en otros la idea de la fórmula, otros dan sus explicaciones en torno a la relación entre magnitudes y finalmente aquellos en que las funciones son presentadas a partir de situaciones familiares para los estudiantes.

De acuerdo con Nitsch, et al. (2013), transitar por las distintas representaciones (gráficas, numéricas, situacionales y algebraicas) de la noción de función es fundamental para determinar la competencia de los estudiantes. Es importante destacar que los procesos de conversión no es un trabajo unidimensional, es decir, existe diferencia si una tarea requiere transitar desde una representación gráfica a una algebraica o bien desde una representación gráfica a una descripción situacional. Según Nitsch et al. (2013) es esencial considerar en las clases de matemática sobre funciones conversiones desde una representación gráfica a una algebraica; desde una gráfica a la tabla numérica; desde una gráfica a la descripción situacional; desde la tabla numérica a la algébrica y desde una descripción situacional a la algebraica. Asimismo, explicitan que los estudiantes deben estar familiarizados con estas conversiones para desarrollar habilidades amplias en el campo de las relaciones funcionales. Para lograr estas competencias, las diversas representaciones de la noción de función deben ser presentadas (igualmente distribuidas) en los libros de texto y las tareas propuestas deben contemplar la conversión de las distintas representaciones. Es fundamental que al momento de diseñar el currículo de matemáticas se tenga en consideración estos aspectos.

Deulofeu (2001), la noción de función en ocasiones es presentada como un objeto matemático que no guarda relación con otros previamente trabajados, esta es una apreciación que se tiene cuando se analizan diversos textos escolares y cuando se constata, por ejemplo, que al introducir el estudio de la función lineal, la relación con problemas de proporcionalidad, contenido tratado generalmente con anterioridad, muchas veces es escasa cuando no inexistente. Conforme con lo señalado por Deulofeu (2001):

> La comprensión de la noción de función lineal pasa por una correcta interpretación de la idea de pendiente en los distintos lenguajes de representación de dicha función (tabla, gráfico, fórmula), y la relación entre los mismos, pero no podemos olvidar que dicho concepto fue interpretado y utilizado anteriormente por los estudiantes, como la constante o la razón de proporcionalidad en la resolución de problemas aritméticos y geométricos. Sin esta relación, la comprensión del modelo es incompleta (acaso inútil) y con ella, no sólo completamos la idea de proporcionalidad, un concepto clave de las matemáticas de la educación secundaria, sino que, además, mostramos la relación entre unas situaciones resueltas con anterioridad. (p. 371)

De acuerdo con Deulofeu (2001, p. 371) es imprescindible vincular distintos objetos matemáticos que están relacionados, esto fundamentalmente por cuatro motivos:

- Para mostrar una concepción unitaria de las Matemáticas, que permita relacionar problemas y conceptos aparentemente dispares (¿cómo relacionaremos las matemáticas con otras ciencias si separamos distintas partes de las matemáticas y no las relacionamos entre sí?).
- Para desarrollar competencias básicas generales a través de actividades de aprendizaje propias de la noción de función pero que también es posible desarrollar desde otras nociones matemáticas tratadas con anterioridad.
- Para consolidar conceptos y procesos de la aritmética, la geometría o la medida que, a diferencia de ciertos aspectos funcionales tratados a nivel de introducción, deberían quedar plenamente adquiridos al finalizar la ESO.
- Para utilizar situaciones y problemas de la aritmética, la geometría o la medida, ya conocidos por los estudiantes, como uno de los puntos de partida para el trabajo con funciones.

La Educación Matemática, es considerada una actividad social que requiere ser transmitida a cada generación. La matemática es una herramienta intelectual útil que ofrece una multiplicidad de opciones para resolver situaciones que se suscitan en el mundo actual. Diversas investigaciones interesadas por estudiar el currículo de matemáticas, la difusión de innovaciones y la relación entre la matemática y contextos culturales han caracterizado el momento actual del currículo de matemáticas dentro del sistema educativo en los países avanzados o en vías de desarrollo. Esta consideración global tiene su especificidad en cada país, pero presenta aspectos comunes a nivel internacional. Según Rico (1995, p. 6), en los últimos años la comunidad docente ha ido decantando una nueva visión de las matemáticas escolares basada en:

- La aceptación de que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento.
- La necesaria consideración instrumental del conocimiento matemático desde un punto de vista cognitivo, donde se interpretan los conceptos y estructuras matemáticas como herramientas mediante las que se realizan determinadas funciones y se ponen en práctica determinadas competencias.
- El reconocimiento de que un núcleo importante de conceptos y procedimientos de las matemáticas forman parte del bagaje de conocimientos básicos que debe dominar el ciudadano medio; por ello las matemáticas no pueden ser un filtro sino un elemento de promoción y homologación de los estudiantes.
- La consideración de los procesos constructivos y de la interacción social en el aprendizaje del conocimiento matemático, en la creación de los sistemas de símbolos y estructuras significativas a los que denominamos matemáticas.
- La necesidad de incorporar, buscar e implementar nuevas tecnologías que pongan a jóvenes y niños en contacto con los aspectos más avanzados de la sociedad y les preparen para desenvolverse en un mundo cambiante.
- La visión activa de la enseñanza, en la que la manipulación de objetos y la elaboración de modelos constituyan una etapa obligada en la adquisición y dominio de los conceptos; al mismo tiempo, una enseñanza menos dirigista y más centrada en la creatividad, el aprendizaje interactivo, la resolución de problemas y la valoración crítica de las decisiones.

En Chile el currículo nacional se estructura en un Marco Curricular y en instrumentos curriculares que lo operacionalizan. Estos documentos tienen diversos propósitos, cada uno conducente a alcanzar los aprendizajes que se definen en el Marco Curricular.

> El Marco Curricular define el aprendizaje que se espera que todos los estudiantes del país desarrollen a lo largo de su trayectoria escolar, tiene un carácter obligatorio y es el referente en base al que se construyen los planes de estudio, los programas de estudio, los mapas de progreso, los textos escolares y se elabora la prueba SIMCE (Sistema de medición de calidad de la educación). Los planes de estudio definen la organización del tiempo de cada nivel escolar, consignan las actividades curriculares que los estudiantes deben cursar y el tiempo semanal que se les dedica. Los programas de estudio entregan una organización didáctica del año escolar para el logro de los objetivos fundamentales definidos en el Marco Curricular (Mineduc, 2009, p. 5-6).

En los *Programas de Estudio* propuestos por el Ministerio de Educación chileno, se definen aprendizajes esperados y objetivos de aprendizaje acotados en el tiempo. Además, se presentan actividades de enseñanza y orientaciones metodológicas y de evaluación flexibles para orientar la labor docente. Los *Mapas de Progreso* describen la progresión de las competencias que deben adquirir los estudiantes en cada sector curricular y constituyen un marco de referencia para evaluar el aprendizaje promovido por el marco curricular (Mineduc, 2009). En Chile, "los niveles de logro del Sistema Nacional de Evaluación de Resultados de Aprendizaje (SIMCE) son descripciones de los desempeños que exhiben estudiantes en los sectores curriculares que al final de cada ciclo escolar se evalúan". (Mineduc, 2009, p. 5-6)

De acuerdo con Braga y Belver (2016), los libros de texto representan un instrumento regulador del diseño y desarrollo del currículo escolar. Si bien en la actualidad se han incorporado nuevos recursos producto del avance y desarrollo de las TIC, el libro de texto sigue siendo uno de los recursos más utilizados por los profesores para el diseño y planificación de sus clases.

> En Chile, *los Textos Escolares* desarrollan los contenidos definidos en el Marco Curricular para apoyar el trabajo de los estudiantes en el aula y fuera de ella, y les entregan explicaciones y actividades para favorecer su aprendizaje y su autoevaluación. Para los profesores los textos constituyen una propuesta metodológica para apoyar la implementación del currículum en el aula, y los orientan sobre la extensión y profundidad con que pueden ser abordados los contenidos del Marco Curricular. (Mineduc, 2009, p. 5-6)

Estudios sobre la representatividad de los significados pretendidos por el currículo escolar sobre la noción de función respecto del significado holístico de referencia, es de suma importancia, puesto que una 'adecuación pobre' del significado global en la enseñanza, podría obstaculizar la correcta comprensión del objeto. Como señalan Godino y Batanero (1994), los significados logrados (aprendidos) por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados. En el trabajo desarrollado por Parra-Urrea (2015) se explicita:

> la noción de función presentada por el currículo chileno, se basa fundamentalmente en su acepción de relación entre magnitudes variables y en un significado de función que progresivamente se acerca a la definición de función a partir de la teoría conjuntista. Con menor protagonismo y/o precisión se ha verificado que a lo largo del currículo chileno la noción de función adquiere otros significados, entre ellos, la función como correspondencia, como expresión analítica y como expresión gráfica. Al efectuar el análisis curricular que centra la atención en los significados pretendidos respecto del significado holístico de la función, se ha constatado que en los libros de texto no se explicita la función como correspondencia arbitraria. Esto provoca según Vinner (1992) que una de las concepciones que los estudiantes poseen respecto a la noción de función sea: la correspondencia que constituye la función debe ser establecida por una regla con sus propias regularidades. Así, la correspondencia arbitraria no es considerada por los estudiantes como una relación funcional. (p. 143-144)

Esto evidencia que pese a las recomendaciones realizadas desde el campo de investigación en didáctica de la matemática, el currículo chileno contempla el estudio de la noción de función solo desde algunos de los significados parciales que constituyen el significado holístico. Cabe destacar, que estos significados parciales surgen de la necesidad de responder a situaciones ligadas a fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables y al propósito de fundamentar rigurosamente el análisis funcional establecido sobre los trabajos de Cantor a fines del siglo XIX. Tall (1992) establece la conveniencia de que, en lugar de comenzar con la definición del concepto, la que puede contener palabras o nociones no familiares para el estudiante, se intente hallar una aproximación para construirla sobre conceptos que jueguen el doble papel, ser inicialmente familiares para el estudiante y a su vez lo proveer de una base para el desarrollo matemático. Asimismo, es fundamental transitar por los distintos significados parciales asociados a las funciones para lograr una aprehensión significativa de dicho objeto matemático.

Sin duda, el análisis de los libros de texto es fundamental debido a la importancia que estos adquieren para los profesores en la implementación de clases. La dependencia que los docentes establecen con los libros de texto, ha sido indagada por Nathan y Koedinger (2000), quienes manifiestan, "Es razonable suponer que el uso de los libros de texto en la estructuración diaria de las lecciones de clase, tareas semanales y la secuencia curricular anual, lleva a los profesores a internalizar la imagen de las matemáticas que implícitamente transmiten" (p. 228).

Por su parte, el trabajo de Cooney (1985) reveló que los libros de texto son la influencia primaria para las concepciones curriculares de los profesores, así como para su estilo de presentación en la clase. Adicionalmente, Love y Pimm (1996) señalan, "El libro es todavía, en gran medida, la tecnología más extendida y usada en las clases de matemáticas. Debido a su ubicuidad el libro de texto ha moldeado nuestra noción de la matemática y como debe enseñarse" (p. 402).

Según Watson y Harel (2013), la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Estados Unidos depende en gran medida de los libros de texto. La noción de función es presentada en los textos escolares de manera abrupta, sin actividades que promuevan la motivación por el estudio de dicho objeto matemático. Además, no se enfatiza cómo cada una de las definiciones que se exhiben están relacionadas. En cuanto a las actividades, prevalecen tareas que involucran mayoritariamente el uso de representaciones algebraicas por sobre las tabulares y gráficas. Los teoremas fundamentales sobre funciones lineales y cuadráticas no se presentan debidamente justificadas, esto incluye proposiciones importantes, tales como: 'Una línea en el plano está representada por una función lineal y la gráfica de una ecuación lineal es una línea'; 'La gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ es simétrica y la forma de su gráfica está determinada por los coeficientes a, b y c'. Estos teoremas a menudo se demuestran empíricamente sin justificación teórica.

En Reino Unido la mayoría de los libros de texto están estrechamente vinculados a los requisitos de evaluación y exhiben características similares a los de Estados Unidos. Sin embargo, la asociación entre la noción de función con la de relación matemática es menos frecuente. En cuanto al tipo de actividades, introducen las funciones en el contexto de modelar situaciones reales. Además, el contenido matemático se rige y ordena de acuerdo con el plan de estudios nacional. En este período, el currículo de Reino Unido explicita que estudiantes entre 11 y 14 años deben aprender sobre gráficas, secuencias y funciones polinomiales basadas en reglas y relaciones simples. Luego de los 14 a 16 años los estudiantes deben tener alguna experiencia con gráficas de funciones exponenciales y trigonométricas y también con la transformación de funciones. Después de eso, las funciones surgen ampliamente en la trigonometría y el cálculo temprano, y el lenguaje utilizado permite distinguir las funciones de sus representaciones. Las funciones como un tema de estudio formal y abstracto se incluye solo para jóvenes de 17 a 18 años que se especializan en matemáticas.

Cabe destacar, que en algunos libros de texto de la fase pre-especialista evitan la palabra función y hablan solo de ecuaciones, gráficas y relaciones, a excepción de funciones particulares como las funciones exponenciales o trigonométricas. Otros introducen la palabra función mucho antes y la usan en el contexto de gráficos, generalizaciones algebraicas, uso de diagramas, para relacionar, por ejemplo, ecuaciones con funciones etc. Los profesores del Reino Unido suelen utilizar los libros de texto con cierta flexibilidad y representan uno de los muchos recursos que disponen para el desarrollo de sus procesos de instrucción (Watson y Harel, 2013).

Yavuz y Baştürk (2011), pretenden revelar cómo se presenta la noción de función en libros de texto franceses y turcos. Esto dado que, en muchos países, los libros de texto son una de las principales herramientas utilizadas en los procesos de enseñanza-aprendizaje. A partir del estudio, se constata que la organización metodológica para afrontar la enseñanza de la noción de función sugerida por los dos países es muy diferente. Si bien los libros de texto franceses brindan información detallada sobre las representaciones asociadas a dicho objeto matemático y presentan diversas situaciones-problemas, esto no ocurre en los libros de texto turcos, aquí predominan problemas matemáticos clásicos sobre funciones. Asimismo, se verificó que los procedimientos para resolver los problemas propuestos se expresan en detalle en los libros de texto franceses. Sin embargo, en los libros de texto turcos no se presentan procedimientos para ejemplificar la resolución de actividades propuestas que permita a los estudiantes comparar o comprobar si el procedimiento utilizado es adecuado o no. En general las ejemplificaciones y explicaciones quedan a cargo del profesor. Otro aspecto relevante, es que los libros de texto franceses incluyen conceptos como: creciente, decreciente etc. cuando se introduce la noción de función, mientras que en los textos turcos se abordan luego de afrontar la enseñanza de la noción de derivada. De este modo, se concluye que sería más apropiado abordar la noción de función según se describe en el programa francés pues se considera que su organización es matemáticamente más rica.

Wang, Barmby y Bolden (2015) realizan una comparación de las tareas matemáticas relativas a la noción de función lineal propuestas por libros de texto en Inglaterra y Shanghai. Luego del análisis se constata que ambos países tienen enfoques diferentes. Es decir, los planes de estudio y libros de texto utilizados en las escuelas de Inglaterra prefieren el enfoque gráfico y algebraico de las funciones basado en la visualización de entrada-salida. En contraste, el plan de estudio y libros de texto de Shangai adoptan el enfoque de ecuación algebraica para describir la covariación entre dos variables. Sin duda, adquirir el significado de la representación simbólica de las funciones permite a los estudiantes de Shangai avanzar hacia una comprensión más abstracta de dicho objeto matemático. Sin embargo, moverse rápidamente hacia el uso de estas representaciones podría generar que los estudiantes se centren en procedimientos algorítmicos. Por lo tanto, la sugerencia dada por los autores, es incorporar en los libros de texto de Shangai más representaciones gráficas para lograr mayor comprensión de las funciones.

La comprensión del objeto matemático función, requiere una diversidad de representaciones. Estas dan sentido al objeto matemático y al ser de distinta naturaleza permiten describir los diferentes aspectos del objeto que representa (Duval, 2002). Según Parra-Urrea (2015) los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos en los textos escolares chilenos, mayoritariamente requieren de la activación de representaciones simbólicas, verbales y gráficas. Usualmente se presenta la relación funcional mediante expresiones verbales para posteriormente dar respuestas bajo expresiones simbólicas y/o gráficas de la función.

Orton (1983, citado en Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013) señala que una aproximación inicial 'informal' a los conceptos del cálculo, debe involucrar exploraciones numéricas y gráficas. Esto no se evidencia en la exploración realizada en los libros de texto chilenos pues en la aproximación inicial a la noción de función (en el nivel educativo de octavo básico), predominan fuertemente representaciones de tipo simbólicas y no se evidencian tareas donde la función sea planteada desde su representación gráfica.

Según Nyikahadzoyi (2013) diferentes asociaciones de matemáticos y movimientos de reforma hicieron eco de la necesidad de hacer del concepto de función uno de los temas centrales del currículo de matemáticas. Por ejemplo, la Asociación Americana de Matemáticas, recomendó que las funciones sea uno de los temas centrales de los estándares. En 1967, la Conferencia de Cambridge sobre el Aprendizaje de las Matemáticas en las escuelas recomendó encarecidamente que el concepto de una función forme parte del plan de estudios, ya que se considera útil para organizar el material a enseñar (Ponte, 1984). Asimismo, el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (1989) enfatizó la importancia del concepto de una función como el principio unificador en el desarrollo del currículo de matemáticas secundarias.

1.7. Microenseñanza: Una aproximación a la práctica docente

En la actualidad, los programas de formación de profesores pretenden desarrollar la habilidad pedagógica interactiva mayoritariamente a partir de experiencias de campo, un componente de la educación profesional sobre el que se tiene menor control. De acuerdo con Fernández (2010) es fundamental buscar experiencias que proporcione a los profesores en formación la posibilidad de interactuar y explorar en contextos compartidos (simulados y reales) posibles problemas pedagógicos que conlleven a la reflexión y al análisis crítico de los procesos de enseñanza aprendizaje. Dewey (1965) propone que, en lugar de proporcionar una práctica extensiva en aulas típicas, la preparación del profesor debería crear oportunidades intensas y enfocadas de experimentación (simulaciones de procesos de enseñanza-aprendizaje) que permitan ensayar, aprender y desarrollar componentes discretos de práctica compleja en entornos de complejidad reducida.

Grossman et al., (2009) se refiere a las 'aproximaciones a la práctica' en la educación profesional, instancia que permite a los profesores en formación múltiples oportunidades para involucrarse en la planificación simulada (planificación de lecciones, planificación de unidades, planificación para la gestión de aula) y para explicar nociones matemáticas recibiendo comentarios inmediatos sobre su desempeño. Más recientemente la investigación relativa a las 'aproximaciones a la práctica' se le conoce como microenseñanza.

Según Mergler y Tangen (2010) los contextos de microenseñanza permiten planificar y llevar a cabo un proceso de instrucción matemática a un grupo de profesores en formación que cumplen el rol de estudiantes. De este modo, los futuros profesores pueden identificar la complejidad de la enseñanza estableciendo una conexión entre la teoría y la práctica, además participan en el proceso de retroalimentación y autorreflexión del proceso. Al observar lo que hacen los demás, los profesores en formación pueden reflexionar sobre cómo ejecutarán sus propias clases. De acuerdo con Woolfolk Hoy y Burke Spero (2005, citado en Mergler y Tangen, 2010)

> Ver a otro demostrar una habilidad requerida (como la enseñanza) es participar en una experiencia de aprendizaje indirecta. Los profesores en formación deben estar expuestos a otras personas calificadas que puedan modelar el 'desempeño' de la enseñanza con un alto nivel. Sin embargo, simplemente ver la enseñanza no es suficiente para dar como resultado un aprendizaje significativo. Ser capaz de practicar la tarea contribuye a dominar las habilidades necesarias. La retroalimentación que los profesores en formación reciben sobre su enseñanza también juega un papel importante en el refuerzo (o reducción) de su eficacia. Este tipo de experiencias permite a los futuros profesores reflexionar sobre su desempeño y determinar los aspectos mediante los que se logra una enseñanza efectiva. (p. 200)

Diversos estudios (e.g., Benton-Kupper 2001; Erökten y Durkan, 2009; Fernández, 2010; Mergler y Tangen, 2010; Donnelly y Fitzmaurice, 2011; Altuk, Kaya y Bahceci, 2012; Arsal, 2014) se han referido a los beneficios de la microenseñanza en los procesos de formación docente. Entre ellos, que permite un entorno de enseñanza seguro y controlado reduciendo la complejidad que se da en situaciones de enseñanza real; los profesores en formación pueden experimentar un proceso de enseñanza-aprendizaje basado en la colaboración, el diálogo y la discusión entre pares logrando, según Brookfield (1995), reflexión crítica. Además, se potencia la autoconciencia, confianza, experiencia y reafirmación de sus habilidades de enseñanza y desempeño docente. Así, la microenseñanza permite a los futuros profesores percibir ampliamente su desempeño y el de otros profesores en formación mediante el análisis, retroalimentación y reflexión de las experiencias.

1.8. Una aproximación al problema de investigación

Como hemos evidenciado a lo largo de este capítulo, el análisis y reflexión de las prácticas docentes es una de las problemáticas que ha desatado gran interés en la educación matemática. Diversos estudios han reportado una variedad de dificultades en los procesos de instrucción matemática, impidiendo a los estudiantes apropiarse, comprender y dar significado a la noción de función.

Norman (1992), constata que los profesores poseen dificultades en la conceptualización de las funciones, es decir, aprueban definiciones informales del objeto consideradas como útiles para determinar la funcionalidad de las relaciones y las perciben como definiciones matemáticamente formales, en general solo identifican ejemplos estándares de funciones y poseen dificultades identificando situaciones físicas que representan relaciones funcionales. En este mismo sentido, Even (1993) se refiere a la interrelación entre el conocimiento del contenido y el conocimiento de contenido pedagógico de los profesores, esto en relación con dos rasgos esenciales de la noción de función: arbitrariedad y univalencia. En su análisis se prueba que la apreciación de la naturaleza arbitraria de las funciones está ausente y muy pocos profesores pueden explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia. Esta concepción limitada de función no permite en los estudiantes la aprehensión significativa del objeto matemático.

Los profesores optan por dar a los estudiantes reglas para seguirlas sin considerar actividades que conlleven a la comprensión profunda del objeto matemático (Vinner, 1983). Por su parte Wilson (1994) examina los conocimientos y creencias de profesores de matemáticas en formación. En su estudio percibe que la idea de los profesores con respecto a la noción de función es consistente con la concepción que poseen sobre las matemáticas, disciplina entendida como la colección de procedimientos concretos para ser aplicados en contextos aislados que proporcionan respuestas correctas a problemas bien definidos. Asimismo, los profesores demostraron una comprensión débil de las relaciones entre diversas representaciones y procedimientos de las funciones. En cuanto a la utilidad del objeto matemático función, los docentes manifestaron poca apreciación por el uso de las funciones y el conocimiento que se tenía en esta área era limitado y fragmentado.

El tratamiento de los ejemplos utilizados por los docentes en el aula permite identificar aspectos significativos de su conocimiento base pedagógico y matemático que pueden apoyar o limitar el aprendizaje en sus estudiantes (Zaslvsky, 2006). En este mismo sentido, según Figueiredo, Contreras y Blanco (2012) la ejemplificación presentada por profesores en formación y profesores con más experiencia exhiben diferencias puntales, principalmente los profesores en formación en el desarrollo de sus clases presentan mayoritariamente ejemplos y/o ejercicios típicos que requieren el uso de procedimientos o la aplicación de teoremas, con ello los estudiantes aprenden algoritmos vistos como una herramienta de resolución. Por su parte, los docentes con mayor experiencia utilizan ejemplos que surgen posterior a la fase exploratoria de la noción de función, es decir, los estudiantes se enfrentan a la tarea de profundizar el concepto y sus diversas representaciones, son ejemplos que tienen por objetivo clarificar y ampliar las características cognoscibles de la noción de función, atender a las dudas de los estudiantes y evitar situaciones de confusión. Asimismo, se identificó que los profesores en formación comienzan la ejemplificación de la noción de función desde aspectos básicos del concepto hasta la aplicación del objeto matemático. Profesores con más experiencia presentan un esquema de ejemplificación circular, es decir, luego de definir y mostrar actividades típicas exhiben ejemplos de aplicación para promover la profundización conceptual que provocan situaciones de duda que se van esclareciendo, modificando o creando nuevos ejemplos que pueden transitar al uso de las diversas representaciones vinculadas a la noción de función y que permiten superar las situaciones de confusión.

Sánchez y Llinares (2003) en su investigación identificaron que cuatro profesores en formación difieren en las formas de conocer la noción de función, particularmente, consideran diferentes aspectos y representaciones de dicho objeto matemático. Dos de ellos destacan el aspecto operacional de las funciones y el modo algebraico de representación, además consideran las representaciones gráficas como un complemento de la representación algebraica, en consecuencia dan un papel prioritario a la representación algebraica. Por otro lado, los otros dos profesores incorporaron en el desarrollo de su enseñanza representaciones gráficas como un recurso para resolver problemas provenientes de situaciones reales. En cuanto a la conceptualización de la noción de función atribuyeron los conceptos de modelar y correspondencia. Por tanto, se admite que las formas de conocer la noción de función y aquellos elementos que se consideran importantes para el docente influyen en la organización de los contenidos, en los tipos de tareas y/o problemas seleccionados para la secuencia de enseñanza.

Vinner (1992) en su investigación explicita concepciones que estudiantes poseen con respecto a la noción de función entre ellas: 1) La correspondencia que constituye la función debe ser establecida por una regla con sus propias regularidades, es decir, no se considera una correspondencia arbitraria como función; 2) Un cambio en la variable independiente debe sistemáticamente reflejarse en la variable dependiente, por tanto una función constante no es tal, ya que $f(x) = 2$ no depende de x

y además no hay variación; 3) Una función debe tener un término algebraico, una fórmula o una ecuación. Es una manipulación realizada sobre la variable independiente para obtener la variable dependiente. Luego, una correspondencia funcional definida por trozos no es una función sino varias; 4) La gráfica de una función debe ser regular, y sin cambios bruscos. Cambios imprevistos en la gráfica indican que no es función; 5) Una función es una correspondencia uno a uno; entre otros. Este tipo de concepciones indican que los estudiantes no logran dar sentido, ni internalizar la noción matemática, generando dificultades en la aprehensión del objeto matemático función.

Según lo descrito por Figueiredo (2010) algunas interrogantes como ¿Qué entiende por función? conllevan a los estudiantes a proporcionar respuestas como "*Yo sé lo que es, pero no sé explicarlo*". Los profesores menos experimentados estiman que, al no conocer la definición, los estudiantes no estarán en condiciones de responder correctamente a situaciones que involucren la noción de función. Por el contrario, profesores más experimentados consideran que, aunque sin saber reproducir la definición de forma correcta, muchos estudiantes consiguen resolver de forma adecuada ejercicios y problemas sobre funciones. Sin embargo, esto no constituye una aprehensión significativa de la noción de función, más bien refiere a conocimientos de tipo procedimental, mecánico y algorítmico probablemente desprovisto de significado.

Conforme con lo expuesto por Font (2011), es fundamental que los profesores, además de conocer las características de las unidades didácticas formalistas (configuraciones epistémicas conjuntistas), sean conscientes de que, si bien actualmente no es usual encontrar una unidad didáctica sobre las funciones de tipo formalista, es muy habitual hallar unidades didácticas inspiradas en instrumentalismo y procesos mecánicos y algorítmicos. Estas unidades didácticas, refieren a una presentación descontextualizada de los conceptos y reglas matemáticas, en tanto que, los objetos matemáticos se aprenden con la práctica y no mediante un aprendizaje significativo. Por su parte, Ruiz (1998) citado en Jaimes (2012) concluye que "en los procesos de enseñanza no se promueve el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio, donde la función encontraría una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos" (p.30).

Sánchez y Llinares (2003) establecen la necesidad de que los programas de formación de profesores hagan hincapié en que el conocimiento del contenido integre las diferentes representaciones de los objetos matemáticos, además del conocimiento del contenido pedagógico que permite discernir sobre las problemáticas y dificultades relativas a los conceptos. De este modo, los futuros profesores podrán discutir y evaluar la pertinencia de las representaciones en la resolución de problemas matemáticos. Asimismo, la formación de profesores debe considerar oportunidades para que los futuros docentes diseñen tareas de aprendizaje, analicen el tipo de tareas que proponen y determinen qué estrategias metodológicas pueden emplear en el desarrollo de sus clases para alcanzar los objetivos de aprendizaje que se explicitan en el currículo escolar. Todo lo anterior, permite instancias de análisis y reflexión sobre la influencia que tiene el conocimiento del profesor en las decisiones para diseñar y desarrollar su práctica docente.

Godino, Wilhelmi y Bencomo (2006) explicitan que un conocimiento formal del objeto función, no es suficiente, el diseño de las tareas instruccionales y la implementación de una instrucción didáctico-matemática idónea requiere que el profesor posea un conocimiento profundo de los diversos significados de la noción de función. Por ello, conocer su evolución histórica, es decir, comprender el significado holístico del objeto, representa un conocimiento relevante para la enseñanza de las funciones ya que permite tener una visión más amplia sobre el objeto función (Font, 2011).

A partir de la exhaustiva revisión de literatura científica sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de la noción de función, nos cuestionamos ¿Cuál es el conocimiento didáctico matemático que requieren los profesores para la enseñanza de las funciones? ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que poseen profesores en formación sobre la noción de función? Estas interrogantes irán perfilando nuestro trabajo de investigación.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO, PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

2.1. Introducción

El presente capítulo está organizado en tres grandes apartados. En el primero de ellos presentamos las nociones teóricas del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Posteriormente en el segundo apartado se describen las herramientas de análisis elaboradas en el seno de marco teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática. Finalmente se establece la fundamentación teórica del planteamiento del problema, se presentan los objetivos, preguntas de investigación y se explicitan las distintas fases y actividades conducentes a la consecución de nuestros objetivos de investigación.

2.2. Conocimiento Didáctico Matemático (CDM)

Describir y caracterizar los conocimientos didácticos-matemáticos que los profesores deberían tener para gestionar eficazmente la enseñanza y garantizar el aprendizaje de sus estudiantes, ha sido una de las problemáticas de interés en la educación matemática. Diversos estudios se han interesado por dar respuestas a dichas problemáticas entre ellos (Shulman, 1987; Grossman, 1990; Ball 2000; Hill, Ball y Schilling, 2008; Schoenfeld y Kilpatrik, 2008; Mishra y Koehler, 2006). Aun cuando existen importantes avances en caracterizar el conocimiento que deberían tener los profesores para lograr que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea idóneo, Godino (2009) señala:

> Los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías muy generales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Esto permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos de los profesores de matemática. (p. 19)

En este sentido, Godino (2009) propone un sistema de categorías para el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas, denominado 'Conocimiento Didáctico-matemático' (CDM). Las categorías propuestas en dicho trabajo se relacionan con las herramientas de análisis descritas en el Enfoque Ontosemiótico (EOS), particularmente destaca dos tipos de herramientas: las facetas (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional) implicadas en los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática y los niveles de análisis (prácticas matemáticas y didácticas, configuración ontosemiótica, normas e idoneidad). Es decir, se consideran las diferentes herramientas teórico-metodológicas del EOS, para proporcionar un sistema de categorías y subcategorías de conocimiento que el profesor debe conocer, comprender y saber aplicar.

Diversos estudios (Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2015; Pino-Fan, Assis y Castro, 2015) se han interesado por refinar el sistema de categorías descrito inicialmente por Godino (2009), constituyendo así, el modelo de Conocimiento Didáctico Matemático (CDM). Este modelo plantea tres grandes dimensiones (Matemática; Didáctica; y Meta didáctico-matemática) para interpretar y caracterizar los conocimientos del profesor (Pino-Fan, Godino y Font, 2015). Cada dimensión considera subcategorías de conocimiento, que incluyen herramientas teóricas y metodológicas que permiten el análisis del conocimiento respecto a cada subcategoría. Además, estas dimensiones, con sus correspondientes herramientas de análisis, están involucradas en cada una de las fases propuestas para la elaboración de diseños instructivos: estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015).

