UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SEDE OSORNO

DISEÑO DE TAREAS SOBRE LOS SIGNIFICADOS PARCIALES DE LA NOCIÓN DE LÍMITE EN FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Tesis para optar al grado de Doctora en Educación Matemática

Autora: Daniela Andrea Araya Bastias
Director: Dr. Luis Pino Fan

Osorno, Chile. 2022

ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SEDE OSORNO

DISEÑO DE TAREAS SOBRE LOS SIGNIFICADOS PARCIALES DE LA NOCIÓN DE LÍMITE EN FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Tesis Doctoral presentada por Daniela Andrea Araya Bastias para optar al grado de Doctora en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos, dirigida por el Dr. Luis Roberto Pino Fan, académico de la Universidad de Los Lagos.

Daniela Araya Bastias ____________________

Dr. Luis Pino Fan ____________________

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

ESCUELA DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SEDE OSORNO

DISEÑO DE TAREAS SOBRE LOS SIGNIFICADOS PARCIALES DE LA NOCIÓN DE LÍMITE EN FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Esta Tesis de Doctorado ha sido desarrollada al seno del Grupo de Investigación sobre Didáctica de la Matemática (GIDMAT-ULAGOS) del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, en el marco del Proyecto de Investigación Fondecyt N°1200005 titulado “Desarrollo de competencias profesionales clave para la práctica pedagógica de profesores de matemáticas de enseñanza media”, el cual es dirigido por el Dr. Luis R. Pino Fan; y se inscribe en las líneas de investigación ‘Didáctica de los Diversos Marcos Matemáticos’ e ‘Historia, epistemología y aspectos socioculturales de las matemáticas’.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por brindarme la inteligencia para poder desarrollar mis habilidades y conocimientos con el fin de desenvolverme profesionalmente como docente e investigadora.

A mis padres, Víctor y Lyli, y mi hermana Carolina, quienes son mi fuente de inspiración y que siempre me han apoyado y alentado a perseverar por mis sueños y proyectos. A mi esposo Carlos, por su amor incondicional y su gran apoyo en las diversas etapas de mis estudios. A mi querida hija, Constanza, que es mi motor y mi fuente de energía que me ilumina y brinda amor a cada uno de mis días.

A mi director de tesis, el Dr. Luis Pino Fan, por haber aceptado dirigir esta tesis y ser mi mentor, por sus orientaciones y apoyo, por compartir sus experiencias y conocimiento en las sesiones de discusión académica y hacer posible esta investigación.

A todos los profesores del Programa de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, quienes fueron parte de mi proceso formativo; especialmente a la Dra. Adriana Breda, por su confianza, amabilidad y por compartir conmigo sus experiencias, conocimientos y consejos.

A mis compañeros de carrera y amigos que siempre estuvieron alentándome a continuar por este camino, en particular, a Yocelyn Parra y a Priscilla Olivares quienes me apoyaron y me presentaron este maravilloso mundo de la Didáctica de la Matemática.

A mis compañeros de trabajo de la Universidad Central de Chile, Gustavo, Solange, Claudio y Nicolás, quienes me apoyaron y me dieron aliento en los momentos más díficiles que tuve que enfrentar en el transcurso de mi investigación.

A la Universidad de Los Lagos, institución que me otorgó una beca de arancel e hizo posible la realización de mis estudios en el programa de Doctorado en Educación Matemática en su sede Osorno.

RESUMEN

El estudio sobre el objeto matemático límite de funciones en una variable y su enseñanza ha tenido un creciente interés en los últimos años. Sin embargo, hay pocos trabajos que indaguen y propicien experiencias didácticas de cada uno de los significados parciales de dicho objeto matemático con el fin de propiciar la riqueza matemática y los procesos que relevan cada uno de éstos. En esta investigación se propone el diseño de tareas de cada uno de los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable y se expone los resultados obtenidos mediante la implementación de las tareas en un grupo de profesores en formación, en particular, se estudia los significados personales desarrollados por los participantes.

Para lograr el objetivo central de la investigación el trabajo se llevó a cabo en cinco fases: 1) Análisis de la evolución histórica de la noción de límite mediante estudios históricos epistemológicos existentes en la literatura; 2) Diseño de las configuraciones epistémicas de cada uno de los significados parciales identificados en la fase anterior; 3) Diseño de tareas por intención de cada significado parcial del objeto límite de funciones de una variable; 4) Validación e implementación de las tareas diseñadas en la fase anterior; y 5) Análisis de la implementación de las tareas y reflexiones finales. Para el desarrollo de la investigación se utilizaron las nociones teórico-metodológicas de la configuración de objetos y/o procesos matemáticos y los componentes de la Idoneidad Didáctica que propone el Enfoque Ontosemiótico (EOS) así como también criterios de diseño de tareas que considera aspectos de contexto, lenguaje, estructura, distribución y niveles de interacción (Pochulu, Font y Rodríguez, 2013; Sullivan, Knott y Yang, 2015).

Los resultados de nuestra investigación proporcionan pautas y criterios que permiten el diseño de tareas para desarrollar y/o potenciar cada uno de los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable, así como también aporta en el análisis de la implementación de las tareas con especial enfásis en los significados personales logrados por los estudiantes.

ABSTRACT

The study of the limit mathematical object of functions in one variable and its teaching has had a growing interest in recent years. However, few works investigate and promote didactic experiences of each of the partial meanings of said mathematical object to promote the mathematical richness and the processes that each of these reveals. In this research, the design of tasks of each one of the partial meanings of the limit object of functions in a variable are proposed and the results obtained through the implementation of the tasks in a group of teachers in training are exposed, in particular, the personal meanings developed by the participants.

In order to achieve the central objective of the research, the work was carried out in five phases: 1) Analysis of the historical evolution of the notion of limit through historical epistemological studies existing in the literature; 2) Design of the epistemic configurations of each of the meanings partial identified in the previous phase; 3) Design of tasks by the intention of each partial meaning of the limit object of functions of a variable; 4) Validation and implementation of the tasks designed in the previous phase; and 5) Analysis of the implementation of the tasks and final thoughts. For the development of the research, the theoretical-methodological notions of the configuration of objects and mathematical processes and the components of Didactic Suitability proposed by the Onto-semiotic Approach (OSA) were used, as well as task design criteria that consider aspects of context, language, structure, distribution and levels of interaction (Pochulu, Font & Rodríguez, 2013; Sullivan, Knott & Yang, 2015).

The results of our research provide guidelines and criteria that allow the design of tasks to develop and/or enhance each of the partial meanings of the limit object of functions in a variable, as well as contribute to the analysis of the implementation of tasks with special emphasis on personal meanings achieved by students.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN GENERAL

Diversas investigaciones han abordado el objeto límite de funciones en una variable en los últimos tiempos, debido a que esta noción es primordial para el aprendizaje y desarrollo del cálculo infinitesimal (Elia et al, 2009; Parameswaran, 2006). Entre las distintas indagaciones que hay, se puede destacar trabajos que abordan aspectos relativos a la historia y epistemología de dicho objeto matemático, otras de índole cognitivas relacionadas a las dificultades que presentan los estudiantes cuando afrontan el aprendizaje de límite y otras abordan cuestiones vinculadas a los procesos instruccionales donde se explicitan dificultades asociadas a las estrategias y metodologías de enseñanza. En este sentido, el interés de esta investigación es diseñar tareas sobre los distintos significados parciales que posee el objeto límite de funciones en una variable y analizar la implementación de éstas a estudiantes de un programa de formación de profesores de matemática con el fin de describir los significados personales manifestados por ellos.

El trabajo que a continuación se presenta, se encuentra estructurado en ocho capítulos, a través de los cuales se estudian los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable, el diseño de tareas asociadas a cada de uno de estos significados parciales, el análisis de la implementación de éstas a profesores en formación así como también el análisis de las Tareas por parte de expertos, las mejoras de las tareas y las conclusiones del trabajo.

En el capítulo 1, se realiza una revisión de las investigaciones sobre la noción de límite, tales como, estudios históricos epistemológicos, obstáculos epistemólogicos y cognitivos, propuestas didácticas, habilidades y conocimientos que se le exigen a los docentes en Chile en cuanto a esta noción, etc.

En el capítulo 2, se estudian las nociones teóricas y metodológicas que utilizamos a lo largo de nuestro estudio, el primero es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción matemáticos, en adelante, EOS (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). El segundo es la concepción del Diseño de Tareas propuesto por Watson et al (2013) así como también los Criterios de Diseños de Tareas desarrolladas por Pochulu, Font y Rodriguez (2013). Una vez estudiadas dichas nociones, describimos la metodología de investigación del trabajo así como también el planteamiento del problema de investigación el cual está constituido por preguntas y objetivos de investigación.

En el capítulo 3, se realiza un estudio histórico-epistemológico sobre la noción de límite de una función en una variable, este análisis nos permite identificar las problemáticas más relevantes que ayudaron a construir el surgimiento y la evolución de la noción a través del tiempo. Además, ayudaron a establecer las configuraciones epistémicas de cada significado parcial de la noción de límite.

En el capítulo 4, se propone el diseño de las tareas basadas en las configuraciones epistémicas de cada significado parcial de la noción de límite de una función en una variable. Las tareas relevan la riqueza de los procesos del objeto matemático, se expone las posibles respuestas de los estudiantes y se establece las configuraciones epistémicas que éstas evocan.

En el capítulo 5, se realiza un análisis de la implementación de las Tareas a un grupo de 11 profesores en formación, dicho análisis se sustenta en las Configuraciones Epistémicas pretendedidas y con las Configuraciones Cognitivas desarrolladas por los estudiantes, así como también en el estudio de cada uno de los ámbitos de la Idoneidad Didáctica.

En el capítulo 6, se desarrolla un análisis de las observaciones brindadas por cuatro expertos, las cuales se detallan y se discuten para la mejora de las Tareas.

En el capítulo 7, se describe las mejoras de las Tareas y la incorporación de las observaciones dadas por los expertos y por el análisis de la implementación didáctica. Adicionalmente, se exponen recomendaciones para su implementación.

Finalmente, en el capítulo 8, se establecen las conclusiones del estudio, sus aspectos limitantes y las proyecciones del trabajo.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

1.1. Introducción

La creación del cálculo infinitesimal ha sido una de las invenciones más trascendentales en la historia, pues gracias a éste se pudieron resolver una gran cantidad de problemas asociados a la mecánica, economía, biología, geometría, etc. Siendo éste el único medio para resolver dichos problemas por más de dos siglos. Por tal razón, el estudio del cálculo infinitesimal es fundamental y trascendental para la formación de ingenieros, biólogos, físicos, químicos, economistas, arquitectos, profesores de matemática, etc. (Bobadilla y Labarca, 2010).
La base del cálculo infinitesimal comienza con la noción de límite, pues este concepto fundamental es el soporte para el estudio de los conceptos de continuidad, derivada, integral y series (Elia et al, 2009; Parameswaran, 2006). Debido a esto, es que en los últimos años se han realizado múltiples investigaciones relacionadas al estudio del concepto de límite. La mayoría de los trabajos realizados sobre esta noción radican principalmente en la dificultad asociada a los procesos de enseñanza-aprendizaje, la segunda hace referencia a las propuestas didácticas diseñadas para evocar en los estudiantes un aprendizaje significativo de la noción, la tercera trata de estudios históricos epistemólogicos sobre la noción, la cuarta versa sobre las exigencias que establece el Ministerio de Educación chileno para formación de docentes en cuanto a esta noción. Por tanto, la presentación de este capítulo está organizada bajo estos cuatros ámbitos presentes en diversos estudios que se encuentran en la literatura.

1.2. La complejidad del objeto límite en procesos de enseñanza-aprendizaje

Una de las principales dificultades en torno a la noción de límite radica principalmente en la complejidad propia del concepto, por ejemplo, Artigue (1995) señala que la noción de límite posee *obstáculos epistemológicos* debido a su génesis y evolución histórica. Entenderemos por *obstáculos epistemológicos*[1] a las limitaciones o impedimentos propios del concepto que afectan la capacidad de los estudiantes para construir un nuevo conocimiento referente a esta noción. Por ejemplo, Sierspinka(1985) señala que los obstáculos epistemológicos son los conflictos y problemas que presentan la comunidad matemática en períodos determinados y que éstos se replican en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los estudiantes. Además enfatiza que estos conflictos o limitaciones son necesarios para el desarrollo y compresión del concepto y que los estudios históricos tienen que ser llevados a cabo en forma paralela con estudios experimentales, tal como afirma Sierspinka(1985):

> Por un lado, es de esperar que el conocimiento de las condiciones históricas en las que un obstáculo haya sido reconocido y luego cruzado nos ayude a comprender las fuentes y la naturaleza de un obstáculo similar descubierto en los alumnos; por otro lado, es posible que el descubrimiento y análisis de los obstáculos o dificultades encontradas en el estudiante de hoy arroje algo de luz sobre los puntos de vista adoptados por los matemáticos del pasado. (p.8-9, traducción libre)

A continuación, describiremos investigaciones referente a los obstáculos epistemológicos de la noción de límite.

Obstáculos Epistemológicos

Los obstáculos epistemológicos de la noción de límite han sido estudiados por diversos autores tales como Cornu (1991), Sierpinska (1985) y Artigue (1995). En este apartado describiremos brevemente los hallazgos principales de cada una de estas investigaciones.

El primero que describiremos será el trabajo de Cornu (1991), quien realiza un estudio histórico-epistemológico de la noción de límite, esta investigación le permitió agrupar y establecer cuatro grandes obstáculos epistemológicos que dificultan el aprendizaje de la noción.

[1] Para mayor información sobre el concepto de obstáculo epistemológico ver Brousseau (1983) o Sierpinska(1988)

El primero de ellos lo denomina "El error de vincular la geometría con los números" (p. 159), este obstáculo apunta al estudio que realizaban los griegos aproximadamente entre los años 400 y 250 A. C., cuyo objetivo era resolver problemas geométricos, tales como: determinar el área de un círculo o demostrar que la razón de las áreas entre dos círculos es igual a la razón entre el cuadrado de sus radios respectivos. Para resolver este tipo de problemas se utilizó el método de agotamiento (o exhaución) el cual consistía en utilizar figuras geométricas y demostrar por medio del argumento del absurdo las propiedades o la solución de los problemas propuestos. El concepto de límite que los griegos aplicaban estaba relacionado con magnitudes geométricas no con números. Cornu (1991) señala que la nula vinculación entre la noción de límite y los números generan un obstáculo epistemológico:

> El método de agotamiento es, en esencia, un método geométrico que permite la prueba de resultados sin tener que lidiar con el problema del infinito. Se aplica a magnitudes geométricas, no a números. Cada caso se trata de forma individual utilizando un argumento específico adaptado al contexto geométrico. No hay transferencia de figuras geométricas a una interpretación puramente numérica, por lo que el concepto unificador del límite de números está ausente. La interpretación geométrica, y su éxito en la resolución de problemas pertinentes, se considera que causa un obstáculo que impide el paso a la noción de un límite numérico. (p. 159-160, traducción libre)

El segundo obstáculo epistemológico establecido por Cornu (1991) lo denominó "La noción de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño" (p. 160, traducción libre), este obstáculo apunta a que muchos matemáticos consideraron que un número puede ser tan pequeño como se quiera, pero que éste no podía ser cero, tal como postulaba D'Alembert, en contraste, con otros matemáticos como Cauchy, Newton, Euler que afirmaban que las cantidades muy pequeñas podían ser cero. Esta discusión y ambigüedades que se tuvo en los desarrollos del Cálculo, también se presentan en los estudiantes cuando estudian la noción de límite, tal como señala Cornu (1991):

> "La idea de un *estado intermedio* entre lo que es nada y lo que no, se encuentra con frecuencia en estudiantes. A menudo ven el símbolo ε como un número que no es cero, pero es más pequeño que cualquier número real positivo. De la misma manera, los individuos pueden creer que $0,999\ldots$ es el último número antes de 1, pero no es igual a uno." (p. 161, traducción libre).

El tercer obstáculo epistemológico es denominado "El aspecto metafísico de la noción de límite" (p.161) el cual hace referencia a la noción de infinititud de los números reales, el cual provocó varios problemas filosóficos y metafísicos a los matemáticos que deseaban formalizar con herramientas algebraicas y aritméticas dicha noción. Tal como afirma Cornu (1991):

> La noción de límite es difícil de introducir en las matemáticas porque parece tener más que ver con la metafísica o la filosofía. Los matemáticos son a menudo reticentes al hablar de tales conceptos, desde el tiempo de los griegos hasta D'Alembert, que escribió *Uno puede prescindir fácilmente del resto de toda esta metafísica del infinito en el cálculo diferencial.* Lagrange expresó un horror similar a los aspectos metafísicos. Aunque en su carrera inicial creía que podía hacer un uso riguroso de los infinitesimales, más tarde consideró que los infinitesimales de Leibniz no tienen una base metafísica satisfactoria y refundó los fundamentos del cálculo utilizando series infinitas en términos puramente algebraicos. (p. 161, traducción libre)

La complejidad de comprender y entender la noción de infinitesimal y de la cardinalidad infinita de los números reales, es un obstáculo epistemológico que se presenta en los estudiantes cuando inician sus estudios del cálculo. Tal como asevera Cornu (1991)“Este obstáculo hace que la comprensión del concepto límite sea extremadamente difícil, particularmente porque un límite no se puede calcular directamente usando métodos familiares de álgebra y aritmética”(p.161).

El cuarto y último obstáculo epistemológico se refiere a la confusión en los estudiantes con respecto a *si se alcanza o no el límite*. Cornu (1991) señala que esta confusión también proviene de la historia y génesis del Cálculo, pues matemáticos como D'Alembert enfatizaban que el límite no se podía alcanzar, a diferencia de Cauchy que establecía que el límite si se podía alcanzar, por tal razón Cornu (1991) denomina este obstáculo epistemológico como *Is the limit attained or not?*

Cornu (1991) destaca que considerar estos obstáculos epistemológicos permiten mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje, ya que estos permiten al docente mejorar su práctica pedagógica contribuyendo a que los estudiantes puedan superarlos y estudiarlos como partes fundamentales de la noción de límite.

Por otra parte, Artigue (1995) coincide con algunos obstáculos epistemológicos mencionado por Cornu (1991), por ejemplo, afirma que los estudiantes comciben el límite como una barrera inalcanzable o como el último término de un proceso, los cuales tienen una concepción de que este proceso de convergencia es estrictamente monótono. Además, los estudiantes creen que el procedimiento subyacente al cálculo de límites es un proceso algebraico similar a lo estudiado en otros ámbitos, sin embargo, se debe considerar que este proceso algebraico es distinto debido a que se está trabajando en el conjunto de lo números reales. Tal como afirma la autora:

> Cuando se trata el proceso del límite como un proceso algebraico "finito", el principio de "continuidad" (llamado así por Leibniz) consiste en transferir al límite las propiedades comunes de los elementos del proceso, y de forma más global, en no estar pendiente de aquello que diferencia esta operación particular de las operaciones algebraicas comunes. (Artigue, 1995, p.112)

Por otra parte, Artigue (1995) destaca que otra de las dificultades de la noción apunta a la confusión entre el cuadro numérico y el cuadro geométrico, pues los estudiantes no identifican los objetos que están involucrados en el proceso de límite y cuál es la topología que está relacionada a dicho proceso. Tal como lo describe la autora:

> Las concepciones muy dependientes de una geometría de la forma no obligan a identificar con claridad sobre cuales objetos con exactitud se lleva a cabo el proceso del límite y la topología subyacente. Esto causa dificultades en la percepción del juego sutil entre el cuadro numérico y el cuadro geométrico que subyace al proceso del límite, e introduce o refuerza convicciones erróneas como la creencia en que, si geométricamente un objeto tiende hacia otro, todas las magnitudes que les están asociadas tendrán por límite valores correspondientes a las magnitudes del objeto límite. (p.112-113)

Además, Artigue (1995) enfatiza que existen otras dificultades con respecto a la noción de límite, una de ellas es el doble status operacional y estructural de límite, que consiste "en la dificultad de separarse de una visión del límite en simples términos de proceso para disociar con claridad el objeto límite del proceso que ha permitido construirlo, para dotarlo de una identidad propia" (p. 113). Para clarificar la dificultad anterior, la autora expone un error común en los estudiantes universitarios cuando se les pide comparar los números $0,99999\ldots$ y el 1, muchos de ellos exponen que son dos números distintos, ya que la expresión $0,99999\ldots$ evoca en el estudiante un proceso dinámico que nunca se detiene y que difícilmente puede representar el número 1.

Por último, Artigue (1995) destaca que la noción formal de límite ocasiona problemas en el estudiante, debido a que éste considera dos procesos diferentes, uno sobre la variable y otro sobre las imágenes de la función. La autora ejemplifica la dificultad anterior de la siguiente forma:

> La imbricación necesaria se opera más en un sentido que no es para nada natural: para expresar que el límite de la función f es 1 cuando x tiende al infinito, por ejemplo, no se escribe que, para un x muy grande, se acerca a 1. Por el contrario, se establece una vecindad de 1 y se trata de garantizar que, si x es lo suficientemente grande, estará en esta vecindad. Y esta imbricación, poco natural, induce a que en todas las definiciones estándar haya una alternancia de cuantificadores que, de antemano se sabe, va a ser mal manejada en este nivel de enseñanza. (p. 114)

Otra investigación interesante de destacar es la realizada por Sierspinska (1985), ella realiza un estudio de caso en una muestra de cuatro estudiantes, el cual es dividido en dos grupos, la primera parte de su experimento consiste en que el investigador le entrega a un grupo (llamado grupo emisor) una noción de tangente como el límite de una recta secante, el grupo de estudiantes debe transmitir la información al otro grupo (grupo receptor) sin utilizar dibujos, sólo por medio de la comunicación escrita y el uso de un dispositivo que posee material concreto (un trozo de madera, regla, chinches, etiquetas, etc.), tal como se muestra en las Figuras (1.1) y (1.2):

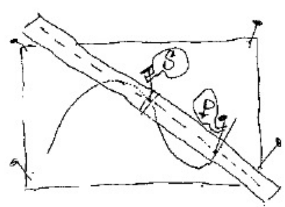


Figura 1.1: Dispositivo entregado a los estudiantes del grupo emisor (Sierspinka, 1985, p. 14)

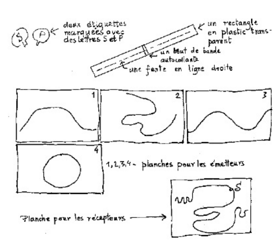


Figura 1.2: Dispositivo entregado a los estudiantes del grupo emisor (Sierspinka, 1985, p. 15)

En la segunda etapa, se pide a ambos equipos que resuelvan el mismo problema al mismo tiempo, cuando cada uno ha producido una solución que le parece satisfactoria, se realiza un intercambio de sus respuestas. Cada grupo analiza y discute la producción del otro equipo, luego los cuatro estudiantes se reúnen para una discusión general. Es importante destacar que el grupo de estudiantes se encontraban entre los alumnos “buenos en matemáticas” y que éstos no habían estudiado el concepto de límite en su clase.

Sierspinka (1985), a raíz del experimento realizado establece los siguientes obstáculos epistemológicos relacionados con la noción de límite:

- “Infiniti Horror”
- Obstáculos relacionados con la noción de función
- Obstáculos geométricos
- Obstáculos lógicos
- El obstáculo del símbolo

La lista planteada por la autora es representada en la tabla de obstáculos que aparece en la Figura (1.3), donde cada uno de éstos es relacionado con matemáticos basados en los registros históricos.

Infiniti Horror

El obstáculo del “Infiniti Horror” hace referencia al procedimiento del “paso al límite” que trata sobre el cálculo del límite por medio de aproximaciones, el cual se realiza por un número suficiente de casos y se obtiene una conclusión general llamada por la autora como una “inducción incompleta”, por ejemplo, se estudia un número finito de términos de una sucesión y se considera a aquellos que constituyen aproximaciones y no considera el resto de los términos para obtener el límite. Además, este obstáculo incluye los obstáculos del tipo algebraico que hacen referencia a transferir los métodos del álgebra para manipular cantidades finitas a magnitudes infinitas, y transferir propiedades de los términos de una sucesión convergente a su límite. Adicionalmente, en este tipo de obstáculo considera el “paso al límite” como un movimiento dinámico, por ejemplo, cuando se utilizan las siguientes expresiones: “uno se acerca indefinadamente a ...” o “uno se acerca más y más...”, en contraste con la noción de límite formal que está propuesto de forma “estática”. La autora recalca que en la formalidad del cálculo de un límite se requiere estudiar y considerar todos los términos

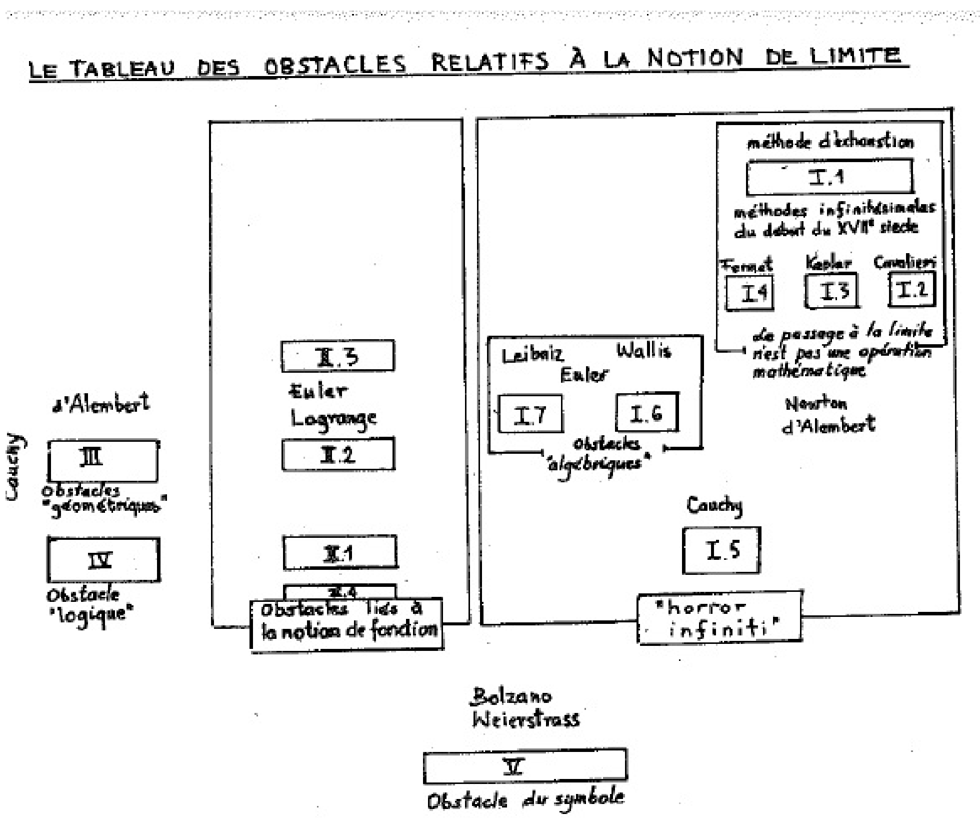


Figura 1.3: Lista de Obstáculos Epistemológicos de la Noción de límite (Sierspinka, 1985, p. 38)

una sucesión, es decir, estudiar un conjunto infinito. Referente a este obstáculo la autora recalca los siguientes aspectos históricos:

> En la historia de la noción de limitar los obstáculos de este grupo, éste se mantuvo firme hasta mediados del siglo XIX: desde el método del agotamiento hasta Cauchy. El horror del infinito entre los antiguos griegos se expresó incluso en la palabra elegida para designar al infinito, “apeiron”, que tenía un significado peyorativo: el caos era apeiron, una línea quebrada era “simiron”, un pañuelo arrugado era “simio”, Aristóteles en su “Física” dijo que “... ser infinito es una privación; no es una perfección, sino una ausencia de límite...”(Rucker, 1982, citado por Sierspinka, 1985, p. 40, traducción libre).

Sierspinka (1985), recalca que la noción de Weierstrass estaba libre de expresiones que apelaban a las intuiciones geométricas y la “petitio principio” (este principio se refiere en la definición del límite de una sucesión como un número real y la definición de número real como el límite de una sucesión de números racionales). En el año 1876 se formalizó la construcción de los números reales, gracias a la obra de Méray, Cantor, Dedekind y en particular a Weierstrass con su definición de límite, el cual ayudó a corregir el error lógico de Cauchy y a resolver el problema de la existencia del límite de una sucesión convergente admitiendo la sucesión misma como el número o el límite.

Obstáculos relacionados con la noción de función

Con respecto a los obstáculos relacionados con la noción de función, Sierspinka (1985) menciona que la noción de límite de Cauchy y D'Alembert carece de presición y rigurosidad, y que la definición de función contribuyó a la noción de límite de Weierstrass: " La aparición del concepto general de función fue un momento decisivo que, en el siglo XIX, permitió establecer una formulación clara del concepto de un límite libre de intuiciones geométricas y físicas" (p. 48) . En este sentido Sierspinka (1985) explica que la noción de D'Alembert es imprecisa, porque hay expresiones indefinidas como *acercándose*, *diferencia entre las magnitudes*, *no asignable*, en este sentido Sierspinka señala que la noción D'Alembert se puede ejemplificar como "el círculo es el límite de los polígonos inscritos o circunscritos y uno no necesita reducir las cosas a circunferencias, es decir, a números."(p.49). Con respecto a la noción de Cauchy, Sierspinka (1985) explica que dicha noción evidencia una relación funcional, que aparece como una asignación a un valor numérico, pero la noción tiene ciertas carencias, tal como señala: "[...] pero estamos hablando de valores consecutivos. ¿Así que la definición sólo concierne a las sucesiones numéricas? Los cuantificadores son implícitos y siempre hay expresiones indefinidas, ¿Qué significa *acercarse indefinidamente*?" (p.49)

Otro aspecto de este obstáculo hace referencia al lado relacional de la función, el cual Sierspinka (1985) se refiere a la poca importancia que se da al conjunto dominio y codominio de una función y a la topología que se considera al estudio en las vecindades de un punto x_0 y a las vecindades del punto límite. Según la autora esta baja importancia se debe a que si la función está expresada de la forma $y = f(x)$, entonces el estudio se centra en esta expresión analítica dejando de lado el dominio, codominio y la topogología de los conjuntos donde se analiza el límite de una función, tal como lo afirma la autora:

> Pero si la función está dada por una fórmula del tipo $y = f(x)$, entonces la atención se centra en esta fórmula y los conjuntos de valores de x e y permanecen en la sombra. Esta es la razón por la cual el cálculo diferencial e integral de Euler y Lagrange, basado en las funciones dadas por una *expresión analítica simple*, sólo podría desarrollarse en un dominio muy limitado. (Sierspinka, 1985, p.50)

Por otra parte, la autora hace referencia al uso de funciones monótonas para el estudio de límites y también alude a la no distinción entre la noción de límite, supremo e ínfimo, el cual refiere al estudio de las sucesiones de manera distinta al estudio de una función real, pues los estudiantes confunden las imágenes de la sucesión con los subíndices que son los números naturales, tal como señala:

> La distinción entre la función y el conjunto de sus imágenes es indispensable, debe ser percibida por los estudiantes, aunque no necesariamente verbalizada o formulada conscientemente. Debe quedar claro que, por ejemplo, que la secuencia $1, 1, 1, 1, \ldots$ tiene un número infinito de términos y no un sólo término, y que no es un conjunto de los cuales 1 es el único elemento. En la literatura encontramos ejemplos de errores que pueden considerarse como síntomas de este obstáculo. (Sierspinka, 1985, p.51)

Para ejemplificar la situación anterior, la autora sugiere estudiar el comportamiento de la siguiente sucesión

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & si \quad 10 \text{ no divide a } n \\ 1 & si \quad 10 \text{ divide a } n \end{cases}$$

Claramente, la sucesión posee los siguientes términos

$$a_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, 1, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \ldots, \frac{1}{19}, 1, \frac{1}{21}, \ldots, \frac{1}{29}, 1, \ldots\},$$

a menudo los estudiantes piensan que el límite de la sucesión anterior es 1, cuando realmente el 1 es el supremo de la sucesión $\{a_n\}$. Otro ejemplo que señala la autora es el estudio de la sucesión $0.9, 0.99, 0.999, 0, 9999, \ldots,$, ella enfatiza que es común que algunos estudiantes afirmen que tiene dos límites, el 1 y el 0.

Obstáculos geométricos

Según la autora este obstáculo se manifiesta de dos maneras, el primero hace referencia sobre la idea geométrica de la diferencia entre un tamaño variable y uno constante (el límite), la acepción "diferencia" dependerá de la magnitud considerada en el conjunto, Sierspinka (1985) afirma que

> Diseñar el círculo como el límite de los polígonos inscritos o circunscritos sería uno de los síntomas de este obstáculo: cuanto mayor sea el número de lados, más se acercará la forma del polígono a la forma del círculo. Además, una idea de la tangente como límite secante variable, donde decimos que, en un momento determinado, la posición de la secante difiere tan poco como queremos de la posición de la tangente. Este es el concepto de diferencia con el que estamos tratando en el método de agotamiento. El término "diferencia" cambió de significado con el cambio de la magnitud en cuestión y esta puede ser una de las razones por las que fue tan difícil transformar este método en un teorema general. (p. 52)

Algunos ejemplos de los tipos de *diferencia* que la autora señala se refieren al tipo de topología que se considera en el espacio, por ejemplo, en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, es el valor absoluto de la diferencia aritmética: para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$, se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$, en el espacio de las funciones acotadas $\mathfrak{F} : X \to \mathbb{R}$ se considera la norma de la diferencia de las funciones: $||f_n - L|| = \sup_x |f_n(x) - L(x)| < \varepsilon$, en un espacio topológico Y, la diferencia está determinada según los conjuntos abiertos o vecindades dada por la topología, en este sentido, se tiene que para cada V_L (vecindad de L) se pide que $f(x) \in V_L$.

La segunda manera hace referencia a que la idea de límite está estrechamente relacionada con los puntos de acumulación de un conjunto (la autora le denomina operación topológica de cerradura), en una intuición geométrica se podría decir que esta noción se asemeja a la *cota* de un conjunto, en este sentido, la autora lo explicita de la siguiente forma:

> Nosotros diríamos, por ejemplo, que para Arquímides, el volumen de un sólido es la cota de la suma de volúmenes de los discos que lo rellenan con una idea de volumen que no se reduce a la de un número. En el mismo contexto, cuando los matemáticos se limitaban a las funciones monótonas, el límite acota más bien el conjunto que no pertenece a su cerradura. Las fuentes de este segundo aspecto del obstáculo *geométrico* se encuentran en la carencia de un concepto bien formado del número real. Pero la noción del número real no se esclarece antes de haber comprendido bien la noción de límite (ya habíamos remarcado esto antes). No sabríamos decir si la noción de límite fue precisada en el siglo XIX gracias a la definición de número real o, al contrario, una definición precisa del número real fue posible porque habíamos comprendido la noción de límite y queríamos prolongar el conjunto de los números. (Sierspinka, 1985, p.52 y 53)

Obstáculos lógicos

Con respecto a los obstáculos lógicos, Sierspinka (1985) se refiere a la necesidad de considerar los cuantificadores para comprender a cabalidad la noción de límite, y que a menudo se define dicha noción por medio de un lenguaje natural e intuitivo que carece de formalidad y símbolos. Referente a este aspecto, la autora recalca:

> La falta de cuantificadores a menudo aparece aquí, donde, para definir la noción de límite, usamos un lenguaje natural y no simbólico. Sin embargo, Cauchy no marcó claramente la dependencia entre la vecindad del punto en el que se calcula el límite y la vecindad del punto que es el límite. En el lenguaje natural no prestamos mucha atención al orden de las palabras ni a las diferencias sutiles que surgen (Sierspinka, 1985, p.53 y 54).

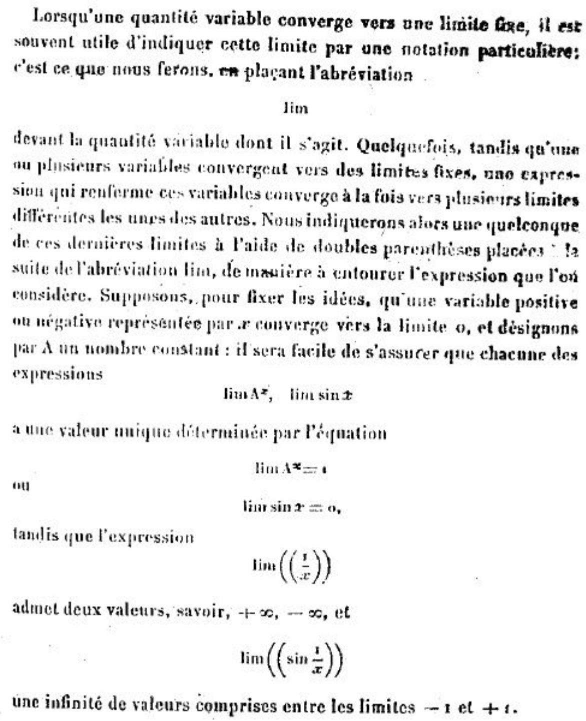
Por otra parte, la autora destaca la importancia del orden de los cuantificadores en la definición de límite, el cual está relacionado con el estudio de límite por medio de la gráfica de la función, sabemos que la función va desde el eje x al eje y, el estudio del límite obliga al estudiante a observar el gráfico en un sentido inverso para poder determinar el límite de un punto de una función, tal como señala Sierspinka (1985): "Esta necesidad de *mirar el eje x en el eje y* es una dificultad que está en la fuente de este obstáculo"(p.54).

Obstáculo del símbolo

Este obstáculo radica en el uso de la notación de límite "lím," el cual denota la tendencia y límite de funciones expresadas en forma analítica, pero que según Sierspinka (1985) se introdujo formalmente por Cauchy. Este símbolo ayudó a desarrollar operaciones algebraicas para el cálculo de límites, pero puede llevar a una pérdida del significado, lo que puede confundir a los estudiantes. Tal como lo señala la autora:

> La historia del desarrollo del cálculo diferencial e integral está marcada por una tendencia a encontrar un algoritmo universal que *resolvería ecuaciones infinitas como lo hace el álgebra con respecto a las ecuaciones finitas*. Newton creía que había encontrado este algoritmo, su concepto de función estaba restringido a aquellos que pueden desarrollarse en serie. Además, fue el argumento con el que justificó el uso del término *análisis*, un término que Viète usó antes para designar lo que ahora se llama *álgebra*. Cauchy siguió esta tendencia y, por lo tanto, la operación límite se simbolizó de una manera que subraya las similitudes con el álgebra, oculta las diferencias y puede llevar a una pérdida de significado. (Sierspinka, 1985, p.56)

Según la autora, Cauchy introduce la notación de límite en su libro “Curso de Análisis” como aparece en la Figura (1.4):



Lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe, il est souvent utile d'indiquer cette limite par une notation particulière; c'est ce que nous ferons, en plaçant l'abréviation

$$\lim$$

devant la quantité variable dont il s'agit. Quelquefois, tandis qu'une ou plusieurs variables convergent vers des limites fixes, une expression qui renferme ces variables converge à la fois vers plusieurs limites différentes les unes des autres. Nous indiquerons alors une quelconque de ces dernières limites à l'aide de doubles parenthèses placées à la suite de l'abréviation lim, de manière à entourer l'expression que l'on considère. Supposons, pour fixer les idées, qu'une variable positive ou négative représentée par x converge vers la limite o, et désignons par A un nombre constant : il sera facile de s'assurer que chacune des expressions

$$\lim A^x, \quad \lim \sin x$$

a une valeur unique déterminée par l'équation

$$\lim A^x = 1$$

ou

$$\lim \sin x = 0,$$

tandis que l'expression

$$\lim\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

admet deux valeurs, savoir, $+\infty$, $-\infty$, et

$$\lim\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right)$$

une infinité de valeurs comprises entre les limites -1 et $+1$.

Figura 1.4: Course d'Analyse de A. Cauchy (Sierspinka, 1985, p. 56)

1.3. Errores en los procesos cognitivos relacionados a la noción límite

Uno de los procesos cognitivos que impiden que el estudiante pueda desarrollar un aprendizaje de la noción de límite, es la concepción de infinito. Con respecto a este aspecto los límites de sucesiones juegan un papel trascendental, pues son conceptos cruciales que permiten entender, por ejemplo, el estudio del concepto de integral de Riemann (Barahmand, 2017). Existen diversas investigaciones que evidencian los problemas que poseen los estudiantes con la noción de límite de sucesiones, por ejemplo, Mamona-Downs (2001) evidenció que uno de los problemas con los límites de sucesiones es que los estudiantes poseen argumentos intuitivos para el concepto de infinito. Otro problema identificado por Dubinsky et al. (2005) es “ el concepto de límite de sucesiones crea un conflicto entre la imagen mental de las secuencias en movimiento de los estudiantes y su experiencia previa con la definición de límites de funciones en la vecindad de un punto" (p. 572, citado por Barahmand, (2017), traducción libre).

Barahmand (2017) evidenció que en un grupo de 78 estudiantes, el $92,3\,\%$ piensa que $0,9999\ldots < 1$, debido a que generalizan las propiedades que se tienen en un *estado finito* a un *estado infinito*, tal como se expresa a continuación:

$$\begin{aligned} 0,9 &< 1 \\ 0,99 &< 1 \\ 0,999 &< 1 \\ \Rightarrow 0,\bar{9} &< 1 \end{aligned}$$

Barahmand (2017) señala que los posibles errores de este razonamiento se deben a las experiencias previas de los estudiantes durante la enseñanza escolar, puesto que: "esta secuencia obliga a los estudiantes a usar su experiencia previa y usar intuitivamente los mismos métodos para la comparación de estados infinitos como lo usan para la comparación de los finitos" (p. 582, traducción libre)

Otro de los errores que evidenció Barahmand (2017) es que la mayoría de los estudiantes que respondieron el cuestionario, consideraron el *infinito* como un número, ya que los alumnos pensaron que encontrar un punto entre el 1 y el *infinito* es igual a encontrar un punto entre 1 y n. La posible causa de este error se debe a que observaron la división en n partes iguales del intervalo $[1, a]$, donde a es un número real mayor que 1, de la siguiente forma:

$$1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, a^{\frac{3}{n}}, \ldots, a^{\frac{n-3}{n}}, a^{\frac{n-2}{n}}, a^{\frac{n-1}{n}}, a^{\frac{n}{n}}.$$

Luego, afirmaron que si n tiende a infinito se tiene:

$$a^{\frac{1}{n}} \to 1, a^{\frac{2}{n}} \to 1, a^{\frac{3}{n}} \to 1, \ldots, a^{\frac{n-3}{n}} \to a, a^{\frac{n-2}{n}} \to a, a^{\frac{n-1}{n}} \to a, a^{\frac{n}{n}} \to a.$$

El error del estudiante está en intuir que

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{n-3}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{n-2}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{n-1}{n}} = a,$$

pues aplica operaciones algebraicas en las potencias de a y después calcula su límite.

Barahmand (2017) señala dos aspectos importantes sobre los estados finitos e infinitos: “No podemos generalizar las leyes para casos finitos a casos infinitos; y no hay límite o un salto entre los estados finitos e infinitos.” (p. 584, traducción libre)

1.4. Estrategias de enseñanza relacionados a la noción de límite

Existen diversas investigaciones que exponen propuestas didácticas para la enseñanza de la noción de límite, uno de ellas es el trabajo realizado por Blásquez y Ortega (2006), quienes establecen la necesidad de utilizar distintos registros (algebraico, numérico, gráfico, verbal) para propiciar un aprendizaje significativo del concepto, el cual está basado principalmente en la teoría de representaciones semióticas de Duval (1995) y proponen una nueva definición de límite que considera sus orígenes y evolución epistemológica. Las definiciones de límite secuencial y funcional que proponen Blásquez y Ortega (2006) son (respectivamente):“L es el límite de una sucesión si para cualquier aproximación K de L, $K \cdot L$, existe un término de la sucesión tal que todos los que siguen están más próximos a L que a K.” (p.195) y “ El límite de la función f en $x = a$ es L si para cualquier aproximación K de L, $K \cdot L$, existe una aproximación H de a, $H \cdot a$, tal que las imágenes de todos los puntos que están más cerca de a que H están más próximas a L que a K” (p.195).

Cabe mencionar, que la propuesta didáctica basada en estas nociones sugeridas por los autores se basa en los significados parciales de límite propuestos por Cauchy y Heine. Los autores hicieron un estudio cualitativo que compara la noción propuesta con la noción de Weierstrass, concluyeron que la noción propuesta es menos conflictiva para los estudiantes, debido a que los alumnos presentan problemas con la interpretación del simbolismo algebraico vinculado al valor absoluto y la representación geométrica de las desigualdades lo que contribuye a la confusión de los roles de δ y ε de la noción de Weierstrass.

Por otra parte, Caglayan, G. (2015) realiza un estudio cualitativo a ocho estudiantes, a cada uno de éstos se les aplicaron tareas con el uso del software GeoGebra, cada una de las actividades tenían por objetivo: resolver los problemas de forma algebraica y por medio del uso de GeoGebra, además, debían indicar el procedimiento y explicar los argumentos que utilizaron para resolver la tarea usando GeoGebra. Se entrevista a cada estudiante y se estudian las grabaciones, esto permitió que Caglayan (2015) concluyera en su investigación tres aspectos importantes: '*sequence of constituents in a visual proof*','*Covariational approach in the study of limits*','*Experiential versus reflective thinking*'.

Caglayan (2015) señala que la '*sequence of constituents in a visual proof*'refiere a la importancia de la sucesión de componentes que ayudan a realizar una demostración visual de las proposiciones asociados a los límites de funciones y al formalismo $\varepsilon - \delta$, dentro de estos componentes destaca los gestos de las manos y dedos que utilizaron los estudiantes para expresar sus argumentos, así como también el uso del cursor del mouse.

Con respecto, a '*Covariational approach in the study of limits*', Caglayan (2015) señala que la covariación hace referencia la variación de la variable x y su efecto en la variable y, mediante el uso del software los estudiantes pudieron usar herramientas como rectas paralelas y verticales al eje x y al eje y (mapeo de intervalos), para determinar los valores de δ y establecer algunas aseveraciones con respecto a los valores de x, que cumplen con $|x - x_0| < \delta$ y con la distancia entre el límite de la función y ε, es decir, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Esta evidencia le permitió a Caglayan (2015) afirmar que: "el razonamiento covariacional junto con las estructuras de mapeos de intervalos son claves constituyentes en la demostración visual y el sentido de los teoremas de límites utilizando el formalismo épsilon-delta"(p. 820, traducción libre).

Por otra parte, Caglayan (2015) explica que la '*Experiential versus reflective thinking*'hace referencia a que el software puede tener ciertas limitaciones y que éste puede reforzar el pensamiento empírico de manera erronéa, por ejemplo, el autor evidenció en su investigación que al proponer a los estudiantes el análisis del $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, todos los alumnos evidenciaron la discontinuidad en $x = 1$, a través de diversos medios; sin embargo, el software dio la impresión de que la función podría evaluarse en $x = 1$. Esta situación hizo que un alumno dudara de la discontinuidad de la función en $x = 1$.

Finalmente, Caglayan (2015) concluye que el uso del software puede evocar en los estudiantes un razonamiento intuitivo que les permita establecer demostraciones visuales, si bien estas pruebas no son consideradas demostraciones formales, éstas pueden ayudar a una mejor comprensión de los teoremas relacionados con la noción de límite.

Otra propuesta didáctica interesante es la de Robinet (1983) en el que, después de estudiar la génesis histórica del concepto y el tratamiento de la noción en los textos franceses, propone una serie de tareas didácticas basada en un estudio gráfico de funciones elementales, que son familiares a los alumnos, por ejemplo, la parábola y hipérbola (entre otras) para ir desarrollando de manera progresiva el concepto establecido por Weierstrass.

Por otra parte, Fernandez (2000) realiza una propuesta didáctica utilizando un software matemático para favorecer la visualización de la representación gráfica y numérica de límite, esta propuesta también está basada en la acepción de límite de Weierstrass.

Otra propuesta didáctica interesante es la de Blásquez y Ortega (2000), en ésta proponen tareas a alumnos de segundo año de bachillerato, dichas tareas son progresivas y comienzan con el estudio de sucesiones, tendencias de sucesiones, representaciones gráficas de funciones fundamentales, concepto de tendencia infinita, asíntotas para finalmente introducir la noción de límite funcional (el significado según Weierstrass) a partir de dos situaciones problemáticas que justifican la necesidad de la noción.

Otro diseño interesante, es de Soler de Dios (2014) quien realiza una propuesta utilizando fractales, los estudiantes estudian la noción de límite por medio de la representación geométrica y propicia el aprendizaje de esta noción de forma intuitiva a través de procedimientos geométricos. Cabe destacar, que la propuesta está basada en la noción de límite de Eudoxio y de Arquímedes.

En resumen, las propuestas didácticas que existen actualmente en la literatura se basan principalmente en el significado parcial de límite de Arquímedes, Eudoxo y Weierstrass. Cabe destacar, que la mayoría de las propuestas didácticas dan relevancia a las diferentes representaciones que posee la noción, es decir, la representación verbal, geométrica, numérica, gráfica y algebraica.

1.5. Estudios históricos epistemológicos de la noción de límite

Existen varios estudios históricos epistemológicos de la noción de límite, uno de ellos es el realizado por Valdivé y Garbin (2008), quienes destacan la importancia de la noción de infinitesimal en el concepto de límite, por tal razón realizan un estudio histórico-epistemológico sobre dicha noción. En la indagación las autoras establecen siete períodos, en cada uno de éstos, identifican características esenciales y establecen siete esquemas conceptuales epistemológicos de la noción de infinitesimal. Dichos esquemas están basados en el modelo teórico Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) (Tall, 2005; Dreyfus, 1991), los períodos que las autoras identificaron son:

i. **Grecia Antigua**
En este período las autoras establecen que la noción de infinitesimal estudiada por los griegos, era una concepción asociada a la razón de áreas de figuras geométricas. La finalidad de calcular estas razones era con el objetivo de aproximar áreas de figuras curvilíneas tales como círculo, áreas encerradas por arcos parábolicos, lúnulas, entre otras.

ii. **Edad Medieval (529-1436)**
En este período identifican la noción de infinisitesimal con el significado de indivisibles, los indivisibles se entiende como figuras geométricas muy pequeñas tales como segmentos verticales, rectángulos, triángulos, etc. Se utilizan los indivisibles para sumar las áreas para aproximar el área o volumen de un cierto objeto geométrico, el cual puede ser un círculo, una esfera, un trapezoide, etc.

iii. **Siglos XVI e inicios del XVII**
Las autoras señalan que en este período la noción de infinitesimal se asocia como una diferencia. La diferencia se interpreta como cantidades numéricas positivas menores que 1 que permiten comparar imágenes de funciones como $f(x + E)$ y $f(x)$, también se interpreta como la diferencia geométrica entre el triángulo rectángulo y el triángulo curvo. Los matemáticos de este período establecen que dichas diferencias son imperceptibles y casi iguales.

iv. **Mitad del XVII**
En este período, el matemático Wallis se basa en la idea de los indivisibles de Cavalieri y a cada indivisible le asocia un valor numérico, con este método logra determinar el área de un paralelogramo, los valores numéricos asignados a cada indivisible tiene una diferencia aritmética constante, por tal razón, la noción de infinitesimal se relaciona como una razón aritmética.

v. **Segunda mitad del siglo XVII hasta inicios del XVIII**

Las autoras recalcan que en este período la noción de infinitesimal está asociado al incremento, éste se entiende como un momento (según Newton), como un diferencial (según Leibniz) o como diferencias (según L'Hôpital), todas estas nociones tienen en común que el infinitesimal se entiende como un incremento muy pequeño de las variables asociadas a las gráficas de las funciones.

vi. **El siglo XVIII e inicios del XIX**

Las autoras señalan que en este período se usa la noción de límite de forma algebraica, y es en esta etapa que comienza a tener predomio el álgebra en el cálculo. La noción de infinitesimal se entiende como una expresión simbólica algebraica. Por ejemplo, D'Alambert establece el símbolo $\frac{dy}{dx}$ como una razón, pero no como una razón de diferenciales o fluxiones.

vii. **Finales del Siglo XIX**

Finalmente, las autoras resaltan que este período se establece la noción de función lo que conlleva a relacionar la noción de infinitesimal con la función, pues el infinitesimal es concebido como una cantidad variable α donde $f(x+\alpha) - f(x)$ es una cantidad infinitamente pequeña (según Cauchy) o como un valor numérico, donde $0 < |f(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$ (según Weierstrass).

Por otra parte, Medrano y Pino-Fan(2016) destacan que la noción de límite ha tenido durante la historia siete acepciones o estadios de comprensión (llamado así por los autores), dichos estadios son:

Estadio 1: La noción de aproximación desarrollada por Eudoxo y Arquímedes

Esta acepción hace referencia a la noción de límite desarrollada por los griegos cuyo objetivo principal era aproximar áreas y perímetros de figuras geométricas. Por ejemplo, calcular el área del círculo por medio de la inscripción y circunscripción de polígonos regulares cuyas áreas se aproximan al área del círculo tanto superior como inferiormente.

Estadio 2: La concepción de los indivisibles.

Este estadio hace referencia a la concepción de los indivisibles propuesto por Cavalieri, el cual postula que el volumen de un cuerpo geométrico puede ser aproximado por la suma de las áreas de las secciones transversales (indivibles), éstas se obtienen al interceptar planos con el cuerpo geométrico, de tal manera que los planos deben ser paralelos a la base del cuerpo geométrico. Las secciones transversales obtenidas no tienen “anchura” ni “espesor” por tal razón se le conoce como el método de los indivisibles.

Estadio 3: La noción intuitiva de límite en los desarrollos de Newton

Newton desarrolla la teoría de las *fluentes* y *fluxiones*, que está basada en la idea intuitiva del movimiento continuo, define el concepto de fluente como la cantidad que varía respecto al tiempo, es decir, una magnitud variable como la longitud, temperatura, velocidad, etc. Además, define el concepto de fluxión como la velocidad de cambio de una fluente con respecto al tiempo (lo que actualmente corresponde a la noción de derivada de una función distancia con respecto al tiempo t (fluente)).

Estadio 4: La idea de los infinitesimales en los desarrollos de Leibniz

Leibniz desarrolló un estudio de la noción de límite de forma geométrica, en el sentido que concibió la idea que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando las diferencias se hacen infinitamente pequeñas. De ahí, nace el concepto de “infinitesimo” o “infinitesimal” que refiere a cantidades tan pequeñas como se quiera.

Estadio 5: Las concepciones preformales de Límite

Este estadio se basa principalmente en las propuestas de D'Alambert y de Cauchy. El primero define el límite de un forma más numérica, pues señala:

> Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que una magnitud dada, tan pequeña como uno pueda suponer, sin embargo la magnitud que se aproxima no puede sobrepasar la magnitud a la cual ella se aproxima; si bien que la diferencia entre dicha cantidad y su límite es totalmente indeterminable. (D'Alambert,1766, p.542)

Pero Cauchy, establece una noción de límite relacionada con noción de función y sus cantidades, éste estipula que el límite es un valor fijo al cual se aproxima infinitamente a valores numéricos de una variable tanto como se desee. Este nuevo significado incorpora el trascendental concepto de función y la noción de variable independiente y dependiente.

Estadio 6: La concepción formal de la noción de límite

Gracias a la concepción de límite de Cauchy, el matemático Weierstrass formaliza la noción de límite funcional finito, que define como “L es el límite de una función $f(x)$ para $x = x_0$, si, dado arbitrariamente cualquier número pequeño ε puede ser encontrado un número δ tal que para todo valor de x difiriendo de x_0 por menos que δ, el valor de $f(x)$ diferirá de L por menos el valor de ε" (Weierstrass, citado por Boyer, 1959, p. 287).

Estadio 7: Generalizaciones de la noción de límite
La noción de límite se extiende a otro tipo de conjuntos, llamados espacios métricos y espacios topológicos. La noción de límite en los espacios métricos es una generalización de la concepción de límite en el conjunto de los números reales, dicha noción dependerá de la métrica que se esté utilizando en dicho conjunto y la noción de límite en espacios topológicos dependerá de la topología (noción de conjunto abierto) que se está considerando.

Los estudios históricos epistemológicos descritos anteriormente evidencian que la noción de límite no tuvo un desarrollo lineal, sino que a través del tiempo tuvo avances y retrocesos. Además, se observa que la formalización de la noción tuvo una fuerte dependencia con otras nociones fundamentales que también estaban en desarrollo, por ejemplo, la completitud, estructura algebraica y axiomas de orden de los números reales, así como también la noción de distancia o métrica en la recta real y el objeto función en una variable real. Esto ratifica que si la noción de límite tuvo complejidades en su desarrollo y evolución histórica, entonces es muy probable que algunas de esas dificultades también se presenten en los procesos de enseñanza-aprendizaje, tal como lo evidenció Cornu (1983) y Artigue (1995).

1.6. Prácticas docentes y exigencias a los profesores en formación sobre la noción de límite

Con respecto a las prácticas docentes, podemos evidenciar en diversas investigaciones que las tareas que utilizan los docentes para promover la enseñanza del concepto de límite, a menudo está desprovista de actividades significativas para los estudiantes, pues sus prácticas se centran en técnicas y procedimientos algebraicos (Heine, 1988; Artigue, 1995; Koirala, 1997), los cuales impiden desarrollar en los estudiantes una comprensión significativa de la noción, en este sentido, Koirala (1997) enfatiza que los docentes cuando imparten sus clases enseñan una serie de reglas y procedimientos, los estudiantes aplican dichas reglas sin entender los que están realizando: "... Si se les pregunta por qué lo hacen, las respuestas inmediatas serían *así es como nos enseñan* o así es *como se puede obtener la respuesta correcta*, con este método los estudiantes raramente se preguntan porque las reglas funcionan o de donde provienen"(p.2). Por otra parte, el Ministerio de Educación en Chile, ha establecido exigencias a los profesores en formación y en ejercicio en cuanto a los conocimientos y habilidades sobre esta noción. Por ejemplo, los nuevos Planes y Programas del Plan Diferenciado de Matemática (MINEDUC, 2021a) establecen que los profesores en ejercicio deben crear situaciones de enseñanza con el fin de generar un aprendizaje intuitivo de la noción para transitar a un aprendizaje más formal de ésta, 3l Objetivo de Aprendizaje asociado a esta unidad señala:

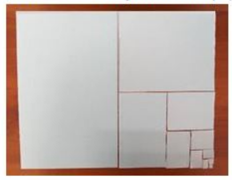
> **Objetivo de Aprendizaje N°2**
> Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.
> **Objetivos Transversales**
> OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.
> OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
> OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación. (MINEDUC, 2021a, p.69)

Para cumplir con dicho objetivo, el documento propone actividades como el estudio del comportamiento de sucesiones por medio de paradojas griegas, con problemas geométricos y con el estudio de sus gráficos, así como también el estudio del comportamiento gráfico de límite de funciones en una variable. Tal como se muestran en las Figuras (1.5); (1.6); (1.7); y (1.8).

Adicionalmente, durante el año 2021 se promulgaron los nuevos "Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media" (MINEDUC, 2021b), el cual establece los conocimientos y habilidades que los profesores en formación deben desarrollar para diseñar situaciones de aprendizaje en cuanto a la noción de límite. Dichos estándares están distribuidos en dos ámbitos: pedagógicos y disciplinarios. Dentro del ámbito disciplinario se encuentra el "Estándar D: Límites,Derivadas e Integrales" cuyo objetivo es:

COMPRENDIENDO LOS PATRONES INFINITOS

1. En la imagen se ve las partes ordenadas de una hoja entera de papel, recortadas según un patrón.



   a. ¿Cómo podrías describir el patrón de la imagen? Explica a tu compañero la necesidad de utilizar las fracciones en esta descripción.
   b. Elabora una expresión algebraica que represente el enésimo elemento de la sucesión. (Nota: la hoja inicial más grande que se ve puede ser el primer paso $n = 1$).
   c. Si este patrón continúa eternamente, ¿puedes encontrar el “último elemento” de la sucesión elaborada?, ¿cuál podría ser?
   d. Comparte tu conjetura con tu compañero e intenten encontrar juntos el “último elemento” de la sucesión.
   e. ¿A qué valor se acercarán los elementos de la sucesión, sin alcanzarlo?
   f. ¿Qué relación puedes ver entre “sin alcanzar”, el “infinito” y los números naturales?
   g. Grafica puntualmente cada paso de la sucesión.
   h. ¿Se pueden ordenar los elementos de la sucesión de menor a mayor? Explica tu conjetura a tu compañero.
   i. ¿Qué ocurre con el “último elemento” en este caso?

Figura 1.5: Actividad de Sucesiones propuesta por los Planes y Programas (MINEDUC, 2021a, p.71)

COMPRENDER LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA

1. Se considera las siguientes condiciones de la carrera:

   – La tortuga parte con 100m de adelanto.
   – La tortuga y Aquiles parten de sus posiciones en el mismo instante.
   – Si Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ella ya avanzó $\frac{1}{10}$ del recorrido de Aquiles. Por ejemplo: si Aquiles avanza por 10m, la tortuga ya avanzó otra vez $\frac{1}{10}$ del último recorrido de Aquiles.
   – Este proceso se repite iterada e infinitamente.

   a. Reconociendo las condiciones anteriores de la carrera, conjetura si Aquiles puede alcanzar a la tortuga o no. Si estimas que no puede alcanzarla, explícalo a tu compañero.
   b. Utilizando herramientas digitales de cálculo, completa la siguiente tabla, que muestra las distancias entre la tortuga y Aquiles al final del intervalo de tiempo que queda por recorrer en el próximo avance de la carrera. Conjetura acerca del límite de la sucesión de los anchos de los intervalos de tiempo.

Intervalo de tiempo en s	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$
Distancia entre ellos al final del intervalo de tiempo en m	10						

   c. Utilizando herramientas digitales de cálculo, completa la siguiente tabla, que muestra las posiciones absolutas de la tortuga y de Aquiles al final del intervalo de tiempo que queda por recorrer en el próximo avance de la carrera, y en referencia al punto de partida de Aquiles.

Intervalo de tiempo en s	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$
Posición de la tortuga al final del intervalo de tiempo en m	110						
Posición de Aquiles al final del intervalo de tiempo en m	100						

Figura 1.6: Actividad de Sucesiones propuesta por los Planes y Programas (MINEDUC, 2021a, p.78)

2. La imagen muestra un gráfico de puntos que representa una sucesión (b_n).

a. Determina el término general b_n.

b. Conjetura acerca del límite de la sucesión.

c. Determina algebraicamente $\lim_{n\to\infty} b_n$.

3. Determina algebraicamente el límite de la sucesión (a_n) con $a_n = \frac{2-3n^2}{(2n+1)^2}$.

4. Elaboración de sucesiones a partir de un límite dado.

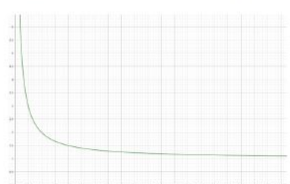
a. Elabora el término general de una sucesión con expresión fraccionara (c_n) que tiene el límite $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{3}{2}$

b. Elabora un término general de una sucesión con expresión fraccionara (d_n) que no tenga límite.

Figura 1.7: Actividad de Sucesiones propuesta por los Planes y Programas (MINEDUC, 2021a, p.85)

¿CUÁNDO EXISTE EL LÍMITE DE FUNCIONES?

1. La imagen muestra el gráfico parcial de una función real f con $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, que es la suma de una función constante k con $k(x) = 1$ y la función g con $g(x) = \frac{1}{x}$.



a. Avanzando en el eje X, es decir, cuando $x \to \infty$, ¿a qué número tienden los valores $f(x)$? Explica tu respuesta desde el gráfico.

b. La función f es la suma de las funciones k y g. Si se considera el avance $x \to \infty$, ¿a qué valor tienden $k(x)$ y $g(x)$? Explica la respuesta utilizando el gráfico.

c. ¿Cuál es la ecuación de la recta al cual se acerca infinitamente el gráfico de f? Grafica esta recta en el mismo plano cartesiano donde se encuentra f.

d. ¿Observas alguna similitud entre esta gráfica y la realizada en la actividad anterior?

e. Considerando un acercamiento $x \to 0$, ¿existe un número al cual tienden los valores $f(x)$? Explica tu respuesta a un compañero, utilizando el gráfico.

f. Considerando un acercamiento $x \to 0$, ¿a qué recta se acerca infinitamente el gráfico de f? Argumenta y explica la respuesta.

Figura 1.8: Actividad de límite de Funciones propuesta por los Planes y Programas (MINEDUC, 2021a, p.93)

> "Comprende las nociones de límite, continuidad, derivadas, integrales y series, y conoce el Teorema Fundamental del Cálculo, lo que le permite planificar y gestionar actividades de aprendizaje para que sus estudiantes incorporen estos conocimientos del cálculo y los apliquen para resolver problemas y modelar fenómenos naturales y sociales." (MINEDUC, 2021b, p.91)

Los indicadores relacionados con la noción de límite que se encuentran en el Estándar D, señalan lo siguiente:

> **Conocimiento Disciplinar**
> 1. Explica las nociones de límite de sucesiones y de funciones y la relación entre ellas, y las utiliza en la resolución de problemas que involucran el cálculo de límites utilizando casos conocidos y sus propiedades.
> 3. Utiliza las nociones de límite, continuidad y derivabilidad para analizar funciones, en particular sus puntos críticos, de inflexión y su comportamiento asintótico, conectando sus representaciones gráficas y algebraicas.
> 7. Estudia la convergencia de series numéricas y series de potencias utilizando métodos del cociente, raíz y de comparación, y modela diversos fenómenos con ellas, en particular, el cálculo de interés.
> 8. Modela fenómenos que requieren conocimientos de límites, derivadas e integrales y de los otros estándares como, por ejemplo, fenómenos que requieran del uso de probabilidades, cálculo de integrales y tecnología.
>
> **Didáctica Disciplinar**
> 10. Utiliza diversas representaciones para que todos/as sus estudiantes logren superar las dificultades más frecuentes que tienen con las nociones de convergencia de sucesiones y límite de funciones.
> 11. Anticipa preguntas para estimular el aprendizaje y para guiar a sus estudiantes en una actividad de modelación colaborativa de fenómenos naturales o sociales que involucren elementos del cálculo diferencial y el uso de herramientas digitales.(MINEDUC, 2021b, p.91)

Tal como se describió anteriormente, los profesores en formación como en ejercicio deben desarrollar sus conocimientos y habilidades así como también propiciar situaciones de aprendizaje, de manera intuitiva y formal en cuanto a la noción de límite de una función en una variable.

1.7. Diseño de Tareas sobre la noción de Límite

Existen diferentes acepciones de "tareas" en la literatura, por ejemplo, Watson y Sullivan (2008) describen las tareas como preguntas, situaciones e instrucciones que podrían usarse al enseñar a los estudiantes. Las tareas estimulan la actividad que ofrece a los estudiantes oportunidades para encontrar conceptos, ideas y estrategias matemáticas. La función de los docentes es seleccionar, modificar, diseñar, rediseñar, secuenciar, implementar y evaluar las tareas.

Existen variadas investigaciones que diseñan tareas que tienen por objetivo generar en los estudiantes un aprendizaje significativo de la noción de límite, por ejemplo; Keene, Hall y Duca (2014) diseñan tareas con el fin de ayudar a los estudiantes aprender el concepto *formal* de límite por medio de actividades que promueven la noción dinámica e intuitiva del concepto, estas tareas están sustentadas en el marco teórico *Realistic mathematics education*. Por otra parte, Irazoqui y Medina (2013) diseñan tareas denominadas actividades didácticas de aprendizaje para el aprendizaje del concepto de límite por medio del software Winplot, las tareas diseñadas se basaron en la información obtenida en cuestionarios aplicados a docentes y en el análisis de textos.

Cabe destacar que no todas las indagaciones se basan en el diseño de tareas sino que también en la implementación de éstas y cómo la aplicación propicia el aprendizaje de la noción en el estudiante; por ejemplo, Fuente, Armenteros, y Font (2012) estudian la implementación de tareas por medio de la herramienta teórica Idoneidad Didáctica, los autores concluyen que la triple representación gráfica, numérica y simbólica del concepto es primordial para el aprendizaje de éste y que las tareas que sólo propician el concepto de límite de forma intuitiva provoca dificultades en la conceptualización del *infinito actual* en alumnos.