2.2.1. Dimensión Matemática

Pino-Fan, Assis y Castro (2015) definen dimensión matemática del CDM, como:

> Los conocimientos que permiten al profesor, resolver una actividad matemática que se pretende implementar en el aula y vincularlo con objetos matemáticos que se encuentran más adelante en el currículum de matemáticas. Incluye dos subcategorías de conocimientos: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido. (p. 1433)

El *conocimiento común del contenido*, es entendido como:

> El conocimiento que se considera suficiente para resolver los problemas o tareas propuestas en el currículo de matemáticas (o planes de estudio) y en los libros de texto, de un nivel educativo determinado. Se trata de un conocimiento que es compartido entre el profesor y los estudiantes. (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 97)

El *conocimiento ampliado del contenido* refiere al:

> Conocimiento que debe tener el profesor sobre las nociones matemáticas que, tomando como referencia la noción matemática que se está estudiando en un momento puntual (por ejemplo, la función), están más adelante en el currículo del nivel educativo en cuestión, o en un nivel siguiente (por ejemplo, límites, derivadas, etc.). El conocimiento ampliado del contenido es el que provee al profesor las bases matemáticas necesarias para plantear nuevos retos matemáticos en el aula, vincular el objeto matemático que se está estudiando con otras nociones matemáticas y encaminar a los estudiantes al estudio de las nociones matemáticas subsecuentes a la noción que es centro de estudio. (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 97)

De acuerdo con Pino-Fan y Godino (2014), las dos subcategorías de la dimensión matemática del CDM son reinterpretaciones del conocimiento común del contenido y del conocimiento en el horizonte matemático descritos por (Hill, Ball y Schilling, 2008; Ball, Thames y Phelps, 2008; Ball y Bass, 2009). Esta interpretación se basa en la necesidad de determinar el conocimiento de los profesores para la enseñanza de la matemática en un nivel escolar específico. Es evidente que la dimensión matemática del CDM no es suficiente para lograr procesos de enseñanza aprendizaje eficaces. Es decir, se requiere del conocimiento de otros aspectos que afectan la planificación, la gestión del aula, la gestión del contenido, entre otros.

2.2.2. Dimensión Didáctico-Matemática del CDM

La dimensión didáctica del CDM considera seis subcategorías del conocimiento (Pino-Fan y Godino, 2014; Pino-Fan, Godino y Font, 2015). Pino-Fan, Assis y Castro (2015, p. 1434-1436) definen cada subcategoría como:

- *Faceta epistémica*: Refiere al conocimiento especializado de la dimensión matemática. El profesor, además de las matemáticas que le permiten resolver problemas que requieren movilizar su conocimiento común y ampliado, debe transitar por las diversas representaciones del objeto matemático, resolver una tarea a través de diferentes procedimientos, vincular objetos matemáticos con otros enseñados en un determinado nivel educativo (anteriores o futuros) y comprender la diversidad de significados parciales de un objeto matemático, que son parte del significado holístico (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Asimismo, el profesor debe proporcionar diversas justificaciones y argumentaciones durante el proceso de resolución de una tarea matemática. Por lo tanto, esta subcategoría del CDM incluye no solo las nociones propuestas en el modelo de competencia de la enseñanza de las matemáticas descrito por Schoenfeld y Kilpatrick (2008) sobre "conocer las matemáticas de la escuela de manera profunda y exhaustiva" (p. 322), sino también las nociones de Hill, Ball y Schilling (2008) sobre "el conocimiento especializado del contenido matemático" (p. 377-378).

  Pino-Fan y Godino (2015, p. 99) señalan: La faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático permitirá a los profesores o futuros profesores, responder preguntas del tipo:

  - Además de tu solución, ¿Existe otra forma de resolver la tarea?
  - ¿Cómo explicarías la solución de la tarea a un estudiante que no ha podido resolverla por los procedimientos vistos en clase?
  - ¿Qué conocimientos se ponen en juego al resolver la tarea?

- *Faceta cognitiva*: refiere al conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes. Esta subcategoría considera el conocimiento necesario para 'reflexionar y evaluar' la proximidad o el grado de ajuste de los significados personales (conocimiento de los estudiantes) con respecto a los significados institucionales (conocimiento desde el punto de vista del centro educativo). Para este fin, el profesor debe prever (durante las etapas de planificación-diseño y de implementación), a partir de las producciones de los estudiantes, o producciones previstos, posibles respuestas a un determinado problema, conceptos erróneos, conflictos o errores que surgen del proceso de resolver el problema, vínculos (matemáticamente correctos o incorrectos) entre el objeto matemático que se está estudiando y otros objetos matemáticos que se requieren para resolver el problema.

- *Faceta afectiva*: refiere al conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y de comportamiento de los estudiantes. Se trata del conocimiento requerido para comprender y lidiar con los estados de ánimo de los estudiantes, los aspectos que los motivan a resolver o no un determinado problema. En general, se refiere al conocimiento que ayuda a describir las experiencias y sensaciones de los estudiantes en una clase específica o ante un problema matemático de un nivel educativo determinado, teniendo en cuenta los aspectos relacionados con la faceta ecológica.

  Las facetas cognitivas y afectivas, tal como las define el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2009), proporcionan juntas una mejor aproximación y comprensión del conocimiento que los profesores de matemáticas deben poseer sobre las características de sus estudiantes en relación a cómo piensan, conocen, actúan y se sienten en la resolución de un problema matemático. Pino-Fan y Godino (2015), mencionan que estas dos facetas (cognitiva y afectiva) incluyen y amplían las ideas de (Shulman, 1987) sobre el 'conocimiento de los estudiantes y sus características' (p. 8), de Schoenfeld y Kilpatrick (2008) 'conocer a los estudiantes como personas que piensan y aprenden', de Grossman (1990) sobre 'la comprensión de los estudiantes, sus creencias y errores sobre temas específicos' (p. 8), y de Hill, Ball y Schilling (2008) en el 'conocimiento del contenido y los estudiantes' (p. 375).

  Pino-Fan y Godino (2015, p. 100-101) señalan, los conocimientos adquiridos por los profesores como parte de las facetas cognitiva y afectiva, contribuyen a responder idóneamente preguntas del tipo:

  - ¿Qué tipo de respuestas se esperan por parte de los estudiantes?
  - ¿Cuáles son las principales dificultades que podrían tener los estudiantes al resolver el problema?
  - ¿Qué tipo de errores podrían cometer los estudiantes al resolver el problema?
  - ¿Qué medidas implementarías para motivar a los estudiantes en la solución del problema?

- *Faceta interaccional*: El estudio de las características requeridas para gestionar idóneamente los aprendizajes de los estudiantes sobre nociones matemáticas específicas, ha considerado las interacciones como un componente fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Coll y Sánchez, 2008; Planas y Iranzo, 2009). En este sentido, y teniendo en cuenta las ideas de Schoenfeld y Kilpatrick (2008) sobre la construcción de relaciones que apoyan el proceso de aprendizaje, la faceta interaccional se refiere al conocimiento requerido para prever, implementar y evaluar secuencias de interacción entre los agentes que participan del proceso de enseñanza y aprendizaje, orientado hacia la fijación y negociación de significados (aprendizaje) de los estudiantes. Estas interacciones no solo ocurren entre el profesor y los estudiantes (profesor-estudiante), sino que también pueden ocurrir entre estudiantes (estudiante-estudiante), entre recursos y estudiantes (estudiantes-recursos) y entre estudiantes, docentes y recursos (estudiantes-recursos-docente). Según Pino-Fan y Godino (2015) "El estudio de las normas y metanormas, que tienen un rol importante en la gestión de los aprendizajes, tiene gran énfasis en esta faceta interaccional. Sin embargo, el estudio de dichas normas y metanormas no se restringe a esta faceta" (p. 101).

- *Faceta mediacional*: En relación con los recursos y los medios utilizados para gestionar el aprendizaje, los modelos propuestos por Shulman (1987) y Grossman (1990) consideran el conocimiento de los materiales del aula como parte del conocimiento curricular. No obstante, debido a las tendencias actuales del currículo de matemáticas, estas adquieren un papel importante en la organización y gestión de los aprendizajes. Por esta razón, la faceta mediacional, refiere al conocimiento que debería tener el profesor para evaluar la pertinencia de los recursos y medios que fomentan y fortalecen los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Además, deber contemplar la asignación de tiempo para las diversas acciones y procesos de aprendizaje. Según Pino-Fan y Godino (2015) "el vínculo entre las facetas interaccional y mediacional, desarrolla y enriquece la noción de ?conocimiento del contenido y la enseñanza? propuesta por Ball, Thames y Phelps (2008)" (p. 102).

- *La faceta ecológica*: refiere al conocimiento de aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos que influyen en la gestión del aprendizaje de los estudiantes. En otras palabras, los profesores deben tener conocimiento del currículo de matemáticas del nivel que considera el estudio de un objeto matemático, los vínculos que podrían existir con otros currículos, las relaciones que dicho currículo tiene con los aspectos sociales, políticos y económicos que apoyan y condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las características consideradas en esta faceta toman en cuenta las ideas de Shulman (1987) sobre "el conocimiento curricular, conocimiento de fines, propósitos y valores educativos" (p. 8) y de Grossman (1990) sobre "conocimiento sobre el currículo horizontal y vertical para un tema específico y el conocimiento del contexto" (p. 8).

Las seis facetas de la dimensión didáctica del conocimiento didáctico matemático, pueden contemplarse para examinar, describir y caracterizar el conocimiento de los profesores en cualquier fase del proceso de enseñanza: estudio preliminar, planificación o diseño, implementación y evaluación (Pino-Fan y Godino, 2015).

2.2.3. Dimensión Meta Didáctico-Matemática del CDM

Pino-Fan y Godino (2015), definen la dimensión meta didáctico-matemática del CDM como “los conocimientos sobre las normas y metanormas (epistémicas, ecológicas, cognitivas, interaccionales, mediacionales, afectivas), las condiciones y restricciones contextuales. Conjuntamente involucra criterios de idoneidad que permiten al profesor reflexionar sobre su propia práctica y determinar mejoras potenciales de la misma”(p. 103).

La figura 2.1 muestra cómo se relacionan las tres dimensiones que contempla el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático CDM, las fases del diseño didáctico y los niveles de análisis.

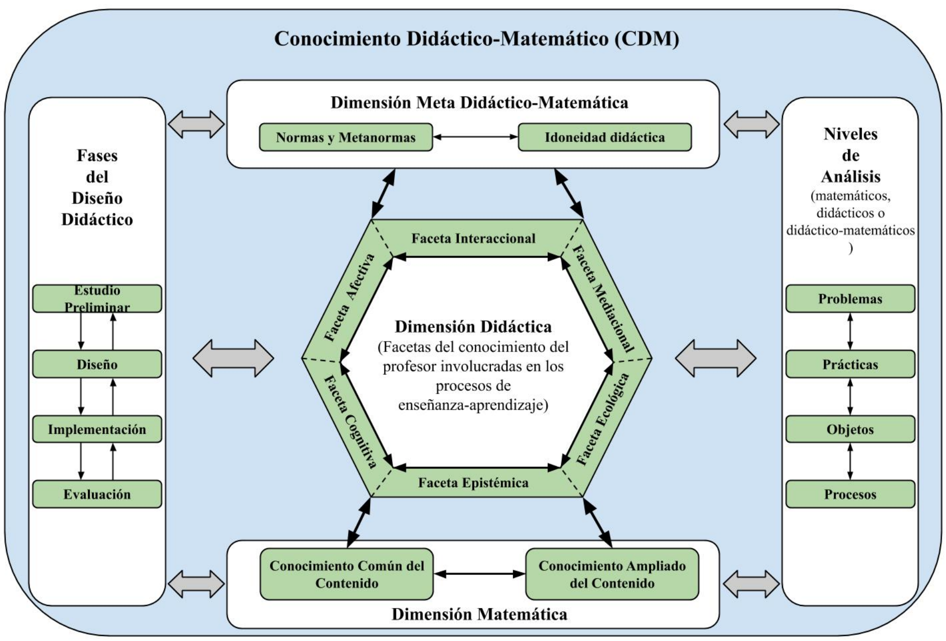


Figura 2.1. Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) (Pino-Fan, Godino, 2015, p. 103)

Pino-Fan, Font y Godino (2013) contemplan para cada una de las facetas, diversos niveles para el análisis del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor, dependiendo del tipo de información requerida para la toma de decisiones en los procesos de enseñanza aprendizaje. Estos niveles de análisis, son: (Pino-Fan Font y Godino, 2013, p. 140)

- *Prácticas matemáticas y didácticas*. Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.
- *Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos)*. Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
- *Normas y metanormas*. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
- *Idoneidad*. Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

La figura 2.2 Se observa cómo interactúan las facetas y los niveles del conocimiento del profesor descritos anteriormente.

Figura 2.2. Facetas y niveles del conocimiento didáctico-matemático del profesor (Pino-Fan, Font, Godino, 2013, p. 141)

2.3. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS)

El enfoque ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática desarrollado desde 1994 en diversos trabajos de Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007) es un modelo epistemológico, antropológico y sociocultural de la matemática, además de cognitivo e instruccional que permite a través de sus herramientas teóricas realizar análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Dicho marco teórico orientará la caracterización del conocimiento didáctico-matemático de profesores chilenos en formación cuando afrontan la enseñanza de funciones. A continuación se describen las nociones centrales del EOS que serán de utilidad para el desarrollo de esta investigación.

2.3.1. Sistemas de prácticas personales e institucionales

En el EOS la noción de sistema de prácticas juega un papel central en lo epistemológico como en lo didáctico. Godino y Batanero (1994) entienden por *sistema de prácticas* a "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (p. 334). Así, estas prácticas pueden ser realizadas por una persona o compartidas en el seno de una institución, lo que dará lugar a sistemas de prácticas personales y sistemas de prácticas institucionales. El *sistema de prácticas institucionales*, "asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de la institución" (Ibíd. p. 337). Los *sistemas de prácticas personales*, "asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas (Ibíd. p. 337). Como señalan Font, Godino y Gallardo (2013), "las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la que los textos matemáticos son leídos y producidos, y una práctica discursiva, la que permite la reflexión sobre las prácticas operativas" (p. 104).

2.3.2. Objetos intervinientes en los sistemas de práctica

En el EOS se considera a los objetos matemáticos como entidades intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994). En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.), dichos objetos son utilizados al hacer matemáticas y son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas, y dan cuenta de su organización y estructura. Ahora bien, dado que los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales, entonces si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución los objetos intervinientes se considerarán objetos institucionales, mientras que si tales sistemas de prácticas son personales, serán considerados objetos personales (Ibíd.).

> En el lenguaje cotidiano, la palabra objeto se usa para referirse a cosas que son materiales, tangibles o reales. En el lenguaje filosófico, un objeto es una categoría metafísica básica y universal, sinónimo de entidad, cosa o algo que puede ser individualizado. En la filosofía de las matemáticas, el término objeto matemático generalmente se refiere a objetos abstractos como clases, proposiciones o relaciones. Sin embargo, en nuestra ontología propuesta, y de acuerdo con el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969; Cobb y Bauersfeld, 1995), usamos objeto en un sentido amplio para referirnos a cualquier entidad que esté involucrada de alguna manera en la práctica o actividad matemática y que pueda estar separado o individualizado. (Font, Godino y Gallardo, 2013, p. 13)

Según Font, Godino y Gallardo (2013) algunos de los objetos que están involucrados en prácticas matemáticas son: situaciones problemas, conceptos/ definiciones, proposiciones, etc. que refieren a objetos matemáticos primarios (Godino, Batanero y Font, 2007). Si se consideran los objetos involucrados en una práctica matemática que permite resolver un problema, entonces se percibe el uso de lenguajes, tanto verbales como simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos / definiciones, proposiciones y procedimientos que están involucrados en la elaboración de argumentos cuyo propósito es decidir si las acciones que se propician en la práctica son satisfactorios. Es así que Godino, Batanero y Font (2007, p. 4) proponen la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
- *Situaciones-Problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- *Conceptos/Definiciones* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, derivada).

- *Proposiciones/Propiedades* (enunciados sobre conceptos).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

De acuerdo con Pino-Fan (2014), los seis tipos de objetos primarios propuestos por Godino, Batanero y Font (2007) amplían la distinción tradicional de considerar los elementos conceptuales y procedimentales como entidades insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática.

> Las situaciones / problemas son el origen o la razón de ser de la actividad, el lenguaje representa las entidades restantes y sirve como una herramienta para la acción, y los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Considerar una entidad como primaria es una cuestión relativa más que absoluta, ya que estamos tratando con entidades funcionales que son relativas a los juegos de lenguaje, marcos institucionales, comunidades de prácticas y contextos de uso, en los que participan. También tienen una naturaleza recursiva, en el sentido de que cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto de entidades de los tipos restantes, por ejemplo, un argumento puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc. (Font, Godino y Gallardo, 2013, p. 15)

2.3.3. Significados de los objetos matemáticos

En el EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función, deriva, integral etc.), desde una perspectiva pragmático-antropológica. Un objeto matemático se define como el "sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones?problemas en las que dicho objeto interviene" (Pino-Fan, 2014, p. 45). Así, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo que da origen a los significados institucionales y significados personales respectivamente. Godino y Batanero (1994) definen estos significados como: "Significado de un objeto institucional es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge los objetos institucioanles en un momento dado" (p. 340). "Significado de un objeto personal es el sistema de prácticas personales para resolver un campo de problemas del que emerge el objeto personal en un momento dado" (p. 341).

Es evidente que los objetos personales e institucionales no tienen un único significado. Por ejemplo, en una clase de matemáticas (una institución) en donde se lleva a cabo un sistema de prácticas de donde emerge el objeto 'función', el significado que los estudiantes atribuyan a dicho objeto dependerá de los sistemas de prácticas que lleve a cabo esa institución en particular, y que es distinto al significado subyacente a los sistemas de prácticas que lleve a cabo otra institución.

> Los sistemas de prácticas se han categorizado en el EOS teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción del carácter personal de las prácticas (prácticas personales) y las de carácter institucional (compartido, social) de tales prácticas. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego el sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia. La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de tipologías de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales). (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009, p. 4)

Godino y Font (2007, p. 2), describen cuatro tipos de significados institucionales:

- *Implementado:* en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- *Evaluado:* el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes
- *Pretendido:* sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- *Referencial:* sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Asimismo, Godino y Font (2007, p. 2) proponen tres tipos de significados personales:

- *Global:* corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar el sujeto relativas a un objeto matemático.
- *Declarado:* da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- *Logrado:* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

Como señalan Godino y Batanero (1994), los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados. Además, el profesor, como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013).

> La interpretación semiótica de las prácticas matemáticas, personales e institucionales, permite describir los procesos de aprendizaje en términos de acoplamiento de significados, como se indica en la parte central de la figura 2.3. Asimismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados. (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009, p. 5)

Figura 2.3. Tipos de significados (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009, p. 5)

2.4. Herramientas de análisis propuestas por el EOS

El EOS propone diversas herramientas que permiten realizar análisis detallados del conocimiento matemático y de la instrucción matemática. Según Godino, Batanero y Font, (2007) en un proceso de instrucción matemática se distinguen seis dimensiones que interactuan entre si: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente(funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva(génesis de significados personales) y afectiva (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas). Todas estas interacciones se dan en un contexto social y educativo. Es decir, la instrucción matemática se entiende como el proceso estocástico multidimensional de enseñanza aprendizaje de contenidos matemáticos específicos en el seno de los sistemas didácticos.

Godino, Batanero y Font (2007), proponen la configuración didáctica como una unidad primaria de análisis, constituida por las interacciones entre profesores y estudiantes que emergen de los procesos de instrucción sobre una noción matemática específica en un tiempo determinado mediante una secuencia de configuraciones didácticas.

> Una configuración didáctica lleva asociada una configuración epistémica, esto es, una tarea, los procedimientos requeridos para su solución, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá una

> configuración instruccional constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema o tarea matemática abordada. La descripción de los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso se realiza mediante las configuraciones cognitivas, red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales que se ponen en juego en la implementación de una configuración epistémica. (Ibíd., p. 12)

Actualmente, para cada faceta (epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica) se han elaborado y refinado nociones específicas que permiten análisis detallados de las prácticas matemáticas y didácticas, que permiten inferir aspectos del conocimiento didáctico-matemático. Así, por ejemplo, para las facetas epistémica y cognitiva se dispone de la herramienta 'configuración ontosemiótica' (formada por los problemas, sistemas de prácticas, objetos y procesos matemáticos) que aportan criterios para delimitar el conocimiento didáctico-matemático (relativos a los problemas, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y las conexiones entre los mismos). Otros desarrollos del enfoque ontosemiótico para el análisis de los procesos de instrucción que no han sido contemplados en su totalidad en Godino (2009) son las herramientas 'dimensión normativa' (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009), y la 'idoneidad didáctica' (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2011).

2.4.1. Configuración Ontosemiótica

En el EOS se asume que de los sistemas de práctica emergen dos niveles de objetos. El primer nivel refiere a aquellas entidades que se pueden observar, por ejemplo, en libros de texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos, etc.). El segundo nivel se relaciona con la tipología de objetos que surge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009). A continuación se detalla cada uno de los niveles emergentes de los sistemas de prácticas.

Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Según Font, Godino y Gallardo (2013) los objetos primarios están relacionados entre sí y forman configuraciones que se pueden definir como redes de objetos que están involucrados y emergen de sistemas de prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007). Estas configuraciones pueden ser socioepistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). Cabe señalar que al considerar los componentes de estas configuraciones como objetos primarios, estamos participando en un proceso de cosificación, es decir, se convierte una noción abstracta en algo concreto (los objetos). Estos procesos de instrucción matemática, se ve facilitados, entre otros factores, por el uso de metáforas del objeto dentro del discurso de enseñanza (Font, Bolite y Acevedo, 2010).

> La realización, interpretación y análisis de una práctica matemática implica poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (por ejemplo, resolver una situación problemática que involucra la noción de función inversa) observamos que se movilizan lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos-definiciones, propiedades-proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones que componen la práctica son satisfactorias. En consecuencia la realización y evaluación de cualquier práctica es necesario activar un conglomerado formado por situaciones-problemas, elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. A este conglomerado de objetos se le llama configuración de objetos primarios (Godino, Font, Wilhelmi, 2006, p. 135) (ver figura 2.4).

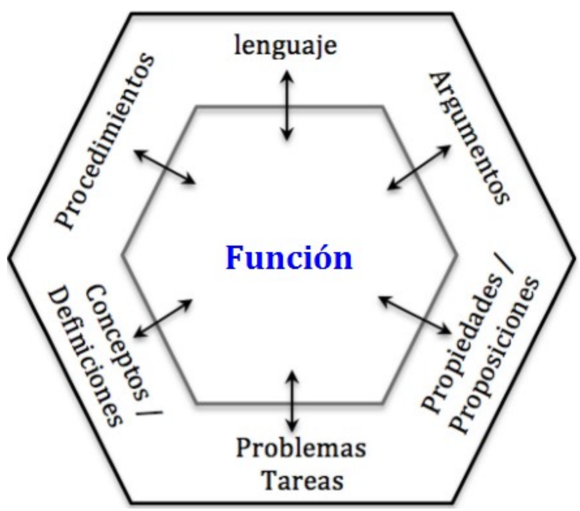


Figura 2.4. Configuración de objetos primarios (Adaptación Godino, Font, Wilhelmi, 2006)

Una interrogante interesante de responder es ¿Cuál es la naturaleza de los objetos primarios? En relación con los problemas, los elementos lingüísticos y los argumentos nos inquieta la naturaleza de donde provienen, pero este no es el caso de los otros objetos primarios (procedimientos, conceptos-definiciones y proposiciones). En cuanto a los procedimientos, está claro que son reglas, aunque en muchos casos se formulan como proposiciones, por ejemplo, para calcular la inversa de una función es fundamental verificar en primer lugar que la función original es biyectiva (para asegurar la existencia de la función inversa) y en segundo lugar la definición de relación inversa (para calcular la relación que define la función inversa). La naturaleza del objeto que demuestra ser particularmente problemática es la de los conceptos-definiciones y proposiciones, dado que la única forma de acceder a estos objetos matemáticos ideales es mediante representaciones ostensivas que generalmente no logran mostrar con total exactitud dichas nociones. No obstante, las definiciones y proposiciones son objetos matemáticos que existen de una forma u otra. (Font, Godino y Gallardo, 2013)

Segundo nivel: Atributos contextuales

Los juegos de lenguaje (Wittgenstein, 1953) tienen un rol fundamental en el EOS dado que representan uno de los elementos contextuales que relativizan las formas en que los objetos matemáticos primarios existen.

> La noción de juego del lenguaje se caracteriza por la posición pragmática-antropológica sobre el significado de las palabras y de expresiones lingüísticas: el juego del lenguaje resalta el hecho de que hablar un idioma es parte de una actividad o de una forma de vida. Cada palabra tiene un significado en la medida en que tiene un uso en un juego de lenguaje en particular, pero fuera del juego de lenguaje no tiene sentido (Font, Godino y Gallardo, 2013, p. 13).

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan (Wittgenstein, 1953), pueden ser consideradas desde las siguientes dimensiones duales (Font, Godino y Gallardo, 2013, p. 16-22):

- *Personal - institucional:* Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran ‘objetos institucionales’, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como ‘objetos personales’ (Godino y Batanero, 1994, p. 338). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las que se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La ‘cognición personal’ es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la ‘cognición institucional’ es el resultado del diálogo, el convenio y las reglas que surgen de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas. La dualidad personal/institucional nos lleva a considerar configuraciones de objetos primarios institucionales y configuraciones de objetos primarios personales, y a problematizar la relación entre ellos. La noción de configuración cognitiva (red de objetos personales) es una herramienta para describir los objetos involucrados y emergentes de las prácticas personales y, por lo tanto, para describir el conocimiento, la comprensión y las habilidades del sujeto en algún momento del proceso de aprendizaje. El aprendizaje puede describirse en términos de la construcción por parte de los estudiantes de una red de configuraciones cognitivas, con niveles progresivos de complejidad, en línea con las configuraciones institucionales previstas.

- *Ostensivo - no ostensivo:* Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos matemáticos ideales institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas matemáticas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, etc.). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica). En la categoría ostensiva, se deben considerar diversas representaciones (por ejemplo, $y = f(x)$; $x \mapsto y$) y ejemplos materiales (por ejemplo, tres naranjas) que normalmente se consideran extramatemáticas. Así, en el discurso matemático es posible hablar sobre objetos ostensivos que representan objetos no ostensivos (objetos matemáticos ideales) y de las diversas representaciones asociadas a un mismo objeto matemático. El tipo de existencia que se puede atribuir a los objetos no ostensivos es una pregunta clave en la filosofía de las matemáticas. Además del platonismo, que argumenta que estos objetos existen en un mundo diferente al de sus representaciones materiales, se han propuesto varios enfoques teóricos diferentes: El Enfoque Meinongiano, Realismo Posibilista y Representacionismo Actualista que intentan explicar la existencia de dichos objetos ideales.

- *Expresión - contenido:* Antecedente y consecuente de cualquier función semiótica. La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009, p. 7)

- *Extensivo - intensivo (ejemplar - tipo)*: Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, la función $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = 2x + 1$) y una clase más general (la familia de funciones $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = mx + n$). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras et al., 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. "La generalización es esencial porque este es el proceso que distingue la creatividad matemática de la conducta mecanizable o algorítmica". (Otte, 2003, citado en Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009, p. 8)

- *Unitario - sistémico:* En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas, etc.) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje. (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009, p. 8)

Estas dimensiones se presentan agrupadas en parejas y se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios. La figura 2.5 representa las diferentes nociones teóricas descritas anteriormente.

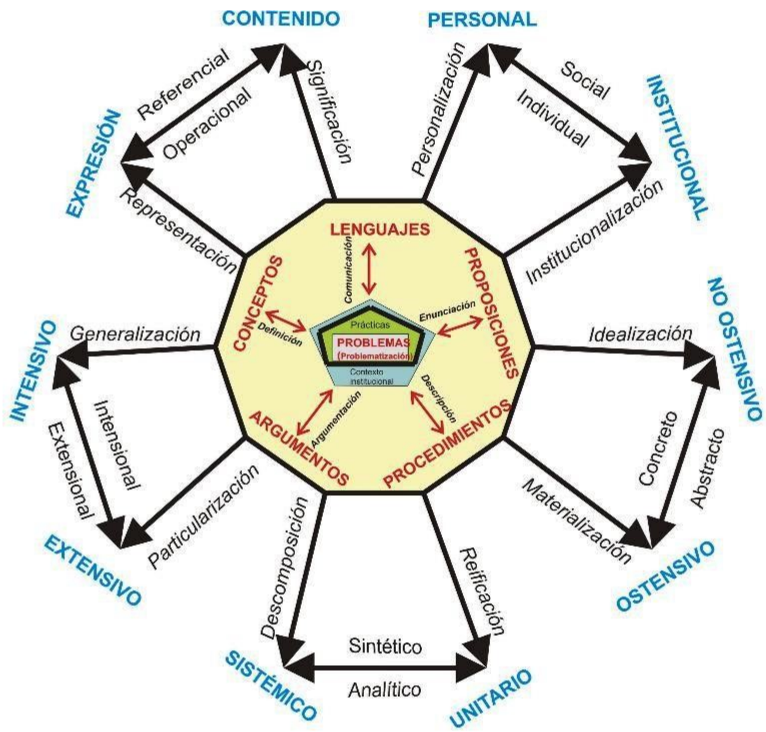


Figura 2.5. Configuración Ontosemiótica (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009, p. 9)

El EOS no intenta dar una definición de ‘proceso’ ya que hay muchas clases diferentes de procesos: como secuencia de prácticas, cognitivos, metacognitivos, de instrucción, procesos de cambio, sociales, etc. La noción de proceso referida en el EOS es muy diferente a las descritas anteriormente, la única característica común a muchos de ellos puede ser la consideración del factor ‘tiempo’ y en menor medida, el de ‘secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente’. Por tanto, la figura 2.5 describe la lista de procesos considerados importantes en la actividad matemática, sin pretender incluir en dicha figura, todos los procesos implicados, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son hiper-procesos, puesto que implican procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc. Tampoco se consideran en esta selección los procesos metacognitivos necesarios para la realización de las prácticas (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009, p. 9-10).

2.4.2. Dimensión Normativa

Según Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) la dimensión normativa ha sido objeto de investigación en Didáctica de las Matemáticas, principalmente por autores que basan sus trabajos en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969), introduciendo nociones como patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas (Cobb y Bauersfeld, 1995; Yackel y Cobb, 1996). Sin duda, las interacciones entre profesor y estudiantes están con frecuencia regidas por 'obligaciones' o normas no explícitas: 'normas sociales' y 'normas sociomatemáticas'.

> Las normas sociales en el seno de la clase son convenciones que describen cómo: colaborar unos con otros, reaccionar socialmente ante un error o una indicación y asumir la responsabilidad que la acción cooperativa conlleva (y que, en particular, supone cumplir las expectativas recíprocas entre los agentes). Algunas de estas normas sociales son generales y se pueden aplicar en cualquier aula independiente de la disciplina. Regulan el funcionamiento de las actividades docentes y discentes. Por ejemplo, se supone que en la clase los estudiantes deberían adoptar una actitud crítica hacia las afirmaciones que se hacen, independientemente de si se trata de una clase de matemáticas, o bien de ciencias o de literatura. Se espera (norma social) que los estudiantes apoyen su discurso en conocimientos aprendidos. Son normas sociales caracterizadas por explicar, justificar y argumentar, ya que se supone que en situaciones ideales los estudiantes deberían desafiar las explicaciones y justificaciones de sus compañeros, así como justificar sus propios argumentos (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009, p. 62).

> Las normas sociomatemáticas regulan los aspectos específicos de las discusiones matemáticas de los estudiantes e influyen en las oportunidades de aprendizaje. Desde esta perspectiva, las normas sociomatemáticas son, en la perspectiva social, el correlato de las creencias y valores identificados en la perspectiva psicológica al intentar dar cuenta de cómo los estudiantes llegan a ser intelectualmente autónomos en matemáticas (una cuestión vinculada al dominio de las creencias y actitudes). En este sentido, lo que llega a ser matemáticamente normativo en un aula viene condicionado por los objetivos reales, las creencias, las suposiciones e hipótesis de los participantes en el aula, al mismo tiempo que estos objetivos y la comprensión están influenciados por lo que es legitimado como actividad matemática aceptable (Yackel y Cobb, 1996, citado en Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009, p. 62-63).

Para explicar la distinción sutil entre las normas sociales y las normas sociomatemáticas Yackel y Cobb (1996) proponen los siguientes ejemplos: "La comprensión que se espera de los estudiantes para explicar sus soluciones y sus formas de pensar es una norma social, mientras que la comprensión de lo que se considera como una explicación matemáticamente aceptable es una norma sociomatemática" Asimismo, "Ante la discusión de un problema, la comprensión de los estudiantes para ofrecer soluciones diferentes de las que ya contribuyeron, es una norma social, mientras que la comprensión de lo que constituye un procedimiento matemáticamente diferente es una norma sociomatemática"

En este mismo sentido, la noción de contrato didáctico ha sido desarrollada por Brousseau en diversos trabajos constituyendo una aspecto central en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998). La noción genérica de contrato, busca detallar las reglas que se suscitan en las relaciones pedagógicas y didácticas que se establecen en establecimientos educacionales. "El contrato didáctico, o más precisamente el proceso de búsqueda de un contrato hipotético, constituye un concepto al servicio de la Didáctica de las Matemáticas para analizar los fenómenos de negociación, emergencia, disfuncionamiento del sentido en las situaciones didácticas" (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009, p. 61).

Tanto las normas sociales, sociomatemáticas como el contrato didáctico, refieren a reglas, hábitos y convenciones generalmente implícitas que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas. Sin embargo, constituyen visiones parciales del complejo sistema de normas que se suscitan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por ello, el EOS se propone reconocer y describir nuevos tipos de normas y metanormas que condicionan y soportan los procesos de instrucción matemática (Ibíd.). El EOS, adopta una perspectiva que integra el contrato didáctico, las normas sociales y sociomatemáticas como parte de una 'dimensión normativa'. A partir de ello, proponen normas según la faceta del proceso de estudio donde refiera dicha norma (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica). Según (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009, p. 64) esto permitirá fijar la atención en normas que regulan:

- Las matemáticas susceptibles de ser enseñadas y aprendidas en una institución.
- La manera en que los estudiantes construyen y comunican las nociones, procesos y significados matemáticos.
- Las interacciones docente-discente y discente-discente.
- El uso de los recursos humanos, materiales y temporales.
- La afectividad de las personas que intervienen en el proceso de estudio.

- La relación con el entorno (sociocultural, político, laboral, etc.) en el que se desarrolla el proceso de instrucción.

Godino, Font, Wilhelmi y Castro, (2009, p. 65-70) definen las normas según faceta (ver figura 2.6 del proceso de enseñanza-aprendizaje matemático como:

- *Normas epistémicas:* En la clase de matemáticas se establece un compromiso básico: enseñar y aprender matemáticas. Se entenderá por normas epistémicas al conjunto de normas que determinan la actividad matemática. Es decir, aquellas que regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje y las representaciones asociadas a nociones matemáticas específicas. Dicho en la terminología del EOS, las normas epistémicas son componentes de las configuraciones epistémicas (definiciones, proposiciones, procedimientos) y las prácticas matemáticas que dichas configuraciones posibilitan.

- *Normas cognitivas:* En el EOS el estudiante tiene una participación directa en la comunidad de prácticas. Esto con el propósito de alcanzar una apropiación significativa de nociones matemáticas. Para lograr dichos aprendizajes, se consideran referentes teóricos como la Psicología, la Pedagogía y en especial la Didáctica de las Matemáticas, como disciplina específica para la descripción de los procesos de construcción y comunicación de nociones, procesos y significados matemáticos y de la intervención en los sistemas didácticos. Estos referentes teóricos han generado un cuerpo de conocimientos del que se derivan normas cognitivas (El estudiante tiene los conocimientos previos necesarios; Las metodologías a implementar están dentro de la Zona de Desarrollo Próximo (Vygotski); La institución atiende a la diversidad de estudiantes). Dichas normas desarrollan el principio de que la institución escolar debe asegurar el aprendizaje de sus estudiantes. Es fundamental que cuando un estudiante no es capaz de cumplir con precisión alguna instrucción propia de la tarea matemática. No obstante, se acerca a una respuesta idonéa, dicha condición debe renegociarse, es decir, relajar el grado de exigencia, eliminando la condición 'abusiva' o 'someter' al estudiante a actividades de refuerzo para que alcance los propósitos de dicha instrucción.

- *Normas interactivas:* Para lograr los objetivos de enseñanza-aprendizaje, la interacción entre las personas que participan en los procesos de estudio deben estar reguladas por reglas, hábitos, tradiciones, compromisos y convenios. El objetivo central de las interacciones didácticas es conseguir el aprendizaje de los estudiantes de la manera más autónoma posible, es decir, que logren apropiación de significados, por medio de la participación en una comunidad de prácticas. La interacción de tipo dialógico y de trabajo cooperativo tendrán potencialmente mayor idoneidad interaccional que aquellas provenientes de la enseñanza tradicional (tipo magistral y de trabajo individual).

- *Normas mediacionales:* La enseñanza y el aprendizaje se apoya en el uso de medios técnicos (libros, dispositivos y herramientas digitales, etc.) y se distribuye en el tiempo, que es también un recurso. El uso estos recursos está gobernado por reglas que condicionan los procesos de estudio. En la escuela debe haber espacios físicos y recursos (aulas, pizarra, libros, ordenadores, softwares etc.) El uso apropiado de todos estos recursos está sujeto a reglas técnicas específicas que el profesor debe conocer. En la mayoría de los casos el uso de los artefactos (manipulativos concretos o virtuales, programas de cálculo o graficación) requiere la apropiación por los estudiantes de configuraciones epistémicas (normas matemáticas) específicas de los tipos de problemas abordables con los mismos. La gestión del tiempo es básicamente responsabilidad del profesor, aunque una parte del tiempo de estudio está bajo la responsabilidad de los estudiantes. La duración de las clases está regulada generalmente por normas sociales, como también el tiempo asignado al desarrollo total del programa de estudio. Muchos medios, como la calculadora, tienen un uso muy restringido. Los apuntes y los libros de texto no pueden utilizarse en situaciones de evaluación. Ante ciertas actividades, el profesor provee de ciertos materiales para el desarrollo de una tarea matemática. Todas éstas son normas mediacionales que condicionan los procesos de estudio. Asimismo, el uso de los distintos espacios físicos de un centro educativo son considerados medios que podrían favorecer los aprendizajes.

- *Normas afectivas:* Es fundamental que el estudiante enfrente los procesos de instrucción matemática motivado y con una actitud positiva. Generalmente se asume que el profesor debe motivar a los estudiantes, elegir actividades 'atractivas' y crear un 'clima afectivo' propicio para el aprendizaje. La principal motivación intrínseca hacia el estudio de las matemáticas parece estar en la elección de los tipos de situaciones problema matemáticas, las tareas, actividades concretas que propone a los estudiantes, las que deben reunir unas características específicas. Una regla afectiva será, que el profesor debe buscar o crear situaciones matemáticas ricas, que pertenezcan al campo de intereses a corto y medio plazo de los estudiantes. La experiencia personal de resolver un problema es un factor importante que favorece la autoestima del resolutor, además de prepararlo para afrontar nuevos problemas no rutinarios, otra condición afectiva refiere a la creación de las condiciones para que el estudiante acepte la responsabilidad de resolver los problemas. El logro de dar sentido a los aprendizajes no solo depende del profesor y los estudiantes sino de toda la comunidad educativa (la escuela, familia, administración educativa, la sociedad, etc.).

- *Normas ecológicas:* Tener en cuenta la faceta ecológica de la dimensión normativa implica buscar información sobre el entorno social, político y económico donde se ubica la escuela, ya que estos contextos influyen en el tipo de prácticas matemáticas que se realizan en el aula. Las normas ecológicas tienen como principal objetivo conseguir dos tipos de competencias en los estudiantes. Por una parte, se trata de educar a ciudadanos garantizando la asunción de los valores de una sociedad democrática, garantizando los derechos de todos y fomentando los deberes cívicos. Por otra parte, el objetivo de la institución educativa es conseguir una formación inicial de profesionales competentes para su futuro ejercicio profesional. Las normas ecológicas tienen que ver con: Los contenidos que se van a enseñar; El cumplimiento de los programas de estudio (pauta institucional establecida); Asegurar un determinado nivel de conocimientos y la obligación de informar de él a la sociedad; La necesidad de incorporar las nuevas tecnologías (el tipo de tecnología de la información, el momento de su uso, etc., implica condiciones de otras facetas); Establecer propuestas metodológicas de enseñanza innovadoras que se adapten a los cambios sociales y profesionales que se producen en la sociedad; y por último, las evaluaciones internacionales sobre la competencia de los estudiantes para aplicar las matemáticas a situaciones de la vida cotidiana.

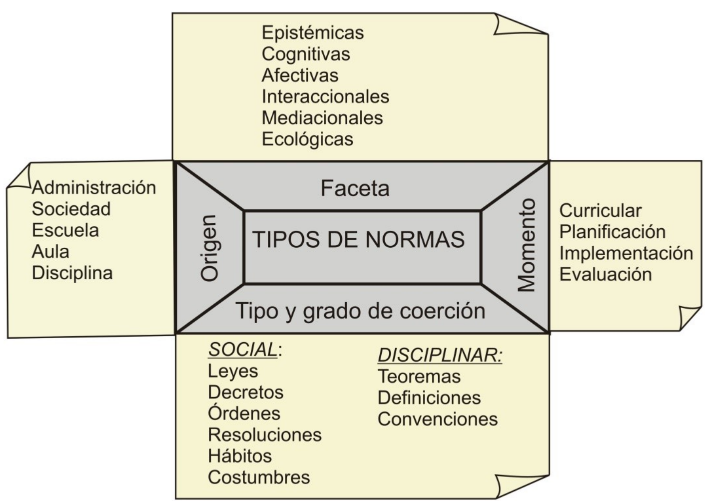


Figura 2.6. Dimensión Normativa (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 14)

Según Godino, Batanero y Font, (2007, p. 14) La identificación de las diferentes facetas de la dimensión normativa (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) permite:

- Valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y estudiantes teniendo en cuenta el conjunto de normas, y su tipología, que condicionan la enseñanza y los aprendizajes.

- Sugerir cambios en los tipos de normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los sistemas didácticos, logrando transitar desde significados personales hacia significados institucionales pretendidos.

2.4.3. Idoneidad didáctica

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones y criterios representan un recurso orientador para la gestión efectiva en el aula. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes: Idoneidad epistémica, Idoneidad cognitiva, Idoneidad interaccional, Idoneidad mediacional, Idoneidad afectiva, Idoneidad ecológica. (Godino, 2011)

Godino, Batanero y Font, (2007, p. 7) definen los seis componentes que articulan los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas como:

- *La Idoneidad epistémica:* Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), con respecto a un significado de referencia definido previamente.
- *Idoneidad cognitiva:* Expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes (Vygotski, 1934), así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos implementados.
- *Idoneidad interaccional:* Un proceso de enseñanza aprendizaje tendrá mayor idoneidad interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas, permiten identificar y resolver conflictos semióticos que pueden ocurrir durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional:* Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.
- *Idoneidad afectiva:* Grado de implicación (interés, motivación, disposición, etc.) de los estudiantes en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica:* Grado en el que el proceso de enseñanza aprendizaje se ajusta al proyecto educativo, la escuela y la sociedad, tiene en cuenta los factores condicionantes del entorno en el que se desarrolla.

> La figura 2.7 muestra las principales características de la idoneidad didáctica. El hexágono regular representa el proceso de estudio pretendido o planificado, donde a priori se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interno ejemplifica las idoneidades efectivamente logradas en la realización de un proceso de instrucción matemática. En la base se sitúan las idoneidades epistémica y cognitiva al considerar que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos (Godino, 2011, p. 6).

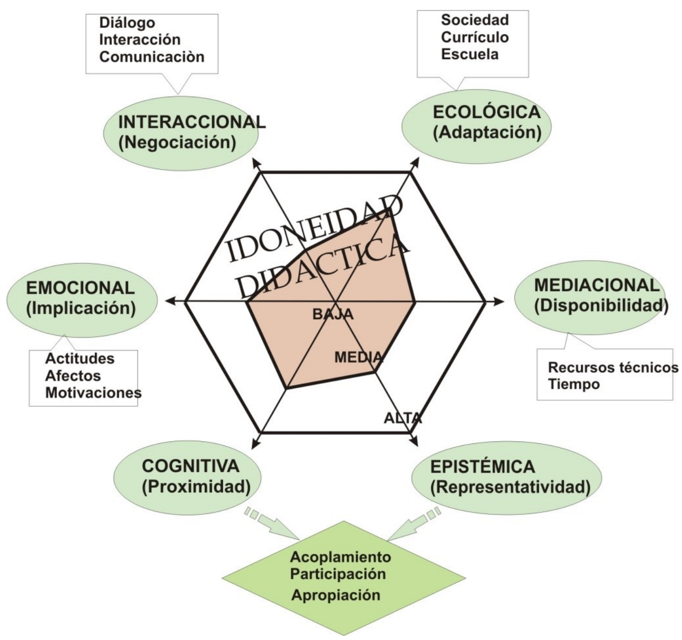


Figura 2.7. Idoneidad Didáctica (Godino, 2011, p. 6)

Indicadores de Idoneidad Didáctica

La idoneidad didáctica es una herramienta que permite el análisis del proceso de planificación, implementación o desarrollo de una unidad didáctica. Asimismo, y de manera más general, puede analizar el desarrollo de una propuesta curricular. También puede ser útil para examinar aspectos parciales de un proceso de estudio, como material para la docencia, un manual escolar, respuestas de los estudiantes a tareas planteadas, etc. Para lograr procesos de enseñanza-aprendizaje idóneos se requiere disponer de indicadores que orienten explícitamente sobre los fines y líneas generales de actuación. Valorar y alcanzar una alta idoneidad didáctica son procesos complejos debido a las numerosas dimensiones y subcategorías que las componen (Godino, 2011). Para la valoración de acciones formativas planificadas o implementadas Godino (2011, p. 9-14) presenta las tablas 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 que describen componentes e indicadores que constituyen una guía para el análisis de cada una de las facetas que componen la dimensión didáctica del CDM.

Tabla 2.1. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica

COMPONENTES:	INDICADORES:
Situaciones-problemas	• Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación • Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	• Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica,...), traducciones y conversiones entre los mismas. • Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. • Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. • Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. • Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	• Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. • Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	• Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. • Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

Lograr una alta idoneidad epistémica requiere la selección y adaptación de situaciones-problemas, estas tareas constituyen en el EOS un aspecto central, dado que los objetos matemáticos emergen de las prácticas que realizan los sujetos cuando se enfrentan a la resolución de una situación problema. Aun cuando las situaciones problemas son un elemento central, para lograr una alta idoneidad es necesario movilizar diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Las tareas propuestas deben admitir diversas formas de resolución y por ende variados procedimientos que conlleven a establecer conjeturas, interpretaciones, justificaciones etc. Es importante establecer conexiones entre distintos objetos matemáticos descritos en el currículo de matemáticas y entre los distintos ejes que componen la matemática (números, álgebra, geometría, cálculo, etc.) Es decir, no pueden ser tratados de forma parcelada o independiente. (Godino, 2011)

Tabla 2.2. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

COMPONENTES:	INDICADORES:
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	• Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). • Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	• Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. • Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Aprendizaje: Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	• Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. • La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia • Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Alcanzar una alta idoneidad cognitiva implica que el estudiante por medio de la interacción en los procesos de instrucción matemática, se apropia de los significados institucionales pretendidos. Es decir, el estudiante logra articular progresivamente los significados personales iniciales con los significados institucionales que han sido planificados. (Godino (2011). El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000, citado en Godino, 2011, p. 10) se refiere a tres principios sobre la enseñanza de las matemáticas que se vinculan con la idoneidad cognitiva:

- La excelencia en la educación matemática requiere igualdad, grandes expectativas y un fuerte apoyo para todos los estudiantes. Se exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas, y que sean incluidos contenidos motivadores para promover el acceso y el logro de todos los estudiantes.
- Los estudiantes deben aprender las matemáticas entendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de sus experiencias y conocimientos previos.
- La evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas relevantes y proveer de información útil tanto a profesores como estudiantes.

Tabla 2.3. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

COMPONENTES:	INDICADORES:
Intereses y necesidades	• Las tareas tienen interés para los alumnos. • Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	• Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. • Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	• Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. • La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia • Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

La resolución de situaciones problemas involucra además de prácticas operativas y discursivas aspectos afectivos por parte del estudiante en relación con sus creencias, actitudes, emociones o valores que inciden en la respuesta requerida. Para lograr una alta Idoneidad Afectiva que interactúe positivamente con el dominio cognitivo es necesario establecer normas institucionales de índole afectivo que se concretizan con el trabajo del profesor. (Godino, 2011)

Tabla 2.4. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

COMPONENTES:	INDICADORES:
Interacción docente-discente	• El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) • Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) • Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento. • Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. • Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.
Interacción entre alumnos	• Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. • Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. • Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	• Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
Evaluación formativa	• Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

Para lograr la Idoneidad Interaccional es fundamental promover instancias donde los estudiantes asuman la responsabilidad del aprendizaje, este principio es esencial en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1997) donde a partir de las fases de acción, comunicación y validación los estudiantes son protagonistas en la construcción de conocimiento. En este mismo sentido, Frankle, Kazemi y Battey (2007, citado en Godino, 2011) se refieren a la importancia del diálogo en los procesos de enseñanza-aprendizaje, básicamente porque representa un medio que provee información con respecto a las ideas matemáticas que tienen los estudiantes permitiendo a los profesores un mayor conocimiento sobre sus aprendices. Así, los docentes deben proporcionar ambientes de aprendizaje donde se propicie la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes.La Educación matemática realista asume un principio de interacción en que la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. Las diversas interacciones (estudiante-estudiante, profesor-estudiante, etc.) permiten reflexionar a partir de lo manifestado por los demás y con ello alcanzar niveles más altos de comprensión matemática. Los estudiantes deben ser participantes activos en el proceso de enseñanza aprendizaje, es decir, deben explicar, justificar, cuestionar y reflexionar sobre los temas que se están abordando. (Van Den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005, citado en Godino, 2011)

Tabla 2.5. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

COMPONENTES:	INDICADORES:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	• Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. • Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	• El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. • El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). • El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	• El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida. • Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. • Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

El uso apropiado de la tecnología es uno de los aspectos fundamentales para alcanzar una alta Idoneidad Mediacional.

> La tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este medio puede influenciar positivamente en lo que se enseña y a su vez, incrementar el aprendizaje de los estudiantes. Las escuelas deben asegurar que todos sus estudiantes tengan acceso a la tecnología, los profesores efectivos maximizan el potencial de la tecnología para desarrollar la comprensión de los estudiantes, estimular su interés, e incrementar su proficiencia en matemáticas. Cuando la tecnología se usa estratégicamente, puede proporcionar acceso a las matemáticas para todos los estudiantes. Asimismo, las calculadoras y demás herramientas tecnológicas, como sistemas de cálculo algebraico, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo y dispositivos

de presentación interactiva, son componentes vitales de una educación matemática de alta calidad (NCTM, 2000, citado en Godino, 2011, p. 13).

Tabla 2.6. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

COMPONENTES:	INDICADORES:
Adaptación al currículo	• Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	• Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. • Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	• Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
Educación en valores	• Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	• Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

La idoneidad ecológica se refiere a la pertinencia de la enseñanza de un objeto matemático especifico en un determinado contexto, considerando además del aula todo lo que condiciona la actividad de aprendizaje, por ejemplo aquello que viene determinado por la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas. Los procesos de enseñanza-aprendizaje que se desarrollan en contextos escolares son orientados por proyectos educativos donde se plasma los elementos teóricos bajo el que surgen los objetivos pedagógicos. Asimismo, se definen propósitos y valores para la educación de ciudadanos y profesionales. El profesor forma parte de una comunidad educativa quien desde su expertiz aporta conocimientos matemáticos, didácticos y pedagógicos útiles para los procesos de instrucción matemática (Godino, 2011).

> Skovsmose, (1994, citado en Godino, 2011) señala, la educación matemática crítica aporta ideas para lograr que la educación matemática permita a los ciudadanos ser parte activa de una sociedad democrática. Más allá del aprendizaje matemático individual de cada persona, se hace necesario formular reflexiones sobre las consecuencias colectivas de este aprendizaje en la sociedad actual. En la escuela, la práctica matemática puede ejercer una enorme influencia en dos sentidos totalmente opuestos: por un

> lado, la matemática reducida a meros cálculos rutinarios puede reforzar actitudes pasivas y complacientes y, por otro lado, la matemática en su sentido más amplio puede desarrollar el pensamiento crítico y alternativo. (p. 14)

Breda y Lima (2016, p. 80-83) proponen una lista de componentes e indicadores descritos en las tablas 2.7, 2.8, 2.9. 2.10, 2.11, 2.12 que representan una reorganización de los componentes e indicadores propuestos en Godino (2011); Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013). La idoneidad didáctica representa una herramienta que permite transitar desde una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa, es decir, a una didáctica que orienta hacia procesos de enseñanza aprendizaje efectivos (Godino, Rivas y Arteaga, 2013). En este sentido, Breda, Font, Pino-Fan (2018) sugieren complementar la lista de indicadores a partir de la reconstrucción del significado holístico de referencia de una noción matemática específica que se quiera enseñar.

> Los criterios de idoneidad son reglas de corrección útiles en dos momentos de los procesos de estudio matemáticos. A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan cómo se deben hacer las cosas. A posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de estudio efectivamente implementado (Breda y Lima, 2016, p. 78).

Tabla 2.7. Componentes y descriptores de idoneidad epistémica (matemática)

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Errores	• No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	• No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	• La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Argumentos	• Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar (contemplada en el currículo) • Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. • Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico, ...), tratamientos y conversiones entre los mismos.

Tabla 2.8. Componentes y descriptores de idoneidad cognitiva

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Conocimientos previos (Componentes similares a la idoneidad epistémica)	• Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). • Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptación curricular a las diferencias individuales	• Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje:	• Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos/competencias pretendidas o implementadas.
Alta demanda cognitiva	• Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.) • Promueve procesos meta-cognitivos.

Tabla 2.9. Componentes y descriptores de idoneidad emocional

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Intereses y necesidades	• Selección de tareas de interés para los alumnos. • Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	• Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. • Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	• Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. • Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Tabla 2.10. Componentes e descriptores de idoneidad interaccional

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Interacción docente-discente	• El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) • Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.) • Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento. • Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. • Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión.
Interacción entre discentes	• Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. • Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	• Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
Evaluación formativa	• Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

Tabla 2.11. Componentes y descriptores de idoneidad mediacional

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, computadoras)	• Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. • Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	• El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. • El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). • El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (de la enseñanza colectiva /tutorización, tiempo de aprendizaje)	• Adecuación de los significados pretendidos/implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial). • Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. • Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad.

Tabla 2.12. Componentes y descriptores de idoneidad ecológica

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Adaptación al currículo	• Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Conexiones intra e interdisciplinares	• Los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos (conexión de matemáticas avanzadas con las matemáticas del currículo y conexión entre diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo) o bien con contenidos de otras disciplinares (contexto extra-matemático bien con contenidos de otras asignaturas de la etapa educativa).
Utilidad socio-laboral	• Los contenidos son útiles para la inserción socio-laboral.
Apertura hacia la innovación didáctica	• Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. • Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.

2.5. Problema de Investigación

Diversos estudios se han interesado por indagar la problemática referida a la formación de profesores. En el capítulo 1 se describió ampliamente la problemática relativa a determinar el conocimiento que los profesores de matemáticas deberían tener para desempeñarse eficazmente en su práctica y promover el aprendizaje de sus estudiantes. Asimismo, se presentaron los resultados de numerosas investigaciones que se han interesado por indagar las dificultades que se suscitan en los procesos de enseñanza-aprendizaje sobre la noción de función. El modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) propuesto por Pino-Fan y Godino (2015) aporta un sistema de categorías y subcategorías del conocimiento que el profesor debe conocer, comprender, saber aplicar y valorar, además proporciona herramientas de análisis elaboradas en el seno del marco teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS). Si bien una tendencia actual en la educación matemática ha sido caracterizar el conocimiento de los profesores para la enseñanza idónea de las matemáticas "la transferencia entre los resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas y la realidad del aula, es en general muy lenta y a veces escasa" (Deulofeu, 2001, p. 367).

La noción de función es uno de los objetos matemáticos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora. No obstante, es un concepto complejo debido a la multiplicidad de registros representativos que generan distintos niveles de abstracción (Ramos, 2005). La comprensión de esta noción matemática es fundamental, dado que opera sobre otros objetos matemáticos y presenta una utilidad práctica en la resolución de problemas. Su estatus y presencia en el currículo escolar ha conduciendo la atención hacia el conocimiento requerido por los profesores para lograr una enseñanza matemáticamente efectiva. En virtud de lo anteriormente expuesto, es que surgen algunas interrogantes relacionadas con el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre la noción de función. Con más precisión nos cuestionamos ¿Cuál es el conocimiento requerido por los profesores para lograr una alta idoneidad didáctica en el desarrollo de las clases sobre funciones? ¿Qué conocimientos movilizan actualmente los profesores en formación para la enseñanza de las funciones?

2.5.1. Preguntas y Objetivos de Investigación

En virtud de las diversas problemáticas que se suscitan en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la noción de función y que fueron descritas en el capítulo 1 de antecedentes, nuestra problemática puede resumirse con las siguientes preguntas de investigación (PI):

> **PI-1:** ***¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático de referencia que permite la gestión efectiva de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la noción de función?***

> **PI-2:** ***¿Qué conocimientos didáctico-matemáticos, respecto al de referencia, manifiestan futuros profesores de matemáticas de enseñanza media chilenos, en sus prácticas de enseñanza sobre la noción función, en contextos de microenseñanza?***

En relación con las preguntas de investigación se propone el siguiente objetivo general (OG):

> **OG:** ***Caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores chilenos de matemáticas de enseñanza media a partir de los procesos de instrucción que realizan para la enseñanza de la noción función en contextos de microenseñanza.***

Para la concreción del (OG), hemos propuesto los siguientes objetivos específicos (OE). Estos objetivos se derivan de las preguntas de investigación cuyas respuestas permitirán cumplir con los propósitos de este estudio.

OE-1: ***Determinar los conocimientos didáctico-matemáticos de referencia sobre la noción de función que permitan, a los profesores y futuros docentes, orientar el diseño, implementación, reflexión y valoración de los procesos de instrucción que se realizan sobre dicho objeto matemático***

OE-2: ***Diseñar e implementar ciclos de formación inicial de profesores mediante contextos de microenseñanza, en los que futuros profesores puedan poner en juego sus conocimientos didáctico-matemáticos para la planificación, implementación y reflexión de clases sobre funciones***

OE-3: ***Caracterizar mediante la herramienta teórico-metodológica propuesta en OE-1 los conocimientos didáctico-matemáticos de profesores chilenos en formación, cuando realizan procesos de instrucción (planificación, implementación y evaluación) sobre la noción de función en contextos de microenseñanza.***

OE-4: ***Contrastar las similitudes y complementariedades respecto del conocimiento didáctico-matemático que ponen en juego dos futuros profesores chilenos en sus prácticas de enseñanza sobre funciones, en contextos de microenseñanza.***

2.6. Metodología

La investigación trata de un estudio cualitativo, particularmente, un estudio de caso (Creswel 2009), dado que estamos interesados en sistematizar estrategias y herramientas metodológicas para orientar la reflexión sobre los procesos de enseñanza de la noción de función. Para ello, se definirán criterios de idoneidad didáctica específicos para la enseñanza de funciones y, debido a la exigua investigación sobre experiencias prácticas en la formación profesional de los profesores (Steele, Hillen y Smith 2013), analizaremos el proceso de instrucción matemática desarrollado por dos profesores chilenos en formación cuando afrontan la enseñanza de funciones en contexto de microenseñanza.

Para elaborar nuestra propuesta de componentes y descriptores, sobre los criterios de idoneidad didáctica específicos para la enseñanza de funciones, nos basaremos en: 1) Las herramientas teórico-metodológicas descritas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS), particularmente nos apoyaremos en los criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2011; Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013) que permiten categorizar los elementos intervinientes en cada una de las dimensiones del modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) (Pino-Fan y Godino, 2015); 2) La revisión y aportes de literatura científica relativa a la noción de función; 3) La propuesta teórica del conocimiento del profesor sobre funciones de Nyikahadzoyi (2013); y Los resultados de un estudio histórico-epistemológico y curricular (Parra-Urrea 2015; Pino-Fan, Parra-Urrea y Castro 2019), el que permitió identificar los diversos significados que ha adquirido la noción de función a lo largo de su origen, evolución y formalización, es decir, la función como: correspondencia, relación entre magnitudes variables, representación gráfica, expresión analítica, correspondencia arbitraria, y a partir de la teoría de conjuntos.

La determinación de criterios de idoneidad específicos para la enseñanza de las funciones, nos permitirá disponer de una herramienta teórico-metodológica que describe el conocimiento didáctico-matemático de referencia sobre la noción de función. Al mismo tiempo, emplearemos dicha herramienta para caracterizar, valorar y reflexionar sobre el conocimiento del profesor cuando afronta la enseñanza de funciones en contextos de microenseñanza. La microenseñanza constituye un espacio de retroalimentación controlado y seguro que ofrece al profesor en formación una oportunidad de autobservarse y reflexionar sobre su práctica. Esto para mejorar el desempeño docente y con ello lograr una gestión de aula y del contenido más efectiva. En esta instancia se discutirá: cómo afrontar definiciones, procedimientos, explicaciones, interacciones más adecuadas; cómo movilizar conocimientos y recursos de forma creativa; cómo potenciar el interés en los estudiantes por el estudio de la matemática, entre otros. Todo lo anterior, fomentará en los futuros profesores la capacidad de análisis cuando gestionan las actividades de una secuencia didáctica, los preparará para el desarrollo progresivo de su autonomía como docentes y propiciará la reflexión consciente y crítica de los procesos de enseñanza-aprendizaje propios o de otros (Altuk, Kaya y Bahceci, 2012; Erokten y Durkan, 2009).

2.6.1. Fases y tareas de investigación

Para la consecución de cada uno de los objetivos específicos, descritos anteriormente, nos hemos propuesto las siguientes fases de investigación:

Fase 1: Tareas de investigación relacionadas con OE-1

- Revisión de las distintas perspectivas teóricas interesadas por estudiar la problemática referida a los conocimientos que deben poseer los profesores para la enseñanza de nociones específicas.

- Revisión de la literatura científica específica en el campo de la Educación Matemática referida a estudios sobre aspectos epistémicos, cognitivos, afectivos, mediacionales, interaccionales y ecológicos sobre la noción de función.
- Elaboración de componentes y descriptores de idoneidad didáctica específicos para la enseñanza de funciones. A partir de la revisión de literatura y de los trabajos desarrollados por Godino (2011) y Breda y Lima (2016).
- Determinación del conocimiento didáctico-matemático de referencia para los procesos de instrucción sobre la noción de función.

Fase 2: Tareas de investigación relacionadas con OE-2

- Revisión de la literatura sobre los aportes y beneficios de los contextos de microenseñanza en la formación de profesores.
- Implementación de procesos de instrucción sobre la noción de función, desarrollados por futuros profesores chilenos en contexto de microenseñanza.

Fase 3: Tareas de investigación relacionadas con OE-3

- Análisis y caracterización del conocimiento didáctico-matemático de dos profesores chilenos en formación cuando afrontan la enseñanza de funciones en contextos de microenseñanza.
- Retroalimentación y reflexión de la practica docente ejercida por los dos profesores chilenos en formación cuando afrontan la enseñanza de funciones en contextos de microenseñanza.

Fase 4: Tareas de investigación relacionadas con OE-4

- Contrastar similitudes y complementariedades de los profesores bajo estudio cuando afrontan la enseñanza de funciones.
- Realizar una síntesis de los resultados más relevantes del estudio.

2.6.2. Sujetos y contexto

En esta investigación se analizan dos procesos de instrucción sobre la noción de función desarrollados por dos profesores chilenos en formación que para efectos del estudio llamaremos Profesor A y Profesor B. Al momento de la experimentación los futuros profesores estaban cursando el sexto semestre de la carrera de Pedagogía de Educación Media en Matemática de una Universidad Chilena. La duración total de este programa de estudios es de ocho semestres y posee lineas de formación en las áreas de matemática, pedagogía/fundamentos de la educación, informática educativa, educación integral y práctica. Las asignaturas que habían sido cursadas por los profesores A y B cuando se llevó a cabo el estudio son: álgebra básica, sistemas numéricos, geometría y trigonometría básica, álgebra de funciones, geometría analítica en $\mathbb{R}^2$, cálculo diferencial, cálculo integral, alfabetización tecnológica, software matemático, tecnología de multimedios, informática educativa, aprendizaje y desarrollo, planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje, evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje, entre otros. Cabe destacar que, los profesores A y B estaban cursando la primera asignatura de didáctica de las matemáticas mientras se desarrollaba este estudio.

La clase sobre función potencia realizada por el profesor A y el proceso de instrucción sobre función inversa efectuado por el profesor B se desarrollaron como una de las actividades exigidas en la asignatura de práctica progresiva III. El modelo formativo de la carrera de Pedagogía de Educación Media en Matemática fomenta la vinculación temprana del estudiante con su quehacer profesional mediante la inserción a prácticas progresivas desde el cuarto semestre de carrera. En este estudio participaron 6 profesores en formación que cursaban el sexto semestre de la carrera, entre ellos los profesores A y B. La investigación, se llevó a cabo a lo largo de todo un semestre académico donde los profesores en formación implementaron procesos de instrucción y pusieron en juego sus conocimientos didáctico-matemáticos. Concretamente, en cada proceso de enseñanza-aprendizaje sobre funciones, un profesor en formación cumplió el rol de docente y los cinco restantes el rol de estudiantes que para efectos del estudio, llamaremos Estudiante 1, 2, 3, 4 y 5.