En síntesis, la revisión de la literatura anteriormente descrita evidencia problemas de aprendizaje de los estudiantes sobre la noción de límite, así como también propuestas didácticas (y/o diseño de tareas) para propiciar un aprendizaje significativo e intuitivo de éste (algunos de ellos con uso de softwares matemáticos), además, se describen brevemente estudios históricos epistemológicos relacionados con la noción. Por otra parte, se menciona la importancia de las prácticas docentes y las exigencias en la formación de profesores en cuanto a este objeto matemático.

A pesar de todas estas investigaciones, pocos trabajos proponen diseños didácticos que estén basados en los diferentes significados parciales de la noción de límite. Por tanto, la originalidad de nuestro estudio radica en el diseño de tareas didácticas de cada uno de los significados parciales del objeto límite.

Para dar unicio a nuestra indagación nos planteamos la primera interrogante que sentará las bases a nuestras futuras preguntas de investigación:

¿Es posible diseñar propuestas didácticas para cada uno de los diferentes significados parciales del objeto límite? ¿Qué tipo de tareas didácticas podrían ayudar a generar en los estudiantes los significados parciales del objeto límite?

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO, PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

2.1. Introducción

El presente capítulo está estructurado en dos grandes apartados. En el primero de ellos presentamos las “herramientas” y nociones teóricas que enmarcan la presente investigación las cuales utilizamos para el desarrollo de nuestro estudio; concretamente presentamos el marco teórico conocido como “enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática”, con especial énfasis en las prácticas matemáticas, configuraciones y tipos de significados. En el segundo apartado se aborda las orientaciones teóricas de los Criterios de Idoneidad Didáctica e indicadores que sustentan el diseño de tareas de cada uno de los significados del objeto límite. En el tercer apartado abordamos la nociones teóricas del Diseño de Tareas, así como también describimos algunas sugerencias y consejos para la creación de éstas. Finalmente se establece la fundamentación teórica del planteamiento del problema, se presentan los objetivos, preguntas de investigación y se explicitan las distintas fases y actividades conducentes para la consecución de nuestros objetivos de investigación.

2.2. El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática

Para esta investigación se ha adoptado el marco teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemáticos, desarrollado en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino & Batanero, 1994; Godino & Batanero, 1998; Godino, Batanero & Font, 2007; Font, Godino & Gallardo, 2013, Godino, Batanero & Font, 2020). El EOS ha surgido en la educación matemática, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Para cumplir con este fin adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones o facetas y las interacciones entre éstas, tal como se representa en la siguiente Figura (2.1):

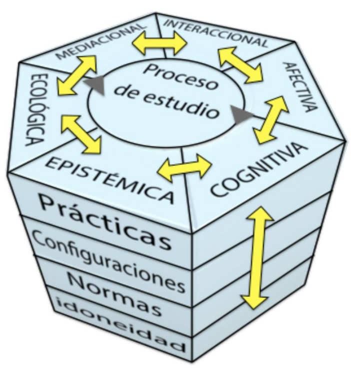


Figura 2.1: Niveles y Facetas del EOS

Tal como señala Godino(2017); para que un marco teórico pueda considerar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es necesario incluir herramientas teóricas que permitan abordar las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica; así como también sus interacciones. Godino(2017) describe cada una de estas facetas de la siguiente manera:

- Epistémica: conocimiento sobre el propio contenido, es decir, la diversidad de significados que pueden tener los objetos matemáticos según los diversos marcos institucionales y contextos de uso.

- Cognitiva: conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y cómo progresan en su aprendizaje (significados personales).

- Afectiva: conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

- Interaccional: conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización y gestión de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, e interacciones que se puede establecer en el aula.

- Mediacional: conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

- Ecológica: conocimiento de las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática. (p.4-5)

Tal como aparece en la Figura (2.1), las facetas del EOS se deben analizar según diversos niveles: las prácticas de los agentes implicados, las configuraciones de los objetos intervinientes, las normas que condicionan y soportan la realización de las prácticas y la valoración de la idoneidad o adecuación del proceso educativo en toda su globalidad (Godino, Font, Wilhelmi & De Castro, 2009).

Es importante destacar, que las nociones del EOS se han aplicado en diversas investigaciones teóricas y experimentales desarrolladas en tesis doctorales y otros trabajos de investigación, y se utiliza en este trabajo porque posee "herramientas" teóricas que nos permitirán realizar un análisis detallado y profundo de cada uno de los diferentes significados parciales que posee el objeto matemático límite, además, permitirá brindar orientaciones e indicadores para diseñar tareas que incluya dos importantes características de los significados, la primera de carácter "epistémica" y la otra de naturaleza "didáctica".

A continuación, se describen las nociones del EOS que serán de utilizadas para el desarrollo de la presente investigación.

2.2.1. Sistemas de Prácticas: personales e institucionales

El punto de partida del EOS es asumir una visión antropológica y pragmatista de las matemáticas, por lo que la actividad de resolución de problemas es el elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Esta visión epistemológica se hace operativa con la noción de práctica matemática cuya naturaleza puede ser institucional o personal (Godino, 2017). En este sentido, Godino y Batanero (1994) considera *práctica matemática* a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica. etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (p.334).

De este modo, las prácticas pueden ser desarrolladas por una persona o compartidas en el seno de una institución, lo cual da lugar a las nociones de *sistemas de prácticas personales* y *sistemas de prácticas institucionales*, Godino y Batanero (1994) las define como:

> El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I(...). Los sistemas de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación $P_{\mathfrak{p}}(C)$. (p. 339)

En este sentido, Font, Godino y Gallardo (2013) señalan que "nuestra propuesta ontológica se deriva de la prácticas matemáticas, siendo éstas el contexto básico en la que los individuos obtienen su experiencia y de las cuales los objetos matemáticos emergen. Consecuentemente, el objeto adquiere un estatus derivado de las prácticas que le preceden" (p.104). De acuerdo con lo anterior, Godino(2017) explica lo siguiente:

> En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta, ¿qué significa o representa la expresión media aritmética?, se propone como respuesta, "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos."(p.7)

En esta misma línea, Font, Godino y Gallardo (2013) establecen la diferencia entre las prácticas operativas y discursivas de la siguiente forma: "las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los textos matemáticos son leídos y producidos, y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas" (p.104).

En las prácticas matemáticas intervienen objetos *ostensivos* (símbolos, gráficos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc.), que emergen al hacer matemáticas y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Ahora bien, como se vio anteriormente, los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales; así, si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución entonces los objetos emergentes se considerarán como "objetos institucionales", mientras que si tales sistemas corresponden a una persona, entonces serán considerados "objetos personales". Godino y Batanero (1994) los definen de la siguiente manera: "El objeto institucional O_I es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_I(C)$. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de O_I" (p. 338). Mientras que el "objeto personal O_p es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_p(C)$". (p.339)

Los autores resaltan que la emergencia del objeto personal es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y del aprendizaje; mientras que la emergencia del objeto institucional es también progresiva, pero a lo largo del tiempo. En un momento determinado es reconocido como tal objeto por la institución, pero incluso después de esta etapa sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociados.

Tal como se ha mencionado anteriormente, en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (lenguaje, símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.). En este sentido el EOS propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, que provienen de los sistemas de prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007):

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos,...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...).

- *Situaciones/Problemas*(aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, tareas...).
- *Conceptos/Definiciones* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,...).
- *Proposiciones/Propiedades* (enunciados sobre conceptos,...).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,...).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...).

Pino-Fan (2014) explica la importancia de los objetos matemáticos primarios de la siguiente forma:

> ...estos objetos [primarios] se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías, etc. Estos seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones/problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. (p.44)

En la subsección 2.2.3 se describirá cómo estos objetos primarios están relacionados entre sí formando redes más complejas de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

2.2.2. Significados y tipos de significados de los objetos matemáticos

El EOS concibe el significado de los conceptos matemáticos (por ejemplo, número, función, límite, ...) desde una perspectiva pragmática-antroplógica. El significado de un objeto matemático se define como el *sistema de práticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones/problemas en las que dicho objeto interviene.* De esta manera, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo cual da origen a los *significados* *institucionales* y *significados personales* respectivamente. Godino y Batanero (1994) definen estos significados como “Significado de un objeto institucional O_I es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado.” (p.340)

Dicha noción de significado institucional permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica, el estudio de la estructura de los sitemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como su evolución temporal y dependencia institucional. Respecto al significado personal de un objeto, los autores señalan: “significado de un objeto personal O_p es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado” (Godino y Batanero, 1994, p.341). Hay que resaltar que los objetos personales e institucionales no tienen un único significado, por ejemplo, en una clase de matemáticas (una institución) donde se realiza un sistema de prácticas de donde emerge el objeto “límite”, el significado que los estudiantes atribuyan a este objeto dependerá de los sistemas de prácticas que lleve a cabo esa institución en particular, y que será distinto al significado asociado a los sistemas de prácticas que desarrolle otra institución.

Los sistemas de prácticas se han categorizado teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre la faceta personal, o idiosincrásica de un sujeto, de las prácticas y la faceta institucional (compartida, social) de las mismas. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). Con respecto a las prácticas institucionales es importante distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia. La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de tipologías de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011). La Figura 2.2, muestra las relaciones descritas.

En relación con los significados personales, Godino, Batanero y Font (2007) los define como:

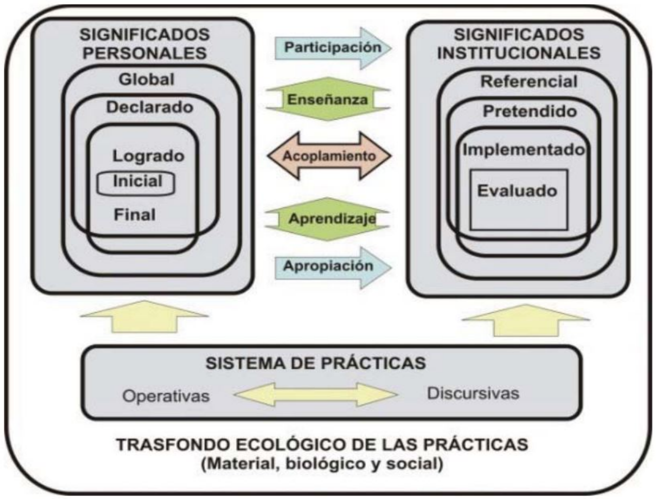


Figura 2.2: Significados como sistemas de prácticas (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2014, p.13)

- *Global:* corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.

- *Declarado:* da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

- *Logrado:* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida por el docente. En el análisis del cambio y evolución de los significados personales como resultado de un proceso de estudio, interesará distinguir entre los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen. (p.129-130).

Con respecto a los significados institucionales, los autores señalan:

- *Implementado:* sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente en un determinado proceso de enseñanza.

- *Evaluado:* sistema de prácticas que el docente utiliza para evaluar el aprendizaje de sus estudiantes.

- *Pretendido:* sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

- *Referencial:* sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado global u *holístico* del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto (Godino, Batanero y Font, 2007, p.129).

Tal como señalan Godino y Batanero (1994) los significados logrados por los estudiantes dependen de los diseños e intervenciones pedagógicas desarrolladas por los docentes, de manera concreta podemos decir que: los diseños y/o planificaciones se basan en los significados institucionales pretendidos; el desarrollo de sus intervenciones genera los significados implementados; y el diseño y la aplicación de instrumentos de evaluación involucran el significado institucional evaluado y éstos permiten distinguir los significados logrados por los alumnos. Adicionalmente, el profesor, como parte de la institución de enseñanza, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático (Pino-Fan, Godino & Font, 2011).

Es importante mencionar, que el significado holístico se determina por medio de estudios históricos epistemológicos para analizar su origen, evolución, contexto, tiempo, etc. con el fin de determinar los significados parciales de un objeto matemático. En este sentido, Pino-Fan, Godino & Font (2011) definen el significado global de referencia a partir de dos nociones:

1. significado global, también denominado significado holístico u holo-significado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático.

2. significado de referencia, entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio.

En síntesis, el EOS considera que la enseñanza implica la participación de los estudiantes en una comunidad de prácticas que comparten el significado institucional, y el aprendizaje se concibe como la apropiación por parte de los estudiantes de estos significados.

2.2.3. Configuración de objetos y procesos

De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado de algunas (o todas) las entidades básicas u *objetos matemáticos primarios,* a saber: situaciones-problemas, elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; con el *lenguaje* se representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los *argumentos* justifican los *procedimientos* y *proposiciones* que relacionan los conceptos entre sí. En este sentido, Pino-Fan(2014) explica lo anterior como:

> [...] para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. (p. 47)

Es decir, cuando una persona o institución realiza y evalúa una práctica matemática activa un conjunto compuesto por situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, los cuales integrados y entrelazados entre sí conforman una *configuración*, ver Figura 2.3.

Estos objetos matemáticos primarios se articulan formando la configuración de objetos. Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales), según si los objetos matemáticos primarios se ponen en juego en prácticas institucionales o personales, respectivamente.

Esta definición de objeto que emerge de los sistemas de prácticas y la tipología de objetos primarios, permite describir los sistemas de prácticas con el fin de compararlos entre sí y

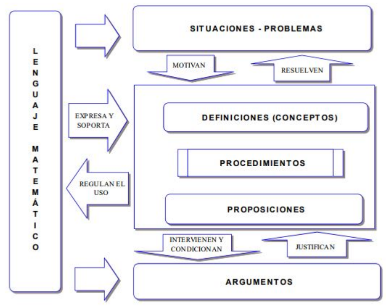


Figura 2.3: Configuración de Objetos Primarios (Font y Godino, 2006, p. 69)

tomar decisiones en el diseño e implementación de propuestas pedagógicas, así como también evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, Godino, Batanero y Font (2020) señalan lo siguiente:

> El reconocimiento explícito de los objetos (problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos) que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de enseñanza y aprendizaje. (p.7)

Godino (2002) señala que cada uno de los objetos matemáticos primarios puede ser considerado según distintas dualidades:

a) *Personal-institucional.* Si los sistemas de prácticas son compartidas en una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales” (e.g. documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor, etc.), mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como “objetos personales” (e.g. respuesta a una evaluación, la realización de una tarea escolar por un estudiante, etc.) Godino (2002) destaca la importancia de esta dualidad como “La distinción entre las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos nos parece fundamental para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje” (p.248).

b) *Ostensivo-no ostensivo.* Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y perceptible, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, etc.) En este sentido Godino(2002) enfatiza "[...] el lenguaje viene a ser el medio por el cual no sólo se expresan los no ostensivos, sino también es instrumento para su constitución y desarrollo" (p.250).

c) *Unitario-sistémico.* En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación básica, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,...) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje. Para ejemplificar, Godino(2002) expone como ejemplo unitario a las acciones de "conjunto de datos", "representación", "ordenación creciente de un conjunto de datos", como entidades unitarias o elementales, a diferencia, de la "media" que tiene el rasgo o propiedad que hace intervenir todos los datos.

d) *Expresión-contenido.* La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. En este sentido Godino(2002) explica "las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo *representacional* (un objeto se pone en lugar de otro), *instrumental u operatoria* (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y componencial o cooperativa (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos)" (p.252-253). Un ejemplo de una función semiótica que señala el autor es el siguiente " [...] el término "mediana" es la expresión de la función semiótica cuyo contenido es el concepto de mediana (en unos casos refiere al concepto-definición y en otros al concepto-sistema)"(p.253).

e) *Extensivo-intensivo.* En el análisis de la actividad matemática se debe precisar en cada etapa del análisis si se refiere a un objeto concreto (algo que se pone en juego por sí mismo) o a dicho objeto como representante de una clase objetos. Un ejemplo específico, es dado por Contreras, Font, Luque y Ordoñez (2005), un objeto concreto es la función $f(x) = x^2 + 1$ y una clase más general sería la familia de funciones $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011), señalan que tanto estas dualidades como los objetos matemáticos primarios, pueden ser analizados desde una perspectiva proceso-producto, lo que implica considerar los siguientes procesos:

a) institucionalización-personalización

b) generalización- particularización

c) descomposición o análisis - composición o reificación

d) expresión-contenido

e) extensivo-intensivo

f) materialización-idealización

g) representación-significación

La aparición de los objetos matemáticos primarios señalados anteriormente está vinculada, respectivamente, a procesos de problematización, comunicación, definición, algoritmización, enunciación y argumentación. El análisis sistemático de las configuraciones de objetos matemáticos primarios y de los procesos subyacentes, reciben el nombre configuración ontosemiótica (Pino-Fan, Godino & Font, 2015), y pueden ser de carácter epistémico o cognitivo. La Figura (2.4) muestra el desglose, y las interacciones de los objetos matemáticos primarios, las facetas duales desde las que éstos pueden ser estudiados, y los procesos que lleva asociados.

Pino-Fan(2014) señala que los procesos de resolución de problemas y la modelización se pueden ver como "mega procesos" puesto que en éstos intervienen e interrelacionan los objetos primarios con sus dualidades y sus perspectiva proceso-producto, los cuales se presentan en la Figura (2.4). En esta figura se muestra el rol principal que posee las situaciones-problemas y las prácticas realizadas para resolverlas, así como su dependencia de los contextos institucionales en que tienen lugar.

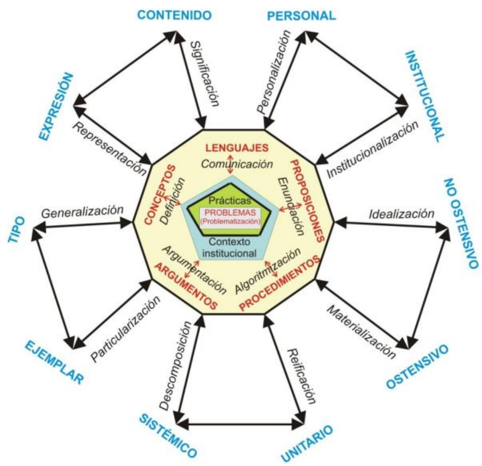


Figura 2.4: Configuración Ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos (Godino, 2014, p.23)

2.2.4. Criterios de Idoneidad Didáctica

La noción de *idoneidad didáctica*, sus dimensiones, criterios, y descripción operativa, han sido introducidos en el EOS por diferentes autores (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Breda, Font y Pino-Fan, 2018) como herramientas teóricas que permiten evaluar ciertas características que un determinado proceso de instrucción desarrolla, estas herramientas permiten calificarlo como óptimo o adecuado según la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), considerando las cirscuntancias y los recursos disponibles (entorno). En este sentido, la noción de idoneidad tiene como fin valorar y comparar las diferentes trayectorias en procesos de estudio efectivos con procesos de estudio potencial. De esta manera, se tiene un metodología que reformula en términos semióticos los instrumentos de contraste del análisis a priori y a posteriori propuestos por la ingeniería didáctica (Artigue, 1989).

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Batanero y Font, 2006, p.133):

1. *Idoneidad epistémica,* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.

2. *Idoneidad cognitiva,* expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

3. *Idoneidad interaccional,* grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar **conflictos semióticos** [1] potenciales (que se puedan a detectar a priori), y , por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados.

4. *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

5. *Idoneidad emocional,* grado de implicación (interés, motivación, del alumnado en el proceso de estudio.

6. *Idoneidad ecológica,* grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Godino et al (2006) enfatizan que "la *idoneidad didáctica* supone la articulación coherente y armónica de las siguientes idoneidades parciales: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica" (p.225). En este sentido, la idoneidad didáctica articula e integra las idoneidades parciales, es importante señalar que la idoneidad didáctica se puede ver como un criterio sistémico de pertinencia, en el sentido de que ésta se adecua a un proceso de instrucción, donde un indicador principal es la adaptación entre los significados personales logrados por los alumnos y los significados institucionales pretendidos/implementados.

En la Figura (2.5), se representa los componentes de la idoneidad didáctica, donde el hexágono regular representa la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido, donde *a priori* representa un grado máximo de las idoneidades parciales, mientras que el

[1] Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales. Godino, Bencomo, Font y Wilhemi, 2006, p. 226.

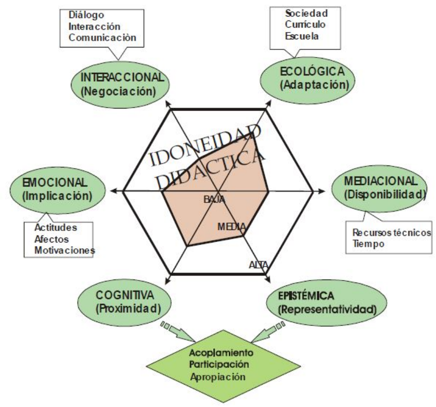


Figura 2.5: Componentes de la idoneidad didáctica. Godino, Bencomo, Font y Wilhemi (2006, p.226)

hexágono irregular interno corresponde a las idoneidades efectivamente logradas en la implementación de un proceso de estudio. Es importante precisar que la idoneidad epistémica y cognitiva se sitúan en la base, ya que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de ciertos conocimientos específicos. En este sentido, Godino et al (2006) señalan:

> En el EOS, cuando se habla de conocimiento se incluye *comprensión* y *competencia*. La dimensión epistémica se refiere a los conocimientos institucionales (o sea, compartidos en el seno de instituciones o comunidades de prácticas) mientras que la dimensión cognitiva se refiere a los conocimientos personales (o del sujeto individual). El aprendizaje tiene lugar mediante la *participación* del sujeto en las comunidades de prácticas, el acoplamiento progresivo de los significados personales a los institucionales y la apropiación de los significados institucionales por los estudiantes. (p.225-226)

Es importante destacar que para diseñar la implementación de una clase se debe determinar qué es idóneo desde los puntos de vista epistémico y cognitivo (así como también la participación de estas idoneidades). En este sentido, Godino et al (2006) señalan:

> La ontología matemática (junto con las facetas duales) propuesta por el EOS permite describir las idoneidades epistémica y cognitiva en términos de configuraciones epistémicas y cognitivas (conglomerado de situaciones problema, definiciones (conceptos), procedimientos, proposiciones, lenguajes y argumentos). El núcleo de dichas configuraciones son las situaciones-problemas seleccionadas para contextualizar y personalizar los significados. (p.7)

Es importante destacar que el proceso de instrucción es complejo, pues debe considerar el contexto, el curriculum y lo demandado por el sistema de educación local (idoneidad ecológica), la participación de los alumnos (idoneidad afectiva), los recursos que se utilizarán (idoneidad mediacional), necesidades cognitivas de los estudiantes (idoneidad interaccional), etc. En este sentido Godino (2013) señala:

> El logro de una idoneidad alta en una de las dimensiones, por ejemplo, la epistémica, puede requerir unas capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a los que se dirige la enseñanza. Una vez logrado un cierto equilibrio entre las dimensiones epistémica y cognitiva es necesario que la trayectoria didáctica optimice la identificación y solución de conflictos semióticos y se creen las condiciones para el desarrollo de competencias comunicativas. Los recursos técnicos y el tiempo disponible también interaccionan con las situaciones-problemas, el lenguaje, etc. (p.117)

En este sentido, la noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio particular en una sesión de una clase, al diseño y desarrollo de una unidad didáctica o de manera más general a la implementación de un curso o una propuesta curricular. Además, se puede utilizar para analizar aspectos parciales de un determinado proceso de estudio, como un material didáctico, un libro escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, etc.

Indicadores de Idoneidad Didáctica

Godino (2013) establece ciertos indicadores para cada uno de las idoneidades parciales (idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva, ecológica) que permiten evaluar y reflexionar con lineamientos claros, precisos y explícitos sobre cada uno de las idoneidades que el docente establece en el diseño de sus intervenciones pedagógicas. En este sentido, Godino(2013) señala:

> El logro de una alta idoneidad didáctica de un proceso de estudio, como también su valoración, es un proceso sumamente complejo puesto que, como hemos visto, involucra diversas dimensiones, que a su vez están estructuradas en distintas componentes. Además, tanto las dimensiones como los componentes no son observables directamente y, por lo tanto, es necesario inferirlos a partir de indicadores empíricos. (p.118)

En este sentido, Godino(2013) enfatiza que estos indicadores pueden servir de pauta o guía para el diseño y valoración de acciones formativas planificadas o efectivamente implementadas.

Indicadores de la Idoneidad Epistémica

Es importante tener en consideración que en un programa formativo o en un proceso de estudio se logrará una mayor idoneidad epistémica (matemática) en la medida en que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representen bien a un significado de referencia. El significado de referencia será relativo al nivel educativo en el que tiene lugar el proceso de estudio y deberá ser desarrollado considerando los diversos tipos de problemas y contextos de uso del objeto de enseñanza, así como las prácticas operativas y discursivas requeridas (Godino, 2013). En la Tabla 2.1, Godino(2013) establece componentes e indicadores de la Idoneidad Epistémica.

Respecto a los indicadores descritos, Godino(2013) señala:

> Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas. Sin embargo aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten, generalicen y justifiquen las soluciones. (p.120)

Adicionalmente, se debe considerar las relaciones entre las distintas partes del contenido matemático, y la articulación de los diversos significados parciales de los objetos de estudio. (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2010). Además, los ejes matemáticos como aritmética, cálculo, álgebra, geometría, etc. no pueden ser enseñados como entidades separadas. Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos interrelacionados. En este sentido, Godino(2013) enfatiza que “la resolución de problemas de contextos ricos con frecuencia significa que tienes que aplicar un amplio rango de herramientas y comprensiones matemáticas” (p. 120).

Tabla 2.1: Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática)

COMPONENTES:	INDICADORES:
Situaciones-problemas	• Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación • Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	• Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica,...), traducciones y conversiones entre los mismas. • Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. • Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. • Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. • Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	• Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. • Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	• Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. • Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

Indicadores de la Idoneidad Cognitiva

Respecto a la idoneidad cognitiva Godino(2013) la define como “como el grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos (Vygotski, 1934)”. La Tabla 2.2 describe los componentes e indicadores seleccionados para esta idoneidad.

Tabla 2.2: Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

COMPONENTES:	INDICADORES:
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	• Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). • Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	• Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. • Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Aprendizaje: Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	• Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. • La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia • Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Tal como se había dicho anteriormente, el EOS considera que los significados se entiende en términos de prácticas operativas y discursivas como también considera el reconocimiento e interrelación de los objetos que intervienen en dichas prácticas. Por tanto, el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en las múltiples prácticas que se desarrollan en una clase, es decir, hay una integración progresiva entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados.

Indicadores de la Idoneidad Afectiva

Los indicadores de la Idoneidad Afectiva hacen referencia al grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes, los siguientes indicadores permiten emitir un juicio sobre la mayor o menor idoneidad afectiva del proceso enseñanza- aprendizaje que se está llevando a cabo. En la siguiente Tabla 2.3 se explicitan indicadores respecto a esta idoneidad.

Tabla 2.3: Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

COMPONENTES:	INDICADORES:
Intereses y necesidades	• Las tareas tienen interés para los alumnos. • Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	• Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. • Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	• Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. • La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia • Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Es importante destacar, que los alumnos cuando resuelven problemas matemáticos no sólo ponen en juego prácticas operativas y discursivas respecto a aspectos lógicos matemáticos sino que también moviliza creencias, actitudes, emociones, intereses o valores que afectan sus argumentos y respuestas. En este sentido, Godino(2013) señala:

> Los objetos y procesos afectivos son usualmente considerados como entidades psicológicas, que refieren a estados o rasgos mentales más o menos estables, o a disposiciones para la acción de los sujetos individuales. Pero desde el punto de vista educativo el logro de unos estados afectivos que interaccionen positivamente con el dominio cognitivo tienen que ser objeto de consideración por parte de las instituciones educativas, y, en particular, por el profesor. El dominio afectivo conlleva, por tanto, una faceta institucional y se concreta en normas de índole afectivo que condicionan el trabajo del profesor. (p.122)

Indicadores de la Idoneidad Interaccional

Las interacciones entre el profesor y los estudiantes y entre los propios estudiantes permiten desarrollar procesos de aprendizaje que favorecen la autonomía y generan competencias comunicativas en ellos. Los indicadores de la idoneidad interaccional que aparecen en la Tabla 2.4 refieren a estas interacciones.

Tabla 2.4: Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

COMPONENTES:	INDICADORES:
Interacción docente-discente	• El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) • Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) • Busca llegar a consensos con base al mejor argumento. • Usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. • Promueve la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.
Interacción entre alumnos	• Favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. • Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. • Favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	• Contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
Evaluación formativa	• Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

En este sentido, la interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor es sumamente importante debido a que este proceso genera que cada uno de los actores reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. En este sentido, Godino (2013) enfatiza que los estudiantes deben ser participantes activos del proceso de enseñanza-aprendizaje, donde ellos mismos generan herramientas y comprensiones, interactúan con sus pares compartiendo sus experiencias. Esta interacción permite la negociación explícita, la intervención, la discusión, la conjeturación, la cooperación y la evaluación que son acciones esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que las estrategias informales del aprendiz permiten alcanzar los métodos formales. Tal como señala el autor: “En esta instrucción interactiva, los alumnos son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar” (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005, p. 290).

Respecto a la evaluación formativa de los aprendizajes que se realiza de manera progresiva y sistemática permite que el docente tome decisiones sobre el trayecto formativo que están llevando a cabo sus estudiantes, además le otorga al estudiante espacios de reflexión sobre sus aprendizajes y errores.

Indicadores de la Idoneidad Mediacional

La idoneidad mediacional se entiende como el grado de disponibilidad y adecuación de medios, recursos materiales y temporales para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje. El NCTM(2000) enfatiza que la tecnología es una herramienta fundamental para generar el aprendizaje de la matemática, y todas las escuelas deben tener acceso a estas herramientas con el fin de asegurar que todos sus estudiantes puedan utilizarlas. En este sentido, los profesores deben procurar utilizar al máximo el potencial de la tecnología para desarrollar la comprensión de los estudiantes, generar interés, e incrementar su aprendizaje en matemáticas. Herramientas tecnológicas como calculadoras, softwares de cálculo algebraico, geometría dinámica, applets, hojas de cálculo y dispositivos informáticos interactivos, son medios esenciales para llevar a cabo una educación matemática de alta calidad. En la Tabla 2.5 se describe algunos componentes e indicadores de idoneidad en el uso de herramientas tecnológicas. Es importante considerar el uso idonéo de estos recursos tecnológicos, las condiciones ambientales de la clase, la cantidad de estudiantes en la sala y el tiempo asignado para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Tabla 2.5: Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

COMPONENTES:	INDICADORES:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	• Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. • Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	• El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. • El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). • El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	• El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida. • Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. • Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Indicadores de la Idoneidad Ecológica

Recordemos que la Idoneidad Ecológica hace referencia al grado en que un plan formativo en matemática es adecuado en el entorno en que se utiliza. Godino (2013) define entorno como: "[...] todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en si misma" (p. 125). En este sentido, el proceso de enseñanza-aprendizaje se lleva a cabo en un contexto educativo que establece ciertos objetivos y valores para la educación de los ciudadanos y profesionales que se deben respetar. Por lo general, los objetivos y valores para la educación de una nación son diseñados y establecidos por entidades gubernamentales con el fin de brindar lineamientos curriculares a todos los establecimientos educacionales de un país o región. En el caso de Chile, el Ministerio de Educación es el encargado de difundir dichos objetivos y valores, así como también velar por el cumplimiento de éstos en todas las escuelas del país. En este sentido, dichos objetivos y valores son interpretados, adaptados e integrados en los proyectos educativos de distintas instituciones educacionales las cuales implementan y desarrollan por medio de su comunidad educativa. Los docentes tienen un rol fundamental en la implementación y desarrollo de estas normativas, para cumplir con este fin es necesario que éstos sean parte de una comunidad de estudio para indagar sobre conocimientos útiles que permitan generar prácticas matemáticas y didácticas idóneas. Por otra parte, Godino (2013) enfatiza sobre la importancia de enseñar las matemáticas de manera que permita formar ciudadanos críticos y reflexivos, y nuevamente recae en la expertiz del profesor de formar a estos futuros ciudadanos. En este sentido, el autor señala:

> En la escuela, la enseñanza de las matemáticas puede ejercer una gran influencia en dos sentidos totalmente opuestos: por un lado, las matemáticas se pueden presentar como reducidas a meros cálculos rutinarios, lo que puede reforzar actitudes pasivas y complacientes o, por el contrario, con un sentido más amplio y en consecuencia puede desarrollar el pensamiento crítico y alternativo. (p.126)

En la Tabla 2.6, se describen los componentes e indicadores propuestos por Godino (2013) de la Idoneidad Ecológica.

Tabla 2.6: Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

COMPONENTES:	INDICADORES:
Adaptación al currículo	• Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	• Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. • Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	• Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
Educación en valores	• Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	• Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

2.3. Diseño de Tareas

En los últimos años se ha desarrollado un especial interés por el *diseño de tareas* (design tasks) puesto que estas son secuencias didácticas claves para la generación de procesos de enseñanza-aprendizaje de calidad. En la literatura se encuentran diversas acepciones sobre los términos 'tarea'y 'diseño de tareas'; por ejemplo, una acepción se refiere a las tareas como aquellas actividades que proveen oportunidades para descubrir conceptos matemáticos, formular ideas, desarrollar estrategias, fomentar la indagación y potenciar el pensamiento lógico matemático en los estudiantes (Watson et al, 2013). Para otros autores las tareas simplemente son los instrumentos o los entornos diseñados con la finalidad de que los estudiantes puedan desarrollar competencias matemáticas de alta complejidad (Becker & Shimada, 1997). Por otra parte, Chevallard (1999) define la actividad matemática con el concepto de *praxeología* la cual está compuesta por cuatro aspectos fundamentales: tarea, técnicas, tecnología y teoría, en esta teoría las tareas hacen referencias a los problemas que deben ser resueltos por medio de las técnicas, las cuales están sustentadas con la tecnología y teoría. Otra acepción es la propuesta por, Mallart, Font y Malaespina (2016) que establecen

> Las tareas son las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.) a los alumnos; éstas son el punto de partida de la actividad del alumno y son, a la vez, las que se producen como resultado de su aprendizaje. (p.16)

A pesar de las diversas acepciones, Watson et al (2013) concuerdan que una tarea son los instrumentos que permiten mediar entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y el foco principal de estudio de los investigadores es indagar cómo se relacionan las tareas con el aprendizaje y cómo éstas se utilizan para fines pedagógicos.

Respecto a esta línea de investigación, Watson et al (2013) afirman que hay investigaciones que consideran el diseño de tareas como el conjunto de objetos y acciones que considera: los recursos educativos; las secuencias de tareas; y los consejos pedagógicos para la implementación de las tareas en el aula. Por otra parte, los autores señalan que hay investigadores que consideran el diseño de tareas como una actividad propuesta que puede incluir algún tipo de recurso y algunas indicaciones para el docente, pero parte del diseño es considerar la retroalimentación y la experiencia del docente una vez aplicadas las tareas. Algunas investigaciones que abordan aspectos más específicos del diseño de tareas, por ejemplo, Swan(2017) realiza un estudio de la naturaleza y la tipología de las tareas; Charalambous (2010) indaga sobre el papel que tiene el profesor en la implementación de la tarea a fin de lograr procesos cognitivos significativos en los estudiantes; y Giménez, Font y Vanegas (2013) estudiaron las competencias en el diseño de tareas en profesores en formación de enseñanza secundaria.

Por otra parte, Ruthven, Laborde, Leach y Tiberghien (2009) plantearon una distinción entre el *diseño como intención* y el *diseño como implementación*. El *diseño como implementación* (Collins, Joseph y Bielaczyc, 2004) está orientado en la aplicación del diseño y el proceso que conlleva la implementación de éstas en el aula, éstas secuencias son estudiadas y analizadas con el fin de mejorar y refinar progresivamente las tareas, mientras que el *diseño como intención* está enfocado a la formulación inicial del diseño de las tareas y su aplicación. Kieran, Doorman y Ohtani (2015) destacan que hay estudios que abordan a ambos tipos de diseños, pero es importante distinguinlos para comprender ciertas diferencias sutiles entre un estudio y otro. Kieran et al. (2015) señalan que por lo general el diseño como intención utiliza marcos teóricos que están bien desarrollados con el fin de proporcionar claridad y coherencia a la formulación de las tareas, además, las herramientas teóricas brindan orientaciones que permiten evaluar y analizar su implementación para retroalimentarlas con el fin de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en el estudiante. En este sentido Ruthven et al (2009) señala "[...] la disponibilidad de herramientas de diseño capaces de identificar y abordar aspectos específicos de la situación en diseño puede respaldar tanto la formulación inicial de un diseño como su posterior mejoramiento a la luz de la implementación"(p.329). Es decir, que los marcos teóricos tienen un rol importante tanto en el diseño, la implementación y la evaluación de las tareas.

Cabe destacar que si bien las teorías proporcionan orientaciones y herramientas teóricas para el diseño, la implementación y análisis de tareas también proporcionan información fundamental para nutrir a las teorías, tal como señala Cobb et al. (2003) "los experimentos de diseño se llevan a cabo para desarrollar teorías" (p.9). En este sentido, Kieran et al (2015) enfatizan que las teorías son a la vez un recurso y un producto; como recurso por las orientaciones teóricas que proporciona la teoría para el diseño de una secuencia de enseñanza; y como producto, pues las teorías informan sobre los procesos de aprendizaje y los medios que se ha demostrado que respaldan ese aprendizaje. En este sentido, Kieran et al (2015) señalan que la mayoría de los diseños de tareas combinan dos orientaciones, por una parte, hay experimentos de diseños de tareas que se basan en un marco teórico y sus herramientas teóricas, por otra parte, los diseños de tareas que se centran en las iteraciones sucesivas de la implementación y el análisis retrospectivo contribuyen a una mayor construcción de la teoría que es fundamental para investigación.

En nuestro trabajo, adoptaremos la noción de tarea como las situaciones (ejercicios, actividades, problemas, etc.) que el docente implementa a sus alumnos con el fin de desarrollar en ellos el aprendizaje pretendido (Mallar, Font y Malaespina, 2016). Además, consideraremos el diseño de tareas por intención, puesto que utilizaremos las herramientas teóricas-metodológicas del EOS para la creación, análisis, evaluación y mejoras de las tareas, así como también consejos para una posterior implementación.

Respecto a los marcos teóricos que sustentan los diseños de tareas, Kieran et al (2015) establecen una distinción según sus niveles o tipos, los cuales denominan *Grandes Marcos Teóricos (Grand Theorical Frame), Marcos de Nivel Intermedio (Intermediate-level frames)* y *Marcos de Dominio Específico (Domain Specific).* A continuación, se describe brevemente cada una de estas distinciones.

2.3.1. Grandes Marcos Teóricos

Respecto a los *Grandes Marcos Teóricos* estos refieren a las teorías generales de educación matemática que poseen orientaciones claves para el diseño de tareas, sin embargo, no poseen herramientas precisas de instrucción y requieren adaptación o combinación con otras teorías para cumplir con las necesidades del diseño instruccional de las tareas. Para clarificar y entender las características de los Marcos Teóricos que están dentro de esta categoría, Kieran et al (2015) ejemplifican señalando que en la piscología cognitiva se han desarrollado teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, la Teoría Recursiva de la Comprensión Matemática (Pirie y Kieren, 1994) y Teoría de la Reificación (Sfard, 1991). Por otra parte hay grandes Marcos Teóricos en el área de las teorías de desarrollo del aprendizaje en ejes específicos de las matemáticas, por ejemplo, Teoría del razonamiento algebraico (Filloy y Rojano,1989) y Teoría del razonamiento geométrico (Clements y Battista, 1992).

2.3.2. Marcos de Nivel Intermedio

Estos marcos poseen un enfoque más especializado en comparación con las grandes teorías del socioconstructivismo y otras teorías similares, aunque los marcos de nivel intermedio tienen a situarse dentro de la perspectiva de uno u otro de estos grandes marcos. Incluso si su enfoque es más especializado, las herramientas teóricas de nivel intermedio tienen la propiedad de que se pueden aplicar en una amplia variedad de áreas de las matemáticas. Los marcos de nivel intermedio se denominan así, puesto que se ubican entre las grandes teorías y las teorías más específicas de dominio específico. Por otra parte, los marcos de nivel intermedio pueden caracterizarse por sus principios/heurísticas/herramientas explícitas que se pueden aplicar tanto al diseño de tareas como a sus secuencias. Debido a que estos marcos tienden a estar altamente desarrollados, a menudo se utilizan en enfoques de diseño como intención. Kieran et al (2015) señala las siguientes teorías como ejemplos de esta categoría, Realistic Mathematics Education (Treffers, 1987), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), Lesson Study (Lewis, 2002), Cultural-Semiotics theory (Radford, 2003), Commognitive Theory (Sfard, 2008), etc.

2.3.3. Marcos de Dominio Específico

Kieran et al (2015) establecen que los marcos de nivel intermedio poseen caracterizaciones que no especifican ningún proceso de razonamiento matemático particular o un área específica de las matemáticas (álgebra, cálculo, geometría, estadística, etc.). Los autores señalan que los *marcos de dominio específico* se utilizan para el diseño de tareas o secuencias de tareas puesto que especifican procesos de razonamiento particulares (conjeturar, hipotetizar, argumentar, discutir, probar, etc.) o con el fin de enseñar un determinado contenido (por ejemplo, geometría, números enteros, técnicas algebraicas). La investigación de diseño de tareas que involucra marcos de dominio específicos generalmente se basa en hallazgos de investigaciones pasadas en un área determinada, además se ubican dentro de marcos más generales como de nivel intermedio y de mayor nivel.

Según lo anteriormente expuesto, consideramos que el EOS es un marco teórico de nivel intermedio, puesto que ofrece herramientas teóricas-metodológicas para el diseño de las tareas (Configuración de Objetos y Procesos) y el análisis de la implementación de ellas (Criterios de Idoneidad Didáctica), además, estas herramientas se pueden utilizar con distintos objetos matemáticos a diferencia de los marcos de dominio específico.

2.3.4. Consideraciones para el Diseño de Tareas

Si bien las matemáticas que se pretenden desarrollar en las tareas son importantes, hay diversas orientaciones fundamentales que se deben considerar en el diseño de tareas, especialmente cuando los diseñadores desean anticipar y orientar acciones pedagógicas pertinentes en su implementación. En este sentido Sullivan, Knott y Yang (2015) consideran cinco dilemas[2] sobre el diseño de tareas denominadas *Contexto*, *Idioma*, *Estructura*, *Distribución* y *Niveles de Interacción*, a continuación describiremos cada una de ellas.

Contexto como un dilema

Sullivan, Knott y Yang (2015) basados en la investigación de Barbosa y de Oliveira (2013) señalan que el *Contexto* corresponde al contexto matemático de las tareas propuestas, las cuales van desde un contexto propio de la matemática, como también contextos semi-reales o reales. Este dilema se refiere a que si las tareas se establecen en un contexto realista éstas pueden motivar la participación de los estudiantes y, por otro, el contexto puede restar valor al potencial de la tarea para promover el aprendizaje deseado. Sullivan et al (2015) estudiaron diversas investigaciones y concluyeron que la incorporación de contextos no necesariamente asegura que las tareas sean accesibles para todos los estudiantes. Por tal razón, diseñar tareas con contexto de la vida real o semi-real no garantiza la promoción de aprendizajes por parte de los alumnos, sin embargo, los diseñadores pueden considerar si realmente el contexto es parte fundamental de la comprensión de la tarea. Por ejemplo, Sullivan et al (2015) señalan que hay una diferencia entre los contextos, pues éstos pueden ser *periféricos* (que realmente no aportan para la comprensión y desarrollo de las tareas algo parecido como los “words problems”) o *centrales* para el desarrollo de las matemáticas que las tareas tienen por objeto desarrollar.

[2]Los autores definen dilema como una “situación en la que se debe elegir entre dos o más alternativas”. Estas alternativas representan las tensiones que enfrentan los diseñadores de tareas.

Idioma como un dilema

El segundo dilema tiene que ver con el *idioma* de la tarea y la solución deseada. Por un lado, la precisión matemática es parte del aprendizaje deseado; por otro lado, se necesita claridad en el lenguaje (o idioma) de las tareas para que los estudiantes puedan desarrollar su aprendizaje. En este sentido, Sullivan et al (2015) exponen una tarea realizada en estudiantes chinos, la cual tuvo que ser traducida al italiano, pero adicionalmente más de una tarea tuvo que ser adaptada para lograr que los estudiantes italianos desarrollaran los aprendizajes pretendidos, cada problema propuesto tenía pequeñas y sutiles variaciones en su redacción, éstas eran trascendentales para el desarrollo matemático deseado (Bartolini Bussi, Canalini & Ferri, 2011). Por otra parte, las tareas que tienen como intención desarrollar habilidades transversales ligadas a la formación de ciudadanos integrales, el idioma en el cual está redactada las tareas tienen una importancia vital, pues se requiere de un lenguaje matemático y social cultural para que éstas tengan sentido en su solución.

Estructura como un dilema

Este tercer dilema versa sobre al grado de apertura de las tareas, el cual se puede considerar como las respuestas y/o soluciones de una tarea así como también de la estructura de éstas. Es decir, las tareas pueden evocar diferentes estrategias para desarrollar una o varias soluciones o por el contrario generar una sola solución. Sullivan et al (2015) señalan que

> En este dilema, la consideración es que se pueden plantear preguntas específicas que, por un lado, fortalecen el compromiso del estudiante con una tarea de una manera más prescrita y, por otro lado, brindan a los estudiantes una mayor oportunidad para tomar decisiones estratégicas sobre trayectorias y caminos escogidos por sí mismos. (p.93)

Distribución como un dilema

Este cuarto dilema hace referencia a la selección de contenidos en función de la demandas cognitivas que generan las tareas. Un ejemplo de ello, es la propuesta por Smith y Stein (2011) que establecen una jerarquía de tareas que van progresivamente desde la *memorización* hasta los *procedimientos sin conexiones* llamadas *Demandas Cognitivas de Bajo Nivel*, así como también tareas que van desde *procedimientos con conexiones* hasta *haciendo matemáticas* llamadas *Demandas Cognitivas de Alto Nivel.*

Niveles de Interacción como dilema

El úlimo dilema se refiere a los niveles de interacción de los participantes en la implementación de las tareas, es decir, entre los docentes y estudiantes. Sullivan et al (2015) enfatizan que los niveles de interacción se interpretan en el sentido de que la tarea no existe por sí misma, pero su implementación está influenciada por la naturaleza de las interacciones previstas o anticipadas entre el docente y los estudiantes cuando están trabajando en ellas. Esto está en parte relacionado con la trayectoria hipotética de aprendizaje que el profesor ha anticipado. Claramente este dilema está relacionado con la faceta Mediacional descrita en la sección de anterior en las componentes de la Idoneidad Didáctica.

En síntesis, los diseñadores y docentes se confrontan a cada uno de estos cinco dilemas cuando diseñan tareas, y escogen sus elecciones adecuadas según los objetivos de las tareas, las edades de los estudiantes, el curriculum, el contexto, etc.

Criterios para el Diseño de Tareas

Hasta el momento se han descrito los Criterios y componentes de la Idoneidad Didáctica para analizar y evaluar la implementación de las tareas, sin embargo, es necesario considerar algunos criterios más precisos para el Diseño de Tareas, que permitan dar orientación y guía en la creación de ellas. Por ejemplo, Pochulu, Font y Rodríguez (2013) basadas en los Criterios de Idoneidad Didáctica (Godino, 2013), proponen los siguientes criterios a considerar para el Diseño de Tareas:

a. Que la tarea no sea cerrada, es decir, que admita más de un camino posible de resolución. De esta manera, la misma puede generar diferentes tipos de actividad matemática en los alumnos y también, comparar las diferentes estrategias de resolución en una puesta en común, que permita establecer conexiones entre ellas (un indicador de riqueza matemática contemplado en el currículo)

b. Que la tarea no brinde sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.

c. Que la tarea no se encuentre en extremo pautada. La razón es que si se pauta mucho con preguntas no se promueven procesos relevantes como la formulación de conjeturas, validación, etc. Es preferible que tenga pocas preguntas (las más generales) y que los alumnos hagan un proceso de análisis que les lleve a resolver cuestiones intermedias.

d. Que la tarea requiera justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan. La razón es que se trata de promover un proceso matemático relevante como es el de argumentación.

e. Si se propone una tarea en un contexto real, procurar que para resolverla este contexto sea significativo y relevante. Dicho de otra manera, evitar hacer preguntas en las que el contexto sea un "decorado" intrascendente. Esto evita que el alumno advierta que la intención del docente está en los objetos matemáticos sobre los cuales pregunta en lugar de poner el foco en el interés del problema en su contexto.

f. En la medida de lo posible evitar dar información que asegure existencia y/o unicidad de la solución de la tarea.

g. Que el uso de nuevos recursos sea necesario para resolver la tarea. Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles.

h. Que lo solicitado con la tarea sea algo matemático y no referido al uso de software. Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos. (p. 5003-5004)

En síntesis, utilizaremos la noción de tarea dada por Mallart, Font y Malaespina (2016), realizaremos un diseño de tareas por intención, pues sólo nos abocaremos sólo a un ciclo de la secuencia didáctica, el diseño estará sustentado por las Configuraciones Ontosemióticas de cada significado parcial de límite (marco de nivel intermedio) y los criterios de diseño dados por Pochulu, Font y Rodríguez (2013) considerando los Dilemas planteados por Sullivan, Knott y Yang (2015), y finalmente la evaluación y análisis de la implementación por los Indicadores de Idoneidad Didática (Godino, 2013). Para complementar lo anteriormente señalado al final del capítulo presentamos un mapa conceptual que sintetiza como las herramientas teóricas descritas sustentarán y guiarán la presente investigación.

2.3.5. Problema de Investigación

Todas las investigaciones presentadas en el Capítulo 1 han evidenciado la importancia de fomentar y generar tareas considerando cada uno de los signficados parciales del objeto matemático límite, y así promover el aprendizaje de los estudiantes sobre dicha noción. En este sentido, el presente trabajo de investigación aborda un aspecto fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, concretamente el que tiene que ver con la implementación de tareas que involucre los distintos significados parciales de la noción (faceta epistémica) de tal manera que los estudiantes desarrollen sus significados personales (faceta cognitiva) y de esta forma se acerquen lo más posible a los significados pretendidos y puedan desarrollar el significado holístico de la noción.

De esta manera, y dada la complejidad del tema, el problema de investigación se puede resumir con la siguiente pregunta principal de investigación (PI):

P.I: ¿Qué tareas didáctico-matemáticas pueden diseñarse para promover los diversos significados del límite de funciones en una variable?

Para abordar de forma clara y organizada nuestro problema de investigación, en la siguiente sección se presentan las preguntas y objetivos de investigación, las cuales orientarán el trabajo y a las cuales pretendemos dar respuestas al finalizar el estudio.

Preguntas y Objetivos de Investigación

Preguntas Auxiliares

Para responder a la pregunta anterior (PI) debemos responder a las siguientes preguntas concretas de investigación:

1. ¿Cuáles son los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable determinados por sus 'prácticas matemáticas'y sus 'configuraciones epistémicas'?

2. ¿Qué criterios y características epistémicas se pueden establecer para cada significado parcial del objeto límite de funciones en una variable relevando la riqueza matemática de sus sistemas de prácticas?

3. ¿Cómo diseñar tareas que consideren tanto la riqueza matemática de los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable como otros aspectos didácticos sugeridos por la literatura científica?

4. ¿Cuáles son los significados personales logrados de un grupo de profesores de matemática en formación a partir de las tareas implementadas?

Con el fin de responder, o aproximarnos a la respuesta de la Pregunta de Investigación (PI), se ha planteado el siguiente objetivo general:

Diseñar tareas por intención para promover aprendizajes de los diversos significados parciales del límite de funciones en una variable.

Objetivos Específicos

Para poder desarrollar el objetivo general y así responder a las preguntas concretas de investigación, se han propuesto los siguientes objetivos específicos (OE):

OE.1 Caracterizar los significados parciales de objeto límite de una función en una variable mediante el estudio de los pares <prácticas matemáticas, configuraciones ontosemióticas>.

OE.2 Plantear criterios relacionados a la riqueza de objetos y/o procesos que se deben contemplar en las tareas de límite de funciones en una variable, considerando el objetivo específico (1).

OE.3 Diseñar tareas por intención del objeto límite de funciones en una variable con el fin de potenciar el uso de sus diversos significados parciales en un grupo de profesores de matemática en formación.

OE.4 Analizar y elaborar las reflexiones sobre la secuencia de tareas implementadas y los significados personales logrados por los estudiantes.

OE.5 Mejorar las tareas diseñadas según la validación de las tareas y los resultados obtenidos en la implementación de éstas.

2.4. Metodología

La presente investigación trata de un estudio cualitativo cuyo diseño metodológico será descriptivo y evaluativo. Es descriptivo, debido que a se estudiará y analizará los significados parciales del objeto límite para diseñar tareas didáctico-matemáticas de cada uno de éstos;

y evaluativo, pues el objetivo es evaluar la implementación de las tareas cuyo fin es analizar los significados personales logrados por los estudiantes y mejorar las tareas (Cohen, Manion y Morrison, 2011; Hernández, Fernández y Baptista, 2016).

Para el estudio descriptivo se considerarán diversas fuentes cuyo fin será estudiar las practicas matemáticas para identificar los significados parciales con sus correspondientes configuraciones epistémicas de la noción de límite de funciones en una variable. Las herramientas teóricas metodológicas que se utilizarán son proporcionadas por el EOS (descrito en el primer apartado del presente capítulo), las cuales permitirán describir criterios epistémicos para cada uno de los signficados parciales de la noción. Dichos criterios permitirán diseñar tareas de cada uno de los significados parciales.

Para implementar la secuencia didáctica se seguirán las orientaciones metodológicas definidas por el 'Design Based Research' (Bakker & van Eerde, 2015; Cobb et al, 2003) la cual consta de tres etapas:

1. Primera Etapa: Definir la intención teórica del experimento, es decir, se deben especificar las ideas disciplinares significativas y las formas de razonamiento que constituyen los objetivos potenciales para el aprendizaje de los estudiantes. Bakker & van Eerde (2015) denominan esta etapa 'Preparation and Design'.

   Con respecto a este punto, Cobb et al. (2003) señalan: "Por lo general, esto implica recurrir y sintetizar la literatura de investigación previa, para identificar ideas de organización central para un dominio, por ejemplo, la noción de distribución como una idea central para el análisis estadístico"(p.11).

2. Segunda Etapa: Es la implementación y evaluación de la efectividad de la secuencia de instrucción diseñada para apoyar el aprendizaje. Los autores Bakker & van Eerde (2015) llaman a estas etapas 'Teaching Experiment' y 'Retrospective Analysis'.

3. Tercera etapa: consiste en realizar varios ciclos de diseño, implementación, análisis y refinamiento de las tareas propuestas para comprender mejor y apoyar el aprendizaje de los estudiantes.

En el caso de nuestro estudio, sólo utilizaremos la primera y segunda etapa del 'Design Based Research', pues sólo construiremos criterios que rescatan la riqueza matemática de cada significado parcial de la noción de límite de una función en una variable real y evaluaremos la efectividad de la implementación en sólo una instancia.

Para el estudio evaluativo, realizaremos el análisis de la implementación por medio de los Criterios de la Idoneidad Didáctica descritos anteriormente, con especial énfasis en las facetas epistemológica y cognitiva.

2.4.1. Fases y tareas de la Investigación

Para cumplir con el objetivo general y con los objetivos específicos, ya propuestos, se proponen las siguientes fases de investigación:

- **Fase I** Análisis de la evolución histórica de la noción de límite mediante estudios históricos epistemológicos existentes en la literatura.

    1. Revisión de fuentes primarias, secundarias y terciarias para el análisis de las prácticas matemáticas y los significados parciales de la noción de límite de funciones de una variable.

- **Fase II** Diseño de las configuraciones epistémicas de cada uno de los significados parciales identificados en la fase anterior.

    1. Caracterización de las Configuraciones Epistémicas asociadas a cada signficado parcial de la noción de límite.
    2. Síntesis de los Objetos Matemáticos Primarios de cada Configuración Epistémica.

- **Fase III** Diseño de tareas por intención de cada significado parcial del objeto límite de funciones de una variable.

    1. Estudio de tareas propuestas en diversos textos de cálculo así como también en textos históricos para identificar sus posibles conexiones con cada uno de los significados parciales de la noción.
    2. Elaboración de las posibles respuestas de los estudiantes a cada una de las tareas propuestas.
    3. Diseño de cuestionarios para la validación de las tareas por parte de expertos.

4. Validación de las Tareas por parte del equipo investigador y de la docente participante.

- **Fase IV** Validación e implementación de las tareas diseñadas en la fase anterior.

1. Implementación de las tareas diseñadas y primera validación a un grupo de estudiantes de un programa de formación de profesores de matemática.
2. Validación de las Tareas por parte de expertos en didáctica del cálculo.
3. Realización de encuestas de percepción a los participantes de la implementación de las tareas.

- **Fase V** Análisis de la implementación de las tareas y Reflexiones Finales.

1. Análisis de la implementación realizada por medio de los criterios epistémicos y cognitivos propuestos por la Idoneidad Didáctica.
2. Mejorar de las tareas diseñadas según las observaciones obtenidas en el proceso de validación con estudiantes y expertos.

2.4.2. Sujetos de Estudio

Los sujetos de estudio son parte de un curso de Cálculo Diferencial de un programa de formación de profesores de matemática de una universidad chilena, por tanto, la muestra es por conveniencia, ya que estas muestras están conformadas por sujetos disponibles a los cuales tenemos acceso (Hernández, Fernández, Baptista, 2016). La cantidad de sujetos es 11 y se escoge este tipo de estudiantes dada la importancia de que los docentes en formación deben tener sobre conocimientos y habilidades de cada unos de los significados parciales de la noción de límite debido a los nuevos Planes y Programas del Plan Diferenciado de Matemática (MINEDUC, 2021a) y la promulgación de los nuevos “Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media” (MINEDUC, 2021b). Es importante mencionar que 10 de los 11 estudiantes cursan la asignatura por primera vez y por tal razón las propuestas de las tareas que se implementarán ayudarán a desarrollar cada uno de los significados parciales del objeto límite y esperamos que generen un aprendizaje intuitivo de la noción antes de ser enseñada y formalizada por parte de la docente en la primera unidad de la asignatura. La distribución de los participantes según género se muestra en la tabla 2.7:

Tabla 2.7: Distribución de los Participantes

Cantidad de Sujetos	**Femenino**	**Masculino**
11	4	7

2.4.3. Instrumentos de Indagación

Criterios para el Diseño

Utilizaremos los criterios descritos anteriormente por Pochulu, Font y Rodríguez (2013) y las consideraciones de Sullivan, Knott y Yang (2015) para el diseño de las tareas de los significados parciales de la noción de límite, además utilizaremos los objetos matemáticos primarios de las configuraciones epistémicas asociadas a cada significado parcial.

Para la evaluación de los significados parciales desarrollados por los estudiantes, analizaremos las respuestas de las tareas desarrolladas por los estudiantes.

En el Capítulo 4, se muestran mayores detalles sobre los criterios que se consideraron para el diseño de las tareas y que se implementaron en la propuesta didáctica.

Adicionalmente, se realizará una breve encuesta de opinión (con preguntas cerradas y abiertas) a los participantes con el fin de indagar sus apreaciones de la implementación así como también considerar su opinión respecto a las mejoras de ésta.

Criterios para la Implementación y Técnicas de Análisis de Datos

Para la implementación de las tareas, éstas están programadas en ocho sesiones de clases de 70 minutos cada una, cada una de ellas se aplicó de manera sincrónica por medio de clases remotas dada la contigencia sanitaria de la COVID-19. Adicionalmente, la implementación estará sustentada por el ciclo propuesto dado por la línea de investigación 'Design Based Research' (DBR) (Bakker, van Eeerde, 2015). Adicionalmente, se complementará la evaluación de la propuesta didáctica utilizando los Criterios de Idoneidad descritos por Godino (2013), con especial énfasis en las idoneidades epistémicas y cognitiva. En general, en el transcurso del estudio y para cada fase de investigación, iremos utilizando las distintas herramientas de análisis que nos proporciona el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), las que han sido presentadas en los primeros apartados de este capítulo.

Criterios de Validación

Para realizar el análisis de los datos de manera fiable y obtener conclusiones válidas, debemos preocuparnos de la validez y replicabilidad de la información obtenida por los instrumentos diseñados. Bakker y van Eerde (2015) señalan que en la investigación cualitativa, los significados de validez y replicabilidad son ligeramente diferentes que en la investigación cuantitativa, y que existen distintos tipos de validez y fiabilidad. En este estudio nos enfocaremos a aquellos tipos que se ajustan los objetivos de nuestro trabajo y que se utilizan usualmente en el DBR.

Validación Interna

La validación interna se refiere a la calidad de los datos y a la solidez de los razonamientos que han llevado a las conclusiones. En la investigación cualitativa, esta solidez también se llama *credibilidad* (Guba, 1981). Una técnica de validación interna que utilizaremos es la de utilización de triangulación de datos, por medio de diferentes fuentes de información, por ejemplo, análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas propuestas, análisis de ciertos episodios de las clases y respuestas a las encuestas de opinión de los participantes (Bakker y van Eerde, 2015).

Respecto a la validación de los instrumentos, se realizará una validación cruzada por parte de la investigadora (autora del presente trabajo) y por el profesor guía. Una vez realizada dicha validación se mejorará el instrumento y se implementará al grupo de sujetos descritos en el apartado anterior.

Validación Externa

La validación externa de las tareas diseñadas será realizada en dos etapas, la primera de ellas será la revisión de una docente que implementará las tareas en el grupo de sujetos descritos anteriormente. Dicha docente posee un Doctorado en Matemática y tiene el título de Profesor de Matemática y Computación, además tiene 12 años de experiencia en docencia universitaria. Las observaciones de la experta aportaron en la mejora de redacción de las tareas, de los applets diseñados y las figuras. Los detalles de las observaciones y las mejoras propuestas se encuentran en el Anexo I.

Por otra parte, la implementación de las tareas en el grupo de sujetos será también parte del proceso de validación de los instrumentos, así como también la Encuesta de Opinión que responderán los participantes. Una vez concluido este proceso, se realizará otra validación por parte de expertos externos que dominan tanto el marco teórico, el objeto matemático y poseen una vasta experiencia en el desarrollo de investigaciones en el área de la didáctica del cálculo. El detalle de todo el proceso de validación junto con las observaciones de mejoras de las tareas se describe en los capítulos 6 y 7.

Fiabilidad Interna

La fiabilidad interna se refiere al grado de independencia del investigador, esto ocurre cuando otro investigador con el mismo marco teórico que observa el mismo fenómeno puede realizar las mismas interpretaciones y conclusiones. Para contribuir a la replicabilidad interna, un aspecto importante es que se tengan distintos tipos de instrumentos que permitan obtener información de manera objetiva, como por ejemplo, registros de audio, registros audiovisuales, respuestas escritas por los estudiantes, etc. Otra técnica para asegurar la fiabilidad interna, es discutir los razonamientos y afirmaciones obtenidas con pares. (Bakker y van Eerde, 2015). En la presente propuesta de investigación revisaremos las respuestas (escritas) de las tareas diseñadas, revisaremos episodios de las implementaciones y realizaremos una encuesta de opinión entrevistas a los participantes. Toda esta información será revisada, analizada y discutida por la investigadora (autora de la tesis doctoral) y el profesor guía de este trabajo.

Fiabilidad Externa

La fiabilidad externa generalmente se llama replicabilidad, que hace referencia a que las conclusiones del estudio sólo deben depender de los sujetos y de las condiciones, pero no del investigador. En la investigación cualitativa, la replicabilidad se interpreta principalmente como *replicabilidad virtual*, en este sentido, la investigación debe estar documentada de tal manera que quede claro y explícito cómo se ha diseñado, cómo se ha implementado y cómo se han extraído las conclusiones y razonamiento de los datos (Bakker y van Eerde, 2015). Es decir, el lector debe ser capaz de *trazar* o *rastrear* el proceso de aprendizaje de los investigadores y si tuviese que reconstruir el estudio, el lector debe ser capaz de entender con claridad y transparencia la descripción de los fracasos y éxitos, los procedimientos aplicados, el marco teórico utilizado, las razones de ciertas decisiones, etc. (Bakker y van Eerde, 2015).

2.4.4. Reflexiones Finales

En este capítulo hemos presentado el marco y los elementos teóricos que han sido considerados para el desarrollo de nuestro trabajo. Estos elementos teóricos y metodológicos, han ayudado a formular y concretar las preguntas y los objetivos que conforman el Problema de Investigación. Además, la puesta en marcha y operativización de los elementos teóricos y metodológicos, aquí presentados, contribuirán al desarrollo de cada uno de los objetivos con el fin de dar respuestas a cada una de nuestras preguntas de investigación. Algunos aspectos relevantes sobre la metodología, como la validez y la fiabilidad del trabajo serán desarrollados de manera más detallada en los capítulos 5 y 6.

Para sintetizar cómo el Marco Teórico y la Metodología sustentará y orientará el presente trabajo, se presenta el siguiente mapa conceptual que describe de manera resumida como dichas herramientas ayudarán al desarrollo del estudio.

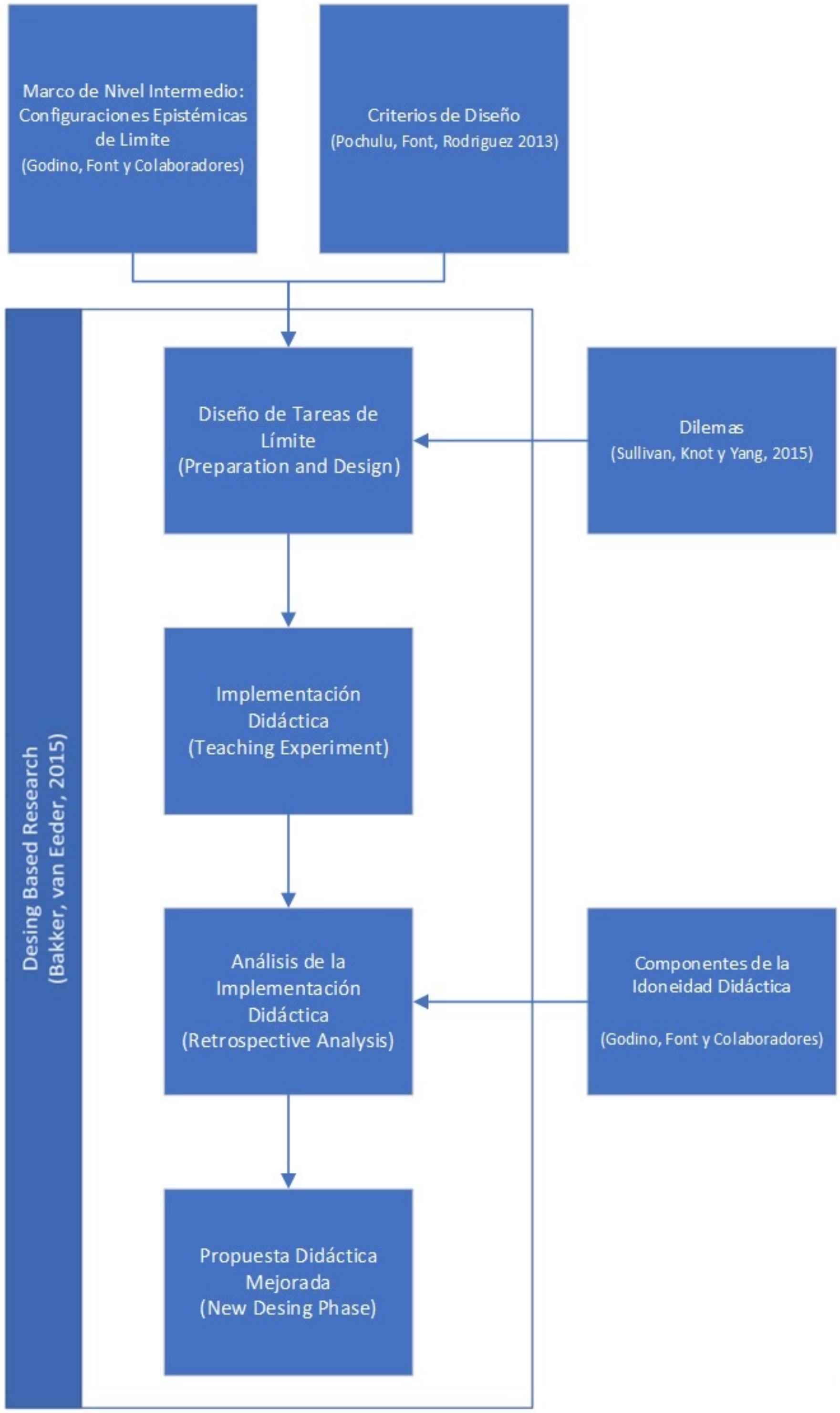


Figura 2.6: Mapa Conceptual del Marco Teórico y Metodológico (Creación propia)

CAPÍTULO 3

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DEL OBJETO LÍMITE

3.1. Introducción

Para estudiar los significados parciales de la noción de límite se realizó una indagación histórico documental que contempló la lectura y análisis de información de distintos tipos de fuentes bibliográficas (primarias, secundarias y terciarias). Las fuentes primarias (Cauchy, 1833; D'Alembert, 1766; Euclides, 2007; Newton, 1736, Newton, 2011) entregan información de la noción de límite en el contexto real donde se originó y como éste fue evolucionando con el transcurso del tiempo. Las fuentes secundarias (Brunschvicg, 1945; Boyer, 2016; Collette, 1985) y terciarias (Cantoral y Farfán, 2004; Medrano y Pino-Fan 2016; Dedekind, 2014), permiten comparar las interpretaciones realizadas con los resultados de las indagaciones expuestas por investigadores recientes. A partir del estudio documental se identificaron seis sistemas de prácticas las cuales dan paso a seis significados (parciales) del objeto límite de una función en una variable. Además, como señalamos en la sección anterior, se utiliza la noción de configuración ontosemiótica epistémica del EOS, la cual permite identificar y caracterizar los objetos matemáticos primarios que se movilizan en cada uno de los significados parciales (Pino-Fan, 2017), pues el estudio de dichas configuraciones epistémicas permitirá plantear criterios para el diseño de tareas de cada significado parcial del objeto límite de una función en una variable.