El estudio de la noción de función potencia se realiza en Chile en cuarto año medio (enseñanza escolar secundaria), es decir, con estudiantes de 17-18 años. Del mismo modo, el estudio de la función inversa se realiza con estudiantes del plan diferenciado de matemática de cuarto año medio. La formación diferenciada de matemática ofrece oportunidades de profundizar materias ya aprendidas, de modo de aumentar sus posibilidades de aplicación y también de tener una primera aproximación a temas que encontrarán en los currículos de nivel superior (educación universitaria).

2.6.3. Instrumentos para la recolección de datos

Como hemos señalado, las clases desarrolladas por los profesores A y B sobre función potencia e inversa respectivamente serán realizadas en un contexto de microenseñanza, es decir, en un espacio seguro y controlado que permite el análisis, autobservación y autorreflexión de la labor que ejerce el profesor en formación en el proceso de instrucción matemática (e.g., Fernández 2010; Arsal 2014). En ambas clases, profesores en formación de sexto semestre cumplirán el rol de estudiantes de cuarto año medio. Para la recolección de la información se filmarán las clases simuladas cuya duración será de 40 minutos cada una. El análisis de videograbaciones representa un elemento que contribuye al proceso de retroalimentación, pues permite observar diversos aspectos de los procesos de enseñanza aprendizaje: comunicación-interacción en el aula, uso de recursos didáctico-matemáticos, pertinencia de las definiciones y actividades motivacionales empleadas, entre otros, de este modo se busca mejorar el desempeño docente y con ello lograr una gestión de aula y del contenido más efectiva (Donnelly y Fitzmaurice, 2011). Luego de finalizar ambas clases se efectuará un momento de retroalimentación entre formador y los profesores en formación, esto con el propósito de precisar ciertas nociones y elementos que intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje sobre funciones. Además, se identificarán fortalezas, se explorarán debilidades, y se proporcionará una mayor reflexión de las interacciones en el aula mediante la revisión de la videograbación. El formador, facilitará el diálogo para el intercambio de ideas y comentarios sobre el desempeño de los profesores A y B, lo anterior permitirá que los futuros docentes logren reflexionar sobre la práctica y determinen acciones para mejorar el proceso de instrucción. Cabe destacar, que para facilitar los análisis ambas clases serán transcritas.

2.6.4. Técnicas para el análisis de datos

La técnica de análisis usada para caracterizar el conocimiento de los profesores en formación sobre la noción de función será, además de las orientaciones y herramientas metodológicas propuestas por el Conocimiento Didáctico Matemático (CDM), la determinación de criterios de idoneidad didáctica para cada una de las seis facetas que intervienen en los procesos de instrucción sobre funciones, dichos criterios se basan en el modelo propuesto por el EOS (Godino, Batanero, Rivas y Arteaga 2013; Breda, Font y Pino-Fan 2018). El uso de esta herramienta en conjunto con los elementos de la configuración de objetos(elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos)(Godino, Batanero y Font, 2007) facilitarán la descripción y análisis de la actividad didáctico-matemática realizada por los profesores A y B. Asimismo, orientará la instancia de retroalimentación, reflexión y valoración de la práctica docente que ejercen los profesores bajo estudio. En general, en el transcurso del estudio y para cada fase de investigación, se utilizarán las distintas herramientas de análisis que nos proporciona el Enfoque Ontosemiótico, mismas que se han presentado en el apartado 2.4. de este capítulo.

CAPÍTULO 3

SISTEMATIZANDO EL DISEÑO Y REFLEXIÓN DE LOS PROCESOS INSTRUCCIONALES SOBRE FUNCIONES

3.1. Introducción

Diversos estudios sobre formación de profesores señalan que la reflexión sobre la práctica docente es una estrategia clave en el desarrollo profesional (Breda, Font, Pino-Fan, 2018). Si bien no podemos esperar que desde la Didáctica de la Matemática deriven 'recetas' generales para la enseñanza de nociones especificas, es razonable pensar que desde la investigación en educación matemática se propongan herramientas que orienten tanto la práctica docente como la reflexión sobre la misma. Godino, Batanero Rivas y Arteaga (2013) proponen sistematizar componentes e indicadores que representen una guía para el profesor de matemáticas que desee diseñar y valorar procesos de enseñanza-aprendizaje. Dado que la aplicación de esta herramienta podría permitir alcanzar altos niveles de idoneidad didáctico-matemática, en este capítulo presentamos componentes e indicadores de idoneidad didáctica (siguiendo el modelo propuesto por el enfoque ontosemiótico (EOS)) para cada una de las seis facetas que intervienen en los procesos instruccionales sobre funciones.

3.2. Síntesis de la literatura científica sobre la enseñanza de funciones

La noción de función ha sido objeto de especial atención en distintas aproximaciones teóricas, particularmente, cuestiones de índole cognitiva, relacionadas con las dificultades que poseen los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que involucran dicho objeto matemático, y procesos instruccionales, en las que se discuten dificultades asociadas a la enseñanza de funciones. En relación con lo segundo, Dede y Soybaş (2011) señalan que los profesores en formación tienen dificultades para diferenciar y relacionar expresiones matemáticas que representan una función o ecuación, es decir, el conocimiento de los futuros profesores de matemática sobre estos conceptos se basa únicamente en definiciones 'puras' y fragmentadas impidiendo avanzar hacia un significado holístico de la función. Al respecto, Norman (1992) ya señalaba que los docentes tienen dificultades para conceptualizar las funciones, es decir, aprueban definiciones informales del objeto -consideradas útiles para determinar la funcionalidad de las relaciones- y las perciben como definiciones matemáticamente formales. En este sentido, Dede y Soybaş (2011) señalan que proporcionar a los estudiantes la definición no es suficiente para lograr una comprensión significativa del objeto función, y evidencian que profesores en formación definen esta noción matemática sin considerar algunos de los 'subconceptos' esenciales e inherentes a las funciones (e.g., dominio, codominio, preimagen, variable, etc.). En este mismo sentido, Even (1993) refiere a dos rasgos esenciales de la noción de función, arbitrariedad y univalencia, y señala que los profesores no perciben la naturaleza arbitraria de las funciones, y muy pocos pueden explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia.

Según Deulofeu (2001), la noción de función en ocasiones es presentada como un objeto matemático que no guarda relación con otros previamente trabajados, esta es una apreciación que se tiene cuando se analizan muchos de los textos escolares y cuando se constata que, por ejemplo, al introducir el estudio de la función lineal, la relación con problemas de proporcionalidad muchas veces es escasa o inexistente. Por su parte, Artigue (1995), explicita que las dificultades cognitivas presentes en los estudiantes son producto de los hábitos de enseñanza tradicional, pues el gran predominio que en ella se otorga al registro algebraico (simbólico-formal) impide a los estudiantes lograr flexibilidad en el pasaje de un registro a otro. En la práctica, la noción de función (dada esencialmente por la definición) resulta cognitivamente difícil de alcanzar y los estudiantes acceden al concepto a través de ejemplos de variadas formas: metáforas, representaciones, diagramas de conjuntos, etc. (Akkoc y Tall 2002).

Las funciones admiten una variedad de representaciones (algebraicas, gráficas, tabulares, verbales) que otorgan información relevante sobre aspectos particulares del objeto matemático. No obstante, ninguna de ellas logra describir completamente la noción de función. De este modo, la falta de competencia por parte de los profesores para coordinar las múltiples representaciones asociadas a las funciones podría obstaculizar la comprensión de los estudiantes (Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia y Philippou, 2017). Esto además, podría provocar que los estudiantes conciban las representaciones como entidades estáticas e independientes, es decir, presentarían dificultades para entender que diversas representaciones describen una misma idea u objeto matemático (Wang, Barmby y Bolden, 2017). Según Makonye (2014), utilizar diferentes contextos e interrelacionar las diversas representaciones de las funciones favorece el aprendizaje, la fluidez de los procedimientos y aumenta el interés de los estudiantes por el estudio de dicho objeto matemático.

Además de los trabajos que evidencian los tipos de representaciones, sus bondades y desventajas, con los que tradicionalmente se introduce y estudia la noción de función (e.g., Tassara, Detzel y Ruiz 2004; Nitsch et al. 2015; Adu-Gyamfi y Bossé 2013), existen otros estudios que se centran en recursos como las metáforas que utilizan los profesores para 'facilitar' la comprensión de los estudiantes, y evidencian que aunque las metáforas pueden servir como un puente conceptual (que permite además ampliar el significado que tiene para una persona la noción de función), los profesores las usan de manera poco consciente, creyendo que sus efectos en la comprensión de sus estudiantes son inocuos (Font y Acevedo, 2003).

Kontorovich (2016) en su estudio sobre la comprensión del símbolo polisémico del superíndice (-1), que se usa para indicar la inversa de una función y el recíproco de un número real, constata que la interpretación de dicho símbolo representa un gran problema para los profesores de matemáticas en formación. Esto ocurre particularmente porque la mayoría de ellos tratan el símbolo (-1) como un homónimo, es decir, al símbolo le asignan significados diferentes sin considerar el contexto, lo que se enfatiza en las diferencias de procedimiento en la determinación de funciones recíprocas e inversas. Según Sintema y Marban (2021) los profesores en formación tienen dificultades para comprender la noción de función y poseen escaso conocimiento sobre dicho objeto matemático. En su estudio constatan que los profesores son conscientes de las condiciones bajo las cuales existen las funciones inversas, sin embargo, confunden la composición de funciones con la multiplicación ordinaria; exhiben un conocimiento insuficiente del significado de las funciones inversas y presentan inconvenientes para promover situaciones de la vida real que podrían favorecer en sus estudiantes el aprendizaje de funciones y motivar su estudio.

El tratamiento de los ejemplos utilizados por los docentes en el aula permite identificar aspectos significativos de su conocimiento base pedagógico y matemático que pueden apoyar o limitar el aprendizaje en sus estudiantes (Zaslvsky, Harel y Manaster, 2006). En este sentido, según Figueiredo, Contreras y Blanco (2012), la ejemplificación presentada por profesores en formación en el desarrollo de sus clases corresponde mayoritariamente a ejemplos y/o ejercicios típicos que requieren el uso de procedimientos o la aplicación de teoremas, con que los estudiantes aprenden algoritmos vistos como una herramienta de resolución. Por su parte, los docentes con mayor experiencia utilizan ejemplos que surgen posterior a la fase exploratoria de la noción de función, es decir, los estudiantes se enfrentan a la tarea de profundizar el concepto y sus diversas representaciones, son ejemplos que tienen por objetivo clarificar y ampliar las características cognoscibles de las funciones, atender a las dudas de los estudiantes y evitar situaciones de confusión. Por su parte Cooney, Beckmann y Lloyd (2010, citado en Hatisaru y Erbas, 2017) afirman que los profesores deben movilizar en los procesos de instrucción sobre funciones cinco aspectos fundamentales: 1) la definición de función, 2) covariación y tasa de cambio, 3) familias de funciones, 4) combinación y transformación de funciones, y 5) múltiples representaciones.

Durante el último cuarto de siglo, la noción de función se ha convertido en un tema unificador en los planes de estudio de matemáticas, dejando de reservar dicho objeto matemático para niveles educativos superiores. Por lo general, la definición de función, su representación simbólica y gráfica y el estudio de funciones lineales y cuadráticas se estudiaban a nivel escolar, por su parte, las funciones exponenciales, trigonométricas estaban históricamente reservadas para cursos dirigidos a estudiantes universitarios. Esta secuencia podría conducir a los estudiantes a la comprensión de conceptos aparentemente disconexos. De este modo, se ha consensuado que los fundamentos conceptuales de la función son accesibles y se pueden enseñar desde los grados intermedios de escolaridad cambiado el lugar de la noción de función en las matemáticas escolares (NCTM 2000; CCSS 2010, citado en Steele, Hillen, y Smith, 2013).

3.3. Componentes e indicadores para el diseño y reflexión de la enseñanza sobre funciones

Lo presentado hasta aquí, muestra una perspectiva panorámica general de los avances y aportes de la literatura científica sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones. Los componentes e indicadores que a continuación se presentan representan un recurso orientador para los procesos de instrucción efectiva sobre funciones. Además, permiten la valoración de acciones formativas planificadas o implementadas sobre dicho objeto matemático. El diseño de esta herramienta teórico-metodológica se ha basado en la exhaustiva revisión de literatura presentada en el capitulo 1, en los trabajos desarrollados por (Godino, Batanero, Rivas y Arteaga 2013; Breda, Font y Pino-Fan, 2018), en el marco teórico del conocimiento del profesor sobre funciones propuesto por Nyikahadzoyi (2013) y en los resultados de un estudio histórico-epistemológico y curricular (Parra-Urrea, 2015; Pino-Fan, Parra-Urrea y Castro, 2019) que permitió identificar los diversos significados que ha adquirido la noción de función a lo largo de su origen, evolución y formalización.

3.3.1. Idoneidad epistémica para la enseñanza de funciones

Alcanzar una alta idoneidad epistémica en los procesos de instrucción sobre funciones requiere del diseño y selección apropiada de situaciones-problemas que involucren dicho objeto matemático y de la articulación de los diversos significados parciales asociados a dicho objeto matemático (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2006). Además, es fundamental movilizar las distintas representaciones del objeto función (algebraica, gráfica, tabular, verbal) (Even, 1998), esto dado que la capacidad de coordinar dos o más representaciones es vista como un sello distintivo para el desarrollo de competencias matemáticas (Wills, Shipley, Chang, Cromley y Booth, 2014, citado en Amaya, Castellanos y Pino-Fan, 2021, p. 2). En este mismo sentido, se debe promover definiciones que consideren los características fundamentales de la noción de función (arbitrariedad, existencia, univalencia) (Even, 1993). Las tareas propuestas deben admitir diversas formas de resolución, por tanto, variados procedimientos que deben ser debidamente justificados. Es esencial evitar en el proceso de enseñanza-aprendizaje ambigüedades o creencias que conlleven a conceptualizaciones erróneas sobre funciones. Finalmente, es importante que la noción de función se vincule con otros objetos matemáticos de distintos niveles educativos para mostrar su carácter unificante y modelizador (Deulofeu, 2001). En la siguiente tabla (ver tabla 3.1) se describen aspectos esenciales para lograr una alta idoneidad epistémica.

Tabla 3.1. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica para la enseñanza de funciones

COMPONENTES:	INDICADORES:
Situaciones-problemas	• Se presentan problemas que movilizan, representativamente, los seis significados de referencia de la función.

Continúa en la siguiente página.

	• Se presentan problemas para reforzar conocimientos previos relacionados con la noción de función. • Se presentan problemas para ejemplificar distintas definiciones de la noción de función. • Se presentan problemas en contextos puramente matemáticos para reforzar el aprendizaje sobre funciones. • Se presentan problemas contextualizados provenientes de la vida cotidiana o de otras ciencias para reforzar el aprendizaje sobre funciones.
Lenguajes	• Se movilizan las representaciones vinculadas a la función (verbal, simbólica/algebraico, tabular, gráfica e icónica). • Se promueven tratamientos en los diversos registros de representación (verbal, algebraico, tabular y gráfico). Por ejemplo, dada la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2+2x+1$ se aplica un tratamiento de factorización para obtener la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x+1)^2$, el tratamiento de la función original no debe alterar el dominio ni el rango de la función resultante, en caso contrario la función no es la misma. • Se promueven conversiones entre los diversos registros de representación (verbal, algebraico, tabular y gráfico). Por ejemplo, para acceder a la idea de continuidad es conveniente utilizar un registro gráfico; para potenciar la idea de correspondencia es pertinente utilizar un registro algebraico.

Continúa en la siguiente página.

Definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos)	• Las definiciones y procedimientos consideran la arbitrariedad y univalencia como características claves de la noción de función. • Se presenta la noción de dominio y codominio como elementos inherentes a la definición de función. • Se promueve el significado de la noción de función pretendido por el currículo escolar, para identificar y argumentar relaciones funcionales en sus diversas representaciones. • Se presentan enunciados y procedimientos fundamentales relativos a la noción de función adecuados al nivel educativo. • Se promueven situaciones en que los estudiantes deben justificar sus conjeturas y procedimientos. • Se identifican y articulan los diversos significados de la noción de función, es decir, la función como: correspondencia, relación entre magnitudes variables, representación gráfica, representación analítica, correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos.
Errores, ambigüedades y creencias	• El trabajo con funciones no se limita al uso de representaciones algebraicas para evitar que se perciban solo como fórmulas y regularidades. • Se evita la creencia de que un cambio en la variable independiente implica necesariamente un cambio en la variable dependiente, pues de lo contrario una función constante podría no ser considerada una relación funcional. • Se presentan relaciones funcionales que no son graficables para evitar la creencia que toda función admite una representación gráfica. • Se evita el error de utilizar curvas continuas para funciones discretas.

Continúa en la siguiente página.

	• Se presentan relaciones funcionales que no tienen asociada una expresión algebraica, una fórmula o ecuación para evitar la creencia que toda función admite una representación algebraica. • Las funciones se presentan con dominios y codominios explícitos para evitar la creencia de que toda función tiene un dominio y codominio natural o real. • Se presentan gráficas “irregulares” para evitar la creencia de que toda función representada gráficamente tiene “buen comportamiento” (simétrica, regular, suave y continua).

3.3.2. Idoneidad cognitiva para la enseñanza de funciones

Alcanzar una alta idoneidad cognitiva implica que el estudiante mediante el proceso de enseñanza-aprendizaje logra la comprensión del significado institucional pretendido sobre la noción de función. Es fundamental en los procesos instruccionales promover el estudio de los diversos significados parciales de la noción función que constituyen el significado holístico de referencia (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2006). En este sentido, es fundamental realizar adaptaciones curriculares apropiadas que incluyan actividades de ampliación, refuerzo, etc. Asimismo, se deben incluir tareas matemáticas en que el estudiante asuma la responsabilidad de resolución. En la siguiente tabla (ver tabla 3.2) se describen aspectos esenciales para lograr una alta idoneidad cognitiva.

Tabla 3.2. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva para la enseñanza de funciones

COMPONENTES:	INDICADORES:
Conocimientos previos	• Se corrobora que los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para introducir la noción de función, entre ellos: patrones y regularidades, proporcionalidad, etc. • Se vinculan los conocimientos previos (patrones y regularidades, proporcionalidad, etc.) con la noción de función. • Desde que se introduce la noción de función, se presentan tareas matemáticas que permiten transitar por las diversas representaciones asociadas a dicho objeto matemático, independiente del nivel educativo.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	• Se incluyen actividades de ampliación, refuerzo, contraejemplos y analogías. Por ejemplo, mostrar una representación gráfica para ilustrar una correspondencia que no verifique la definición de función.
Aprendizaje	• Se emplean diversos instrumentos de evaluación que permiten verificar la representatividad del significado personal del estudiante respecto del significado pretendido o implementado (Ramírez, Ibarra, y Pino-Fan 2020) sobre la noción de función.
Alta demanda cognitiva	• Se promueve el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio, donde la noción de función tiene especial significación totalmente vinculada a sus orígenes epistemológicos. • Se proponen tareas matemáticas donde utilizar la representación gráfica es una estrategia más eficiente de resolver la situación problema, que la representación tabular o algebraica. • Se diferencia y relaciona expresiones matemáticas que representan una función o una ecuación. Por ejemplo, una función lineal puede representarse algebraicamente como $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x$ y en el plano cartesiano como una recta. Es posible que los estudiantes asocien la representación gráfica a la ecuación de la recta y no a una relación funcional de números reales.

3.3.3. Idoneidad afectiva para la enseñanza de funciones

Para lograr una alta idoneidad afectiva es esencial promover el estudio de situaciones-problemas que sean del interés del estudiante y a su vez que muestren la utilidad de las funciones en la resolución de situaciones propias de la vida cotidiana o de otras ciencias (Tassara Detzel y Ruiz, 2004). Además, es fundamental establecer normas institucionales de índole afectivo, es decir, promover la participación, la autoestima, el interés por el estudio de las funciones, la perseverancia etc. evitando de este modo una actitud negativa frente al estudio de las funciones (Salinas y Alanís, 2009). En la siguiente tabla (ver tabla 3.3) se describen aspectos elementales para lograr una alta idoneidad afectiva.

Tabla 3.3. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva para la enseñanza de funciones

COMPONENTES:	INDICADORES:
Intereses y necesidades	• Se presenta la noción de función como una herramienta útil en la resolución de diversos problemas matemáticos provenientes de otras ciencias o de la vida cotidiana. • Se presentan situaciones en que las funciones sirven de modelos matemáticos para el estudio de fenómenos y para expresar la dependencia entre variables. • El estudio de las funciones se realiza de manera similar a su evolución histórica. Es decir, considerando las problemáticas y necesidades que dieron origen a dicho objeto matemático.
Actitudes	• Se promueve la participación en las actividades propuestas, la perseverancia, responsabilidad, etc. • Se favorece el razonamiento lógico, la argumentación, la modelación, el pensamiento analítico y las destrezas para la resolución de problemas.
Emociones	• Se promueve la autoestima, evitando una predisposición negativa al estudio de las funciones. • Se resaltan las cualidades de precisión y rigurosidad de la matemática.

3.3.4. Idoneidad interaccional para la enseñanza de funciones

Para alcanzar una alta idoneidad interaccional es importante promover instancias en donde el estudiante sea el protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, mediante actividades bien planificadas, el estudiante debe construir su conocimiento y acercarse a aquello que se pretende institucionalizar, en este caso la noción de función. Este es el principio fundamental de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007) que mediante su estructura metodológica de enseñanza (acción, comunicación, validación e institucionlización) permite que el estudiante interactúe en el medio, presentando sus conjeturas y estrategias de resolución, justificando y argumentando los procedimientos utilizados y validando sus procesos y resultados. De acuerdo con Godino (2011) Las diversas interacciones (estudiante-estudiante, profesor-estudiante, etc.) permiten reflexionar a partir de lo expuesto por los demás y con ello alcanzar niveles más altos de comprensión matemática. En la siguiente tabla (ver tabla 3.4) se describen aspectos elementales para lograr una alta idoneidad interaccional.

Tabla 3.4. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional para la enseñanza de funciones

COMPONENTES:	INDICADORES:
Interacción docente-discente	• El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave de la noción de función.) • El profesor anticipa y precisa conceptos erróneos de los estudiantes, interpreta pensamientos 'incompletos', predice cómo los estudiantes resuelven tareas específicas y estima aquellas que encontrarán interesantes y desafiantes.

Continúa en la siguiente página.

	• El profesor identifica las concepciones actuales relativas a funciones que poseen los estudiantes y luego utiliza dicha concepción para profundizar o 'reformular' la enseñanza de las funciones. • Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para captar la atención de los estudiantes. • Se facilita la inclusión de los estudiantes en la dinámica de la clase.
Interacción entre alumnos	• Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. • Se busca llegar a consensos a partir de instancias de discusión, análisis y argumentación matemática. • Se favorece la inclusión y participación del grupo, se evita la exclusión.
Autonomía	• Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y los comunican).
Evaluación formativa	• Observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes.

3.3.5. Idoneidad mediacional para la enseñanza de funciones

Alcanzar una alta idoneidad mediacional implica utilizar diferentes medios (representaciones, metáforas, recursos digitales, software matemáticos etc.) para afrontar la enseñanza de las funciones (Font y Acevedo 2003; Font, 2009). Sin duda, el uso apropiado de los recursos tecnológicos podría incrementar y/o facilitar el aprendizaje de los estudiantes, para ello es importante que las instituciones de educación aseguren que todos sus estudiantes tengan acceso a estos recursos. En la siguiente tabla (ver tabla 3.5) se describen aspectos elementales para lograr una alta idoneidad mediacional.

Tabla 3.5. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional para la enseñanza de funciones

COMPONENTES:	INDICADORES:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	• Se utilizan diferentes formas de afrontar la enseñanza de funciones, se presentan diversas secuencias de tareas, representaciones, procedimientos, explicaciones y argumentos vinculados al significado pretendido. • Se accede a la noción de función utilizando diagramas de conjuntos, tablas de valores, conjuntos de pares ordenados, gráficos, expresiones algebraicas, etc. • Se utilizan graficadores informáticos y calculadoras gráficas para modelar relaciones funcionales que permiten visualizar la gráfica de una función como una curva estática y no como la trayectoria de un punto. • Se realiza uso controlado de metáforas, siendo consciente de sus desventajas. Se introduce la noción de función como una máquina; se presentan las curvas como la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones; la gráfica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$, etc.
Número de estudiantes, horario y condiciones del aula	• La distribución de los estudiantes en la sala de clases permite llevar a cabo la enseñanza pretendida de la noción de función. • Se realiza una adecuación del proceso de instrucción matemática apropiado al horario de las clases. • El espacio educativo es adecuado para el desarrollo del proceso instruccional pretendido sobre funciones.
Tiempo (de enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	• El profesor identifica errores frecuentes y se anticipa a las respuestas que pueden emerger ante las preguntas planteadas sobre la noción de función. Esto le permite clasificar las actividades según dificultad, diseñar instrumentos de evaluación, estimar tiempo de procesamiento de una tarea concreta para estudiantes y grupos de aprendizaje específicos.

3.3.6. Idoneidad ecológica para la enseñanza de funciones

Lograr una alta idoneidad ecológica requiere afrontar la enseñanza de la noción de función de manera pertinente al nivel educativo y contexto educativo. El profesor desde su expertiz debe realizar adaptaciones curriculares, conexiones intra e interdisciplinares, utilizar herramientas innovadoras que favorezcan los aprendizajes y promover tareas matemáticas que permitan desarrollar el pensamiento reflexivo y critico de sus estudiantes. En la siguiente tabla (ver tabla 3.6) se describen aspectos elementales para lograr una alta idoneidad ecológica.

Tabla 3.6. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica para la enseñanza de funciones

COMPONENTES:	INDICADORES:
Adaptación al currículo	• La noción de función se presenta como un principio básico y unificador de acuerdo con el currículo escolar secundario. • La instrucción matemática sobre funciones se desarrolla a partir de la modelación de situaciones de la vida cotidiana o de otras ciencias, se interpretan las soluciones de los problemas desde el punto de vista aritmético, algebraico y/o geométrico según corresponda.
Conexiones intra e interdisciplinares	• Se vincula la noción de función con otros objetos matemáticos, tales como: regularidades, proporcionalidad, transformaciones isométricas, determinantes de matrices, límites, derivadas etc. • Se utilizan funciones para dar respuesta a fenómenos físicos sencillos.
Utilidad socio laboral	• Se presentan las funciones como la herramienta más adecuada para dar respuesta a situaciones provenientes de la matemática misma, de otras ciencias o de la vida cotidiana.
Apertura hacia la innovación didáctica	• Se promueve el uso de las tecnologías de la información y la comunicación TIC fundamentalmente como un apoyo para la comprensión de la noción de función y para manipular representaciones vinculadas a dicho objeto matemático.

CAPÍTULO 4

LA NOCIÓN DE FUNCIÓN EN CONTEXTOS DE MICROENSEÑANZA

4.1. Introducción

La microenseñanza constituye un espacio de análisis, autobservación y autorreflexión de la labor que ejerce el profesor en formación en los procesos de instrucción matemática. Además, permite momentos de retroalimentación para mejorar el desempeño docente y con ello lograr una gestión de aula y del contenido más efectiva. En el presente capitulo se describen y analizan los procesos de instrucción matemática desarrollados por dos profesores chilenos en formación cuando afrontan la enseñanza de función potencia y función inversa en contextos de microenseñanza, entendiendo el microteaching como un elemento esencial en la formación de profesores.

4.2. Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) sobre función potencia

A continuación se presenta el análisis de un proceso de instrucción sobre la noción de función potencia en contexto de microenseñanza desarrollada por un profesor en formación que para efectos de este análisis llamaremos profesor A.

4.2.1. Descripción de la práctica desarrollada por el profesor A sobre función potencia

El profesor A inicia el proceso de enseñanza explicitando el objetivo de la clase:

Conocer y comprender el concepto de función potencia y su representación gráfica

Durante el inicio de la instrucción se refuerzan las nociones de potencia y ecuación exponencial. Inmediatamente después procede a definir el objeto función potencia como:

"*Es toda aquella función de la forma $f(x) = ax^n$ donde a es un número real distinto de cero y n debe ser un número natural mayor que cero*".

A continuación el profesor A alude a que existen cuatro casos de funciones potencia y señala:

"*La función potencia con exponente par se define como: Dada $f(x) = ax^n$ si n es un número par sabemos que para cualquier x su resultado será positivo, por lo que ambas ramas (simétricas al eje y) crecen con la misma rapidez en el mismo sentido*". Luego señala: "*Un ejemplo de esta ecuación*". Corrige rápidamente e indica: "*Un ejemplo de esta función es $f(x) = x^6$*". Luego muestra la representación gráfica de la función, utilizando Geogebra. Apoyada en la representación gráfica menciona: "*Si el coeficiente a es positivo las ramas se abren hacia arriba*" (caso 1), "*y si el coeficiente a es negativo las ramas se abren hacia abajo*" (caso 2). Posteriormente a modo de ejemplo plantea la expresión $f(x) = 2x^4$ y efectúa la representación gráfica, para ello recurre a una representación tabular asignando valores a x y obteniendo los valores de y. Cabe destacar que el profesor A al momento de graficar ubica erradamente el par ordenado en el plano -intercambiando la posición de las coordenadas- al cabo de unos minutos corrige el error y señala que la representación corresponde a una parábola positiva.

Seguidamente señala: "*Otros dos casos de función potencia son aquellas cuyo exponente es impar* *con a positivo (caso 3) o bien con a negativo (caso 4)*". El profesor A manifiesta "*Este tipo de función puede ocasionar mayor dificultad*". Una vez que presenta la función $f(x) = 2x^5$ pregunta a sus estudiantes: "*¿Qué ocurre si x es cero?*" El profesor A expone: "*si* $x = 0$*, entonces* $y = 0$ *por ende este tipo de función potencia siempre va a partir del punto cero y se obtendrán los valores positivos y negativos en la rama 1 y 2 respectivamente, es decir, los valores numéricos serán iguales en cada rama pero con signo contrario*" (ver figura 4.1). Ante esta aseveración un estudiante consulta ¿Cuál es el punto cero? el profesor A señala: "*el origen*"

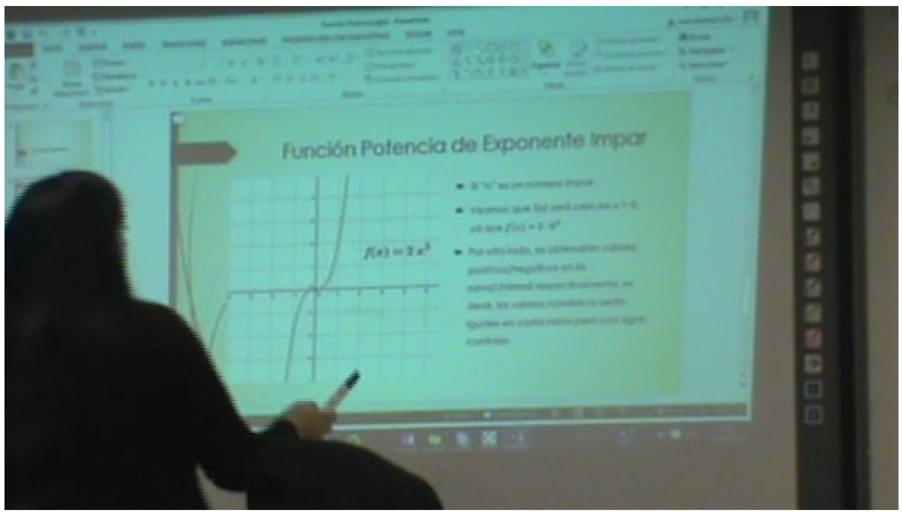


Figura 4.1. Explicación representación gráfica función potencia exponente impar

A continuación, el profesor A plantea como actividad algunas representaciones algebraicas y solicita sus representaciones gráficas; para ello sugiere transitar desde la representación algebraica a la tabular y luego a la gráfica. Posteriormente expone el caso de la función $f(x) = ax^n$ con $n = 1$ y señala: "*¿Cómo se comporta la gráfica de esa función?*" luego de recibir algunas respuestas, manifiesta: "*Efectivamente la gráfica es una recta, por ende representa la gráfica de una función lineal. Por lo tanto, no es una función potencia, ya que su representación no corresponde a una parábola*".

Otra inquietud que el profesor A plantea a sus estudiantes es: "*¿Cómo se comporta la gráfica de la función* $f(x) = x^0$*?*" Ante esta pregunta el profesor A estima conveniente efectuar la gráfica, para ello, utiliza la representación tabular asignando los siguientes valores $(-1, 0, 1)$ a la variable x, y menciona que los valores de la variable y son $(1, 1, 1)$ respectivamente y concluye: "*en este caso se trata de una función constante y no de una función potencia*". Ante esta situación, uno de los estudiantes consulta si $0^0 = 1$. El profesor A señala que en ese momento no podría explicarlo, pero que durante la próxima clase aclarará aquella inquietud.

Posteriormente, se refiere al dominio y al recorrido de la función potencia, para ello presenta la tabla 4.1. Cabe destacar, que en las actividades posteriores, el profesor A solicita: "determinar el dominio y recorrido de las siguientes funciones" (entre las expresiones algebraicas que propone se tiene: $f(x) = x^2$; $f(x) = 5x^3$; $f(x) = -7x^4$). Para resolver la tarea propuesta, sugiere utilizar la información que se presenta en la tabla 4.1

Tabla 4.1. Tabla propuesta por el profesor A para explicar dominio y recorrido de función potencia

	Función par cóncava hacia arriba	Función par cóncava hacia abajo	Función impar
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Recorrido	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^-$	$\mathbb{R}$

Antes de finalizar la clase, un estudiante consulta ¿Qué ocurre si n es negativo? Inmediatamente el profesor A señala: "*veamos el comportamiento de la gráfica de la función* $f(x) = x^{-2}$". Para ello, utiliza la representación tabular asignado los siguientes valores $(-2, 0, 2)$ a la variable x y en conjunto con los estudiantes determina que los valores de la variable y son $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$. En este momento, el profesor A no define adecuadamente el dominio para la relación $y = x^{-2}$, pues si pensamos en la relación como una función de variable y valores reales, se debe tener en cuenta que el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es decir, no se considera la indeterminación de $\frac{1}{0^2}$. Luego el profesor A ubica en el plano cartesiano los pares ordenados $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$, y $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ llama la atención que el profesor A no ubique el par $(0, 0)$ y luego esboce la gráfica correcta de la función. Luego señala: "*Aquí aparece la idea de asíntotas*". Inmediatamente un estudiante pregunta ¿Qué son las asíntotas? La respuesta dada por el profesor A es "*aquellas que nunca van a tocar el eje de la Y y de la X*".

Al finalizar la clase, el profesor A realiza una síntesis de lo abordado durante la clase y refuerza lo siguiente: "*Recordemos que en las funciones potencia el exponente siempre debe ser un número natural mayor que 1 pues si fuese igual a uno se trataría de una función lineal y si fuese igual a cero se trataría de una función constante*"; con este último comentario el profesor A da por finalizada la clase.

4.3. Análisis sobre la práctica: CDM del Profesor A

A continuación, se describe y caracteriza el conocimiento didáctico-matemático (CDM) del profesor A, evidenciado luego del proceso de instrucción matemática que desarrolla sobre la noción de función potencia.

4.3.1. Dimensión Matemática

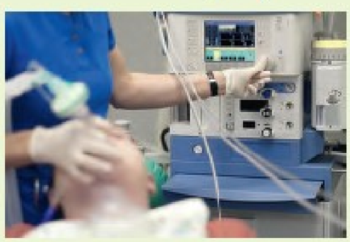
A partir de las *definiciones*, *argumentos* y *justificaciones* (elementos de la configuración onto-semiótica) proporcionadas por el profesor A en el proceso de enseñanza sobre función potencia podemos concluir que el profesor posee un dominio parcial del conocimiento común del contenido. Esto particularmente porque no logra dar respuestas matemáticamente satisfactorias a más de una tarea que propone. Cabe destacar, que las actividades planteadas se corresponden con las que se sugieren en el currículo chileno de cuarto año medio (ver figura 4.2). Durante el proceso de instrucción no se logra percibir el dominio del conocimiento ampliado del contenido del profesor A. Asimismo, no se observan conexiones de la noción de función potencia con objetos matemáticos de niveles educativos más avanzados.

1. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Al anestesiar a un paciente, se debe monitorear la concentración de anestesia en el torrente sanguíneo. En el tiempo $t > 0$ (en horas desde que se aplicó la droga), la concentración (en mg/L) fue modelada por:

$$c_1(t) = \frac{30}{t^2}$$

t	$c_1(t)$
1	30
1,5	$13,\overline{3}$
2	7,5
2,5	4,8
3	$3,\overline{3}$



La anestesia usa fármacos que bloquean la sensibilidad táctil y dolorosa de un paciente. La concentración de la droga es absorbida por el organismo y se reduce hasta que se recupera la sensibilidad.

a. Identifica los valores de *n* y *a* de la función potencia.
b. ¿Cuál es el dominio de la expresión anterior?
c. A partir de la tabla, construye en tu cuaderno la gráfica la función.
d. Si la anestesia se debe volver a inyectar cuando su concentración se encuentre bajo los 1 mg/L, ¿en cuánto tiempo se debe volver a administrar?

Figura 4.2. Actividad propuesta por el curriculo escolar chileno, Texto del estudiante cuarto año medio. (Osorio, et al., 2020. p. 145)

En cuanto a las definiciones, el profesor A al inicio de su clase se refiere a la función potencia como "*Es toda aquella función de la forma $f(x) = ax^n$ donde a es un número real distinto de cero y n debe ser un número natural mayor que cero*". Al observar las definiciones que propone el currículo chileno por medio de sus textos escolares, identificamos lo que se explicita en la figura 4.3

> Llamaremos **función potencia** a una función de la forma $f(x) = a \cdot x^n$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, cuyo dominio está en los reales y su recorrido depende de a y n, donde a es llamado **coeficiente** y n es llamado **exponente**.
>
> Por ejemplo, las siguientes funciones corresponden a funciones potencia:
>
> $f(x) = 3x^5$ $\quad f(x) = 0,2x^{-2}$ $\quad f(x) = -5x$ $\quad f(x) = -7x^{-15}$

Figura 4.3. Definición función potencia propuesta por el curriculo escolar chileno, Texto del estudiante cuarto año medio. (Osorio, et al., 2020. p. 140)

Otras definiciones matemáticamente formales enuncian la noción de función potencia como:

> Una función potencia de grado n es una función de la forma $f(x) = ax^n$ donde a es un número real, $a \neq 0$ y n un número real. Una función potencia es una función que se define por un solo monomio. La gráfica de una función potencia de grado 1, $f(x) = ax$ es una línea recta, con pendiente a, que pasa por el origen. La gráfica de una función potencia de grado 2, $f(x) = ax^2$, es una parábola con vértice en el origen, que abre hacia arriba si $a > 0$ y abajo si $a < 0$. Si $f(x) = x^n$, $n \geq 2$ y n par, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales y el rango es el conjunto de los números reales no negativos. Esta función potencia es un función par de manera que su gráfica es simétrica al eje Y. Su gráfica siempre contiene el origen y los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$. Si se consideran las funciones de potencias de grado impar de la forma $f(x) = x^n$, $n \geq 3$ y n impar. El dominio y el rango de f es el conjunto de números reales. Esta función potencia es una función impar, de manera que su gráfica es simétrica respecto del origen. Su gráfica siempre contiene el origen y los puntos $(-1,-1)$ y $(1,1)$ (Sullivan, 2006; Zill y Dewar, 2012).

Como se puede observar, la definición propuesta por el profesor A no coincide completamente con lo sugerido por el currículo escolar chileno mediante su texto para el estudiante. Del mismo modo, ambas definiciones, poseen diferencias respecto a la enunciación matemáticamente formal que se explicita en Sullivan (2006) y Zill y Dewer (2012). Esto constata las dificultades que se suscitan en la enseñanza de funciones que dificulta el aprendizaje de los estudiantes. Cabe destacar que la clasificación de tipos de funciones potencia descritas por el profesor A son coherentes con lo mencionado en el texto escolar de cuarto año medio cuando se refiere a funciones potencia de exponente positivo (ver figura 4.4).

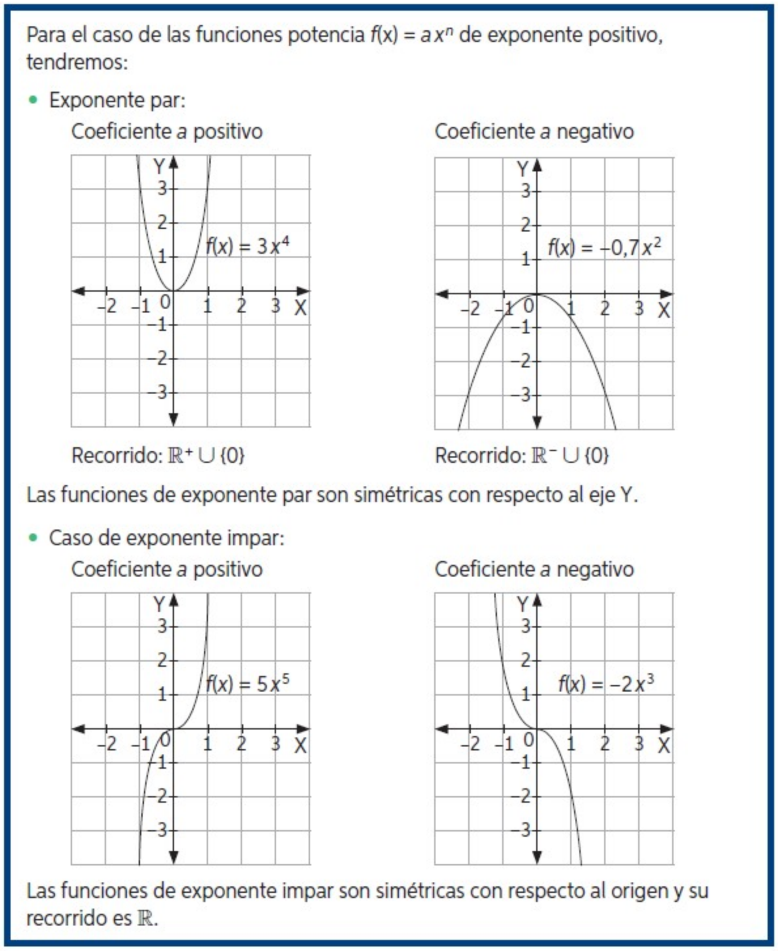


Figura 4.4. Representación gráfica de función potencia con exponente positivo, Texto del estudiante cuarto año medio. (Osorio, et al., 2020. p. 143)

Otro aspecto relevante de señalar, es que el profesor A define dominio y recorrido como conceptos independientes de la noción de función. Esto se evidencia con claridad en la actividad que propone para verificar el comportamiento gráfico de la relación $y = x^{-2}$. En dicha actividad, sugiere transitar desde una representación tabular a la representación gráfica y asigna a la variable x los siguientes valores $(-2, 0, 2)$, luego determina que los valores de la variable y son $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$. Es decir, el profesor A no define adecuadamente el dominio para que la relación $y = x^{-2}$ sea una función de variable y valores reales, es decir, la condición de univalencia no se cumple para $x = 0$. Además, el profesor A no precisa que la relación $y = x^{-2}$ no cumple con la definición de función potencia dada al inicio del clase. Tampoco explicita que dicha relación podría representar una función racional de la forma $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ donde p y q son funciones polinomiales y q no es el polinomio cero, cuyo dominio se define como el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los que el denominador q sea cero, desaprovechando así la oportunidad de mostrar una representación gráfica 'irregular' que admite un comportamiento simétrico, suave y discontinuo.

4.3.2. Dimensión Didáctica

A continuación, analizamos el conocimiento didáctico-matemático (CDM) del profesor A, evidenciado en su práctica. Para ello utilizamos los criterios y descriptores de idoneidad descritos en el capítulo 3.

Idoneidad epistémica sobre la enseñanza de la función potencia

Con respecto a la *riqueza de los procesos* y la *representatividad*, Pino-Fan y Assis (2015) señalan el profesor, además de las matemáticas que le permiten resolver diversas problemáticas donde activa su conocimiento común y ampliado, debe poseer un conocimiento matemático 'perfilado' para la enseñanza, es decir, debe ser capaz de abordar diversas representaciones del objeto matemático función. En relación con el uso de *lenguajes*, durante el proceso de instrucción, el Profesor A moviliza diversas representaciones (algebraica, tabular, gráfica). No obstante, sólo realiza conversiones desde representaciones algebraicas a tabulares y luego a gráficas. Sierpinska (1992) señala la importancia de proporcionar a los estudiantes un amplio espectro de formas de representar la noción de función, a fin de evitar que dichas representaciones se identifiquen con una función en particular.

En cuanto a los *procedimientos* que presenta el profesor A en el desarrollo de las actividades que propone, sólo se identifica la valoración de expresiones algebraicas y luego ubicar los pares ordenados en el plano cartesiano. Es decir, las *situaciones-problema* que se desarrollan durante la clase son para ejemplificar definiciones presentadas y problemas no contextualizados para reforzar las definiciones introducidas. No se identifican tareas contextualizadas que requieran de funciones potencias para modelar fenómenos, ni situaciones que representen relacionales funcionales donde se identifique las condiciones de arbitrariedad y univalencia de la función como características claves de dicho objeto matemático.

Con respecto a los *argumentos*, se identifican ciertas imprecisiones por parte del profesor A, esto se evidencia cuando plantea la expresión $f(x) = x^0$ y propone efectuar la representación gráfica otorgando los valores $-1,0,1$ a la variable x y señala que los valores de y son $1,1,1$; el profesor no logra explicar lo que él mismo propone, y aprueba que $0^0 = 1$, en lugar de definir el dominio de la 'función', lo cual respondería la inquietud de los estudiantes. Además, presenta $f(x) = x^0$ como una función potencia, cuando en la definición inicial que propone señala que n debe ser un natural mayor que cero. Situación similar ocurre cuando propone la relación $y = x^(- 2)$ o cuando se refiere al significado de las asíntotas. Asimismo, durante el desarrollo de la clase, no se evidencian instancias en que el profesor A solicite a sus estudiantes justificar los procedimientos desarrollados y/o interpretar el comportamiento de las gráficas construidas. Aunque intenta responder todas las preguntas de los estudiantes, en ocasiones sus respuestas son poco precisas e incluso incorrectas. Esto se evidencia con preguntas tales como: "¿Profesor $0^0 = 1$?", "¿Una función lineal no es función potencia?","Profesor usted se refirió al punto cero ¿Cuál es ese?", "¿Las gráficas de la función potencia siempre son parábolas?","¿Qué ocurre si en la función $f(x) = ax^n$, n es negativo?", "¿Qué son las asíntotas?", etc.

En conclusión, de acuerdo a las situaciones-problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos activados por el profesor A en su práctica, podemos señalar que el significado de la noción de función implementado no es representativo de los significados de referencia, pues el enfoque que da el profesor a la noción de función potencia se basa fundamentalmente en la acepción de representación gráfica, mientras que los problemas y preguntas de los estudiantes requería involucrar elementos de la función desde la teoría conjuntista y como expresión analítica.

Idoneidad cognitiva sobre la enseñanza de la función potencia

Al inicio de la clase el profesor A refiere a las nociones de potencia y ecuaciones exponenciales como *conocimientos previos* esenciales para el estudio de la función potencia. Sin embargo, no vincula dichos conceptos con la noción bajo estudio. Esto se evidencia cuando presenta en el plano cartesiano la función cuadrática $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ (caso particular de una función potencia), obteniendo una parábola cóncava hacia arriba, la cual no relaciona con la ecuación de la parábola, desaprovechando la oportunidad de reforzar que una función cuadrática puede ser vista como la ecuación de una parábola; esto hubiese permitido recoger información geométrica de la curva asociada a la función. No obstante, sería necesario precisar que la ecuación de una parábola no siempre representa una relación funcional. En este mismo sentido, el profesor A no corrobora las concepciones actuales que poseen sus estudiantes sobre la noción de función. Esto le hubiese permitido reforzar, profundizar y vincular la conceptualización de dicho objeto matemático a los seis significados parciales de las funciones. En ocasiones las funciones son presentadas como un objeto matemático que no guarda relación con otros previamente trabajados o bien, no se identifica con precisión las nociones matemáticas fundamentales que permiten introducir el estudio de dicha noción (Deulofeu, 2001). Esto es aún más preocupante, cuando en el último cuarto de siglo las funciones se han convertido en un objeto matemático unificador en el currículo de matemática, incorporando su estudio en niveles de educación secundaria (Steele, Hillen, y Smith 2013).

Según Makonye (2014) utilizar diferentes contextos e interrelacionar *diversas representaciones* de la noción de función favorece el aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, se valora la intención del profesor A en incorporar en su proceso de instrucción representaciones gráficas, tabulares y algebraicas. Si bien todas las representaciones que utiliza contienen la misma información ponen en acción diferentes procesos cognitivos. Es decir, la representación gráfica favorece la visualización y se relaciona con la geometría; la representación tabular pone de manifiesto la idea de correspondencia y los aspectos numéricos, y la representación algebraica acentúa la capacidad simbólica y se vincula con el álgebra (Janvier, 1987).

En cuanto a las *adaptaciones curriculares*, sólo se utilizan ejemplos en contextos puramente matemáticos, los que se presentan después de introducir una definición para mostrar aspectos generales de la función potencia. Si bien, se presentan actividades típicas de aplicación de procedimientos que promueven la participación de los estudiantes para *verificar los aprendizajes*, no se proponen situaciones que involucren funciones potencia, ni ejemplos de profundización o contraejemplos que permitan anticiparse a eventuales dificultades por parte de los estudiantes y reducir situaciones de confusión. Además, no se promueven aplicaciones internas ni externas para lograr mayor profundización del objeto matemático a través de tareas que 'obliguen' al estudiante a recurrir a todas las representaciones asociadas a las funciones potencia o a la articulación con otros conceptos. Asimismo, no se suscitan ejemplos de aplicación a la vida cotidiana o a otras ciencias, ni se promueve el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio; es decir, no se propician actividades que requieran una *alta demanda cognitiva*. Esta práctica es consistente con lo declarado por Figueiredo, Contreras y Blanco (2012) quienes señalan que profesores noveles manifiestan especiales dificultades en la elección y secuenciación de ejemplos, es decir, presentan mayoritariamente ejemplos y/o ejercicios típicos que requieren el uso de procedimientos algorítmicos vistos como una herramienta de resolución. Además, es usual que los futuros profesores inicien la ejemplificación de las funciones desde aspectos básicos del concepto hasta la aplicación del objeto matemático.

De esta manera, se constata que la práctica del profesor A se ajusta a los hábitos de enseñanza tradicional, es decir, existe gran predominio de procesos mecánicos y algorítmicos que impiden una apropiación significativa de la noción de función potencia por parte de los estudiantes. Sierpinska

(1992), explicita que las formas habituales o tradicionales de afrontar la enseñanza de las funciones no son suficientes para que los estudiantes construyan el significado holístico del objeto, ni para lograr comprender toda la gama de sus aplicaciones. Aun cuando el profesor A utiliza elementos provenientes de la teoría de conjuntos para definir la noción de función potencia, en el desarrollo de su clase predomina la asociación función-fórmula y función-curva. Estos criterios, conducen a rechazar relaciones funcionales y a admitir objetos no funcionales (Artigue, 1995).

Idoneidad afectiva sobre la enseñanza de la función potencia

Durante el desarrollo de la clase no se evidencian situaciones que permitan valorar la utilidad de la noción de función potencia, es decir, tal como se comentó, no se proponen ejemplos o tareas que involucren situaciones de la vida cotidiana o de otras ciencias para generar *interés o necesidad* en los estudiantes. Tampoco se identifican actividades en que las funciones potencia sirvan de modelos matemáticos para el estudio de fenómenos y para expresar la dependencia entre variables, desaprovechando la posibilidad de reforzar uno de los significados parciales de la noción de función, como *relación entre magnitudes variables*. Aunque la clase se desarrolló en un contexto de microenseñanza, el profesor A refuerza en conjunto con sus estudiantes (profesores en formación que cumplen el rol de estudiantes de cuarto año medio) los conocimientos previos que ha considerado necesarios para afrontar la enseñanza de función potencia (nociones de potencia y ecuación exponencial). Promueve la participación de los estudiantes para resolver las actividades propuestas, aunque con preguntas orientadas a procesos algorítmicos (e.g., valorar una expresión algebraica para luego obtener pares ordenados que serán ubicados en el plano cartesiano). El profesor A logra que sus estudiantes adopten cierta *actitud* 'crítica' y comprometida para resolver las tareas que sugiere. En cuanto a las *emociones*, el profesor explicita: "Otros dos casos de función potencia son aquellas cuyo exponente es impar con a positivo (caso 3) o bien con a negativo (caso 4)". Inmediatamente manifiesta "Este tipo de función puede ocasionar mayor dificultad". Estas aseveraciones podrían generar una predisposición negativa por parte de los estudiantes, dificultando su aprendizaje.

Idoneidad interaccional sobre la enseñanza de la función potencia

En relación con la *interacción docente-discente*, el profesor A desarrolla una clase más bien expositiva, con algunas intervenciones por parte de los estudiantes. Si bien, la presentación de la clase en cuanto a estructura es clara y organizada, no se enfatizan aspectos elementales de la función, tales como la condición de arbitrariedad y univalencia, ni tampoco se vinculan los conocimientos previos con la noción de función potencia. No se perciben estrategias argumentativas para lograr una comprensión significativa de funciones potencia por parte de los estudiantes, ni para captar su atención. Aunque se valora la intención de reforzar y precisar las nociones que va definiendo, se evidencia un análisis poco profundo de las ideas y actividades que desarrolla, lo cual conlleva a dar respuestas incorrectas o imprecisas a más de una pregunta planteada por los estudiantes.

Por otro lado, no se proponen tareas donde los estudiantes requieran experimentar, manipular o visualizar, elementos, herramientas digitales, etc., para luego comunicar, discutir y justificar conjeturas con el propósito de validar entre pares la estrategia o resolución más pertinente a la problemática planteada. La concreción de este tipo de actividades favorecería la *interacción entre estudiantes*. Aunque las actividades propuestas por el profesor son mayoritariamente algorítmicas, en dichas instancias intenta promover la *autonomía*, y los estudiantes asumen la responsabilidad de la resolución de las tareas encomendadas.

Idoneidad mediacional sobre la enseñanza de la función potencia

Durante su clase, el profesor A recurre a *recursos tecnológicos*, particularmente, utiliza el software Geogebra como herramienta digital para mostrar a los estudiantes el comportamiento gráfico de las relaciones que presenta. No obstante, en el proceso de instrucción, el software Geogebra sólo fue manipulado por el profesor A, es decir, los estudiantes no tuvieron acceso al software, el cual acompañado de una actividad 'bien planificada' podría fortalecer uno de los significados parciales de la noción de función, como *representación gráfica*. Se valora la intención de la profesora en incorporar en el desarrollo de su clase tablas de valores y representaciones gráficas pues permite a los estudiantes visualizar la covariación de las variables involucradas (Nistch et al., 2015). Sin embargo, las formas habituales de representación no son suficientes para que los estudiantes construyan el significado holístico del objeto ni para lograr comprender toda la gama de sus aplicaciones (Sierpinska, 1992). Centrarse exclusivamente en procesos algorítmicos conlleva a considerar la función matemática, como una fórmula mecánica, donde la construcción de tablas será un simple requisito para la graficación que estará carente de interpretación (Jaimes, 2012).

Si bien, no es explicito el uso de *recursos metafóricos* por parte del profesor A, se percibe en su discurso la existencia de la metáfora descrita en Font y Acevedo (2003),“ Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y el análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva” (p. 405), cuando señala: “dada la función $f(x) = 2x^5$ si $x = 0$, entonces $y = 0$ por ende este tipo de función potencia siempre va a partir del cero y se obtendrán los valores positivos y negativos en la rama 1 y 2 respectivamente, es decir, los valores numéricos serán iguales en cada rama, pero con signo contrario". Es importante precisar que,"a partir de los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet, entre otros, se aceptó como gráficas de funciones, curvas que no podían ser trayectorias" (Font y Acevedo 2003, p. 408). En este caso el profesor A ha explicado algo estático en términos dinámicos, lo que supone una metáfora que no tiene controlada, y no es consciente de sus consecuencias.

Dado el contexto de microenseñanza en el que se realiza la clase de función potencia, tanto el espacio físico como la distribución de los estudiantes en el aula es apropiado. Cabe destacar que, en este caso, dichos aspectos no dependen del profesor A. A partir del proceso de instrucción sobre función potencia se constata que el profesor A no realiza un proceso reflexivo o análisis didáctico previo a la implementación de la clase que le permita identificar errores frecuentes y/o anticiparse a las preguntas y respuestas que pueden emerger. Esto se evidencia cuando no logra dar respuestas satisfactorias a preguntas 'habituales' como: "¿Profesor $0^0 = 1$?" "¿Una función lineal no es función potencia?". Sin duda, es fundamental que los profesores de matemáticas sean conscientes, por ejemplo, de los obstáculos cognitivos asociados al uso de las diversas representaciones de la noción de función. Además, es usual que los estudiantes perciban las funciones como una relación determinada por una fórmula, de este modo asumen que toda función se expresa mediante una regla explícita (Tall, 2001). En este mismo sentido, presentar solo relaciones funcionales que admiten representaciones gráficas conlleva al estudiante a creer que toda función puede expresarse gráficamente (Eisenberg, 1991). Efectivamente, el uso de representaciones es fundamental para acceder al objeto función. Sin embargo, se debe reforzar que las tablas y los gráficos son representaciones parciales de las funciones. Otra dificultad que presentan los estudiantes tiene relación con la notación de las funciones pues $f(x)$ representa tanto el nombre de una función como el valor de la función para un valor de entrada dado (Eisenberg, 1991). Es esencial identificar las dificultades que pueden presentar los estudiantes en cada proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto para evitar conceptualizaciones erróneas por parte de los estudiantes, para utilizar el error como una oportunidad de aprendizaje, y para profundizar y/o reformular la enseñanza.

Idoneidad ecológica sobre la enseñanza de la función potencia

El currículo de matemáticas chileno para cuarto año medio, estipula: "El aprendizaje de la matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana. [...] Al estudiar matemáticas, los estudiantes desarrollan el razonamiento lógico, la visualización espacial, el pensamiento analítico, el cálculo, el modelamiento y las destrezas para resolver problemas" (Mineduc 2015, p. 28). Asimismo, entre las orientaciones didácticas para la unidad de funciones, el Mineduc (2015) sugiere:

> Respecto de la función potencia, se recomienda al docente presentar problemas contextualizados que impliquen analizar e interpretar la proporcionalidad inversa como función. Los estudiantes deben comprender que las funciones potencia permiten modelar situaciones de la vida cotidiana (por ejemplo, de las ciencias naturales) e interpretar las soluciones de los problemas desde el punto de vista aritmético, algebraico o geométrico, según corresponda. Se sugiere al docente dar oportunidad para que los estudiantes visualicen en un gráfico que las asíntotas de toda función están relacionadas con el concepto de límite, el cual es construido de forma intuitiva. (p. 39)

Con base en lo anterior, se evidencia que el profesor A no logra una apropiada adaptación del currículo, pues aun cuando el contenido que presenta es pertinente para estudiantes de cuarto año medio, en el desarrollo de su clase no refuerza la noción de función como un principio básico y unificador dentro de la matemática. Además, no presenta problemas contextualizados o situaciones vinculadas a la vida cotidiana que requieran ser modeladas a partir de funciones potencia como herramienta más apropiado y/o útil para dar respuesta, tampoco vincula con otros contenidos que serán abordados más adelante. Es decir, no logra conexiones intra e interdisciplinares.

Cooney (1985), menciona que los libros de texto son la influencia primaria para las concepciones curriculares de los profesores, así como para la estructuración de las clases y tareas. Asimismo, Love y Pimm (1996) se refieren a que los libros de texto son la tecnología más utilizada por los profesores para planificar los procesos de instrucción matemática. En este sentido, se percibe que la clase sobre función potencia desarrollada por el profesor A se ajusta parcialmente a lo que explicita el currículo chileno, es decir, el texto escolar chileno comienza solicitando valorar expresiones algebraicas, inmediatamente indica que dichas expresiones algebraicas representan funciones potencia, las define como $f(x) = ax^n$, donde a y n son números reales distintos de 0; Se refiere al dominio y recorrido la función; Propone actividades para evidenciar el comportamiento de la gráfica cuando n es par o impar y cuando a es positivo o negativo; Se plantean tareas en las que, es necesario valorar una expresión algebraica, transitar desde representaciones algebraicas a gráficas, determinar el dominio de la función, utilizar Geogebra, identificar los valores de a, n, el dominio a partir de un gráfico dado etc.

4.3.3. Dimensión Meta Didáctico-Matemática

En el episodio de microenseñanza sobre la función potencia se dispuso de un tiempo acotado que no permitió alcanzar una reflexión profunda sobre la práctica docente desarrollada por el Profesor

A. Sin embargo, al finalizar el proceso de instrucción, se efectuó una actividad de retroalimentación entre el formador y los futuros profesores, espacio de reflexión para el cual utilizamos nuestra propuesta de criterios y descriptores de idoneidad. En este espacio se plantearon preguntas, comentarios, orientaciones y sugerencias que conllevaron a precisar ciertas nociones y elementos que intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje sobre funciones. Asimismo, se analizó la videograbación con el fin de generar instancias de autobservación y autorreflexión de la labor ejercida por el profesor A, y de las preguntas y respuestas de los cinco futuros profesores (que actuaron como estudiantes). Esto permitió visualizar la pertinencia de las interacciones, uso de los recursos, la precisión de las definiciones y respuestas dadas, entre otros. Uno de los aspectos sobre el que se reflexionó, fue sobre la conceptualización de la noción de función y los diversos significados asociados a dicho objeto matemático. Al respecto, se propició la siguiente instancia de discusión entre los futuros profesores y el formador:

> ***Formador:*** *Si bien en su clase se define función potencia no se refuerza el significado de relación funcional ¿Cómo explicaría o profundizaría el significado de función?*
>
> ***Profesor A:*** *Diría que una función es todo elemento de un conjunto de partida que le corresponde un elemento en el conjunto de llegada. Mmm[...] creo que lo explicaría con un diagrama. (El profesor A dibuja en la pizarra un diagrama como el que se presenta en la figura 4.5).*

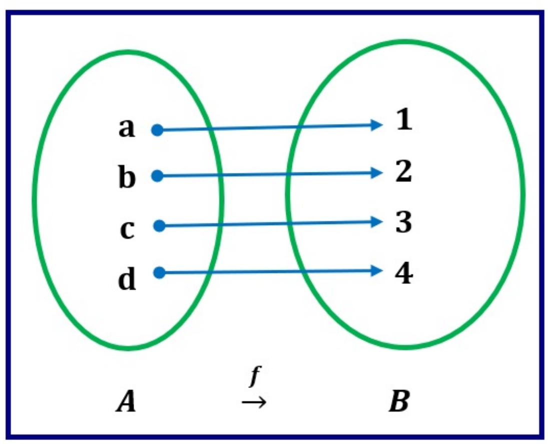


Figura 4.5. Imagen similar a la realizada por la profesora A

> ***Estudiante 1:*** *Partiría señalando que la función es una relación entre dos conjuntos y utilizaría la máquina para explicar la relación, pero creo que la máquina es pertinente cuando se enseña por primera vez funciones, luego podría generar confusiones y los estudiantes podrían quedarse sólo con la idea de la máquina.*

Profesor A: *Mmm[...], yo también creo que utilizaría la máquina para explicar que tomamos un número, lo transformamos y obtenemos otro.*

Formador: *En la definición que proporciona sobre función potencia no se refiere al dominio ni codominio de la función, esto se menciona en otro momento de la clase. ¿Consideras que sería conveniente incorporar en tu definición de función las nociones de dominio y codominio?*

Profesor A: *La verdad lo pensé así, pero consideré que dar la definición de función potencia y después referirme al dominio y recorrido iba a ser más fácil de entender. Ahora me lo cuestiono y no sé por qué lo dejé aparte, si el dominio y recorrido son parte de la definición.*

Formador: *Si consideramos la noción de dominio y codominio como elementos inherentes de la definición de función ¿podemos responder la problemática que se suscitó cuando propuso la expresión $f(x) = 0^0$?*

Profesor A: *Creo que si [...] tengo que pensarlo mejor.*

Estudiante 2: *En ese caso el dominio de la función $f(x) = 0^0$ tendría que excluir el cero porque 0^0 no es 1.*

A partir del diálogo anterior, se constata que las explicaciones dadas por los profesores en formación consideran sólo algunos aspectos del significado de referencia de las funciones (e.g. la idea de correspondencia, relación, algunos elementos de la teoría de conjuntos). Esto lleva a que el formador presente el recorrido histórico y epistemológico de la noción de función con el fin de fortalecer el significado personal de los profesores en formación y lograr que dicha significación se acerque al significado holístico de referencia (Sierpinska 1992; Biehler 2005; Pino-Fan, Parra-Urrea y Castro 2019).

Otra cuestión sobre la que se reflexionó fue sobre cómo enseñar funciones para incentivar el aprendizaje de los estudiantes. Si bien, el profesor A se refiere a la importancia de transitar por distintas representaciones y explicita las dificultades que ello genera en estudiantes de cuarto año medio, sólo enfatiza la relevancia de transitar desde representaciones algebraicas a las tabulares y de ahí a las gráficas. En esta instancia se discute la importancia de identificar las distintas representaciones del objeto matemático y transitar por todas sus representaciones. Igualmente se reflexiona sobre los conocimientos previos necesarios para enfrentar la enseñanza de función potencia, lo cual permite concluir que es fundamental precisar la definición general de función matemática.