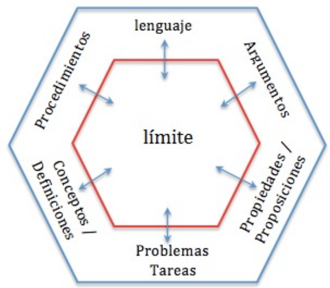


Figura 3.1: Elementos Primarios de la Configuración Epistémica de la noción de límite (adaptado de Pino-Fan, 2017)

3.2. CE N°1: Límite como aproximación en la Matemática Griega

Grecia es considerada el lugar de nacimiento de la matemática deductiva, entre los varios pensadores destacados que aportan al desarrollo de la Matemática, están la contribución de Pitágoras y su escuela, los trabajos de Eudoxo y Arquímedes, y la exhaustiva y extraordinaria labor de recopilación y formalización, en base al método axiomático deductivo, del conocimiento matemático existente hasta su época desarrollada por Euclides. Esta configuración está fundamentalmente asociada al problema de medición de magnitudes inconmensurables y al cálculo tanto de áreas de superficies, como la medición de volúmenes donde ellas intervienen. Otra problemática que también va a incidir en la propuesta de solución del problema anterior es la noción de infinito. Los objetos matemáticos primarios que emergen en esta configuración se presentan a continuación.

3.2.1. Elementos Lingüísticos

Podemos distinguir tres tipos de elementos lingüísticos, verbal, gráfico y simbólico. El de tipo verbal es un lenguaje fuertemente influenciado por la intuición geométrica en el cual se destacan los términos medición de magnitudes, razón geométrica, continuo geométrico e infinito potencial. El gráfico está representado por figuras geométricas y representaciones de procedimientos de aproximación, y el simbólico que se expresa por el uso de las letras del alfabeto griego para designar figuras geométricas (rectángulos, paralelogramos etc.).

3.2.2. Conceptos y/o Definiciones

En esta configuración se destacan dos categorías de conceptos, el primero está relacionado con las magnitudes y proporciones; y el segundo está relacionado con la noción de infinito. Pitágoras, estableció una correspondencia armoniosa entre elementos geométricos y números, dicha correspondencia concierne a la noción de "magnitud". De esta correspondencia se desprende el concepto de "proporción" entre magnitudes geométricas y números enteros (Brunschvicg, 1945). Las nociones de "magnitud" y "proporción" establecidas por Pitágoras, fueron mermadas por el problema de las magnitudes inconmensurables. La solución a este problema fue propuesta por el matemático griego Eudoxo, quien estableció el concepto de "proporción" que aparece descrita y reelaborada posteriormente por Euclides en el Libro V de los Elementos:

> Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente. (Euclides, 2007, p. 184-185)

Una interpretación moderna que da Collete (1985) a la definición anterior es la siguiente: "Así $\frac{x}{z} = \frac{m}{n}$ si, dados a y b enteros, siempre que $ax < bz$, $am < bn$, o si $ax = bz$, $am = bn$, o si $ax > bz$, $am > bm$. Esta definición tiene la ventaja de ser aplicable, no sólo a números sino también a elementos geométricos, ya que la razón entre esferas puede ser igual a la razón entre cubos" (p.97)

La contribución principal de Eudoxo, es que la noción de proporción es aplicable a magnitudes conmensurables e inconmensurables, por tanto, generaliza la noción de proporción establecida por Pitágoras. Además, esta noción es aplicable a la comparación de figuras geométricas tal como lo señala Collette (1985): "Esta definición tiene la ventaja de ser aplicable, no sólo a números sino también a elementos geométricos, ya que la razón entre esferas puede ser igual a la razón entre cubos" (p.97). En este sentido, Valdivé & Gardín (2008) señalan que Eudoxo definió la razón geométrica gracias al desarrollo de su Teoría de la Proporcionalidad que era aplicable a magnitudes conmesurables e inconmensurables. Cabe destacar, que para los matemáticos griegos de aquella época concebir una magnitud inconmensurable era completamente caótico y problemático, tal como señala Collete (1985):

> El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables debió causar un escándalo entre los griegos puesto que anulaba todos los esfuerzos anteriores por enunciar una teoría de las proporciones compatibles con las magnitudes generales. Dos cantidades, por ejemplo la diagonal y el lado de un cuadrado, son inconmensurables si no existe una razón, entre números enteros, que tenga en ellas una medida común. ¿Cómo comparar entonces las razones de cantidades inconmesurables? La respuesta la dará Eudoxo... (p.97)

Finalmente, en la segunda categoría se encuentra la concepción de infinito que Aristóteles propuso: "un conjunto de objetos es ilimitado si al tratar de identificar cada uno de sus elementos no se logra formar un todo con ellos, pues siempre habrá algún elemento no considerado (infinito potencial)" (Zellini, 2004, p.12). Aunque para Aristóteles no era ajeno al concepto de infinito actual, para él debía ser considerado el infinito como potencial, concepción que predominó por siglos en la matemática, hasta su reemplazo (no unánime), en el siglo XIX con Cantor y su aritmética de los números infinitos, por el concepto de infinito actual.

3.2.3. Situaciones y/o Problemas

En los tiempos de la Grecia antigua, los *problemas y/o tareas* que estudiaban los matemáticos griegos eran del tipo geométrico, los más clásicos fueron estudiados por Eudoxo y Arquímedes, los cuales tenían como objetivo establecer *procedimientos* para aproximar el área de un círculo y determinar el volumen de ciertos cuerpos geométricos tales como pirámides, prismas, conos, cilindros, poliedros regulares, esferas, entre otros. Debido a la problemática de realizar proporciones entre magnitudes inconmensurable y conmensurable, los problemas que emergen en esta configuración son: establecer relaciones entre magnitudes inconmensurables y magnitudes geométricas en general, tanto conmensurables como inconmensurables; y establecer relaciones numéricas aproximadas entre magnitudes geométricas en general incluyendo magnitudes inconmensurables.

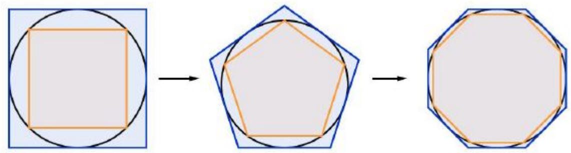


Figura 3.2: Aproximación del área del círculo (creación propia)

3.2.4. Propiedades y/o Proposiciones

El método que permitirá dar respuesta a las situaciones/problema enunciadas, fue el método de exhaución. Los cimientos del método de exhaución están en el principio de Arquímedes o principio arquimideano, el cual fue interpretado por Euclides (2007) de la siguiente forma: "Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud dada" (p.88). Una interpretación moderna de la *proposición* anterior es dada por Collete (1985) como " $\lim_{n\to\infty} G(1-r)^n = 0$, donde G es la magnitud inicial, r es la razón tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$ y n es el número de subdivisiones efectuadas" (p.98)

Por otra parte, una de las *proposiciones y/o propiedades* que Eudoxo logró deducir a partir de lo anterior, fue que el área del círculo y el polígono inscrito es menor que cualquier otra magnitud fijada previamente. En lenguaje algebraico moderno, lo anterior se puede representar como $A(C) - A(P) < \varepsilon$, donde $A(C)$ representa el área de la circunferencia y $A(P)$ el área del polígono. (Valdivé y Gardín, 2008).

3.2.5. Procedimientos

El elemento operativo por excelencia, para tratar las situaciones problemáticas anteriormente mencionadas es el método de exhaución, que es un algoritmo de iteración finita. Las relaciones que se busca determinar pertenecen a la teoría de proporciones de Eudoxo, en la cual la definición de magnitudes proporcionales hace intervenir conjuntos numéricos de cardinalidad infinita. Como complemento necesario para trabajar con este tipo de conjunto, aparece la metodología lógica de la doble reducción al absurdo, que evita trabajar directamente con conjuntos infinitos, mediante la negación de la proposición a probar, lo cual conduce a operar con un número finito de elementos. Un ejemplo de estos *procedimientos* consistía en aproximar una figura como la circunferencia por medio de polígonos regulares

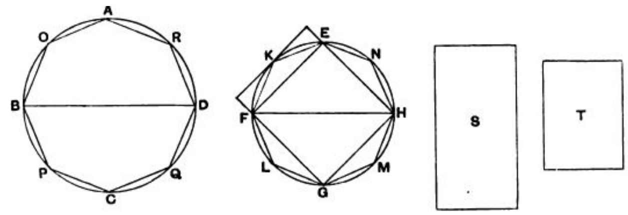


Figura 3.3: Imagen de la demostración de la proposición 2 (Heath (1908), p.371)

de tal forma que cada uno de éstos puedan ser circunscrito e inscrito a ella, el objetivo en este caso era obtener buenas aproximaciones del área del círculo

3.2.6. Argumentos

Los resultados proposicionales, que se presentan descansan en una estructura lógica que inicia una etapa transcendental tanto en matemáticas como, en general, en la presentación y validación del conocimiento: es el inicio de la formalización axiomática deductiva de conocimiento, y los "Elementos" de Euclides pasan a ser el modelo paradigmático de esta forma de presentar y justificar resultados, lo cual recibirá a futuro el nombre "teoría euclidiana". En ella se consideran unos objetos primitivos, que no se definen; unas proposiciones que se consideran evidentes y se aceptan sin demostración (los axiomas); con estos elementos se definen nuevos objetos y se demuestran propiedades y relaciones entre ellos. Como procedimientos y principios tanto operativos como de justificación de resultados están: el método de la doble reducción al absurdo, el cual se basa en el principio lógico del tercero excluido; y la ley de tricotomía (para todo par de razones de números enteros positivos se tiene que $\frac{m}{n} < \frac{r}{s}$ ó $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$ ó $\frac{m}{n} > \frac{r}{s}$.)

En el libro los *Elementos* de Euclides en el capítulo XII aparecen una serie de teoremas y propiedades donde se utiliza el método de exhaución para demostrar la validez de éstas. Cabe destacar, que a pesar de que las demostraciones aparecen en el libro de Euclides, se cree que la autoría de estas demostraciones son de Eudoxo. Tal como lo senãla Boyer (2016) " La demostración, tal como la da Euclides en los Elementos, Libro XII, prop.2, es probablemente la misma de Eudoxo" (p.130)

Debido al establecimiento de las razones geométricas y aritméticas para concebir la idea intuitiva de límite, es que se establece la configuración epistémica CE N°1 denominada *Límite* *como aproximación en la Matemática Griega.* Para finalizar esta sección, a continuación se muestra un cuadro que sintetiza la configuración epistémica recientemente descrita.

Tabla 3.1: CE N°1: Límite como aproximación en la Matemática Griega

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°1 Límite como aproximación en la Matemática Griega**
Elementos Lingüísticos	Verbales: Expresiones verbales relacionadas con las magnitudes geométricas. Geométricos: figuras propias de la geometría sintética. Simbólicos: Uso de letras del alfabeto griego para representar figuras geométricas.
Conceptos y/o definiciones	- Magnitud conmensurable e inconmensurable. - Infinito potencial. - Proporciones entre magnitudes.
Situaciones y/o Problemas	Determinar relaciones entre magnitudes inconmensurables y magnitudes geométricas en general.
Procedimientos	- Método de exhaución - Doble reducción al absurdo.
Propiedades / Proposiciones	- Axioma de Arquímedes - Proposición I del libro X de los Elementos (fundamentación del método de exhaución).
Argumentos	- Propios del método axiomático-deductivo de la geometría sintética.

3.3. CE N°2: Límite en la concepción de los Indivisibles

En el siglo XVI y XVII, la investigación y desarrollo de las matemáticas estuvo fuertemente marcada tanto por los requerimientos de otras disciplinas (Física, Astronomía) como por la necesidad de resolver problemas concretos de la vida cotidiana. Esta necesidad de uso del conocimiento matemático conlleva también la búsqueda de métodos más operativos y directos que los expuestos en los "Elementos" de Euclides; en particular, se busca evitar el uso del método de exhaución, por su complejidad lógica. Así, se reconsideran y modifican los antiguos métodos infinitesimales iniciándose el camino que conducirá al cálculo infinitesimal. Los objetos matemáticos primarios que emergen en esta configuración son:

3.3.1. Elementos Lingüísticos

Los elementos lingüísticos del tipo verbal se expresan en un lenguaje marcadamente descriptivo debido al uso de métodos directos con una fundamentación intuitiva geométrica, sin un respaldo analítico ni lógico suficiente. Por ejemplo, se expresan las magnitudes u objetos geométricos de la forma: "infinitamente pequeños" e "infinitud de elementos infinitamente pequeños". Con respecto al elemento lingüístico gráfico, al igual que en la configuración anterior, se mantienen las figuras geométricas propias de la Geometría Euclidiana, estas gráficas representan ciertos movimientos (problemas de Kepler), representaciones de problemas físicos en figuras geométricas (problemas de Stevin y Oresme) y representaciones de procedimientos geométricos para el cálculo de áreas y/o volúmenes (problemas de Cavalieri). Con respecto a lo simbólico, se evidencia una carencia de una simbología adecuada, lo que dificulta tanto la exposición de la teoría como la comprensión de ella.

3.3.2. Conceptos y/o Definiciones

Se destaca el concepto de indivisible, considerado como las partes elementales de objetos geométricos "infinitamente pequeños", como señala Cavalieri. Se conciben las magnitudes geométricas (longitudes, superficies y volúmenes) como generadas por magnitudes de orden inferior que se adicionan en forma ilimitada.

3.3.3. Situaciones y/problemas

El campo de problemas que se aborda es esencialmente el mismo que enfrentaron los geómetras griegos: a) problemas de cuadratura; b) problemas de cubatura. Pero además, se agregan situaciones provenientes de la aplicación de las matemáticas tanto a otras disciplinas como a la vida cotidiana. Por ejemplo, Kepler aproximadamente en el siglo XVI estudiaba problemas del tipo astronómico, uno de ellos consistía en demostrar que el radio del vector que va del Sol a un planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales (ver Figura 3.4)

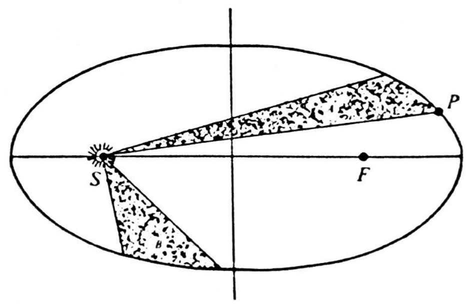


Figura 3.4: Prototipo del problema de Kepler (Collette 1985, p. 310)

Respecto a este problema Boyer (2016) da la siguiente interpretación:

> "En los problemas relativos a áreas, [...], suponía Kepler que el área en cuestión estaba formada por triángulos infinitamente pequeños con un vértice en el Sol y los otros dos vértices en puntos infinitamente próximos sobre la órbita del planeta. De esta manera pudo aplicar Kepler un tipo de cálculo integral rudimentario" (p. 409-410)

Referente a los problemas de cuadratura y cubatura, Cavalieri en el libro *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635), postulaba que el área de una figura geométrica plana puede ser formada por segmentos rectilíneos (o *indivisibles*), y que el volumen de un cuerpo geométrico puede ser obtenido por el área de sus secciones transversales (o *indivisibles*).

3.3.4. Proposiciones y/o propiedades

Se considera que cada magnitud geométrica es generada por una infinidad de elementos correspondientes a una magnitud de orden inmediatamente inferior, los cuales se adicionan en forma ilimitada para producir la magnitud dada. Por ejemplo, una recta es generada por infinitos puntos, una superficie por la adición de un número ilimitado de líneas paralelas a la base de la figura plana, un volumen por la adición de un número ilimitado de planos paralelos a las bases del volumen. Estos procedimientos dan origen a una proposición famosa que se conoce como Principio de Cavalieri:

> “Si dos cuerpos sólidos tienen la misma altura y si las secciones que determinan planos paralelos a las bases y a distancias iguales de ellas están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los dos sólidos están también en esa misma razón”. (Boyer, 2016, p.417)

Por otra parte, Stevin en su libro *Mecánica*, estudia un procedimiento para determinar el centro de gravedad de ciertas figuras geométricas, el método que utilizó es distinto al realizado por Arquímedes, pues Stevin estableció que un *indivisible* puede ser representado como una cantidad infimamente pequeña hasta llegar a ser nula, tal como señala Cantoral y Farfán (2004): “A diferencia de los griegos de la antigüedad clásica, Stevin consideró que si la diferencia entre dos cantidades puede ser menor que cualquier magnitud prefijada, entonces las cantidades son iguales” (p.60). Una de las *proposiciones* famosas que realizó Stevin, fue demostrar que el centro de gravedad de cualquier triángulo está en el segmento de recta que une el vértice con el punto medio del lado opuesto (ver Figura 3.5)

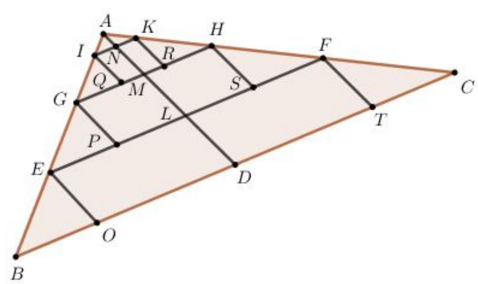


Figura 3.5: Transversal de Gravedad del $\triangle ABC$ (creación propia).

Por otra parte, el matemático Oresme estudió *problemas* relacionados a fenómenos físicos, tales como la velocidad, la variación de la temperatura, la variación de la intensidad luminosa, entre otros. Según Collette (1985), Oresme representó de manera geométrica dichas variaciones, un ejemplo en particular es la gráfica que estableció para el movimiento de una partícula con respecto al tiempo. El autor señala

> *Todo objeto mensurable*, escribió Oresme, *puede imaginarse como una cantidad continua*. Consecuentemente, trazó el diagrama de la velocidad en función del tiempo para un móvil animado por una aceleración uniforme. El gráfico obtenido tiene dos dimensiones: la longitud en sentido horizontal y la latitud en sentido vertical. (Collette, 1985, p. 245)

Oresme representó la intensidad de la velocidad por segmentos verticales, cada segmento vertical intersecta el eje horizontal en un punto, cada uno de estos puntos representa el tiempo registrado. Si la partícula parte de un estado de reposo (velocidad inicial cero) y posee un movimiento uniformemente acelerado, el movimiento de la partícula es representado por un segmento oblicuo en el eje de las longitudes y la altura máxima del segmento, representará la velocidad final de la partícula (ver Figura 3.6)

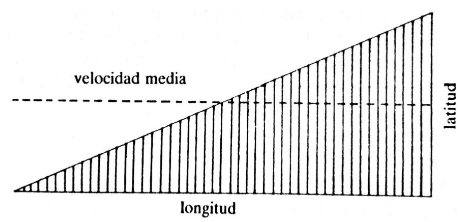


Figura 3.6: Gráfica de la partícula en movimiento de Oresme (Collette (1985), p. 245)

Los *conceptos y/o definiciones* que estableció Oresme, fue de representar los segmentos verticales como la velocidad de una partícula, por tanto al igual que Stevin, Oresme relaciona una figura geométrica(segmento) como un indivisible . Tal como afirma Collette (1985) "[...] la suma total de los segmentos verticales(velocidad) representará, según Oresme, la distancia total recorrida. Así el aŕea del triángulo de la figura está asociada a la distancia recorrida." (p.245)

3.3.5. Procedimientos

Como se mencionó en las *proposiciones/propiedades*, el *procedimiento* de los indivisibles considera que cada magnitud geométrica está formada por un número indeterminado de elementos (indivisibles) correspondientes a una magnitud geométrica estrictamente inferior. Pero estos elementos están limitados por la magnitud de orden superior, por lo cual las relaciones que se conocen o se pueden establecer entre estas magnitudes de orden superior, permiten operar indirectamente con los conjuntos de indivisibles contenidos en ellas, sin tener en consideración la cantidad de estos indivisibles. Por ejemplo, los procedimientos que utilizaba Cavalieri era una correspondencia biunívoca entre los indivisibles de dos objetos geométricos, los cuales eran comparados para verificar si poseían igual área o volumen, según sea el caso. En este sentido Boyer (2016) describe una interpretación moderna de los *procedimientos* y *argumentos* que utilizaba Cavalieri (ver Figura 3.7):

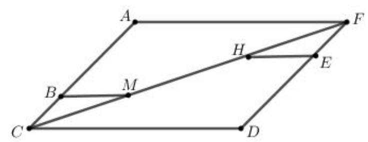


Figura 3.7: Indivisibles BM y HE del paralelogramo ACDF (creación propia)

> Sea $AFCD$ el paralelogramo dividido en dos triángulos por la diagonal CF y sea HE un indivisible del triángulo CDF que es paralelo a la base CD. Entonces, tomando $BC = EF$ y trazando BM paralela a CD, es fácil ver que el indivible BM en el triángulo ACF será igual al HE en el CDF. Por lo tanto, podemos poner en correspondencia biunívoca los indivisibles del triángulo CDF con indivisibles iguales dos a dos del triángulo ACF, y en consencuencia los dos triángulos son iguales.(p. 417-418)

Por otra parte, Stein para abordar las *situaciones y/o problemas* empleó *procedimientos* y *argumentos* que eran del tipo geométrico, una de las interpretaciones modernas que se tienen de su demostración se describe a continuación (ver Figura 3.8):

Considere el $\triangle ABC$, se traza desde el ángulo A un segmento al punto medio del lado opuesto, sea D ese punto. Se trazan EF, GH, IK paralelas a BC, las cuales intersectan a AD en L, M y N respectivamente; después se trazan EO, GP, IQ, KR, HS y FT paralelas a AD. Como $EF//BC$ y $EO//FT//LD$ se tiene que el polígono $EFTO$ es un paralelogramo, luego, $EL = LF$ y $OD = DT$. Por tanto, el centro de gravedad del cuadrilátero $EFTO$ está en el segmento DL. De forma análoga, se obtiene que el centro de gravedad de los paralelogramos $GHSP$ se encuentra en LM, y el de $IKRQ$ en MN. Así, el centro de gravedad de la figura $IKRHSFTOEPGQ$, estará en el segmento ND. Como existen tres cuadriláteros inscritos en el triángulo, se pueden inscribir un número infinito de tales cuadriláteros en él, por tanto el centro de gravedad de la figura inscrita siempre estará en el segmento AD. Pero, a mayor número de cuadriláteros la diferencia entre el área del $\triangle ABC$ y los cuadriláteros inscritos será cada vez menor. Si se traza los segmentos paralelos a BC a través de los puntos medios de AN, NM, ML, LD, la diferencia de la última figura será exactamente la mitad de la diferencia de la figura anterior. Por tanto, podemos, mediante un proceso infinito de aproximaciones, poner en el triángulo una figura tal que la diferencia entre este último y el triángulo sea menor que cualquier figura plana. Así, se sigue que AD es la línea del centro de gravedad. (Cantoral y Farfán, 2004)

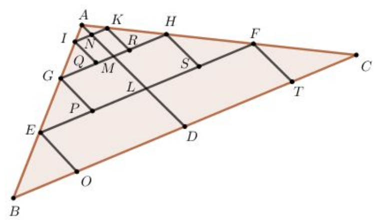


Figura 3.8: Transversal de Gravedad del $\triangle ABC$ (creación propia)

Por otra parte, los *argumentos* de Kepler están basados en aspectos geométricos basados en los *conceptos y/o definiciones* de indivisible como elementos geométricos infinitamente pequeños. Una interpretación moderna a los *procedimientos* que utilizada Kepler, lo describe Boyer (2016):

> [...] el área del círculo puede calcularse de esta manera teniendo en cuenta que las alturas de los triángulos infinitamente estrechos son *casi iguales* al radio del círculo. Si llamamos a las bases infinitamente pequeñas situadas sobre la circunferencia del círculo $b_1, b_2, ..., b_m, ...$, entonces el área del círculo, es decir, la suma de las áreas de los triángulos, será igual a $\frac{1}{2}b_1r + \frac{1}{2}b_2r + ... + \frac{1}{2}b_mr + ...$, o bien $\frac{1}{2}r(b_1 + b_2 + ... + b_m + ...)$. Y como la suma de las b es la circunferencia C, el área A vendrá dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}rC$, el antiguo y bien conocido teorema que había demostrado Arquímedes de una manera mucho más cuidadosa (p. 410-411).

3.3.6. Argumentos

Tal como lo señalamos en las propiedades, los argumentos eran del tipo geométrico donde se postulaba que las superficies y sólidos están compuestos por elementos generadores obtenidos por el corte de superficies (o sólidos), por líneas (o por planos) paralelos a las bases, lo cual permite determinar la relación entre magnitudes desconocidas comparándolas con magnitudes conocidas.

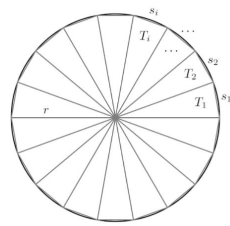


Figura 3.9: Procedimiento de Kepler para el cálculo del área del círculo (creación propia).

En general, podemos afirmar que las concepciones propuestas por Stevin, Cavalieri, Kepler y Oresme son similares, en el sentido de que conciben el límite por medio de elementos geométricos que conforman parte de un *todo*. Por tal razón, las concepciones anteriormente expuestas conforman una sola configuración epistémica, la cual llamaremos *límite en la concepción de los indivisibles.*

Para finalizar esta sección, a continuación se muestra la tabla 3.2 que sintetiza la configuración epistémica recientemente descrita.

Tabla 3.2: CE N°2: Límite en la concepción de los Indivibles

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°2 Límite en la concepción de los Indivisibles**
Elementos Lingüísticos	Verbales: Expresiones verbales como "infinitamente pequeño" e "infinitud de elementos infinitamente pequeños". Geométricos: figuras propias de la geometría sintética, pero con otro significado en cuanto a su generación. Simbólicos: carencia de simbología adecuada.
Conceptos y/o definiciones	- Indivisibles. - Infinito actual - Magnitudes conmensurables e inconmensurables.
Situaciones y/o Problemas	- Problemas de cuadratura y cubatura. - Problemas de otras disciplinas como física y astronomía, también problemas del diario vivir.
Procedimientos	- Utilización de los indivibles mediante las propiedades de la geometría euclideana.
Propiedades / Proposiciones	- Cada magnitud geométrica es generada por la adición de una infinidad de elementos pertenecientes a una magnitud inmediatamente inferior.
Argumentos	- Las superficies y sólidos están compuestos por elementos generadores "indivisibles", lo cual permite determinar la relación entre magnitudes desconocidas comparándolas con magnitudes conocidas.

3.4. CE N°3: La Noción Intuitiva de Límite de Newton

El surgimiento de una disciplina matemática nueva como la “Geometría Analítica” aporta en la nueva propuesta de Newton, ésta consiste en resolver problemas del área de la física, negando el concepto de los indivisibles y proponiendo un nuevo significado del límite de carácter dinámico, pues representa nociones de movimiento de partículas. Debido a las características físicas particulares de esta noción, es que la propuesta de Newton refiere a nueva configuración epistémica en la que se ponen en juego los siguientes elementos.

3.4.1. Elementos Lingüísticos

Los elementos lingüísticos de carácter verbal se caracterizan por introducir un vocabulario de carácter técnico para describir los elementos teóricos fundamentales, cuyas definiciones se dan con base en relaciones con otros elementos y conceptos matemáticos. Es así como se introducen los términos: “cantidades fluentes”, “fluxiones”, “momentos de las cantidades fluentes”, “cantidades evanescentes”, “cantidades nacientes”, “sumas y razones últimas de cantidades evanescentes”, “suma y razones primeras de cantidades nacientes”. Este vocabulario técnico está fuertemente inspirado en nociones provenientes de la Física, así se hace alusión a nociones como: velocidad, flujo, velocidad de un flujo, momentos de una magnitud. Con respecto a los elementos lingüísticos del tipo gráfico, se evidencia que las figuras geométricas representan los razonamientos o procedimientos usados, estas figuras geométricas se representan utilizando herramientas de la Geometría Analítica. Referente a los elementos lingüísticos del tipo simbólico, se expresan mediante un fuerte uso del lenguaje algebraico, se distinguen en este contexto las primeras letras del alfabeto: a, b, c, etc., para designar cantidades constantes; las últimas letras del alfabeto: v, x, y, z se utilizan para las cantidades fluentes (cantidades variables); se introduce también una notación especial para designar las fluxiones de una cantidad fluente: $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}, \dot{z}$. Además, se representan los momentos de una cantidad fluente cualquiera por $x, y, z \ldots$; y los incrementos y decrecimientos de las cantidades fluentes como $\dot{x} = xo, \dot{y} = yo$, $\dot{z} = zo$; donde “o” representa un incremento o un decrecimiento “infinitamente pequeño” (Pino-Fan, 2014). Los desarrollos matemáticos se realizan utilizando un fuerte lenguaje algebraico que va adquiriendo un alto nivel de abstracción.

3.4.2. Conceptos y/o Definiciones

Con base en la concepción de “cantidades indefinidamente pequeñas”, Newton introduce dos conceptos esenciales llamados “fluentes” y “fluxiones”, las cuales define como:

> Llamaré cantidades fluentes, o simplemente fluentes, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto v, x, y, z, para distinguirlas de las otras cantidades que, en las ecuaciones, se consideran como conocidas y determinadas, y que se representan por las primeras letras a, b, c, etc. Representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones. (Newton, 1736, p.20)

Otro concepto esencial en el desarrollo del método, es el de momento de las fluentes: “Los momentos de las cantidades fluentes (esto es, sus partes indefinidamente pequeñas mediante las cuales ellas son continuamente aumentadas, en intervalos indefinidamente pequeños de tiempo) son las velocidades de sus flujos o incrementos” (Newton, 1736, p.24).

Debido a las críticas que los matemáticos de esa época hicieron al método de las fluxiones, Newton responde reemplazando el concepto de fluxión por las denominadas razones primeras; razones últimas de cantidades nacientes; y cantidades evanescentes:

> [...] por velocidad última se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes la razón de cantidades, no antes que se desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen. De igual modo ocurre con la razón primera de cantidades nacientes, que es aquella con la que nacen. . . Existe un límite que puede alcanzar la velocidad al final del movimiento, pero no puede traspasarlo. Esta es la velocidad última. Y semejante es la razón del límite de todas las cantidades y proporciones nacientes y evanescentes...(Newton, 1726/2011, p.170)

Cabe destacar, que estas definiciones son de naturaleza descriptiva y están fundadas en una analogía con el concepto físico de velocidad, velocidad última (el concepto actual de velocidad instantánea). Newton consciente de la controversia que pueden originar las definiciones anteriormente descritas, él señala:

> También pudiera objetarse que, si se dan razones últimas de cantidades evanescentes, también se darán magnitudes últimas; y así toda cantidad constará de indivisibles [...] Pero esta objeción se apoya en una hipótesis falsa. Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tienden a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan in infinitum. (Newton, 1726/2011, p. 169-171)

3.4.3. Situaciones y/o Problemas

Newton se propone resolver dos situaciones problemáticas de origen netamente físico, los cuales se detallan a continuación:

> i) Si la longitud del espacio de referencia es continuamente (esto es, en todo tiempo) dado, encontrar la velocidad del movimiento en cualquier tiempo propuesto. ii) Si la velocidad del movimiento es continuamente dada: encontrar la longitud del espacio de referencia en cualquier tiempo propuesto. (Newton, 1736, p.19)

Para resolver la primera situación, se introducen en una primera etapa los conceptos de *fluentes* y *fluxiones*, con lo cual, la interpretación moderna del primer problema es: dada una ecuación que expresa la relación entre cantidades fluentes, determinar la ecuación que expresa la relación entre sus fluxiones. En estos términos el segundo problema se puede interpretar como el problema inverso del anterior: conocida una ecuación que expresa la relación entre fluxiones de cantidades fluentes determinar la ecuación que expresa la relación de las cantidades fluentes.

3.4.4. Procedimientos

Los procedimientos eran de tipo geométrico analítico, basados en la geometría cartesiana de Descartes. Sin embargo, en su obra Philosophiae Naturalis Principia Mathematica se aleja de la teoría propuesta por Descartes y trabaja con procedimientos algebraicos utilizando ecuaciones y definiendo variables sin acudir al sistema cartesiano. Para entender los procedimientos algebraicos del cálculo de fluxiones, mostraremos una interpretación moderna realizada por Collete (1985):

Ejemplo 3.1. *Dada la curva de ecuación* $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, *calcular las fluxiones.*

Newton propone resolver el problema planteado utilizando el siguiente método algebraico, primero reemplaza las variables x e y por $x + \dot{x}o$ e $\dot{y} + yo$ respectivamente, obteniendo

$$\begin{aligned} (x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) &\quad - \quad (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2) \\ +(axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2) &\quad - \quad (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0. \end{aligned}$$

Después elimina la ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, ya que es igual a cero. Seguido de este paso, divide la ecuación resultante por o y en la ecuación obtenida elimina todas las expresiones en que aparece algún factor de o. Así finalmente obtiene

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

En resumen, los *conceptos/definiciones* principales que introduce en este *procedimiento* son los siguientes: a) o representa un intervalo de tiempo infinitamente pequeño; b) $o\dot{x}$ representa el *momento de* x que se define como un incremento infinitesimal de x de forma análoga se define *momento de* y como $o\dot{y}$; c) las *cantidades fluentes* son las cantidades que aumentan gradualmente e indefinadamente, para distinquir dichas cantidades Newton las simboliza con las últimas letras del alfabeto v, x, y, z; d) el concepto de *fluxión* que representa las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento, denotadas por las letras coronadas $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; e) *momento de la fluente* que es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como x en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño o, es decir, xo. El *procedimiento* anteriormente expuesto, es denominado el *método de fluxiones* de Newton, estos *procedimientos* se encuentran en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* la cual se aleja de la teoría propuesta por Descartes y trabaja con *procedimientos* algebraicos utilizando ecuaciones y definiendo variables sin acudir al sistema cartesiano.

3.4.5. Proposiciones y/o Propiedades

Cabe destacar, que Newton en sus primeras investigaciones estudia la noción de fluxiones de manera geométrica, ya que representa el comportamiento de una cierta partícula como curvas cinemáticas que dependen del tiempo. Las siguientes *proposiciones* conocidos como

Lema I y II representa geométricamente la noción intuitiva de límite que estableció Newton (ver Figura 3.10):

> **Lema I:** Las cantidades, así como las razones de cantidades, que tienden a la igualdad constantemente en un cierto tiempo finito y antes del límite de dicho tiempo se aproximan mutuamente más que una diferencia dada, al final se hacen iguales.
> **Lema II:** En una forma curva, son rectas Aa y AE, y acE comprende la curva. En ella (la curva) se inscriben un número infinito de paralelogramos $Ab, Bc, Cd, \ldots$, con bases $AB, BC, CD, \ldots$, iguales, y los lados $Bb, Cc, Dd, \ldots$, mantenidos en paralelo al lado de la recta aA y completando los paralelogramos $aKbl, bLcm, cMdn, \ldots$ La amplitud de dichos paralelogramos podría disminuir y su número ser aumentado hasta el infinito; es decir, que las razones últimas están relacionadas entre sí, a su vez, la figura inscrita $AKbLcMdD$, la figura circunscrita $AalbmcndoE$, y la figura curvilínea $AabcdE$, son razones iguales. (Newton, 1726/2011, p. 157)

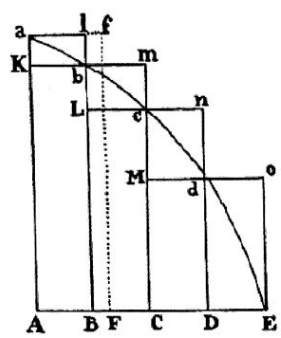


Figura 3.10: Aproximación de área (Newton, 1686, p.25)

Una interpretación moderna de las demostraciones de los Lemas I y II, lo expone Cantoral y Farfán (2004), demostración del Lema I: “Si usted niega esta proposición, suponga entonces que al final son diferentes, y que D sea su última diferencia. Luego entonces no podrían aproximarse en menos de D, lo que contradice la suposición”(p.82). Y la demostración del Lema II:

> La diferencia entre las figuras inscritas y circunscritas es la suma de los paralelogramos Kl, Lm, Mn, Do; esto es (de la igualdad de las bases), el rectángulo sobre una de sus bases Kb y la suma de sus alturas Aa forman el rectángulo $ABLa$. Sin embargo, este rectángulo, debido a que su anchura AB disminuye **in infinitum,** se hace menor que cualquier espacio dado. Por lo tanto (por el Lema I) las figuras inscritas y circunscritas se hacen finalmente iguales, y más aún, la figura curvilínea intermedia de hace finalmente igual a cada una de aquellas dos. (p.82-83)

Las demostraciones anteriormente descritas nos ayudan a comprender los *argumentos* que Newton utilizó y que claramente éstos se alejan de los fundamentos lógicos del método exhaustivo. Por otra parte, las *proposiciones* anteriores muestran que Newton poseía una noción intuitiva de límite, ya que comparaba las áreas de los paralelogramos inscritos y circunscritos con el área de la curva afirmando que las razones entre dichas áreas eran similares a mayor número de paralelogramos, tal como se ilustra en la Figura (3.11)

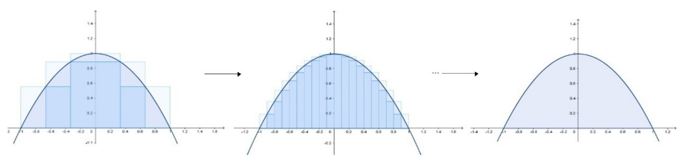


Figura 3.11: Procesos Infinitos (creación propia)

3.4.6. Argumentos

Los *argumentos* que justifican la sustitución de x e y por $x+\dot{x}o$ y $y+\dot{y}o$ respectivamente se basan en aspectos dinámicos del tipo físico y aritméticos por medio del uso de infinitesimales, los cuales se apoyan en el álgebra y el análisis geométrico, tal como afirma Collete (1985):

> Ya que los momentos como $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ son las anexiones o aumentos infinitamente pequeños de las cantidades fluentes x e y durante los intervalos de tiempo infinitamente pequeños, se sigue que estas cantidades x e y, después de un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, se convierten en $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ [...]. De ese modo, se puede sustituir en la misma ecuación en lugar de x e y. (p.110)

La justificación y los *argumentos* que el propio Newton brinda para no ser cuestionado por los académicos de la época es la siguiente:

He adelantado estos Lemas para evitar tediosas y largas deducciones **ad absurdum** al estilo de los antiguos geómetras, pues las demostraciones se hacen más breves por el método de los indivisibles. Pero como la hipótesis de los indivisibles es más difícil y además, tal método se considera menos geométrico, he preferido reducir las demostraciones de las cosas que siguen a las sumas y razones últimas de cantidades evanescentes, y a la suma y razones primeras de cantidades nacientes, esto es, a los límites de las sumas y de las razones [...]. Por tanto, en lo que sigue, cuantas veces considere cantidades como si constaran de partículas, o cuantas tome pequeñas curvas por líneas rectas, no quiero entender nunca que se trata de indivisibles, sino de divisibles evanescentes, ni tampoco de sumas o razones de partes determinadas, sino de los límites de las sumas y de las razones; y la fuerza de tales demostraciones debe atribuirse siempre al método de los Lemas precedentes. Pudiera objetarse que no hay proporción última alguna entre cantidades evanescentes, ya que antes de que desaparezcan no son últimas, y, después de desaparecidas, no puede darse ninguna. Pero por la misma razón podría decirse que un cuerpo que llega a un punto en el que se acaba su movimiento no tendría una velocidad última, puesto que dicha velocidad no sería última antes de que dicho cuerpo alcance el punto final de su movimiento y cuando le haya alcanzado ya no tendrá velocidad alguna. La respuesta es fácil: por velocidad última se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes la razón de cantidades, no antes de que se desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen. De igual modo ocurre con la razón primera de cantidades nacientes, que es aquella con la que nacen [...]. Existe un límite que puede alcanzar la velocidad al final del movimiento, pero no puede traspasarlo. Esta es la velocidad última. Y semejante es la razón del límite de todas las cantidades y proporciones nacientes y evanescentes. Y dado que tal límite es cierto y definido, el problema de determinarlo es puramente geométrico. También pudiera objetarse que si se dan razones últimas de cantidades evanescentes, también se darán magnitudes últimas; y así toda cantidad constará de indivisibles [...]. Pero esta objeción se apoya en una hipótesis falsa. Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tienden a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse má que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan in infinitum. (Newton, 1726/2011, p. 169-171)

Según la cita anterior, a pesar de que Newton no poseía herramientas conceptuales ni un simbolismo apropiado, Newton si disponía de una noción de límite del tipo geométrica y algebraica. El aporte trascendental del trabajo de Newton es la visión de una noción de límite que se basaba en un continuo geométrico, es decir, donde las variables o fluentes asumen valores de forma continua (Pino-Fan & Medrano, 2016).

Según los objetos matemáticos descritos, estos conforman una sola configuración epistémica, la cual llamaremos *la noción intuitiva de límite de Newton.*

Para finalizar esta sección, a continuación se muestra la tabla 3.3 que sintetiza la configuración epistémica recientemente descrita.

Tabla 3.3: CE N°3: La noción intuitiva de límite de Newton

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°3 La Noción Intuitiva de Límite de Newton**
Elementos Lingüísticos	Verbales: Expresiones físicas como: velocidad, flujo, velocidad de un flujo, momentos de una magnitud. Geométricos: figuras propias de la geometría euclideana y analítica. Simbólicos: uso predominante del lenguaje algebraico.
Conceptos y/o definiciones	- Fluentes, fluxiones. - Momentos de las fluentes. - Razones primera y últimas. - Cantidades nacientes y evanescentes.
Situaciones y/o Problemas	- Determinar la velocidad de un móvil, conociendo su distancia y problema inverso.
Procedimientos	- Algoritmo de cálculo de fluxiones: a) Algoritmo algebraico inverso del cálculo de fluxiones. b) Método de las series convergentes.
Propiedades / Proposiciones	- Preconcepción de límite en un contexto aritmético. - Preconcepción de límite en un contexto geométrico.
Argumentos	- Concepción del cálculo infinitesimal como un modelo matemático de las ciencias físicas. - Justificación de la operatoria de los procesos algorítmicos. - La intuición geométrica como fundamento de proposiciones matemáticas.

3.5. CE N°4: La Idea de los Infinitesimales de Leibniz

El desarrollo del cálculo infinitesimal por Leibniz es una consecuencia de un trabajo de reflexión filosófica sobre las matemáticas, a diferencia de la labor de Newton desarrollada como respuesta a una problemática física donde interesaba, sobre todo, la creación de herramientas matemáticas eficaces con algoritmos adecuados para su uso. El interés principal de Leibniz fue la fundamentación del cálculo infinitesimal y una de sus problemáticas fundamentales, la determinación del continuo. Analicemos los objetos matemáticos primarios que componen esta configuración.

3.5.1. Elementos Lingüísticos

Los elementos lingüísticos del tipo verbal que se identifican son expresiones como *infinitesimal* o *diferencial de una variable*. Estas expresiones están relacionadas, ya que el segundo concepto se deriva de la noción de "*infinitesimal*". Con respecto a los elementos lingüísticos del tipo gráfico se puede distinguir el uso de figuras geométricas estáticas provenientes de la geometría euclideana y la utilización de gráficas de curvas de carácter dinámico que representaban por medio de las herramientas de la Geometría Analítica. Un ejemplo de ello es el denominado triángulo característico de Leibniz, formado por una parte infinitesimal de la tangente a una curva, en un punto de ella, y partes infinitesimales de las paralelas a la abscisa y la ordenada; que se puede representar por un triángulo euclidiano semejante a él, tal como se muestra en la Figura (3.12). Sobre los elementos lingüísticos del tipo simbólico podemos distinguir la notación para la diferencial, por ejemplo, si las variables son "x, y" sus diferenciales se representan por "dx, dy". Sobre los procesos de cuadratura, Leibniz realiza una introducción gradual con un mejoramiento paulatino de la simbología correspondiente al símbolo integral, que culmina con la notación "$\int y\,dx$"; para indicar la suma infinita de ordenadas bajo una curva y. En este sentido, Cantoral and Farfán (2004) señalan que el símbolo referente a la diferencial de Leibniz permitió desarrollar los teoremas y aplicaciones que sustentan hoy en día el Cálculo Infinitesimal.

3.5.2. Conceptos y/o Definiciones

Los conceptos que se pueden identificar en esta configuración son: *triángulo característico*, descrito anteriormente; la *diferencial de una variable*, que es la variación infinitamente pequeña de la variable; y el *continuo*. Leibniz consideró la constitución del continuo un problema central en la fundamentación del cálculo diferencial e integral. Debido a esta razón, la concepción de *continuo* transitó por tres etapas progresivas: la primera etapa concibe el continuo formado por infinitas partes, dichas partes serían consideradas como los indivisibles (representadas por rectas, planos, etc.); la segunda etapa niega la existencia de los indivisibles y propone que el continuo está formado por partes infinitamente pequeñas (los infinitesimales); y en una última etapa Leibniz cambia su concepción de división del continuo y niega la existencia de componentes últimos de éste. Debemos destacar, que en la época de Leibniz aún no se tiene la noción de completitud de los números reales, que años más tarde los matemáticos Cantor y Dedekind formalizarían, por tal razón el principal interés de Leibniz era formalizar la concepción del *continuo* con la finalidad de fortalecer y sustentar la teoría del cálculo.

3.5.3. Situaciones y/o Problemas

En esta configuración podemos distinguir dos situaciones problemáticas principales. La primera de ellas es fundamentar y formalizar el concepto del continuo, a esta problemática Leibniz le dará respuestas parciales, quedando finalmente sin una respuesta definitiva. Situación que no es de extrañar, porque hasta en nuestros días no hay una respuesta ni una certeza definitiva sobre lo que es el continuo. La segunda situación problemática son las clásicas aplicaciones del naciente cálculo diferencial como: problemas para determinar rectas tangentes a una curva; determinación de máximos y mínimos, puntos críticos y puntos de inflexión; así como también problemas de curvatura y cubatura (Pino-Fan, 2014).

3.5.4. Procedimientos

Se distingue el uso de una operatoria con cantidades infinitesimales y procesos infinitos, por ejemplo, la suma de una serie infinita convergente. Cabe destacar, la forma de operar con estas cantidades, el uso de la diferencial de una variable. Así, el problema de construir la tangente a una curva en un punto de ella, se traduce en términos del cálculo infinitesimal; calcular las diferenciales de las variables dadas, en la ecuación que representa la curva; y determinar la dirección de la tangente por el cuociente de estas cantidades infinitesimales. Una interpretación moderna del uso de los triángulos característicos, está dada por Cantoral y Farfán (2004, p.94):

> Para determinar la longitud de una curva se considera el triángulo característico de una curva $y = f(x)$, se considera la diferencial en la variable x, como dx y se calcula el incremento correspondiente dy en la variable $y = f(x)$. Se completa el triángulo donde ds es el incremento infinitesimal sobre la gráfica $y = f(x)$. Tal como se indica en la Figura (3.12):

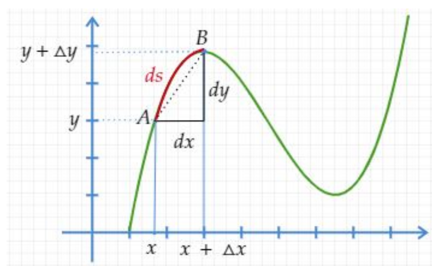


Figura 3.12: Triángulo Característico de Leibniz (creación propia)

Leibniz sostenía que el arco infinitesimal AB es indistinguible de la cuerda $\overline{AB}$, entonces el triángulo curvo es indistinguible del triángulo rectángulo que se forma en ella. Luego, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Luego, $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$, la cual representa la longitud del arco infinitesimal, en términos de las diferencias dx y dy. Así, la longitud de la curva desde un punto $P(x_1, y_1(x_1))$ a un punto $Q(x_2, y_2(x_2))$ es la suma de todos los arcos infinitesimales, es decir:

$$L(P, Q) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Donde $L(P, Q)$ representa a la longitud de curva desde P hasta Q. Por otra parte, se distingue una operatoria entre los números convencionales y estos nuevos objetos matemáticos,

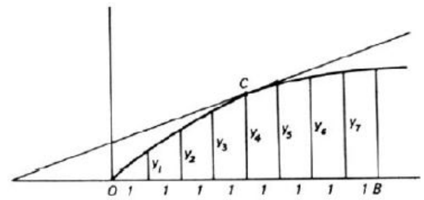


Figura 3.13: Sucesión de ordenadas equidistantes

que no están claramente definidos ni caracterizados, ni tampoco representados. Sin embargo, hay una extensión informal de las operaciones tradicionales: suma, resta, multiplicación, división a estos nuevos objetos.

Por otra parte, Pino-Fan (2014) da una interpretación moderna del *procedimiento* que utilizó Leibniz para la determinación de cuadraturas y tangentes. En la gráfica de la Figura (3.13) Leibniz establece una sucesión de ordenadas y equidistantes, si la distancia es 1, la suma de estas ordenadas nos da una aproximación de la cuadratura de la curva, y la sustracción entre dos ordenadas sucesivas se aproxima a la pendiente de la correspondiente tangente. Leibniz se dio cuenta que mientras más pequeña se escoja a unidad 1, mejor es la aproximación. De esta forma, si se escoje la unidad de forma infinitamente pequeña, las aproximaciones serían exactas, por tanto la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. Así, Leibniz estableció que la determinación de cuadraturas y tangentes son operaciones inversas de la otra, utilizando las sumas y diferencias de sucesiones.

3.5.5. Proposiciones y/o Propiedades

Las propiedades principales que permiten operar y aplicar el cálculo infinitesimal tan provechosamente son: la introducción del triángulo característico, el cual relaciona la operatoria con magnitudes infinitamente pequeñas, de la geometría de los indivisibles, con elementos de la geometría euclidiana; relación que permite estudiar propiedades geométricas de curvas del plano cartesiano. Por ejemplo, la dirección de la curva y la velocidad de cambio de la dirección. Por último, se formula también un álgebra de las diferenciales.

Otra propiedad que se debe destacar es la que señala Brunhschwigg (1945)“[...]Leibniz hace intervenir el infinito en la generación de lo finito. La ciencia del infinito sirve para hallar las cantidades finitas" (p. 236). En este sentido, también está lo señalado por Leibniz y citado por Brunhschwigg (1945): "[...]la igualdad puede ser considerada como una desigualdad infinitamente pequeña, y se puede hacer aproximar la desigualdad a la igualdad tanto como se quiera [...]" (p.237). La interpretación moderna que se da a esta última afirmación es la siguiente: "dados a y b números reales, se tiene que $\forall\, \varepsilon > 0$, si $|a - b| < \varepsilon \Leftrightarrow a = b$."

3.5.6. Argumentos

En esta configuración se utilizan argumentos relacionados con los procesos infinitos (cálculo infinitesimal), los cuales están basados en la concepción del "infinito actual". Además, estos procesos infinitos se caracterizan por ser un proceso continuo sin saltos, esta concepción se fundamenta en el *principio general de continuidad* y en la asunción del *continuo* tanto en el plano geométrico como en el plano algebraico. Con respecto al principio general de continuidad, Leibniz señala:

> Con esta ley de la continuidad que excluye de la mutación el salto, también concuerda lo siguiente: el caso del reposo puede tenerse por un caso especial del movimiento; a saber, por un movimiento que se desvanece o que es mínimo, y el caso de la igualdad puede tenerse por caso de desigualdad que se desvanece. (Leibniz, citado en Brunschvicg, 1945, p. 238)

En el pensamiento de Leibniz hay una distinción entre un proceso de devenir en general de las cosas y el estado actual de ellas, como se nos presentan; el devenir se caracteriza por no admitir saltos interrupciones. Por otra parte, se concibe el estado actual de los objetos matemáticos y de las cosas en general como resultados de procesos infinitos. Así, como se ha mencionado anteriormente, una cantidad finita es generada por un proceso infinito dónde intervienen cantidades infinitamente pequeña (los infinitesimales) y la igualdad como una desigualdad infinitamente pequeña.

Según los objetos matemáticos descritos, estos conforman una sola configuración epistémica, la cual llamaremos *la idea de los Infinitesimales de Leibniz*.

Para finalizar esta sección, a continuación se muestra la tabla 3.4 que sintetiza la configuración epistémica recientemente descrita.

Tabla 3.4: CE N°4: La idea de los Infinitesimales de Leibniz

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°4 La idea de los Infinitesimales de Leibniz**
Elementos Lingüísticos	Verbales: Expresiones como “infinitesimal”, “diferencial” y “continuo”. Geométricos: combinación de elementos de la geometría euclideana con elementos de la geometría analítica, por ejemplo, el triángulo característico. Simbólicos: notaciones de diferencial dx, dy y del cálculo integral.
Conceptos y/o definiciones	- Triángulo Característico - Infinitesimal - Diferencial. - Continuo.
Situaciones y/o Problemas	- Constitución del continuo - Problemas relacionados a la determinación de máximos y mínimos, rectas, tangentes y puntos de inflexión. - Estudio del triángulo característico.
Procedimientos	- Operatoria (suma, resta, etc.) con cantidades infinitesimales y procesos infinitos. - Uso del diferencial para la resolución de problemas. - Considera indistinguible el triángulo curvo y el triángulo rectángulo.
Propiedades / Proposiciones	- Introducción del triángulo característico. - Álgebra de diferenciales. - Uso y propiedades del infinito actual. - Principio de continuidad de Leibniz. - Generación de los finito por procesos infinitos.
Argumentos	- Basados en el Principio de continuidad geométrica y aritmética. - El estado actual de los objetos matemáticos y de las cosas en general es el resultado de procesos infinitos.

3.6. CE N°5: Concepciones preformales de Límite

En este período de construcción del concepto de límite, el conjunto de las ideas relacionadas al concepto se amplía considerablemente bajo la influencia de las aplicaciones de la Geometría, la Física y otras actividades humanas como el comercio. La diversidad de aplicaciones que van apareciendo, obligan a reconsiderar la fundamentación de la disciplina para su debida generalización y uso, en consecuencia, el pensamiento matemático debe analizar y precisar términos involucrados con la emergencia del límite como objeto matemático. Debido a las similitudes entre las concepciones de límite de Euler, D'Alembert y Cauchy, es que se considera la conformación de esta configuración.

3.6.1. Elementos Lingüísticos

Los elementos lingüísticos del tipo verbal que se identifican son frases como "magnitud", "valores sucesivos", "aproximarse indefinidamente" o "tan pequeño como se quiera"; estas representan la suposición de que el conjunto de los números reales no posee "saltos" y que éstos son "continuos" (lo que hoy se conoce como densidad de los números racionales e irracionales). Los elementos lingüísticos de tipo gráfico, se identifican como representaciones geométricas de curvas de funciones, pero éstas son estudiadas de forma dinámica. Los elementos lingüísticos del tipo simbólico son: "$f(x+\alpha) - f(x)$" representa una magnitud infinitamente pequeña siempre y cuando "α" es un número pequeño; "dx" representa una cantidad infinitamente pequeña que puede ser considerada igual a cero.

3.6.2. Conceptos y/o Definiciones

Comenzaremos analizando la concepción de "infinitesimal" dada por Euler:

> Una cantidad infinitamente pequeña no es otra cosa que una cantidad que va disminuyendo, y consecuentemente, es en realidad igual a cero. Para Euler, el cálculo de lo infinitamente pequeño consiste en el estudio de las razones geométricas de las cantidades infinitamente pequeñas. (Collete, 1985, p.195)

Es decir, Euler propone que estas cantidades pequeñas pueden ser consideradas iguales a cero. Una interpretación moderna de esta noción es dada por Collete (1985), quien explica que si dx representa una cantidad infinitamente pequeña, entonces $dx = 0$, luego $a \pm dx = a$, donde a es una cantidad finita cualquiera, así en general $a \pm ndx = a$, por tanto, se tiene $a \pm ndx - a = 0$. Luego la razón geométrica de la igualdad es $\frac{a \pm ndx}{a} = 1$. Collete (1985), describe la noción propuesta por Euler como: "las cantidades infinitamente pequeñas tienden a cero en comparación con las cantidades finitas, y, además, pueden ser despreciadas cuando están implicadas estas cantidades finitas" (p.195).

Otra noción de límite que se debe destacar, es la propuesta por D'Alembert (1766):

> Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que una magnitud dada tan pequeña como uno pueda suponer, sin embargo, la magnitud que se aproxima no puede sobrepasar la magnitud a la cual ella se aproxima; si bien que la diferencia entre dicha cantidad y su límite es totalmente indeterminable. (p.542)

La noción D'Alembert describe una noción de límite en la cual la segunda magnitud no puede coincidir con la primera magnitud, es decir, ambas magnitudes 'están tan cerca como se quiera'. Si bien la noción propuesta por D'Alembert mostró un gran avance, ésta aún carece de ciertas precisiones, por ejemplo, Medrano y Pino-Fan (2016) señalan:

> [...]la aproximación a la primera cantidad, ¿Es con valores mayores o menores que ella? ¿Cómo se compara la diferencia entre la aproximación y la magnitud límite con la magnitud 'tan pequeña como uno pueda suponer'?, ¿Esta última expresión se refiere solamente a cantidades positivas?.(p.309)

Cabe destacar que D'Alembert señala que su concepción de cantidades infinitesimales no puede ser cero: "Una cantidad es algo o nada; si es algo, no se ha anulado todavía; si ya es nada, ya está anulada. La suposición de un estado intermedio entre estos dos es una quimera" (Collete, 1985, p.215).

Por otra parte, Cauchy en el libro "Cours d'Analyse" introduce las siguientes definiciones:

> Se llama cantidad variable aquella que uno considera que recibe sucesivamente muchos valores diferentes los unos de los otros, se llama en contrario cantidad constante toda cantidad que recibe un valor fijo y determinado. Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera de terminar de diferir tan poco como uno quiera, este último es llamado el límite de todos los otros. (Cauchy, 1833, p. 17)

La noción límite de Cauchy es similar a la noción de D'Alembert, pues muestra que la aproximación a un valor fijo puede tener una diferencia "tan pequeña como se quiera". Por otra parte, Cauchy propone una nueva definición para un “infinitesimal”, similar a la de Euler:

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable disminuyen indefinidamente, de manera tal que decrecen por debajo de todo número dado, esta variable se denomina un infinitesimal, o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiende a cero por límite. (Cauchy, 1833, p. 17)

Es importante destacar que la noción de infinitesimal de Cauchy propició que el concepto de diferencial definido por Leibniz tomara un rol secundario, tal como lo señala Boyer (1987):

> La diferencial, que había desempeñado con Leibniz y sus sucesores el papel primordial, la relega Cauchy a un papel secundario, aunque era perfectamente consciente de su comodidad operativa. Si dx es una cierta cantidad finita, entonces la correspondiente diferencial dy de $y = f(x)$ vendrá definida simplemente como $f'(x)\,dx$.(p. 648)

Además, dicha noción permitió que Cauchy introdujera el concepto de continuidad de una función: “La función $f(x)$ es continua entre los límites dados de la variable x, si entre los límites un incremento infinitamente pequeño i de la variable x siempre da lugar a un incremento infinitamente pequeño $f(x+i)-f(x)$ de la función misma” (Boyer, 1987, p.648). La noción de continuidad de Cauchy es análoga a la definición que se utiliza en los libros de cálculo del día de hoy, además, dicha noción permitió más tarde introducir los conceptos de límite laterales en un número x_o, condición fundamental para que el límite de una función en un número x_o exista, concepción introducida más adelante por Weierstrass. (Boyer, 2016)

3.6.3. Situaciones y/o Problemas

Los problemas y/o tareas que hicieron emerger esta configuración, se encuentran en varios ámbitos, dentro de éstos se encuentran problemas geométricos, físicos y otros como el comercio y la economía. Por ejemplo, D’Alembert expone el problema clásico del área de un círculo:

> Por ejemplo, supongamos dos polígonos, uno inscrito y el otro circunscrito a un círculo, es evidente que uno puede multiplicar los lados tanto como quiera; en ese caso, cada polígono se aproximará más y más a la circunferencia del círculo, el contorno del polígono inscrito aumentará y el del circunscrito disminuirá; pero el perímetro o el contorno del primero no sobrepasará jamás la longitud de la circunferencia y el del segundo no será jamás más pequeño que esta misma circunferencia; la circunferencia del círculo es pues el límite del aumento del primer polígono y de la disminución del segundo. (D'Alembert, 1766, p. 542)

En el ejemplo anterior, se evidencia claramente su noción de límite, el cual es un valor que "nunca se alcanza".

3.6.4. Procedimientos

Debemos destacar el procedimiento de Euler para determinar una diferencial. Collete (1985) da una interpretación moderna de éste de la siguiente forma: "Para determinar la diferencia $y = x^2$, se considera w el incremento de x y n el incremento de y, luego $y + n = (w + x)^2$, lo que implica $n = w^2 + 2wx$. Así la razón de los incrementos, es $\frac{w}{n} = \frac{1}{w+2x}$, como $w = 0$, se deduce que $\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{2x}{1}$"(p.196). En este procedimiento, se observa la suposición de que los "infinitesimales" pueden ser cero, tal como lo proponía Euler.

3.6.5. Proposiciones y/o Propiedades

Una de las propiedades más trascendentales, es el uso del álgebra de límites propuesta por D'Alembert (1766):

> (1) Si dos magnitudes son el límite de una misma cantidad, estas dos magnitudes serán iguales entre sí. (2) Sea $A \cdot B$ el producto de dos magnitudes A, B. Supongamos que C sea el límite de la magnitud A y D el límite de la cantidad B; yo digo que $C \cdot D$, producto de los límites, será necesariamente el límite de $A \cdot B$ (p. 542).

Por otra parte, Euler utilizaba propiedades de los infinitesimales considerándolos como "ceros" tal como se señaló anteriormente y Cauchy, utilizó proposiciones en los que se utilizada el infinitesimal "tan pequeño como se quería". Por otra parte, Cauchy y Bolzano desarrollaron de manera independiente el concepto de convergencia de una sucesión, a pesar de que Bolzano introdujo antes el concepto y criterios de convergencia, es el trabajo de Cauchy que prevalece hasta el día de hoy con la siguiente proposición: "una sucesión S_n converge a un límite si y sólo la diferencia entre S_p y S_q para valores cualquier de p y q mayores que n es menor en valor absoluto que cualquier valor dado, considerando n suficientemente grande" (Medrano & Pino-Fan, 2016, p. 312) Esta propiedad ayudó a desarrollar de manera formal los estudios de convergencia de sucesiones, en particular, permitió desarrollar la completitud de los números reales.

3.6.6. Argumentos

Los argumentos se basan en las diferentes concepciones de "infinitesimal", tal como señalamos anteriormente, para Euler el infinitesimal es una magnitud infinitamente pequeña que puede ser considerada como cero; por otra parte, Cauchy señala que el infinitesimal es una cantidad infinitamente pequeña que tiende a cero, y D'Alembert concibe un infinitesimal infinitamente pequeño, pero que no puede coincidir con el cero.

Según los objetos matemáticos descritos, estos conforman una sola configuración epistémica, la cual llamamos *concepciones preformales de límite*. Para finalizar esta sección, a continuación se muestra la tabla 3.5 que sintetiza la configuración epistémica recientemente descrita.

Tabla 3.5: CE N°5: Concepciones preformales de límite

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°5 Concepciones preformales de Límite**
Elementos Lingüísticos	Verbales: Expresiones como límite de una magnitud, cantidad variable y constante, infinitesimal, sucesiones, series, función, continuidad y diferencial. Geométricos: uso de representaciones gráficas característica de la geometría analítica. Simbólicos: lenguaje algebraico para representar límites, constantes y variables.
Conceptos y/o definiciones	- Límite de una magnitud (D'Alembert) - Límite de una cantidad variable (Cauchy) - Infinito actual. - Límite de una sucesión
Situaciones y/o Problemas	Problemas propios del cálculo infinitesimal y problemas que buscan fundamentar el análisis real.
Procedimientos	- Álgebra de límites - Se realizan operaciones con los infinitesimales de diferentes órdenes.
Propiedades / Proposiciones	- D'Alembert: El límite de una magnitud no se alcanza en el proceso de aproximación. - Cauchy: El límite de una variable como un proceso de aproximación a una cantidad fija, y éste se puede alcanzar.
Argumentos	- D'Alembert: la base del cálculo diferencial e integral es el concepto de límite. - Cauchy: Se pueden integrar consistentemente los conceptos de infinitesimal y de límite.

3.7. CE N°6: La noción de límite de Weierstrass

Los avances de los matemáticos Euler, D'Alembert, Cauchy, ayudaron a formalizar el concepto de límite que se tiene en la actualidad (definición de límite propuesta por Weierstrass). Sin embargo, éste no pudo ser posible sin la formulación del concepto de función y de la completitud de los números reales. Estos nuevos conceptos permitieron "aritmetizar" el Cálculo, pues los fundamentos ya no se basaban en la geometría ni en el álgebra. Tal como afirman Valdivé y Garbin (2008):

> Se definió el concepto de límite desde la aritmética de los números reales, lo que permitió dejar atrás los procesos infinitos y con ello los infinitesimales como diferencias, incrementos o decrementos. El paso del álgebra a la aritmética en el Cálculo, dejó una manera de concebir las cantidades infinitamente pequeñas en términos de límites y excluyó la variabilidad continua. Esto condujo al abandono de los infinitesimales en el Cálculo. (p.495)

Debido a los argumentos basados en la completitud de los números reales, es que la noción de límite de Weierstrass se considera como un significado parcial con la siguiente configuración:

3.7.1. Elementos Lingüísticos

Los elementos lingüísticos del tipo verbal que se identifican, son expresiones como: variable, función, series, límite de una función, valor numérico de una función, números reales, sucesiones convergentes, continuidad, valor absoluto. Por otra parte, se identifica los elementos lingüísticos gráficos tales como representaciones del conjunto de los números reales como intervalos, rectas, etc., y el uso de gráficas de funciones en el contexto de la geometría analítica. Con respecto a lo simbólico, se distinguen notaciones como "x" (como magnitud o variable), "$f(x)$" (como el valor numérico de una función o variable dependiente de x), las letras griegas "ε, η" (que representan cantidades positivas pequeñas), "$|x - x_0|$" (distancia entre los números x y x_0), "L" (valor del límite cuando éste sea un número real).

3.7.2. Conceptos y/o Definiciones

Comenzaremos estudiando la definición de límite propuesta por Dedekind:

> Decimos que una magnitud variable x, que recorre sucesivamente determinados valores numéricos, se aproxima a un valor límite fijo α cuando en el curso del proceso x viene a quedar finalmente entre cualesquiera dos números entre los cuales se encuentra el propio α, o lo que es lo mismo, cuando la diferencia $x-\alpha$ tomada en valor absoluto desciende finalmente por debajo de cualquier valor dado distinto de cero. (Dedekind, 2014, p.101)

Gracias a los avances anteriormente señalados y a la formalización de la construcción de los números reales, dada por los aportes de Cauchy y Dedekind, Weierstrass pudo definir la noción de límite de la siguiente forma:

> Si, dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$.(Boyer, 2013, p.696)

Cabe destacar, que la noción de infinitesimal es equivalente al número "η" y al número "ε". Por otra parte, la noción de límite dada por Weierstrass contribuye a la aritmetización del Cálculo, pues sólo se trabaja con números reales considerando las operaciones de sumar y restar, además, éstos se pueden comparar mediante la relación de orden "menor que". Actualmente, la letra griega η es sustituida por la letra griega δ, y éste ha sido el único cambio a la noción de límite propuesta por Weierstrass. Es importante destacar que dicha noción introduce de manera implícita la noción de límites laterales, puesto que se estudia el límite en $x_o \pm \eta$, donde η es un número positivo.

Es importante destacar que la definicón de límite de Weierstrass elimina el uso de infinitesimales hasta la introducción del análisis no estándar de Robinson.

3.7.3. Procedimientos

Los procedimientos que emergen en esta configuración están basados en el álgebra de las operaciones definidas en el conjunto de los números reales, en particular, se basan en las propiedades que posee como un cuerpo ordenado y completo, hay un especial énfasis de procedimientos que se apoyan en las propiedades del valor absoluto. Por otra parte, se observan procedimientos propios de la geometría analítica, al estudiar las gráficas de las funciones en el plano cartesiano y sus expresiones analíticas.

3.7.4. Situaciones y/o Problemas

En este período hay diversos problemas aplicados, sin embargo, los problemas que hacen emerger la noción de límite son propios de la matemática, en el sentido, de querer formalizar esta noción y que ésta no dé cabida a ambigüedades. Por ejemplo, Collete (1985) describe a Weierstrass como alguien metódico, estructurado y cuidadoso, cuyo afán fue de fundamentar y formalizar los conceptos matemáticos.

3.7.5. Proposiciones y/o Propiedades

Podemos destacar las propiedades algebraicas de las operaciones aritméticas definidas en el conjunto de los números reales, que implica que el conjunto de los números reales sea un "cuerpo"; la relación de orden de los números reales que permiten definir una métrica como el valor absoluto; y la completitud de los números reales que permite utilizar una noción de infinitesimal distinta a las definidas anteriormente.

3.7.6. Argumentos

Weierstrass considera un infinitesimal como una variable continua, Collette (1985) señala que Weierstrass propuso que:

> [...] una variable continua es una variable tal que si x_0 es cualquier valor del conjunto de los valores atribuidos a la variable y δ es un número positivo cualquiera, hay otros valores de la variable en el intervalo $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ (p. 355).

La utilización de la propiedad de completitud de los números reales permitió a Weierstrass prescindir del concepto de infinitesimal propuesto por sus antecesores Cauchy, D'Alembert, Euler y Leibniz.

Según los objetos matemáticos descritos, estos conforman una sola configuración epistémica, la cual llamamos *la noción de límite de Weierstrass*. Para finalizar esta sección, a continuación se muestra la tabla 3.6 que sintetiza la configuración epistémica recientemente descrita.

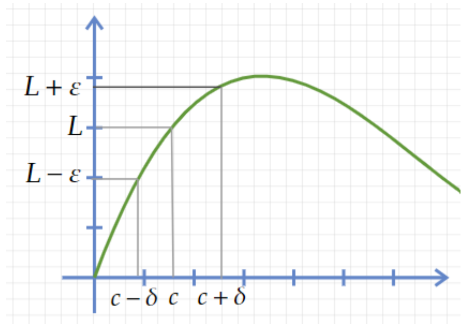


Figura 3.14: Noción de Límite de Weierstrass. Creación Propia.

Tabla 3.6: CE N°6: Noción de límite de Weierstrass

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°6 Noción de límite de Weierstrass**
Elementos Lingüísticos	Verbales: Expresiones como: continuidad de la recta geométrica, número racional e irracional, conjunto, etc. Geométricos: uso de representaciones gráficas propias de la geometría analítica. Simbólicos: lenguaje algebraico para representar límites, constantes y variables.
Conceptos y/o definiciones	- Continuidad de la línea recta (representada como los números reales). - Completitud de los números reales. - Definición de límite de Weiertrass
Situaciones y/o Problemas	Problemas propios asociados a la completitud de los números reales y continuidad de la recta geométrica real.
Procedimientos	- Demostración de límites de funciones y álgebra de funciones basada en la definición de límite de Weiertrass.
Propiedades / Proposiciones	- Completitud del conjunto de los números reales. - Axioma de la continuidad de la recta geométrica. - Correspondencia biyectiva entre los puntos de la recta geométrica y los números reales.
Argumentos	- El conjunto de los números reales como un cuerpo, ordenado y completo. - La recta geométrica como representación del conjunto de los números reales. - Se asume distintos tipos de infinitos, en particular el infinito actual.

3.8. Consideraciones Finales

Lo que se ha presentado es una evolución de cada una de las etapas de cómo inicia la comprensión del desarrollo y evolución histórica de la noción de límite de una función en una variable, la riqueza matemática que se observa en cada una de estas configuraciones se utilizará para diseñar tareas que permitan el desarrollo comprensivo de la progresión de la noción desde etapas intuitivas hasta llegar a su formalización. Sin embargo, hay que destacar que esta noción ha seguido desarrollándose desde el punto de vista de la matemática misma, ha sufrido formalizaciones y generalizaciones respecto a los elementos que se han presentado en esta sección. Una de las formalizaciones y generalizaciones, es la que refiere a una mirada topológica, por ejemplo, en el libro Calculus de T. Apóstol (1967) señala que:

> Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto p, no es necesario que la función esté definida en el punto p. Sea A un número real. La ecuación $\lim_{x \to p} f(x) = A$ se lee: El límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a p es igual a A, o $f(x)$ se aproxima a A cuando x se aproxima a p. También se escribe sin el símbolo de límite, como sigue: $f(x) \to A$ cuando $x \to p$. (p. 127)

Sin embargo, en este trabajo no se ha desarrollado un tipo de configuración para este tipo de generalizaciones, puesto que el objetivo es estudiar las etapas iniciales de comprensión de los significados de la noción de límite que podrían generar que el estudiante pueda desarrollar un aprendizaje progresivo desde los significados intuitivos, preformales y formales hasta llegar a este tipo de definiciones más generales.

CAPÍTULO 4

DISEÑO DE TAREAS

4.1. Introducción

A continuación, presentamos las propuestas de tareas asociadas a cada significado parcial con su correspondiente configuración epistémica del objeto límite. La justificación del diseño de las tareas viene dada por las Configuraciones Epistémicas desarrolladas en el capítulo 3 y por los Criterios de Diseño de Tareas descritas en el capítulo 2. Adicionalmente, la propuesta que se detalla a continuación fueron validadas[1] tanto por los investigadores (alumna tesista y profesor guía) y por la docente que implementó las tareas a un grupo de 11 estudiantes pertenecientes a un programa de formación de profesores de matemática de una Institución de Educación Superior. Las tareas se implementaron al inicio de la asignatura de Cálculo Diferencial.

Es importante destacar que los estudiantes en su programa de estudio considera asignaturas asociadas a las TIC para promover la enseñanza de las matemáticas, por tal razón poseen conocimientos en el uso del software GeoGebra y 10 de los 11 estudiantes no han estudiado el objeto matemático límite de una función en una variable.

[1]El detalle de esta validación se encuentra en el Anexo N°1

4.2. Construcción de Tareas de la CE N°1

Las tareas que consideraremos para la configuración epistémica N°1 "*Límite como aproximación en la matemática griega*" fueron adaptadas de los antiguos Planes y Programas (MINEDUC, 1998) propuestos por el Ministerio de Educación para la formación diferenciada de la asignatura de Matemática en el nivel de cuarto año medio.

Tarea N°1: Triángulo de Sierspinka

Considere un triángulo equilátero, trace sus medianas y elimine el triángulo del centro, repite el proceso anterior con los tres triángulos restantes, y después con los nueve triángulos restantes, tal como se muestra en la siguiente figura.

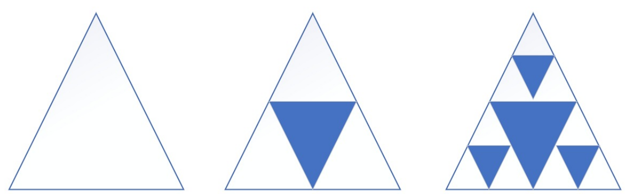


Figura 4.1: Triángulo de Sierspinka (creación propia)

1. Si el triángulo tiene lado a, determine las áreas de la figura obtenida en la iteración 1,2,3 y 4.

2. Determine el área de la figura obtenida en la iteración n.

3. Según los datos obtenidos en (1) y (2) completa la siguiente tabla:

Tabla 4.1: Tabla de Áreas

$N°$ **de iteración**	**Cantidad de triángulos**	**Área de la figura**
1		
2		
3		
4		
n		

4. Si $P(n)$ es el perímetro de la figura obtenida en la n-ésima iteración, completa la siguiente tabla:

Tabla 4.2: Tabla de Perímetros

N° **de iteración**	**Cantidad de triángulos**	**Perímetro de la figura**
1		
2		
3		
4		
n		

5. Considera un triángulo equilátero de lado $3\,cm$. Realiza un gráfico en geogebra de $A(n)$ y $P(n)$. ¿ Qué sucede con la gráfica de $A(n)$? ¿y con $P(n)$?

6. Según el ítem anterior, completa la siguiente aseveración:
A medida que se realizan más iteraciones, $A(n)$ tiene una tendencia a _________, mientras que $P(n)$ tiende a _________.

Tarea N°2: Iteraciones en un cuadrado

Considere el siguiente cuadrado y divida el lado del cuadrado en tres partes iguales, elimine o borre el cuadrado del centro y sus adyacentes como aparece en la Figura (4.2). Repita el proceso cuantas veces pueda en los cuadrados blancos.

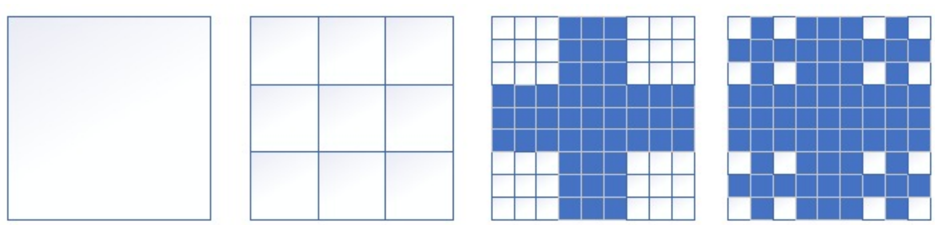


Figura 4.2: Iteración en el cuadrado (creación propia)

1. Suponga que el cuadrado inicial mide a cm. Complete la tabla (4.3).

2. Si n es un número muy grande. ¿Qué sucede con $P(n)$ y $A(n)$?

Tabla 4.3: Iteración en el cuadrado

$N°$ **de iteración**	**Cantidad de cuadrados**	**Perímetro de la figura** $P(n)$	**Área de la figura** $A(n)$
1			
2			
3			
4			
n			

4.2.1. Descripción de las Posibles Respuestas

Tarea N°1

A continuación, se describirá brevemente las posibles respuestas de los estudiantes de la Actividad $N°1$. Como el área del triángulo equilátero de lado a está dada por $A_{\triangle} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, se tiene que el área de la figura según cada iteración es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
A(1) &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\\
A(2) &= 3\cdot\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{4^2}\\
A(3) &= 3^2\cdot\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 3^2\frac{a^2\sqrt{3}}{4^3}\\
A(4) &= 3^3\cdot\frac{\left(\frac{a}{8}\right)^2\sqrt{3}}{2} = 3^3\frac{a^2\sqrt{3}}{4^4}\\
\vdots &= \vdots\\
A(n) &= 3^{n-1}\frac{a^2\sqrt{3}}{4^n}.
\end{aligned}
$$

Con esos datos, se puede completar la tabla solicitada. De manera análoga se estudia el perímetro de la figuras, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} P(1) &= 3a \\ P(2) &= 3 \cdot \left(3\frac{a}{2}\right) = 3^2\frac{a}{2} \\ P(3) &= 3^2 \cdot \left(3\frac{a}{4}\right) = 3^3\frac{a}{4} \\ P(4) &= 3 \cdot \left(3^3\frac{a}{8}\right) = 3^4\frac{a}{8} \\ \vdots &= \vdots \\ P(n) &= 3^n\frac{a}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Para llevar a cabo, los gráficos solicitados se reemplaza el valor de a por 3 y se tienen las gráficas (4.3) y (4.4) en GeoGebra.

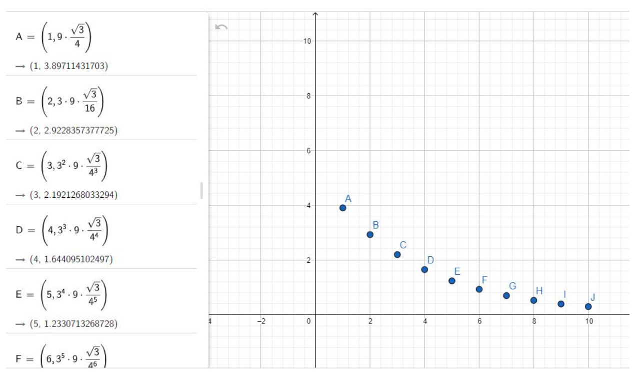


Figura 4.3: Gráfica del área de las figuras (creación propia).

Al observar la gráfica (Figura (4.3)) del área de las figuras obtenidas en las iteraciones del triángulo de Sierspinka, el estudiante debería observar que su gráfica es decreciente y que las áreas tienden a cero, es decir, $A(n) \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Al observar la gráfica (Figura (4.4)) del perímetro de las figuras obtenidas en las iteraciones del triángulo de Sierspinka, el estudiante debería notar que la gráfica es creciente y que los perímetros crecen indefinidamente, es decir, $P(n) \to \infty$, cuando $n \to \infty$. Finalmente, respecto al último ítem de la tarea, el estudiante debería señalar que mientras más iteraciones se realicen las áreas de las figuras obtenidas tienen una tendencia a ser más pequeñas (o

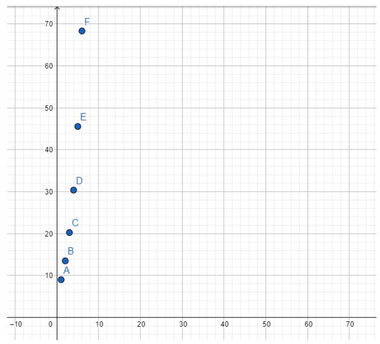


Figura 4.4: Gráfica del perímetro de las figuras(creación propia)

tienden a 0), de manera análoga, debería deducir que mientras más iteraciones se realicen los perímetros de las figuras obtenidas tienen una tendencia a ser más grandes.

Tarea N°2

Al analizar el perímetro de las figuras geométricas obtenidas, podemos obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}
P(1) &= 4 \cdot \left(\frac{4a}{3}\right) \\
P(2) &= 4^2 \cdot \left(\frac{4a}{3^2}\right) \\
P(3) &= 4^3 \cdot \left(\frac{4a}{3^3}\right) \\
P(4) &= 4^4 \cdot \left(\frac{4a}{3^4}\right) \\
\vdots &= \vdots \\
P(n) &= 4^n \cdot \left(\frac{4a}{3^n}\right).
\end{aligned}$$

De manera análoga se obtienen las áreas de las figuras geométricas obtenidas:

$$\begin{aligned}
A(1) &= 4 \cdot \left(\frac{a^2}{3^2}\right)\\
A(2) &= 4^2 \cdot \left(\frac{a}{3^2}\right)^2\\
A(3) &= 4^3 \cdot \left(\frac{a}{3^3}\right)^2\\
A(4) &= 4^4 \cdot \left(\frac{a}{3^4}\right)^2\\
\vdots &= \vdots\\
A(n) &= 4^n \cdot \left(\frac{a}{3^n}\right)^2.
\end{aligned}$$

Con esta información se puede completar la tabla solicitada. Para responder el ítem (2) se puede observar que

$$P(n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n 4a \to \infty \text{ cuando } n \to \infty,$$

el estudiante puede deducir esta afirmación analizando el gráfico y/o la Tabla de datos obtenida en el ítem (1), también puede observar que $\frac{4}{3} > 1$, por tanto $\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. De manera análoga, se tiene que el área de las figuras obtenidas cumple con:

$$A(n) = \left(\frac{4}{3^2}\right)^n a^2 \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

al igual que en el caso anterior el estudiante puede concluir esta afirmación estudiando el gráfico y/o la Tabla de datos obtenida en el ítem (1), así como también puede observar que $\frac{4}{9} < 1$, por tanto $\left(\frac{4}{9}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

4.2.2. Objetos Primarios de las Tareas de la CE N°1

A continuación, establecemos un breve resumen de las objetos primarios involucrados en ambas actividades.

Elementos Lingüísticos

Los elementos lingüísticos que se ponen en juego para la solución de las tareas son de tipo verbal, algebraico y gráfico, puesto que las expresiones verbales se tendrán cuando el alumno tenga que responder con sus palabras lo solicitado en ambas tareas, en particular, en los últimos ítemes donde se pide que interprete qué sucede con las áreas y perímetros a medida que se realizan más iteraciones. Respecto al lenguaje algebraico, éste se utilizará para representar las magnitudes de las áreas y perímetros de cada uno de las figuras obtenidas, y la representación gráfica será utilizada cuando grafiquen el comportamiento de las áreas y perímetros obtenidos de la Actividad N°1. Por otra parte, los elementos de tipo geométrico que se utilizan son triángulos equiláteros y cuadrados en un contexto propio de la geometría euclideana.

Conceptos y/o Definiciones
Se observa que la iteración de la cantidad de triángulos y cuadrados está relacionada con el concepto de "infinito potencial", y se utilizan magnitudes para expresar el área y perímetro de las figuras geométricas obtenidos (correspondencia entre elementos geométricos y magnitudes numéricas). En el caso de la Actividad N°1 está involucrado el gráfico de una función discreta (ítem 6). Además, se utilizan las cantidades conmensurable (números racionales) e inconmensurable (números irracionales) éstas emergen cuando se determinan los perímetros y áreas de las figuras geométricas solicitadas.

Situaciones y/o Problemas
En cuanto a las situaciones y/o problemas, la actividad propuesta tiene por objetivo determinar las relaciones de los perímetros y de las áreas de las figuras geométricas obtenidas, así como también deducir de manera intuitiva su comportamiento (gráfica) del área y perímetro.

Procedimientos
Uno de los procedimientos involucrado en las tareas es el método de exhaución, pues se realiza una iteración "infinita" de triángulos (Actividad N°1) y cuadrados (Actividad N°2). Adicionalmente, se aplica las fórmulas de áreas de triángulos equiláteros y cuadrados, así como también la realización de gráficos de las áreas y perímetros en el caso de la Actividad N°1.

Propiedades/proposiciones
Las propiedades/proposiciones que se utiliza en ambas tareas es el método de exhaución el cual se basa en el Axioma de Arquímedes, es probable que las respuestas de los estudiantes no utilicen explícitamente esta proposición, pero la usarán de forma intuitiva cuando concluyan que, 'a mayor cantidad de iteraciones, las áreas de los triángulos (cuadrados) obtenidos van disminuyendo'.

Argumentos
Finalmente, para lograr una posible solución, sus razonamientos se basarán en la observación de las iteraciones que se obtienen en la figura geométrica y en el cálculo del área y perímetro de los triángulos y cuadrados en una cantidad finita de iteraciones, debido a este razonamiento el argumento será deductivo. Adicionalmente, los argumentos estarán basados en la geometría sintética, puesto que el estudiante utilizará estos razonamientos para llevar a cabo los objetivos de ambas tareas.

De acuerdo al análisis que acabamos de realizar y según la descripción de cada uno de los objetos matemáticos primarios que están involucrados en el desarrollo de las tareas propuestas, podemos afirmar que la Configuración Epistémica de las Tareas N°1 y N°2 se aproxima a la Configuración Epistémica "Límite como Aproximación en la Matemática Griega" (CE N°1). Para ilustrar lo anterior, hemos realizado de manera resumida la tabla 4.4 que permite visualizar los objetos matemáticos primarios de las Tareas N°1 y N°2.

Tabla 4.4: Configuración Epistémica N°1 de las Tareas N°1 y N°2

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°1 de las Tareas N°1 y N°2**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para expresar magnitudes de áreas y perímetros - Figuras geométricas de triángulos y cuadrados. - Tabulación de datos y gráficas de funciones.
Conceptos y/o definiciones	- Nociones de números racionales e irracionales - Nociones de infinito potencial - Nociones de funciones discretas
Procedimientos	- Aplicación de fórmulas de áreas y perímetros de triángulos equiláteros y cuadrados. - Utilización de tablas de datos y gráficos de funciones discretas.
Propiedades / Proposiciones	- Utilización del método de exhaución
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en las iteraciones de figuras geométricas. - Argumentos deductivos basados en las gráficas de las funciones que representan áreas y perímetros.

4.3. Construcción de Tareas de la CE N°2

Para llevar a cabo las tareas propuestas de esta configuración, primeramente se introducirá el Principio de Cavalieri para que los estudiantes puedan aplicarlo a las tareas propuestas.

Tarea N°3: Volumen de un Prisma

Principio 4.1. ***Principio de Cavalieri***
Se dan dos cuerpos sólidos de igual altura y un plano. Supongamos que todo plano paralelo al plano dado que intersecta a uno de los dos cuerpos, intersecta también al otro y da secciones transversales con áreas iguales. Entonces, los cuerpos tienen el mismo volumen.(Moise,1986,p.550)

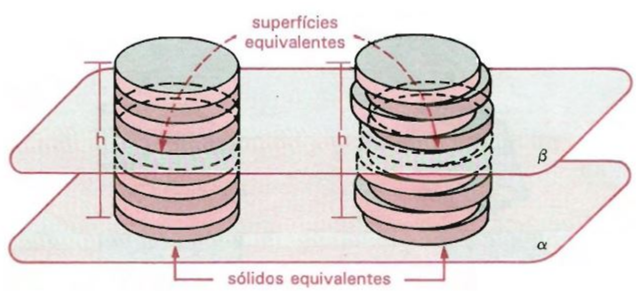


Figura 4.5: Principio de Cavalieri (Dolce y Pompeo (s.f., p.165))

1. Considere un prisma P_1 de altura h donde el área de su base es $B = B_1$ y un paralelepípedo recto de altura h de base $B_2 = B$. Supongamos que ambas figuras geométricas tienen sus bases en el mismo plano α tal como se muestra en la Figura (4.6).

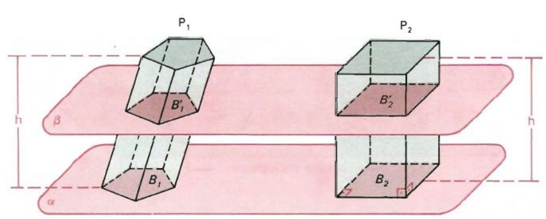


Figura 4.6: Volumen Prisma (Dolce y Pompeo (s.f.), p.166)

Si el plano β es paralelo al plano α, determinando las secciones transversales de áreas B_1' y B_2' del prisma y del paralelepípedo respectivamente. ¿Cómo son las áreas de dichas secciones?

2. ¿Se puede aplicar el Principio de Cavalieri a ambas figuras geométricas?

3. ¿Cuál es el volumen del prisma P_1?

Tarea N°4: Volumen del Cilindro

1. Considere un prisma P_1 de altura h donde el área de su base es $B = B_1$ y cilindro de altura h de base $B_2 = B$. Supongamos que ambas figuras geométricas tienen sus bases en el mismo plano α tal como se muestra en la Figura (4.7).

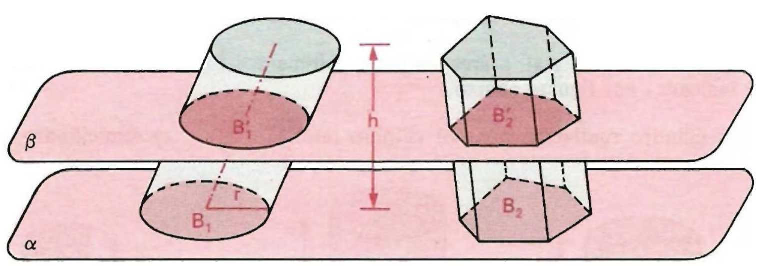


Figura 4.7: Volumen Cilindro (Dolce y Pompeo (s.f.), p.221)

Si el plano β es paralelo al plano α, determinando las secciones transversales de áreas B_1' y B_2' del prisma y del cilindro respectivamente. ¿Cómo son las áreas de dichas secciones?

2. ¿Se puede aplicar el Principio de Cavalieri a ambas figuras geométricas?

3. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

4. Supongamos que puedes sumar cada una de las áreas transversales obtenidas en el cilindro. ¿Cómo expresarías el volumen del cilindro? (Explica con tus propias palabras)

Tarea N°5: Volumen de la Esfera

1. Suponga que una esfera de radio r es tangente a un plano α, que el cilindro tiene base en α cuya base tiene radio r. Además, considere el sólido X que se encuentra entre los dos conos y el cilindro como se muestra en la Figura (4.8). Donde el vértice de los conos está a la misma altura que el centro de la esfera, además la altura del cilindro es igual al diámetro de la esfera.

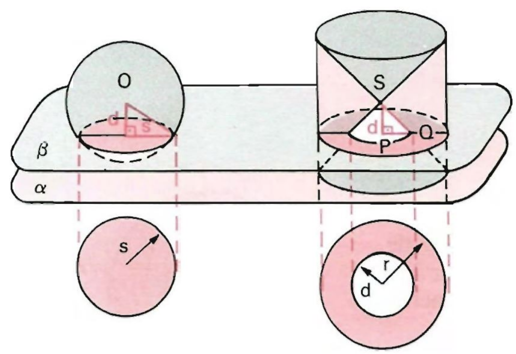


Figura 4.8: Volumen de la Esfera (Dolce y Pompeo (s.f.), p.253)

2. Considere el plano β paralelo al plano α, el cual está a una distancia d del centro de la esfera, dicho plano también intersecta el sólido X y dista de la misma distancia a los vértices de ambos conos. ¿Cuál es el área de la sección transversal que determina el plano β en la esfera?

3. ¿Cuál es el área de la sección transversal que determina el plano β en el sólido X? ¿Cómo son las áreas de las secciones transversales de la esfera y de X?

4. ¿Se puede aplicar el Principio de Cavalieri a ambas figuras geométricas?

5. Considere que el volumen del cono es

$$\frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h,$$

donde A_b es el área de la base circular del cono y h es la altura del cono. ¿Cuál es el volumen de la esfera?

6. Supongamos que puedes sumar cada una de las áreas transversales obtenidas en la esfera. ¿Cómo expresarías el volumen de la esfera? (Explica con tus propias palabras)

4.3.1. Descripción de las Posibles Respuestas

Tareas N°3 y N°4

Debido a las similitudes de las tareas N°3 y N°4 realizaremos una breve descripción de las posibles respuestas que pueden desarrollar los estudiantes.

Como las secciones transversarles determinadas por el plano β son congruentes con sus bases respectivas, se tiene que las áreas son iguales, es decir, $B_1 = B_1'$ y $B_2 = B_2'$, como $B_1 = B_2 = B$ se tienen que las áreas de las secciones transversales son iguales. Es decir, que independiente del plano β se tendrá que las áreas de las secciones transversales so iguales.

Por otra parte, se tiene que ambas figuras tienen igual altura, luego podemos aplicar el Principio de Cavalieri, pues todas las secciones transversales respectivamente poseen igual área, lo que podemos concluir que en la tarea N°3 se tiene que:

$$V_{prisma} = V_{paralelepipedo} = \text{Área basal} \cdot \text{ altura},$$

es decir, independiente de la forma del prisma (si es recto o no) su volumen siempre será igual a

$$V_{prisma} = \text{Área basal} \cdot \text{ altura}.$$

Con respecto a la Tarea N°4 al aplicar el Principio de Cavalieri, se tiene que:

$$V_{cilindro} = V_{prisma} = \textit{Área basal} \cdot \text{ altura},$$

es decir, el volumen del cilindro (independiente si es recto o no) siempre será igual a

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

donde el r es el radio del círculo basal del cilindro y h es la altura del cilindro.

Tarea N°5

Según las indicaciones que se tienen en la tareas N°5, se observa que el área de la sección transversal obtenida al intersectar el plano β con la esfera corresponde a un círculo, por tanto, su área es:

$$\textit{Área Sección Trans. Esfera} = \pi \cdot s^2.$$

Por teorema de Pitágoras aplicado al triángulo que se visualiza en la Figura (7.6), se tiene:

$$\textit{Área Sección Trans. Esfera} = \pi \cdot s^2 = \pi \cdot (r^2 - d^2).$$

Por otra parte, el área de la sección transversal del sólido X, es el área de un anillo circular, donde el radio del círculo mayor es r y el radio del círculo menor es d, es decir,

$$\textit{Área Sección Trans.}\, X = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot d^2.$$

Como las áreas de las secciones transversales de la esfera y el sólido X son iguales y ambos cuerpos poseen la misma altura (diámetro de la esfera),se puede aplicar el Principio de Cavalieri, luego la esfera y el sólido X poseen el mismo volumen, es decir,

$$V_{Esfera} = V_{solido\,X},$$

donde

$$\begin{aligned}
V_{solido\,X} &= V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cono} \\
&= A_b \cdot h - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h\right) \\
&= \pi \cdot r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r\right) \\
&= \pi \cdot r^2 \cdot 2r - \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen de la esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

4.3.2. Objetos Primarios de las Tareas de la CE N°2

A continuación, establecemos un breve resumen de las objetos primarios involucrados en las tres tareas propuestas.

Elementos Lingüísticos

Los elementos lingüísticos que se ponen en juego para la solución de las tareas son de tipo verbal y algebraico, puesto que las expresiones verbales se tendrán cuando el alumno tenga que responder por medio de sus propias palabras y argumentos la justificación y aplicación del Principio de Cavalieri. Con respecto al lenguaje algebraico, éste se utilizará para representar las magnitudes de las áreas de las secciones transversales así como también el volumen de los cuerpos geométricos tales como el prisma, cilindro y esfera. Por otra parte, los elementos de tipo geométrico que se utilizan son cuerpos geométricos tales como: prismas, cilindro, conos y esferas. Adicionalemente, se utilizan figuras geométricas planas tales como: planos, círculos, polígonos, triángulos, etc. Todos estos elementos son utilizados en un contexto propio de la geometría euclideana plana y espacial.

Conceptos y/o Definiciones

Se observa que las secciones transversales utilizadas en las tres actividades están relacionadas con los *indivisibles*, si bien no se utiliza este concepto de manera directa, es la concepción de indivisibles que está involucrada en el Principio de Cavalieri. Debido al lenguaje moderno que hoy en día se utiliza en el curriculum y en los textos es que en la actividad se refiere a los indivisibles como secciones transversales. Por otra parte, se utilizan cantidades inconmensurables (por ejemplo, el número π) para expresar magnitudes como volúmenes y áreas.

Situaciones y/o Problemas

En cuanto a las situaciones y/o problemas, las actividades propuestas son las *situciones y/o problemas* que tienen por objetivo deducir el volumen del prisma, cilindro y esfera por medio de la aplicación del Principio de Cavalieri.

Procedimientos

Los procedimientos involucrados en las tareas es la aplicación de los indivisibles por medio de la utilización del Principio de Cavalieri, aunque los estudiantes los utilicen con otro nombre (secciones transversales). Adicionalmente, se utilizan procedimientos algebraicos para representar el área de las secciones transversales así como también la obtención de los volúmenes de los cuerpos geométricos.

Propiedades/proposiciones

Las propiedades/proposiciones que se utiliza en las tareas propuestas es el Principio de Cavalieri el cual involucra la concepción de los indivisibles, el cual utilizarán de manera directa para determinar los volúmenes de los cuerpos geométricos solicitados. Además, utilizarán las proposiciones asociadas a las fórmulas de áreas de figuras planas como polígonos, círculos y anillos circulares; así como también fórmulas de volumen de cuerpos geométricos conocidos como paralelepípedos y conos.

Argumentos

Finalmente, para lograr una posible solución, sus razonamientos se basarán en la observación de las secciones transverales obtenidas entre el plano β, y los cuerpos geométricos involucrados. Así como también tendrán que analizar si se tienen las condiciones del Principio de Cavalieri para la deducción de los volúmenes de los cuerpos geométricos solicitados. En resumen, los argumentos estarán basados en la geometría sintética, puesto que el estudiante utilizará estos razonamientos para llevar a cabo los objetivos de las tareas propuestas.

De acuerdo a la descripción de cada uno de los objetos matemáticos primarios que están involucrados en las tareas propuestas y dada la proximidad de dichos objetos con la CE N°2. Se afirma que éstas tareas se identifican con la Configuración Epistémica “Límite en la concepción de los indivisibles” (CE N°2). Para ilustrar lo anterior, hemos realizado de manera resumida la tabla 4.5 que permite visualizar los objetos matemáticos primarios de las Tareas N°3,4 y N°5.

Tabla 4.5: Configuración Epistémica N°2 de las Tareas N°3,4 y N°5

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°2 de las Tareas N°3,4 y N°5**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para señalar magnitudes de áreas de secciones transversales y volúmenes de cuerpos geométricos. - Elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría euclideana.
Conceptos y/o definiciones	- Nociones de números racionales e irracionales. - Nociones de volumen de un cuerpo geométrico - Noción de indivisible (sección transversal)
Procedimientos	- Aplicación de fórmulas de áreas de figuras geométricas planas. - Aplicación de fórmulas de volúmenes de cuerpos geométricos. -Aplicación del uso de los indivisibles.
Propiedades / Proposiciones	- Utilización del Principio de Cavalieri
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en la obtención de los volúmenes de cuerpos geométricos de prismas, cilindros y esfera. - Argumentos deductivos basados en la geometría euclideana.

4.4. Construcción de Tareas de la CE N°3

A continuación, se describen las Tareas propuestas para la Configuración Epistémica N°3, la primera tarea está sustentada en los Lemas I y II de Newton (ver Capítulo 3).

Tarea N°6: Aproximación del área bajo la Curva

Considere la función $f(x) = -x^2 + 1$, en el intervalo $[-1, 1]$ tal como se muestra en la figura.

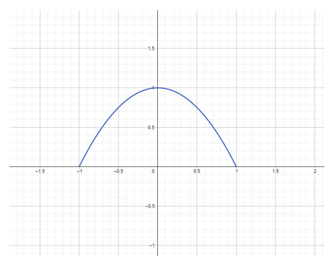


Figura 4.9: Gráfico de la función $f(x) = -x^2 + 1$ en $[-1, 1]$

1. Considere rectángulos inscrito y circunscrito a la gráfica de ancho $\frac{1}{2}$ *unid*. Sume el área de los rectángulo inscritos y sume el área de los rectángulos circunscritos obtenidos según la figura.

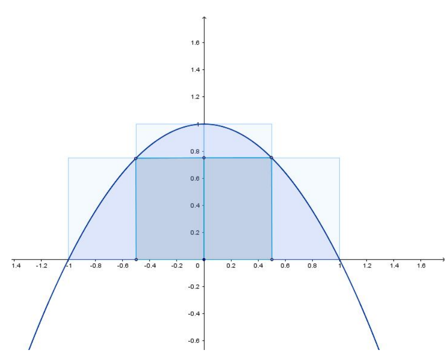


Figura 4.10: Rectángulos inscritos y circunscritos de $f(x) = -x^2 + 1$ en $[-1, 1]$

2. Considere rectángulos inscritos y circunscritos a la gráfica de ancho $\frac{1}{3}$ *unid*. Sume el área de los rectángulos inscritos y sume el área de los rectángulos circunscritos obtenidos según la figura.

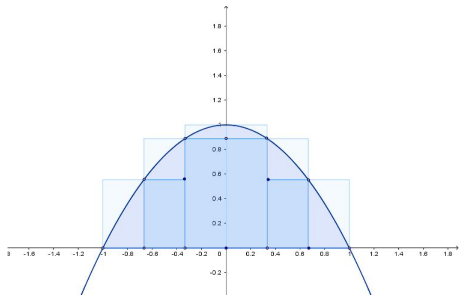


Figura 4.11: Rectángulos inscritos y circunscritos

3. Considere rectángulos inscrito y circunscrito a la gráfica de ancho $\frac{1}{4}\,unid$. Sume el área de los rectángulos inscritos y sume el área de los rectángulos circunscritos obtenidos según la figura.

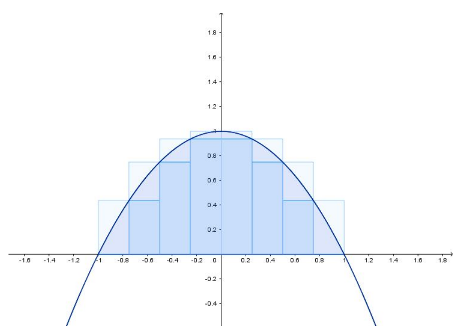


Figura 4.12: Rectángulos inscritos y circunscritos

4. Compara las sumas de los rectángulos inscritos cuando tienen ancho $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es mayor? ¿Cuál es menor?

5. Compara las sumas de los rectángulos circunscritos cuando tienen ancho $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es mayor? ¿Cuál es menor?

   Abre el siguiente applet en GeoGebra `https://www.geogebra.org/m/t9btwfen`. Cambia el valor de n (cantidad de rectángulos) y responde:

6. ¿Qué pasa con las áreas de los rectángulos inscritos a medida que el ancho de éste va disminuyendo cada vez más?

7. ¿Qué pasa con las áreas de los rectángulos circunscritos a medida que el ancho de éste va disminuyendo cada vez más?

8. ¿Qué puedes decir sobre las áreas de los rectángulos inscritos con respecto al área bajo la curva?

9. ¿Qué puedes decir sobre las áreas de los rectángulos circunscritos con respecto al área bajo la curva?

10. Interpreta con tus palabras la siguiente figura:

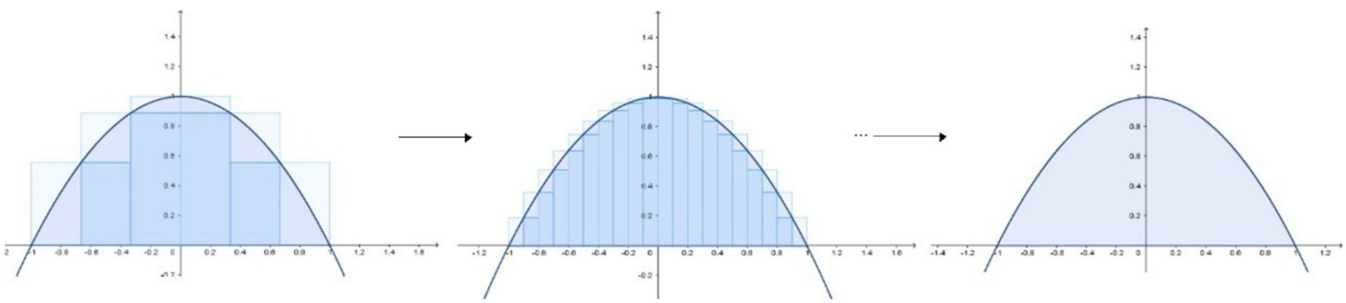


Figura 4.13: Procesos Infinitos (Creación Propia)

4.4.1. Descripción de las Posibles Respuestas

Para responder los ítemes (1),(2) y (3), dibujamos los rectángulos inscritos y circunscritos como se muestra en la Figura (4.14):

Notamos que hay dos rectángulos inscritos (izquierda a derecha) que tienen área:

$$\begin{aligned}
A_{rect_1} &= \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{-1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \\
A_{rect_2} &= \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

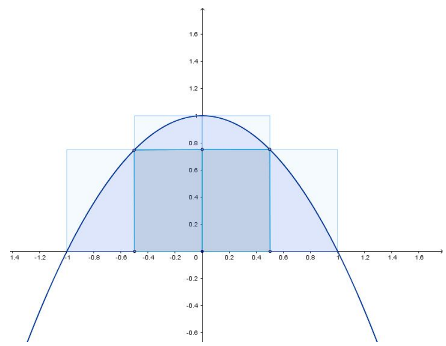


Figura 4.14: Rectángulos inscritos y circunscritos de ancho $\frac{1}{2}\,unid.$

Luego, la suma de los rectángulos inscritos es $s_{1/2} = \frac{3}{4} = 0,75$. Por otra parte, hay cuatro rectángulos circunscritos a la gráfica de f y sus áreas (de izquierda a derecha) son:

$$\begin{aligned}
A_{Rect_1} &= \frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{3}{8}\\
A_{Rect_2} &= \frac{1}{2}\cdot f(0) = \frac{1}{2}\\
A_{Rect_3} &= \frac{1}{2}\cdot f(0) = \frac{1}{2}\\
A_{Rect_4} &= \frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Así, la suma de los rectángulos circunscritos $S_{1/2} = \frac{7}{4} = 1,75$. Respecto al ítem (2) se tiene la Figura (4.15):

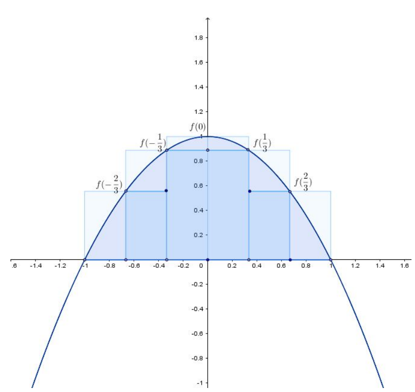


Figura 4.15: Rectángulos inscritos y circunscritos de ancho $\frac{1}{3}\,unid.$

Notamos que hay cuatro rectángulos inscritos (izquierda a derecha) que tienen área:

$$\begin{aligned} A_{rect_1} &= \frac{1}{3}\cdot f\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{5}{27}\\ A_{rect_2} &= \frac{1}{3}\cdot f\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{8}{27}\\ A_{rect_3} &= \frac{1}{3}\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{27}\\ A_{rect_4} &= \frac{1}{3}\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{27} \end{aligned}$$

Luego, la suma de los rectángulos inscritos es $s_{1/3}=\frac{26}{27}=0,\overline{962}$. Por otra parte, hay seis rectángulos circunscritos a la gráfica de f y sus áreas (de izquierda a derecha) son:

$$\begin{aligned} A_{Rect_1} &= \frac{1}{3}\cdot f\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{5}{27}\\ A_{Rect_2} &= \frac{1}{3}\cdot f\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{8}{27}\\ A_{Rect_3} &= \frac{1}{3}\cdot f(0)=\frac{1}{3}\\ A_{Rect_4} &= \frac{1}{3}\cdot f(0)=\frac{1}{3}\\ A_{Rect_5} &= \frac{1}{3}\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{27}\\ A_{Rect_6} &= \frac{1}{3}\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{27} \end{aligned}$$

Así, la suma de los rectángulos circunscritos es $S_{1/3}=\frac{44}{27}=1,\overline{629}$. El ítem (3) se realiza de manera análoga, su gráfica es la siguiente:

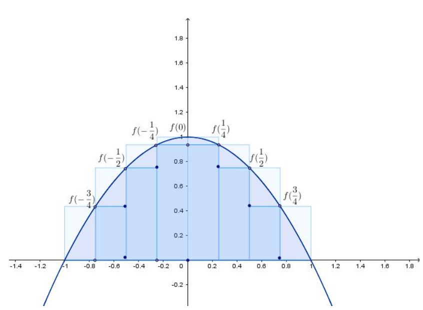


Figura 4.16: Rectángulos inscritos y circunscritos de ancho $\frac{1}{4}$ *unid.*

Notamos que hay seis rectángulos inscritos (izquierda a derecha) que tienen área:

$$\begin{aligned}
A_{rect_1} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{7}{64}\\
A_{rect_2} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{3}{16}\\
A_{rect_3} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{15}{64}\\
A_{rect_4} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{64}\\
A_{rect_5} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}\\
A_{rect_6} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{64}.
\end{aligned}$$

Luego, la suma de los rectángulos inscritos es $s_{1/4} = \frac{17}{16} = 1,0625$. Por otra parte, hay ocho rectángulos circunscritos a la gráfica de f y sus áreas (de izquierda a derecha) son:

$$\begin{aligned}
A_{Rect_1} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{7}{64}\\
A_{Rect_2} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{3}{16}\\
A_{Rect_3} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{15}{64}\\
A_{Rect_4} &= \frac{1}{4}\cdot f(0) = \frac{1}{4}\\
A_{Rect_5} &= \frac{1}{4}\cdot f(0) = \frac{1}{4}\\
A_{Rect_6} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{64}\\
A_{Rect_7} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}\\
A_{Rect_8} &= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{64}
\end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que la suma de los rectángulos circunscritos es $S_{1/4} = \frac{25}{16} = 1,5625$. Así para responder el ítem (4) tenemos que la suma de los rectángulos inscritos con ancho $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$, respectivamente es:

$$s_{1/2} = \frac{3}{4} = 0,75 < s_{1/3} = \frac{26}{27} = 0,\overline{962} < s_{1/4} = \frac{17}{16} = 1,0625.$$

Por tanto, a medida que el ancho del rectángulo va disminuyendo las sumas de los rectángulos inscritos va aumentando. Por otra parte, tenemos que la suma de los rectángulos inscritos con ancho $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$, respectivamente son:

$$S_{1/4} = \frac{25}{16} = 1,5625 < S_{1/3} = \frac{44}{27} = 1,\overline{629} < S_{1/2} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

Así a medida que el ancho del rectángulo va disminuyendo las sumas de los rectángulos circunscritos va disminuyendo.

Por otra parte, para responder los ítemes (6) y (7) el estudiante tiene que interactuar con el applet de GeoGebra y observar que a medida que el ancho de los rectángulos disminuye la suma de los rectángulos inscritos se aproxima cada vez más al área debajo de la curva, de manera análoga, concluir que si el ancho de los rectángulos disminuye la suma de los rectángulos circunscritos se aproxima cada vez más al área debajo de la curva. Tal como se muestra en la Figura (4.17):

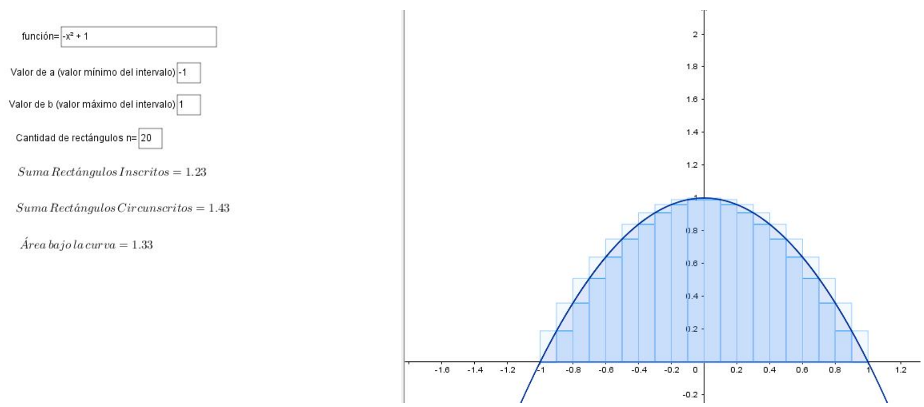


Figura 4.17: Rectángulos inscritos y circunscritos de ancho $\frac{1}{20}$ *unid*.

4.4.2. Objetos Primarios de las Tareas de la CE N°3

A continuación, establecemos un breve resumen de las objetos primarios involucrados en ambas actividades.

Elementos Lingüisticos

Los elementos lingüísticos que se ponen en juego para la solución de las tareas son de tipo verbal, algebraico y gráfico, puesto que las expresiones verbales se tendrán cuando el alumno tenga que responder con sus palabras lo solicitado en la actividad, en particular, deberá interpretar la representación gráfica dada por el último ítem. Respecto al lenguaje algebraico, éste se utilizará para representar las magnitudes de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos a la gráfica de la función, por otra parte, la representación gráfica es utilizada para representar el área bajo la gráfica de la función y los rectángulos inscritos y circunscritos a ésta. Es importante destacar, que los elementos de tipo geométrico que se utilizan están dentro del contexto propio de la geometría analítica.

Conceptos y/o Definiciones

Se observa que la iteración de la cantidad de rectángulos inscritos y circunscritos está relacionada con el concepto de límite propuesto en el Lema II que señala: " ... la amplitud de dichos paralelogramos podría disminuir y su número ser aumentado hasta el infinito; es decir, que las razones últimas están relacionadas entre sí, a su vez, la figura inscrita $AKbLvMdD$, la figura circunscrita $AalbmcndoE$, y la figura curvilínea, son razones iguales" (Newton, 126/2011, p. 157).

Situaciones y/o Problemas

En cuanto a las situaciones y/o problemas, la actividad propuesta tiene por objetivo deducir que la sumas de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos tienden a aproximar al área bajo la gráfica de la función f, y la aproximación es mucho mejor cuando se tiene un número mayor de rectángulos cuyas longitudes basales son de una medida muy pequeña.

Procedimientos

Uno de los procedimientos involucrado en las tareas son de tipo aritmético y geométrico analítico al determinar las longitudes de los rectángulos inscritos y circunscritos, para calcular sus áreas y sumarlas. Además, hay procedimientos relacionados con el "infinito potencial" al analizar de manera intuitiva la cantidad de rectángulos y sus áreas en el applet propuesto.

Propiedades/proposiciones

Las propiedades/proposiciones que se utiliza en la tarea propuesta es el *Lema II*, es probable que las respuestas de los estudiantes no utilicen explícitamente esta proposición, pero la usarán de forma intuitiva cuando concluyan que, 'a mayor cantidad de rectángulos inscritos (circunscritos) la suma de sus áreas se acerca más al área bajo la gráfica de la función'.

Argumentos

Finalmente, para lograr una posible solución, sus razonamientos se basarán en la observación de la cantidad de rectángulos inscritos y circunscritos a la gráfica de la función, así como también tendrán que estudiar el área de éstos para intuir que a mayor cantidad de rectángulos la suma de sus áreas tienden a aproximarse al área bajo la curva. Debido a estos razonamientos, el argumento será del tipo deductivo. Adicionalmente, los argumentos estarán basados en la geometría analítica, puesto que el estudiante utilizará estos razonamientos para llevar a cabo los objetivos propuesto en la tarea.

De acuerdo la descripción que acabamos de realizar de cada uno de los objetos matemáticos primarios que están involucrados en la tarea propuesta, se afirma que el desarrollo de ésta se identifica con la Configuración Epistémica "La noción intuitiva de límite de Newton" (CE N°3). Para ilustrar lo anterior, hemos realizado de manera resumida la tabla 4.6 que permite visualizar los objetos matemáticos primarios de la Tarea N°6.

Tabla 4.6: Configuración Epistémica N°3 de la Tarea N°6

Objetos Matemáticos Primarios	Configuración Epistémica N°3 de la Tarea N°6
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas de magnitudes de áreas de rectángulos. - Expresiones del tipo geométrico propias de la geometría analítica, como gráfica de una función, área bajo la gráfica, rectángulos inscritos y circunscritos.
Conceptos y/o definiciones	- Noción de comparación de magnitudes entre áreas de rectángulos inscritos y circunscritos. - Noción de aproximación de las áreas de rectángulos inscritos y circunscritos al área bajo la curva. - Nociones de infinito potencial - Noción de cantidades evanescentes (tienden a cero)
Procedimientos	- Utilización del "infinito potencial" para inscribir y circunscribir rectángulos a la gráfica de la curva. -Procedimientos aritméticos asociados al cálculo de áreas, sumas de áreas, etc. - Procedimientos propios de la geometría analítica.
Propiedades / Proposiciones	- Utilización de la comparación de áreas entre rectángulos inscritos y circunscritos, y comparación de dichas áreas con el área bajo la gráfica de una función.
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en la aproximación del área bajo la curva. - Argumentos deductivos basados en la geometría analítica.

4.5. Construcción de Tareas de la CE N°4

Para llevar a cabo las tareas propuestas de esta configuración, primeramente estudiaremos la noción de infinitesimal.

Tarea N°7: Infinitesimales

Definición 4.1. *Consideraremos una cantidad muy pequeña de x como $\triangle x$, esta cantidad puede ser tan pequeña como queramos. Si f es una función, el incremento de la función $\triangle y$ correspondiente al incremento del argumento $\triangle x$ se tiene de:*

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x).$$

Para ilustrar la definición observa la gráfica (4.18).

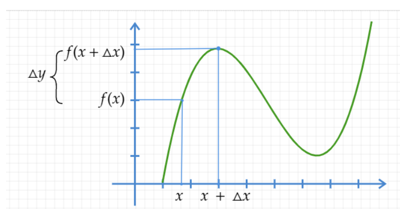


Figura 4.18: Gráfica de infinitesimales $\triangle x$ y $\triangle y$ (Creación Propia).

Definición 4.2. *La razón de cambio promedio de la función y en el intervalo de valores del argumento desde x hasta $\triangle x$ se expresa por la razón*

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

1. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{7}(x-2)^2 + 3$. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de f cuando x se incrementa en $\triangle x$?

2. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de f cuando x cambia de 4 a $4,5$?

3. Si $\triangle x$ es muy pequeño, tanto como quisieras. ¿Qué pasa con la razón de cambio promedio? ¿Cuál es la expresión algebraica resultante?

4. Observa el siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/pxjuazn7` y mueve el deslizador a.

a) Considera la recta secante que une a los puntos A y B. ¿Qué representa la expresión $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$?

b) Si $\triangle x$ se aproxima a 0. ¿A qué valor se aproxima la razón de cambio $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$?

c) Mueve el deslizador a. Observa la recta secante y tangente a la función en el punto $(4, f(4))$. ¿Qué sucede con las rectas cuando $\triangle x$ se aproxima a 0?

d) Observa la expresión algebraica obtenida en el ítem (3).¿Qué relación tiene dicha expresión algebraica con la recta tangente del ítem anterior?

4.5.1. Descripción de las Posibles Respuestas

Para responder los ítemes (1) y (2) debemos determinar la razón de cambio promedio de $f(x) = \dfrac{1}{7}(x-2)^2 + 3$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\triangle y}{\triangle x} &= \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} \\
&= \frac{\frac{1}{7}(x+\triangle x-2)^2 + 3 - \frac{1}{7}(x-2)^2 + 3}{\triangle x} \\
&= \frac{\frac{1}{7}[(x+\triangle x-2)^2 - (x-2)^2}{\triangle x} \\
&= \frac{1}{7}\frac{(\triangle x^2 + 2x\triangle x - 4\triangle x)}{\triangle x} \\
&= \frac{1}{7}(\triangle x + 2x - 4).
\end{aligned}$$

Por tanto, la razón de cambio promedio es $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{1}{7}(\triangle x + 2x - 4)$. De esta manera para responder el ítem (2) se tiene que si $x = 4$ y varía a $4,5$, luego $\triangle x = 0,5$. Así la razón de cambio de $x = 4$ cuando se incrementa a $4,5$ es:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{7}(\triangle x + 2\cdot 4 - 4) = \frac{9}{14}.$$

Para responder el ítem (3), simplemente hacemos $\triangle x \to 0$, luego

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} \to \frac{1}{7}(2x-4) = \frac{2}{7}(x-2).$$

Para responder el ítem (4), (5), (6) y (7) se debe observar el applet de geogebra y deslizar el punto B, realizando esta acción el estudiante debería deducir que $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ es la pendiente de la recta secante que une los puntos A y B.

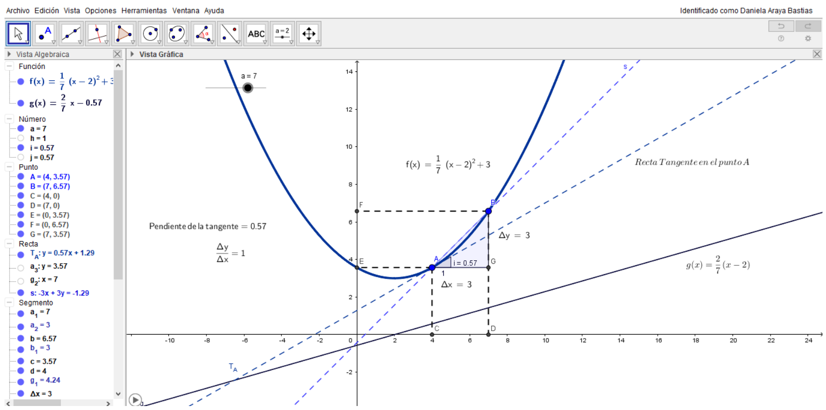


Figura 4.19: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{7}(x-2)^2 + 3$ y sus infinitesimales $\triangle x$ y $\triangle y$ (Creación Propia).

Para responder el ítem (6), el estudiante debería observar que a medida que $\triangle x \to 0$ se tiene que $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} \to 0,57$. Además, debería observar que si $\triangle x \to 0$ se tiene que la recta secante tiende a la recta tangente de la curva en el punto $(4, f(4))$. Con esta información, el estudiante puede responder el ítem (7) deduciendo lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \textit{Recta secante}_{(A,B)} & \to_{\triangle x \to 0} & \textit{Recta tangente}_{(4,f(4))} \\ \textit{Pendiente recta secante}_{(A,B)} & \to_{\triangle x \to 0} & \textit{Pendiente recta tangente}_{(4,f(4))} \\ \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{1}{7}(\triangle x + 2x - 4) & \to_{\triangle x \to 0} & \dfrac{2}{7}(x-2) \\ \text{Si } x = 4 \Rightarrow \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{1}{7}(\triangle x + 4) & \to_{\triangle x \to 0} & \dfrac{4}{7} \approx 0,57. \end{array}$$

4.5.2. Objetos Primarios de las Tareas de la CE N°4

A continuación, establecemos un breve resumen de las objetos primarios involucrados en tarea propuesta.

Elementos Lingüísticos

Los elementos lingüísticos que se ponen en juego para la solución de las tareas son de tipo verbal, algebraico y gráfico, puesto que las expresiones verbales se tendrán cuando el alumno tenga que responder con sus palabras lo solicitado en la actividad. Respecto al lenguaje algebraico, éste se utilizará para representar los infinitesimales $\triangle x, \triangle y$; la razón de cambio promedio $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$, expresiones analíticas de las rectas, etc. Por otra parte, la representación gráfica es utilizada en el applet de GeoGebra para representar la gráfica de la función, los infinitesimales, las rectas secantes entre A y B, la recta tangente en el punto $(4, f(4))$, etc. Cabe destacar que los elementos de tipo geométrico que se utilizan están dentro del contexto propio de la geometría analítica.

Conceptos y/o Definiciones

Se utilizan los infinitesimales $(\triangle x, \triangle y)$ y se aplica su propiedad de que pueden ser 'una cantidad tan pequeña como se quiera (inclusive que sea cero)'. Adicionalmente, se utiliza de manera implícita la noción de "infinito actual" al utilizar el infinitesimal tan pequeño como se quiera.

Situaciones y/o Problemas

En cuanto a las situaciones y/o problemas, la actividad propuesta tiene por objetivo deducir que la recta secante que une los puntos A y B tiende a la recta tangente en el punto $(4, f(4))$, a medida que $\triangle x$ se hace muy pequeño. Y también deducir que la pendiente de la recta secante $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ se aproxima a la pendiente de la recta tangente en el punto A.

Procedimientos

Uno de los procedimientos involucrado en las tareas son de tipo aritmético al determinar la razón de cambio promedio y las pendientes de las rectas. Adicionalmente, hay procedimientos del tipo geométrico analítico, ya que hay que observar la gráfica de la función así como también las rectas secantes y tangente en el punto A. Por otra parte, hay procedimientos relacionados con el "infinito actual" al pensar de manera intuitiva que $\triangle x$ puede ser tan pequeño como queramos (inclusive cero).

Propiedades/proposiciones

Las propiedades/proposiciones que se utiliza en la tarea propuesta son propias del cálculo infinitesimal, puesto que se utiliza la operatoria de las magnitudes infinitamente pequeñas. Es importante destacar que las respuestas de los estudiantes no utilizan explícitamente estas proposiciones, pero la usarán de forma intuitiva cuando concluyan que 'mientras más pequeño la cantidad $\triangle x$ la recta secante se acerca más a la recta tangente en el punto A.'

Argumentos

Finalmente, para lograr una posible solución, sus razonamientos se basarán en la observación de las rectas secantes y la recta tangente, como tendrán que deducir que la razón de cambio promedio se aproxima a la pendiente de la recta tangente en el punto A sus argumentos se basarán en la geometría analítica. Adicionalmente, al intuir que $\triangle x$ es tan pequeña como se quiera, se entiende que el intervalo no tiene saltos ni discontinuidades, esta concepción se fundamenta en el "principio general de continuidad" y en el concepto del "continuo" introducido por Leibniz (Ver Capítulo 3).

Dada la proximidad de la descripción que acabamos de realizar de cada uno de los objetos matemáticos primarios que están involucrados en la tarea propuesta, se afirma que el desarrollo de ésta se identifica con la Configuración Epistémica "La idea de los infinitesimales de Leibniz" (CE N°4). Para ilustrar lo anterior, hemos realizado de manera sintetizada la tabla 4.7 que permite visualizar los objetos matemáticos primarios de la Tarea N°7.

Tabla 4.7: Configuración Epistémica N°4 de la Tarea N°7

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°4 de la Tarea N°7**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para representar infinitesimales, razón de cambio promedio, rectas, funciones, etc. - Expresiones propias de la geometría analítica como: infinitesimal, gráfica de una función, rectas secantes y recta tangente a la gráfica de una función.
Conceptos y/o definiciones	- Noción de infinitesimal. - Noción de infinito actual - Noción de números racionales e irracionales.
Procedimientos	- Utilización del "infinito actual" para señalar que el infinitesimal es una cantidad tan pequeña como se quiera. -Procedimientos aritméticos asociados al uso de infinitesimal para el cálculo de razón de cambio promedio. - Procedimientos propios de la geometría analítica.
Propiedades / Proposiciones	- Aplicación de propiedades en la operatoria algebraica de infinisitesimales en el cálculo de razón de cambio promedio, etc.
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en la aproximación de las rectas secantes a la recta tangente por medio de manera geométrica y algebraica.

4.6. Construcción de Tareas de la CE N°5

Para comenzar con las tareas de la CE N°5, primero introduciremos las siguientes nociones necesarias para el desarrollo de las actividades.

Tarea N°8: Sucesiones

Definición 4.3. *Una sucesión es una función* $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ *tal que a cada* n *le asigna* $f(n) = a_n$*. También suele denotarse como* $\{a_n\}$ *y a* a_n *se le llama término general de la sucesión.*

Definición 4.4. *Diremos que una sucesión es* ***acotada*** *si existe un número positivo* M *tal que* $|a_n| < M$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.5. *Diremos que una sucesión es:*
(i) ***estrictamente creciente*** *si* $a_n < a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) ***creciente*** *si* $a_n \leq a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(iii) ***estrictamente decreciente*** *si* $a_n > a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(iv) ***decreciente*** *si* $a_n \geq a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(v) ***monótona*** *si satisface cualquiera de las condiciones anteriores.*

Observa la gráfica que se encuentra en el siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/spwswfcv`. La gráfica en el applet (Figura (4.20)) representa la sucesión $\{a_n\}$.

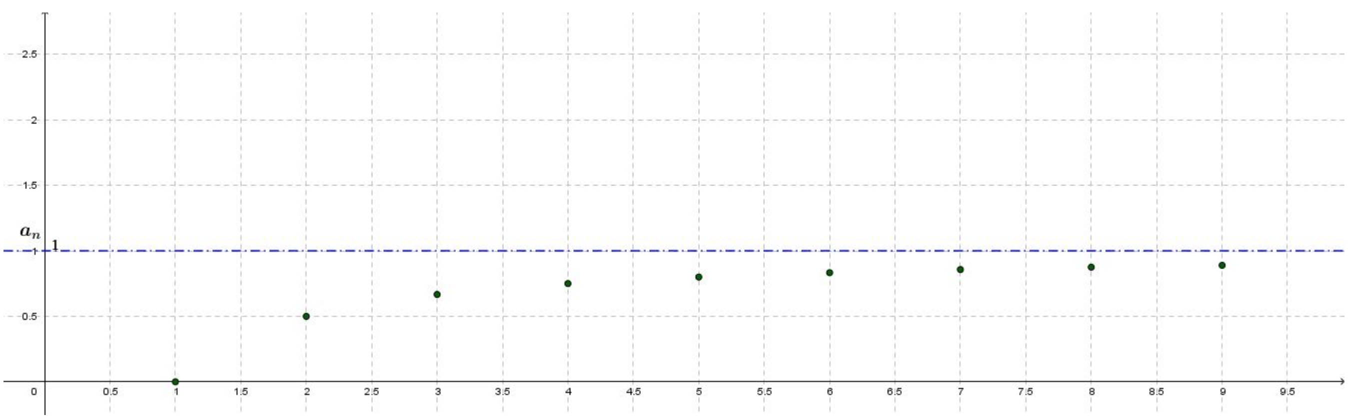


Figura 4.20: Gráfica de la sucesión a_n

1. ¿La sucesión es monotona? Si es así, ¿es creciente o decreciente? Justifica tu respuesta.
2. ¿La sucesión está acotada? Justifica tu respuesta.
3. Determina el término general de la sucesión.
4. ¿A medida que n toma valores muy grandes, donde se aproxima la sucesión? ¿Por qué?
5. Si ε es el radio del intervalo con centro 1, es decir, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. ¿A partir de qué $n_0 \in \mathbb{N}$ los términos de la sucesión están dentro de ese intervalo? Para responder la pregunta completa la siguiente tabla:

Tabla 4.8: Valores de ε y n_0

n_0	a_{n_0}	ε	$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$
2	1/2	1	$(0, 2)$
		0.1	$(0.9, 1.1)$
		0.01	
		0.001	
		0.0001	

6. ¿Qué pasa si el valor ε es más pequeño que los valores propuestos en la tabla, ¿existirá un n_0 tal que $a_{n_0} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$?
7. ¿Qué condiciones tiene que tener ε y la sucesión a_n para que 1 sea su límite?

Tarea N°9

Observa la gráfica que se encuentra en el siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/svpzgfmm`. La gráfica en el applet (Figura (7.14) representa la sucesión $\{b_n\}$.

1. ¿La sucesión es monotona? Si es así, ¿es creciente o decreciente? Justifica tu respuesta.
2. ¿La sucesión está acotada? Justifica tu respuesta.
3. Determina el término general de la sucesión.
4. ¿A medida que n toma valores muy grandes, donde se aproxima la sucesión? ¿Por qué?

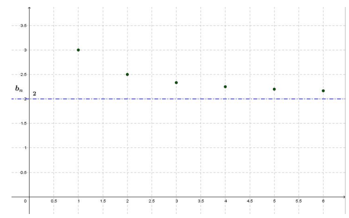


Figura 4.21: Gráfica de la sucesión b_n

5. Si ε es el radio del intervalo con centro 2, es decir, $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$. ¿A partir de qué $n_0 \in \mathbb{N}$ los términos de la sucesión están dentro de ese intervalo? Para responder la pregunta completa la siguiente tabla:

Tabla 4.9: Valores de ε y n_0

n_0	b_{n_0}	ε	$(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$
2	5/2	1	$(1, 3)$
		0.1	$(1.9, 2.1)$
		0.01	
		0.001	
		0.0001	

6. ¿Qué pasa si el valor ε es más pequeño que los valores propuestos en la tabla, ¿existirá un n_0 tal que $b_{n_0} \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$?

7. ¿Qué condiciones tiene que la sucesión b_n para que 2 sea su límite?

8. Analiza las gráficas de las sucesiones $c_n = 2^n$ y $d_n = 1 - 3n$ con su respectiva tabla de datos. ¿Son sucesiones monótonas? ¿Poseen límites?