Otro de los elementos discutidos fue el de las interacciones en torno a conflictos. Las interacciones entre profesor y estudiantes están con frecuencia reguladas por "reglas", "hábitos", "obligaciones” o normas no explícitas: “normas sociales” y “normas sociomatemáticas” (e.g., Godino, Font, Wilhelmi y Castro 2009; Yackel y Cobb 1996; McClain y Cobb 2001). Las normas sociales regulan la interacción entre el docente y los estudiantes, mientras las normas sociomatemáticas regulan los aspectos específicos de las discusiones matemáticas de los estudiantes e influyen en las oportunidades de aprendizaje. En relación con la clase desarrollada, se identifican algunas normas sociales en las que los estudiantes (futuros profesores) cuestionan las explicaciones descritas por el Profesor A. Por ejemplo, cuando plantean la inquietud sobre la proposición $0^0 = 1$, dada por el Profesor A, o bien, cuando indican que la gráfica de las funciones potencia es siempre una parábola. No obstante, se dan otras situaciones en que los estudiantes no adoptan una actitud crítica sustentada en conocimientos ya ‘adquiridos’, esto es, el caso de la actividad en que aprueban conjuntamente (profesor y estudiantes) que $\frac{1}{0^2} = 0$, o cuando reconocen “funciones” que no han sido bien definidas. Lo anterior se condice con lo expuesto por Dede y Soybaş (2011), sobre la importancia de considerar subconceptos funcionales como parte de la definición de función. Esto es reforzado por el formador quien, además, enfatiza la importancia de presentar funciones con dominios y codominios explícitos para evitar la creencia de que toda función tiene un dominio y codominio natural o real. Asimismo, se reflexiona sobre un episodio de la clase en que el profesor A expone la expresión $f(x) = ax^n$ con $n = 1$ y pregunta a los estudiantes “¿Cómo se comporta la gráfica de esa función?”, e inmediatamente indica que se trata de una función lineal y no de una función potencia:

> ***Formador:*** *Entre sus ejemplos se plantea verificar la gráfica de la expresión $f(x) = ax^n$ con $n = 1$ ¿Cuál es el propósito de la tarea?*
>
> ***Profesor A:*** *Mostrar que el exponente no puede ser igual a 1, porque se transformaría en una función lineal.*
>
> ***Formador:*** *Pero en la definición proporcionada al inicio de la clase se explicita: $f(x) = ax^n$ donde a es un número real distinto de cero y n debe ser un número natural mayor que cero.*
>
> ***Profesor A:*** *Mmm [...] entonces la definición debería ser para n un número real distinto de cero y uno. Porque cuando es elevado a cero, la función es constante y cuando es elevado a uno, la función es lineal.*
>
> ***Formador:*** *En este caso, ¿tendríamos que excluir a $n = 2$ pues con $n = 2$ obtendríamos una función cuadrática?*
>
> ***Profesor A:*** *Mmm [...] entonces, ¿no podría descartar al cero ni al uno?*
>
> ***Estudiante 3:*** *Es que en ese caso las funciones constantes, lineales, cuadráticas etc. Serían casos particulares de una función potencia.*

Cabe destacar, que el profesor A en el desarrollo de su clase también propone el análisis del comportamiento gráfico de expresiones como $f(x) = x^{-2}$, que no satisfacen la definición que propone. Esto obliga la reflexión del profesor A sobre la definición de la función potencia e implicó que el formador refuerce la conceptualización de dicho objeto matemático.

Por otro lado, se reflexiona sobre la pertinencia del uso de recursos y medios que podrían facilitar la comprensión de funciones, el Profesor A manifiesta: "es fundamental que los estudiantes participen durante la clase, cuando resuelven un ejercicio en la pizarra pueden reforzar los contenidos". Asimismo, señala "utilizar Geogebra me permite mostrar con más precisión el comportamiento de las gráficas". En este sentido, el formador refiere a lo señalado en diversas investigaciones (e.g., Elia, Panaoura, Eracleous y Gagatsis 2007; Gómez Chacón y Joglar 2010), que para lograr una comprensión adecuada de la noción de función se requiere transitar desde la representación algebraica a la gráfica y viceversa. Por lo tanto, es esencial visualizar la gráfica de una función con su expresión algebraica y tabular, y es aquí donde Geogebra puede tener un gran impacto. Es decir, las dificultades que pueden presentar actividades de modelación con funciones pueden ser apoyadas con el uso de TICs. No obstante, se explicita que el empleo de graficadores dinámicos facilita, aunque sea de manera inconsciente, estructurar las gráficas como trazas de puntos, y el uso explícito o implícito de las metáforas dinámicas del tipo la "gráfica es un camino", tiene sus ventajas, pero también sus inconvenientes cuando se percibe la gráfica como una trayectoria y no como una representación estática (Font y Acevedo, 2003).

Finalmente se discute sobre la responsabilidad del profesor para crear ambientes propicios para el aprendizaje, proponer actividades matemáticamente ricas que pertenezcan al campo de interés de los estudiantes. En este sentido el formador y los futuros profesores reflexionan sobre ¿Cómo motivar a los estudiantes para el estudio de funciones?

> ***Formador:*** *¿Qué tipo de tareas matemáticas conviene proponer?*
>
> ***Profesor A:*** *Considero que la clase que acabo de impartir es muy mecánica y no motiva a los alumnos, buscaría una nueva forma de enseñar la función potencia, quizás utilizando la resolución de problemas.*
>
> ***Estudiante 5:*** *Yo creo que se deberían mostrar ejemplos contextualizados con situaciones de interés para los estudiantes. Por ejemplo, la relación entre camisetas y jugador, una camiseta pertenece sólo a un jugador, pero un jugador podría tener más de una camiseta. Mmm [...] habría que pensarlo bien.*

Frente a esta afirmación, se discute la idea de desarrollar procesos de instrucción matemática donde se promuevan diversas situaciones-problema, algunas contextualizadas dentro de la matemática y otras en las que a partir de modelos funcionales sea posible estudiar fenómenos provenientes de la vida cotidiana o de otras ciencias. Además, es importante que prevalezca el trabajo colaborativo y la interacción dialógica y argumentativa, esto tendrá potencialmente mayor idoneidad interaccional que los de tipo magistral, ya que los estudiantes tendrían mayor interacción con los objetos matemáticos que se pretenden institucionalizar y formalizar, en nuestro caso, la noción de función.

4.4. Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) sobre función inversa

A continuación se presenta el análisis de un proceso de instrucción sobre la noción de función inversa en contexto de microenseñanza desarrollada por un profesor en formación que para efectos de este análisis llamaremos profesor B.

4.4.1. Descripción de la práctica desarrollada por el profesor B sobre función inversa

El profesor B inicia el proceso de enseñanza explicitando el objetivo de la clase:

Reconocer y comprender la función inversa

Durante el inicio de la instrucción, intenta reforzar la noción de función y señala:

Se definen todas las funciones a partir de dos conjuntos uno de inicio y otro de llegada

Inmediatamente, el profesor B plantea la siguiente interrogante: "¿Qué tipo de funciones conocemos?" Los estudiantes responden: función exponencial, función lineal, función cuadrática. Ante las respuestas dadas, el profesor B señala: "*la clasificación de las funciones es inyectiva y sobreyectiva*" luego define dichas nociones:

Definiremos las funciones inyectivas con dos conjuntos a uno le llamaremos Q y llamaremos R al conjunto de llegada. Una función es inyectiva si tenemos un conjunto Q con los elementos $\{a,b,c\}$ *y cada elemento del conjunto de partida va a tener una imagen en el conjunto de llegada y solamente una. El conjunto R lo vamos a conformar con los elementos* $\{1,2,3,4\}$. *Es decir, esta función será inyectiva cuando a se relaciona con un elemento del conjunto de llegada y así cada elemento se relaciona con un solo elemento del conjunto de llegada. Es posible que sobren elementos en el conjunto de llegada pero todos los elementos del conjunto de partida deben tener una imagen y solo una. Además, dos elementos del conjunto de partida no pueden tener la misma imagen en el conjunto de llegada.*

Posteriormente el profesor B ejemplifica la definición dada señalando: "*Si definimos un primer conjunto, personas chilenas y el conjunto de llegada los RUN (Rol único nacional). Esto quiere decir, que cada persona tiene designado un número de RUN que es único para dicha persona, lo que no quita que existan más RUN que aún no son utilizados, pero toda persona tiene un RUN y dos personas chilenas no pueden tener el mismo RUN*" (ver figura 4.6)

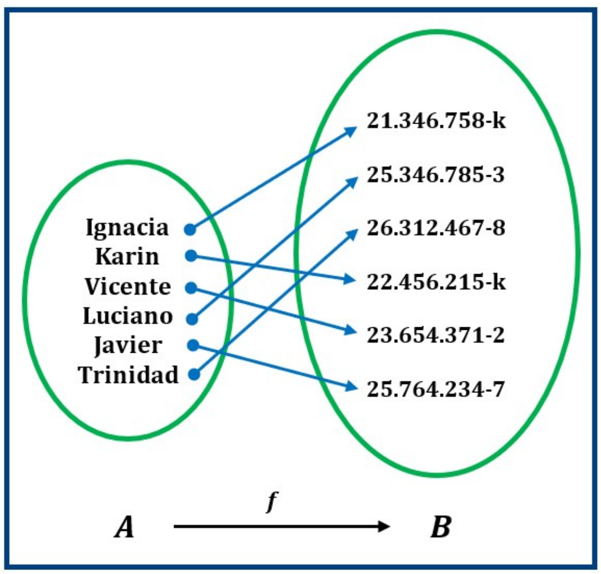


Figura 4.6. Diagrama referencial basado en lo propuesto por el profesor B

Seguidamente, el profesor B se refiere y define función sobreyectiva como:

Dado dos conjuntos que llamaremos P y B, cada elemento del conjunto de partida P debe tener un elemento en el conjunto de llegada B al menos uno y todos los elementos del conjunto de llegada deben tener una preimagen en el conjunto de partida. En este caso es posible tener elementos del conjunto de partida con dos imágenes en el conjunto de llegada.

Inmediatamente, el profesor B plantea una situación para ejemplificar una función sobreyectiva y señala: "*Un ejemplo cotidiano serían los celulares y los números hay celulares a los que les corresponde un número telefónico. Sin embargo, existen celulares que pueden tener doble chip, por lo tanto, pueden tener asociado dos números; así un mismo celular puede tener asociado dos números telefónicos*".

Luego el profesor B plantea a sus estudiantes: "*¿Recuerdan las funciones biyectivas?*" Un estudiante interviene: Profesor ¿Qué es una función?. Ante la inquietud de la estudiante, el profesor B responde: "*Una función se define por ejemplo como $f(x) = x+5$". Luego señala: "es un mecanismo que cuando un x entra en una función sale convertida dependiendo de la función que esté definida. Por ejemplo, si tenemos $f(x) = x^2$ entonces cuando entra un elemento a aplicado en la función queda $f(x) = a^2$*".

Posteriormente, el profesor B continúa con la idea de función biyectiva y explicita: "*se cumple cuando la función es inyectiva y sobreyectiva. Por lo tanto, ¿Cómo vamos a relacionar los elementos de dos conjuntos en una función biyectiva? (le consulta a los estudiantes)*". Dado que no hay respuestas por parte de los estudiantes, el profesor B refuerza la noción de función inyectiva señalando: "*La función inyectiva es conocida como la función uno a uno, es decir, a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada y cada elemento del conjunto de llegada debe tener un solo elemento del conjunto de partida*".

Enseguida propone analizar una función y determinar cómo calcular la función inversa (objetivo de la clase). Para ello, señala: "*Sea la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)}$, para encontrar la función inversa de esta función f, realizaremos un proceso sencillo, recuerden que $f(x) = y$, entonces representaremos nuestra función como $y = \sqrt[3]{(x-1)}$, ahora cambiaremos los x por los y y los y por los x,es decir, obtendremos la siguiente expresión: $x = \sqrt[3]{(y-1)}$. Finalmente despejaremos y y obtendremos la función inversa*". Ante la interrogante de un estudiante: ¿Por qué se cambian las variables? El profesor B responde: "*se cambian para encontrar la función inversa, como se trata de la función inversa y como su nombre lo indica vamos asociar el conjunto de llegada como el conjunto de inicio y el de inicio como el conjunto de llegada, por eso cambiamos las variables para tener la función al revés*". Ante la actividad sugerida por el profesor B, encontrar la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)}$, una estudiante obtiene como resultado $y = x^3+1$. Ante la respuesta de la estudiante el profesor B afirma que la expresión $y = x^3+1$ representa la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)}$. Luego sugiere una estrategia para verificar si la función inversa encontrada es correcta. Antes de ello plantea a sus estudiantes:" *¿Recuerdan composición de funciones?*" y señala:

En la composición de funciones, f compuesta con g se representa como $f(g(x))$, esto quiere decir, que una función esta en relación de otra.

A modo de ejemplo plantea: Sea la función $g(x) = \dfrac{(x+3)}{(x-2)}$ y la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)}$, luego $g \circ f(x)$ se calcula como:

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= \sqrt[3]{\left(\frac{x+3}{x-2} - 1\right)} \\
f(g(x)) &= \sqrt[3]{\left(\frac{5}{x-2}\right)}
\end{aligned}
$$

A partir de lo anterior, el profesor B explicita: "*la función compuesta nos permite comprobar si la función inversa encontrada es correcta. Es decir, si calculamos $f \circ f^{-1}(x)$ nos tiene que dar x, esto se conoce como la función identidad*"

Un estudiante pregunta: ¿Para qué nos sirve todo esto? El profesor B, responde: "*Es útil para contenidos que estudiaremos más adelante, quizás en la vida cotidiana no nos sirva de mucho, pero nos va a ayudar a comprender como funcionan algunas cosas*".

Entonces, el profesor B comprueba que la expresión $y = x^3 + 1$ es la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)}$, mediante el cálculo de $(f \circ f^{-1})(x)$. Antes de continuar con el cálculo, el profesor B hace una pausa para señalar que cometió un error en la actividad anterior (donde solicita calcular la función compuesta $(f \circ g)(x)$ entre f y g), y menciona que el procedimiento adecuado es reemplazar en la función g el $f(x)$: "*en donde aparezca las x de la función $g(x)$ reemplazamos la función $f(x)$*". Los estudiantes, dudosos, le comentan: Profesor, en otras oportunidades la estrategia que hemos usado para calcular una función compuesta es la que explicó en el primer ejercicio. El profesor B, ante los comentarios de los estudiantes, persiste en que la segunda estrategia para el cálculo de la función compuesta es la apropiada, y continúa con el cálculo de $(f \circ f^{-1})(x)$ utilizando la siguiente estrategia: "Si $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)}$ y $f^{-1}(x) = x^3 + 1$, entonces:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x))$$

Luego

$$
\begin{aligned}
f(x^3+1) &= \left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^3 + 1 \\
f(x^3+1) &= x - 1 + 1 \\
f(x^3+1) &= x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

Con lo anterior, el profesor B concluye que la función $y = x^3 + 1$ es la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)}$".

Antes de finalizar la clase, el profesor B propone algunos ejercicios en los que solicita calcular la función inversa y comprobar que la solución es correcta, y da por terminada la clase.

4.5. Análisis sobre la práctica: CDM del Profesor B

A continuación se describe el conocimiento didáctico-matemático (CDM) del profesor B, evidenciado luego del proceso de instrucción matemática que desarrolla sobre la noción de función inversa.

4.5.1. Dimensión Matemática

A partir de las *definiciones*, *argumentos* y *justificaciones* proporcionadas por el profesor B en el proceso de enseñanza sobre función inversa, se constata que posee un dominio parcial del conocimiento común del contenido. Esto principalmente porque no logra dar respuestas satisfactorias a más de una actividad matemática que propone, por ejemplo, cuando solicita calcular la composición de funciones. Cabe destacar, que las tareas y/o problemas que propone se condicen con lo propuesto por el currículo de matemáticas chileno (ver figura 4.7).

- Completan la tabla con el término algebraico de la función inversa y después responden qué debe resultar si se aplica la función f y al resultado se aplica la función inversa f^{-1}.

VARIABLE	FUNCIÓN f	FUNCIÓN INVERSA f^{-1}	$f \circ f^{-1}$	RESULTADO
x	$x \to 2x$			
x	$x \to \frac{1}{4}x$			
x	$x \to 3x - 1$			
x	$x \to -\frac{1}{2}x + 1$			
x	$x \to x^2$			
x	$x \to \sqrt{x}$			

Figura 4.7. Actividad propuesta por el currículo escolar chileno (Programa de estudio, segundo año medio, 2016, p. 111)

Por otro lado, los *procedimientos* que utiliza el profesor B para determinar la inversa de una función, son consistentes con lo sugerido por el currículo escolar chileno (ver figuras 4.8 y 4.9). Sin embargo, no se perciben en el discurso del profesor B argumentos que justifiquen los procedimientos que utiliza.

2. Determinan la ecuación de la función inversa por el recambio de las variables en la ecuación funcional original, despejando la variable y de esta ecuación.

TIPO DE FUNCIÓN	FUNCIÓN DIRECTA	FUNCIÓN INVERSA
Lineal	$y = 2x$	
Lineal		$y = -\frac{2}{3}x$
Afín	$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$	
Afín		$y = 0{,}2x + 1$
Cuadrática / raíz cuadrada	$y = \frac{1}{4}x^2$	
Raíz cuadrada / cuadrática	$y = \sqrt{3x}$	
Cuadrática / raíz cuadrada		$y = 2\sqrt{5x}$
Raíz cuadrada / cuadrática		$y = 0{,}01x^2$
Función constante	$y = 2$	

Observaciones a la o el docente

Por ejemplo: si la función es $y = 3x$, primero se hace un cambio de variables $x = 3$, y a continuación se despeja la variable y; es decir $y = \frac{x}{3}$.

Se sugiere cambiar las variables antes de despejar la variable, y se recomienda no hacerlo al final, ya que esto evita confusiones al momento de decidir cuál variable es la que se debe despejar. Por último, se debe discutir en cada caso particular el dominio de las funciones para identificar la función inversa correspondiente.

Figura 4.8. Actividad propuesta por el currículo escolar chileno (Programa de estudio, segundo medio, 2016, p. 112)

3. Determina algebraicamente la función inversa de las siguientes funciones exponenciales. Observa el ejemplo para $f(x) = 3^x$.

$$y = 3^x \qquad / \log_3$$
$$\log_3 y = \log_3 3^x$$
$$\log_3 y = x$$
$$\log_3 x = y \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x) = \log_3 x$$

a. $f(x) = 4^x$ b. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c. $f(x) = e^x$

Figura 4.9. Actividad propuesta por el currículo escolar chileno, Texto del estudiante cuarto año medio. (Osorio et al., 2020, p. 50)

En cuanto a las *definiciones*, el profesor B se refiere a las funciones inyectivas y señala: "*Definiremos las funciones inyectivas con dos conjuntos a uno le llamaremos Q y llamaremos R al conjunto de llegada. Una función es inyectiva si tenemos un conjunto Q con los elementos* $\{a,b,c\}$ *y cada elemento del conjunto de partida va a tener una imagen en el conjunto de llegada y solamente una. El conjunto R lo vamos a conformar con los elementos* $\{1,2,3,4\}$. *Es decir, esta función será inyectiva cuando a se relaciona con un elemento del conjunto de llegada y así cada elemento se relaciona con un solo elemento del conjunto de llegada. Es posible que sobren elementos en el conjunto de llegada pero todos los elementos del conjunto de partida deben tener una imagen y solo una. Además, dos elementos del conjunto de partida no pueden tener la misma imagen en el conjunto de llegada*".

A partir de lo anterior, se verifica que la definición sobre función inyectiva proporcionada por el profesor B se aproxima a la definición formal del objeto matemático. Sin embargo, carece de rigurosidad, precisión y formalidad matemática. Según González (2004, p. 241) la función inyectiva se define como:

> Una función f entre los conjuntos A y B se dice que es inyectiva, cuando cada elemento de la imagen de f lo es, a lo sumo, de un elemento de A. Suele decirse también que la función es uno-a-uno. Dicho de otra forma:
>
> $$f : A \longrightarrow B \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A\ [a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)]$$
>
> La "mejor forma" de probar en la práctica la inyectividad de una función es utilizar la contrarrecíproca, es decir,
>
> $$f : A \longrightarrow B \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A\ [f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2]$$
>
> En la figura 4.10 se presentan dos diagramas, donde solo la relación f representa una función inyectiva.

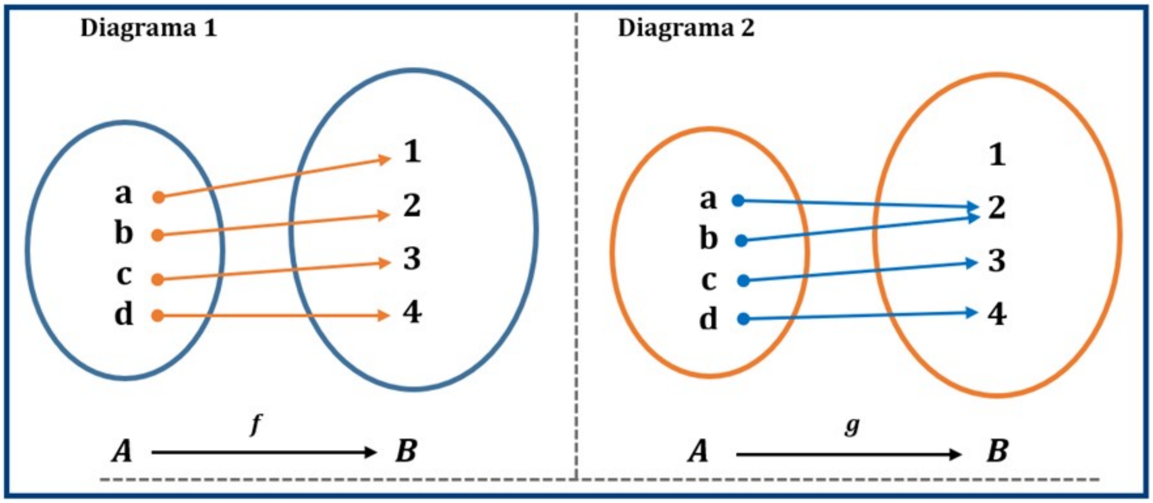


Figura 4.10. Diagramas para ejemplificar funciones que son o no inyectivas (Imagen adaptada de González, 2004, p.241)

En cuanto a la noción de función sobreyectiva, se perciben inconsistencias y errores en la definición que propone el profesor B. En la enunciación que plantea se observan tres ideas principales:

1) Dado dos conjuntos que llamaremos P y B, cada elemento del conjunto de partida P debe tener un elemento en el conjunto de llegada B al menos uno.
2) Todos los elementos del conjunto de llegada deben tener una preimagen en el conjunto de partida.
3) En este caso es posible tener elementos del conjunto de partida con dos imágenes en el conjunto de llegada.

La definición descrita por el profesor B difiere significativamente de la definición matemáticamente formal sugerida por González (2004, p. 243):

Una función f entre los conjuntos A y B se dice que es suprayectiva, sobreyectiva o exhaustiva, cuando cada elemento de B es imagen de, al menos, un elemento de A. Es decir,

$$f : A \longrightarrow B \text{ es suprayectiva} \Leftrightarrow \forall b \in B, \exists\, a \in A \text{ tal que } f(a) = b$$

En otras palabras, f es sobreyectiva si la imagen de f es todo el conjunto B, es decir si $Img(f) = B$.

En la figura 4.11 se presentan dos diagramas, donde solo la relación f representa una función sobreyectiva.

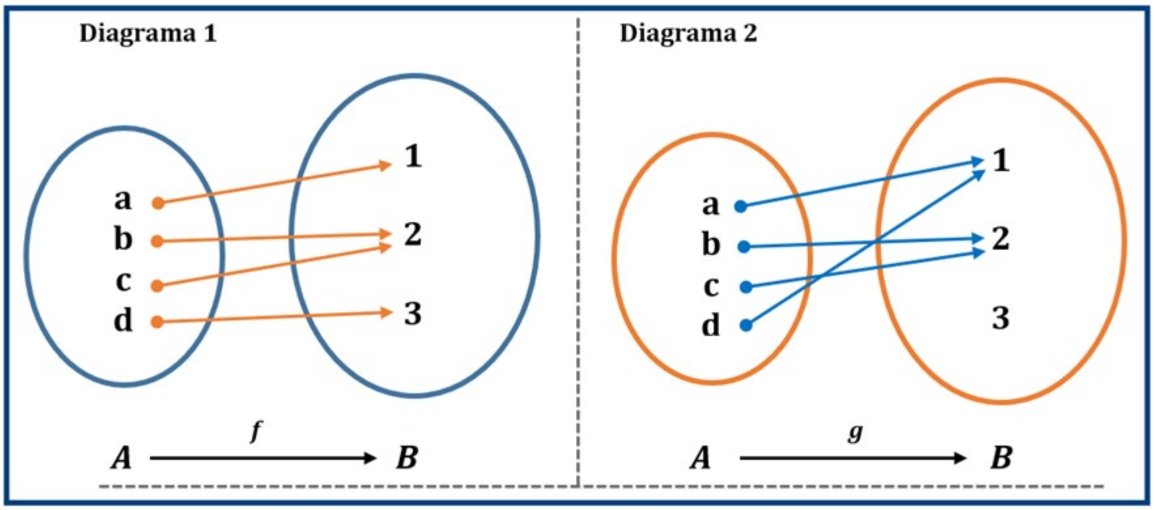


Figura 4.11. Diagramas para ejemplificar funciones que son o no sobreyectivas (Imagen adaptada de González, 2004, p. 243)

A partir de la definición matemáticamente formal, se observa que la segunda afirmación dada por el profesor B cuando define función sobreyectiva (ver definición del profesor B) corresponde a una adecuada idea de sobreyectividad. Sin embargo, en la afirmación 1) deja abierta la posibilidad de que la relación que se estudie no sea una función. Por ejemplo, en la figura 4.12 se presenta un diagrama que cumple con las 3 condiciones dadas por el profesor B. No obstante, dicho diagrama no representa una relación funcional. De este modo se puede afirmar que el profesor posee una conceptualización errada de la función sobreyectiva.

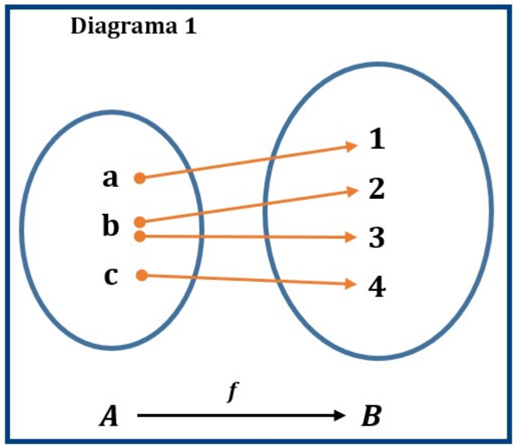


Figura 4.12. Diagrama para ejemplificar definición de función sobreyectiva dada por el profesor B

Por otro lado, durante el proceso de instrucción no se logra percibir el dominio del conocimiento ampliado del contenido del profesor B. Es decir, no se observan conexiones de la función inversa con objetos matemáticos de niveles educativos más avanzados.

4.5.2. Dimensión Didáctica

A continuación, analizamos el conocimiento didáctico-matemático (CDM) del profesor B. Para ello utilizamos los criterios y descriptores de idoneidad descritos en el capítulo 3.

Idoneidad epistémica sobre la enseñanza de la función inversa

De acuerdo con Godino (2013) los procesos instruccionales tienen mayor idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan adecuadamente al significado holístico de referencia. El profesor B en el desarrollo de su clase sobre función inversa, solo promueve la resolución de *situaciones-problemas* para reforzar conocimientos previos (e.g. función inyectiva, función sobreyectiva) y problemas en contextos puramente matemáticos, para explicar función inversa y composición de funciones. Durante la instrucción matemática, no se perciben situaciones/problemas que permitan movilizar los distintos significados asociados a la noción de función, tampoco tareas matemáticas contextualizadas a la vida cotidiana o a otras ciencias para potenciar el aprendizaje de dicho objeto matemático y el interés de los estudiantes por el estudio de las funciones.

En cuanto a los *procedimientos* que utiliza el profesor B para resolver las actividades o problemas matemáticos que propone, solo se identifican tareas 'clásicas' que requieren procedimientos algorítmicos y mecánicos. Esto se verifica cuando el profesor B explica cómo determinar la inversa de una función dada y cómo calcular la composición de funciones. Cabe destacar que algunas de las técnicas de resolución son erróneas, se constata lo anterior cuando el profesor B desarrolla la composición de funciones $(f \circ f^{-1})(x)$ pero en realidad calcula $(f^{-1} \circ f)(x)$. Inicialmente el profesor B propone una técnica adecuada para calcular composición de funciones. No obstante, en la situación descrita anteriormente, dado que obtiene la respuesta esperada (función identidad), el profesor no reflexiona ni razona in situ sobre su estrategia de resolución, aun cuando los estudiantes manifiestan inquietud y duda respecto del procedimiento sugerido.

En relación con el uso de *lenguajes*, el profesor B no recurre a las diversas representaciones (tabular, gráfica, verbal) asociadas a la noción de función inversa, de manera muy sucinta utiliza representaciones algebraicas y en menor medida icónicas, esta última se percibe cuando el profesor B emplea diagramas de conjuntos para explicar, por ejemplo, la relación de correspondencia entre personas chilenas y número de RUN. De este modo se constata que el trabajo con funciones se limita al uso de representaciones algebraicas, es decir, predomina la asociación función-fórmula. Según Artigue (1995), estos criterios conducen a rechazar relaciones funcionales y a admitir objetos no funcionales. Además, el uso limitado de representaciones no permite realizar conversiones entre registros de representación dejando de lado una de las actividades cognitivas fundamentales para lograr una correcta comprensión de la noción de función. Duval (2006), establece que las conversiones son el factor decisivo para el aprendizaje.

En el desarrollo de la clase no se perciben *justificaciones* o *argumentaciones* matemáticamente formales que respalden las heurísticas empleadas por el profesor B. Sin embargo, se valora la intención del profesor B para dar respuesta a la pregunta ¿Por qué se cambian las variables? (intercambio de variables en el procedimiento para determinar la inversa de una función) ya que declara que los conjuntos de partida y llegada se intercambian pero no explica el motivo de intercambio de variables. Se infiere que el profesor B busca una relación (función inversa) donde x cumpla el rol de variable independiente e y de variable dependiente siendo esto una práctica usual en el estudio de funciones. Por otro lado, el profesor B no vincula la función inversa con objetos matemáticos de niveles anteriores o superiores y mayoritariamente propone tareas matemáticas típicas, en contextos intra-matemáticos que requieren para su resolución procedimientos estándar (mecánicos y algorítmicos).

> Es fundamental que los profesores, además de conocer las características de las unidades didácticas formalistas (configuraciones epistémicas conjuntistas), sean conscien-

> tes de que, si bien actualmente no es usual encontrar una unidad didáctica sobre las funciones de tipo formalista, es muy habitual hallar unidades didácticas inspiradas en instrumentalismo y procesos mecánicos. Estas unidades didácticas, refieren a una presentación descontextualizada de los conceptos y reglas matemáticas en tanto que los objetos matemáticos se aprenden con la práctica y no mediante un aprendizaje significativo. (Font, Sala, Breda y Seckel, 2017, p. 24)

En el desarrollo de la clase, si bien el profesor B explicita la definición de función inyectiva, función sobreyectiva tal como se describe en el apartado anterior de *dimensión matemática* y se refiere a funciones biyectivas, no define formalmente la noción de función inversa, esto aun cuando el objetivo de la clase era "reconocer y comprender la función inversa". Ante la pregunta de un estudiante sobre ¿Qué es una función? el profesor B no considera la arbitrariedad, existencia y univalencia como características claves de la noción de función. Otro aspecto relevante, es que durante el proceso de instrucción el profesor no se refiere al dominio y codominio de las relaciones que presenta, de esto modo se asume que considera dichas nociones elementos inherentes a la definición de función.

En síntesis, de acuerdo con las situaciones-problemas, definiciones, representaciones, procedimientos y argumentos propuestos por el profesor B, podemos señalar que el significado de la noción de función implementado no es representativo del significado holístico de referencia, pues el profesor B se basa fundamentalmente en la acepción de función como expresión analítica, mientras que a partir de los ejemplos y definiciones que propone se percibe cierto acercamiento, aunque de manera poco consciente, al significado de función como correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos

Idoneidad cognitiva sobre la enseñanza de la función inversa

Al inicio de la clase el profesor B intenta reforzar las nociones de función, función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva como *conocimientos previos* fundamentales para comprender la noción de función inversa. Sin embargo, propone una definición muy vaga de funciones, pues no precisa que una función es una relación y mucho menos se refiere a las características de existencia y unicidad. Del mismo modo, la definición de función inyectiva carece de rigurosidad, precisión y formalidad matemática, y la conceptualización de función sobreyectiva es incorrecta, en este último caso, la caracterización dada no satisface las condiciones de una relación funcional. De este modo el profesor B no corrobora las concepciones actuales que poseen sus estudiantes sobre la noción de función.