9. ¿Qué condiciones tiene que tener una sucesión monótona para que ésta tenga límite?

Tarea N°10

Utiliza el siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/vqv3gmks` para estudiar la sucesión alternante $e_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n}$ y el applet `https://www.geogebra.org/m/p3qccn5t` para estudiar la sucesión $f_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$.

1. La sucesión e_n ¿ se aproxima a algún número? ¿Por qué?
2. La sucesión f_n ¿ se aproxima a algún número? ¿Por qué?
3. ¿Qué condiciones tiene que tener una sucesión alternante para que ésta converja?
4. Explica con tus propias palabras la siguiente expresión:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \, |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall \, n \geq n_0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = L$$

4.6.1. Descripción de las Posibles Respuestas

Tarea N°8

Para responder los ítemes (1), (2) y (3) de la tarea N°8 el estudiante tiene que observar la gráfica de la sucesión que muestra claramente que es una sucesión monótona estrictamente creciente, la cual está acotada inferiormente por 0 y superiormente por 1. Para determinar la sucesión observemos que la gráfica y los datos del applet nos proporciona la siguiente tabla de datos: El término general de la sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ lo deduce al observar los primeros

Tabla 4.10: Valores de la sucesión a_n

n	a_n
1	0
2	1/2
3	2/3
4	3/4
$\vdots$	$\vdots$
n	$1 - 1/n$

términos. Para responder los ítemes 4 y 5, el estudiante tendrá que observar la gráfica de la sucesión a_n y notar que la sucesión se aproxima al número 1, así como también observar que por muy grande que sea n los términos de a_n se aproximan a 1. Al observar la gráfica y la tabla de datos del applet completará los siguientes datos:

Tabla 4.11: Valores de ε y n_0

n_0	a_{n_0}	ε	$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$
2	1/2	1	$(0, 2)$
11	10/11	0.1	$(0.9, 1.1)$
101	100/101	0.01	$(0.09, 1.01)$
1001	1000/1001	0.001	$(0.999, 1.001)$
10001	10000/10001	0.0001	$(0.9999, 1.0001)$

Para responder los ítemes 6 y 7, el estudiante al interactuar con el applet deberá notar que no importando el radio del intervalo centrado en 1 siempre habrá términos de la sucesión en aquel intervalo, y esta es la condición necesaria para que el número 1 sea el límite de la sucesión a_n.

Tarea N°9

De manera anáaloga el estudiante al observar el gráfico de la sucesión b_n notará que ésta es estrictamente decreciente, que la sucesión está acotada inferiormente por 2 y superiormente por 3. Adicionalmente, el estudiante al observar la gráfica y la tabla de datos otorgada por el applet obtendrá los siguientes valores:

Tabla 4.12: Valores de la sucesión b_n

n	b_n
1	3
2	5/2
3	7/3
4	9/4
$\vdots$	$\vdots$
n	$2+1/n$

Para responder el ítem 4, el estudiante con la ayuda de la gráfica y la tabla de datos completada, observará que a medida que el valor n sea muy grande los términos b_n se aproximan a 2. Para dar respuesta al ítem 5, el estudiante tiene que observar la Tabla de Datos que se encuentra en el applet, así como también observar la gráfica para completar la Tabla de los valores de ε respecto a la sucesión b_n (ver Tabla 4.13).

Tabla 4.13: Valores de ε y n_0

n_0	b_{n_0}	ε	$(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$
2	$5/2$	1	$(1, 3)$
11	$23/11$	0.1	$(1.9, 2.1)$
101	$203/11$	0.01	$(1.99, 2.01)$
1001	$2003/1001$	0.001	$(1.999, 2.001)$
10001	$20003/10001$	0.0001	$(1.9999, 2.0001)$

Para responder el ítem 7 el estudiante debe notar que la sucesión b_n tiene límite 2, si cualquier valor de radio ε del intervalo $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$, contendrá elementos de la sucesión. Por otra parte, para responder el ítem 8 tendrán que observar la gráfica de la sucesión c_n y d_n y sus respectivas tablas de datos. Tal como se muestra en la Figura (4.22).

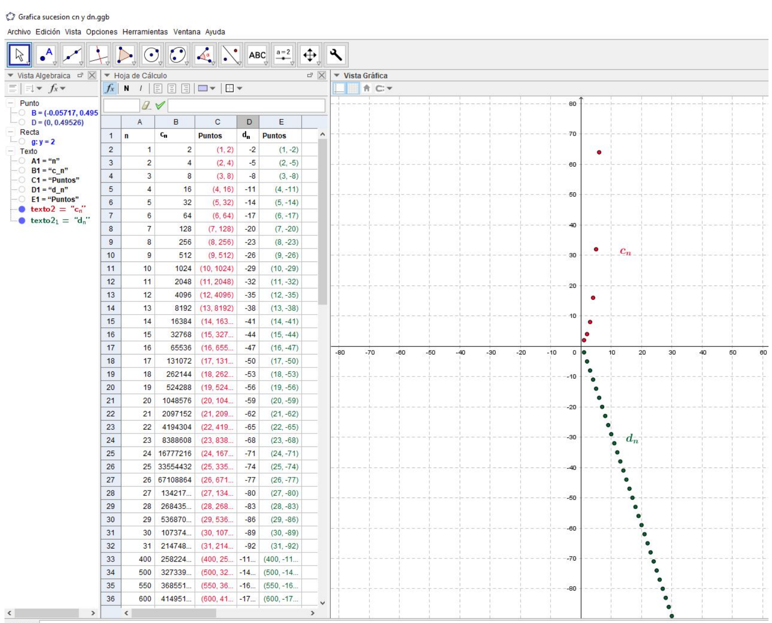


Figura 4.22: Gráfica de las sucesiones c_n y d_n

Al observar el comportamiento de la sucesión c_n, el estudiante observará que ésta es creciente y que no posee límite. De manera análoga, observará que la sucesión d_n es decreciente y que tampoco posee límite.

Finalmente, para responder el ítem 9 el estudiante tendrá que concluir que si una sucesión es creciente (respectivamente decreciente) tiene límite, ésta tendrá que ser acotada superiormente (respectivamente acotada inferiormente).

Tarea N°10

Para responder los ítemes 1 y 2, el estudiante tendrá que observar la gráfica de las sucesiones e_n y f_n con sus respectivas tablas de datos. Al observar tendrá que notar que la sucesión alternante e_n se aproxima a los números 2 y -2 cuando n es par e impar respectivamente. Por tal razón, tendrá que deducir que la sucesión no se aproxima a un sólo número. Respecto de la sucesión f_n, el estudiante al observar la gráfica debería deducir que la sucesión se aproxima a un sólo número, que en este caso es el 0.

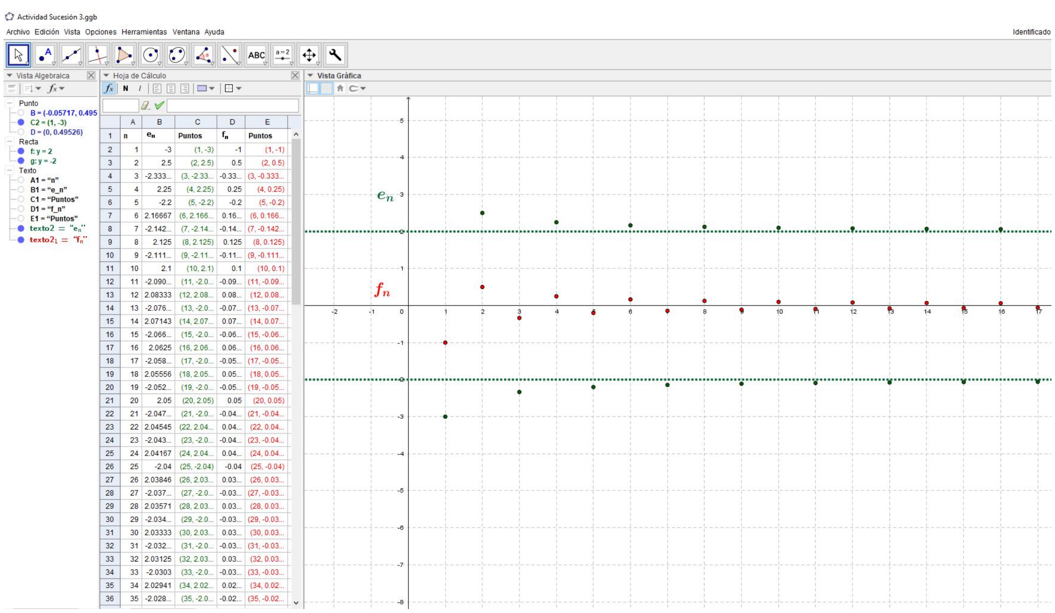


Figura 4.23: Gráfica de las sucesiones e_n y f_n

Con respecto al ítem 3, el estudiante debería señalar que una sucesión alternante converge si ésta se aproxima a un sólo número y para que esto ocurra el término general de la sucesión que acompaña a $(-1)^n$ debería ser una sucesión que converja a 0. Es decir:

$$(-1)^n \cdot a_n \text{ converge } \Leftrightarrow a_n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Finalmente, para responder el ítem 4, el estudiante posee diversas formas verbales para interpretar esa afirmación, acá solamente expondremos una, por ejemplo: "para cualquier radio ε siempre existirán términos de la sucesión que a partir de un cierto índice n_0 los términos se encuentran a una distancia de un número L menor que dicho radio."

4.6.2. Objetos Primarios de las Tareas CE N°5

A continuación, establecemos un breve resumen de las objetos primarios involucrados en las tareas propuestas.

Elementos Lingüísticos

Los elementos lingüísticos que se ponen en juego para la solución de las tareas son de tipo verbal, algebraico y gráfico, puesto que las expresiones verbales se tendrán cuando el alumno tenga que responder con sus palabras lo solicitado en la actividad. Respecto al lenguaje algebraico, éste se utilizará para representar el término general de las sucesiones involucradas; el radio del intervalo; para encontrar los términos n_0 solicitados; para interpretar y completar las tablas de datos solicitadas y para comprender la noción de límite de sucesiones cuando ésta se exprese con notaciones y símbolos matemáticos. Por otra parte, la representación gráfica es utilizada en el applet de GeoGebra para representar las gráficas de las sucesiones creciente, decrecientes y alternantes, la visualización de estas gráficas permitirá al estudiante responder las preguntas relacionadas con su monotonía, acotamiento y convergencia. Es importante destacar que los elementos de tipo geométrico que se utilizan están dentro del contexto propio de la geometría analítica.

Conceptos y/o Definiciones

Se utilizan la noción de sucesión como función cuyo dominio se encuentra en los números naturales, lo que permite estudiar su expresión analítica para analizar su comportamiento por medio de su representación gráfica. Para llevar a cabo este análisis, el estudiante usa los conceptos de: monotonía, acotamiento y aproximación. También se utiliza de manera implícita la noción de "infinito potencial" al estudiar cómo se generan los elementos de la sucesión así como también se utiliza la noción de "infinito actual" al señalar que los términos de la sucesión se encuentran tan cercanos como se quiera al límite (cuando la sucesión converja), este infinito actual está relacionado con la completitud de los números reales, en particular, de los intervalos donde se estudia la convergencia de la sucesión. Por último, el concepto de límite que está relacionado en las tareas propuestas, es de un "límite que no se alcanza", pero se puede aproximar "tanto como se quiera" nociones introducidas por D'Alembert (ver Capítulo 3).

Situaciones y/o Problemas

En cuanto a las situaciones y/o problemas, la actividad propuesta tiene por objetivo deducir cuando una sucesión monótona y alternante converge. Además, la actividad está intencionada para acercar a los estudiantes la noción de límite con los símbolos y sus expresiones matemáticas, y que puedan comprender el porqué de esa expresión matemática con las actividades desarrolladas previamente.

Procedimientos

Uno de los procedimientos involucrado en las tareas son de tipo aritmético al determinar los valores de n_0 para que los términos de la sucesión estén en el intervalo dado, así como también la distancia (valor absoluto) que hay de los puntos de los términos de a_{n_0} con el límite. También hay procedimientos propios de la geometría analítica, ya que hay que observar la gráfica de las sucesiones para analizar su comportamiento. Por otra parte, hay procedimientos relacionados con el "infinito potencial" al trabajar con las sucesiones definidas como función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, así como también hay procedimientos relacionados con el "'infinito actual" al pensar de manera intuitiva que los términos a_n pueden estar tan próximos como se quiera de su límite.

Propiedades/proposiciones

Las propiedades/proposiciones que se utiliza en las tareas propuestas son propias de la noción de límite propuesta por D'Alembert, puesto que los términos de la sucesión "se pueden acercar tanto como se quiera al límite, pero no alcanzarlo". También los estudiantes deducen las proposiciones de convergencia de sucesiones propuestas por Cauchy y Bolzano (ver Capítulo 3). Adicionalmente, al estudiar la convergencia de sucesiones se utiliza de manera implícita la proposición sobre la equivalencia de que si una sucesión converge si y sólo si ésta es de Cauchy. Es importante destacar que las respuestas de los estudiantes no utilizan explícitamente estas proposiciones, pero las usarán de forma intuitiva cuando concluyan que " mientras más grande son los valores de n, los términos de la sucesión se acercan tanto como se quiera al límite sin alcanzarlo".

Argumentos

Finalmente, para lograr responder a las interrogantes, sus razonamientos se basarán en la observación del comportamiento de las sucesiones de manera tabular (observando y completando la tabla de datos) y gráfica, por tal razón sus argumentos se basarán tanto en la aritmética (valores de la sucesión) como en la geometría analítica (gráfica de la sucesión). Adicionalmente, al intuir que "mientras más grande son los valores de n, los términos de la sucesión se acercan tanto como se quiera al límite sin alcanzarlo", se entiende que el intervalo no tiene saltos ni discontinuidades, esta concepción se fundamenta en la completitud de los números reales desarrollada por Cauchy al utilizar las sucesiones de Cauchy. (Ver Capítulo 3).

Dada la proximidad de la descripción que acabamos de realizar de cada uno de los objetos matemáticos primarios que están involucrados en las tareas propuestas de sucesiones, se afirma que el desarrollo de ésta se identifica con la Configuración Epistémica "Concepciones preformales de límite" (CE N°5). Para ilustrar lo anterior, hemos realizado de manera sintetizada la tabla 4.14 que permite visualizar los objetos matemáticos primarios de las Tareas N°8,9 y N°10.

Tabla 4.14: Configuración Epistémica N°5 de las Tareas N°8,9 y N°10

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°5 de las Tareas N°8, 9 y N°10**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para expresar notaciones y símbolos relacionados a las sucesiones. - Expresiones propias de la geometría analítica como: gráficas de sucesiones crecientes, decrecientes, alternantes, etc.
Conceptos y/o definiciones	- Noción de sucesión. - Noción de infinito potencial - Noción de infinito actual - Noción de límite que no se alcanza y se puede aproximar tanto como se quiera.
Procedimientos	- Procedimientos aritméticos y algebraicos para determinar términos de una sucesión, intervalos, distancia, etc. - Procedimientos propios de geometría analítica.
Propiedades / Proposiciones	- Aplicación de propiedades de distancia (valor absoluto) y criterios de convergencia de sucesiones.
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en la aproximación términos de una sucesión de manera geométrica.

4.7. Construcción de Tareas de la CE N°6

A continuación se describen las Tareas propuestas para la última Configuración Epistémica “Noción de limite de Weierstrass” (CE N°6).

Tarea N°11: Límite de Funciones en $\mathbb{R}$

1. Considera la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ donde la función f es la función afín $f(x) = 2x + 1$. Completa la siguiente tabla de datos:

Tabla 4.15: Valores de la función f cercanos a $x = 4$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
3.5		4.5	
3.6		4.4	
3.7		4.3	
3.8		4.2	
3.9		4.1	

2. Según la tabla anterior, suponga que x se acerca tanto como quisieras a $x_0 = 4$, es decir, $x \to 4$. ¿A qué valor se aproxima $f(x)$ cuando $x \to 4$?

3. Completa y analiza la siguiente afirmación:

   > Si x se aproxima a 4 por la izquierda y por la derecha, entonces el valor de $f(x)$ se acerca a ____ entonces se puede escribir $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}(2x + 1) =$ ____.

   La afirmación anterior se lee:

   > “el límite de la función $f(x) = 2x + 1$, cuando x tiende a ____ es ____”

4. Abre el siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/nw4ew6pt`. Observa que en el intervalo de las imágenes hay un radio ε centrado en el límite de $f(x)$ y en el intervalo de las pre-imágenes hay un radio δ centrado en $x_0 = 4$. Interactúa con el applet y completa la siguiente tabla.

Tabla 4.16: Valores de ε y δ de la función f cercanos a 4.

ε	$(9-\varepsilon, 9+\varepsilon)$	δ	$(4-\delta, 4+\delta)$
3	$(6, 12)$	1.5	$(2.5, 5.5)$
2			
		0.5	
0.5			
		0.05	

5. Interactúa con el applet, puedes cambiar la función $f(x)$ por otra función afín y x_0 por otro número. Observa el valor del límite, los valores de los radios ε y δ. Completa la siguiente tabla:

Tabla 4.17: Valores de ε y δ de una función afín entorno a x_0.

ε	$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$	δ	$(x_0-\delta, x_0+\delta)$
2			
1			
0.5			
0.1			
0.01			

6. Según el ítem anterior. ¿El valor del radio ε depende del valor de δ, o es al revés? Justifica tu respuesta.

7. ¿Qué relación tiene el radio δ con la expresión "$x \to x_o$ " ?

8. ¿Qué relación tiene el radio ε con la expresión "$f(x) \to L$" ?

9. ¿Qué relación tienen los radios δ y ε en la expresión "Si $x \to x_o$ entonces $f(x) \to L$"?

10. Explica con tus palabras la siguiente expresión:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \text{ tal que si } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Tarea N°12: Existencia de Límites

1. Considera el applet `https://www.geogebra.org/m/xvqfhgnf` que muestra la gráfica de la siguiente función por rama

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ x^2 & si \quad -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & si \quad x \leq -1 \end{cases}$$

Completa la siguiente tabla:

Tabla 4.18: Valores de la función f cercanos a 1.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.5		1.5	
0.6		1.4	
0.7		1.3	
0.8		1.2	
0.9		1.1	

2. ¿Existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to 1$? ¿Por qué?

3. Completa la siguiente tabla:

Tabla 4.19: Valores de la función f cercanos a -1.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0.5		-1.5	
-0.6		-1.4	
-0.7		-1.3	
-0.8		-1.2	
-0.9		-1.1	

4. ¿Existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to -1$? ¿Por qué?

5. ¿Qué condiciones establecerías para que exista el límite de una función f cuando x tiende a x_0?

4.7.1. Descripción de las Posibles Respuestas

Tarea N°11

El estudiante para responder el ítem 1 tendrá que completar la siquiente tabla analizando la función f:

Tabla 4.20: Valores de la función f cercanos a 4.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
3.5	8	4.5	10
3.6	8.2	4.4	9.8
3.7	8.4	4.3	9.6
3.8	8.6	4.2	9.4
3.9	8.8	4.1	9.2

Para responder al ítem 2 tendrá que observar la tabla de datos y el gráfico de la función $f(x) = 2x + 1$, a partir de esto podrá concluir que el límite de la función f cuando $x \to 4$ es 9. Una vez concluido lo anterior, podrá responder el ítem 3 completando las siguientes afirmaciones:

Si x se aproxima a 4 por la izquierda y por la derecha, entonces el valor de $f(x)$ se acerca a **4** entonces se puede escribir $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}(2x+1) = \mathbf{9}$.

La afirmación anterior se lee:

"el límite de la función $f(x) = 2x + 1$, cuando x tiende a **4** es **9**"

Para responder el ítem 4 se observa en el applet el deslizador donde se obtienen los valores de ε y los puntos de los intervalos en la imagen y en la pre-imagen de la función, como se muestra en la imagen (Figura (4.24)):

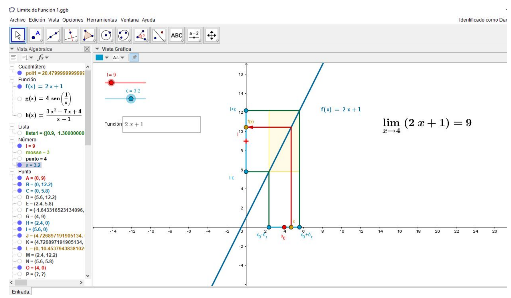


Figura 4.24: Gráfico del límite de $f(x) = 2x + 1$

Con dicha información se puede responder la tabla (4.11):

Tabla 4.21: Valores de ε y δ de la función f cercanos a 4.

ε	$(9-\varepsilon, 9+\varepsilon$	δ	$(4-\delta, 4+\delta)$
3	$(6, 12)$	1.5	$(2.5, 5.5)$
2	$(7, 11)$	1	$(3, 5)$
1	$(8, 10)$	0.5	$(3.5, 4.5)$
0.5	$(8.5, 9.5)$	0.25	$(3.75, 4.25)$
0.1	$(8.9, 9.1)$	0.05	$(3.95, 4.05)$

El ítem 5 se responde de manera análoga al ítem anterior y dependerá de la función afín que escoja el estudiante y del punto x_0. Según lo desarrollado en el ítem 4 y 5, el estudiante podrá responder el ítem 6, ya que debería concluir que el valor del radio δ depende del valor de radio ε, dado que al interactuar con el applet debería observar que dado un determinado radio ε (dado por el deslizador) se tiene un valor específico de δ.

Para el ítem 7, se pretende que el estudiante interprete la simbología $x \to x_o$ como "x está cerca de x_0" y en términos del radio δ se entiende que la distancia de x a x_0 es pequeña o menor que δ, es decir, $|x - x_0| < \delta$ o $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. De manera muy similar se espera que el estudiante en el ítem 8 interprete la simbología $f(x) \to L$ como "$f(x)$ está cerca de L". En términos del radio ε, se entiende que la distancia de $f(x)$ a L es pequeña o menor que ε, es decir, $|f(x) - x_0| < \varepsilon$ o $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Para el ítem 9 los estudiantes deberían dar expresiones verbales o simbólicas de la interpretación de "Si $x \to x_0$ entonces $f(x) \to L$" utilizando los radios δ y ε. Una de las posibles respuestas podría ser:

"Dado un cierto valor de $\varepsilon > 0$ se tiene un valor de $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$"

Otra respuesta podría ser:

$$\text{Si } |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon, \text{ donde } \delta \text{ depende de } \varepsilon.$$

Para el ítem 10 el estudiante debería observar que para la noción y existencia del límite de una función en x_0 es equivalente a afirmar que: "para cualquier radio $\varepsilon > 0$ existe un radio $\delta > 0$ que depende de ε tal que si $|x - x_o| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$."

También podrá dar expresiones verbales del siguiente tipo: "Para cualquier radio ε existe un radio δ tal que si x está en un radio menor que δ de x_0 se tendrá que $f(x)$ estará en un radio menor que ε de L."

O expresiones del tipo: "por muy pequeño que sea ε siempre se encontrarán elementos de la imágenes cercanas a L cuando x esté a un radio menor que δ de x_0."

Se espera que el estudiante releve la importancia de los cuantificadores que acompañan a ε y a δ, así como también la dependencia de δ del valor de ε (denotado como δ_ε).

Tarea N°12

Para responder el ítem 1 el estudiante deberá completar la tabla solicitada (Tabla 4.22) y observar la gráfica del applet (Figura (4.25)):

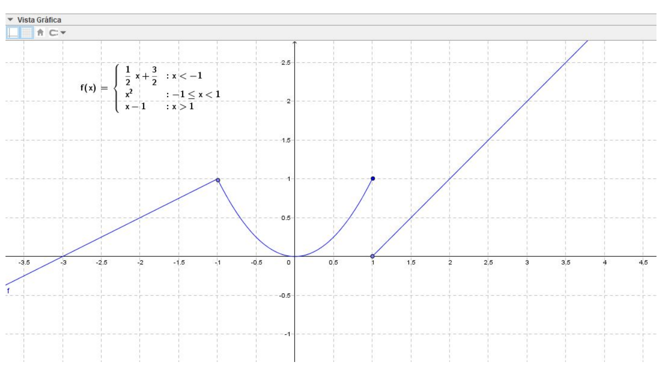


Figura 4.25: Gráfica de la función por ramas f

Para dar respuesta al ítem 2 el estudiante tendrá que observar la tabla de datos y el gráfico de la función, donde expresará con sus palabras que el límite de la función cuando x

Tabla 4.22: Valores de la funcion f cercanos a 1.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.5	0.25	1.5	0.5
0.6	0.36	1.4	0.4
0.7	0.49	1.3	0.3
0.8	0.64	1.2	0.2
0.9	0.81	1.1	0.1

se aproxima a 1 por la izquierda es 1 y por la derecha es 0, es decir,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \text{ y } \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0.$$

Tendrá que concluir que el límite cuando x se aproxima a 1 no existe.

Para responder el ítem 3 deberá completar la siguiente tabla:

Tabla 4.23: Valores de la función f cercanos a -1.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0.5	1.25	-1.5	2.25
-0.6	1.2	-1.4	1.96
-0.7	1.15	-1.3	1.69
-0.8	1.1	-1.2	1.44
-0.9	1.05	-1.1	1., 21

Para dar respuesta al ítem 4, el estudiante tendrá que observar la tabla de datos y la gráfica de la función, así concluirá que el límite cuando $x \to -1$ existe, debido a que el límite por la izquierda y derecha de -1 coinciden y es 1. Es decir, es decir,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = 1.$$

Finalmente, para responder el ítem 5 tendrá que deducir que el límite de una función f cuando x tiende a x_0 existe, si sus límites laterales coinciden en el mismo valor.

4.7.2. Objetos Primarios de las Tareas CE N°6

A continuación, establecemos un breve resumen de las objetos primarios involucrados en las tareas propuestas.

Elementos Lingüisticos

Los elementos lingüísticos que se ponen en juego para la solución de las tareas son de tipo verbal, algebraico y gráfico, puesto que las expresiones verbales se tendrán cuando el alumno responda con sus propias palabras algunas de los ítemes de las tareas propuestas, por ejemplo, se pueden tener expresiones como "$f(x)$ se aproxima a L tanto como se quiera". Respecto al lenguaje algebraico, éste se utilizará para representar: la aproximación del punto x a x_0 como "$x \to x_0$"; intervalos de números reales (por ejemplo, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$), cantidades pequeñas expresadas con letras griegas ε y δ; el valor absoluto y distancia entre los números x y x_0 como $|x - x_0|$, la expresión analítica de las funciones (por ejemplo, $f(x) = 2x + 1$), la aproximación de la función $f(x)$ al límite L como $f(x) \to L$, etc. Los elementos gráficos son representaciones de los números reales como intervalos (segmentos de rectas), rectas (la recta de los números reales), gráfica de funciones, etc. Todo estas representaciones gráficas están dentro del contexto propio de la geometría analítica.

Conceptos y/o Definiciones

Se utiliza la noción de función de manera analítica y la noción de límite de una función de Weierstrass (ver Capítulo 3). Adicionalmente, se utilizan las nociones de completitud de los números reales al señalar que "$x \to x_0$," o que "x se aproxima a x_0 tanto como se quiera", de manera análoga, cuando se afirma que "$f(x) \to L$" o que " $f(x)$ se aproxima a L tanto como se quiera". Debido a que se involucra la completitud del conjunto de los números reales se tiene de manera ímplicita el concepto de "infinito actual". Por otra parte, al utilizar la noción de distancia y las propiedades de valor absoluto, también está involucrado de manera ímplicita la noción de que el conjunto de los números reales es un cuerpo ordenado.

Situaciones y/o Problemas

En cuanto a las situaciones y/o problemas éstas están mediadas por los applets, éstos utilizan representaciones geométricas con el fin de que: el estudiante distinga el rol de ε y δ; observe y distinga los intervalos donde se tiene la aproximación de x a x_0 y de $f(x)$ a L; analice el límite de la función en un punto; y determine las condiciones que se necesitan para la existencia de límite. Es importante destacar que el objetivo principal de las tareas propuestas es que el estudiante pueda apropiarse y comprender a cabalidad la noción de límite de Weierstrass así como también establecer las condiciones para que el límite de una función exista.

Procedimientos

Uno de los procedimientos involucrado en las tareas son del tipo aritmético al determinar los valores de la función f cercanos a x_0 en el caso de la Tarea N°11 se determinan los valores cercanos a 4 tanto por la izquierda como por la derecha y en la Tarea N°12 se estudian los valores cercanos a 1 y a -1. También hay procedimientos propios de la geometría analítica, ya que hay que observar la gráfica de las funciones para observar sus límites, así como también los intervalos $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ y $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Por otra parte, el orden de los números reales permiten utilizar procedimientos que están relacionados con el valor absoluto y las desigualdades, por ejemplo, $|x-x_0|<\delta$ es equivalente a $-\delta<x-x_0<\delta$ que a su vez es equivalente $x_0-\delta<x<x_0+\delta$.

Propiedades/proposiciones

Las propiedades/proposiciones que se utilizan en las tareas propuestas son propias la noción de límite propuesta por Weirstrass, puesto que se utiliza la noción de valor absoluto y sus propiedades, así como también los radios ε y δ. También uno de los propósitos de las Tareas es que los estudiantes deduzcan las condiciones para que el límite de una función exista cuando x se aproxima a x_0, esta es una proposición que se estudia en los libros de cálculo como: si los límites laterales en x_0 existen y son iguales entonces existe el límite de la función en x_0 (Spivak, 1992), la cual está relacionada directamente con la noción de límite de Weierstrass.

Argumentos

Finalmente, para lograr responder a las tareas propuestas, sus razonamientos se basarán en la observación e interacción con el applet. Por una parte, hay argumentos aritméticos y algebraicos que permiten responder la tabla de datos relacionada con los valores próximos a x_0 así como también hay argumentos basados en la representación gráfica de la función y en la completitud de los números reales, los cuales permiten responder las tablas de datos relacionados con los radios ε y δ y los ítems $7, 8$ y 9. Además, hay argumentos implícitos que están relacionados con los axiomas de orden que se tienen en los números reales, puesto que utilizan la noción de valor absoluto y sus propiedades.

Dada la proximidad de la descripción que acabamos de realizar de cada uno de los objetos matemáticos primarios que están involucrados en las tareas propuestas de límite de funciones, se afirma que el desarrollo de ésta se identifica con la Configuración Epistémica “Nociones de Límite de Weierstrass” (CE N°6). Para ilustrar lo anterior, hemos realizado de manera sintetizada la tabla 4.24 que permite visualizar los objetos matemáticos primarios de las Tareas N°11 y N°12.

Tabla 4.24: Configuración Epistémica N°6 de las Tareas N°11 y N°12

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°6 de las Tareas N°11 y N°12**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para expresar notaciones y símbolos relacionados a aproximaciones de una función a un número, distancia entre números, etc. - Expresiones propias de la geometría analítica como: gráficas de funciones, intervalos de números, recta real, etc.
Conceptos y/o definiciones	- Noción de función en $\mathbb{R}$ - Noción de completitud de números reales e infinito actual. - Noción de cuerpo ordenado - Noción de límite de Weierstrass.
Procedimientos	- Procedimientos aritméticos y algebraicos para determinar valores de una función cercanos a un punto. - Procedimientos propios de la geometría analítica. - Procedimientos relacionados a la distancia o valor absoluto.
Propiedades / Proposiciones	- Aplicación de propiedades de distancia (valor absoluto) y existencia de límite de una función en un número.
Argumentos	- Argumentos deductivos para determinar los roles de δ y ε, la noción de Weierstrass y la existencia de límite, basados en aspectos de la geometría analítica, algebraicos y aritméticos.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS TAREAS

5.1. Introducción

A continuación, se presenta un análisis de la implementación de las Tareas diseñadas en el Capítulo 4. Es importante destacar que las tareas fueron implementadas a un grupo de estudiantes pertenecientes a un programa de formación de profesores de matemática, en el inicio de la asignatura de Cálculo Diferencial (ver Capítulo 2). Éstas se implementaron en nueve sesiones de clases bajo la siguiente estructura:

a) **Inicio:** Se conformaron grupos de un número determinado de estudiantes, quienes comenzaron a discutir y a trabajar en las tareas propuestas. Cuando un grupo presentó dificultades en el entendimiento y/o desarrollo de las tareas, solicitó la ayuda de la docente.

b) **Desarrollo** La docente interactuó con los grupos formulándole preguntas, procurando que los estudiantes discutieran el problema y las ideas relacionadas.

c) **Discusión y Cierre** La docente consideró que las tareas habían sido terminadas cuando todos quienes componen el grupo son capaces de explicar sus hallazgos y estrategias de solución. Además, se le solicitó a cada grupo subir a la plataforma de la asignatura un documento con el desarrollo de cada una de las respuestas desarrolladas. Finalmente, la docente realizó un Plenario con la socialización de las diversas soluciones y estrategias utilizadas, y retroalimentó sus respuestas.

Es importante destacar que los estudiantes en su programa de estudio considera asignaturas asociadas a las TIC para promover la enseñanza de las matemáticas, por tal razón poseen conocimientos en el uso herramientas geométricas, gráficas y algebraicas del software GeoGebra.

Antes de iniciar las Tareas, se les informa a los estudiantes que participarán de una propuesta didáctica cuyo fin es lograr que ellos puedan desarrollar su aprendizaje del concepto de límite de funciones en una variable y se les pide su consentimiento para grabar sus interacciones dentro del grupo y entre la docente. Además, se les informó que no importaba si el desarrollo de sus actividades fueran erradas, puesto que interesaba estudiar cómo interactuaban con las tareas y cuales son sus argumentos y razonamientos que permitía responder lo requerido.

Para desarrollar el "Análisis de la Implementación" o "Retrospective Analysis" (Bakker, van Eeder, 2015) realizaremos de manera sintetizada una breve comparación entre la Configuración Epistémica de las Tareas y la Configuración Cognitiva lograda por los estudiantes. Además, describiremos brevemente cada uno de los componentes de la Idoneidad Didáctica descritos en el Capítulo 2. Para el análisis se consideró las respuestas escritas por los estudiantes; las grabaciones de las actividades plenarias; grabaciones en grupo de los estudiantes; y una encuesta de opinión de los participantes.

5.2. Análisis de la Implementación de las Tareas de la CE N°1

La implementación de las tareas diseñadas asociadas a la CE N°1 se realizaron en dos sesiones sincrónicas, sin embargo, los estudiantes no pudieron completar las actividades en el tiempo destinado para ello, por tal razón se dio una instancia de trabajo grupal de manera asincrónica para que pudieran finalizarlas. En la tercera sesión se realizó una actividad plenaria, donde se les preguntó sus respuestas y cómo las habían obtenido, parte de sus afirmaciones fueron consideradas en el análisis de las respuestas que se describen a continuación.

5.2.1. Idoneidad Epistémica y Cognitiva

Es importante recalcar, que los conocimientos previos de los estudiantes es sobre tópicos de pre-cálculo, es decir, funciones en el conjunto de los números reales, paridad e imparidad de funciones, función inyectiva, epiyectiva, biyectiva, inversa y estudio de gráfica de funciones.

Para el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, se hace el desglose de los objetos matemáticos primarios que emergen tanto en los producciones escritas como también en la Plenaria realizada al finalizar estas tareas. Cada respuesta es comparada con el fin de identificar elementos comunes y de esta forma caracterizar cognitivamente las respuestas dadas. Como las tareas fueron desarrolladas por tres grupos de estudiantes, mostraremos de manera sintetizada sus aproximaciones con los objetos matemáticos descritos anteriormente (Capítulo 4).

Elementos Lingüísticos

Respecto a los elementos lingüísticos los tres grupos comunicaron sus respuestas con expresiones algebraicas y geométricas. Por ejemplo, el grupo 1, expresó las áreas de los triángulos solicitados de manera algebraica, tal como se ve en la Figura (5.1).

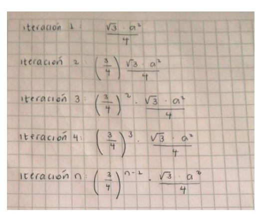


Figura 5.1: Respuesta Grupo 1 de la Tarea $N°$ 1

Es importante señalar que todos los grupos utilizaron GeoGebra para graficar el comportamiento de las áreas y perímetros de los triángulos solitcitados.Por ejemplo, el grupo 3 realizó la gráfica de las áreas de los triángulos solicitados en GeoGebra, tal como se muestra en la Figura (5.2).

La función que ellos realizaron es una función cuyo dominio es el conjunto de los números $\mathbb{R}$, y la función involucrada en las áreas de los triángulos es una función discreta, no obstante

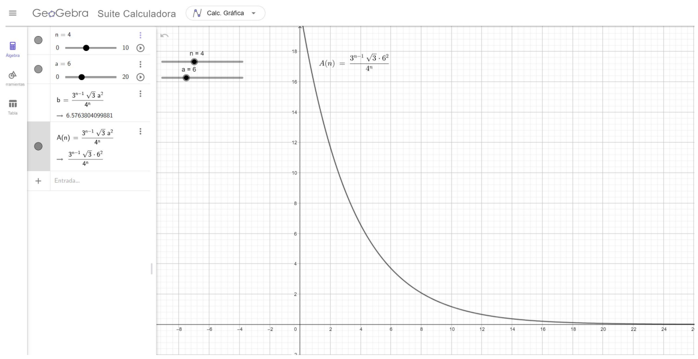


Figura 5.2: Respuesta Grupo 3 de la Tarea $N°1$

pudieron deducir la tendencia de las áreas de los triángulos solicitados por medio de la gráfica de la función.

Conceptos y/o definiciones

Los conceptos y/o definiciones desarrolladas por los estudiantes son el concepto de infinito potencial (al realizar las iteraciones) y de funciones discretas al realizar las gráficas de los perímetros y áreas, sin embargo, los estudiantes graficaron funciones continuas en vez de funciones discretas. Durante la Plenaria se les preguntó porqué utilizaron funciones continuas para expresar las gráficas de las áreas, ellos afirmaron que no habían notado que la función tenía como dominio el conjunto de los números naturales y que no sabían graficar funciones discretas en el software GeoGebra. El error de graficar funciones continuas en vez de funciones discretas es evidenciado en Deulofeu (1991), pues en su estudio reveló que los estudiantes realizan gráficos continuos en situaciones problemáticas donde se utilizan funciones discretas debido a sus creencias y al no distinguir el dominio de las funciones estudiadas.

Procedimientos

Los estudiantes utilizaron procedimientos aritméticos, algebraicos, tabulares y gráficos para deducir el comportamiento de las áreas y perímetros. La construcción de la gráfica de las funciones asociadas a los perímetros y áreas les permitió deducir el comportamiento de éstas (si crecen indefinidamente o tienden a decrecer indefinidamente). El uso de la gráfica para analizar intuitivamente el límite de una función está estudiada por Caglayan (2015), pues señala que el estudio de las gráficas de funciones con el uso de softwares ayuda a los estudiantes a desarrollar un razonamiento intuitivo y a su comprensión de la noción de límite.

Proposiciones

Si bien no utilizaron de manera explícita la proposición o método de exhaución, ésta se vio reflejada en la respuesta de un sólo grupo cuando realizaron la iteración de las figuras en el software GeoGebra.

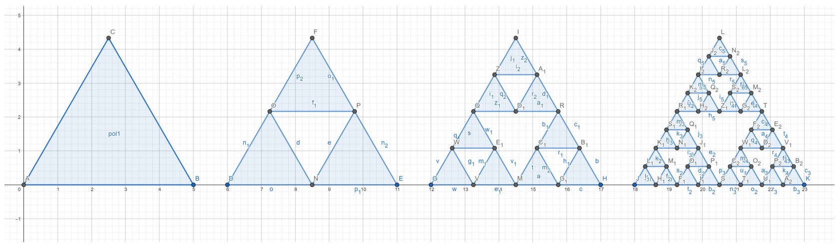


Figura 5.3: Iteración realizada por el Grupo 3 de la Tarea $N°1$

Argumentos

Respecto a los argumentos, estos fueron deductivos, ya que observaron las tablas y los gráficos obtenidos y así analizaron el comportamiento de las áreas y perímetros, de hecho, se observa en sus respuestas escritas, que sus argumentos fueron sintentizados por el uso de los gráficos de los perímetros y áreas, lo cual fue ratificado en la Plenaria cuando dos estudiantes manifestaron que gracias a los gráficos pudieron deducir la tendencia de los perímetros y áreas de las figuras geométricas. Es importante destacar, que sólo un grupo logró establecer sin errores aritméticos y algebraicos las tendencias del perímetro y del área tanto de la Tarea N°1 y N°2.

Por medio del análisis de las respuestas, podemos afirmar que la implementación de las tareas N°1 y N°2 logró evocar cada uno de los objetos matemáticos asociados a la CE N°1, a pesar, de que sólo un grupo logró deducir sin errores las expresiones algebraicas de las áreas de los triángulos. De manera resumida, establecemos la Tabla 5.1 que permite comparar los objetos matemáticos primarios entre la Configuración Epistémica N°1 y la Configuración Cognitiva N°1 desarrollada por los estudiantes.

5.2.2. Idoneidad Afectiva

Se promueve la participación de los estudiantes, señalando la importancia de sus argumentos y deducciones, sin dar importancia si éstas están erradas. Esta acción permitió mayor libertad y menos stress en los estudiantes que están acostumbrados a realizar este tipo de actividades, pero de manera evaluada. En la participación de los estudiantes en la Plenaria fue un poco tímida, puesto que ellos mismos señalaron que no estaban acostumbrados a realizar discusiones de manera grupal, además, se percibió un poco de timidez por el temor a equivocarse. Ante esta situación la profesora fomentó durante todas las sesiones grupales y en la actividad plenaria su participación no importando lo correcto o no de sus ideas y/o argumentos. Es importante señalar que el inicio de esta tarea fue un poco lenta, puesto que los estudiantes no estaban acostumbrados a trabajar con grupos por medio de Teams y tampoco a que ellos tuvieran un rol más protagónico en el desarrollo de sus aprendizajes.

5.2.3. Idoneidad Interaccional

La interacción de la docente con los estudiantes fue de suma importancia, puesto que ella entró en cada grupo cada vez que ellos lo necesitaban, lo que permitió responder dudas sobre la redacción de las tareas, escuchó sus ideas y argumentos, les dio orientaciones cuando los estudiantes requerían mayor explicación de una determinada actividad. Respecto a la interacción entre los estudiantes, se pudo observar que tuvieron dificultad en su organización para establecer funciones entre ellos (quien iba a redactar, que herramienta TIC iban a utilizar para para plasmar sus respuestas, etc.). Además, no estaban acostumbrados a utilizar las herramientas grupales del Teams, como el uso del chat o como llamar a la docente cuando lo requerían. Esto implicó que el desarrollo de las tareas se tuviera que alargar a dos sesiones en vez de una sesión como estaba planificado. Por otra parte, no hubo de manera formal una evaluación formativa, pero el desarrollo de la plenaria permitió que todo el grupo curso interactuara entre sí, y por medio de esas interacciones se dieron cuenta de algunos errores aritméticos que habían cometido en la Tarea N°1 y N°2.

5.2.4. Idoneidad Medicional

Tal como se señaló anteriormente, los estudiantes tienen conocimientos previos sobre algunas herramientas de GeoGebra, por tal razón se les pidió a los estudiantes realizar un gráfico de las áreas y los perímetos de los triángulos obtenidos en la Tarea N°1, la cual todos los grupos realizaron sin problemas, sin embargo, no habían notado que las funciones que estaban involucradas eran discretas, realizando gráficas de funciones cuyo dominio era el conjunto de los números reales, sin embargo, recalcaron que ellos no sabían como graficar este tipo de funciones en GeoGebra. Por otra parte, mencionaron ciertas complicaciones en compartir sus ideas escritas, puesto que no tenían pizarra virtual o tablet para escribir a "mano alzada" sus respuestas de manera que todo los miembros del grupo las visualizaran de manera sincrónica. Respecto al número de alumnos, en esta sesión habían solo 10 estudiantes, lo que permitió que la profesora pudiese abarcar y visitar los tres grupos sin ningún incoveniente. Finalmente, el tiempo destinado para estas tareas era de una sesión, pero debido a las problemáticas sobre la organización de los estudiantes y la imposibilidad de tener dispositivos que permitieran compartir de manera simultánea sus deducciones, es que se destina dos sesiones sincrónicas (70 minutos cada una) y tiempo asincrónico para el desarrollo de las tareas. Adicionalmente, se utilizó 30 minutos de la tercera sesión para realización del cierre (plenaria y retroalimentación de sus respuestas).

5.2.5. Idoneidad Ecológica

Las tareas propuestas se encuentran en el curriculum del Plan Diferenciado de Matemática de tercer y cuarto año medio (MINEDUC, 2021a), por tal razón, la realización de éstas permitió a los estudiantes reflexionar sobre los conocimientos y habilidades que ellos deben desarrollar como futuros docentes de matemática, y así vincular estas actividades con el ejercicio futuro de su profesión. Por otra parte, las tareas relacionan conceptos intradisciplinares, puesto que están relacionadas con áreas y perímetros de figuras geométricas propias de la Geometría Euclideana.

5.2.6. Reflexión Preliminar

Respecto a la Configuración Cognitiva, podemos concluir que dos de los tres grupos estudiantes no desarrollaron las iteraciones geométricas ni tuvieron necesidad de estudiarla más detenidamente como se pretendía en la tarea, por tal razón es que redactaremos las tareas con el fin de fomentar más el estudio de dichas iteraciones geométricas sin menospreciar la tabulación de los datos y el estudio del gráfico de las áreas y perímetros. Por otra parte, no hubo una reflexión por parte de los estudiantes con respecto a la "paradoja" que se tenían de las áreas de las figuras obtenidas, puesto que a mayor cantidad de iteraciones las áreas de los triángulos y cuadrados decrecían y se aproximaban a cero. Lo anterior puede deberse a que tuvieron errores aritméticos y algebraicos en el estudio de las áreas de las figuras.

Otro aspecto que debemos considerar al realizar implementaciones de manera virtual, es verificar que los estudiantes realmente dominen las herramientas de la plataforma virtual (en este caso Teams) con el cual se realizan las clases y las instancias de trabajo grupal, puesto que se asumió que sabían grabar sus intervenciones, llamar a la profesora, utilizar el chat, compartir pantalla, etc. Adicionalmente, si se implementa nuevamente esta actividad de manera virtual, consideraremos un formato más amigable que un documento pdf, puesto que los estudiantes manifestaron que preferían las tareas escritas en un documento en formato word, ya que podían editar con mayor facilidad (agregar imágenes, escribir con el editor de ecuaciones en word, etc.) Por último, consideramos que las tareas requieren mayor tiempo por parte de los estudiantes, por tal razón, en una próxima implementación utilizaremos dos sesiones en vez de una sesión asincrónica.

Tabla 5.1: Tabla Comparativa entre la CE N°1 y CG N°1

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°1 Tareas N°1 y N°2**	**Configuración Cognitiva N°1**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas (magnitudes de áreas y perímetros) - Figuras geométricas de triángulos y cuadrados. - Tabulación de datos y gráficas de funciones.	- Expresiones algebraicas (magnitudes de áreas y perímetros) - Sólo un grupo de estudiantes realizó dibujos geométricos para complementar sus argumentos. - Tabulación de datos y gráficas de funciones.
Conceptos y/o definiciones	- Nociones de números racionales e irracionales - Nociones de infinito potencial - Nociones de funciones discretas	- Uso de números racionales e irracionales en las magnitudes de las áreas y perímetros de los triángulos y cuadrados. - Se puede apreciar que utilizaron de manera implicíta la noción de infinito potencial, al dibujar y entender las iteraciones geométricas. - Distinguieron funciones con dominio en $\mathbb{R}$
Procedimientos	- Aplicación de fórmulas de áreas y perímetros de triángulos equiláteros y cuadrados. - Utilización de tablas de datos y gráficos de funciones discretas.	- Aplicación de fórmulas de áreas y perímetros de triángulos equiláteros y cuadrados. - Utilizaron las tablas de datos de funciones discretas, pero analizaron gráficos de funciones cuyo dominio son el conjunto de los números reales.
Propiedades / Proposiciones	- Utilización del método de exhaución	- Sólo un grupo complementó sus argumentos por medio de las iteraciones de los triángulos equiláteros.
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en las iteraciones de figuras geométricas. - Argumentos deductivos basados en las gráficas de las funciones que representan áreas y perímetros.	- Argumentos deductivos basados en el comportamiento de las áreas y perímetros por medio del estudio de sus gráficas y tablas.

5.3. Análisis de la Implementación de las Tareas de la CE N°2

La implementación de las tareas diseñadas de la CE N°2 se realizaron en dos sesiones sincrónicas, además los estudiantes tuvieron una instancia de trabajo grupal de manera asincrónica para que pudieran finalizar las tareas que faltaban. En la segunda sesión se realizó una actividad plenaria, donde se les preguntó sus respuestas y cómo las habían obtenido, parte de sus afirmaciones fueron consideradas en el análisis de las respuestas que se describen a continuación.

5.3.1. Idoneidad Epistémica y Cognitiva

Es importante recalcar, que los estudiantes no tenían conocimientos previos sobre los tópicos que las Tareas N°3,N°4 y N°5 abordaban. Tal como mencionamos en la sección anterior, el análisis considera el desglose de los objetos matemáticos primarios que emergen tanto en los producciones escritas como también en la Plenaria realizada al finalizar estas tareas. La Tabla 5.2 muestra de manera sintetizada la comparación de la Configuración Epistémica N°2 pretendida y la Configuración Cognitiva N°2 lograda por los estudiantes.

Elementos Lingüísticos

Respecto a este punto, los tres grupos comunicaron sus respuestas con expresiones algebraicas que utilizaron para expresar magnitudes de áreas de secciones transversales (indivisibles) de figuras geométricas planas y volúmenes de cuerpos geométricos. Adicionalmente, utilizaron representaciones visuales para comprender el Principio de Cavalieri, así como también cuerpos geométricos como el cilindro. Un ejemplo de ello, se muestra en la Figura (5.4).

Las áreas generadas (B'1 y B'2) por el plano (letra beta), son iguales entre ellas. Ya que, ambas figuras (Prisma y Paralelepípedo) al tener un área basal congruente (B1 = B2 = B) y la misma altura (h) permite que al trazar un plano cualquiera las secciones que se forman en ambas secciones sea de igual área entre ellas.

Adjuntamos una imagen con un ejemplos más simple:

Figura 5.4: Representación visual del Principio de Cavalieri Grupo 3

A diferencia de las tareas anteriores, ningún grupo utilizó un software geométrico para desarrollar sus argumentos y respuestas.

Conceptos y/o definiciones

Los conceptos y/o definiciones involucrados en las respuestas de los estudiantes son el concepto de sección transversal(indivisible), además, utilizaron números racionales e irracionales para expresar magnitudes relacionadas con áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos geométricos.

Procedimientos

Los procedimientos que los estudiantes desarrollaron se basaron en el uso de los indivisibles, al comparar las secciones transversales correspondientes de cada cuerpo geométrico. Así como también utilizaron procedimientos algebraicos al aplicar las fórmulas de áreas como paralelepípedos y circunferencias, además fórmulas de volúmenes de cuerpos geométricos como cilindros y prismas.

Propiedades/Proposiciones

Las respuestas de los estudiantes evidencian que utilizaron de manera correcta el Principio de Cavalieri para deducir el volumen de un prisma cualquiera y de un cilindro inclinado. En la Figura (5.5) se evidencia la utilización del principio del grupo 3 para deducir volumen del prisma P_1. Es importante destacar, que ningún grupo pudo aplicar dicho principio en la Tarea N°5 para deducir el volumen de la esfera.

2. ¿Se puede aplicar el Principio de Cavalieri a ambas figuras geométricas?

    - Si se puede aplicar el principio a ambas figuras, pues cumplen con dos exigencias que este principio requiere para tener volúmenes congruentes, los cuales son: Igual altura (ambos de cierta altura “h”) e igual área en secciones producidas mediante un plano cualquiera (B1 = B y B2 = B, por lo tanto B1 = B2 = B y B’1 = B’2)

Figura 5.5: Aplicación del Principio de Cavalieri Grupo 3

Argumentos

Respecto a los argumentos, estos fueron deductivos pues utilizaron el Principio de Cavalieri para obtener el volumen del paralelepípedo y cilindro, sin embargo, ningún grupo pudo deducir el volumen de la esfera aplicando el mismo principio, pues no lograron dilucidar que el área de la sección de la esfera es igual al área de la región de la figura X. De hecho, el grupo 3 que afirmó que no se podía aplicar el principio, ya que ambos cuerpos geométricos no tenían la misma altura. Dicho error es común en el aprendizaje de volúmenes de cuerpos geométricos, por ejemplo, Orellana y Swears (2017) evidenciaron que los estudiantes tienen ciertas complejidades en aplicar el Principio de Cavalieri, pues tienen dificultades en determinar áreas de figuras planas (indivisibles) y están acostumbrados a que la enseñanza del volumen de cuerpos geométricos sea de manera algorítmica y no reflexiva. A pesar de lo anterior, la tarea evocó en los estudiantes argumentos deductivos y basados en la geometría euclideana espacial.

4. ¿Se puede aplicar el Principio de Cavalieri a ambas figuras geométricas?

R: No, ya que ambas figuras no tienen la misma altura.

Figura 5.6: Respuesta Grupo 3

5.3.2. Idoneidad Afectiva

Debido a que fue la segunda tarea realizada por los estudiantes, éstos no tuvieron problemas de adaptación y participaron activamente de manera grupal, sin embargo, en las actividades plenarias participaron los mismos estudiantes de la sesión pasada, a pesar de que se les señaló que no habían respuestas erradas. Un aspecto importante a destacar, que a pesar de que no pudieron lograr la Tarea N°5, ellos estaban intrigados y motivados en conocer las estrategias para lograr deducir el volumen de la esfera, ese interés fue aprovechado por parte de la docente en el desarrollo de la Plenaria.

5.3.3. Idoneidad Interaccional

La interacción de los estudiantes con las tareas y entre ellos se vio de manera más natural y menos problemática, puesto que ya conocían las herramientas de trabajo grupal del software Teams así como también la dinámica que se da en trabajos de grupos de manera virtual. Tal como se señaló anteriormente, los estudiantes no lograron desarrollar la Tarea N°5, por tal razón, se tomó la decisión de que la docente en la Plenaria desarrollara preguntas orientadoras dirigidas a todo el grupo y proyectando los cuerpos geométricos involucrados con las secciones transversales (indivisibles) por medio de su participación y discusión, pero aun así los estudiantes no pudieron obtener la fórmula de la esfera, lo que implicó que la docente tuviera que dar orientaciones muy explícitas dirigiendo mucho las respuestas de los estudiantes.

5.3.4. Idoneidad Mediacional

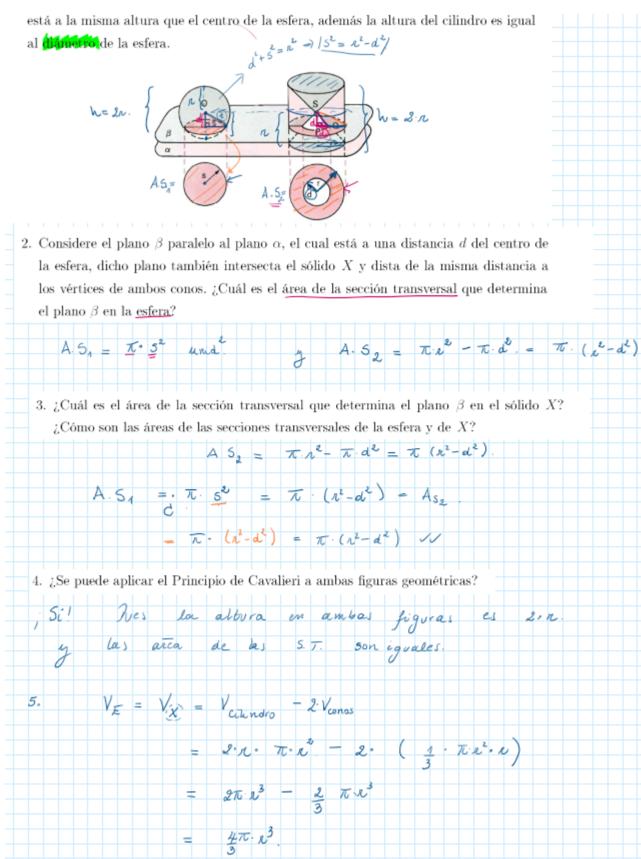
Las tareas diseñadas para esta configuración no contemplaban applets, sólo imágenes de figuras de cuerpos geométricos, creemos que esto podría haber influido en que los estudiantes no lograran deducir el volumen de la esfera, lo que nos da un importante aspecto para mejorar dicha tarea. Por otra parte, el número de estudiantes que participaron en esta sesión fue de 11 de estudiantes (la totalidad del curso) y se dio una sesión y media para el desarrollo de la actividad (105 minutos) de trabajo presencial entre ambas sesiones pudieron llevar a cabo el trabajo de manera autónoma (un día). Los estudiantes no tuvieron problemas técnicos asociados al uso del software Teams para llevar a cabo el trabajo colaborativo ni tampoco en exponer sus ideas entre ellos, así como también en el uso de procesadores de textos para registrar sus respuestas.

5.3.5. Idoneidad Ecológica

Respecto a las Tareas N°3,4 y N°5, éstas claramente desarrollan contenidos intradisciplinares que están contempladas en el área de Geometría Espacial Euclideana y no en la línea de Cálculo, los tópicos abordados en las tareas son parte de la línea de Geometría que se le exige a los profesores en formación en Chile declarados en los Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media (MINEDUC, 2021b).

5.3.6. Reflexión Preliminar

Respecto a la Configuración Cognitiva, podemos concluir que los tres grupos estudiantes pudieron aplicar sin problemas el Principio de Cavalieri en las Tareas N°3 y N°4, de hecho sus respuestas se basaron en la comparación de los cuerpos geométricos con sus respectivas secciones transversales, sin embargo, no pudieron deducir el volumen de la esfera a partir de las secciones transversales del cuerpo geométrico X, puesto que no notaron que las secciones transversales del cuerpo X son iguales a las secciones transversales respectivas de la esfera, esto puede deberse a que las figuras expuestas en el documento no fueron clarificadoras o simplemente por el tiempo y cansancio que tenían los alumnos al finalizar la sesión no les permitió desarrollar la actividad. Al realizar la actividad Plenaria, la docente pudo evidenciar que los estudiantes no pudieron comparar las secciones transversales de la esfera con el cuerpo geométrico X y al hacerles preguntas sobre las áreas de la figura X, los estudiantes con mucha dificultad pudieron observar que las secciones transversales correspondientes teníam igual área. Por tal razón, como propuesta de mejora de la Tarea, buscaremos figuras más aclarativas que permitan visualizar dichas secciones transversales y mejorar las actividades de la Tarea N°5, así como también daremos más tiempo para desarrollar esta tarea en dos sesiones sincrónicas en vez de una. Por otra parte, creemos que las tres tareas son reiterativas y que demandan más tiempo para el logro de ellas, por tal razón hemos decidido para esta configuración dejar las Tareas N°4 y N°5, puesto que pretendemos que los estudiantes deduzcan el volumen de la Esfera, aplicando el Principio de Cavalieri, para ello creemos importante que desarrollen primero una tarea más simple como la Tarea N°4, para así aumentar el nivel de dificultad y puedan desarrollar la Tarea N°5.


está a la misma altura que el centro de la esfera, además la altura del cilindro es igual al diámetro de la esfera.

$d^2+s^2=r^2 \Rightarrow s^2=r^2-d^2$

2. Considere el plano β paralelo al plano α, el cual está a una distancia d del centro de la esfera, dicho plano también intersecta el sólido X y dista de la misma distancia a los vértices de ambos conos. ¿Cuál es el área de la sección transversal que determina el plano β en la esfera?

$A.S_1 = \pi \cdot s^2$ und^2 y $A.S_2 = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot d^2 = \pi \cdot (r^2-d^2)$

3. ¿Cuál es el área de la sección transversal que determina el plano β en el sólido X? ¿Cómo son las áreas de las secciones transversales de la esfera y de X?

$A\,S_2 = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot d^2 = \pi\,(r^2-d^2)$

$A.S_1 = \pi \cdot s^2 = \pi \cdot (r^2-d^2) = A_{S_2}$

$= \pi \cdot (r^2-d^2) = \pi \cdot (r^2-d^2)$ ✓✓

4. ¿Se puede aplicar el Principio de Cavalieri a ambas figuras geométricas?

¡Sí! Pues la altura en ambas figuras es $2 \cdot r$ y las área de las S.T. son iguales.

5. $V_E = V_X = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{conos}$

$= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot r^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r\right)$

$= 2\pi \cdot r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$.

Figura 5.7: Explicación de la Tarea N°5 durante la Plenaria

Tabla 5.2: Tabla Comparativa entre la CE N°2 y CG N°2

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°2**	**Configuración Cognitiva N°2**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para señalar magnitudes de áreas de secciones transversales y volúmenes de cuerpos geométricos. - Elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría euclideana.	-Expresiones algebraicas para señalar magnitudes de áreas de secciones transversales y volúmenes de cuerpos geométricos. - Figuras de cuerpos geométricos propios de la geometría euclideana que son representados por medio de dibujos y fotografías que se encuentran en internet.
Conceptos y/o definiciones	- Nociones de números racionales e irracionales - Noción de volumen de un cuerpo geométrico - Nociones de indivisible (sección transversal)	- Uso de números racionales e irracionales en las magnitudes de las áreas de las secciones transversales. - Utilización de la noción de volumen de cuerpos geométricos
Procedimientos	- Aplicación de fórmulas de áreas de figuras geométricas planas - Aplicación de fórmulas de volúmenes de cuerpos geométricos. -Aplicación del uso de los indivisibles	- Aplicación de fórmulas de áreas paralelepípedos y circunferencias. -Aplicación de formulas de volúmenes de cuerpos geométricos como cilindros y prismas.
Propiedades / Proposiciones	- Utilización del Principio de Cavalieri	- Utilización del Principio de Cavalieri para deducir el volumen de cilindros y prismas, pero ningún grupo pudo deducir el volúmen de la esfera.
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en la obtención de los volúmenes de cuerpos geométricos de prismas, cilindros y esfera. - Argumentos deductivos basados en la geometría euclideana.	- Argumentos deductivos basados en la comparación de secciones transversales de volúmenes de cuerpos geométricos de prismas y cilindros.

5.4. Análisis de la Implementación de las Tareas de la CE N°3

La implementación de las tareas diseñadas de la CE N°3 se realizó en una sesión sincrónica, además los estudiantes tuvieron una instancia de trabajo grupal de manera asincrónica para que pudieran finalizar las tareas que faltaban. En la segunda sesión se realizó una actividad plenaria, donde se les preguntó sus respuestas y cómo las habían obtenido, parte de sus afirmaciones fueron consideradas en el análisis de las respuestas que se describen a continuación.

5.4.1. Idoneidad Epistémica y Cognitiva

Es importante recalcar, que los estudiantes no tenían conocimientos previos sobre los tópicos que abordaba la Tarea N°6, es decir, ellos no han estudiado la noción de áreas bajo la curva de una función así como tampoco han estudiado los procedimientos geométricos para el estudio de esta noción. Tal como mencionamos en la seccion anterior, el análisis que se muestra a continuación considera el desglose de los objetos matemáticos primarios que emergen tanto en los producciones escritas como también en la Plenaria realizada al finalizar estas tareas. La Tabla 5.3 muestra de manera sintetizada la comparación de la Configuración Epistémica N°3 pretendida y la Configuración Cognitiva N°3 lograda por los estudiantes.

Elementos Lingüísticos

Respecto a este punto, los tres grupos comunicaron sus respuestas con elementos algebraicos y aritméticos que se utilizaron para expresar magnitudes de las áreas de rectángulos. Adicionalmente, expresaron elementos del tipo geométrico propios de la geometría analítica, como por ejemplo, gráfico de una función, rectángulos inscritos y circunscritos, área bajo la curva de una función, etc.

Conceptos y/o definiciones

Las preguntas de la Tarea N°6 evocaron en los estudiantes las nociones de aproximación de áreas tanto de rectángulos inscritos como circunscritos hacia el área bajo la curva de una función. Además, desarrollaron la noción de comparación de las áreas obtenidas lo que les permitió observar el comportamiento de las magnitudes de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos. Por otra parte, utilizaron la noción de “infinito potencial” al observar

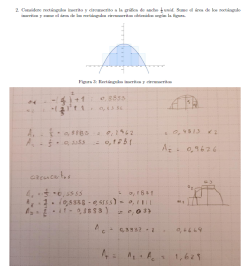


Figura 5.8: Respuesta Grupo 3

que se podían inscribir y circunscribir una cantidad “infinita” de rectángulos. Por otra parte, utilizaron la noción de cantidades “evanescentes” al señalar que “el ancho de los rectángulos es tan pequeña como queramos” (afirmación dicha por un estudiante en la actividad Plenaria).

Procedimientos

Respecto a los procedimientos utilizados por los alumnos, estos involucraron el uso del “infinito potencial”, ya que la tarea evocaba el hecho de que podían inscribir y circunscribir una cantidad “infinita” de rectángulos dado que el ancho de estos rectángulos tenían una magnitud representada por un número racional. Por otra parte, los estudiantes desarrollaron procedimientos aritméticos como por ejemplo, cálculo de áreas de rectángulos, sumas de áreas, etc. y también procedimientos propios de la geometría analítica, por ejemplo, al determinar el ancho y el largo de los rectángulos se utilizan nociones de posición de puntos en el plano cartesiano y de la gráfica de la función para determinar las alturas de los rectángulos.

Propiedades/Proposiciones

Una de las proposiciones fundamentales desarrolladas por los estudiantes es la comparación de las áreas de los rectángulos inscritos y circusncritos, así como también la aproximación de dichas áreas al área bajo la curva de la función.

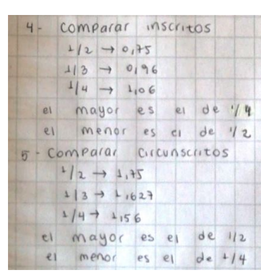


Figura 5.9: Respuesta del Grupo 1 de la pregunta 4 y 5

Argumentos

Con respecto a los argumentos, podemos señalar que la tarea evocó argumentos deductivos, puestos que los estudiantes pudieron observar y deducir que las áreas de los rectángulos inscritos se van incrementando a medida que los rectángulos van aumentando, y de manera análoga dedujeron que las áreas de los rectángulos circunscritos van decreciendo a medida que los rectángulos van aumentando. También argumentaron que a mayor cantidad de rectángulos, la aproximación de las áreas se acercan más al área bajo la curva de la función.

Grupo 1

Al aplicar divisiones reiteradas a los rectángulos puestos en la gráfica, el ancho de estos rectángulos va disminuyendo (por lo tanto, el área de cada rectángulo generado por la medida disminuida del ancho, también mengua) hasta que estos rectángulos generados por las divisiones no sean visibles aproximando el valor de sus áreas a cero. Lo cual, queda expresado bajo la curva graficada, es decir, que pareciera que bajo dicha curva los rectángulos desaparecen o conforman un solo espacio.

Grupo 2

10) Cuando el ancho de los rectángulos disminuya y la cantidad de estos aumente, aumentará el área de los inscritos y disminuirá la de los circunscritos.

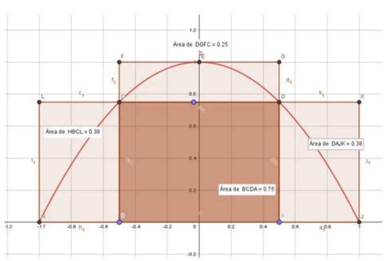
Grupo 3

10 - aumentan los rectángulos y disminuye su ancho, por lo que esto aumentará el área de los inscitos y disminuirá el área de los circunscritos.

Figura 5.10: Respuesta de la pregunta 10 de los tres grupos

Es importante mencionar, que hubo un grupo que utilizó el software GeoGebra para argumentar la respuesta de la pregunta l, tal como se muestra en la imagen (Figura 5.11)

1. Considere rectángulo inscrito y circunscrito a la gráfica de ancho $\frac{1}{2}$ unid. Sume el área de los rectángulos inscritos y sume el área de los rectángulos circunscritos obtenidos según la figura.