De acuerdo con Janvier (1987) y Nitsch et al., (2013) si bien las representaciones algebraicas, tabulares, gráficas y verbales de la noción de función contienen la misma información ponen en acción diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionados. Por ejemplo, la representación gráfica permite visualizar la covariación de las variables implicadas en un fenómeno, la representación tabular pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La expresión analítica conecta con la capacidad simbólica y acentúa el aspecto de la correspondencia dentro de las funciones, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de interpretar el fenómeno desde y hacia otras representaciones. En el desarrollo de la clase el profesor B no presenta tareas matemáticas para transitar por las diversas representaciones y solo promueve el estudio de la noción de función inversa desde representaciones algebraicas.

En cuanto a las *adaptaciones curriculares*, mayoritariamente se utilizan ejemplos en contextos puramente matemáticos, esto se evidencia cuando el profesor B explica cómo calcular la inversa de una función y cómo corroborar que la función encontrada satisface la condición para ser inversa. Si bien el profesor B promueve la participación de los estudiantes en la resolución de tareas como las descritas anteriormente que le permiten verificar los *aprendizajes* de sus estudiantes y presenta actividades para ejemplificar y reforzar la noción de función inyectiva (e.g. mediante la relación de correspondencia entre personas chilenas y número de RUN), no propone actividades de ampliación como ilustrar relaciones de correspondencia que no verifiquen la definición de función. Asimismo no se suscita el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio, ni se promueve el estudio de las representaciones gráficas como una manera estratégicamente eficiente para resolver una situación-problema (Figueiredo, 2010). Es decir, no se propician actividades que requieran de una *alta demanda cognitiva*. De esta manera se constata que la práctica del profesor B al igual que la desarrollada por el profesor A se ajustan a los hábitos de enseñanza tradicional donde prevalecen tareas matemáticas que requieren de procedimientos mecánicos y algorítmicos impidiendo la aprehensión significativa de la noción de función inversa.

Idoneidad afectiva sobre la enseñanza de la función inversa

Durante el desarrollo de la clase no se evidencian situaciones que permitan valorar la utilidad de la noción de función inversa, es decir, no se proponen situaciones-problema o fenómenos provenientes de la vida cotidiana o de otras ciencias que puedan ser resueltos a partir de modelos funcionales. Se valora la intención del profesor B de ejemplificar funciones inyectivas y sobreyectivas mediante relaciones de correspondencia propias de la vida cotidiana, esto podría ser del *interés o necesidad* de los estudiantes y le habría permitido reforzar -aunque de manera inconsciente- uno de los significados parciales de la noción de función, esto es, la *función como correspondencia arbitra-*

ria (Pino-Fan, Parra-Urrea y Castro, 2019). Sin embargo, la situación problema que emplea para ejemplificar función sobreyectiva es errónea, pues no satisface las condiciones para ser una relación funcional. Además, no se presentan problemáticas que se vinculen con la evolución histórica y que dieron origen a la noción de función. Cabe destacar que en el desarrollo de la clase, los estudiantes se interesan por saber cuál es la utilidad de la función inversa, esto se percibe cuando uno de los estudiantes pregunta ¿Para qué nos sirve todo esto? El profesor B, responde: "*Es útil para contenidos que estudiaremos más adelante, quizás en la vida cotidiana no nos sirva de mucho, pero nos va a ayudar a comprender como funcionan algunas cosas*". De este modo se constata lo expuesto por Wilson (1994) quien declara que los docentes manifiestan poca apreciación por el uso de las funciones y el conocimiento que se tiene en esta área es limitado y fragmentado. El profesor B promueve la participación de los estudiantes para resolver las actividades propuestas, todas ellas relativas a determinar la inversa de una función y a corroborar que la función encontrada satisface la condición para ser inversa. A partir de estas actividades y del contexto de microenseñanza en el que se desarrolla la clase, los estudiantes adoptan una *actitud* crítica en la resolución de tareas, esto se percibe cuando el profesor B intenta verificar que la expresión $y = x^3 + 1$ es la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)}$, mediante el cálculo de $(f \circ f^{-1})(x)$. No obstante, el procedimiento que presenta el profesor B corresponde al calculo de $(f^{-1} \circ f)(x)$, esto es cuestionado por los estudiantes aludiendo al orden usual en que se realiza la composición de funciones. En cuanto a las *emociones*, el profesor B con el propósito de evitar una actitud negativa frente al estudio de funciones inversas, realiza comentarios como: "para encontrar la función inversa de esta función f, realizaremos un proceso sencillo [...]". Sin duda, este tipo de aseveraciones podría provocar mayor disposición y menos resistencia por el estudio de funciones.

Idoneidad interaccional sobre la enseñanza de la función inversa

En cuanto a la *interacción docente-discente* el profesor B desarrolla una clase más bien expositiva, con algunas intervenciones por parte de los estudiantes. Es decir, el proceso de instrucción del profesor B se ajusta a los hábitos de enseñanza tradicional (Artigue, 1995). Si bien intenta realizar una presentación organizada de los temas que expone, no enfatiza las características claves de la noción de función. Además, dado que presenta la clasificación de funciones (inyectividad, sobreyectividad y biyectividad) como conocimientos previos, se infiere que pretende vincular dicha clasificación con la noción de función inversa, es decir, mostrar la biyectividad como condición necesaria y suficiente de invertibilidad de funciones. Sin embargo, su explicación no es clara y las definiciones que propone son ambiguas e incluso erróneas, esto impide una adecuada vinculación entre los conocimientos previos y la función inversa. En este mismo sentido, el profesor B exhibe limitaciones para analizar la actividad matemáticas de sus estudiantes; esto se verifica cuando no se anticipa a las respuestas y/o inquietudes que pueden emerger (y que de hecho emergen) ante las actividades que propone, otorgando respuestas imprecisas (e.g., cuando los estudiantes preguntan ¿Qué es una función? ¿Para qué sirven las funciones inversas? etc.).

Por otro lado, no se presentan tareas matemáticas que promuevan la comunicación, discusión, análisis y argumentación matemática para favorecer la *interacción entre estudiantes* y el aprendizaje de la función inversa, de manera que aprender matemática no se reduzca a recordar fórmulas, teoremas, definiciones o procedimientos matemáticos para resolver situaciones-problemas mediante la imitación de las explicaciones dadas por el profesor o apoyados en los métodos ilustrados en los textos escolares. De este modo, es fundamental contemplar momentos en que los estudiantes asuman la responsabilidad en la resolución de problemas y alcancen *autonomía* en el proceso de instrucción matemática.

Idoneidad mediacional sobre la enseñanza de la función inversa

Durante el desarrollo de la clase, el profesor B utiliza escasas formas de afrontar la enseñanza de función inversa, esto particularmente porque las tareas que propone son solo para determinar la inversa de una función dada y para calcular la composición de funciones. Además, moviliza mayoritariamente representaciones algebraicas y en menor medida icónicas; sus procedimientos y argumentaciones son poco precisos e incluso erróneos. Según Akkoc y Tall (2002)“la noción de función (dada esencialmente por la definición) resulta cognitivamente difícil de alcanzar y los estudiantes pueden acceder al concepto a través de diversos recursos (e.g., representaciones, diagramas de conjuntos, metáforas, conjuntos de pares ordenados etc.)” (p. 26). El profesor B en el desarrollo de su clase, solo emplea diagramas de conjuntos y expresiones algebraicas, siendo estos recursos insuficientes para lograr una aprehensión significativa de la noción de función inversa. Si bien no es explicito el uso de *recursos metafóricos* por parte del profesor B, se evidencia en su discurso la existencia de la metáfora ‘la función es una máquina’ (Font y Acevedo, 2003). Esto se constata cuando el profesor B señala: “*Una función se define por ejemplo como $f(x) = x+5$”. Luego señala: “es un mecanismo que cuando un x entra en una función sale convertida dependiendo de la función que esté definida. Por ejemplo, si tenemos $f(x) = x^2$ entonces cuando entra un elemento a aplicado en la función queda $f(x) = a^2$*”. El profesor B no analiza errores frecuentes ni promueve tareas matemáticas en las cuales el error puede representar una oportunidad de aprendizaje. Del mismo modo, no emplea estrategias argumentativas para captar la atención de los estudiantes, tampoco identifica las concepciones que poseen respecto a la noción de función para profundizar o reformular la enseñanza y el uso de recursos tecnológicos (e.g. graficadores informáticos, calculadores gráficas, etc.) es inexistente. En cuanto al espacio físico y la distribución de los estudiantes en el aula es adecuado, es decir, el profesor dispone de pizarra, computador, proyector, un amplio espacio físico etc.

Idoneidad ecológica sobre la enseñanza de la función inversa

Según se describe en el programa de matemática de cuarto año medio plan diferenciado, la unidad uno: *Representar y modelar situaciones de cambio por medio de funciones*, tiene por propósito:

> Se espera que los estudiantes comprendan que las funciones sirven para representar y modelar situaciones de cambio; el foco está en las nociones básicas de reversibilidad y composición de funciones en situaciones concretas. Los estudiantes comienzan con las situaciones de cambios modelados por la función lineal, cuadrática, potencia y exponencial, para continuar componiendo funciones y terminar con la inversa de una función. (Mineduc, 2020, p. 45)

En relación con la noción de función inversa el Mineduc (2020) señala: "Para comenzar esta asignatura, se considera lo aprendido sobre funciones hasta segundo medio y se profundiza en la argumentación visual para determinar la función inversa y la composición de funciones" (p. 32). Entre los objetivos de aprendizaje que se explicitan en el currículo de cuarto medio se indica:

> Utilizar diversas formas de representación al argumentar acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada; Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos; Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación. (Mineduc, 2020, p. 45)

Con base en lo anterior, se evidencia que el profesor B no logra una apropiada adaptación del currículo, pues aun cuando el contenido que presenta es pertinente para estudiantes de cuarto año medio, en el proceso de instrucción no moviliza todas las representaciones asociadas a la noción de función inversa, tampoco promueve la resolución de problemas a partir de la modelación de situaciones de la vida cotidiana o de otras ciencias. Todo lo anterior es parte de los objetivos de aprendizaje que declara el currículo nacional chileno para estudiantes de cuarto año medio del plan diferenciado. En este mismo sentido, el profesor B presenta una definición muy simplista de la noción de función que impide destacar su carácter unificante y modelizador. En relación a las conexiones intra e interdisciplinares, el profesor B vincula la noción de función inversa con la clasificación de funciones. Sin embrago, como ya se ha descrito en los apartados anteriores, el profesor comete varios errores de conceptualización. Dado que las tareas matemáticas son de tipo algorítmicas, no se presenta la función como la herramienta más adecuada para dar respuestas a diversas situaciones problemáticas. En el desarrollo de la clase no se utilizan tecnologías de la información y comunicación (TIC) que permitan apoyar la comprensión de la función inversa.

4.5.3. Dimensión Meta Didáctico-Matemática

En el episodio de microenseñanza sobre función inversa, al igual que en el anterior de función potencia, se dispuso de un tiempo acotado que no permitió alcanzar una reflexión profunda sobre la práctica que desarrolla el profesor B. Sin embargo, al finalizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, se efectuó una instancia de retroalimentación entre el formador y los futuros profesores, espacio de reflexión para el que utilizamos nuestra propuesta de componentes e indicadores de idoneidad descrita en el capitulo 3. En este espacio se plantearon preguntas, comentarios, orientaciones y sugerencias que conllevaron a precisar ciertas nociones y elementos que intervienen en los procesos de instrucción sobre funciones. Asimismo, se analizó la videograbación con el fin de generar instancias de autobservación y autorreflexión de la labor ejercida por el profesor B, y de las preguntas y respuestas de los cinco futuros profesores (que actuaron como estudiantes). Esto permitió visualizar la pertinencia de las interacciones, uso de los recursos, la precisión de las definiciones y respuestas dadas, entre otros.

En esta instancia de retroalimentación, el profesor B identifica aspectos que debe mejorar y corrige algunas de las definiciones que erradamente propone (e.g., la definición de función sobreyectiva). Sin embargo, no sugiere acciones inmediatas para enunciar con precisión procedimientos y definiciones introducidas en clases (e.g., definición de función, procedimiento para calcular composición de funciones, etc.). Al respecto se propició la siguiente discusión entre formador y profesores en formación.

> ***Formador:*** *Si tuviese que volver a definir función sobreyectiva ¿Cuál sería la definición que proporcionaría?*
>
> ***Profesor B:*** *Mmm [...] cuando los elementos del conjunto de partida. Mmm [...] no, cuando los elementos del conjunto de llegada tienen un elemento en el conjunto de partida, osea un elemento como mínimo.*

> ***Estudiante 4:*** *Yo creo que lo mejor es explicar este tipo de funciones con diagramas, al menos eso haría yo. (El estudiante 4 dibuja en la pizarra dos diagramas como el que se presenta en la figura 4.13)*

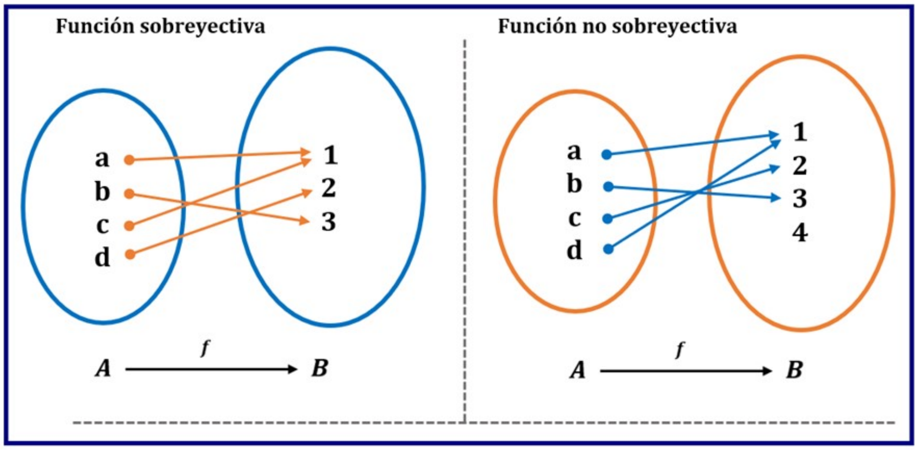


Figura 4.13. Diagramas propuestos por el estudiante 4 (imagen adaptada)

Cabe destacar que, los diagramas propuestos por el estudiante 4, son similares a los que presenta González (2004) para ejemplificar funciones que son o no sobreyectivas. De este modo, el formador logra vincular las acepciones de los profesores en formación con la definición formal de función sobreyectiva.

Por otro lado, al indagar sobre la conceptualización de la noción general de función, el profesor B muestra no conocer con profundidad las matemáticas que debe enseñar (e.g., los diversos significados de la función, los objetos matemáticos primarios y secundarios vinculados a dicho objeto matemático, etc.), tampoco evidencia dominio de alguna herramienta teórico-metodológica que le permita proponer acciones para favorecer, desarrollar y evaluar la competencia matemática de sus estudiantes sobre la noción de función inversa. En el siguiente extracto se describe la discusión en torno a los aspectos que consideró el profesor B al momento de planificar su clase sobre función inversa.

> ***Formador:*** *Al momento de planificar su clase sobre función inversa ¿Qué aspectos consideró relevante de mencionar?*
>
> ***Profesor B:*** *Bueno lo primero era mencionar cuáles son los requisitos para que la función admita inversa. Por eso comencé la clase reforzando qué es una función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Además, creo que los ejemplos contextualizados son*

útiles para modelar situaciones de la vida, y la física. Mmm [...] y bueno los estudiantes siempre aprenden más cuando se muestran los ejemplos.

Formador: *Para ejemplificar la noción de función inyectiva, usted utilizó la siguiente situación: "Si definimos un primer conjunto, personas chilenas y el conjunto de llegada los RUN (Rol único nacional). Esto quiere decir, que cada persona tiene designado un número de RUN que es único para dicha persona, lo que no quita que existan más RUN que aún no son utilizados, pero toda persona tiene un RUN y dos personas chilenas no pueden tener el mismo RUN". ¿Cuál es la intención de este tipo de ejemplos?*
Profesor B: *Lo primero mostrar un ejemplo contextualizado donde la relación entre los elementos de los dos conjuntos no es con números y reforzar la idea de que a cada elemento del conjunto de llegada tiene a lo mucho un elemento o una preimagen en el conjunto de partida.*

Formador: *Es decir, su intención fue mostrar un problema que moviliza uno de los significados parciales de la noción de función, esto es la función como correspondencia arbitraria. Y presentar un problema contextualizado a la vida cotidiana para ejemplificar la definición de función inyectiva.*

A partir de lo anterior, el formador refuerza los significados parciales de la noción de función y ejemplifica situaciones para ilustrar cada una de las acepciones de funciones (Sierpinska 1992; Biehler 2005; Pino-Fan, Parra-Urrea, Castro, 2019). El profesor B aun cuando emplea parcialmente algunos de los significados de función (e.g., función como correspondencia, función como expresión analítica) y utiliza algunos elementos de la teoría de conjuntos, reconoce la importancia de abordar la función como representación gráfica y cree esencial emplear situaciones-problemas que refuercen el significado de función como relación entre magnitudes variables. Además, luego de la discusión, comprende y es consciente del significado de función como correspondencia arbitraria mediante la situación-problema que él mismo propone (relación entre personas chilenas y número de RUN). Al respecto se propició la siguiente discusión entre formador y profesores en formación.

Formador: *Durante el desarrollo de su clase ¿considera esencial incorporar otras representaciones? De ser así, ¿cuáles?*

Profesor B: *Si, creo que en futuras clases incorporaría la representación gráfica, porque de esa manera los estudiantes podrían visualizar cómo se comporta la inversa.*

Estudiante 4: *En este caso también utilizaría diagramas para mostrar que el conjunto de llegada, será el conjunto de partida de la función inversa.*

> ***Formador:*** *¿Qué otros materiales o recursos emplearían en el desarrollo de su clase sobre funciones?*
>
> ***Profesor B:*** *Ocuparía Geogebra, creo que eso favorecería el aprendizaje. Además, los estudiantes podrían comprobar sus gráficas con el software. También incluiría más ejemplos contextualizados (e.g. de la vida real, de física) porque podrían llamar más la atención de los estudiantes.*

De este modo, se constata que en relación al uso y gestión de los recursos, el profesor B logra describir los materiales que utiliza en su clase sobre función inversa, entre ellos menciona tecnologías estándar como (guías, pizarra etc.) y considera pertinente incorporar tecnologías más avanzadas como Geogebra. En relación al uso de metáforas, el profesor B cree pertinente utilizar 'la metáfora de la máquina', por ejemplo, al momento de introducir o reforzar la noción de función, es decir, en una clase sobre función inversa, utilizaría dicho recurso para reforzar la noción general de función. De acuerdo con Font y Acevedo (2003), las metáforas son utilizadas por los profesores para facilitar la comprensión de los estudiantes. Sin embargo, en la instancia de retroalimentación, se refuerza la idea de utilizar dichos recursos de manera consciente y controlada evitando conceptualizar nociones matemáticas en términos metafóricos.

Si bien el profesor B no relaciona profundamente las matemáticas que enseña con los estados afectivos de los estudiantes, es decir, en el desarrollo de su clase considera mayoritariamente contextos intra-matemáticos y no incluye recursos (tecnológicos o materiales) distintos a los convencionales para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes. Se valora la intención de incorporar, al inicio de su clase, situaciones contextualizadas, pues utilizar diferentes contextos e interrelacionar las diversas representaciones de las funciones favorece el aprendizaje, la fluidez de los procedimientos y aumenta el interés de los estudiantes por el estudio de dicho objeto matemático (Makonye, 2014).

Por otro lado, el profesor B logra describir claramente y de forma verbal algunos episodios de la clase que desarrolla. Por ejemplo, se refiere a algunas de las competencias matemáticas que requieren los estudiantes de cuarto año medio para alcanzar una comprensión significativa de la noción de función inversa (e.g., se refiere a los conocimientos previos, progresión curricular de la noción de función, y la finalidad de los problemas/ejercicios que propuso en clase, etc.). Sin embargo, tiene dificultades para analizar, explicar y valorar tanto la actividad de sus estudiantes como las acciones que él desarrolla durante la clase (e.g., discurso, ejemplos, recursos, etc.), pues no diseña con rigurosidad actividades que le permitan verificar y activar los conocimientos previos de los estudiantes para vincular dichos conocimientos con el objeto matemático que pretende institucionalizar -función inversa-.

En relación al análisis y gestión de las interacciones, el profesor B reconoce y describe episodios en donde no efectúa una presentación adecuada de la función inversa (clara y bien organizada). Asimismo, considera pertinente enfatizar los conceptos claves de la noción de función (arbitrariedad, existencia y univalencia) y vincular dicho objeto matemático con situaciones de la vida cotidiana para captar la atención de los estudiantes y motivar el aprendizaje. Además, cree relevante generar instancias de discusión y análisis para favorecer la comunicación e interacción entre los estudiantes, y reconoce que el discurso utilizado podría ocasionar conflictos cognitivos en los estudiantes. Si bien, se valora la reflexión del profesor B en el espacio destinado a ello, él no propone acciones concretas e inmediatas para todo lo que reconoce o sugiere.

Respecto del análisis normativo, describe algunas normas epistémicas (e.g., procedimiento para resolver la composición de funciones), pero no es consciente de la importancia del análisis normativo que regula las interacciones en el proceso de instrucción. No reconoce normas matemáticas de las no matemáticas. Respecto de la valoración de la idoneidad, a partir de la narrativa verbal del profesor B se constata que logra reflexionar y valorar la idoneidad didáctica de su proceso de instrucción matemática sobre función inversa, tal como se ha evidenciado en líneas anteriores.

4.6. Consideraciones Finales

En este capitulo ejemplificamos cómo las orientaciones teóricas del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) y las herramientas teórico-metodológicas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) proporcionan dimensiones/categorías y subcategorías del conocimiento del profesor que nos permiten analizar y caracterizar los conocimientos de profesores de matemática. Particularmente, hemos ilustrado el uso de las dimensiones del CDM y de los criterios de idoneidad didáctica específicos para la enseñanza-aprendizaje de las funciones que han sido propuestos en el capitulo 3 de este estudio.

Cabe señalar que tanto las tres dimensiones propuestas por el CDM, como las herramientas de análisis, pueden ser contempladas para el análisis de las cuatro fases del diseño didáctico: estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación (Pino- Fan y Godino, 2014). Tal como se describe anteriormente, en este estudio fueron analizadas las fases de implementación y evaluación de dos profesores chilenos en formación cuando afrontan la enseñanza de funciones en contexto de microenseñanza.

Como resultado del análisis se evidencia que ambos profesores (Profesor A y Profesor B) poseen un dominio parcial del conocimiento común del contenido, principalmente porque no logran dar respuestas adecuadas a más de una tarea que ellos mismos proponen. Asimismo, no se observan conexiones de la noción de función con objetos matemáticos de niveles educativos más avanzados, por lo tanto, no se percibe el dominio del conocimiento ampliado. De este modo se constata que el grado de competencia manifestado por los profesores A y B en el análisis de la actividad matemática, refleja su falta de conocimiento sobre la matemática que deben enseñar.

De acuerdo con Steele, Hillen, y Smith (2013), para fomentar en los estudiantes una comprensión conceptual rica de la noción de función, el profesor necesita saber más que simplemente la definición de la función y los criterios por los que una relación puede o no ser una función. Es decir, el profesor debe poseer un conocimiento profundo del contenido que le permitan tomar decisiones sobre qué enseñar y cómo hacerlo.

Establecer la definición de la noción de función no garantiza una comprensión de las características importantes de dicho objeto matemático. En el desarrollo de las clases bajo estudio, se evidencia que tanto el profesor A como el profesor B proporcionan definiciones poco precisas y ambiguas, esto particularmente porque no se refieren a tres rasgos esenciales de la noción de función: arbitrariedad, existencia y univalencia, de este modo se constata lo descrito por Even (1993) quien señala que la apreciación de la naturaleza arbitraria de las funciones está ausente y muy pocos profesores pueden explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia. Si bien el profesor B presenta actividades (e.g., relación entre el número de RUN y personas chilenas) que podrían promover unos de los significados parciales de la noción de función -*función como correspondencia arbitraria*- y el profesor A promueve el estudio de funciones utilizando representaciones gráficas lo que podría movilizar el significado de *función como representación gráfica*; ambos profesores no son conscientes de los beneficios que tiene para el aprendizaje de las funciones el uso de dichos significados. De acuerdo con Steele, Hillen, y Smith (2013), algunas definiciones pueden ser didácticamente más útiles que otras. Por ejemplo, el uso de tablas numéricas puede ser útil cuando la definición está centrada en la entrada y salida, mientras que una clase que explora dominios y rangos de funciones compuestas podría beneficiarse de una definición de diagramas de conjuntos.

Otro aspecto importante del conocimiento de los profesores es la capacidad de utilizar diversas representaciones (Cooney, Beckmann, y Lloydet, 2011). Las funciones se pueden representar mediante expresiones algebraicas, tablas, gráficos, y expresiones verbales (Janvier, 1987). En el caso de la clase desarrollada por el profesor A se promueven mayoritariamente el uso de representaciones algebraicas y gráficas. Por su parte el profesor B solo privilegia las representaciones simbólicas. Un fuerte énfasis en las representaciones simbólicas y gráficas convencionales, puede llevar a un uso excesivo de las funciones lineales y cuadráticas continuas y a menos exploraciones de funciones exóticas (e.g., funciones por partes, funciones cuya correspondencia es arbitraria, la función de dirichlet $\sin(1/x)$, etc.) (Steele, Hillen, y Smith, 2013). Para lograr una comprensión sólida de la noción de función en los estudiantes, el profesor debe poseer un amplio conocimiento de sus representaciones y debe promover actividades que permitan moverse con flexibilidad entre ellas.

En relación con las situaciones problemas, tal como se ha descrito en los apartados anteriores los profesores A y B presentan mayoritariamente problemas para ejemplificar las definiciones que introducen y problemas en contextos puramente matemáticos para reforzar el aprendizaje de las funciones. De acuerdo con Tassara, Detzel y Ruiz (2004) "una manera de dar sentido a la noción de función es considerar para su enseñanza situaciones-problemas en que las funciones sirven de modelo para el estudio del comportamiento de un fenómeno y aquellas en las que las funciones permitan expresar la dependencia entre las variables" (p. 40).

A partir de la caracterización del conocimiento didáctico-matemático descrita en los apartados anteriores, se constató que los significados de la noción de función implementados por los profesores A y B no son representativos del significado de referencia, pues el enfoque que dan ambos profesores a la noción de función potencia e inversa, respectivamente, se acerca fundamentalmente a la acepción de función como expresión analítica y considera elementos de la función desde la teoría de conjuntos. Solo el profesor A promueve la noción de función como representación gráfica. Godino, Wilhelmi y Bencomo (2006) explicitan que un conocimiento formal del objeto función, no es suficiente, para alanzar procesos de instrucción idóneos, para ello se requiere que el profesor posea un conocimiento profundo de los diversos significados de la noción de función. De este modo, conocer su evolución histórica-epistemológica representa un conocimiento relevante para la enseñanza de las funciones ya que permite tener una visión más amplia sobre el objeto función (Font, 2011).

Tal como se ha descrito en los apartados anteriores, los profesores A y B no promueven situaciones-problemas adecuadas y del interés de los estudiantes que permitan activar los conocimientos previos y mostrar la utilidad de las funciones en la modelación de fenómenos. Según Wilson (1994) los docentes manifiestan poca apreciación por el uso de las funciones y el conocimiento que tienen en esta área es limitado. Por su parte Deulofeu (2001) señala que la noción de función en ocasiones es presentada como un objeto matemático que no guarda relación con otros previamente trabajados, generando en los estudiantes un aprendizaje fragmentado. En relación con los recursos que emplean los profesores A y B son mayoritariamente tecnologías estándar (e.g., guías, pizarra, etc). Solo el profesor A incorpora el uso del software matemático Geogebra. De acuerdo con Nyikahadzoyi (2013), las tecnologías estándar limitan los tipos de representaciones. No obstante, las nuevas tecnologías generalmente favorecen la visualización y permiten representaciones nuevas y variadas del concepto de función. Además, son la llegada de las tecnologías digitales, los profesores necesitan saber, no solo la conceptualización de una función, sino también la manera en que la noción puede ser manipulada con la aplicación de la tecnología. Por otra parte, si bien los profesores A y B no utilizan explícitamente metáforas, en su discurso incorporan explicaciones en términos metafóricos. Font y Acevedo (2003) señalan que el uso de metáforas dinámicas tiene sus ventajas y sus inconvenientes. La sugerencia no es renunciar a ellas, sino que el objetivo ha de ser un uso controlado, siendo conscientes de que no todo son beneficios.

En cuanto a los aspectos interaccionales y ecológicos, se destaca que ambos profesores (Profesor A y B) promueven la participación de los estudiantes en el desarrollo de sus clases e intentan dar respuesta a todas las inquietudes que se presentan. Además, las actividades que presentan son coherentes con lo que explicita el currículo de matemática chileno para estudiantes de cuarto año medio.

Finalmente respecto al proceso de retroalimentación y reflexión de la práctica docente, hay evidencia suficiente para afirmar que tanto el profesor A como el profesor B no realizan procesos de reflexión o análisis didáctico a priori o in situ a la implementación de sus clases. Esto principalmente porque no diseñan con rigurosidad actividades que les permitirían verificar y activar los conocimientos previos de sus estudiantes, tampoco anticipan errores frecuentes ni prevén las preguntas que pueden emerger ante las actividades que proponen. En cuanto a la instancia de reflexión posterior al desarrollo de las clases realizadas por los profesores A y B, se evidencia que los futuros profesores logran describir algunas competencias matemáticas que requieren sus estudiantes para lograr una aprehensión significativa del objeto función, identifican errores conceptuales aun cuando no siempre tienen respuestas inmediatas para precisar dichas definiciones, se discute la pertinencia de los recursos para la enseñanza de funciones, sobre el tipo de problemas que podrían ser de interés para los estudiantes, se reflexiona con apoyo del profesor formador sobre el significado holístico de referencia de la noción de función y sobre las distintas representaciones asociadas a dicho objeto matemático.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES DEL ESTUDIO

5.1. Introducción

En este último capítulo presentamos una síntesis de los resultados más relevantes que se han obtenido durante el desarrollo de esta investigación. Dichos resultados son producto de los objetivos que nos propusimos para responder las preguntas de investigación. Si bien en este estudio caracterizamos el conocimiento didáctico-matemático de dos profesores chilenos cuando afrontan la enseñanza de funciones en contextos de microenseñanza, somos conscientes que aún quedan cuestiones por responder y sobre las que, investigaciones centradas en la formación de profesores de matemática podrían interesarse y continuar la búsqueda de metodologías que permitan mejorar la calidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática y en particular de las funciones. Este capítulo contiene cuatro apartados. En el primero de ellos, se describen las acciones que nos llevaron al cumplimiento de los objetivos específicos y, como consecuencia, del objetivo general. En el segundo apartado se describen las principales contribuciones de la investigación. En el tercer apartado se mencionan las limitaciones del estudio y finalmente en el último apartado se exhiben cuestiones abiertas de investigación que representan posibles vías de continuidad de este trabajo.

5.2. Sobre preguntas y objetivos de investigación

Como se señaló en el apartado 2.5.1. el propósito de esta investigación fue caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de matemática chilenos cuando afrontan procesos de instrucción sobre la noción función en contextos de microenseñanza. Al respecto, las preguntas de investigación (PI) fueron:

> **PI-1:** ***¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático de referencia que permite la gestión efectiva de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la noción de función?***

> **PI-2:** ***¿Qué conocimientos didáctico-matemáticos, respecto al de referencia, manifiestan futuros profesores de matemáticas de enseñanza media chilenos, en sus prácticas de enseñanza sobre la noción función, en contextos de microenseñanza?***

Para responder las preguntas de investigación, presentaremos el enunciado de los objetivos específicos e ilustraremos el cumplimiento de cada uno de ellos.

5.2.1. Sobre el objetivo específico OE-1

El primer objetivo específico que nos propusimos para aproximarnos al significado referencial de la noción de función fue:

> **OE-1:** ***Determinar los conocimientos didáctico-matemáticos de referencia sobre la noción de función que permitan, a los profesores y futuros docentes, orientar el diseño, implementación, reflexión y valoración de los procesos de instrucción que se realizan sobre dicho objeto matemático***

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores representa un campo de investigación fundamental dado que "el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los estudiantes dependen de manera esencial de la formación de sus profesores" (Pino, 2014, p. 5). En el capítulo 1 (apartado 1.2.) se realizó una exhaustiva revisión de la literatura científica para indagar la problemática relativa a la formación de profesores. Desde allí se identificaron diversas perspectivas que buscan determinar el conocimiento requerido por los profesores para gestionar los aprendizajes (Shulman, 1986; Shulman, 1987; Grossman, 1990; Grossman et al., 2005; Mishra y Koehler, 2006). Asimismo, se estudiaron propuestas teóricas destinadas a describir las competencias de los profesores para los procesos de instrucción matemática (Ball, Thames y Phelps, 2008; Ball, Hill y Bass, 2005; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). Finalmente se describe el trabajo realizado por Nyikahadzoyi (2013) quien propone un marco teórico específico para orientar la enseñanza de las funciones.

Otro aspecto por considerar es la determinación del significado holístico de referencia a partir de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución de la noción de función, así como de los diversos contextos y/o problemáticas donde se pone en juego dicho objeto matemático. Conocer el significado holístico de los objetos matemáticos es fundamental dado que a partir de dicho significado la institución y/o el profesor, determinan cuál o cuáles serán los significados pretendidos, los efectivamente implementados y los evaluados en el proceso de instrucción matemática (Pino-Fan, 2014). En el capítulo 1 (apartado 1.3) se presentan en detalle los resultados de numerosas investigaciones que describen la evolución de más de 2000 años de la noción de función, en particular, se presenta una revisión histórica-epistemológica sobre la noción de función desarrollada en Parra-Urrea (2015) que nos permitió identificar los significados parciales que constituyen el significado holístico de referencia de dicho objeto matemático.

Mediante la amplia revisión de las perspectivas teóricas que orientan la formación docente, la reconstrucción del significado holístico de la noción de función y de los aportes sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de las funciones que se reportan en documentos científicos, se logró determinar las características didáctico-matemáticas que requieren los profesores para gestionar los aprendizajes sobre funciones.

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones y criterios representan un recurso orientador para la gestión efectiva en el aula, permitiendo además la valoración de acciones formativas planificadas o implementadas. Para ello, en diversos estudios (Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013; Breda, Font y Pino-Fan, 2018) se han presentado tablas que describen componentes e indicadores genéricos que constituyen una guía para el análisis de cada una de las facetas del modelo CDM. Basados en los trabajos descritos anteriormente, en el marco teórico propuesto por Nyikahadzoyi (2013), en la exhaustiva revisión de literatura referida a los procesos de enseñanza-aprendizaje de la noción de función y en los resultados de un estudio histórico-epistemológico y curricular (Parra-Urrea 2015; Pino-Fan, Parra-Urrea y Castro 2019), se diseñaron componentes e indicadores de idoneidad didáctica exclusivos para los procesos de instrucción sobre funciones que constituyen una primera aproximación al conocimiento didáctico-matemático referencial para los procesos de enseñanza-aprendizaje de la noción de función.

El cumplimiento de este objetivo era relevante para los fines generales de esta investigación, pues conlleva a la construcción de una herramienta teórico-metodológica que nos permite sistematizar aspectos para el diseño, reflexión y valoración de los procesos de instrucción sobre funciones. De este modo, consideramos que las tablas (criterios de idoneidad para la enseñanza de funciones) descritas en el capítulo 3 representan un aporte significativo a la comunidad de formación inicial o permanente de profesores.

5.2.2. Sobre el objetivo específico OE-2

El segundo objetivo específico que pretende diseñar e implementar ciclos de formación inicial de profesores en contextos de microenseñanza fue:

> **OE-2:** ***Diseñar e implementar ciclos de formación inicial de profesores mediante contextos de microenseñanza, en los que futuros profesores puedan poner en juego sus conocimientos didáctico-matemáticos para la planificación, implementación y reflexión de clases sobre funciones***

La microenseñanza constituye un elemento esencial en la formación de profesores, dado que admite un espacio de análisis, autobservación y autorreflexión de la labor que ejerce el profesor en formación en los procesos de instrucción matemática. Sin duda, instancias de retroalimentación permiten mejorar el desempeño docente y con ello lograr una gestión de aula y del contenido más efectiva (Fernández, 2010; Arsal, 2014).

La implementación de ciclos de formación docente en contextos de microenseñanza permite a los futuros profesores experimentar en un entorno seguro y controlado espacios de reflexión basados ?en el diálogo, la discusión y el análisis entre pares de lo epistémico, cognitivo, afectivo, mediacional, interaccional y ecológico. En esta investigación, se utilizó durante un semestre la propuesta teórico-metodológica descrita en el capítulo 3 para orientar la reflexión de seis futuros profesores que participaron en procesos de instrucción sobre la noción de función en contextos de microenseñanza. Ejemplificamos lo anterior, mediante el análisis y descripción de dos casos específicos -la clase desarrollada por el profesor A sobre la función potencia y la clase realizada por el profesor B sobre función inversa-. Las instancias de microenseñanza que se describen en este estudio permitieron retroalimentar de manera inmediata las fortalezas y deficiencias emergentes de los procesos de instrucción. De este modo, se logró contribuir, en las diversas dimensiones del conocimiento didáctico-matemático de los seis futuros profesores que participaron en el estudio. Todo lo anterior, se presenta en los apartados 4.3.3 y 4.5.3 referidos a la Dimensión Meta Didáctico-Matematico del CDM.

5.2.3. Sobre el objetivo específico OE-3

El tercer objetivo específico que pretende caracterizar el conocimiento de profesores en formación sobre la noción de función y a partir de ello validar la herramienta teórico-metodológica descrita en OE-1 fue:

> **OE-3:** ***Caracterizar mediante la herramienta teórico-metodológica propuesta en OE-1 los conocimientos didáctico-matemáticos de profesores chilenos en formación, cuando realizan procesos de instrucción (planificación, implementación y evaluación) sobre la noción de función en contextos de microenseñanza.***

El logro de este objetivo, se observa en el capítulo 4 en el que se describe y caracteriza el conocimiento didáctico-matemático de dos profesores chilenos en formación (Profesor A y Profesor B) cuando afrontan la enseñanza de la función potencia y función inversa, respectivamente, en contextos de microenseñanza. El análisis y reflexión del conocimiento didáctico-matemático que poseen los profesores en formación participantes de este estudio se realizó a partir de las orientaciones teóricas que propone el Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) y utilizando las tablas descritas ampliamente en el capítulo 3, las que contienen componentes e indicadores de idoneidad didáctica específicos para la enseñanza de funciones. De este modo, dichas tablas orientaron el proceso de retroalimentación y reflexión de la práctica que ejercieron los profesores A y B y nos permitieron sistematizar las características relativas al conocimiento didáctico-matemático de los profesores bajo estudio.

El cumplimiento de este objetivo se ve reflejado en la caracterización del conocimiento didáctico-matemático de dos profesores chilenos en formación cuando afrontan la enseñanza de funciones. Dicha caracterización se realizó mediante la herramienta teórica-metodológica presentada en el capítulo 3 de este estudio. De este modo, se valida y constata la utilidad de los criterios de idoneidad para el análisis y reflexión de los procesos de instrucción sobre la noción de función. Según Steele, Hillen y Smith (2013), la investigación sobre experiencias prácticas en la formación profesional de profesores de matemática es exigua, es así como este estudio constituye además un aporte a Educación Matemática tanto a nivel teórico como empírico.

5.2.4. Sobre el objetivo específico OE-4

El cuarto objetivo específico se describe como:

> **OE-4:** ***Contrastar las similitudes y complementariedades respecto del conocimiento didáctico-matemático que ponen en juego dos futuros profesores chilenos en sus prácticas de enseñanza sobre funciones, en contextos de microenseñanza.***

El logro de este objetivo se observa en el apartado 4.6 del capítulo 4. A partir del análisis y caracterización del conocimiento didáctico-matemático de los dos profesores chilenos en formación se constata que existe evidencia suficiente para asegurar que tanto el profesor A como el profesor B no realizan procesos de reflexión o análisis didáctico a priori o in situ a la implementación de sus clases sobre funciones. Si bien a posteriori se logra generar un espacio de retroalimentación y reflexión, esta instancia no se da de manera natural, sino que fue propiciada por el profesor formador a cargo. Es fundamental que los docentes hagan habitual las prácticas de reflexión, pues esto permitirá alcanzar mayor idoneidad en los procesos de instrucción matemática y con ello favorecer los aprendizajes de sus estudiantes. Del mismo modo, se verifica que ambos profesores reflejan falta de conocimiento de la matemática que deben enseñar, desconocen los diversos significados parciales de la noción de función, tienen dificultades para determinar la utilidad de dicho objeto matemático y el desarrollo de sus clases se apega a los hábitos de enseñanza tradicional.

5.2.5. Reflexiones finales

En este apartado hemos discutido en qué medida se ha logrado responder las preguntas de investigación: ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático de referencia que permite la gestión efectiva de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la noción de función? y ¿Qué conocimientos didáctico-matemáticos, respecto al de referencia, manifiestan futuros profesores de matemáticas de enseñanza media chilenos, en sus prácticas de enseñanza sobre la noción función, en contextos de microenseñanza? Para dar respuesta a dichas preguntas se propusieron cuatro objetivos específicos los que fueron alcanzados a lo largo de nuestra investigación, pues se logró estudiar en profundidad las diversas perspectivas relativas a la formación de profesores, se realizó una exhaustiva revisión de literatura científica sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de la noción de función, se profundizó el estudio sobre las problemáticas que dieron origen a la noción de función a lo largo de la historia, se propuso una herramienta teórico-metodológica que describe criterios de idoneidad didáctica específicos para la enseñanza de funciones, se implementaron ciclos de formación de profesores en contextos de microenseñanza y, finalmente, se constató la utilidad de dicha herramienta mediante la caracterización del conocimiento didáctico-matemático de dos profesores chilenos en formación cuando afrontan la enseñanza de funciones.

5.3. Principales contribuciones

A continuación, presentamos un resumen de las principales contribuciones de esta investigación. Debemos señalar que no profundizaremos en ellas dado que han sido ampliamente comentadas a lo largo del estudio.

Esta investigación tenía por propósito caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de matemáticas de enseñanza media chilenos a partir de los procesos de instrucción que realizan para la enseñanza de la noción función en contextos de microenseñanza Para ello, era fundamental disponer de una herramienta teórico-metodológica que sistematizara los aportes y avances de la literatura científica y que a su vez orientara el diseño, la reflexión y la valoración de la práctica docente (propia o la de otros) que se lleva a cabo como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de función. En consecuencia, cuando nos preguntamos ¿Qué herramientas teórico-metodológicas permiten orientar y sistematizar el diseño, la reflexión y la valoración de los procesos de instrucción sobre funciones?, pensamos que una aproximación a la repuesta radica en nuestra propuesta de combinar, en la formación docente, espacios de microenseñanza con herramientas teórico-metodológicas tales como la noción de idoneidad didáctica introducida por el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM), y la que hemos adaptado para el caso concreto de las funciones.

En este estudio se presentaron dos episodios en contextos de microenseñanza, el primero desarrollado por el profesor A quien afronta la enseñanza de la función potencia y el segundo un proceso de instrucción que realiza el profesor B quien aborda la función inversa. El análisis de estos episodios nos permitió verificar que los criterios y descriptores de idoneidad para los procesos de instrucción sobre funciones, son una herramienta que permite sistematizar la reflexión sobre, al menos, seis facetas involucradas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (e.g., Godino et al., 2007; Godino et al., 2019; Pino-Fan et al., 2015; Pino-Fan et al., 2018). Es decir, se logró analizar la riqueza matemática de objetos y procesos (faceta epistémica); las características sobre cómo piensan y aprenden los estudiantes (faceta cognitiva); los estados afectivos, actitudinales y emocionales de los estudiantes (faceta afectiva); los recursos y medios materiales, temporales, etc., (faceta mediacional); las interacciones que se dan en el aula (faceta interaccional); los elementos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos, etc., que condicionan el proceso de instrucción (faceta ecológica). Estas seis facetas forman parte de la dimensión didáctica del CDM y refieren a conocimientos esenciales que requiere el profesor para la gestión de los aprendizajes de sus estudiantes (Breda et al., 2017; Castro, Pino-Fan y Velásquez, 2018).

Otro elemento esencial de nuestra propuesta es la microenseñanza (Mergler y Tangen 2010), instancia que permite a los profesores en formación disponer de un entorno seguro y controlado para desarrollar su práctica y reflexionar sobre su desempeño. De ninguna manera esta metodología reemplaza la práctica docente en un contexto real, pero permite adquirir experiencia, autoevaluarse y recibir retroalimentación inmediata sobre los elementos que presentan mayores fortalezas y/o deficiencias. Es decir, se recomienda incorporar en la formación inicial de profesores, experiencias en contextos simulados y reales para explorar posibles problemas pedagógicos que conlleven a la reflexión y análisis crítico de la enseñanza. Además, los espacios de microenseñanza permiten trabajar el desarrollo de las diversas dimensiones del conocimiento didáctico-matemático de los profesores que participan, por ejemplo, el futuro profesor que presenta su clase debe hacer uso de su CDM sobre funciones para la gestión de su clase, y los futuros profesores que actúan como estudiantes deben cumplir dicho rol, es decir, actuar y pensar como lo harían estudiantes reales.

En síntesis, los componentes e indicadores de idoneidad didáctica para los procesos de instrucción sobre funciones permiten sistematizar lo reportado a nivel internacional sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de la noción de función (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021). De este modo, se dispone de una herramienta teórico-metodológica que describe y constituye el conocimiento didáctico-matemático de referencia. Además, provee directrices específicas para el diseño y reflexión de la práctica docente, antes, durante y después del proceso de instrucción sobre funciones. La vertiente práctica de este estudio, es decir, el análisis de las clases desarrolladas por lo profesores A y B, nos permitió validar nuestra propuesta de criterios de idoneidad y mostrar cómo dichos criterios constituyen un potente espacio para la reflexión de la práctica que ejerce un profesor sobre la enseñanza de funciones.

5.4. Limitaciones del estudio

A partir de lo descrito en el apartado anterior de contribuciones, hemos identificado algunas limitaciones que describimos a continuación:

- Los profesores A y B luego de la instancia de retroalimentación y reflexión que se llevó a cabo posterior al desarrollo de los procesos de instrucción sobre función potencia y función inversa, logran tomar conciencia teóricamente de los aspectos que deben mejorar en cada una de las seis facetas involucradas en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, los profesores bajo estudio no realizan un nuevo proceso de instrucción sobre los temas que ya habían abordado, impidiendo verificar empíricamente la mejora de su práctica docente, representando esto la primera limitación del estudio. Sin duda, emplear los criterios de idoneidad en cada una de las etapas del diseño didáctico es fundamental, pero también es esencial que el proceso que involucra estudio preliminar, diseño, implementación, reflexión y valoración de la práctica docente sea sistemático y cíclico para conseguir la mejora continua de los procesos de instrucción matemática.

- Este estudio contempló la caracterización del conocimiento didáctico-matemático de dos profesores chilenos en formación. Dado el número acotado de clases analizadas no se logra observar todos los indicadores de las seis facetas, impidiendo valorar algunas competencias esenciales declaradas en los criterios de idoneidad didáctica para la enseñanza de las funciones.

5.5. Proyecciones

A pesar de las contribuciones que resultan de nuestra investigación, somos conscientes que existen algunas cuestiones abiertas que podrían estudiarse con la finalidad de avanzar o ampliar la problemática relativa al conocimiento didáctico-matemático que requieren los profesores para la enseñanza idónea de funciones. A continuación, se describen posibles proyecciones de esta investigación:

- Una primera proyección es analizar procesos de instrucción sobre la noción de función desarrollados por profesores (en formación o ejercicio) en contextos reales. Es decir, sería interesante responder la pregunta ¿Cuál es el conocimiento didáctico matemático que poseen profesores sobre la noción de función en contextos reales de enseñanza?

- Una segunda proyección es caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de profesores (en formación o en ejercicio) una vez que son conscientes de las competencias que deben fortalecer en cada una de las seis facetas del proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto nos permitiría potenciar los conocimientos sobre la dimensión meta didáctico-matemático. Es decir, sería interesante responder la pregunta ¿La reflexión basada en los criterios de idoneidad sobre la noción de función permite que el profesor se acerque al conocimiento didáctico-matemático de referencia?

5.6. Contribución a la comunidad de investigación

En este último apartado, se describen las aportaciones que hemos realizado al campo de investigación en Educación Matemática a partir del desarrollo y resultados obtenidos a lo largo de este estudio.

- Pino-Fan, L. & Parra-Urrea, Y. (2021). Criterios para orientar el diseño y la reflexión de clases sobre funciones ¿Qué nos dice la literatura científica? UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 91, 45-54.
- Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y., & Castro, W. (2019). Significados pretendidos para la noción de función por el currículo chileno de matemáticas. Magis Revista Internacional de Investigación en Educación, 11(23), 201-220.
- Castro, W. F., Pino-Fan, L., & Parra-Urrea, Y. (2019). El modelo del conocimiento Didáctico-Matemático de los profesores: Nuevas perspectivas y horizontes para la formación docente. Revista Colombiana de Matemática Educativa, 3(2), 17-26.
- Parra-Urrea, Y., & Pino-Fan, L. (2017). Conocimiento didáctico-matemático de profesores chilenos cuando abordan la noción de función. En FESPM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 466-474). Madrid, España: FESPM.
- Parra-Urrea, Y., & Pino-Fan, L. (2017). Estudio de la representatividad de la noción función en el currículo de matemáticas chileno: el caso de octavo básico. En Serna, Luis Arturo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 119-128). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Acevedo, J.L., Font, V., & Giménez, J. (2004). Class Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph offunctions. In J. Giménez, G. Fitzsimons, C. Hahn (Eds.), Globalisation and mathematics education CIEAEM 54, pp. 336-342. Barcelona: Graó.

[2] Adu-Gyamfi, K., & Bossé, M. J. (2013). Processes and reasoning in representations of linear functions. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(1), 167-192.

[3] Akkoc, H., & Tall, D.O. (2002). The Simplicity, Complexity and Complications of the Function Concept, Proceedings of the 26th International Conference on the Psychology of Mathematics Education, Norwich, UK, 2, 25-32.

[4] Akkoc, H., & Tall, D.O. (2003). The Function Concept. Comprehension and Complication, Proceedings of the Day Conference of British Society of Research on Learning of Mathematics, Sheffield Hallam University, UK, 1-6

[5] Altuk, Y. G., Kaya, V. H., & Bahceci, D. (2012). A Study on Developing "Microteaching Scale" for Student Teachers. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 46*, 2964-2969.

[6] Amaya, T., Pino-Fan, L., & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática, 28*(3), 111-144.

[7] Amaya, T., Castellanos, A., & Pino-Fan, L. (2021). Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. *Uniciencia, 35*(2), e14504.

[8] Aravena, M. (2001). *Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica*. (Tesis Doctoral). Universidad de Barcelona, España.

[9] Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática, (pp. 97-140). Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamericano.

[10] Arsal, Z. (2014). Microteaching and pre-service teachers sense of self-efficacy in teaching. *European Journal of Teacher Education, 37*(4), 453-464.

[11] Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

[12] Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*, 14-22.

[13] Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

[14] Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizont: Knowing mathematics for teaching to learnes? mathematical futures. Paper presented at the 43^{Rd} Jahrestagung Für Didaktik Der Mathematik Held in Oldenburg, Germany.

[15] Bennett, J., Burger, E., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F., Roby, T., Scheer, J., & Waits, B. (2014). *Texto para el estudiante. Matemática 8°*. Chile: Galilieo Libros Ltda.

[16] Benton-Kupper, J. (2001). The Microteaching Experience: Student Perspectives. *Education, 121*(4), 830-835.

[17] Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose (Eds), Meaning in Mathematics Education (pp. 61-81). Dordrecht: Kluwer.

[18] Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method*. Berkeley: University of California Press.

[19] Boyer, C. (1986). *Historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad.

[20] Braga, G. & Belver, J. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación, 27*(1), 199-218.

[21] Breda, A., & Lima, V.M.R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT, 5*(1), 74-103.

[22] Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255-278. doi: `http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13`

[23] Brookfield, S.D. (1995). *Becoming a critically reflective teacher*. San Francisco: Josse-Bass.

[24] Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques, la pensée sauvage*. Grenoble, Francia.

[25] Brousseau G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoríaa de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires: Libro del Zorzal.

[26] Cañón, C. (1993). Apéndice: Sobre la génesis del concepto de función. En C. Cañón (Ed.), La Matemática: creación y descubrimiento (pp. 167-181). Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

[27] Castro, W. F., Pino-Fan, L., & Velásquez-Echavarría, H. (2018). A proposal to enhance preservice teacher's noticing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education, 14*(11), em1569. doi: `https://doi.org/10.29333/ejmste/92017`

[28] Castro, W. F., Pino-Fan, L., & Parra-Urrea, Y. (2019). El modelo del conocimiento Didáctico-Matemático de los profesores: Nuevas perspectivas y horizontes para la formación docente. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, 3*(2), 17-26.

[29] Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

[30] Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal of Research in Mathematics Education, 16*(5), 324-336.

[31] Cooney, T. J., Beckmann, S., & Lloyd, G. M. (2011). *Developing essential understandings of functions for teaching mathematics in grades 9?12*. Reston, VA: NCTM.

[32] Donnelly, R., & Fitzmaurice, M. (2011). Towards productive reflective practice in microteaching. *Innovations in Education and Teaching International, 48*(3), 335-346.

[33] Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), Representations and Mathematics visualization (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinveztav-IPN.

[34] Deulofeu, J. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? aportaciones de la investigación. X JAEM. Ponencia P41, pp. 367-377.

[35] Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learnig of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

[36] Dewey, J. (1965). The relation of theory to practice in education. In M. Borrowman (Ed.), Teacher education in America: A documentary history (pp. 140-171). New York, USA: Teachers College Press.

[37] Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, E., & Gagatsis, A. (2006). Relations between secondary pupils? conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533-556.

[38] Erökten, S., & Durkan, N. (2009) Özel ögretim yöntemleri II dersinde mikro ögretim uygumalamari. The First International Congress of Educational Research, Canakkale.

[39] Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 94-116.

[40] Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 105-121.

[41] Fernández, M. L. (2010). Investigating how and what prospective teachers learn through microteaching lesson study. *Teaching and Teacher Education, 26*(2), 351-362.

[42] Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. (Tesis de Maestría no publicada). Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

[43] Figueiredo, C. (2010). *Los ejemplos en clase de matemáticas de secundaria como referente del conocimiento profesional*. (Tesis Doctoral). Universidad de Extremadura, España.

[44] Figueiredo, C., Contreras, L., & Blanco, L. (2012). La ejemplificación del concepto funció: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos. *Educación matemática, 24*(1), 73-105.

[45] Figueiredo, C., Contreras, L., & Blanco, L. (2015). Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM. España: Universidad de La Laguna.

[46] Font, V., & Acevedo, J. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(3), 405-418.

[47] Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x) = x^2$ sin usar la definición por límites. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18*, 15-28.

[48] Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 56*, 86-94.

[49] Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124. doi:10.1007/s10649-012-9411-0

[50] Font, V., Sala, G., Breda, A., & Seckel, M. (2017). Aspectos históricos presentes en las propuestas de innovación de profesores de básica de matemáticas. *Revista Brasileira de Ensino de Ciencia e Tecnologia, 10*(3), 16-42.

[51] Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

[52] Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

[53] Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. In A. Sierpinska, J. Kilpatrick (Ed.), Mathematics education as a research domain: A search for identity (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

[54] Godino, J. D. (2001). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

[55] Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22*(2/3), 237-284.

[56] Godino, J. D., Batanero, C., & Flores, P. (2003). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemática.(Presentación Poster). En: A. Olivier y K. Newstead (Eds), Proceedings of the 22 nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education. University of Stellenbosch, South Africa.

[57] Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), 221-252.

[58] Godino, J., Wilhelmi, M., & Bencomo, D. (2006). Idoneidad de un proceso de instrucción matemática sobre la noción de función con estudiantes de ingeniería. Coloquio Internacional para la Enseñanza de la Matemática a Estudiantes de Ingeniería. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

[59] Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

[60] Godino, J. D., & Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados semióticos. Recuperado de `http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm`

[61] Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

[62] Godino J.D., Batanero, C., & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática. (versión ampliada de Godino, Batanero, y Font, 2007). Disponible en `http://www.ugr.es/local/jgodino`

[63] Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. (2009) Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico.*Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76.

[64] Godino, J. D. (2011) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

[65] Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247-265.

[66] Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. & Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT, 8*(1), 46-74.

[67] Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

[68] Godino, J. D., & Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching: a view from the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8). Antalya, Turkey. Descargado de `http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/wg17_papers.html`

[69] Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

[70] Gómez Chacón, I., & Joglar, N. (2010). Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using Geogebra from a holistic approach. *Educação Matemática Pesquisa, 12*(3), 485-513.

[71] González, J. (2004). Apunte de matemática discreta. Departamento de Matemática, Universidad de Cádiz: España

[72] Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial S.A.

[73] Greeno, J.G., & Hall, R.P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78*, 361-367.

[74] Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York and London: Teachers College Press.

[75] Grossman, P., Wilson, S., & Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para enseñanza Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 9*(2), p. 0.

[76] Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E., & Williamson, P. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record, 111*(9), 2055-2100.

[77] Hill, H. C., Ball, D. L., & Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

[78] Jaimes, N. (2012). *La noción de función, un acercamiento a su comprensión*. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

[79] Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics. Hillsdale*, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P.

[80] Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 79-103.

[81] Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions. In H. Stenbring, M. G. Bartolini Bussi, A. Sierpinska (Eds.), Language and communication in the mathematics classroom (pp. 271-288). Reston, Va: NCTM.

[82] Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

[83] Kontorovich, I. (2016). Students confusions with reciprocal and inverse functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(2), 278-284.

[84] Llinares, S. Valls, J. & Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 31-54.

[85] Love, E., & Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 371-409). Dordrecht: Kluwer.

[86] McClain, K., & Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(3), 236- 266. doi:10.2307/749827

[87] Mesa, Y., & Villa-Ochoa, J. (2009). El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. En Leston, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME, 22 . (pp. 1315-1323). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

[88] Mesa, V. (2004). Caracterización de prácticas asociadas con funciones en los libros de texto de la escuela secundaria: un enfoque empírico. *Estudios educativos en matemáticas, 56*, 255-286.

[89] Mergler, A. G., & Tangen, D. (2010). Using microteaching to enhance teacher efficacy in pre-service teachers. *Teaching Education, 21*(2), 199-210.

[90] Mineduc. (2009). Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media. Actualización 2009. Santiago de Chile. doi:978-956-292-2586

[91] Mineduc. (2015). Programa de estudio, actualización 2009, Cuarto año medio vigente hasta 2020. Recuperado de https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-34362_programa.pdf

[92] Mineduc. (2016). Programa de estudio, Segundo año medio, Matemática. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34360_programa.pdf

[93] Mineduc. (2020). Programa de Estudio cuarto año Medio plan diferenciado matemática. Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140143_programa.pdf

[94] Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

[95] Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teacher beliefs of students algebra development. *Cognition and Instruction, 18*(2), 209-237.

[96] Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T., & Wirtz, M. (2015). Students competencies in working with functions in secondary mathematics education?empirical examination of a competence structure model. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(3), 657-682.

[97] Norman, A. (1992). Teachers mathematical knowledge of the concept of function. In G. Harel, E. Dubinsky (Eds.), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy, vol. 25, MAA notes (pp. 215-232). Washington, DC: Mathematical Association of America.

[98] Nyikahadzoyi, M.R. (2013). Teachers knowledge of the concept of a function: a theoretical framework. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(S2), 261-283.

[99] Osorio, G., Norambuena, P., Romante, M., Gaete, D., Díaz. J., Celedón J., Morales K., Ortiz, N., Ramírez, P., Barrera, R., & Hurtado, Y. (2020). 3° y 4° Matemática, Texto para el estudiante. Chile: Editorial SM.

[100] Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal*. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales.

[101] Parra-Urrea, Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función*. (Tesis de Magíster). Universidad de Los Lagos, Chile.

[102] Parra-Urrea, Y., & Pino-Fan, L. (2017). Conocimiento didáctico-matemático de profesores chilenos cuando abordan la noción de función. En FESPM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 466-474). Madrid, España: FESPM.

[103] Parra-Urrea, Y., & Pino-Fan, L. (2017). Estudio de la representatividad de la noción función en el currículo de matemáticas chileno: el caso de octavo básico. En Serna, Luis Arturo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 119-128). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

[104] Pedersen, O. (1974). Logistics and the theory of functions: An essay in the history of Greek mathematics. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 24*(94), 29-50.

[105] Pino-Fan, L., Godino, J.D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didácticomatemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

[106] Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *REVEMAT, 8*(2), 1-49.

[107] Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA, 34*(2), 123-150.

[108] Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.

[109] Pino-Fan, L., Font, V. & Godino, J. D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), Matemática Educativa: La formación de profesores (pp. 137 - 151). México, D. F.: Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero.

[110] Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2014). Perspectiva ampliada del conocimiento-didáctico matemático del profesor. Manuscript submitted for publication. Availa-

ble at: http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2014/10/Version-ampliada-del-CDM_8-agosto-2014.pdf

[111] Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

[112] Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA*, 29(51), 60-89. doi: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

[113] Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of tearchers didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Techonology Education, 11*(6), 1429-1456.

[114] Pino-Fan, L., & Assis, A. (2015). Hacia una metodología para el análisis y caracterización del conocimiento didáctico-matemático de los profesores: El caso de una actividad sobre patrones. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México.

[115] Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y., & Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220.

[116] Pino-Fan, L. & Parra-Urrea, Y. (2021). Criterios para orientar el diseño y la reflexión de clases sobre funciones ¿Qué nos dice la literatura científica? *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 91*, 45-54.

[117] Ramos, A. B. (2005). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Barcelona, España.

[118] Ramírez, R., Ibarra, S., & Pino-Fan, L. (2020). Prácticas evaluativas y significados evaluados por profesores del bachillerato mexicano sobre la noción de ecuación lineal. *Educación Matemática, 32*(2), 69-98.

[119] Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.

[120] Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista EMA, 1*(1), 4-24.

[121] Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis doctoral publicada). Universidad de Jaén, España.

[122] Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(3), 355-382.

[123] Sánchez, V., & Llinares, S. (2003). Four student teachers pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(1), 5-25.

[124] Sastre, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*, 141-155. doi: `1815-0640`.

[125] Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), Tools and processes in mathematics teacher education (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers.

[126] Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

[127] Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

[128] Sierpinska, A. (1992). Understanding the Notion of Function. In G. Harel, E.Dubinsky (Eds.), The concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy (pp. 25-58). USA: Mathematical Association of America.

[129] Sintema, E. J., & Marban, J. M. (2021). Pre-service Teachers' Knowledge of Identifying and Clearing Pupils' Misconceptions about Inverse and Composite Functions via Vignettes. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(1), em1930.

[130] Steele, M. D., Hillen, A. F., & Smith, M. S. (2013). Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(6), 451-482.

[131] Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K. & Bana, J. (2001) Preservice teachers knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(3), 205-225.

[132] Sullivan, M. (2006). *Álgebra y trigonometría, séptima edición*. Ciudad de México: Pearson Educación.

[133] Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. Plenary presentation in Working Group 3, ICME. Québec. Canada.

[134] Tassara, A., Detzel, P., & Ruiz, M. (2004). El sentido de las funciones en la enseñanza. *Revista de educación matemática, 19*(2), 30-41.

[135] Vinner, S., & Tall, D. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

[136] Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology, 14*, 293-305.

[137] Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 266-356.

[138] Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. En E. Dubinsky, G. Harel (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 195-214). United States: Mathematical Association of America.

[139] Watson, A. & Harel, G. (2013). The role of teachers? knowledge of functions in their teaching: A conceptual approach with illustrations from two cases. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 13*(2), 154-168.

[140] Wilson, M.R. (1994). One preservice secondary teachers understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(4), 346-370.

[141] Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. New York: The MacMillan Company.

[142] Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

[143] Yavuz, I. & Baştürk, S. (2011). Ders kitaplarinda fonksiyon kavrami: Türkiye ve Fransa ornegi [The concept of function in textbooks: the Turkish and the French samples]. *Kastamonu Egitim Dergisi, 9*(1), 199-220.

[144] Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19 Century. *Archive for the History of the Exact Sciences, 16*(1), 37-85.

[145] Zaslavsky, O., Harel, G., & Manaster, A. (2006). A teachers treatment of examples as reflection of her knowledge-base. En Novotná, H. Moraová, M.Krátká, y N. Stehlíková (Eds)., Proceeding of the 30th Conference of the international group for the psychology of mathematics education, 5, 457-46. Prague, Czech Republic, PME.

[146] Zill, D., & Dewar J. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica, tercera edición*. Ciudad de México: Mc Graw Hill Educación.