El área de los 2 rectángulos inscritos es de 0.75 centímetros ya que el ancho es de 1 centímetro (tomando en cuenta los 2 rectángulos de 0.5) y la altura es de 0.75, para conocer la altura lo que hicimos fue reemplazar x por la medida del ancho que en este caso es 0,5 ($Altura = -(0{,}5)^2 + 1 = -0{,}25 + 1 = 0{,}75$) , por lo cual el área es su base por altura, al reemplazar la base es 1 y la altura es 0,75 lo cual es 0.75 en total.
Los rectángulos circunscritos en los costados de la función tienen una base de 0.5 y una altura de 0.75, por lo tanto el área es de 0.5x0.75 =0.375 que al aproximar queda en 0.38 cm, y para conocer el área del rectángulo circunscrito que se encuentra sobre el rectángulo inscrito (para conocer la altura al vértice de la función (1)le restamos la altura de los rectángulos circunscritos (0.75) , quedando así una altura de 0.25) , es decir la altura es 0.25 y el ancho es de 1 cm (al igual que los inscritos) ,por lo tanto el área de este rectángulo es de 0.25 .
Una vez obtenidas las áreas las sumaremos:
Área de rectángulos inscritos: 0.75
Área de rectángulos circunscritos: 0.38+0.38+0.25: 1.01

Figura 5.11: Respuesta de la pregunta 1, Grupo 3

Podemos concluir que la Tarea logró el objetivo de que todos los estudiantes pudiesen deducir que el área de los rectángulos inscritos y circunscritos se aproximan al área bajo la gráfica de la función y que a mayor cantidad de rectángulos mejor es la aproximación. Si bien las tareas pretenden llevar a cabo el significado parcial de la noción de límite asociado a la CE N°3, es importante mencionar que este tipo de actividades ayudan al estudiante a comprender de manera intuitiva las “Sumas de Riemann”, por ejemplo, Martínez y García (2016) evidenciaron que la implementación de este tipo de actividades y el uso de GeoGebra permiten cimentar los conocimientos formales del objeto matemático “integral definida” en un programa de formación de profesores.

5.4.2. Idoneidad Afectiva

Respecto a la Tarea N°6 los estudiantes demostraron mayor interés en la resolución de ésta, esto se evidenció en la redacción de las respuestas, así como también en la participación de ellos en la Plenaria, pues la profesora en esta oportunidad logra que todos los estudiantes que se encontraban en dicha actividad participaran de manera constante. Además, valoraron el applet utilizado e incluso se interesaron en cómo se llevó a cabo la construcción de éste.

5.4.3. Idoneidad Interaccional

Tal como se desarrollaron las tareas anteriores, la profesora estuvo visitando cada grupo con el fin de responder dudas sobre la tarea, sin embargo, en esta oportunidad los estudiantes trabajaron de manera más independiente, por lo cual no fue necesaria mayor intervención por parte de la docente. Tal como se mencionó anteriormente, los estudiantes tuvieron una mayor participación en la Plenaria, puesto que los tres grupos dentro del tiempo establecido lograron dar solución a la tarea. Dado que esta fue la tercera tarea grupal, los estudiantes ya tenían un mejor control de sus funciones dentro del grupo, así como también del uso de TIC para el desarrollo de su trabajo.

5.4.4. Idoneidad Mediacional

Los estudiantes mejoraron el uso de las herramientas de Teams para desarrollar trabajos grupales y también ya estaban organizados en cómo llevar a cabo el registro de sus respuestas. Por otra parte, valoraron el uso del applet de GeoGebra, pues señalaron que gracias a éste pudieron visualizar el comportamiento de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos, esto se evidenció en el desarrollo de sus respuestas escritas y en sus opiniones en la actividad plenaria. Es importante mencionar que el tiempo utilizado en la tarea de trabajo presencial sincrónico fue de una sesión de 110 minutos (lo cual estaba programado) y pudieron llevar a cabo el trabajo autónomo durante ese día, pues la actividad Plenaria se realizó al otro día, el cual tuvo una duración 20 minutos.

5.4.5. Idoneidad Ecológica

Respecto a la Tarea N°6, ésta aborda el estudio del área bajo la curva de una función, dicho contenido se estudia en el área de Cálculo que se le exige a los profesores en formación en Chile declarados en los Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media (MINEDUC, 2021b). Además, éste tópico se enseña en el Plan Diferenciado de Matemática de Enseñanza Media de manera muy intuitiva en línea con la tarea propuesta (ver MINEDUC (2021a)).

5.4.6. Reflexión Preliminar

Respecto a la Configuración Cognitiva, podemos concluir que los tres grupos de estudiantes lograron el objetivo de la tarea el cual fue de que pudiesen deducir que el área de los rectángulos inscritos y circunscritos se aproximan al área bajo la gráfica de la función y que a mayor cantidad de rectángulos mejor es la aproximación. Si bien en la primera parte de la tarea los estudiantes tenían que comparar las áreas de los rectángulos inscritos de medida $1/2, 1/3$ y $1/4$ así como también los rectángulos circunscritos, los estudiantes observaron que en el primer caso las áreas aumentaban y en el segundo las áreas disminuían, sin embargo, fue el applet el que tuvo un rol fundamental, pues facilitó y generó el análisis del comportamiento de las áreas. Dado que la tarea se pudo realizar dentro del tiempo esperado, es que sólo mejoraremos la redacción de algunas preguntas de ésta.

Tabla 5.3: Tabla Comparativa entre la CE N°3 y CG N°3

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°3**	**Configuración Cognitiva N°3**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas de magnitudes de áreas de rectángulos - Expresiones del tipo geométrico propias de la geometría analítica, como gráfica de una función, área bajo la gráfica, rectángulos inscritos y circunscritos.	-Expresiones algebraicas de magnitudes de áreas de rectángulos. -Expresiones del tipo geométrico propias de la geometría analítica. - Sólo un grupo utilizó herramientas del software GeoGebra para llevar a cabo la primera actividad.
Conceptos y/o definiciones	- Noción de comparación de magnitudes entre áreas de rectángulos inscritos y circunscritos. - Noción de aproximación de las áreas de rectángulos inscritos y circunscritos al área bajo la curva. - Nociones de infinito potencial - Noción de cantidades evasnescentes (tienden a cero)	- Comparación entre los rectángulos inscritos y circunscritos de lado 1/2, 1/3, 1/4, etc. - Se puede apreciar que utilizaron de manera implícita la noción de infinito potencial y aproximación, al señalar que "a mayor cantidad de rectángulos mejor es la aproximación al área bajo la curva" - Todos los grupos observaron que el ancho de los rectángulos eran "magnitudes tan pequeñas como quisiéramos"
Procedimientos	- Utilización del "infinito potencial" para inscribir y circunscribir rectángulos a la gráfica de la curva. -Procedimientos aritméticos asociados al cálculo de áreas, sumas de áreas, etc. - Procedimientos propios de geometría analítica.	- Utilización del "infinito potencial" para inscribir y circunscribir rectángulos de ancho 1/2, 1/3, 1/4, etc. - Procedimientos aritméticos asociados al cálculo de áreas, sumas de áreas, comparación de magnitudes. - Procedimientos geométricos para determinar largo y ancho de rectángulos.
Propiedades / Proposiciones	- Utilización de la comparación de áreas entre rectángulos inscritos y circunscritos, y comparación de dichas áreas con el área bajo la gráfica de una función.	- Comparación de áreas entre rectángulos inscritos y circunscritos, y comparación de dichas áreas con el área bajo la curva $f(x) = -x^2 + 1$
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en la aproximación del área bajo la curva. - Argumentos deductivos basados en la geo. analítica.	- Argumentos deductivos basados en el comportamiento de las áreas de rectángulos inscritos y circunscritos por medio del estudio de sus áreas y representación gráfica.

5.5. Análisis de la Implementación de las Tareas de la CE N°4

La implementación de las tareas diseñadas de la CE N°4 se realizó en dos sesiones sincrónicas, además los estudiantes tuvieron una instancia de trabajo grupal de manera asincrónica para que pudieran finalizar las tareas que faltaban (espacio de un día entre las dos sesiones sincrónicas). Es importante destacar que durante la primera sesión no habían comprendido lo que se pedía en la pregunta 1, y como era una duda que tenía todo el curso, la profesora decidió interrumpir los trabajos en grupo para realizar una explicación general a todo el curso. Por otra parte, al finalizar la segunda sesión se realizó una actividad plenaria, donde se les preguntó sus respuestas y cómo las habían obtenido, parte de sus afirmaciones fueron consideradas en el análisis de las respuestas que se describen a continuación.

5.5.1. Idoneidad Epistémica y Cognitiva

Es importante recalcar, que los estudiantes no tenían conocimientos previos sobre los tópicos que abordaba la Tarea N°7, es decir, ellos no han estudiado la noción de derivada ni la noción de infinitesimal, así como tampoco han estudiado la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función. Tal como mencionamos en la seccion anterior, el análisis que se muestra a continuación considera el desglose de los objetos matemáticos primarios que emergen tanto en los producciones escritas como también en la Plenaria realizada al finalizar estas tareas. La Tabla 5.4 muestra de manera sintetizada la comparación de la Configuración Epistémica N°4 pretendida y la Configuración Cognitiva N°4 lograda por los estudiantes.

Elementos Lingüísticos

La Tarea N°7 evocó en los estudiantes elementos algebraicos que utilizaron para representar infinitesimales, razón de cambio promedio, pendiente de una recta, rectas, funciones con su expresión analítica. Además, desarrollaron elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría analítica, tales como rectas, rectas secantes, rectas tangentes a la gráfica de una función, infinitesimales representados como “trozos de recta o segmentos”, gráfica de una función.

Conceptos y/o definiciones

La tarea evocó en los estudiantes el uso de la noción de “infinitesimal”, así como también el uso del concepto de “infinito actual” al señalar expresiones como $\triangle x \to 0$ o $\triangle x$ se hace muy pequeño tanto como queramos. Por otra parte, utilizaron las nociones de números racionales e irracionales, al determinar la razón de cambio promedio o pendiente de una recta secante. También utilizaron la noción de función, en particular, al determinar expresiones analíticas del tipo $f(x + \triangle x)$.

Procedimientos

Respecto a los procedimientos que la tarea evocaba, podemos destacar la composición de funciones al determinar expresiones analítica como $f(x + \triangle x)$, sin embargo, ningún grupo de estudiantes aplicó de manera correcta este procedimiento, tal como se muestra en la imagen (Figura 5.12), esto implicó que sus respuestas a las siguientes preguntas también fuesen erronéas, es decir, el estudio de las expresiones algebraicas de la aplicación del infinitesimal con respecto al cálculo de la razón de cambio promedio y pendientes de rectas presentaron errores. A pesar de lo anterior, los estudiantes pudieron interactuar con el applet y pudieron aplicar procedimientos propios de la geometría analítica al comparar las posiciones de las rectas secantes y la posición de la recta tangente, a medida que el deslizador permitía aproximar el infinitesimal $\triangle x$ a cero, por tal razón pudieron deducir la aproximación de las rectas secantes a la recta tangente de manera geométrica, pero no pudieron relacionar dicha aproximación de manera algebraica.

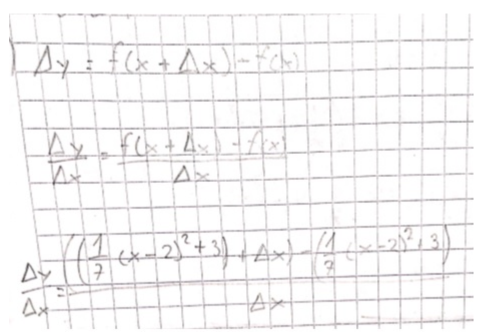


Figura 5.12: Respuesta a la Pregunta 1 de la Tarea N°7 Grupo 2

Propiedades/Proposiciones

Aunque en la primera parte de la Tarea las respuestas de los 3 grupos de estudiantes estaban erronéas, se observó que utilizaron proposiciones para desarrollar operaciones respecto a magnitudes infinitamente pequeñas. Además, utilizaron proposiciones propias de la geometría analítica al estudiar y comparar las pendientes de las rectas secantes con respecto a la pendiente de la recta tangente en el punto $(4, f(4))$.

Argumentos

Los estudiantes pudieron desarrollar argumentos deductivos respecto a la aproximación de la recta sectante a la recta tangente, pero sólo en un sentido geométrico analítico, creemos que en este sentido el applet tuvo un rol fundamental para que los estudiantes desarrollaran esa comparación, puesto que en el sentido algebraico no pudieron deducir ni comparar las pendientes de las rectas secantes con la recta tangente. Por otra parte, se evidenció en sus argumentos el uso del "infinito actual" al señalar que "el infinitesimal puede ser tan pequeño como se quiera" (afirmación de un estudiante en la actividad Plenaria). Sierspinka (1985) sostiene que este tipo de aseveraciones demuestran que los estudiantes comprenden el objeto límite como un "movimiento dinámico" en contraste de la noción formal de límite como algo "estático".

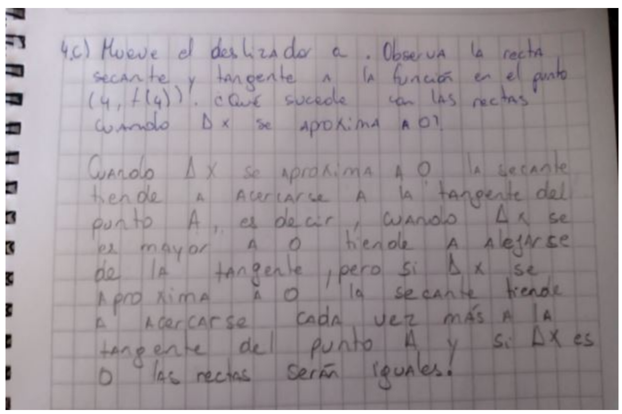


Figura 5.13: Respuesta de la actividad 4 Tarea N°7 del grupo 3

5.5.2. Idoneidad Afectiva

Respecto a la Tarea N°7 los estudiantes estaban un poco confundidos con la primera parte de la tarea, lo que provocó un cierto desinterés y cansancio en desarrollar sus respuestas escritas, además, en la actividad Plenaria de cierre, hubo estudiantes que manifestaron que las actividades iniciales de la tarea eran mucho más complejas que las tareas anteriores y que les dificultó poder entender a cabalidad los primeros ítems. A pesar de lo anterior, se notó mayor interés cuando tuvieron que interactuar con el applet y analizar tanto las posiciones de las rectas secantes con la recta tangente, así como también sus pendientes respectivas. Lo anterior se pudo evidenciar en las respuestas escritas así como también en su participación en la actividad Plenaria de cierre de la tarea.

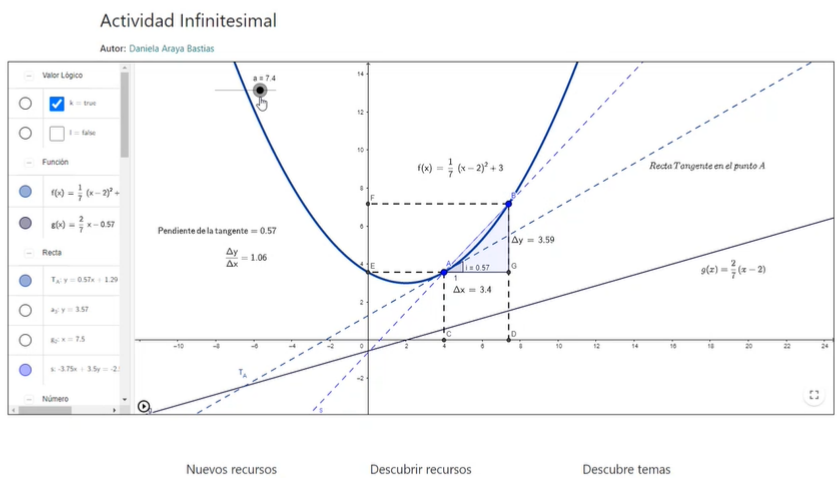


Figura 5.14: Actividad Plenaria de cierre de la Tarea N°7

5.5.3. Idoneidad Interaccional

Tal como se desarrollaron las tareas anteriores, la profesora estuvo visitando cada grupo con el fin de responder dudas sobre la tarea, sin embargo, en esta oportunidad los estudiantes tenían muchas dudas de cómo abordar los primeros ítems de la Tarea, por tal razón, la profesora tuvo que detener los trabajos grupales y explicar con mayor precisión que es lo que se pedía en esas actividades, tal como aparece en la Figura (5.15). En la actividad Plenaria final se observó que los estudiantes estaban más desanimados, puesto que expresaron que no sabían si habían entendido bien la Tarea, por tal razón la profesora utilizó el applet y por medio de la interacción de éste respondió sus dudas, y ahí pudieron comprender más las actividades.

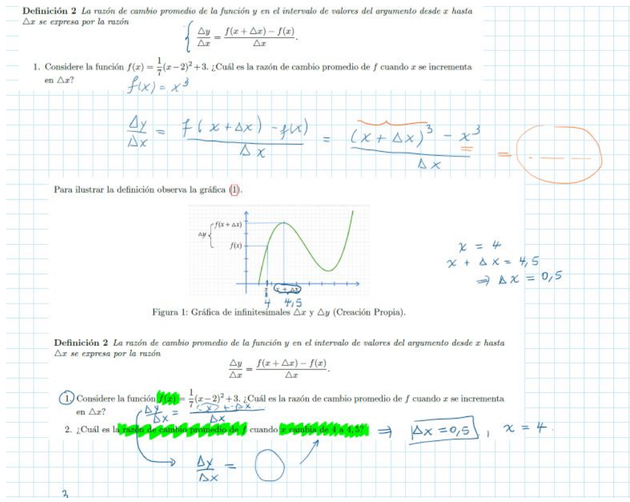


Figura 5.15: Respuesta de la Profesora sobre dudas de la Tarea $N°7$

Dado que esta fue la cuarta tarea grupal, los estudiantes ya tenían un mejor manejo de sus responsabilidades dentro del grupo, así como también del uso de TIC para el desarrollo de su trabajo.

5.5.4. Idoneidad Mediacional

Los estudiantes ya estaban habituados en el uso de las herramientas de Teams para desarrollar trabajos grupales y también ya estaban organizados en cómo llevar a cabo el registro de sus respuestas. Es importante destacar, que el uso del applet de GeoGebra tuvo un rol importante, puesto que por medio de la interacción de éste pudieron desarrollar y lograr el objetivo de la actividad desde el punto de vista geomeétrico analítico, esto se evidenció en el desarrollo de sus respuestas escritas y en sus opiniones en la actividad plenaria. Es importante mencionar que el tiempo utilizado en la tarea de trabajo presencial sincrónico fue de dos sesiones de 110 minutos cada una (estaba programado sólo una sesión), y pudieron llevar a cabo el trabajo autónomo durante ese día, pues la actividad Plenaria se realizó al otro día, el cual tuvo una duración 20 minutos aproximadamente.

5.5.5. Idoneidad Ecológica

Respecto a la Tarea N°7, ésta aborda el estudio de infinitesimales de la aproximación de las rectas secantes a la recta tangente en un punto, esta es uno de los significados parciales de derivada (Pino-Fan, 2014), el cual se estudia en el área de Cálculo que se exige a los profesores en formación en Chile declarados en los Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media (MINEDUC, 2021b). Además, éste tópico se enseña en el Plan Diferenciado de Matemática de Enseñanza Media de manera muy intuitiva en línea con la tarea propuesta (ver MINEDUC (2021a)).

5.5.6. Reflexión Preliminar

Debido a que los tres grupos de estudiantes no lograron deducir la aproximación de las rectas secantes hacia la recta tangente desde el ámbito algebraico, es que se propone editar la tarea y cambiar el orden, es decir, poner los ítems respecto a la parte algebraica al final y no al inicio, con el fin de que puedan comprender primero dicha aproximación desde el punto de vista geométrico y después desde el punto vista algebraico. Por otra parte, el applet no se cambiará pues éste logró evocar de manera intuitiva dicha aproximación por medio de las representaciones geométricas analíticas de las rectas, la gráfica de la función, etc.

Tabla 5.4: Tabla Comparativa entre la CE N°4 y CG N°4

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°4**	**Configuración Cognitiva N°4**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para representar infinitesimales, razón de cambio promedio, rectas, funciones, etc. - Expresiones propias de la geom. analítica como: infinitesimal, gráfica de una función, rectas secantes y recta tangente a la gráfica de una función.	- Expresiones algebraicas para representar infinitesimales, razón de cambio promedio, rectas, funciones, etc. -Expresiones propias de la geom. analítica, como gráfica de una función, rectas secantes y tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{7}(x-2)^2 + 3$
Conceptos y/o definiciones	- Noción de infinitesimal. - Noción de infinito actual - Noción de numeros racionales e irracionales.	- Se apreció la noción de infinitesimal de manera geométrica, pero no de manera algebraica. - Noción de infinito actual, al observar que el infinitesimal es una cantidad muy pequeña. - No se apreció el uso de números racionales e irracionales en el cálculo de razón de cambio, por procedimientos erronéos.
Procedimientos	- Utilización del “infinito actual” para señalar que el infinitesimal es una cantidad tan pequeña como se quiera. -Procedimientos aritméticos asociados al uso de infinitesimal para el cálculo de razón de cambio promedio. - Procedimientos propios de geometría analítica.	- Utilización del “infinito actual” para señalar que el infinitesimal es una cant. tan pequeña como se quiera. - Procedimientos aritméticos asociados al cálculo de razón de cambio promedio, lamentablemente todos los estudiantes tuvieron errores en este aspecto. - Procedimientos geométricos para identificar rectas secantes, tangentes, pendientes de rectas, etc.
Propiedades / Proposiciones	- Aplicación de propiedades en la operatoria algebraica de infinisitesimales en el cálculo de razón de cambio promedio, etc.	- Aplicación de propiedades en la operatotria algebraica de infinitesimales en el cálculo de razón de cambio promedio, etc. Sin embargo, esta operatoria tuvo errores algebraicos.
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en la aproximación de las rectas secantes a la recta tangente por medio de manera geométrica y algebraica.	- Argumentos deductivos basados en la aproximación de las rectas secantes a la recta tangente en un punto, sólo de manera geométrico analítico.

5.6. Análisis de la Implementación de las Tareas de la CE N°5

La implementación de las tareas diseñadas de la CE N°5 se realizó en dos sesiones sincrónicas, además los estudiantes tuvieron una instancia de trabajo grupal de manera asincrónica para que pudieran finalizar las tareas que faltaban (espacio de dos días entre las dos sesiones sincrónicas). Los estudiantes utilizaron las dos sesiones sincrónicas para el desarrollo de su trabajo grupal y en la segunda sesión se implementó la actividad plenaria, donde se les preguntó sus respuestas y cómo las habían obtenido, es importante destacar que en el análisis se consideraron sus reproducciones escritas y algunas de sus afirmaciones durante la actividad plenaria, las que describen a continuación.

5.6.1. Idoneidad Epistémica y Cognitiva

Es importante recalcar, que los estudiantes tenían conocimientos previos sobre el estudio de sucesiones, aspectos que abordaban las Tareas N°8,9 y N°10, específicamente, ellos habían estudiado al final del semestre anterior tópicos relacionados con sucesiones. Es importante mencionar que el análisis que se muestra a continuación considera el desglose de los objetos matemáticos primarios que emergen tanto en los producciones escritas como también en la Plenaria realizada al finalizar estas tareas. La Tabla 5.5 muestra de manera sintetizada la comparación de la Configuración Epistémica N°5 pretendida y la Configuración Cognitiva N°5 lograda por los estudiantes.

Elementos Lingüísticos

Las Tareas N°8,9 y N°10 evocaron en los estudiantes elementos algebraicos que utilizaron para expresar notaciones y símbolos relacionados con las sucesiones, como por ejemplo, su término general. También desarrollaron expresiones del tipo geométrica analítica como gráficas de sucesiones crecientes, decrecientes y alternantes, si bien muchas de esas representaciones estaban dadas en los applets de GeoGebra, algunos estudiantes las replicaron y todos interpretaron bien las gráficas asociadas a las sucesiones (esto se evidenció cuando dedujeron el término general de algunas sucesiones).

Conceptos y/o definiciones

Las tareas evocaron en los estudiantes el uso de la noción de sucesión (como una función discreta), así como también el uso del concepto de "infinito potencial" al señalar expresiones como "los términos de una sucesión son puntos aislados" (afirmación realizada por un estudiante en la Actividad Plenaria, haciendo referencia a que la cantidad de términos de una sucesión es numerable). Además, aplicaron el concepto de "infinito actual" al expresar afirmaciones como "la sucesión se aproxima al valor 1 en la gráfica, pero no llega a tocarlo" (ver Figura 5.16), en dicha afirmación también se puede apreciar una noción de límite en el cual éste "no se alcanza y la sucesión se puede aproximar tanto como se quiera" (D'Alembert citado por Medrano y Pino-Fan (2016, p.309)).

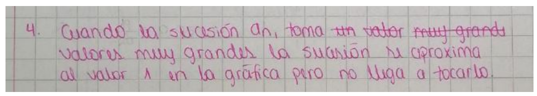

4. Cuando la sucesión an, toma ~~un valor~~ ~~muy grande~~ valores muy grandes la sucesión se aproxima al valor 1 en la gráfica pero no llega a tocarlo.

Figura 5.16: Respuesta Grupo 3 Tarea 8

Procedimientos

Las tareas involucraron procedimientos aritméticos que pedían determinar términos de una sucesión, intervalos, utilización de distancia entre números, etc. En los procedimientos para completar las tablas solicitadas, sólo hubo un grupo que no relacionó de manera correcta el término a_{n_0} con el valor de ε tal como se muestra en la Figura (5.17).

Tabla 1: Valores de ε y n_0

n_0	a_{n_0}	ε	$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$
2	1/2	1	(0, 2)
3	2/3	0.1	(0.9, 1.1)
4	3/4	0.01	(0,99 , 1.01)
5	4/5	0.001	(0.999 , 1.001)
6	5/6	0.0001	(0,9999 , 1.0001)

Figura 5.17: Respuesta Grupo 2 Tarea 8

Por otra parte, las tareas evocaron procedimientos propios de la geometría analítica para visualizar la gráfica de las sucesiones, deducir su comportamiento, observar intervalos de números, etc. Esto se evidenció cuando los estudiantes respondían a preguntas sobre el comportamiento de la sucesión, al completar las tablas de datos solicitadas y al deducir el término general de la sucesión.

Propiedades/proposiciones

Las tareas involucraron las propiedades de distancia (valor absoluto) entre números, intervalos de números reales, puesto que al responder las tablas de datos tenían que aplicar dichas propiedades de distancia así como también observar e interpretar las gráficas de las sucesiones para obtener los datos correctamente. También aplicaron propiedades de distancia y completitud de los números reales (de manera implícita) al estudiar el comportamiento (o convergencia) de las sucesiones.

Argumentos

Las tareas evocaron en los estudiantes argumentos deductivos sobre el comportamiento de las sucesiones los cuales se basaron en los procedimientos aritméticos y geométricos mencionados anteriormente, esto se puede evidenciar cuando los estudiantes señalaron que “la sucesión no posee límite” o que “la sucesión si poseía límite”, sin embargo, ningún grupo pudo relacionar el rol de ε cuando la sucesión convergía, a pesar de haber analizado de manera correcta su comportamiento y haber completado las tablas (ver Figura 5.18). Esto plantea un desafío para mejorar la actividad con el fin de que el estudiante pueda relacionar el rol de ε y el límite de la sucesión. Finalmente, ningún grupo pudo explicar con sus propias palabras la expresión:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \text{tal que}\, |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L,$$

pues sólo interpretaron los símbolos y no lo relacionaron con las tareas previas (ver Figura (5.19)).

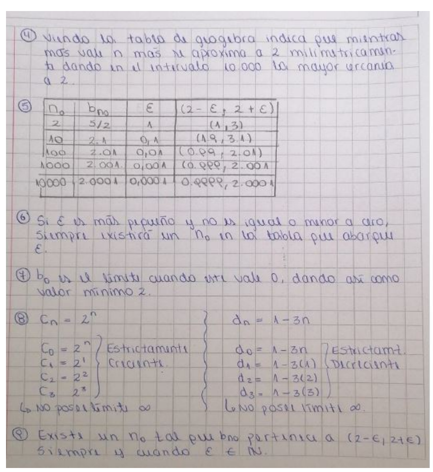
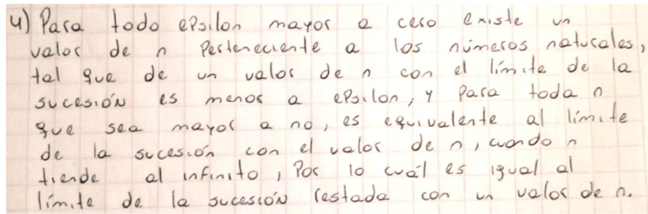
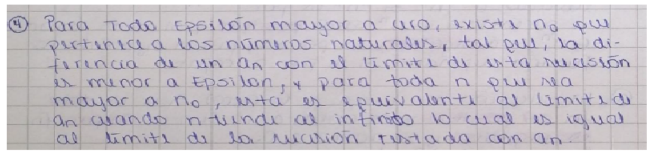


Figura 5.18: Respuesta Grupo 3 Tarea 9


4) Para todo epsilon mayor a cero existe un valor de n perteneciente a los números naturales, tal que de un valor de n con el límite de la sucesión es menor a epsilon, y para toda n que sea mayor a no, es equivalente al límite de la sucesión con el valor de n, cuando n tiende al infinito, por lo cuál es igual al límite de la sucesión restada con un valor de n.


(4) Para todo epsilón mayor a cero, existe no que pertenece a los números naturales, tal que, la diferencia de un an con el límite de esta sucesión es menor a epsilon, y para toda n que sea mayor a no, esta es equivalente al límite de an cuando n tiende al infinito lo cual es igual al límite de la sucesión restada con an.

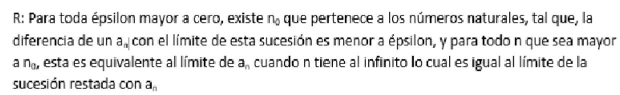

R: Para toda épsilon mayor a cero, existe n_0 que pertenece a los números naturales, tal que, la diferencia de un a_n con el límite de esta sucesión es menor a épsilon, y para todo n que sea mayor a n_0, esta es equivalente al límite de a_n cuando n tiene al infinito lo cual es igual al límite de la sucesión restada con a_n

Figura 5.19: Respuesta de los tres grupos de la definición de convergencia de una sucesión

Una observación importante sobre el desempeño de los estudiantes, es que a pesar de que éstos tenían conocimientos previos sobre sucesiones, lamentablemente no pudieron relacionar y evidenciar una apropiación de la noción de límite de sucesiones con la definición formal. Lo anterior es evidenciado en Sierspinka (1985), pues afirma que hay un alto nivel de dificultad en relacionar el lenguaje natural e intuitivo con la lógica y los cuantificadores que se utilizan en la noción formal de límite. Por otra parte, ningún grupo pudo establecer condiciones para que una sucesión alternante converja, a diferencia de las sucesiones monótonas, donde ellos si lograron establecer las condiciones para que éstas converjan.

5.6.2. Idoneidad Afectiva

Los estudiantes se sentían cómodos e interesados por las tareas, esto se puede deber a que ellos ya conocían parte de estos tópicos, puesto que los habían estudiado recientemente en el semestre pasado. Además, en la actividad Plenaria de cierre, señalaron que no les fue díficil entender las tareas de esta configuración a diferencia de las tareas anteriores. Por otra parte, algunos estudiantes señalaron que tanto los applets como las gráficas de las sucesiones les había parecido interesantes de estudiar, puesto que cuando ellos habían estudiado sucesiones las gráficaban en sólo en una recta real (unidimensional).

5.6.3. Idoneidad Interaccional

Tal como se desarrollaron las tareas anteriores la profesora estuvo visitando cada grupo con el fin de responder dudas sobre la tarea, a diferencia de la actividad anterior, los estudiantes no llamaron a la profesora de manera frecuente, puesto que ellos mismos señalaron que comprendían la actividad, además, estos tópicos los habían estudiado recientemente en la asignatura anterior. Esto permitió que la interacción entre ellos fuera más fluída tanto en sus argumentos y discusiones matemáticos así como también en aspectos de organización de registro de respuestas y uso de las herramientas de sala con el software Teams. Respecto a la actividad Plenaria, se tuvo una mayor participación por parte de los estudiantes, puesto que los estudiantes se sentían más cómodos con el desempeño de estas tareas.

5.6.4. Idoneidad Mediacional

Debido a que esta fue la quinta actividad grupal, se notaba que los estudiantes tenían un mejor manejo en el uso de herramientas Teams para el desarrollo del trabajo grupal, así como también su organización en la redacción de sus respuestas. En esta oportunidad también valoraron los applets utilizados de GeoGebra, puesto que encontraron interesante estudiar las sucesiones utilizando el plano cartesiano, ya que en la asignatura previa habían estudiado el comportamiento de las sucesiones sólo en la recta real (es decir, graficando los puntos de la sucesión de manera unidimensional). Además, les pareció interesante cómo el applet iba graficando cada punto de la sucesión. Por otra parte, el tiempo utilizado en las tareas de trabajo sincrónico fue de dos sesiones, cada una de 110 minutos (sólo estaba programada una sesión de 110 minutos), además, realizaron trabajo autónomo entre las dos sesiones, es importante mencionar que en al finalizar la segunda sesión se llevó a cabo la actividad Plenaria, la cual tuvo una duración de 24 minutos.

5.6.5. Idoneidad Ecológica

Respecto a las Tareas N°8,9 y N°10, éstas abordan el estudio de sucesiones, su comportamiento y cuales son sus condiciones para que una sucesión converja, este tópico se estudia en el área de Cálculo que se exige a los profesores en formación en Chile declarados en los Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media

(MINEDUC, 2021b). Además, éste tópico se enseña en el Plan Diferenciado de Matemática de Enseñanza Media de manera intuitiva en línea con la tarea propuesta (ver los Planes y Programas Plan Diferenciado de Matemática MINEDUC (2021a)).

5.6.6. Reflexión Preliminar

Debido a que tanto la redacción de las tareas y el uso de los applets tuvieron una buena acogida por parte de los estudiantes, es que las Tareas de esta configuración se mejorarán considerando aspectos de tiempo (mayor tiempo para su implementación), además, se incorporará más ejemplos de sucesiones alternates con el fin de que los estudiantes puedan deducir las condiciones para que una sucesión alternante converja. Por otra parte, creemos que el ítem 4 de la Tarea N°10 provocó confusión y no generó lo que se pretendía, pues los estudiantes sólo "tradujeron" la expresión simbólica y no relacionaron el rol de ε y el n_0 en la convergencia de la sucesión. Lo que plantea un desafío para lograr una apropiación del significado formal de convergencia de una sucesión.

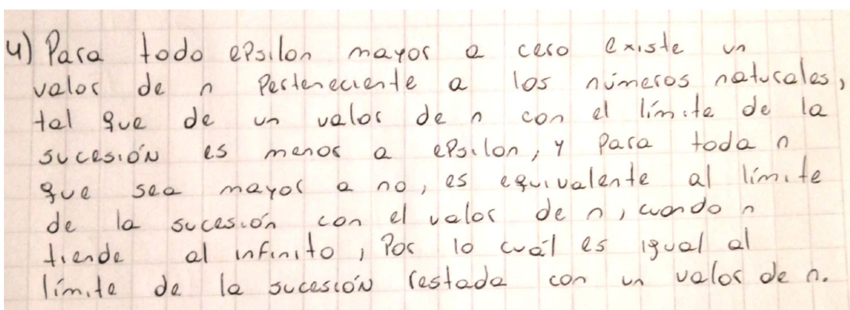

4) Para todo epsilon mayor a cero existe un valor de n perteneciente a los números naturales, tal que de un valor de n con el límite de la sucesión es menor a epsilon, y para toda n que sea mayor a no, es equivalente al límite de la sucesión con el valor de n, cuando n tiende al infinito, por lo cuál es igual al límite de la sucesión restada con un valor de n.

Figura 5.20: Respuesta del Grupo 1 de la Tarea N°10

Tabla 5.5: Tabla Comparativa entre la CE N°5 y CG N°5

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°5**	**Configuración Cognitiva N°5**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para expresar notaciones y símbolos relacionados a las sucesiones. - Expresiones propias de la geom. analítica como: gráficas de sucesiones crecientes, decrecientes, alternantes, etc.	- Expresiones algebraicas para expresar notaciones y símbolos relacionados a sucesiones. -Expresiones propias de la geom. analítica, como gráfica de sucesiones $a_n = 1 + 1/n$; $b_n = 2 + 1/n$; $c_n = 2^n$; $d_n = 1 - 3n; e_n = (-1)^n \cdot b_n$ y $f_n = (-1)^n \cdot a_n$
Conceptos y/o definiciones	- Noción de sucesión. - Noción de infinito potencial - Noción de infinito actual - Noción de límite que no se alcanza y se puede aproximar tanto como se quiera.	- Se apreció la comprensión de sucesiones al observar e interpretar las gráficas de estas - Noción de infinito potencial, al señalar que los términos son sucesivos. - Noción de infinito actual ligada con la noción de límite de una sucesión que "se aproxima tanto como se quiera"
Procedimientos	- Procedimientos aritméticos y algebraicos para determinar términos de una sucesión, intervalos, distancia, etc. - Procedimientos propios de la geometría analítica.	- Procedimientos aritméticos para completar tablas de datos y estudiar intervalos de convergencia. - Procedimientos geométricos para relacionar la gráfica de una sucesión y su comportamiento.
Propiedades / Proposiciones	- Aplicación de propiedades de distancia (valor absoluto) y criterios de convergencia de sucesiones.	- Aplicación de propiedades de distancia en intervalos de convergencia y criterios de convergencia de sucesiones, pero ningún grupo pudo deducir condiciones en sucesiones alternantes.
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en la aproximación términos de una sucesión de manera geométrica.	- Argumentos deductivos basados en la aproximación de términos de una sucesión de manera geométrica, pero ningún grupo determinó condiciciones de convergencia en suc. alternantes

5.7. Análisis de la Implementación de las Tareas de la CE N°6

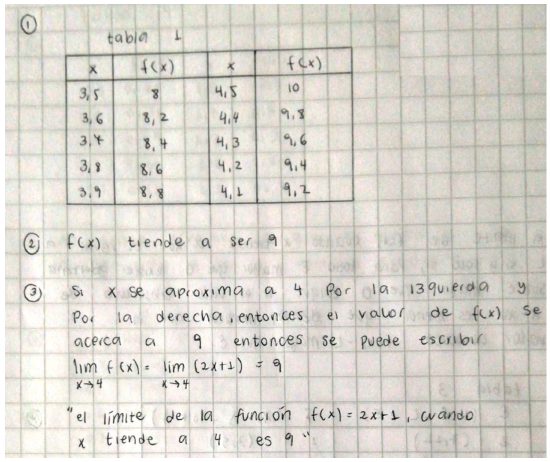
La implementación de las tareas diseñadas de la CE N°6 se realizó en dos sesiones sincrónicas, además los estudiantes tuvieron una instancia de trabajo grupal de manera asincrónica para que pudieran finalizar las tareas que faltaban (espacio de dos días entre las dos sesiones sincrónicas). Los estudiantes utilizaron las dos sesiones sincrónicas para el desarrollo de su trabajo grupal y en la segunda sesión se implementó la actividad plenaria, donde se les preguntó sus respuestas y cómo las habían obtenido, es importante destacar que en el análisis se consideraron sus reproducciones escritas y algunas de sus afirmaciones durante la actividad plenaria, las que describen a continuación.

5.7.1. Idoneidad Epistémica y Cognitiva

Es importante recalcar, que los estudiantes no tenían conocimientos previos sobre el estudio de límite de funciones, de hecho en la asignatura donde se implementaron las Tareas N°11 y N°12 contempla como primera unidad el estudio de límites de funciones de una variable. Es importante mencionar que el análisis que se muestra a continuación considera el desglose de los objetos matemáticos primarios que emergen tanto en los producciones escritas como también en la Plenaria realizada al finalizar estas tareas. La Tabla 5.6 muestra de manera sintetizada la comparación de la Configuración Epistémica N°6 pretendida y la Configuración Cognitiva N°6 lograda por los estudiantes.

Elementos Lingüísticos

Las Tareas N°11 y N°12 evocan elementos aritméticos y algebraicos que se utilizan para expresar notaciones y símbolos relacionados al límite de una función en un punto o aproximaciones de una función a un número, distancia entre números, valores de la función en un determinado intervalo de números, etc. También las tareas evocaron elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría analítica, como gráficas de funciones, intervalos de números representados como segmentos de recta, el conjunto de los números reales como la representación de la recta de números reales.


① tabla 1

x	f(x)	x	f(x)
3,5	8	4,5	10
3,6	8,2	4,4	9,8
3,7	8,4	4,3	9,6
3,8	8,6	4,2	9,4
3,9	8,8	4,1	9,2

② f(x) tiende a ser 9

③ Si x se aproxima a 4 por la izquierda y por la derecha, entonces el valor de f(x) se acerca a 9 entonces se puede escribir $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}(2x+1) = 9$

"el límite de la función $f(x)=2x+1$, cuando x tiende a 4 es 9"

Figura 5.21: Respuesta Grupo 1 de la Tarea N°11

Conceptos y/o definiciones

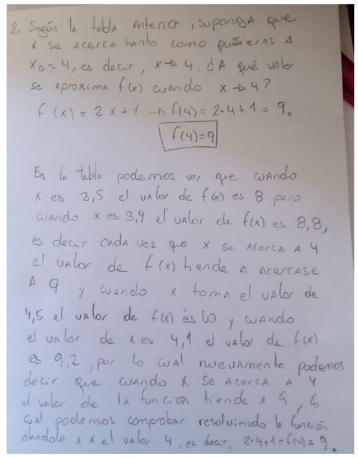
Las tareas evocaron en los estudiantes la noción de función en una variable real, pues estudiaron los valores de su función y analizaron intervalos de aproximación de las imágenes de la función a un número. También utilizaron implícitamente la noción de completitud de los números reales al estudiar los intervalos de aproximación de la función a un número, pues estos intervalos representados por segmentos de recta *no tienen vacíos entre los números,* esta noción de completitud está relacionada con la noción de infinito actual, esto se evidencia cuando los estudiantes durante la actividad Plenaria señalaron " el x se acerca tanto como queramos a x_0" y "$f(x)$ se acerca a L". Por otra parte, al estudiar los intervalos $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ y $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ y los valores que se encuentran en ellos, los estudiantes utilizan de manera implícita que el conjunto de los números reales es un cuerpo ordenado, pues pueden inferir que valor o que número está más cerca de x_0 o de L.

Finalmente, las tareas trataron de generar en los estudiantes de manera intuitiva la noción de límite de Weieirstrass, si bien se dieron cuenta de la dependencia del radio δ con respecto al radio ε y cuales eran sus roles. Al realizar la actividad Plenaria de cierre no se evidenció una apropiación de esta noción, puesto que la profesora les preguntó que entendían con la expresión

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\,\exists\,\delta_\varepsilon > 0 \text{ tal que si } |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon, \tag{5.1}$$

las respuestas de los estudiantes se expresaron en cuanto a traducción de la simbología,

2. Según la tabla anterior, suponga que x se acerca tanto como quisieras a $x_0 = 4$, es decir, $x \to 4$. ¿A qu´e valor se aproxima $f(x)$ cuando $x \to 4$?



2. Según la tabla anterior, suponga que x se acerca tanto como quisieras a $x_0 = 4$, es decir, $x \to 4$. ¿A qué valor se aproxima f(x) cuando $x \to 4$?

$f(x) = 2x + 1 \to f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

$\boxed{f(4)=9}$

En la tabla podemos ver que cuando x es 3,5 el valor de f(x) es 8 pero cuando x es 3,9 el valor de f(x) es 8,8, es decir cada vez que x se acerca a 4 el valor de f(x) tiende a acercase a 9 y cuando x toma el valor de 4,5 el valor de f(x) es 10 y cuando el valor de x es 4,1 el valor de f(x) es 9,2, por lo cual nuevamente podemos decir que cuando x se acerca a 4 el valor de la función tiende a 9, lo cual podemos comprobar resolviendo la función dándole a x el valor 4, es decir, $2 \cdot 4 + 1 = f(4) = 9$.

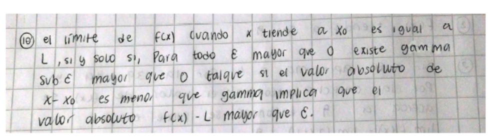
Figura 5.22: Respuesta Grupo 3 del ítem 2 Tarea N°11

pero no pudieron explicar con sus propias palabras dicha expresión. Lo anterior es ratificado en las reproducciones escritas, puesto que se observó que interpretaron y transcribieron la simbología, lo que nos brinda una evidencia clara de que realmente no comprendieron a cabalidad la expresión (5.1). Con respecto a este obstáculo, Sierspinka (1985) señala que hay un nivel de dificultad en entender bien el orden de los cuantificadores en la definición de límite, esto se debe a que el estudiante debe estudiar la gráfica de una función en un sentido inverso, es decir, desde el eje y al eje x, procedimiento que no es intuitivo ni natural. Por otra parte, queremos mencionar que sólo hubo un grupo que expresó de manera erronéa la noción de límite de Weierstrass, tal como se muestra en la Figura (5.23).

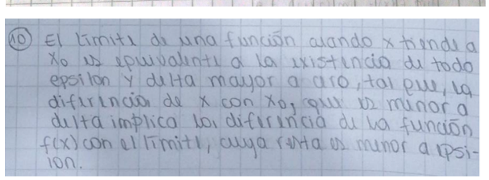
10. Explica con tus palabras la siguiente expresión:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta_\varepsilon > 0 \text{ tal que si } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

R: Para cada sucesión {x}, distintos de x_0, convergente a x_0, la sucesión {F(x)} converge a L



10 el límite de f(x) cuando x tiende a x_0 es igual a L, si y solo si, para todo ε mayor que 0 existe gamma sub ε mayor que 0 talque si el valor absoluto de $x - x_0$ es menor que gamma implica que el valor absoluto f(x) - L mayor que ε.



10 El limite de una función cuando x tiende a x_0 es equivalente a la existencia de todo epsilon y delta mayor a cero, tal que, la diferencia de x con x_0, que es menor a delta implica la diferencia de la función f(x) con el limite, cuya resta es menor a epsilon.

Figura 5.23: Respuesta de todos los grupos del ítem 10 Tarea N°11

Procedimientos

Los estudiantes desarrollaron procedimientos aritméticos para determinar los valores de la función cercanos a un número (o punto). Además, utilizaron procedimientos geométricos propios de la geometría analítica, pues utilizando el applet pudieron observar intervalos como segmentos de rectas, también estudiaron la gráfica de la función lo que les permitió observar los intervalos tanto en el dominio como en el recorrido de la función (como segmentos de recta). En este aspecto queremos destacar al grupo 3, que estudiaron los valores de la función de la Tarea N°12 utilizando el software de GeoGebra, tal como aparece en la Figura 5.24.

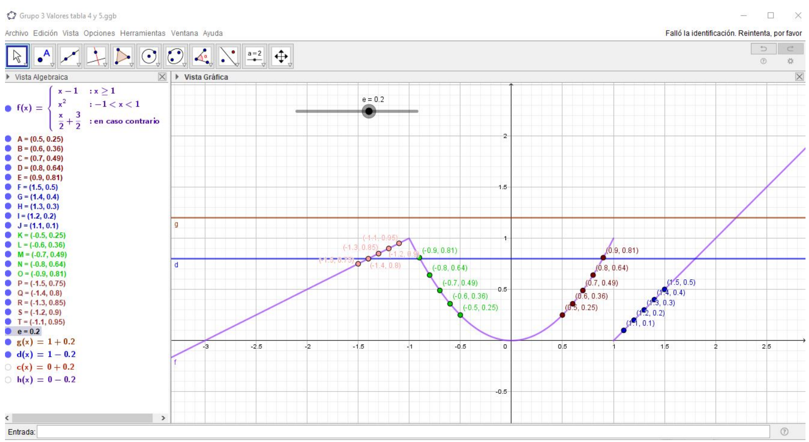


Figura 5.24: Respuesta Grupo 3 de las tablas de valores de la Tarea N°12

Por otra parte, los estudiantes utilizaron procedimientos con el uso de distancia (o valor absoluto) de números reales, dichos procedimientos fueron utilizados de manera ímplicita al estudiar los valores de la función dentro de intervalos, además, cuando analizaron aproximaciones de valores como "$x \to x_0$", estas expresiones les permitió decidir que hay ciertos números que están más cercanos a x_0 que otros.

Propiedades/Proposiciones

Tal como fue mencionado en los *procedimientos* las tareas evocaron en los estudiantes *propiedades* de distancia (valor absoluto), las cuales fueron utilizadas de manera implícita. En particular, en la Tarea N°12 tuvieron que aplicar *propiedades* relacionadas a la existencia de límites de una función en un número.

Argumentos

La Tarea N°11 evocó en los estudiantes argumentos aritméticos y algebraicos para estudiar el comportamiento o aproximación de la función cuando $x \to 4$. Por otra parte, utilizaron argumentos deductivos para determinar los roles de δ y ε, los tres grupos pudieron determinar que δ depende del valor de ε, sin embargo, sólo un grupo pudo responder la relación entre δ y $x \to x_0$ y la relación entre ε y $f(x) \to L$, tal como se muestra en la Figura (5.25).

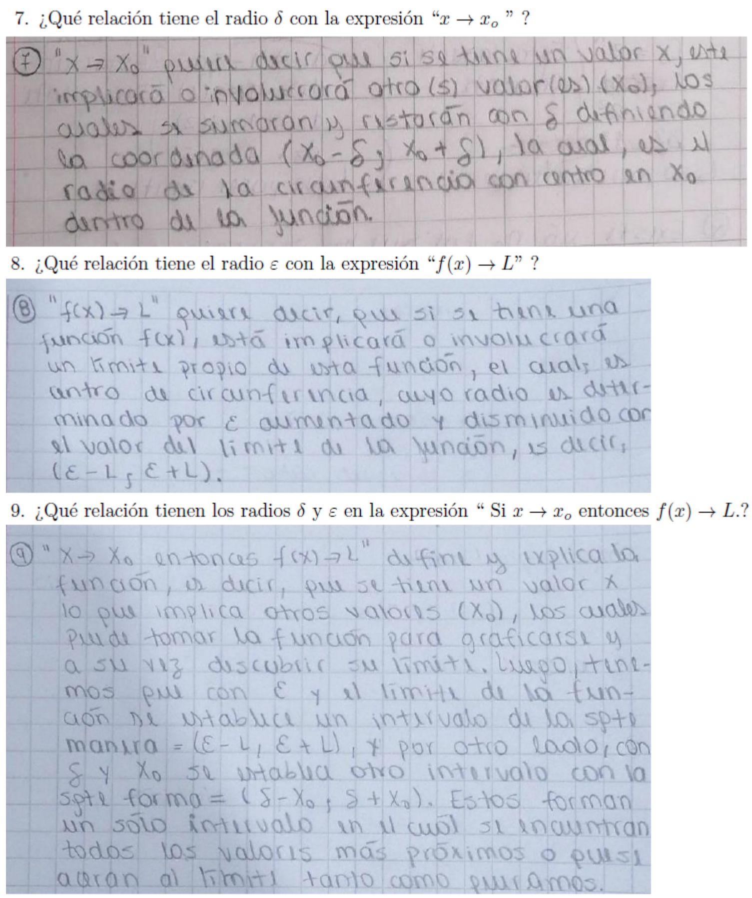
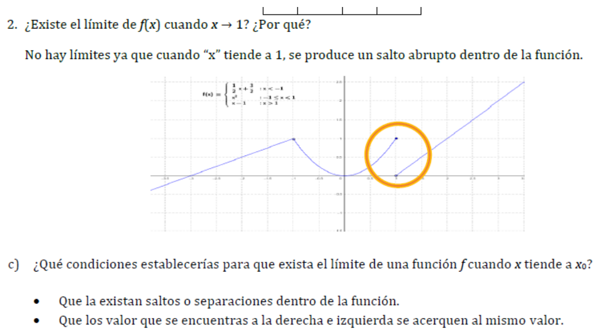


Figura 5.25: Respuesta Grupo 3 ítemes 1,8 y 9 Tarea N°11

Este error es estudiado por Sierspinka (1985) y afirma que la poca importancia que el estudiante le da a los conjuntos dominio y codominio de la función así como también la topología en el estudio de vecindades del punto x_0 y del punto límite, ocasiona la confusión de los roles δ y ε y la desvinculación de la dependencia del radio δ con el radio ϵ. Respecto a la deducción de las condiciones para la existencia de límite de una función en un punto, sólo uno de los tres grupos logró deducir que propiedad tenía que cumplir la función, pero en la actividad Plenaria de cierre todos los grupos lograron observar que si la gráfica de la función tiene saltos, el límite de la función no existía en ese punto.



2. ¿Existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to 1$? ¿Por qué?

No hay límites ya que cuando "x" tiende a 1, se produce un salto abrupto dentro de la función.

c) ¿Qué condiciones establecerías para que exista el límite de una función f cuando x tiende a x_0?

- Que la existan saltos o separaciones dentro de la función.
- Que los valor que se encuentras a la derecha e izquierda se acerquen al mismo valor.

Figura 5.26: Respuesta Grupo 3 ítem 2 Tarea N°12

5.7.2. Idoneidad Afectiva

Los estudiantes se sentían un poco incómodos con las Tareas N°11 y N°12, esto se debía a que no habían estudiado previamente este signficado de límite, sin embargo, mostraron entusiasmo y participación tanto en la Actividad Plenaria de cierre como también en el cierre de la primera sesión. Por otra parte, los estudiantes expresaron que el applet también les había parecido interesante de estudiar y que éste les permitió responder las preguntas.

5.7.3. Idoneidad Interaccional

Tal como se desarrollaron las tareas anteriores la profesora estuvo visitando cada grupo con el fin de responder dudas sobre la tarea, a diferencia de la actividad anterior, los estudiantes llamaron a la profesora de manera frecuente, puesto que ellos señalaron que no comprendían algunos ítemes de la Tarea N°11. A pesar de lo anterior, la interacción que hubo entre ellos fue fluída tanto en sus argumentos y discusiones matemáticos así como también en aspectos de organización de registro de respuestas y uso de las herramientas de sala con el software Teams. Respecto a la actividad Plenaria, tuvieron la confianza para expresar que no habían podido responder los ítemes 7,8 y 9 de la Tarea N°11, lo cual la profesora abrió el applet y les hizo preguntas para provocar en los estudiantes sus respuestas, en esta instancia los estudiantes pudieron observar lo que representaba la expresión (5.1), y sólo dos estudiantes pudieron expresar con sus palabras lo que entendían de dicha expresión matemática. Dada esta situación, la profesora se tomó el tiempo de explicarla utilizando el applet.

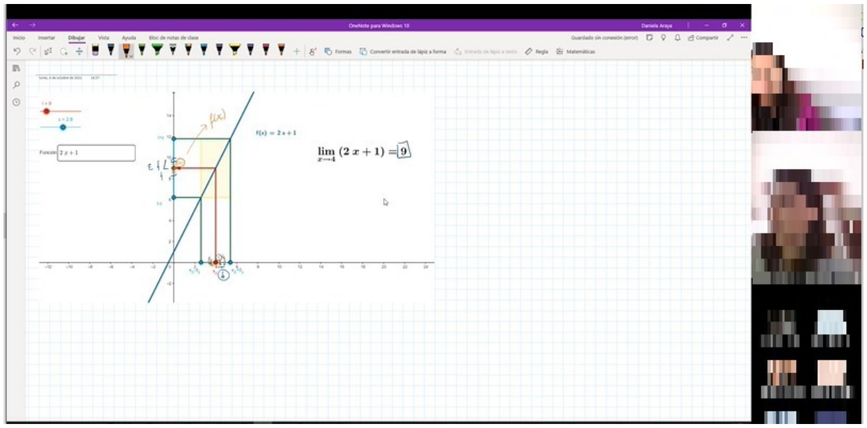


Figura 5.27: Actividad Plenaria Tarea N°11

5.7.4. Idoneidad Mediacional

Debido a que esta fue la sexta actividad grupal, se pudo apreciar que los estudiantes tenían un buen manejo en el uso de herramientas Teams para el desarrollo del trabajo grupal, así como también en la organización del registro de sus respuestas. En esta oportunidad también valoraron los applets utilizados de GeoGebra, puesto que gracias a estos pudieron comprender las condiciones que se necesitan para que el límite de una función en un número existiese así como también para completar las tablas de datos y la dependencia de δ con respecto a ε. Por otra parte, el tiempo utilizado en las tareas de trabajo sincrónico fue de dos sesiones, cada una de 110 minutos (sólo estaba programada una sesión de 110 minutos), además, realizaron trabajo autónomo entre las dos sesiones, es importante mencionar que al finalizar la segunda sesión se llevó a cabo la actividad Plenaria, la cual tuvo una duración de 35 minutos.

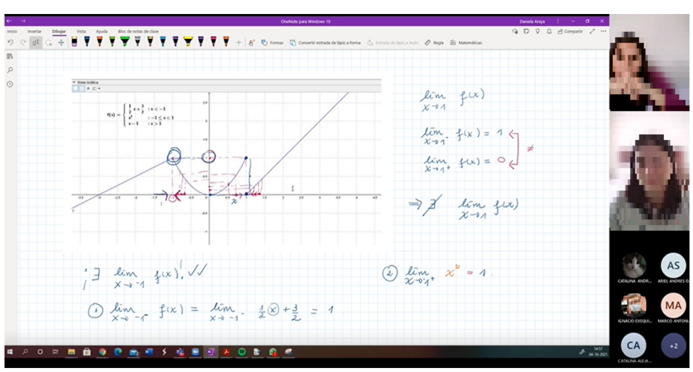


Figura 5.28: Actividad Plenaria Tarea N°12

5.7.5. Idoneidad Ecológica

Respecto a las Tareas N°11 y N°12, éstas abordan el estudio de límite de funciones y cuales son las condiciones para que una función posea límite en un número dado, este tópico se estudia en el área de Cálculo que se exige a los profesores en formación en Chile declarados en los Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media (MINEDUC, 2021b). Además, éste tópico se enseña en el Plan Diferenciado de Matemática de Enseñanza Media de manera intuitiva en línea con la tarea propuesta (ver los Planes y Programas Plan Diferenciado de Matemática MINEDUC (2021a)).

5.7.6. Reflexión Preliminar

Debido a que tanto la redacción de las tareas y el uso de los applets tuvieron una buena acogida por parte de los estudiantes, es que las Tareas de esta configuración se mejorarán considerando aspectos de tiempo (mayor tiempo para su implementación). Por otra parte, creemos que la Tarea N°11 para que cumpla su objetivo debería implementarse con dos ejemplos más para provocar en los estudiantes de manera intuitiva la noción de límite de Weierstrass.

Tabla 5.6: Tabla Comparativa entre la CE N°6 y CG N°6

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°6**	**Configuración Cognitiva N°6**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para expresar notaciones y símbolos relacionados a aproximaciones de una función a un número, distancia entre números, etc. - Expresiones propias de la geom. analítica como: gráficas de funciones, intervalos de números, recta real, etc.	- Expresiones algebraicas para expresar notaciones y símbolos relacionados a límite de funciones. -Expresiones propias de la geom. analítica, como gráfica de la función $f(x) = 2x + 1$ y función por rama, también segmentos de recta como intervalos de números reales.
Conceptos y/o definiciones	- Noción de función en $\mathbb{R}$ - Nocion de completitud de números reales e infinito actual. - Noción de cuerpo ordenado - Noción de límite de Weierstrass.	- Se apreció la comprensión del comportamiento de funciones por medio de su gráfica - Noción de completitud de $\mathbb{R}$ e infinito actual al señalar expresiones como $x \to x_0$ y $f(x) \to L$. - Noción de cuerpo ordenado al analizar tablas de datos de valores de funciones e intervalos. -Noción de Weierstrass al estudiar intervalos y los roles de δ y ε
Procedimientos	- Procedimientos aritméticos y algebraicos para determinar valores de una función cercanos a un punto. - Procedimientos propios de geometría analítica. -Procedimientos relacionados a la distancia o valor absoluto.	- Procedimientos aritméticos para completar tablas de datos y estudiar intervalos de dominio y recorrido de una función. - Procedimientos geométricos para relacionar la gráfica de una función y su aproximación a un determinado número. -Procedimientos relacionados al determinar intervalos con radio δ y ε.
Propiedades / Proposiciones	- Aplicación de propiedades de distancia (valor absoluto) y existencia de límite de una función en número.	- Aplicación de propiedades de distancia en intervalos de radio δ y ε y estudio de condiciones para que una función posea límite.
Argumentos	- Argumentos deductivos para determinar los roles de δ y ε, la noción de Weierstrass y la existencia de límite, basados en aspectos de la geo. analítica, algebraicos y aritméticos.	- Argumentos deductivos basados en la gráfica de la función y estudio de intervalos, pero ningún grupo pudo comprender a cabalidad la noción de Weierstrass.Sólo un grupo no pudo deducir las condiciones de existencia de límite.

5.8. Reflexión General

El análisis de contenido ontosemiótico realizado para cada una de las Tareas muestran que los objetos matemáticos, sus significados y los procesos identificados en las soluciones plausibles de las tareas, se adaptan a los objetos matemáticos, sus significados y los procesos involucrados en las configuraciones cognitivas asociadas a las respuestas de los estudiantes. Así, la técnica de análisis denominada análisis semiótico (Godino, 2002; Malaspina y Font, 2010; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011) y el análisis de contenido realizado previo a la aplicación de las Tareas nos permitió observar y describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los futuros profesores al resolver las actividades, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas que permiten la resolución de las Tareas (Godino, Batanero y Font, 2007).

Con el fin de sintetizar la información de manera general, realizamos la tabla 5.7 de doble entrada que resume el análisis realizado entre las configuraciones epistémicas y cognitivas logradas por los estudiantes en cada una de las tareas propuestas con el fin de mostrar la proximidad entre la Configuración Cognitiva lograda por los estudiantes y la Configuración Epistémica de las Tareas, donde los símbolos $+$ se refiere a que el objeto matemático primario de la Configuración Cognitiva coincide de manera plena con el objeto primario de la Configuración Epistémica, $+/-$ hace referencia a que el objeto matemático primario de la Configuración Cognitiva se aproxima de manera parcial con el objeto primario de la Configuración Epistémica y por último la notación $-$ representa que no hay relación entre el objeto matemático primario de la Configuración Cognitiva y Epistémica. Tal como se observa en la Tabla 5.7 la Tarea N°6 evocó en los estudiantes una CG N°3 muy próxima a la CE N°3 la cual hace referencia a la noción intuitiva de Newton, sin embargo, la Tarea N°7 posee la más baja aproximación a la CE N°4, esto se debió a que los estudiantes no entiendieron a cabalidad las Tareas, tuvieron dificultades en comprender el applet y no se sintieron cómodos con ella, tal como se describió en la sección (5.4).

Tabla 5.7: Proximidad entre las C. Cognitivas y la C. Epistémicas de las Tareas

		Configuración Epistémica de las Tareas				
Configuración Cognitiva	**Tareas**	**Elementos Lingüísticos**	**Conceptos y/o Definiciones**	**Procedimientos**	**Propiedades/ Proposiciones**	**Argumentos**
CG N°1	Tareas N°1 y N°2	+	+/−	+	+/−	+/−
CG N°2	Tareas N°3, N°4 y N°5	+	+	+/−	+/−	+/−
CG N°3	Tarea N°6	+	+	+	+	+
CG N°4	Tarea N°7	+	+/−	+/−	+/−	+/−
CG N°5	Tareas N°8, N°9 y N°10	+	+	+	+/−	+/−
CG N°6	Tareas N°11 y N°12	+	+/−	+	+/−	+/−

5.9. Consideraciones generales por parte de los estudiantes

Al finalizar la intervención didáctica se aplicó a los participantes una encuesta de opinión la cual tuvo como objetivo recabar su percepción sobre las Tareas que ellos desarrollaron en cuanto a los siguientes ámbitos:

a. Applets utilizados en las Tareas.

b. La redacción, el nivel de dificultad y el tiempo programado para el desarrollo de las Tareas.

c. La metodología de enseñanza implementada

El instrumento constaba de 10 preguntas cerradas y 6 preguntas abiertas, las cuales fueron respondidas por 7 estudiantes que representan el 63.6 % del curso y el detalle de sus respuestas se encuentran en el Anexo II.

De manera general podemos señalar que los applets utilizados en el desarrollo de las Tareas fueron acogidos favorablemente y que realmente la interacción con éstos les ayudó a entender y resolver las Tareas, sólo un estudiante señala que es necesario que la docente explique los applets para entenderlos a mayor cabalidad. Con respecto a las Tareas, el 28,6 % afirmó que las Tareas no eran adecuadas en el tiempo destinado para ellas y por tanto algunos estudiantes señalaron que era necesario revisar la extensión de éstas, además, algunos afirmaron que el nivel de dificultad de algunas tareas eran muy altas y otras muy bajas por lo que sugirieron más tiempo en las Tareas de mayor nivel de dificultad. Por otra parte, hubo una estudiante que solicitó cambiar el formato (PDF) en el cual se entregaban las Tareas y utilizar otro tipo de formato como un documento en Word. Cabe destacar que, al 85,7 % de los participantes encuestados señalaron estar cómodos con la metodología utilizada, respecto a los trabajos en grupos sólo un estudiante señaló que no se sintió cómodo ni pudo desarrollar sus aprendizajes en los trabajos grupales, sin embargo, el 85,7 % afirma estar de acuerdo en que pudo participar y compartir sus argumentos e ideas con el grupo curso en el desarrollo de las Plenarias. Respecto a si pudieron desarrollar sus aprendizajes de la noción de límite, el 14,3 % señaló no estar de acuerdo con esta afirmación y sólo el 28,6 % afirmó estar de acuerdo en este indicador, esto puede deberse a que la docente no les decía si sus respuestas estaban correctas o erradas de manera personalizada, sino que se hacía de manera implícita en las actividades Plenarias de cierre de cada Tarea. Una de las preguntas fundamentales de la Encuesta hace referencia a si ellos recomendarían la metodología de enseñanza implementada, la cual 5 de los 7 estudiantes afirma que la recomendaría bajo ciertas condiciones y mejoras. Respecto a las mejoras que los estudiantes señalaron, podemos destacar las siguientes:

- Incorporar más ejemplos, así como también de demostración de límites.
- Mejorar el formato de las Tareas, utilizar un formato más “amigable” para registrar sus respuestas.
- Entregar documentos complementarios para estudiar y desarrollar las Tareas.
- Que los applets permitieran visualizar la construcción de los gráficos de las funciones.

CAPÍTULO 6

DISCUSIÓN DE LAS TAREAS A PARTIR DEL JUICIO DE EXPERTOS

6.1. Introducción

El presente capítulo describe la discusión y las observaciones que hicieron expertos a las Tareas diseñadas en el Capítulo 4, con el fin de afianzar la fiabilidad y la validez de las Tareas diseñadas. Para ello realizamos un estudio en el cual se sometió a revisión mediante el juicio de expertos la versión de las Tareas previamente implementadas. Este estudio se llevó a cabo, concretamente, para indagar dos criterios. El primer criterio considera que las Tareas deben promover los objetos matemáticos primarios de cada configuración epistémica asociada a cada significado parcial de la noción de límite de una variable descrita en el Capítulo 3. Para que el investigador nos brindara la información deseada, se incluyeron ítems en un instrumento de indagación que activan distintos significados (con sus respectivas configuraciones) para el objeto límite: límite como aproximación en la matemática griega (CE N°1); límite en la concepción de los indivisibles (CE N°2); la noción intuitiva de límite de Newton (CE N°3); la idea de los infinitesimales de Leibniz (CE N°4); concepciones preformales de límite (CE N°5); la noción de límite de Weierstrass (CE N°6). El segundo criterio es que las tareas diseñadas consideren los dilemas propuestos por Sullivan, Knott y Yang (2015)

a) **Contexto** El contexto matemático de las tareas propuestas, las cuales van desde un contexto propio de la matemática como también contextos semireales o reales permiten generar el significado pretendido en los estudiantes.

b) **Lenguaje** El lenguaje, la redacción y la precisión matemática de las tareas permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado.

c) **Estructura** La estructura se refiere al grado de apertura de las tareas, el cual se puede considerar como las respuestas y/o soluciones de una tarea, así como también de la estructura de éstas. Es decir, las tareas pueden evocar diferentes estrategias para desarrollar una o varias soluciones o por el contrario generar una sola solución.

d) **Distribución** Hace referencia a la selección de contenidos en función de las demandas cognitivas que generan las tareas. Un ejemplo de ello es la propuesta por Smith y Stein (2011) que establecen una jerarquía de tareas que van progresivamente desde la memorización hasta los procedimientos sin conexiones llamadas Demandas Cognitivas de Bajo Nivel, así como también tareas que van desde procedimientos con conexiones hasta haciendo matemáticas llamadas Demandas Cognitivas de Alto Nivel.

e) **Niveles de Interacción** Se refiere a los niveles de interacción de los participantes en la implementación de las tareas, es decir, entre los docentes y estudiantes, entre los estudiantes, y entre los estudiantes y las tareas.

Para el estudio se contactó a seis expertos en el área de didáctica del cálculo y se les envió, vía correo electrónico, una encuesta (Anexo III) en la cual podían registrar su juicio sobre el *Cuestionario Diseño de Tareas de los Significados Parciales de la Noción de Límite (DTSL).* Para facilitar la labor de los expertos, en el desarrollo de sus respuestas de la encuesta, también se les hizo llegar a manera de anexo las propuestas de las tareas con sus posibles soluciones (Capítulo 4). De los seis expertos a los que se les envió la encuesta, cuatro la respondieron e hicieron llegar sugerencias y observaciones adicionales tanto al cuestionario como a las respuestas esperadas.

Los cuatro expertos que respondieron a la encuesta (Anexo III) pertenecían a las siguientes universidades: uno de la Universidad de Sonora, México (experto E1); uno de la Universidad Autónoma de Querétaro, México (experto E2); uno de la Universidad Distrital

Francisco José de Caldas, Colombia (experto E3); y uno de la Universidad de Antioquia, Colombia (experto E4).

6.2. Observaciones de las Tareas N°1 y N°2 de la CE N°1

Los expertos estuvieron mayoritariamente de acuerdo con los objetos matemáticos primarios de las configuraciones de las Tareas N°1 y N°2, sin embargo, dos expertos señalaron que las tareas no involucraban números racionales e irracionales, sino más bien cantidades conmensurables e inconmensurables:

> Ítem 4. ¿Las tareas involucran las nociones de números racionales e irracionales?
> E2: *Se involucra la noción de cantidad.*
> E1: *Más propiamente magnitudes conmensurables y no conmensurables*

Por otra parte, un experto señala que los argumentos geométricos involucrados en las Tareas N°1 y N°2, son más bien abductivos y no deductivos:

> Ítem 9. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos sobre las iteraciones de las figuras geométricas?
> E2: *Más bien son argumentos abductivos.*

Dichas observaciones son acogidas y se incorporarán en la Configuración Epistémica 1 asociada a las Tareas N°1 y N°2. A continuación, se expone de manera resumida en la tabla 6.1 con las observaciones de los expertos respecto a los objetos matemáticos primarios que evocan las Tareas N°1 y N°2. Los símbolos "$+$"se refiere que están de acuerdo o muy de acuerdo con los objetos; "$+/-$"se refiere a que tienen ciertas discrepencias y cercanía (ni en acuerdo ni en desacuerdo); y "$-$"se refiere a que están muy en desacuerdo o en desacuerdo.

Tabla 6.1: Resumen de las Respuestas de Expertos de las Tareas N°1 y N°2

	Configuración Epistémica de las Tareas N°1 y N°2					
Objetos Matemáticos Primarios	**Elementos Lingüísticos**	**Conceptos y/o Definiciones**	**Procedimientos**	**Propiedades/ Proposiciones**	**Argumentos**	**Situaciones/ Problemas**
Experto 1	+	+	+	+	+	+
Experto 2	+	+	+	+	+/-	+
Experto 3	+	+	+	+	+	+
Experto 4	+	+	+	+	+	+

Respecto a los Criterios de Diseño de Tareas, en particular con la redacción de las Tareas, los expertos señalan que éstas no exigen de manera explícita la justificación y argumentos a los estudiantes:

> Ítem: 8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?
> E1: *Eso depende de la formación de los estudiantes, pero en la tarea no se solicita*
> E2: *No necesariamente las que rechazan.*
> E4: *En algunos casos he sugerido cambio de palabras para mejorar la redacción*

Referente al nivel de dificultad de las tareas, el experto E1 señaló:

> Ítem: 7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?
> E1: *No y quizás algunos estudiantes requieran mayor orientación por medio de interrogantes intermedias*
> Ítem: 9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?
> E1: *Los procesos iterativos pueden ser difíciles para los estudiantes*

Esta observación es acogida, puesto que en la implementación de las tareas se observó en los estudiantes un grado de dificultad en comprender y dar respuestas a éstas, por tal razón, incorporaremos un applet de geogebra en la Tarea N°1 para permitir una mayor comprensión, ya que por medio de la interacción de éste se tendrá un menor nivel de dificultad.

Respecto a las observaciones emitidas por los expertos, mejoraremos la redacción de las Tareas N°1 y N°2; redactaremos las tareas de tal forma que los estudiantes tengan que justificar sus decisiones y argumentos; y en la Tarea N°1 agregaremos un applet para bajar el nivel de dificultad. La versión mejorada de las Tareas se encuentra detallada en el Capítulo 7.

6.3. Observaciones de las Tareas N°3,4 y N°5 de la CE N°2

Los expertos estuvieron mayoritariamente de acuerdo con los objetos matemáticos primarios de las configuraciones de las Tareas N°3,4 y N°5, no obstante, hubo sólo una observación sobre los objetos primarios:

> Ítem 4. ¿Las tareas involucran las nociones de números racionales e irracionales?
> E1: *Más propiamente magnitudes conmensurables y no conmensurables.*
> E2: *Involucran la noción de cantidad, no de una clase de números.*

Dicha observación será incorporada en la CE N°2 asociada a las Tareas N°3,4 y N°5. Se expone de manera resumida la tabla 6.2 con las observaciones de los expertos respecto a los objetos matemáticos primarios que evocan las Tareas N°3,4 y N°5. Tal como se explicó en la sección anterior los símbolos "+"se refiere que están de acuerdo o muy de acuerdo con los objetos; "+/−"se refiere a que tienen ciertas discrepencias y cercanía con los objetos (ni en acuerdo ni en desacuerdo); y "−"se refiere a que están muy en desacuerdo o en desacuerdo.

Tabla 6.2: Resumen de las Respuestas de Expertos de las Tareas N°3,4 y N°5

	Configuración Epistémica de las Tareas N°3,4 y N°5					
Objetos Matemáticos Primarios	**Elementos Lingüísticos**	**Conceptos y/o Definiciones**	**Procedimientos**	**Propiedades/ Proposiciones**	**Argumentos**	**Situaciones/ Problemas**
Experto 1	+	+	+	+	+	+
Experto 2	+/-	+/-	+	+	+	+
Experto 3	+	+	+	+	+	+
Experto 4	+	+	+	+	+	+

Con respecto al Criterio de Diseños de Tareas, dos expertos brindaron observaciones en cuanto al nivel de dificultad de las tareas:

> E1: *Es posible que algunos estudiantes construyan un conocimiento de acuerdo a las expectativas pero el tema es complicado y no sólo depende de esta actividad*
> E1: *[...] se trata de ideas conceptualmente complejas*
> E2: *Considero que la dificultad de este planteamiento es mayor que en las tareas anteriores. Se requeriría avanzar más despacio.*

Estas observaciones coinciden con las respuestas que se tuvieron de los estudiantes en la implementación de éstas, sobre todo en la Tarea N°5, por tal razón, se incorporará un applet complementario para lograr que los estudiantes puedan visualizar e interactuar con las figuras con el fin de bajar el nivel de dificultad y aplicar el Principio de Cavalieri. Adicionalmente, el experto E4 también brindó mejoras en la redacción de las Tareas no sólo para la comprensión de éstas sino que también para fomentar la justificación de las respuestas. Es importante mencionar, que todas estas observaciones se incorporaron en las Tareas mejoradas que se encuentran en el Capítulo 7.

6.4. Observaciones de la Tarea N°6 de la CE N°3

Los expertos estuvieron completamente de acuerdo con los objetos primarios de la Tarea N°6, sólo un experto señaló una mayor precisión sobre las cantidades evanescentes que están involucradas en la Tarea:

> E1: *Sí para el caso del "ancho" de los rectángulos y poco explotada la diferencia entre sumas superior, suma inferior y de cada una de éstas con el "área bajo la gráfica". No sólo es un asunto de aproximación, sino también de que las diferencias son cantidades evanescentes*

Por otra parte, el experto E2 hace la observación que los argumentos que promueve la Tarea son argumentos abductivos:

> Ítem 10. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos en la aproximación del área bajo la gráfica de la función?
> E2: *Más bien, serían argumentos abductivos.*

Esta observación será acogida y se incorporará en la configuración epistémica asociada a la tarea. A continuación, se expone de manera resumida la tabla 6.3 con las observaciones de los expertos respecto a los objetos matemáticos primarios que evocan la Tarea N°6. Tal como se explicó en la sección anterior los símbolos "+"se refiere que están de acuerdo o muy de acuerdo con los objetos; "+/−"se refiere a que tienen ciertas discrepencias y cercanía con los objetos (ni en acuerdo ni en desacuerdo); y "−"se refiere a que están muy en desacuerdo o en desacuerdo.

Tabla 6.3: Resumen de las Respuestas de Expertos de la Tarea N°6

	Configuración Epistémica de la Tarea N°6					
Objetos Matemáticos Primarios	**Elementos Lingüísticos**	**Conceptos y/o Definiciones**	**Procedimientos**	**Propiedades/ Proposiciones**	**Argumentos**	**Situaciones/ Problemas**
Experto 1	+	+	+	+	+	+
Experto 2	+	+	+/-	+	+/-	+
Experto 3	+	+	+	+	+	+
Experto 4	+	+	+	+	+	+

Respecto a los Criterios de Diseño de Tareas, no hubo observaciones respecto al grado de dificultad y sólo un experto observó que la Tarea estaba muy dirigida, sin embargo, detalla que es necesario este direccionamiento por el nivel de dificultad de la Tarea.

> Ítem 7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?
> E2: *Como se puede considerar, el aumento en el nivel de complejidad en la CE lleva a que los procesos matemáticos de las tareas no puedan emerger "espontáneamente" como propuesta de los alumnos. Es por ello que las respuestas en el rubro de Estructura indican que las actividades pierden flexibilidad, pero me parece que es muy difícil evitar esto.*

Adicionalmente, los expertos E3 y E4 dieron observaciones de redacción de mejoras de los itemes de la Tarea N°6, dichas mejoras están descritas en el Capítulo 7.

6.5. Observaciones de la Tarea N°7 de la CE N°4

Todos los expertos concuerdan mayoritariamente con los objetos primarios de la Tarea N°7, sin embargo hubo un experto que hizo una observación sobre el tipo de concepto de infinitesimal que la Tarea N°7 promueve:

> Ítem 6. ¿Las tareas evalúan procedimientos que implican el uso de los “infinitesimales”?
> E1: *De la manera en que se describe aquí sí se usan los infinitesimales, pero a mi parecer no es la noción de Leibniz. Si una cantidad se puede hacer tan pequeña como se quiera, es eso, muy pequeña y ser infinitesimal es otra cosa a mi parecer. En el caso de Leibniz una magnitud de medida “inasignable”.*

Con respecto a esta observación, hacemos el alcance que la noción de infinitesimal que se utiliza en este significado parcial es correspondiente a los textos de Calculo (Spivak, 1992; Larson & Edwards, 2015; Bobadilla & Labarca, 2010) que se utilizan para la enseñanza de límite a nivel universitario, el cual concuerda con la propuesta de Leibniz asociada la configuración CE N°4 que desarrolla la Tarea N°7.

A continuación, se expone de manera resumida la tabla 6.4 con las observaciones de los expertos respecto a los objetos matemáticos primarios que evoca la Tarea N°7. Tal como se mencionó en la sección anterior los símbolos "+"se refiere que están de acuerdo o muy de acuerdo con los objetos; "+/−"se refiere a que tienen ciertas discrepancias y cercanía con los objetos (ni en acuerdo ni en desacuerdo); y "−"se refiere a que están muy en desacuerdo o en desacuerdo.

Tabla 6.4: Resumen de las Respuestas de Expertos de la Tarea N°7

	Configuración Epistémica de la Tarea N°7					
Objetos Matemáticos Primarios	**Elementos Lingüísticos**	**Conceptos y/o Definiciones**	**Procedimientos**	**Propiedades/ Proposiciones**	**Argumentos**	**Situaciones/ Problemas**
Experto 1	+	+	+	+	+	+
Experto 2	+	+	+	+	+	+
Experto 3	+	+	+	+	+	+
Experto 4	+	+	+	+	+	+

Respecto al Criterio de Diseño de Tareas sólo un experto se refirió en cuanto a la "Estructura" de la Tarea, haciendo referencia a que ésta se encuentra muy pauteada, sin embargo, esto es necesario para no tener un nivel de dificultad muy alto:

> Ítem 7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?
> E2: *Como se puede considerar, el aumento en el nivel de complejidad en la CE lleva a que los procesos matemáticos de las tareas no puedan emerger "espontáneamente" como propuesta de los alumnos. Es por ello que las respuestas en el rubro de Estructura indican que las actividades pierden flexibilidad, pero me parece que es muy difícil evitar esto.*

Respecto al applet que se utiliza la Tarea, sólo un experto señala la importancia de ésta para el desarrollo de la actividad:

> Ítem 11. ¿El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)
> E2: *Aunque la tarea se puede realizar sin usar recursos "nuevo", se dificultaría.*

Finalmente, los expertos E3 y E4 sólo aportaron con observaciones en la redacción de la Tarea N°7, la cual se encuentra detallada en el Capítulo 7.

6.6. Observaciones de las Tareas N°8, 9 y N°10 de la CE N°5

Respecto a los objetos matemáticos que evocan las Tareas respecto a la CE N°5, los expertos concuerdan mayoritariamente con ella, no obstante, un experto advierte que los procedimientos asociados a la Tarea 10 no son desarrollados por los estudiantes sino por el applet:

> Ítem 7.¿Las tareas involucran procedimientos aritméticos y algebraicos para determinar términos de la sucesión, distancia (valor absoluto), etc.?
> E2: *Los procedimientos los realiza el software.*

Referente a esta observación si bien el applet entrega valores, los estudiantes no se percataron de los valores que el applet entregaba, acogemos la observación y mejoraremos el applet en este aspecto. Respecto a los procedimientos algebraicos, los estudiantes si tienen que desarrollarlos y el applet sólo ayuda a visualizar el comportamiento de las gráficas de las sucesiones.

A continuación, se expone de manera resumida la tabla 6.5 con las observaciones de los expertos respecto a los objetos matemáticos primarios que evoca la Tarea 8, 9 y 10. Tal como se mencionó en la sección anterior los símbolos "+"se refiere que están de acuerdo o muy de acuerdo con los objetos; "+/−"se refiere a que tienen ciertas discrepencias y cercanía con los objetos (ni en acuerdo ni en desacuerdo); y "−"se refiere a que están muy en desacuerdo o en desacuerdo.

Tabla 6.5: Resumen de las Respuestas de Expertos de las Tareas N°8, 9 y N°10

	Configuración Epistémica de las Tarea N°8, 9 y N°10					
Objetos Matemáticos Primarios	**Elementos Lingüísticos**	**Conceptos y/o Definiciones**	**Procedimientos**	**Propiedades/ Proposiciones**	**Argumentos**	**Situaciones/ Problemas**
Experto 1	+	+	+	+	+	+
Experto 2	+	+	+/-	+	+	+
Experto 3	+	+	+	+	+	+
Experto 4	+	+	+	+	+	+

Con respecto a los Criterios de Diseño de Tareas, el experto E1 señala que las Tareas N°8 y N°9 pueden provocar algunas dificultades en estudiantes con respecto a la noción de límite "éste no se alcanza y se puede aproximar tanto como se quiera".

> Ítem 4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?
> E1: *Relacionado con las Tareas 8 y 9 se ponen de manifiesto algunas de las dificultades para que los estudiantes desarrollen el aprendizaje deseado. Hago referencia a que el límite de una sucesión, cuando existe, es un número específico y sin embargo la noción que queda en muchos estudiantes es lo señalado antes en la pregunta 6 de concepciones para la Tarea 8: la noción de límite "que no se alcanza y se puede aproximar tanto como se quiera".*

Con respecto a esta observación concordamos con ella, sin embargo, en las Tareas N°10 y N°11, queda de manifiesto que la noción de límite que se puede "alcanzar o no" para cierto tipo de funciones. Así se brinda a los estudiantes las distintas acepciones de la noción de límite. Por otra parte, el experto E2 también señala que las Tareas N°7,8 y N°9 tienen mayor nivel de dificultad, por tal razón es necesario que éstas estén más direccionadas:

> Ítem 4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?
> E2: *Considero que se dificulta por la complejidad, aunque puede ser entendible por su estructura.*
> Ítem 5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?
> E2: *La complejidad de la CE requiere un diseño orientado.*
> Ítem 6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?
> E2: *La elección de la tarea permite que, aunque tiene cierta direccionamiento, exista la posibilidad de que se tomen varios caminos posibles en algunos ítems.*

Respecto al uso del applet que utiliza la Tarea N°9, el experto E2 señaló lo siguiente:

> Ítem 11. ¿El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)
> E2: Con respecto a la Tarea 9 *El uso de la tecnología "nueva" es apropiado, pero no es indispensable.*
> E2: Con respecto a la Tarea 10 *El uso del software es necesario.*

Además, el experto E4 también brindó mejoras en la redacción de las Tareas para mejorar la comprensión de éstas, todas estas observaciones se incorporaron en las Tareas mejoradas que se encuentran en el Capítulo 7.

6.7. Observaciones de las Tareas N°11 y N°12 de la CE N°6

Referente a los objetos primarios matemáticos que evocan las Tareas N°11 y N°12 respecto a la CE N°6, los expertos concuerdan plenamente con ellas (sus puntuaciones se encuentran entre 4 o 5). Sólo un experto realizó una observación en el objeto primario 'Argumentos':

> Ítem 16. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría analítica?
> E1: *Argumentos del cálculo con apoyo en la geometría analítica*

Esta observación nos parece pertinente, puesto que los argumentos que evoca las Tareas son basados en el cálculo y se pueden desarrollar utilizando elementos propios de la geometría analítica, tal como se expresa en la CE N°6 de las Tareas N°11 y N°12 que se encuentra en la Tabla 4.24 del Capítulo 4. Por tal razón no hay discrepancia en cuanto este objeto matemático, lamentablemente en este caso el Instrumento de Validación tuvo un pequeño error de redacción en la escritura de este indicador.

A continuación, se expone de manera resumida la tabla 6.6 con las observaciones de los expertos respecto a los objetos matemáticos primarios que evoca las Tareas N°11 y N°12. Tal como se mencionó en la sección anterior los símbolos "+"se refiere que están de acuerdo o muy de acuerdo con los objetos; "+/−"se refiere a que tienen ciertas discrepencias y cercanía con los objetos (ni en acuerdo ni en desacuerdo); y "−"se refiere a que están muy en desacuerdo o en desacuerdo.

Tabla 6.6: Resumen de las Respuestas de Expertos de las Tareas N°11 y N°12

	Configuración Epistémica de las Tareas N°11 y N°12					
Objetos Matemáticos Primarios	**Elementos Lingüísticos**	**Conceptos y/o Definiciones**	**Procedimientos**	**Propiedades/ Proposiciones**	**Argumentos**	**Situaciones/ Problemas**
Experto 1	+	+	+	+	+/-	+
Experto 2	+	+	+	+	+	+
Experto 3	+	+	+	+	+	+
Experto 4	+	+	+	+	+	+

Con respecto a los Criterios de Diseños de Tareas sólo un experto nos señaló observaciones:

Ítem 3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?
E2: *Considero que se dificulta por la complejidad de la tarea, aunque puede ser entendible.*
Ítem 5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?
E2: *La complejidad de la CE requiere un diseño orientado.*
Ítem 6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?
E2: *La tarea permite que haya diferentes caminos posibles en algunos ítems.*

Respecto a estas observaciones, concordamos en que es necesario que las Tareas tengan un cierto nivel de direccionamiento, dado el nivel de dificultad que éstas poseen. De hecho, en la implementación de éstas se evidenció que los estudiantes tuvieron ciertas complicaciones en la comprensión de los roles de δ y ε y apreciaron un cierto nivel de dificultad. Por otra parte, el experto E4 sólo hizo pequeñas observaciones en la redacción de los ítemes. Todas estas observaciones fueron incoporadas en la mejoras de las Tareas que están descritas en el Capítulo 7.

6.8. Observaciones Generales

En general, los cuatro expertos estuvieron de acuerdo mayoritariamente con los objetos primerarios que evocan las Tareas en relación con su respectiva configuracion epistémica, sólo hubo mayores observaciones en el ámbito del Criterio de Diseño de Tareas en cuanto a la redacción y en la estructura de ellas. Referente a este punto, los expertos señalan que las Tareas N°6, 7, 8, 9 y N°10 si bien tienen un alto grado de direccionamiento, recalcan que este es necesario para el desarrollo de éstas por el nivel de complejidad de ellas.

A continuación, se describen algunas observaciones generales por parte de los expertos:

E1: *Precisamente debo iniciar planteando que el trabajo me parece excelente y que las actividades propuestas se enmarcan perfectamente con las diferentes configuraciones epistémicas de referencia, signadas en el artículo correspondiente al Anexo 2.*

E2: *[...] las actividades son muy interesantes y creo que tienen la misma dificultad que otras que se diseñan para otras áreas de las Matemáticas (y quizás de la enseñanza de las Ciencias): entre más se avanza en los desarrollos humanos es más difícil plantear actividades que "salgan naturales". En otras palabras, las que corresponden a la CE núm. 1* *utilizan herramientas matemáticas y cognitivas que los alumnos considerados conocen desde años antes (la Primaria y cosas así), pero las actividades que corresponden a las siguientes CE (y de manera progresiva) las herramientas que tienen a su disposición los alumnos cada vez están más limitadas (de hecho, para las últimas CE son herramientas que los alumnos apenas estarán estudiando y entendiendo) así que les sería muy difícil "idear" un camino por sí mismos.*

E3: *Me parece que el cuestionario está completo, indaga los diversos aspectos epistémicos asociados a su comprensión y resolución. La ayuda de los applets es pertinente para ayudar a los estudiantes a comprender la dificultad de los conceptos explorados y a dar respuesta a las tareas.*

E4: *Las tareas propuestas me parecen adecuadas, pertinentes y coherentes para la construcción de la configuraciones.*

Es importante señalar que el experto E1 nos proporcionó información complementaria sobre las concepciones de Leibniz y sobre el planteamiento de los diferenciales que dicho autor desarrolla. Creemos que esta información es sumamente rica e importante para ser considerada en un trabajo posterior en el diseño de tareas para promover el aprendizaje de diferenciales, puesto que la noción de Leibniz propuesta por el experto E1 no coincide con la Configuración Epistémica N°4 propuesta en el Capítulo 3 ni con lo propuesto en los textos de estudios de Cálculo sobre la noción de infinitesimal (Bobadilla & Labarca, 2010; Larson & Edwards, 2015; Spivak, 1992).

CAPÍTULO 7

TAREAS MEJORADAS

7.1. Introducción

A partir de los resultados obtenidos en la implementación de las Tareas (Capítulo 5) y las sugerencias dadas por el juicio de expertos (Capítulo 6), hemos incorporado las observaciones con el fin de mejorar tanto las Tareas como también las configuraciones epistémicas asociadas a cada una de ellas. Tal como se señaló en el Capítulo 2, este apartado corresponde con la última etapa correspondiente a "New Design Phase" del 'Design Based Research' (DBR).

7.2. Tareas Mejoradas de la CE N°1

Para el desarrollo de las Tareas N°1 y N°2, se recomienda implementarlas en dos sesiones de 60 o 70 minutos cada una. Además, es importante destacar que estas tareas puede ser replicadas tanto en el ámbito escolar secundario como también en los primeros semestres de formación de estudiantes universitarios.

7.2.1. Tarea N°1: Triángulo de Sierspinka

Considere un triángulo equilátero, trace sus medianas y elimine el triángulo del centro, repite el proceso anterior con los tres triángulos restantes, y después con los nueve triángulos restantes, tal como se muestra en la siguiente figura y en el siguiente link `https://www.geogebra.org/m/erha6cu4`

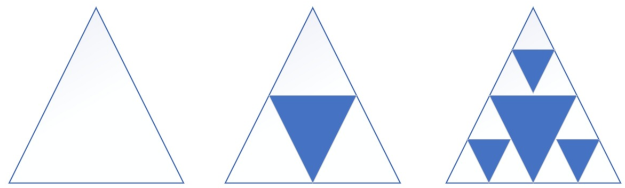


Figura 7.1: Triángulo de Sierspinka

1. Si el triángulo tiene lado a, determine las áreas de la figura obtenida en la iteración 1,2,3 y 4.

2. Determine el área de la figura obtenida en la iteración n.

3. Si $A(n)$ es el área de la figura obtenida en la n-ésima iteración. Según los datos obtenidos en (1) y (2) completa la siguiente tabla argumentando tus respuestas:

Tabla 7.1: Tabla de Áreas

N°de iteración	**Cantidad de triángulos**	**Área de la figura** $A(n)$
1		
2		
3		
4		
n		

4. Si $P(n)$ es el perímetro de la figura obtenida en la n-ésima iteración, completa la siguiente tabla argumentando tus respuestas:

Tabla 7.2: Tabla de Perímetros

N°de iteración	**Cantidad de triángulos**	**Perímetro de la figura** $P(n)$
1		
2		
3		
4		
n		

5. Considera un triángulo equilátero de lado 3 cm. Realiza un gráfico (puedes utilizar algún software para ello) de $A(n)$ y $P(n)$. ¿Qué comportamiento tiene la gráfica de $A(n)$? ¿ y con $P(n)$? Argumenta tus respuestas.

6. Si n es un número muy grande. ¿Qué sucede con $P(n)$ y $A(n)$? Argumenta tus respuestas.

7.2.2. Tarea N°2: Iteraciones en un cuadrado

Considere el siguiente cuadrado y divida el lado del cuadrado en tres partes iguales, elimine o borre el cuadrado del centro y sus adyacentes como aparece en la figura (7.2). Repita el proceso cuantas veces pueda en los cuadrados blancos.

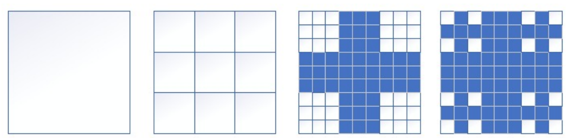


Figura 7.2: Iteración en el cuadrado

1. Suponga que el cuadrado inicial mide a cm. Complete la siguiente tabla:

Tabla 7.3: Iteración en el cuadrado

$N°$ **de iteración**	**Cantidad de cuadrados**	**Perímetro de la figura** $P(n)$	**Área de la figura** $A(n)$
1			
2			
3			
4			
n			

2. Si n es un número muy grande. ¿Qué comportamiento tiene $P(n)$ y $A(n)$?. Argumenta tu respuesta.

7.2.3. CE N°1 Mejorada asociada a las Tareas N°1 y N°2

A partir de las observaciones de los expertos descritas en el Capítulo 6, se incorpora las mejoras a la CE N°1 que están asociadas a las Tareas 1 y 2, tal como muestra la Tabla 7.4

Tabla 7.4: CE N°1 Mejorada de las Tareas N°1 y N°2

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°1 de las Tareas N°1 y N°2**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas (magnitudes de áreas y perímetros) - Figuras geométricas de triángulos y cuadrados. - Tabulación de datos y gráficas de funciones.
Conceptos y/o definiciones	- Nociones de cantidades conmensurables e inconmensurables - Nociones de infinito potencial - Nociones de funciones discretas
Procedimientos	- Aplicación de fórmulas de áreas y perímetros de triángulos equiláteros y cuadrados. - Utilización de tablas de datos y gráficos de funciones discretas.
Propiedades / Proposiciones	- Utilización del método de exhaución
Argumentos	- Argumentos abductivos basados en las iteraciones de figuras geométricas. - Argumentos deductivos basados en las gráficas de las funciones que representan áreas y perímetros.

7.3. Tareas Mejoradas de la CE N°2

Para el desarrollo de las Tareas N°3,4 y N°5 se recomienda implementarlas en dos sesiones de 60 o 70 minutos cada una, dejando mayor tiempo de estudio para la Tarea N°5 que tiene un mayor nivel de dificultad. Estas tareas también se pueden aplicar en los últimos años de la enseñanza escolar así como también en los primeros semestres de formación a nivel universitario.

7.3.1. Tarea N°3: Volumen de un Prisma

Principio 7.1. ***Principio de Cavalieri***
Se dan dos cuerpos sólidos de igual altura y un plano. Supongamos que todo plano paralelo al plano dado que intersecta a uno de los dos cuerpos, intersecta también al otro y da secciones transversales con áreas iguales. Entonces, los cuerpos tienen el mismo volumen.(Moise,1986,p.550)

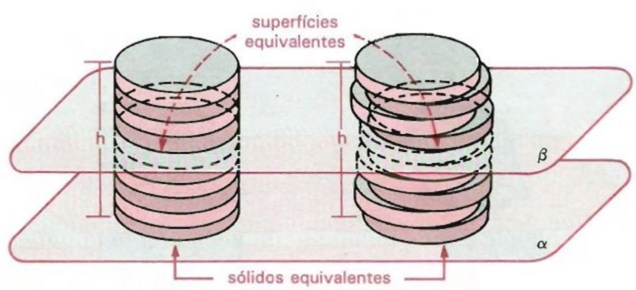


Figura 7.3: Principio de Cavalieri (Dolce y Pompeo (s.f., p.165))

Para visualizar mejor el Principio de Cavalieri, ingresa al siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/fpvdztgr`.

1. Considere un prisma P_1 de altura h donde el área de su base es $B = B_1$ y un paralelepípedo recto de altura h de base $B_2 = B$. Supongamos que ambas figuras geométricas tienen sus bases en el mismo plano α tal como se muestra en la figura (7.4).

   Si el plano β es paralelo al plano α, determinando las secciones transversales de áreas B_1' y B_2' del prisma y del paralelepípedo respectivamente. ¿Cómo son las áreas de dichas secciones?

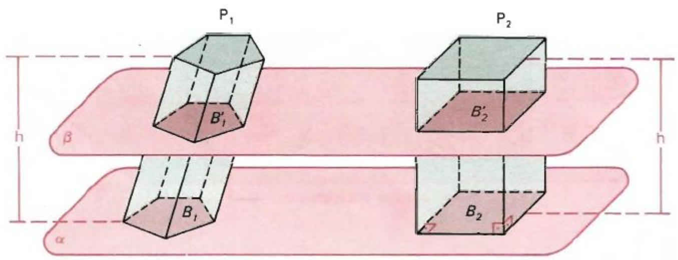


Figura 7.4: Volumen Prisma (Dolce y Pompeo (s.f.), p.166)

2. ¿Se puede aplicar el Principio de Cavalieri a ambas figuras geométricas? Argumenta tu respuesta.

3. ¿Cuál es el volumen del prisma P_1?¿Por qué?

7.3.2. Tarea N°4: Volumen del Cilindro

1. Considere un prisma P_1 de altura h donde el área de su base es $B = B_1$ y cilindro de altura h de base $B_2 = B$. Supongamos que ambas figuras geométricas tienen sus bases en el mismo plano α tal como se muestra en la figura (7.5).

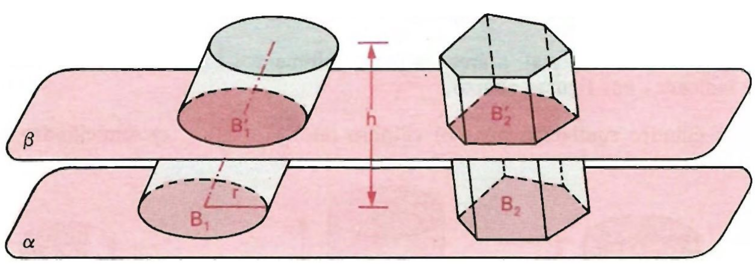


Figura 7.5: Volumen Cilindro (Dolce y Pompeo (s.f.), p.221)

Si el plano β es paralelo al plano α, determinando las secciones transversales de áreas B_1' y B_2' del prisma y del cilindro respectivamente. ¿Cómo son las áreas de dichas secciones?

2. ¿Se puede aplicar el Principio de Cavalieri a ambas figuras geométricas? Argumenta tu respuesta.

3. ¿Cuál es el volumen del cilindro? ¿Por qué?

4. Supongamos que puedes sumar cada una de las áreas transversales obtenidas en el cilindro. ¿Cómo expresarías el volumen del cilindro? (Explica con tus propias palabras)

7.3.3. Tarea N°5: Volumen de la Esfera

1. Suponga que una esfera de radio r es tangente a un plano α, que el cilindro tiene base en α cuya base tiene radio r. Además, considere el sólido X que se encuentra entre los dos conos y el cilindro como se muestra en la figura (7.6). Donde el vértice de los conos está a la misma altura que el centro de la esfera, además la altura del cilindro es igual al diámetro de la esfera. Para comprender mejor la figura anterior, ingresa al siguiente

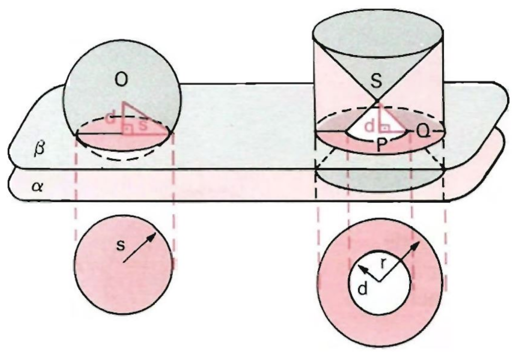


Figura 7.6: Volumen de la Esfera (Dolce y Pompeo (s.f.), p.253)

applet `https://www.geogebra.org/m/gjwgy9xh` y responde lo siguiente:

2. Considere el plano β paralelo al plano α, el cual está a una distancia d del centro de la esfera, dicho plano también intersecta el sólido X y dista de la misma distancia a los vértices de ambos conos. ¿Cuál es el área de la sección transversal que determina el plano β en la esfera?

   Para ayudar a responder las siguientes preguntas, revisa el siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/hcj9anh7`

3. ¿Cómo son los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$?

4. ¿Cuál es el área de la sección transversal que determina el plano β en el sólido X?

5. ¿Cómo son las áreas de las secciones transversales de la esfera con respecto a X?

6. ¿Se puede aplicar el Principio de Cavalieri a ambas figuras geométricas? ¿Por qué?

7. Considere que el volumen del cono es

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

   donde A_b es el área de la base circular del cono y h es la altura del cono. ¿Cuál es el volumen de la esfera? Argumenta tu respuesta.

8. Supongamos que puedes sumar cada una de las áreas transversales obtenidas en la esfera. ¿Cómo expresarías el volumen de la esfera? (Explica con tus propias palabras)

7.3.4. CE N°3 Mejorada asociada a las Tareas N°3,4 y N°5

A partir de las observaciones de los expertos descritas en el Capítulo 6, se incorpora las mejoras a la CE N°3 que está asociada a la Tarea N°6 tal como muestra la Tabla 7.5.

Tabla 7.5: CE N°2 Mejorada de las Tareas N°3,4 y N°5

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°2 de las Tareas N°3,4 y N°5**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para señalar magnitudes de áreas de secciones transversales y volúmenes de cuerpos geométricos. - Elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría euclideana.
Conceptos y/o definiciones	- Nociones de magnitud conmensurable e inconmesurable. - Nociones de volumen de un cuerpo geométrico - Noción de indivisible (sección transversal)
Procedimientos	- Aplicación de fórmulas de áreas de figuras geométricas planas. - Aplicación de fórmulas de volúmenes de cuerpos geométricos. -Aplicación del uso de los indivisibles.
Propiedades / Proposiciones	- Utilización del Principio de Cavalieri
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en la obtención de los volúmenes de cuerpos geométricos de prismas, cilindros y esfero. - Argumentos deductivos basados en la geometría euclideana.

7.4. Tarea Mejorada de la CE N°3

Para la implementación de la Tarea N°6 se recomienda utilizar una sesión y media (o dos sesiones) de 60 o 70 minutos, pues la tarea tiene un mayor nivel de dificultad. Esta tarea también se pueden aplicar en los últimos años de la enseñanza escolar así como también en los primeros semestres de formación a nivel universitario o de manera introductoria en un curso de Cálculo Integral.

7.4.1. Tarea N°6 Aproximación del Área bajo la curva

Considere la función $f(x) = -x^2 + 1$, en el intervalo $[-1, 1]$ tal como se muestra en la figura.

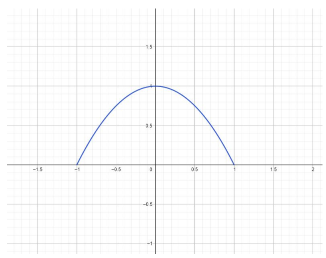


Figura 7.7: Gráfico de la función $f(x) = -x^2 + 1$ en $[-1, 1]$

1. Considere rectángulos inscritos y circunscritos a la gráfica de ancho $\frac{1}{2}$ *unid*. Sume el área de los rectángulos inscritos y sume el área de los rectángulos circunscritos obtenidos según la figura (7.8).

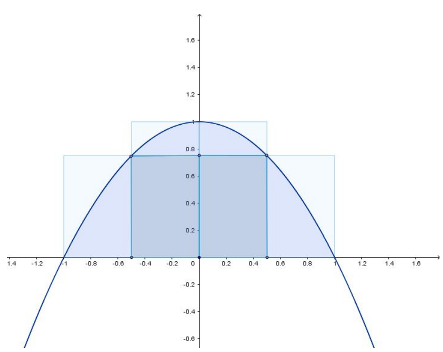


Figura 7.8: Rectángulos inscritos y circunscritos de $f(x) = -x^2 + 1$ en $[-1, 1]$

2. Considere rectángulos inscritos y circunscritos a la gráfica de ancho $\frac{1}{3}$ *unid*. Sume el área de los rectángulos inscritos y sume el área de los rectángulos circunscritos obtenidos según la figura(7.9).

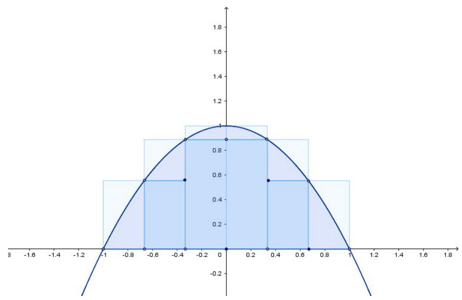


Figura 7.9: Rectángulos inscritos y circunscritos

3. Considere rectángulos inscritos y circunscritos a la gráfica de ancho $\frac{1}{4}$ *unid*. Sume el área de los rectángulos inscritos y sume el área de los rectángulos circunscritos obtenidos según la figura (7.10).

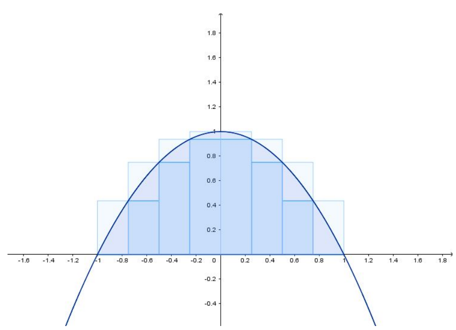


Figura 7.10: Rectángulos inscritos y circunscritos

4. Compara las sumas de los rectángulos inscritos cuando tienen ancho $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es mayor? ¿Cuál es menor?

5. Compara las sumas de los rectángulos circunscritos cuando tienen ancho $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es mayor? ¿Cuál es menor?

Abre el siguiente applet en geogebra `https://www.geogebra.org/m/t9btwfen`. Cambia el valor de n (cantidad de rectángulos) y responde:

6. ¿Qué comportamiento identificas en las áreas de los rectángulos inscritos a medida que el ancho de éste va disminuyendo cada vez más?
7. ¿Qué comportamiento identificas con las áreas de los rectángulos circunscritos a medida que el ancho de éste va disminuyendo cada vez más?
8. ¿Qué puedes decir sobre las áreas de los rectángulos inscritos con respecto al área bajo la curva?
9. ¿Qué puedes decir sobre las áreas de los rectángulos circunscritos con respecto al área bajo la curva?
10. Interpreta con tus palabras la siguiente figura:

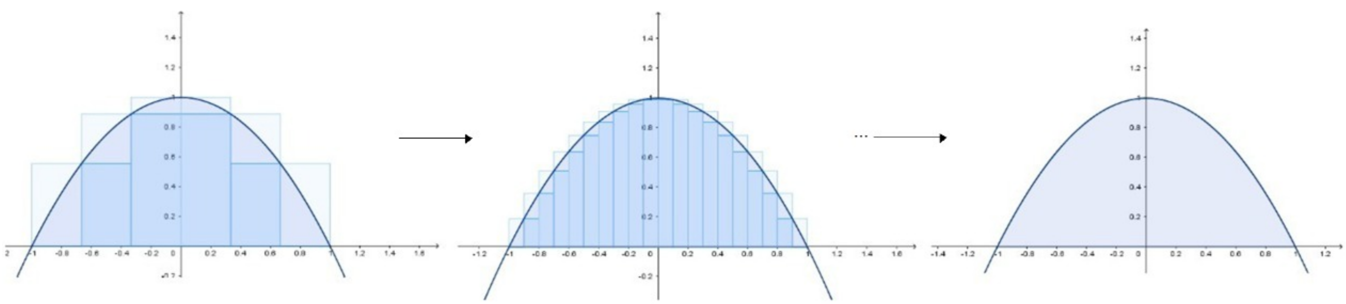


Figura 7.11: Procesos Infinitos

7.4.2. CE N°3 Mejorada asociada a la Tarea N°6

A partir de las observaciones de los expertos descritas en el Capítulo 6, se incorpora las mejoras a la CE N°3 que están asociadas a la Tarea N°6, tal como muestra la Tabla 7.6.

Tabla 7.6: CE N°3 Mejorada de la Tarea N°6

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°3 de la Tarea N°6**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas de magnitudes de áreas de rectángulos. - Expresiones del tipo geométrico propias de la geometría analítica, como gráfica de una función, área bajo la gráfica, rectángulos inscritos y circunscritos.
Conceptos y/o definiciones	- Noción de comparación de magnitudes entre áreas de rectángulos inscritos y circunscritos. - Noción de aproximación de las áreas de rectángulos inscritos y circunscritos al área bajo la curva. - Nociones de infinito potencial - Noción de cantidades evanescentes (tienden a cero)
Procedimientos	- Utilización del "infinito potencial" para inscribir y circunscribir rectángulos a la gráfica de la curva. -Procedimientos aritméticos asociados al cálculo de áreas, sumas de áreas, etc. - Procedimientos propios de la geometría analítica.
Propiedades / Proposiciones	- Utilización de la comparación de áreas entre rectángulos inscritos y circunscritos, y comparación de dichas áreas con el área bajo la gráfica de una función.
Argumentos	- Argumentos abductivos basados en la aproximación del área bajo la curva. - Argumentos deductivos basados en la geometría analítica.

7.5. Tarea Mejorada de la CE N°4

Para el desarrollo de la Tarea N°7 se recomienda implementarla en dos sesiones de 60 o 70 minutos cada una, ésta requiere un mayor apoyo del docente, por el nivel de dificultad que ésta posee. Esta tarea se puede aplicar en los primeros semestres de formación a nivel universitario o de manera introductoria al concepto de derivada.

7.5.1. Tarea N°7: Infinitesimales

Definición 7.1. *Consideraremos una cantidad muy pequeña de x como $\triangle x$, esta cantidad puede ser tan pequeña como queramos. Si f es una función, el incremento de la función $\triangle y$ correspondiente al incremento del argumento $\triangle x$ se tiene de:*

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x).$$

Para ilustrar la definición observa la gráfica (7.12).

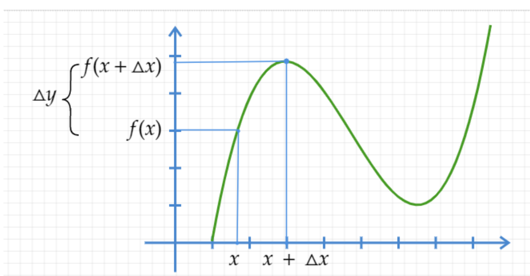


Figura 7.12: Gráfica de infinitesimales $\triangle x$ y $\triangle y$ (Creación Propia).

Definición 7.2. *La razón de cambio promedio de la función y en el intervalo de valores del argumento desde x hasta $\triangle x$ se expresa por la razón*

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

1. Observa el siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/pxjuazn7` y mueve el deslizador a.

   a) Considera la recta secante que une a los puntos A y B. ¿Qué representa la expresión $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$?

b) Si $\triangle x$ se aproxima a 0. ¿A qué valor se aproxima la razón de cambio $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$?

c) Mueve el deslizador a. Observa la recta secante y tangente a la función en el punto $(4, f(4))$. ¿Qué sucede con las rectas cuando $\triangle x$ se aproxima a 0?

d) Observa la expresión algebraica obtenida en el ítem (3).¿Qué relación tiene dicha expresión algebraica con la recta tangente del ítem anterior?

2. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{7}(x-2)^2 + 3$. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de f cuando x se incrementa en $\triangle x$?

3. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de f cuando x cambia de 4 a 4.5?

4. Si $\triangle x$ es muy pequeño, tanto como quisieras. ¿Qué pasa con la razón de cambio promedio? ¿Cuál es la expresión algebraica resultante? Argumenta tu respuesta.

7.5.2. CE N°4 Mejorada asociada a la Tarea N°7

Debido a que los expertos no explicitaron observaciones en cuanto a la configuración epistémica CE N°4 ésta no fue ajustada, tal como se muestra en la Tabla 7.7.

Tabla 7.7: Configuración Epistémica N°4 de la Tarea N°7

Objetos Matemáticos Primarios	Configuración Epistémica N°4 de la Tarea N°7
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para representar infinitesimales, razón de cambio promedio, rectas, funciones, etc. - Expresiones propias de la geometría analítica como: infinitesimal, gráfica de una función, rectas secantes y recta tangente a la gráfica de una función.
Conceptos y/o definiciones	- Noción de infinitesimal. - Noción de infinito actual - Noción de números racionales e irracionales.
Procedimientos	- Utilización del "infinito actual" para señalar que el infinitesimal es una cantidad tan pequeña como se quiera. -Procedimientos aritméticos asociados al uso de infinitesimal para el cálculo de razón de cambio promedio. - Procedimientos propios de la geometría analítica.
Propiedades / Proposiciones	- Aplicación de propiedades en la operatoria algebraica de infinisitesimales en el cálculo de razón de cambio promedio, etc.
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en la aproximación de las rectas secantes a la recta tangente por medio de manera geométrica y algebraica.

7.6. Tareas Mejoradas de la CE N°5

Para la implementación de las Tareas N°8, 9 y N°10 se recomienda utilizar dos sesiones de 60 o 70 minutos, pues la tarea introduce conceptos nuevos para los estudiantes. Estas tareas se pueden aplicar en los últimos niveles de enseñanza escolar así como también en los primeros semestres de formación a nivel universitario o de manera introductoria en un curso de estudio de sucesiones.

7.6.1. Tarea N°8: Sucesiones

Definición 7.3. *Una sucesión es una función* $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ *tal que a cada* n *le asigna* $f(n) = a_n$. *También suele denotarse como* $\{a_n\}$ *y a* a_n *se le llama término general de la sucesión.*

Definición 7.4. *Diremos que una sucesión es* ***acotada*** *si existe un número positivo* M *tal que* $|a_n| < M$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definición 7.5. *Diremos que una sucesión es:*
(i) ***estrictamente creciente*** *si* $a_n < a_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) ***creciente*** *si* $a_n \leq a_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(iii) ***estrictamente decreciente*** *si* $a_n > a_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(iv) ***decreciente*** *si* $a_n \geq a_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(v) ***monótona*** *si satisface cualquiera de las condiciones anteriores.*

Observa la gráfica que se encuentra en el siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/spwswfcv`. La gráfica del applet se muestra en la Figura (7.13) que representa la sucesión $\{a_n\}$.

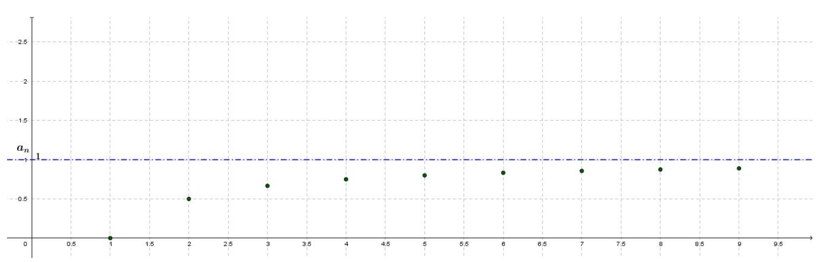


Figura 7.13: Gráfica de la sucesión a_n

1. ¿La sucesión es monotona? Si es así, ¿es creciente o decreciente? Justifica tu respuesta.

2. ¿La sucesión está acotada? Justifica tu respuesta.

3. Determina el término general de la sucesión.

4. ¿A medida que n toma valores muy grandes, donde se aproxima la sucesión? ¿Por qué?

5. Si ε es el radio del intervalo con centro 1, es decir, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. ¿A partir de qué $n_0 \in \mathbb{N}$ los términos de la sucesión están dentro de ese intervalo? Para responder la pregunta completa la siguiente tabla:

Tabla 7.8: Valores de ε y n_0

n_0	a_{n_0}	ε	$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$
2	1/2	1	$(0,2)$
		0.1	$(0.9, 1.1)$
		0.01	
		0.001	
		0.0001	

6. ¿Qué pasa si el valor ε es más pequeño que los valores propuestos en la tabla, ¿existirá un n_0 tal que $a_{n_0} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$?

7. ¿Qué condiciones tiene que tener ε y la sucesión a_n para que 1 sea su límite?

7.6.2. Tarea N°9

Observa la gráfica que se encuentra en el siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/svpzgfmm`. La gráfica del applet se muestra en la Figura (7.14)y representa la sucesión $\{b_n\}$.

1. ¿La sucesión es monotona? Si es así, ¿es creciente o decreciente? Justifica tu respuesta.

2. ¿La sucesión está acotada? Justifica tu respuesta.

3. Determina el término general de la sucesión.

4. ¿A medida que n toma valores muy grandes, donde se aproxima la sucesión? ¿Por qué?

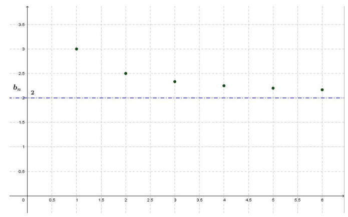


Figura 7.14: Gráfica de la sucesión b_n

5. Si ε es el radio del intervalo con centro 2, es decir, $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$. ¿A partir de qué $n_0 \in \mathbb{N}$ los términos de la sucesión están dentro de ese intervalo? Para responder la pregunta completa la siguiente tabla:

Tabla 7.9: Valores de ε y n_0

n_0	b_{n_0}	ε	$(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$
2	$5/2$	1	$(1,3)$
		0.1	$(1.9, 2.1)$
		0.01	
		0.001	
		0.0001	

6. ¿Qué pasa si el valor ε es más pequeño que los valores propuestos en la tabla, ¿existirá un n_0 tal que $b_{n_0} \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$?

7. ¿Qué condiciones tiene que la sucesión b_n para que 2 sea su límite?

8. Analiza las gráficas de las sucesiones $c_n = 2^n$ y $d_n = 1-3n$ con su respectiva tabla de datos. ¿Son sucesiones monótonas? ¿Poseen límites?

9. ¿Qué condiciones tiene que tener una sucesión monótona para que ésta tenga límite?

7.6.3. Tarea N°10

Utiliza el siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/vqv3gmks` para estudiar la sucesión alternante
$e_n = (-1)^n \cdot \dfrac{2n+1}{n}$ y el applet `https://www.geogebra.org/m/p3qccn5t` para estudiar la sucesión $f_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}$.

1. La sucesión e_n ¿ se aproxima a algún número? ¿Por qué?

2. La sucesión f_n ¿ se aproxima a algún número? ¿Por qué?

3. ¿Qué condiciones tiene que tener una sucesión alternante para que ésta converja?

4. Explica con tus propias palabras la siguiente expresión:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall \, n \geq n_0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = L$$

7.6.4. CE N°5 Mejorada asociada a la Tarea N°8,9 y N°10

Debido a que los expertos no explicitaron observaciones en cuanto a la configuración epistémica CE N°5 ésta no fue mejorada, tal como se muestra en la Tabla 7.10.

Tabla 7.10: Configuración Epistémica N°5 de las Tareas N°8,9 y N°10

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°5 de las Tareas N°8, 9 y N°10**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para expresar notaciones y símbolos relacionados a las sucesiones. - Expresiones propias de la geometría analítica como: gráficas de sucesiones crecientes, decrecientes, alternantes, etc.
Conceptos y/o definiciones	- Noción de sucesión. - Noción de infinito potencial - Noción de infinito actual - Noción de limite que no se alcanza y se puede aproximar tanto como se quiera.
Procedimientos	- Procedimientos aritméticos y algebraicos para determinar términos de una sucesión, intervalos, distancia, etc. - Procedimientos propios de geometría analítica.
Propiedades / Proposiciones	- Aplicación de propiedades de distancia (valor absoluto) y criterios de convergencia de sucesiones.
Argumentos	- Argumentos deductivos basados en la aproximación términos de una sucesión de manera geométrica.

7.7. Tareas Mejoradas de la CE N°6

Para la implementación de las Tareas N°11 y N°12 se recomienda utilizar tres sesiones de 60 o 70 minutos, pues la tarea introduce conceptos nuevos para los estudiantes. Estas tareas se pueden aplicar en los últimos niveles de enseñanza escolar así como también en los primeros semestres de formación a nivel universitario o de manera introductoria en un curso de cálculo diferencial.

7.7.1. Tarea N°11: Límite de Funciones en $\mathbb{R}$

1. Considera la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ donde f es la función afín $f(x) = 2x + 1$. Completa la siguiente tabla de datos:

Tabla 7.11: Valores de la función f cercanos a $x = 4$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
3.5		4.5	
3.6		4.4	
3.7		4.3	
3.8		4.2	
3.9		4.1	

2. Según la tabla anterior, suponga que x se acerca tanto como quisieras a $x_0 = 4$, es decir, $x \to 4$. ¿A qué valor se aproxima $f(x)$ cuando $x \to 4$?

3. Completa y analiza la siguiente afirmación:

   Si x se aproxima a 4 por la izquierda y por la derecha, entonces el valor de $f(x)$ se acerca a _____ entonces se puede escribir $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4}(2x + 1) =$ _____.

   La afirmación anterior se lee:

   "el límite de la función $f(x) = 2x + 1$, cuando x tiende a _____ es _____"

4. Abre el siguiente applet `https://www.geogebra.org/m/nw4ew6pt`. Observa que en el intervalo de las imágenes hay un radio ε centrado en el límite de $f(x)$ y en el intervalo de las pre-imágenes hay un radio δ centrado en $x_0 = 4$. Interactúa con el applet y completa la tabla (7.12):

Tabla 7.12: Valores de ε y δ de la función f cercanos a 4.

ε	$(9-\varepsilon, 9+\varepsilon)$	δ	$(4-\delta, 4+\delta)$
3	$(6, 12)$	1.5	$(2.5, 5.5)$
2			
		0.5	
0.5			
		0.05	

5. Interactúa con el applet, puedes cambiar la función $f(x)$ por otra función afín y x_0 por otro número. Observa el valor del límite, los valores de los radios ε y δ. Completa la tabla (7.13):

Tabla 7.13: Valores de ε y δ de una función afín entorno a x_0.

ε	$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$	δ	$(x_0-\delta, x_0+\delta)$
2			
1			
0.5			
0.1			
0.01			

6. Según el ítem anterior. ¿El valor del radio ε depende del valor de δ, o es al revés? Justifica tu respuesta.

7. ¿Qué relación tiene el radio δ con la expresión "$x \to x_o$ " ?

8. ¿Qué relación tiene el radio ε con la expresión "$f(x) \to L$" ?

9. ¿Qué relación tienen los radios δ y ε en la expresión " Si $x \to x_o$ entonces $f(x) \to L$.?

10. Explica con tus palabras la siguiente expresión:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta_\varepsilon > 0 \text{ tal que si } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

7.7.2. Tarea N°12: Existencia de Límites

1. Considera el applet `https://www.geogebra.org/m/xvqfhgnf` que muestra la gráfica de la siguiente función por rama

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad x \geq 1 \\ x^2 & si \quad -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & si \quad x \leq -1 \end{cases}$$

Completa la siguiente tabla:

Tabla 7.14: Valores de la función f cercanos a 1.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.5		1.5	
0.6		1.4	
0.7		1.3	
0.8		1.2	
0.9		1.1	

2. ¿Existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to 1$? ¿Por qué?

3. Completa la siguiente tabla:

Tabla 7.15: Valores de la función f cercanos a -1.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0.5		-1.5	
-0.6		-1.4	
-0.7		-1.3	
-0.8		-1.2	
-0.9		-1.1	

4. ¿Existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to -1$? ¿Por qué?

5. ¿Qué condiciones establecerías para que exista el límite de una función f cuando x tiende a x_0? Argumenta tu respuesta.

7.7.3. CE N°6 Mejorada asociada a la Tarea N°11 y N°12

Debido a que los expertos no explicitaron observaciones en cuanto a la configuración epistémica CE N°6 ésta no fue mejorada, tal como se muestra en la Tabla 7.16.

Tabla 7.16: Configuración Epistémica N°6 de las Tareas N°11 y N°12

Objetos Matemáticos Primarios	**Configuración Epistémica N°6 de las Tareas N°11 y N°12**
Elementos Lingüísticos	- Expresiones algebraicas para expresar notaciones y símbolos relacionados a aproximaciones de una función a un número, distancia entre números, etc. - Expresiones propias de la geometría analítica como: gráficas de funciones, intervalos de números, recta real, etc.
Conceptos y/o definiciones	- Noción de función en $\mathbb{R}$ - Noción de completitud de números reales e infinito actual. - Noción de cuerpo ordenado - Noción de límite de Weierstrass.
Procedimientos	- Procedimientos aritméticos y algebraicos para determinar valores de una función cercanos a un punto. - Procedimientos propios de la geometría analítica. - Procedimientos relacionados a la distancia o valor absoluto.
Propiedades / Proposiciones	- Aplicación de propiedades de distancia (valor absoluto) y existencia de límite de una función en un número.
Argumentos	- Argumentos deductivos para determinar los roles de δ y ε, la noción de Weierstrass y la existencia de límite, basados en aspectos de la geometría analítica, algebraicos y aritméticos.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES

8.1. Introducción

En este capítulo presentaremos un resumen de los resultados más relevantes que se han obtenido durante el desarrollo de cada uno de los capítulos que conforman esta investigación. Dichos resultados son producto de las preguntas de investigación, planteadas en el capítulo 2, y de los objetivos específicos que nos propusimos para lograr dar respuesta a nuestras interrogantes de investigación. A continuación, describimos los resultados obtenidos con los objetivos específicos de nuestra investigación para responder las preguntas de investigación planteadas al inicio del trabajo. No obstante, somos conscientes de que a pesar de que nuestra investigación ha tratado de contribuir de manera relevante al extenso campo del estudio de la noción de límite de una función en una variable, aún quedan muchas cuestiones abiertas por responder. En este sentido, presentamos posibles proyecciones de este trabajo que permitirán dar continuidad a nuestro investigación.

Este capítulo contiene cuatro apartados. En el primero de ellos, se describen las acciones que nos llevaron al cumplimiento de los objetivos específicos y, como consecuencia, del objetivo general. En el segundo apartado se describen las principales contribuciones de la investigación. En el tercer apartado se mencionan las limitaciones del estudio y finalmente en el último apartado se exhiben cuestiones abiertas de investigación que representan posibles vías de continuidad de este trabajo.

8.2. Sobre preguntas y objetivos de investigación

Como se mencionó en el apartado 2.3.2 el propósito de esta investigación fue diseñar tareas por intención de los distintos significados parciales del objeto límite de funciones en una variable para potenciar su aprendizaje. Al respecto, la pregunta principal de investigación fue:

P.I: ¿Qué tareas didáctico-matemáticas pueden diseñarse para promover los diversos significados del límite de funciones en una variable?

Esta pregunta de investigación dio pie al planteamiento del siguiente **objetivo general de investigación**:

O.G: Diseñar tareas por intención para promover aprendizajes de los diversos significados parciales del límite de funciones en una variable.

Con el propósito de lograr este objetivo general y, en consecuencia, la respuesta a la pregunta general de nuestra investigación, en el apartado 2.3.2, planteamos objetivos específicos cuya consecución contribuiría a dicho fin. En las secciones que siguen presentamos los resultados y discutimos en qué medida se lograron cada uno de esos objetivos específicos.

8.2.1. Sobre los objetivos específicos OE.1 y OE.2

El primer objetivo tenía como fin establecer los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable mediante el análisis de las prácticas matemáticas y sus configuraciones ontosemióticas y el segundo objetivo específico tenía como propósito establecer criterios relacionados a la riqueza de objetos y/o procesos de cada signficado parcial para guiar el diseño de tareas del objeto límite de funciones en una variable.

OE.1. Caracterizar los significados parciales de objeto límite de una función en una variable mediante el estudio de los pares <prácticas matemáticas, configuraciones ontosemióticas>.

OE.2 Plantear criterios relacionados a la riqueza de objetos y/o procesos que se deben contemplar en las tareas de límite de funciones en una variable, considerando el objetivo específico (1).

Para lograr los objetivos propuestos, establecimos acciones en las Fases I y II descritas en el apartado 2.4.1 del Capítulo 3, la primera de ellas fue realizar una revisión histórica epistemológica provenientes de diferentes fuentes sobre el desarrollo y evolución del objeto límite de funciones en una variable. Dicha revisión permitió recoger información sobre las problemáticas relevantes que contribuyeron en el surgimiento de dicho objeto matemático como también su fundamentación y formalización. Una vez identificadas las prácticas que dieron paso al origen y evolución del límite de funciones en una variable, mediante el uso de la noción configuración epistémica que nos proporciona el EOS, describimos dichas prácticas en términos de las configuraciones de objetos primarios que se activaron mediante las mismas (Godino y Batanero, 1994; Fony y Godino, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; Pino-Fan, 2014;). De esta manera para cada práctica se identificaron las situaciones y/o problemas, elementos lingüísticos, los conceptos y/o definiciones, propiedades, procedimientos y los argumentos mediante los cuales se vinculan los objetos matemáticos primarios anteriores.

Como respuesta a este primer objetivo específico, se identificaron seis sistemas de prácticas cada uno de los cuales, siguiendo los supuestos teóricos del enfoque ontosemiótico, "representan" un significado parcial para el objeto límite de funciones en una variable y por tanto cada uno de esos sistemas de prácticas llevan "implícita" la activación de una configuración epistémica de objetos matemáticos primarios (Godino, Font, Wilhelmi, Lurduy, 2011; Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2014; Pino-Fan, Godino, Font, 2011).

La caracterización de los objetos matemáticos primarios de cada configuración epistémica del objeto límite de funciones en una variable permitió establecer criterios relacionados a la riqueza y/o procesos que emergen de cada significado parcial de dicho objeto, los cuales fueron resumidos y sintetizados en las tablas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 que se encuentran en el capítulo 3 (Araya, Pino-Fan, Medrano, Castro, 2021). La concreción de estos dos objetivos cumple con la primera etapa llamada "Preparation and Design" del ciclo propuesto por el Design Based Research (Bakker & van Eerde, 2015) descrito en el apartado 2.4.

8.2.2. Sobre el objetivo específico OE.3

El tercer objetivo específico tenía como fin diseñar tareas por intención de cada significado parcial del objeto límite de funciones en una variable, tal como se describe a continuación:

OE.3. Diseñar tareas por intención del objeto límite de funciones en una

variable con el fin de potenciar el uso de sus diversos significados parciales en un grupo de profesores de matemática en formación.

Para poder lograr el objetivo propuesto se revisó distintos tipos de actividades referentes al objeto límite de funciones en una variable (en adelante, objeto límite) en diversos textos de cálculo (Apostol, 1967; Bobadilla & Labarca, 2010; Dolce & Pompeo, s.f.; Larson, 2015; Spivak, 1992) así como también orientaciones curriculares ministeriales (MINEDUC, 1998; 2021a) las cuales fueron desarrolladas y analizadas con el fin de determinar los objetos matemáticos primarios que éstas movilizaban para determinar su proximidad con cada de una de las configuraciones epistémicas del objeto límite descritas en el capítulo 3. A partir de la revisión se escogieron actividades dentro de las cuales fueron adaptadas y otras rediseñadas con el fin de propiciar cada uno de los seis significados parciales del objeto límite. Cada una de estas actividades están propuestas en el capítulo 4, en esta descripción se encuentran las posibles respuestas de los estudiantes junto con sus configuraciones, las cuales se aproximan a las seis configuraciones epistémicas descritas en el capítulo 3.

El proceso de validación de las tareas fue en una primera instancia por la profesora que implementó la propuesta didáctica, en una segunda instancia por los participantes del curso y en una tercera instancia por cuatro expertos en didáctica del cálculo y del marco teórico EOS. La validación de los expertos consideró aspectos de los criterios epistémicos de las Tareas (objetos matemáticos de cada configuración) así como también criterios del Diseño de Tareas (Knott & Yang, 2015), la validación de la profesora participante sólo consideró éstos últimos criterios, debido a que no tenía conocimiento de las herramientas teóricas y metodológicas del EOS, ambos procesos de validaciones se encuentran descritas en el Capítulo 6 y en el Anexo I, respectivamente.

El cumplimiento de este objetivo era relevante para los fines generales de esta investigación, pues conlleva a la construcción de tareas que permiten movilizar los objetos matemáticos deseados asociados a cada configuración epistémica y por ende a cada significado parcial del objeto límite. Además, dichas actividades también permitieron analizar los significados personales logrados por el grupo de estudiantes. El desarrollo de este objetivo cumple con la primera parte de la segunda etapa llamada “Teaching Experiment” del ciclo propuesto por el Design Based Research (Bakker & van Eerde, 2015) descrito en el apartado 2.4.

8.2.3. Sobre el objetivo específico OE.4

El cuarto objetivo específico tenía como propósito realizar un análisis de la implementación de las tareas y el logro de los significados personales logrados por un grupo de profesores en formación:

OE.4 Analizar y elaborar las reflexiones sobre la secuencia de tareas implementadas y los significados personales logrados por los estudiantes.

Para llevar a cabo el análisis de la implementación de las tareas, se utilizó la noción de Idoneidad Didáctica, sus dimensiones y criterios (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Breda, Font y Pino-Fan, 2018). En particular, se puso especial énfasis en el análisis de las dimensiones epistémicas y cognitivas, pues se estudió y se caracterizó las configuraciones cognitivas desarrolladas por los estudiantes, lo que permitió compararlas con las configuraciones epistémicas asociadas a las tareas, las cuales se encuentran descritas en el capítulo 5, adicionalmente, se realizó una síntesis de dicha comparación que se encuentra en las tablas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5. Así como también se realizó una descripción general y resumida entre las Configuraciones Cognitivas y Epistémicas de toda la implementación, la cual se encuentra en la tabla 5.7 (Godino, 2013). La concreción de este objetivo fue crucial para los fines generales de la investigación, pues permitió caracterizar y analizar el logro de los significados personales de los estudiantes por medio de la implementación de las tareas. El desarrollo de este objetivo cumple con la segunda parte de la segunda etapa llamada “Retrospective Analysis” del ciclo propuesto por el Design Based Research (Bakker & van Eerde, 2015) descrito en el apartado 2.4.

8.2.4. Sobre el objetivo específico OE.5

El quinto y último objetivo específico tenía como fin llevar a cabo las mejoras de las tareas según la validación y la implementación de éstas:

OE.5 Mejorar las tareas diseñadas según la validación de las tareas y los resultados obtenidos en la implementación de éstas.

El análisis de cada una de las dimensiones de la Idoneidad Didáctica dio información crucial para las mejoras de las Tareas tanto en sus dimensiones epistémicos y cognitivos, como también en sus dimensiones afectivas, interaccional y mediacional para mejorar el desarrollo mismo de la implementación (Godino, 2013). Por otra parte, la validación por parte de la docente participante, de los estudiantes y los cuatro expertos externos fue trascendental en las mejoras de las tareas tanto en aspectos epistémicos como también en aspectos de criterios del Diseño de Tareas (Pochulu, Font y Rodríguez, 2013; Sullivan, Knot y Yang, 2015). Todas y cada una de las mejoras se encuentran descritas en el capítulo 7, donde se exponen las tareas mejoradas junto con algunas consideraciones para su implementación. El desarrollo de este objetivo cumple con la segunda parte de la segunda etapa llamada "Retrospective Analysis" del ciclo propuesto por el Design Based Research (Bakker & van Eerde, 2015) descrito en el apartado 2.4.

8.2.5. Reflexiones Finales

En este apartado hemos discutido en qué medida se ha logrado responder la pregunta de investigación: ¿Qué tareas didáctico-matemáticas pueden diseñarse para movilizar los diversos significados de límite de funciones de una variable de manera que potencie el aprendizaje de la noción? Para dar respuesta a la pregunta planteada se propusieron cinco objetivos específicos los que fueron alcanzados a lo largo de nuestra investigación, pues se estudió los diversos significados parciales del objeto límite, se estudiaron las configuraciones epistémicas de cada uno de los significados parciales, se diseñaron tareas asociados a cada uno de los significados parciales las cuales fueron validadas de manera interna y externa, se implementaron las tareas a un grupo de profesores en formación analizando los significados logrados por los estudiantes y finalmente a partir del proceso de validación interno y externo se mejoraron las tareas. En este sentido, se cumplió con las dos primeras etapas propuestas por el Design Based Research (Bakker & van Eeder, 2015).

8.3. Principales Contribuciones

A continuación, presentamos un resumen de las principales contribuciones de esta investigación. Es importante señalar que no ahondaremos en ellas dado que han sido ampliamente comentadas a lo largo del trabajo.

Esta investigación tenía por propósito diseñar tareas por intención con el fin de promover cada uno de los significados parciales del objeto límite. Para lograr dicho propósito era fundamental establecer los significados parciales del objeto límite y estudiar sus configuraciones epistémicas, puesto que los objetos matemáticos primarios movilizados en cada configuración nos permitió establecer criterios que orientaron el diseño de las tareas, en este sentido, la noción de Configuración Epistémica (Font y Godino, 2006; Pino-Fan, 2014; Godino, Batanero y Font, 2020) del EOS fue fundamental para establecer los 6 significados parciales del objeto límite y para la guía del diseño de tareas de cada una de ellas. Adicionalmente, para la confección de las tareas se consideraron criterios para el diseño de ellas (Pochulu, Font y Rodríguez, 2013; Sullivan, Knott y Yang,2015) las que también fueron utilizadas para ser validadas por expertos externos.

Otro aspecto relevante del estudio fue analizar la implementación de las tareas por medio de las componentes de la Idoneidad Didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, 2013). En particular, los indicadores propuestos por Godino (2013) proporcionó herramientas de análisis de cada una de las componentes, en particular, para las componentes epistémicas y cognitivas se utilizaron las configuraciones epistémicas de las tareas y se compararon con las configuraciones cognitivas desarrolladas por los estudiantes, esto permitió analizar la riqueza matemática de objetos y procesos de cada uno de los signficados personales logrados por los estudiantes.

Un último aspecto importante de la investigación fueron las mejoras de las tareas por medio del análisis de los componentes de la Idoneidad Didáctica, así como también las observaciones dadas por el grupo de expertos externos que revisaron los objetos matemáticos primarios de las configuraciones epistémicas de las tareas, así como también los criterios del diseño de tareas. Un aspecto fundamental de la validación es que permitió evaluar la concordancia de los objetos primarios que conforman cada una de las configuraciones epistémicas de las tareas con los respectivos objetos primarios de cada una de las configuraciones epistémicas de los significados parciales del objeto límite. Dicho proceso contribuyó en aspectos valiosos de mejora tanto en las configuraciones de las tareas como el contexto, lenguaje, estructura, distribución y niveles de interacción de ellas (Sullivan, Knott y Yang, 2015).

En síntesis, los resultados de nuestra investigación proporcionan pautas y criterios que permiten el diseño de tareas para desarrollar y potenciar cada uno de los significados parciales del objeto límite, así como también aporta en el análisis de la implementación de las tareas con especial enfásis en los significados personales logrados por los estudiantes.

8.4. Limitaciones del estudio

A partir de lo descrito y desarrollado en los capítulo 5 y 6, hemos identificado algunas limitaciones que describimos a continuación:

- La implementación se llevó a cabo durante la pandemia causada por el COVID-19, lo que implicó aplicar la propuesta didáctica de manera virtual remota. La modalidad de la implementación pudo haber afectado de manera negativa la dimensión cognitiva, afectiva, interaccional y/o mediacional en los estudiantes, puesto que debido al encierro algunos de ellos presentaban síntomas de cansancio y/o depresión por la situación en la que se encontraban. Por otra parte, el hecho de que algunos estudiantes no tuvieran una buena conexión a internet dificultada tanto su concentración y participación en las actividades, puesto que lamentablemente no se pudo apreciar sus expresiones gestuales y/o corporales, ya que mantuvieron sus cámaras apagadas durante toda la intervención.

- Otra limitación fue el factor tiempo, puesto que la secuencia didáctica estaba programada en 7 sesiones sincrónicas de 70 minutos cada una. Debido a los problemas de conexión a internet, dificultad para lograr concentrarse en las tareas, problemas en la dimensión afectiva e interaccional de los estudiantes, muchas actividades se tuvieron que alargar más de lo previsto, lo que implicó que la docente estuviera preocupada en el cumplimiento del cronograma de la asignatura, dicha preocupación pudo afectar en las dos últimas actividades plenarias.

- Debido a que las respuestas entregadas por los estudiantes eran de manera grupal, no pudimos constatar los significados parciales logrados por cada uno de los participantes.

- Otra dificultad que se presentó fue el registro de las respuestas por parte de los estudiantes en cada una de las tareas, debido a que tenían que escribir sus respuestas en documentos en formato word o pdf, si bien pudieron adaptarse rápido a los editores de texto, esto pudo afectar en el desarrollo natural de sus argumentos.

8.5. Proyecciones

A pesar de las contribuciones que resultan de nuestra investigación existen aspectos importantes que podrían ser abordados en trabajos futuros sobre las tareas y propuestas de enseñanza del objeto límite. A continuación, se describen posibles proyecciones de esta investigación:

- Diseñar tareas que permitan transitar entre los diferentes significados parciales del objeto límite, considerando el tipo de relaciones que se puede establecer entre éstos.

- Implementar la secuencia de tareas mejoradas en modalidad presencial con un cronograma de tiempo mejorado en una asignatura de cálculo dirigido a profesores de matemática en formación.

- Analizar las tareas propuestas en el curriculum del Plan Diferenciado de enseñanza media respecto a los significados parciales del objeto límite.

- Analizar las actividades respecto a los significados parciales del objeto límite que movilizan los programas de formación de profesores de matemática en distintas instituciones educacionales.

- Estudiar las prácticas matemáticas de los formadores de profesores de matemática respecto a los significados parciales del objeto límite.

8.6. Contribución a la comunidad de investigación

En este último apartado, se describen los aportes que hemos realizado al campo de investigación en Educación Matemática a partir del desarrollo y resultados obtenidos a lo largo de este estudio.

- Araya, D. y Gordillo, W. (2017). Algunos Conflictos Semióticos Identificados en la noción de límite. *ALME 30: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 30*, 534-541.

- Araya, D.; Pino-Fan, L. (2021). Diseño de tareas de los significados parciales de la noción límite de una función en una variable. En Gómez, D. M., Cornejo, C., & Martínez, M. V. (Eds.) *Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática*, pp. 150-155. Rancagua, Chile

- Araya, D.; Pino-Fan, L.; Medrano, I. y Castro, W.(2021). Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function. *Bolema. 35*(69), 179-205.

Participación en congresos para difundir los resultados y recibir retroalimentación de nuestra investigación:

- "Diseño de tareas de los significados parciales de la noción límite de una función en una variable" en XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, congreso académico realizado de manera remota, diciembre 2021.

- "Diseño de Tareas para el estudio de la noción de límite en una variable real" en Seminario Latinoamericano de Colaboración del EOS, seminario académico realizado de manera remota, julio 2021.

- "Diseño de Tareas para el estudio de la noción de límite en una variable real" en el Seminario Latinoamericano de Colaboración sobre el Enfoque Onto-Semiótico, Primera Jornada de Estudiantes de Postgrado, congreso académico realizado de manera remota. Noviembre 2020.

- "Configuraciones Ontosemióticas de la noción de límite" en la XXXI Jornada de Matemática de la Zona Sur, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile. Abril 2018

- "Configuraciones Ontosemióticas del objeto límite finito" en la XXXII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME, Universidad de Medellín, Medellín, Colombia. Julio 2018

REFERENCIAS

Apostol, T. Calculus (1967). *One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra.* New York: John Wiley & Sons.

Araya, D. y Gordillo, W. (2017). Algunos Conflictos Semióticos Identificados en la noción de límite. *ALME 30: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 30*, 534-541.

Araya, D.; Pino-Fan, L.; Medrano, I. y Castro, W.(2021). Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function. *Bolema. 35*(69), 179-205.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 97-140) México: Grupo editorial Iberoamérica.

Barbosa, J. C., & de Oliveira, A. M. (2013). Collaborative groups and their confl icts in designing tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 541–548), Oxford, UK. Recuperado de `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054`

Barahmand, A. (2017) The Boundary Between Finite and Infinite States Through the Concept of Limits of Sequences. *Journal of Science and Mathematics Education, 15*(3), 569-585.

Bartolini Bussi Maria, G., Canalini, R., & Ferri, F. (2011). Towards cultural analysis of content: problems with variation in primary school. In J. Novotna & H. Moraova (Eds.), *Proceedings of SEMT'11, International Symposium Elementary Maths Teaching: The mathematical knowledge needed for teaching in Elementary School* (pp. 9–20). Prague: Faculty of Education, Charles University.

Blázquez, S. & Ortega, T. (2000). El concepto del límite en la educación secundaria. En Cantoral,R. (Ed.) El futuro del cálculo infinitesimal. ICME 8. México.

Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(3), 219-236.

Bakker, A. & van Eerde, D. (2015) An Introduction to Design-Based Research with an

Example from Statistics Education. En Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. Presmeg, N. (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods, Advances in Mathematics Education* (pp.429-466). London, United Kingdom: Springer

Becker, J.P.& Shimada, S. (1997) *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática* (M. Martínez, Trad.) Madrid, España: Alianza Editorial.

Boyer, C. (2016). *Historia de la matemática* (M. Martínez, Trad.) Madrid, España: Alianza Editorial.

Bobadilla, G. & Labarca, R. (2010) *Cálculo Tomo II.* Santiago, Chile: USACH.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (Eds.). (1999). *How people learn.* Washington, DC: National Academy Press.

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(3), 303-346.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Brunschvicg, L. (1945). L*as Etapas de la Filosofía Matemática.* Buenos Aires: Lautaro.

Caglayan, G. (2015) Math majors' visual proofs in a Dynamic environment: the case of limit of a function and the $\varepsilon - \delta$ approach. I*nternational Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(6), 797-823.

Cantoral, R. y Farfan, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo.* México: Thomson Editores.

Cauchy, A. (1821). *Tours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechinique. Ire partie. Analyse Algébrique.* París: lÌmprimerie Royale.

Charalambous, Y. (2010). Mathematical Kwoledge for Teaching and Tasks. *Journal of Teacher Education.60*(1-2), 21-34.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 420–464). New York: Macmillan.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher,32*(1),9-13.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education (6th Ed.).* New York, NY: Routledge.

Collete, J. (1985). *Historia de las matemáticas I* Madrid: Siglo veintiuno de España editores, sa.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences,13*,15-42.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conpections et obstacles.* Thèse de doctorat de troisième cycle. L'Universitè Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenoble, Francia.

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1991.p. 153-166

Contreras A.; Font, V.; Luque, L.; Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la Teoría de las Funciones Semióticas a la Didáctica del Análisis Infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25* (2), 151-186.

Contreras, A. & García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(3), 277-310.

Corica, A. & Otero, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 305-331.

D'Alembert (1766). *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences des Arts et des Métiers.*Paris: Boiasson, David, Le Breton, Durand. Volumen 9.

Deulefeu, J. (1991). El lenguaje de las gráficas cartesianas y su interpretación en la representación de situaciones discretas. *Comunicación, Lenguaje y Educación* (11-12),77-86.

Dedekind, R. (2014) *¿Qué son y para qué sirven los números?: Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática* (J. Ferreiros, Trans.). Madrid: Alianza Editorial.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (1994). *Handbook of Qualitative Research* (2da Ed.). Thousands Oaks, CA: Sage.

Dolce, O. & Pompeo, J. N. (s.f) *Fundamentos de Matemática 10 Elementar Geometria Espacial Posição e Métrica* (5.ed.). Brasil:Atual Editora.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne, Switzerland: Peter Lang

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A, Zachariades, T., Zoulinaki, F. (2009). Geometry and Algebraic Approaches in the concept of "limit" and the impact of the "Didactic Contract". *International Journal of Science and Mathematics Education.* 7, 765-790.

Euclides (2007). *Elementos* (M. L. Puertas, Trad.). Madrid, España: Gredos. (Traducción del trabajo original, s.f.)

Fernandez, M. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema de límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(2), 171-187.

Fernández-Plaza, J. A.; Ruiz-Hidalgo, J.; Rico, L. (2015) Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias*, (33.2), 211-229.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19–25.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*,*8*(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.

Fuente, A., Armentero, M.; Font, V. (2012) Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del límite de una. *Bolema*, 26(42B), 667-690.

Giménez, J.; Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a Reseach Process. In Margolinas, C. (Ed.). *Task Design in Mathematics Education*, 581-590. Oxford, The 22nd ICMI Study.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska, y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity*, 177- 195. Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22* (2/3), 237-284

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *26* (1), 39-88

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M.(2006). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *Paradigma*, *XXVII*(2), 221-252.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*,*39*(1), 127-135

Godino,J. D., Font, V., Wilhelmi & De Castro, (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico.*Enseñanza de las Ciencias*,*27*(1),59-76.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 247- 265.

Godino, J.D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. *8*(11), 111-132.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Disponible en `www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis`$_EOS_24agosto14.pdf$

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. *CERME 9, TWG 17: Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research*. (Versión ampliada en español: Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica. Universidad de la Sabana, Colombia).

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Ca'ñadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V.(2019) The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1),37-42.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2020). El Enfoque Ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática,12*(2), 3-15.

González, P. (1992).*Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal.* Madrid: Alianza Editorial.

Gordillo, W. & Pino-Fan, L. (2015). Un ejemplo de análisis ontosemiótico para una tarea de antiderivada. *IXX Jornadas Nacionales de Educación Matemática*, (pp. 170-175). Villarrica, Chile: SOCHIEM

Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational Communication and Technology Journal*, *29* (2), 75–91.

Heath, T. (1908).*The Thirteen Books of Euclid's Elements* Londres: Cambridge University Press Warehouse.

Heine, M. K. (1988) Resequencing Skilss and Concepts in Applied Calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 3-25.

Irazoqui, E.; Medina, A.(2013) Estudio preliminar de aproximación al concepto de límite de una función. *Theoria, 22*(1), 21-31.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2016). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). México: McGraw-Hill.

Keene, K.; Hall, W; Duca, A. (2014) Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction. *ZDM Mathematics Education, 46*, 561-574.

Kleiner, I. (2001). The Infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics 48*(2-3), 137-174.

Kieran, C.; Doorman, M. & Ohtani M. (2015) Frameworks and Principles for Task Design. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education an ICMI Study 22* (pp.19-81). Switzerland: Springer International Publishing Switzerland.

Koirala, H.P.(1997). Teaching of calculus for student's conceptual understanding. *The Mathematics Educator, 20*, 52-62.

Lesh, R. & Harel, G (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and learning. 5*(2-3), 157-189.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,*(pp.

763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change.* Philadelphia, PA: Research for Better Schools.

Malaspina, U. (2012). Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7*(10), 165-181.

Mallart, A.; Font, V. y Malaespina, U. (2016). Reflexión sobre el signficaco de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos.38*(152),14-30.

Mamona-Downs, J.(2001) Letting the intuitive bear on the formal: A didactic approach for the understanding of the limits of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*,259–288.

Martínez, M. & García, D. (2016). Una situación didáctica para introducir la noción de suma de Riemann. En Estrella, S.; Goizueta, M.; Guerrero, C.; Mena, A.; Mena, J.; Montoya, E.; Morales, A.; Parraguez, M.; Ramos, E.; Vazquez, P.; Zakaryan, D.(Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 381-385). Valparaíso, Chile: SOCHIEM.

Moise. E. (1986).*Geometría Moderna.* Estados Unidos: Addison-Wesley Iberoamericana.

Medrano, I. & Pino-Fan, L.R. (2016). Estadios de comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico. *Journal of Research in Mathematics Education, 5*(1), 287-323.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE (1998)*Matemática. Funciones y Procesos Infinitos: Programa de Estudio Cuarto Año Medio Formación Diferenciada Humanístico-Científica.* Santiago,Chile: MINEDUC.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE (2021a)*Programa de Estudio Tercer o Cuarto Año Medio Formación Diferenciada Matemática: Límites, Derivadas e Integrales. Versión web.* Santiago,Chile: MINEDUC.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE (2021b)*Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media* Santiago,Chile: CPEIP.

Monaghan J.(1991) Problems with the language of limits. For the Learning of Mathematics, 11(3), 20-24.

Newton, I. (1686a). *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Translated from the Autho'r Latin Original). Londres.

Newton, I. (1686b). *The method of fluxions and infinite series* (Translated from the Autho'r Latin Original by Jhon Colson). Londres.

Newton, I. (2011). *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (Trans. E. Rada). Madrid: Alianza Editorial.

Larson, R. & Edwards, B. (2015). *Cálculo. Tomo 1. Décima Edición.* Ciudad de México, México: Cengage Learning.

Orellana, E. & Swears, Y. (2017). Micro–ingeniería en la enseñanza del cálculo del volumen del cilindro con uso del método de Cavallieri. En FESPM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 18-25). Madrid, España: FESPM.

Parameswaran, R. (2007) On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 193-216.

Pirie, S., & Kieren, T. E. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 61–86.

Pino-Fan, L. R.; Godino, J. D. & Font, V. (2011) Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1),141-178.

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*(Tesis doctoral). Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L.; Godino, J. D.; Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema, 29*(51),60-89.

Pino-Fan, L. (2017). Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M, Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en: `http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/pino-fan.pdf`

Pochulu, M.,Font, V.,Rodríguez, M.(2006). Desarrollo de la Competencia en Análisis Didáctico de Formadores de Futuros Profesores de Matemática a través del Diseño de Tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.19*(1), 71-98.

Pochulu, M., Font, V. & Rodríguez, M. (2013) *Criterios de Diseño de Tareas para favorecer el análisis Didáctico en la formación de profesores.* Actas de VII CIBEM, 4999-5009.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70.

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J., & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: Instrumenting the epistemological and the cognitive aspects of the design of teaching sequences. *Educational Researcher,38*,329-342.

Robinet, J. (1983). Un experience d ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4* (3), 223-292.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1–36.

Sfard, A. (2002). Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics.En J. Kilpatrick, Martin, G., y Schifter, D. (Eds.), *A Research Companion for NCTM Standards.* Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating.* New York: Cambridge University Press.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics* *discussions*. Reston,VA/Thousand Oaks,CA: National Council of Teachers of Mathematics/Corwin Press.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, *6*(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1988). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. *Actes du Colloque: Construction des savoirs:obstacles et conflits*. Montréal:CIRADE.

Soler de Dios, B. (2014). *Fractales para la construcción del concepto de límite en 4° de ESO*. Memoria de Trabajo de Fin de Máster en Profesor de Educación Secundaria. Universidad Valencia. España.

Spivak, M. (1992). *Cálculo Infinitesimal. Segunda Edición*. Barcelona: Editorial Reverté, S.A.

Sullivan, P.; Knott, L. & Yang Y. (2015) The Relationships Between Task Design, Anticipated Pedagogies, and Student Learning. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education an ICMI Study 22* (pp.83-114). Switzerland: Springer International Publishing Switzerland.

Swan, M. (2007). The Impact of Task-Based Professional Development on Teachers' Practices and Beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education.83*(1),133-143.

Tall, D.O.; Schwarzenberger, R.L.(1978)Conflict in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching, 82*, 44-49.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction-The Wiskobas project*. Dordrecht: Reidel.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *ZDM Mathematics Education 37*(4), 287-307.

Valdivé, C. & Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(3), 413-450.

Watson, A., & Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and resources in mathematics teacher education* (pp. 109-135). Rotterdam: Sense Publishers.

Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Bolite Frant, J., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Margolinas, C., Sullivan, P., Thompson, D., & Yang, Y. (2013). Introduction. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education Proceedings of ICMI Study 22* (Vol.1) (pp.9-15). Oxford.

Wilhemi, M. R., Godino, J. D. & Lacasta, E. (2007). Epistemic configurations associated to the notion of equility in real numbers. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques, 27*(1), 53-82.

Zellini, P. (2004). *Breve historia del infinito*. (J. Martín, Trans.). Madrid, España: Ediciones Siruela.

ANEXO I: PRIMER INSTRUMENTO DE VALIDACIÓN

Evaluación de la Docente

Estimada Docente, en estas breves líneas queremos agradecer de antemano el apoyo que pueda brindarnos para llevar a cabo una de las etapas más importantes en el desarrollo de nuestro trabajo de tesis doctoral titulada "Diseño de Tareas para promover los significados del objeto límite de una función en una variable". Su participación nos ayudará a evaluar las tareas diseñadas para promover el aprendizaje de cada uno de los significados parciales de la noción de límite de una función en una variable detallados en el documento entregado. Su evaluación sustentará la fiabilidad y validez del instrumento que estamos construyendo para llevar a cabo la implementación de las tareas en estudiantes de un programa de formación de profesores.

Para el diseño de las tareas sobre los significados parciales de la noción de límite hemos considerado los dilemas propuestos por Sullivan, Knott y Yang (2015), los que contemplan los siguientes aspectos:

a) Contexto El contexto matemático de las tareas propuestas, las cuales van desde un contexto propio de la matemática como también contextos semireales o reales permiten generar el significado pretendido en los estudiantes.

b) Lenguaje El lenguaje, la redacción y la precisión matemática de las tareas permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado.

c) Estructura La estructura se refiere al grado de apertura de las tareas, el cual se puede considerar como las respuestas y/o soluciones de una tarea, así como también de la estructura de éstas. Es decir, las tareas pueden evocar diferentes estrategias para desarrollar una o varias soluciones o por el contrario generar una sola solución.

d) Distribución Hace referencia a la selección de contenidos en función de las demandas cognitivas que generan las tareas. Un ejemplo de ello es la propuesta por Smith y Stein (2011) que establecen una jerarquía de tareas que van progresivamente desde la memorización hasta los procedimientos sin conexiones llamadas Demandas Cognitivas de Bajo Nivel, así como también tareas que van desde procedimientos con conexiones hasta haciendo matemáticas llamadas Demandas Cognitivas de Alto Nivel.

e) Niveles de Interacción Se refiere a los niveles de interacción de los participantes en la implementación de las tareas, es decir, entre los docentes y estudiantes, entre los estudiantes, y los estudiantes y las tareas.

Dentro de este criterio se considera los Criterios del Diseño de Tareas propuestos por Pochulu, Font y Rodríguez (2013), quienes contemplan una serie de preguntas las cuales se han incluido en las tablas que solicitamos responda. En este sentido requerimos su colaboración para evaluar cada una de las tareas que hemos diseñado y que podrá encontrar en el Anexo $N°1$ junto con las respuestas. Para facilitar el apoyo que nos brinda, hemos incluido tablas con las que podrá evaluar el grado de relevancia del criterio mencionado para ello deberá responder en cada ítem las siguientes opciones: **1** Muy en desacuerdo, **2** En desacuerdo, **3** Ni en acuerdo ni desacuerdo, **4** De acuerdo y **5** Muy de acuerdo. Podrá seleccionar la opción "**no aplica (NA)**" para señalar que el ítem en cuestión no considera dicho contenido. En el apartado de observaciones le pedimos que escriba todas las observaciones que tenga respecto a la ausencia de algún contenido importante o sugerencias sobre cada ítem.

Observaciones de la Docente

Además, de completar las tablas solicitadas la docente realizó las siguientes sugerencias:

1. *Observación 1* Hay que mejorar las figuras geométricas de las Tareas 1 y 2, puesto que no se entiende cuando comienza la iteración. Sugiero poner al principio un cuadrado indicando la magnitud de su lado, en este caso, lado a.

2. *Observación 2* Hay que mejorar el applet de la CE $N°5$, para que muestre de manera más concreta el valor de los elementos de las sucesiones, así permite mejorar el comportamiento de éstas.

3. *Observación 3* Revisar los puntos de los números decimales, que a veces es un punto y otra es una coma. Además, hay números que son erronéos en las Tablas 1 y 2 de las tareas de la CE $N°6$.

Evaluación de las Tareas de la Configuración Epistémica $N°1$							
Criterios de Diseño de Tareas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**NA**	**Observación**
1.¿El contexto de las tareas se comprende?					X		El contexto es un problema propio de la geometría
2.¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?					X		
3.¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes el cual está dirigido?	X						Mejorar la redacción de la pregunta 1 y 2.
4.¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?					X		
5.¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?	X						Veo que las tareas tienen sólo una estrategia para resolverlas
6.¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?				X			
7.¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?				X			Hay una pregunta de demostración que da información de la fórmula del área del triángulo.
8.¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?					X		
9.¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?					X		
10.¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?					X		Eliminar la pregunta donde se pide demostrar la fórmula del área de triángulos.
11.¿El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas?					X		
12.¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares?					X		

Evaluación de las Tareas de la Configuración Epistémica N2							
Criterios del Diseño de Tareas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**NA**	**Observación**
1.¿El contexto de las tareas se comprende?					X		El contexto me parece adecuado, pues se deduce el volumen de la esfera.
2.¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?					X		
3.¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes el cual está dirigido?					X		
4.¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?					X		
5.¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?	X						Las tareas estan diseñadas para usar el Principio de Cavalieri.
6.¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?				X			
7.¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?					X		
8.¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?					X		
9.¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?					X		
10.¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?					X		
11.¿El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas?					X		
12.¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares?					X		

Evaluación de las Tareas de la Configuración Epistémica N3							
Criterios del Diseño de Tareas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**NA**	**Observación**
1. ¿El contexto de las tareas se comprende?					X		
2.¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?					X		
3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes el cual está dirigido?					X		
4.¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?					X		
5.¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?				X			Las tareas estan diseñadas para usar la noción de infinitesimal.
6.¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?				X			
7.¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?				X			
8.¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?					X		
9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?					X		
10.¿ Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?					X		
11.¿El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas?					X		
12.¿ Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares?					X		De hecho, el uso de applet no pide mayor conocimiento en el uso de ésta.

Evaluación de las Tareas de la Configuración Epistémica N4							
Criterios del Diseño de Tareas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**NA**	**Observación**
1.¿El contexto de las tareas se comprende?					X		Me parece bien, pues es un problema propio del cálculo integral.
2.¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?					X		
3.¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes el cual está dirigido?					X		
4.¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?					X		
5.¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?				X			Las tareas estan diseñadas para utilizar las areas de los rectángulos.
6.¿ Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?				X			
7.¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?				X			
8.¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?					X		
9.¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?					X		
10.¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?					X		
11.¿El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas?					X		
12.¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares?					X		El applet es muy interesante, pues se ve intuitivamente el área bajo la curva.

Evaluación de las Tareas de la Configuración Epistémica N5							
Criterios del Diseño de Tareas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**NA**	**Observación**
1.¿ El contexto de las tareas se comprende?					X		
2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?					X		
3.¿ La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes el cual está dirigido?					X		
4.¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?					X		
5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?					X		
6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?				X			Mejorar la redacción de la pregunta 2 y 3 para que no intencione la respuesta del alumno
7.¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?					X		
8.¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?					X		
9.¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?					X		
10.¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?					X		
11. ¿El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas?					X		
12.¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares?					X		Mejorar los dos applet, para que se note el comportamiento de las sucesiones.

Evaluación de las Tareas de la Configuración Epistémica N6							
Criterios del Diseño de Tareas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**NA**	**Observación**
1.¿El contexto de las tareas se comprende?					X		
2.¿El contexto de las tareas es relevante para su resolucion?					X		
3.¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes el cual está dirigido?					X		
4.¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?					X		
5. Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?					X		
6.¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?				X			Mejorar la redacción de la pregunta 5 y 6.
7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?					X		
8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, as\'i como tambi\'en las que se rechazan?					X		
9.¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?					X		
10.¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?					X		
11. ¿El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas?					X		
12.¿ Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares?					X		

ANEXO II: ENCUESTA DE OPINIÓN ESTUDIANTES

Encuesta de Opinión Estudiantes

A continuación, se detalla las preguntas y respuestas de la Encuesta de Opinión aplicada a los profesores en formación que participaron en el desarrollo de las Tareas diseñadas. El instrumento consta de 10 preguntas cerradas y 6 preguntas abiertas, las cuales fueron respondidas por 7 estudiantes que representan el 63.6 % del curso. La encuesta fue aplicada al finalizar la intervención didáctica y se aplicó por medio de la aplicación google forms.

Encuesta de Opinión

A continuación, se presenta una breve encuesta con el fin de conocer tu opinión respecto de la metodología de enseñanza utilizada en las sesiones de estudio de la noción de límite. Es importante tener esta información, puesto que permitirá mejorar el material y la implementación de la propuesta didáctica. Recuerda que tu identidad no será solicitada ni guardada al responder la encuesta.

Agradecemos tu colaboración y honradez en tus respuestas.

Material Applets

Con respecto a los applets utilizados en las sesiones, responde las siguientes preguntas.

1. ¿La interacción con los applets te permitió dar respuesta a las actividades propuestas?

    a) Muy en desacuerdo

b) En desacuerdo

c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo

d) De acuerdo

e) Muy de acuerdo

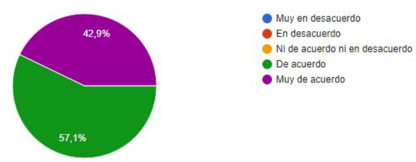


Figura 8.1: Respuestas de la pregunta 1

2. ¿Te resultó difícil interactuar con los applets?

   a) Muy en desacuerdo

   b) En desacuerdo

   c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo

   d) De acuerdo

   e) Muy de acuerdo

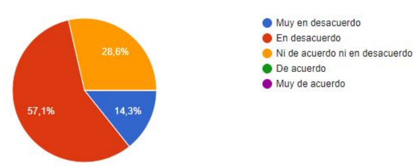


Figura 8.2: Respuestas de la pregunta 2

3. ¿Qué aspectos mejorarías respectos a los applets? Describa.

   a) Estudiante 1: “que la información que se nos da no esté tan compacta, porque dificulta la adquisición de información”

   b) Estudiante 2: “En realidad estaba bien, si es que es necesario introducir algo sería la definición de los conceptos, pero no es algo que se necesite realmente” *c*) Estudiante 3: "A mi parecer estaban bien completas. La verdad me cuesta el tema de geogebra, pero dentro que lo que vi, los applets me ayudaron bastante."

d) Estudiante 4: "mas que aspectos a mejorar es que si o si tenemos que saber o manejar e interpretar geogebra"

e) Estudiante 5: "quizás una breve explicación de las profesora de los applets, ya que algunas cosas eran poco complicadas de ver."

f) Estudiante 6: "no mejoraría nada"

g) Estudiante 7: "No le mejoraría nada ya que fueron muy claros y con colores que facilitan su comprensión."

Tareas

1. ¿El formato de los Tareas te parece adecuado, claro y legible?

    a) Muy en desacuerdo

    b) En desacuerdo

    c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo

    d) De acuerdo

    e) Muy de acuerdo

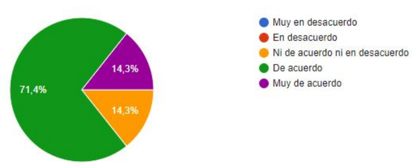


Figura 8.3: Respuestas de la pregunta 4

2. ¿La Tarea era adecuado para desarrollarla durante las clases?

    a) Muy en desacuerdo

    b) En desacuerdo

    c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo

d) De acuerdo

e) Muy de acuerdo

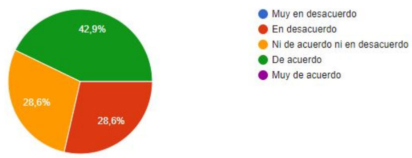


Figura 8.4: Respuestas de la pregunta 5

3. ¿ Qué aspectos mejorarías de los Tareas?

a) Estudiante 1: “no mejoraría nada”

b) Estudiante 2: “en general fueron bastante interesantes con temas variados y con una dinámica buena para trabajo en equipo”

c) Estudiante 3: “Entregarlos en Word para que sea más sencillo modificarlos (al convertir de PDF a Word se cambian muchas cosas y en especial los tildes).”

d) Estudiante 4: “Quizás el orden en el que se realizan, creo que en un momento había un taller aceptable y se pasaba a uno complicado de inmediato, o al menos ese es mi punto de vista”

e) Estudiante 5: “Algunas cosas de los talleres o algunos talleres completos no habíamos visto nunca materia respecto a ellos, entonces perdíamos mucho tiempo buscando información que quizás era básica para ir respondiendo los talleres.”

f) Estudiante 6: “Que fueran más breves. Si bien, eran contenidos que hemos visto, fue visible que no alcanzábamos a completar los talleres dentro del horario de las clases, por la razón (a mi parecer) que aún estamos aprendiendo a desarrollar o transmitir dichos contenidos aprendidos. Además, el que no alcanzaramos a resolver todo en el espacio de la clase, hacía que tuviéramos que hacerlos para la siguiente clase, y eso en lo personal me cansaba mentalmente. Pero lo demás está todo bien en mi opinión (respecto de las tareas)”

g) Estudiante 7: “Mejoraría la extensión que tienen estos, para que pudieran ser desarrollados durante las clases, que no fueran tan largos ni tan complejos, para que su realización sea rápida”

Metología de Enseñanza

1. ¿Te sentiste cómodo(a) al realizar las actividades en grupo?

    a) Muy en desacuerdo

    b) En desacuerdo

    c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo

    d) De acuerdo

    e) Muy de acuerdo

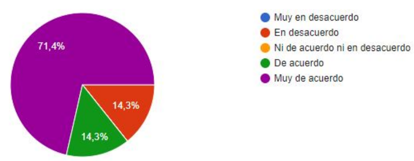


Figura 8.5: Respuestas de la pregunta 7

2. Pudiste desarrollar tu aprendizaje mediante la participación en las actividades en grupo? Argumenta tu respuesta.

    a) Estudiante 1: “si, trabajar en grupo me ayuda a entender mucho mejor las actividades ya que conozco el método que utilizan mis compañeros.”

    b) Estudiante 2: “si, en 2 talleres no pude trabajar como fue debido aún así no fue un impedimento para completarlo, existió mucha investigación sobre los temas que existen en estos y discusiones de por que elegimos las respuestas y en general llegamos a un buen consenso”

    c) Estudiante 3: “Si , mientras hablábamos con mis compañeros solía entender cada vez más sobre las preguntas y sobre la manera más completa de responder.”

    d) Estudiante 4: “Realmente sí, creo que en general con mi grupo pudimos conversar y dar distintos puntos de vista”

    e) Estudiante 5: “Durante los talleres aprendí algunas cosas, pero la mayoría no me quedaba muy claro o nada claro, ya que colocaba lo que creía y no sabía si estaba bien o no, entonces no me quedaba claro y no aprendía mucho al final, aunque luego se hiciera un pequeño resumen del taller la clase siguiente”

f) Estudiante 6: “Si, me ayudó mucho para compartir con mis compañeros y aprender cosas respecto a geogebra y contenidos que desconocía.”

g) Estudiante 7: “No, no pude desarrollar correctamente mi aprendizaje con el trabajo en grupo, por el hecho de que el grupo no era el adecuado, no lograron comprender la finalidad de estos talleres, solamente estaban concentrados en terminar y enviar el trabajo, no discutimos casi nada nuestras respuestas, con lo cual no cumplimos una parte de la finalidad de estos talleres.”

3. ¿Pudiste compartir tus argumentos e ideas con el grupo curso en el desarrollo de las Plenarias?

    a) Muy en desacuerdo

    b) En desacuerdo

    c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo

    d) De acuerdo

    e) Muy de acuerdo

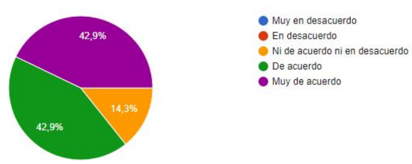


Figura 8.6: Respuestas de la pregunta 9

4. ¿Pudiste clarificar tus dudas en el Plenario sobre las actividades previamente desarrolladas?

    a) Muy en desacuerdo

    b) En desacuerdo

    c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo

d) De acuerdo

e) Muy de acuerdo

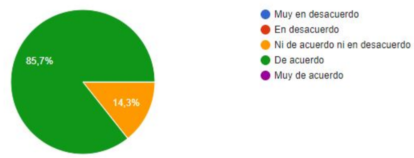


Figura 8.7: Respuestas de la pregunta 10

5. ¿Te sentiste cómodo con la metodología utilizada en la enseñanza de límites?

    a) Muy en desacuerdo

    b) En desacuerdo

    c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo

    d) De acuerdo

    e) Muy de acuerdo

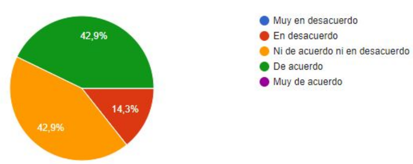


Figura 8.8: Respuestas de la pregunta 11

6. ¿Pudiste desarrollar tus argumentos, ideas y autonomía respecto al estudio de la noción de límite?

    a) Muy en desacuerdo

    b) En desacuerdo

    c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo

    d) De acuerdo

    e) Muy de acuerdo

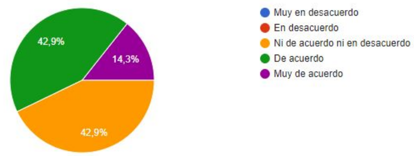


Figura 8.9: Respuestas de la pregunta 12

7. ¿Pudiste desarrollar tus aprendizajes de la noción de límite (sin tener vacíos ni dudas de éstas)?

   a) Muy en desacuerdo

   b) En desacuerdo

   c) Ni de acuerdo ni en desacuerdo

   d) De acuerdo

   e) Muy de acuerdo

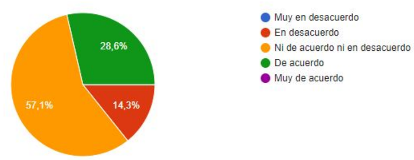


Figura 8.10: Respuestas de la pregunta 13

8. Explica con tus palabras lo que entiendes por esta afirmación: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

   a) Estudiante 1: “el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L.”

   b) Estudiante 2: “El límite de la función $f(x)$ tiende a x_0 es igua a L”

   c) Estudiante 3: “El límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es igual a L.”

   d) Estudiante 4: “El límite de la función $f(x)$ cuando x tiene a su primer término es el valor de L”

   e) Estudiante 5: “que el límite de la función x cuando x tiende a x_0 es L”

   f) Estudiante 6: “El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a xo, es igual al máximo valor que está función puede alcanzar o a la que se acerca (límite).”

g) Estudiante 7: "que la función f(x) su límite es L cuando x tiende a x_0"

9. Si tuvieras la oportunidad de recomendar esta metodología de enseñanza, ¿la recomendarías? ¿Por qué?

   a) Estudiante 1: No responde.

   b) Estudiante 2: "si, debido a que es una enseñanza en la cual se fomenta que el estudiante aprenda con trabajos en equipo, como también aprendiendo descubriendo e investigando de manera autónoma"

   c) Estudiante 3: "Si , ya que para mí fue mucho más fácil entender la materia tratando de reflexionar al respecto que viendo o leyendo materia al respecto."

   d) Estudiante 4: "Sí, por que creo que al realizar talleres constantemente uno se va adecuando a no olvidar conceptos ni ejercicios"

   e) Estudiante 5: "la recomendaría para poder reforzar contenidos ya vistos o contenidos que se verán, pero con los alumnos ya teniendo una noción básica de lo que se vería en los talleres."

   f) Estudiante 6: "Si, creo que sirve mucho para desarrollar pensamiento crítico matemático en los estudiantes."

   g) Estudiante 7: "no la recomendaría del todo, pero es una manera interesante de enseñanza, porque hace que uno como estudiante aplique todos los conocimientos que tiene sobre el tema, sin la presión de si está bueno o malo, pero esa duda de si está bueno o malo siempre está."

10. Si pudieras hacer sugerencias de mejoras sobre la metodología utilizada en la enseñanza de límite de funciones. ¿Qué sugerencias realizarías?

    a) Estudiante 1: No responde.

    b) Estudiante 2: "en un inicio el termino de epsilon y delta no quedaba muy claro y costaba encontrar una manera de correlacionarlo a la información que teníamos por lo que costó bastante"

    c) Estudiante 3: "Entregar documentos en los que podamos apoyarnos para buscar información de la materia" *d*) Estudiante 4: “Sólo el orden de realización mencionado anteriormente”

e) Estudiante 5: “Una explicación de lo básico de límites, aunque sea un repaso para recordar y luego ir un poco más profundo con la materia nueva de límites, ya que no todos recuerdan la materia al completo al igual que los conceptos de límites.”

f) Estudiante 6: “Que no sólo se explicara desde los gráficos la materia, si no, también explicar cómo es que se formó tal gráfica para conocer su comienzo y así poder deducir lo que sigue de aquella gráfica y límites. Pero lo demás está súper bien y en lo personal me sentí muy cómoda con el modo en que se llevó el taller.”

g) Estudiante 7: “no se muy bien como sugerir esto, porque mi aprendizaje sobre límites es muy bajo, pero me gustaría que fuera con hartos ejemplos, ejemplos tipo de los más fáciles a algunos con mayor grado de dificultad, que estén casi al mismo nivel que un problema de prueba, y que también hayan ejemplos de demostraciones o enseñar como demostrar límites como tal.”

ANEXO III: SEGUNDO INSTRUMENTO DE VALIDACIÓN

Evaluación de Juicio de Expertos

Carta al Investigador

Estimado Investigador, en estas breves líneas queremos agradecer de antemano el apoyo que pueda brindarnos para llevar a cabo una de las etapas más importantes en el desarrollo de nuestro trabajo de tesis doctoral titulada “Diseño de Tareas para promover los significados del objeto límite de una función en una variable”. Su participación nos ayudará a evaluar las tareas diseñadas para promover el aprendizaje de cada uno de los significados parciales de la noció de lḿite de una función en una variable detallados en el Anexo 2. Su evaluación sustentará la fiabilidad y validez del instrumento que estamos construyendo.

En el proceso de diseño del instrumento, que hemos denominado *Diseño de Tareas de los Significados Parciales de la Noción de Límite (DTSL).*

Para el diseño de las tareas sobre los significados parciales de la noción de límite hemos considerados dos criterios. El primer criterio considera que las tareas deben promover los objetos matemáticos primarios de cada configuración epistémica asociada a cada significado parcial de la noción de límite de una variable descrita en el Anexo 2 (Araya, Pino-Fan, Medrano, Castro, 2021). Para lograrlo, se incluyeron ítems que activan distintos significados (con sus respectivas configuraciones) para el objeto límite: límite como aproximación en la matemática griega (CE $N°1$); límite en la concepció de los indivisibles (CE $N°2$); la noción intuitiva de límite de Newton (CE $N°3$); La idea de los infinitesimales de Leibniz (CE $N°4$); Concepciones preformales de límite (CE $N°5$); Nociones de Límite de Weierstrass (CE $N°6$).

El segundo criterio es que las tareas diseñadas consideren los dilemas propuestos por Sullivan, Knott y Yang (2015), los que contemplan los siguientes aspectos:

a) Contexto El contexto matemático de las tareas propuestas, las cuales van desde un contexto propio de la matemática como también contextos semireales o reales permiten generar el significado pretendido en los estudiantes.

b) Lenguaje El lenguaje, la redacción y la precisión matemática de las tareas permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado.

c) Estructura La estructura se refiere al grado de apertura de las tareas, el cual se puede considerar como las respuestas y/o soluciones de una tarea, así como también de la estructura de éstas. Es decir, las tareas pueden evocar diferentes estrategias para desarrollar una o varias soluciones o por el contrario generar una sola solución.

d) Distribución Hace referencia a la selección de contenidos en función de las demandas cognitivas que generan las tareas. Un ejemplo de ello es la propuesta por Smith y Stein (2011) que establecen una jerarquía de tareas que van progresivamente desde la memorización hasta los procedimientos sin conexiones llamadas Demandas Cognitivas de Bajo Nivel, así como también tareas que van desde procedimientos con conexiones hasta haciendo matemáticas llamadas Demandas Cognitivas de Alto Nivel.

e) Niveles de Interacción Se refiere a los niveles de interacción de los participantes en la implementación de las tareas, es decir, entre los docentes y estudiantes, entre los estudiantes, y los estudiantes y las tareas.

Dentro de este criterio se considera los Criterios del Diseño de Tareas propuestos por Pochulu, Font y Rodríguez (2013), quienes contemplan una serie de preguntas las cuales se han incluido en las tablas que solicitamos responda. En este sentido requerimos su colaboración para evaluar cada una de las tareas que hemos diseñado y que podrá encontrar en el Anexo $N°1$ junto con las respuestas. Para facilitar el apoyo que nos brinda, hemos incluido tablas con las que podrá evaluar el grado de relevancia del criterio mencionado para ello deberá responder en cada ítem las siguientes opciones: **1** Muy en desacuerdo, **2** En desacuerdo, **3** Ni en acuerdo ni desacuerdo, **4** De acuerdo y **5** Muy de acuerdo. Podrá seleccionar la opción "**no aplica (NA)**" para señalar que el ítem en cuestión no considera dicho contenido. En el apartado de observaciones le pedimos que escriba todas las observaciones que tenga respecto a la ausencia de algún contenido importante o sugerencias sobre cada ítem.

Para llevar a cabo este proceso de validación hemos incluido los siguientes documentos como anexo:

1. Anexo 1: Propuestas de las tareas con sus posibles soluciones

2. Anexo 2: Artículo de investigación sobre las Configuraciones Epistémicas de los Significados de Límite de una Función en una variable. Araya, D.; Pino-Fan, L.; Medrano, I. y Castro, W. (2021). Epistemic Criteria for Designing Limit Tasks on a Real Variable Function. Bolema. 35 (69), 179-205.

EVALUACIÓN DE LAS TAREAS ASOCIADAS A LA CE N°1: "LÍMITE COMO APROXIMACIÓN EN LA MATEMÁTICA GRIEGA"

Respecto a las Tareas propuestas en la CE N°1: "Límite como aproximación en la matemática griega" solicitamos llenar las siguientes tablas, las cuales se proponen para cada una de las tareas:

Tarea N°1 de la CE N°1: "Límite como aproximación en la matemática griega"								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresar magnitudes de áreas y perímetros de figuras geométricas?							
	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo gráfico que son utilizados para modelar el comportamiento de las áreas y perímetros de las figuras geométricas involucradas?							
	3. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresan magnitudes de áreas y perímetros de figuras geométricas?							
Conceptos y/o definiciones	4. ¿Las tareas involucran la noción de "infinito potencial"?							

	5. ¿Las tareas involucran las nociones de números racionales e irracionales?							
Procedimientos	6. ¿Las tareas involucran la aplicación de fórmulas de áreas de triángulos equiláteros y cuadrados?							
	7. ¿Las tareas evocan la utilización de tabla de datos y gráficos de funciones discretas?							
Propiedades / Proposiciones	8. ¿Las tareas involucran el método de exhaución?							
Argumentos	9. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos sobre las iteraciones de las figuras geométricas?							
	10. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría euclidiana?							
Situaciones / Problemas	11. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°1?							

Respecto al Diseño de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°1 de la CE N°1: “Límite como aproximación en la matemática griega”								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							
	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?							
Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?							
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?							
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?							
Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?							

	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?							
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?							
Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							
	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°1 de la CE N°1:

Tarea N°2 de la CE N°1: "Límite como aproximación en la matemática griega"								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresar magnitudes de áreas y perímetros de figuras geométricas?							
	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo gráfico que son utilizados para modelar el comportamiento de las áreas y perímetros de las figuras geométricas involucradas?							
	3. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresan magnitudes de áreas y perímetros de figuras geométricas?							
Conceptos y/o definiciones	4. ¿Las tareas involucran la noción de "infinito potencial"?							
	5. ¿Las tareas involucran las nociones de números racionales e irracionales?							
Procedimientos	6. ¿Las tareas involucran la aplicación de fórmulas de áreas de triángulos equiláteros y cuadrados?							

	7. ¿Las tareas evocan la utilización de tabla de datos y gráficos de funciones discretas?							
Propiedades / Proposiciones	8. ¿Las tareas involucran el método de exhaución?							
Argumentos	9. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos sobre las iteraciones de las figuras geométricas?							
	10. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría euclidiana?							
Situaciones / Problemas	11. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°1?							

Respecto al Diseño de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°2 de la CE N°1: "Límite como aproximación en la matemática griega"								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							

	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?								
Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?								
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?								
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?								
Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?								
	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?								
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?								

Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							
	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°2 de la CE N°1:

EVALUACIÓN DE LAS TAREAS ASOCIADAS DE LA CE N°2: "LÍMITE EN LA CONCEPCIÓN DE LOS INDIVISIBLES"

Respecto a las Tareas propuestas en la CE N°2: "Límite desde la concepción de los indivisibles", solicitamos llenar las siguientes tablas, las cuales se proponen para cada una de las tareas:

Tarea N°3 de la CE N°2: "Límite en la concepción de los indivisibles"								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresar magnitudes de áreas de secciones transversales y volúmenes de cuerpos geométricos?							
	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría euclidiana?							
Conceptos y/o definiciones	3. ¿Las tareas involucran la noción de "indivisible" (secciones transversales)?							
	4. ¿Las tareas involucran las nociones de números racionales e irracionales?							
Procedimientos	5. ¿Las tareas evalúan procedimientos que implican el uso de los "indivisibles"?							

	6. ¿Las tareas involucran la aplicación de fórmulas de áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos geométricos?							
Propiedades / Proposiciones	7. ¿Las tareas evocan la aplicación del Principio de Cavalieri?							
Argumentos	8. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos en la obtención de los volúmenes de los cuerpos geométricos pedidos?							
	9. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría euclidiana?							
Situaciones / Problemas	10. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°2?							

Respecto al Diseño de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°3 de la CE N°2: "Límite en la concepción de los indivisibles"								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							

	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?							
Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?							
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?							
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?							
Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?							
	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?							
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?							

Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							
	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°3 de la CE N°2:

Tarea N°4 de la CE N°2: "Límite en la concepción de los indivisibles"								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresar magnitudes de áreas de secciones transversales y volúmenes de cuerpos geométricos?							

	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría euclidiana?							
Conceptos y/o definiciones	3. ¿Las tareas involucran la noción de "indivisible" (secciones transversales)?							
	4. ¿Las tareas involucran las nociones de números racionales e irracionales?							
Procedimientos	5. ¿Las tareas evalúan procedimientos que implican el uso de los "indivisibles"?							
	6. ¿Las tareas involucran la aplicación de fórmulas de áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos geométricos?							
Propiedades / Proposiciones	7. ¿Las tareas evocan la aplicación del Principio de Cavalieri?							
Argumentos	8. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos en la obtención de los volúmenes de los cuerpos geométricos pedidos?							
	9. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría euclidiana?							

Situaciones / Problemas	10. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°2?							

Respecto al Diseño de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°4 de la CE N°2: "Límite en la concepción de los indivisibles"								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							
	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?							
Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?							
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?							
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?							
Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?							

	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?							
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?							
Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							
	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°4 de la CE N°2:

Tarea N°5 de la CE N°2: “Límite en la concepción de los indivisibles”								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresar magnitudes de áreas de secciones transversales y volúmenes de cuerpos geométricos?							
	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría euclidiana?							
Conceptos y/o definiciones	3. ¿Las tareas involucran la noción de “indivisible” (secciones transversales)?							
	4. ¿Las tareas involucran las nociones de números racionales e irracionales?							
Procedimientos	5. ¿Las tareas evalúan procedimientos que implican el uso de los “indivisibles”?							
	6. ¿Las tareas involucran la aplicación de fórmulas de áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos geométricos?							
Propiedades / Proposiciones	7. ¿Las tareas evocan la aplicación del Principio de Cavalieri?							

Argumentos	8. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos en la obtención de los volúmenes de los cuerpos geométricos pedidos?							
	9. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría euclidiana?							
Situaciones / Problemas	10. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°2?							

Respecto al Diseõ de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°5 de la CE N°2: “Límite en la concepción de los indivisibles”								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							
	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?							

Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?							
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?							
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?							
Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?							
	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?							
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?							
Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							

	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°5 de la CE N°2:

EVALUACIÓN DE LAS TAREAS ASOCIADAS DE LA CE N°3: "LA NOCIÓN INTUITIVA DE LÍMITE DE NEWTON"

Respecto a las Tareas propuestas en la CE N°3: "La noción intuitiva de límite de Newton", solicitamos llenar las siguientes tablas, las cuales se proponen para cada una de las tareas:

Tarea N°6 de la CE N°3: "La noción intuitiva de límite de Newton"								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresar magnitudes de las áreas de rectángulos?							
	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría analítica (gráfica de la función, área bajo de la gráfica, rectángulos inscritos y circunscritos,etc.)?							
Conceptos y/o definiciones	3. ¿Las tareas involucran la noción de la aproximación de áreas de rectángulos inscritos y circunscritos hacia el área bajo la curva de una función?							
	4. ¿Las tareas involucran la noción de comparación de las áreas de rectángulos inscritos y circunscritos a la gráfica de la función?							

	5. ¿Las tareas involucran la noción de cantidades "evanescentes" (cantidades que tienden a cero)?							
Procedimientos	6. ¿Las tareas involucran procedimientos que implican el uso del "infinito potencial"?							
	7. ¿Las tareas involucran procedimientos aritméticos (cálculo de áreas de rectángulos, sumas de áreas, etc.)?							
	8. ¿Las tareas involucran procedimientos propios de la geometría analítica?							
Propiedades / Proposiciones	9. ¿Las tareas involucran la comparación de áreas de rectángulos inscritos y circunscritos?							
Argumentos	10. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos en la aproximación del área bajo la gráfica de la función?							
	11. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría analítica?							
Situaciones / Problemas	12. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°3?							

Respecto al Diseño de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°6 de la CE N°3: "La noción intuitiva de límite de Newton"								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							
	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?							
Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?							
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?							
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?							
Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?							

	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?							
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?							
Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							
	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°6 de la CE N°3:

EVALUACIÓN DE LAS TAREAS ASOCIADAS DE LA CE N°4 "LA IDEA DE LOS INFINITESIMALES DE LEIBNIZ"

Respecto a las Tareas propuestas en la CE N°4: "La idea de los infinitesimales de Leibniz", solicitamos llenar las siguientes tablas, las cuales se proponen para cada una de las tareas:

Tarea N°7 de la CE N°4: "La idea de los infinitesimales de Leibniz"								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para representar los infinitesimales, razón de cambio promedio, rectas, funciones, etc.?							
	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría analítica (rectas secantes y tangentes, infinitesimales, gráfica de la, etc.)?							
Conceptos y/o definiciones	3. ¿Las tareas involucran la noción de "infinitesimal"?							
	4. ¿Las tareas involucran la noción de "infinito actual"?							
	5. ¿Las tareas involucran las nociones de números racionales e irracionales?							
Procedimientos	6. ¿Las tareas involucran procedimientos que implican el uso de los "infinitesimales"?							

	7. ¿Las tareas involucran procedimientos aritméticos y algebraicos como cálculo de la razón de cambio promedio, pendientes de rectas, etc.?							
	8. ¿Las tareas involucran procedimientos propios de la geometría analítica (relación de figuras geométricas con su expresión analítica y viceversa)?							
	9. ¿Las tareas evocan procedimientos relacionado con el "infinito actual"?							
Propiedades / Proposiciones	10. ¿Las tareas involucran la aplicación de operatoria de magnitudes infinitamente pequeñas?							
Argumentos	11. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos en la aproximación de la recta secante a la recta tangente?							
	12. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría analítica?							
	13. ¿Las tareas evocan argumentos relacionados con el "infinito actual"?							

Situaciones / Problemas	14. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°4?							

Respecto al Diseño de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°7 de la CE N°4: "La idea de los infinitesimales de Leibniz"								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							
	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?							
Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?							
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?							
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?							

Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?							
	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?							
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?							
Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							
	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°7 de la CE N°4:

EVALUACIÓN DE LAS TAREAS ASOCIADAS DE LA CE N°5: "CONCEPCIONES PREFORMALES DE LÍMITE"

Respecto a las Tareas propuestas en la CE N°5: "Concepciones preformales de límite", solicitamos llenar las siguientes tablas, las cuales se proponen para cada una de las tareas:

Tarea N°8 de la CE N°5: "Concepciones preformales de límite"								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresar notaciones y símbolos relacionados a las sucesiones, etc.?							
	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría analítica (gráficas de sucesiones crecientes, decrecientes, alternantes, etc.)?							
Conceptos y/o definiciones	3. ¿Las tareas involucran la noción de sucesión?							
	4. ¿Las tareas involucran la noción de "infinito potencial"?							
	5. ¿Las tareas involucran la noción de "infinito actual"?							
	6. ¿Las tareas involucran la noción de límite "que no se alcanza y se puede aproximar tanto como se quiera"?							

Procedimientos	7. ¿Las tareas involucran procedimientos aritméticos y algebraicos para determinar términos de la sucesión, distancia (valor absoluto), etc.?							
	8. ¿Las tareas involucran procedimientos propios de la geometría analítica (visualización de la gráfica de las sucesiones, intervalos de números, etc.)?							
Propiedades / Proposiciones	9. ¿Las tareas involucran propiedades de distancia (valor absoluto)?							
	10. ¿Las tareas involucran propiedades de convergencia de sucesiones?							
Argumentos	11. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos sobre el comportamiento de las sucesiones?							
	12. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría analítica?							
	13. ¿Las tareas evocan argumentos relacionados con el “infinito actual”?							

Situaciones / Problemas	14. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°5?							

Respecto al Diseño de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°8 de la CE N°5: “Concepciones preformales de límite”								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							
	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?							
Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?							
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?							
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?							

Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?							
	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?							
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?							
Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							
	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°8 de la CE N°5:

Tarea N°9 de la CE N°5: "Concepciones preformales de límite"								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresar notaciones y símbolos relacionados a las sucesiones, etc.?							
	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría analítica (gráficas de sucesiones crecientes, decrecientes, alternantes, etc.)?							
Conceptos y/o definiciones	3. ¿Las tareas involucran la noción de sucesión?							
	4. ¿Las tareas involucran la noción de "infinito potencial"?							
	5. ¿Las tareas involucran la noción de "infinito actual"?							
	6. ¿Las tareas involucran la noción de límite "que no se alcanza y se puede aproximar tanto como se quiera"?							

Procedimientos	7. ¿Las tareas involucran procedimientos aritméticos y algebraicos para determinar términos de la sucesión, distancia (valor absoluto), etc.?							
	8. ¿Las tareas involucran procedimientos propios de la geometría analítica (visualización de la gráfica de las sucesiones, intervalos de números, etc.)?							
Propiedades / Proposiciones	9. ¿Las tareas involucran propiedades de distancia (valor absoluto)?							
	10. ¿Las tareas involucran propiedades de convergencia de sucesiones?							
Argumentos	11. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos sobre el comportamiento de las sucesiones?							
	12. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría analítica?							
	13. ¿Las tareas evocan argumentos relacionados con el "infinito actual"?							

Situaciones / Problemas	14. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°5?							

Respecto al Diseño de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°9 de la CE N°5: "Concepciones preformales de límite"								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							
	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?							
Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?							
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?							
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?							

Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?							
	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?							
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?							
Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							
	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°9 de la CE N°5:

Tarea N°10 de la CE N°5: “Concepciones preformales de límite”								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresar notaciones y símbolos relacionados a las sucesiones, etc.?							
	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría analítica (gráficas de sucesiones crecientes, decrecientes, alternantes, etc.)?							
Conceptos y/o definiciones	3. ¿Las tareas involucran la noción de sucesión?							
	4. ¿Las tareas involucran la noción de “infinito potencial”?							
	5. ¿Las tareas involucran la noción de “infinito actual”?							
	6. ¿Las tareas involucran la noción de límite “que no se alcanza y se puede aproximar tanto como se quiera”?							

Procedimientos	7. ¿Las tareas involucran procedimientos aritméticos y algebraicos para determinar términos de la sucesión, distancia (valor absoluto), etc.?							
	8. ¿Las tareas involucran procedimientos propios de la geometría analítica (visualización de la gráfica de las sucesiones, intervalos de números, etc.)?							
Propiedades / Proposiciones	9. ¿Las tareas involucran propiedades de distancia (valor absoluto)?							
	10. ¿Las tareas involucran propiedades de convergencia de sucesiones?							
Argumentos	11. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos sobre el comportamiento de las sucesiones?							
	12. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría analítica?							
	13. ¿Las tareas evocan argumentos relacionados con el “infinito actual”?							

Situaciones / Problemas	14. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°5?							

Respecto al Diseño de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°10 de la CE N°5: "Concepciones preformales de límite"								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							
	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?							
Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?							
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?							
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?							

Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?							
	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?							
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?							
Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							
	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°10 de la CE N°5:

EVALUACIÓN DE LAS TAREAS ASOCIADAS DE LA CE N°6: “NOCIÓN DE LÍMITE DE WEIERSTRASS”

Respecto a las Tareas propuestas en la CE N°6: “Nociones de LÍmite de Weierstrass”, solicitamos llenar las siguientes tablas, las cuales se proponen para cada una de las tareas:

Tarea N°11 de la CE N°6: “Nociones de Límite de Weierstrass”								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresar notaciones, símbolos relacionados a aproximaciones de una función a un número, distancia entre números, etc.?							
	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría analítica (gráficas de funciones, intervalos de números, rectas, etc.)?							
Conceptos y/o definiciones	3. ¿Las tareas involucran la noción de función?							
	4. ¿Las tareas involucran la noción de completitud de los números reales?							
	5. ¿Las tareas involucran la noción de “infinito actual”?							

	6. ¿Las tareas involucran la noción de que el conjunto de números reales son un cuerpo ordenado?							
	7. ¿Las tareas involucran la noción de límite ε, δ (noción de Weierstrass)?							
Procedimientos	8. ¿Las tareas involucran procedimientos aritméticos para determinar los valores de la función cercanos a un punto?							
	9. ¿Las tareas involucran procedimientos propios de la geometría analítica (visualización de los intervalos, gráfica de funciones, etc.)?							
	10. ¿Las tareas involucran procedimientos relacionados al valor absoluto?							
Propiedades / Proposiciones	11. ¿Las tareas involucran propiedades de distancia (valor absoluto) entre números?							
	12. ¿Las tareas involucran propiedades de existencia de límite de una función en número?							
Argumentos	13. ¿Las tareas evocan argumentos aritméticos y algebraicos?							

	14. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos para determinar los roles de ε y δ?							
	15. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos para determinar la existencia del límite de una función en un número?							
	16. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría analítica?							
	17. ¿Las tareas evocan argumentos relacionados con la completitud de los números reales?							
Situaciones / Problemas	18. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°6?							

Respecto al Diseño de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°11 de la CE N°6: "Nociones de Límite de Weierstrass"								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							

	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?							
Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?							
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?							
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?							
Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?							
	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?							
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?							

Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							
	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°11 de la CE N°6:

Tarea N°12 de la CE N°6: "Nociones de Límite de Weierstrass"								
Objetos Matemáticos Primarios		1	2	3	4	5	NA	Observación
Elementos Lingüistícos	1. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos algebraicos que se utilizan para expresar notaciones, símbolos relacionados a aproximaciones de una función a un número, distancia entre números, etc.?							

	2. ¿Está de acuerdo que las tareas evocan elementos del tipo geométrico que son propios de la geometría analítica (gráficas de funciones, intervalos de números, rectas, etc.)?							
Conceptos y/o definiciones	3. ¿Las tareas involucran la noción de función?							
	4. ¿Las tareas involucran la noción de completitud de los números reales?							
	5. ¿Las tareas involucran la noción de "infinito actual"?							
	6. ¿Las tareas involucran la noción de que el conjunto de números reales son un cuerpo ordenado?							
	7. ¿Las tareas involucran la noción de límite ε, δ (noción de Weierstrass)?							
Procedimientos	8. ¿Las tareas involucran procedimientos aritméticos para determinar los valores de la función cercanos a un punto?							
	9. ¿Las tareas involucran procedimientos propios de la geometría analítica (visualización de los intervalos, gráfica de funciones, etc.)?							

	10. ¿Las tareas involucran procedimientos relacionados al valor absoluto?							
Propiedades / Proposiciones	11. ¿Las tareas involucran propiedades de distancia (valor absoluto) entre números?							
	12. ¿Las tareas involucran propiedades de existencia de límite de una función en número?							
Argumentos	13. ¿Las tareas evocan argumentos aritméticos y algebraicos?							
	14. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos para determinar los roles de ε y δ?							
	15. ¿Las tareas evocan argumentos deductivos para determinar la existencia del límite de una función en un número?							
	16. ¿Las tareas evocan argumentos propios de la geometría analítica?							
	17. ¿Las tareas evocan argumentos relacionados con la completitud de los números reales?							

Situaciones / Problemas	18. ¿Está de acuerdo que las tareas propuestas están evaluando el significado de límite de la CE N°6?							

Respecto al Diseño de las Tareas, solicitamos responder las siguientes preguntas:

Tarea N°12 de la CE N°6: "Nociones de Límite de Weierstrass"								
Criterios del Diseño de Tareas		1	2	3	4	5	NA	Observación
Contexto	1. ¿El contexto de las tareas se comprende?							
	2. ¿El contexto de las tareas es relevante para su resolución?							
Lenguaje	3. ¿La redacción de las tareas son entendibles para el nivel de estudiantes al cual está dirigido?							
	4. ¿La redacción de las tareas poseen precisión matemática que permiten a los estudiantes desarrollar el aprendizaje deseado?							
Estructura	5. ¿Las tareas diseñadas no son cerradas, es decir, admiten más de un camino posible de resolución?							
	6. ¿Las tareas no brindan sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.?							
	7. ¿Las tareas no se encuentran en extremo pautada?							

Distribución	8. ¿Las tareas requieren justificar las elecciones que realizan los alumnos, así como también las que se rechazan?							
	9. ¿Los niveles de dificultad de las tareas propuestas son adecuados para los estudiantes?							
	10. ¿Las tareas propuestas evitan dar información que asegure existencia y/o unicidad de la(s) solución(es) de ésta?							
Niveles de Interacción	11. El uso de los nuevos recursos son necesarios para resolver las tareas? (Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles de resolver.)							
	12. ¿Lo solicitado en las tareas es algo matemático y no referido al uso de softwares? (Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos).							

Observaciones Complementarias sobre la Tarea N°12 de la CE N°6:

¿Considera que el cuestionario debería incluir otras tareas y cuestiones para completar y mejorar la validez? de ser así, ¿podría proponer o describir el problema o tipo de problemas que considera se deberían incorporar?

AGRADECEMOS MUCHO SU COLABORACIÓN Y TIEMPO

ATENTAMENTE EQUIPO INVESTIGADOR

Dr. Luis Pino Fan - Dra.(c) Daniela Araya Bastias