UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

SIGNIFICADOS DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL PROMOVIDOS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DE CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA EN CHILE

POR

ISMAEL ANDRÉS ARAYA NAVEAS

Tesis presentada para optar al grado académico de
MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Director: Dr. Jaime Israel García García

Osorno, Sur de Chile. Mayo de 2022

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

SIGNIFICADOS DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL PROMOVIDOS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DE CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA EN CHILE

Tesis de Magíster presentada por **ISMAEL ANDRÉS ARAYA NAVEAS** dentro del programa de Magíster en Educación Matemática para aspirar al grado de Magíster en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos, dirigida por el Dr. Jaime Israel García García, académico de la Universidad de Los Lagos.

Ismael Andrés Araya Naveas
Tesista

Dr. Jaime Israel García García
Director

Dedicado a Gary y a Mica

AGRADECIMIENTOS

A mis padres y el resto de mi familia, por su apoyo incondicional durante todo este tiempo.

A mi compañera de vida, Camila, por estar a mi lado siempre que lo necesité.

A mi director de tesis, el Dr. Jaime García García, por toda la paciencia y dedicación durante el desarrollo de este proyecto.

Al cuerpo académico de los Posgrados en Educación Matemática, por todas sus enseñanzas y consejos.

A mis compañeros del Magíster en Educación Matemática, por su apoyo durante las clases y los trabajos realizados.

Al programa de Magíster en Educación Matemática de Universidad de Los Lagos, por darme la oportunidad de crecer personal y profesionalmente.

Esta investigación contó con el apoyo financiero de la Universidad de Los Lagos, por medio de la beca excelencia académica rebaja del 50% de financiamiento del arancel del programa de Magíster en Educación Matemática.

Esta Tesis de Magíster ha sido desarrollada al seno del Grupo de Investigación sobre Didáctica de la Matemática (GIDMAT-ULAGOS) del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, se inscribe en la línea de investigación Didáctica de los Diversos Marcos Matemáticos, y ha sido desarrollada en el marco del Proyecto de Investigación Universidad de Los Lagos Regular R22/19, financiado por la Dirección de Investigación de la Universidad de Los Lagos.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ABREVIATURAS

EHE	: Estudio histórico-epistemológico
EOS	: Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos
LGE	: Ley General de Educación
MINEDUC	: Ministerio de Educación de Chile
OA	: Objetivo de Aprendizaje

RESUMEN

En la actualidad, las bases curriculares de matemáticas en Chile instauran el estudio de la distribución binomial en el nivel de cuarto año medio, influenciada su enseñanza y aprendizaje en la sala de clase por el Programa de Estudio, el Texto del Estudiante, el Cuaderno de Actividades y la Guía Didáctica del Docente. El propósito del presente estudio consiste en valorar la representatividad de los significados de la distribución binomial promovidos por el currículo chileno de cuarto año medio, haciendo uso de algunas nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) y tomando como referente su significado holístico propuesto en una investigación previa. Para ello, se analizaron los documentos oficiales entregados por el Ministerio de Educación: Programa de Estudio y Material Didáctico (compuesto por el Texto del Estudiante, el Cuaderno de Actividades y la Guía Didáctica del Docente) de dicho grado escolar. En concreto, se identificaron los objetos matemáticos primarios de los tres significados parciales de la binomial presentes en cada uno de los documentos, que posteriormente fueron comparados y contrastados con aquellos pertenecientes al significado referencial, permitiendo así su valoración. Como principales resultados, se evidencia que los Significados Parciales 1 y 2 se valoran con una representatividad media-alta, mientras que el Significado Parcial 3, con una representatividad alta; en general, considerando los tres significados parciales, su valoración es alta. Además, este estudio permitió identificar la ausencia de algunos objetos matemáticos primarios de los tres significados parciales de la binomial en los documentos analizados. Esto podría ser de utilidad para los profesores de matemática de cuarto año medio, o aquellos investigadores interesados en el estudio de esta distribución, que requieran diseñar tareas, actividades o secuencias didácticas, que incluyan o promuevan el uso de todos los elementos del significado de la binomial para el desarrollo de su comprensión en el estudiantado.

Palabras clave: significados, distribución binomial, libros de texto, programa de estudio, Enfoque Ontosemiótico.

ABSTRACT

Currently, the Chilean mathematics curricula establish the study of the binomial distribution at the twelfth grade (last year of high school), its teaching and learning in the classroom being influenced by the Study Program, the Student's Text, the Activities Notebook and the Teacher's Didactic Guide. The purpose of the present study is to assess the representativeness of the meanings of the binomial distribution promoted by the Chilean curriculum on this grade, making use of some theoretical notions of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA) and taking as a reference its holistic meaning proposed in a previous research. For this purpose, the official documents delivered by the Ministry of Education were analyzed: Study Program and Didactic Material (composed of the Student's Text, the Activities Notebook and the Teacher's Didactic Guide) of twelfth grade. Specifically, the primary mathematical objects of the three partial meanings of the binomial distribution present in each of the documents were identified, which were subsequently compared and contrasted with those belonging to the referential meaning, thus allowing their evaluation. As main results, it is evident that Partial Meanings 1 and 2 are valued with a medium-high representativeness, while Partial Meaning 3, with a high representativeness; in general, considering the three partial meanings, their valuation is high. In addition, this study made it possible to identify the absence of some primary mathematical objects of the three partial meanings of the binomial distribution in the analyzed documents. This could be useful for mathematics teachers of this grade, or those researchers interested in the study of this distribution, who need to design tasks, activities or didactic sequences that include or promote the use of all the elements of the meaning of the binomial distribution for the development of its understanding in the students.

Keywords: meanings, binomial distribution, textbooks, curriculum, Ontosemiotic Approach.

INTRODUCCIÓN

La investigación en Educación Estadística y Probabilística ha gozado de un gran crecimiento en las últimas décadas, alcanzando mayor importancia dentro de la Didáctica de la Matemática; esto se ve reflejado en el alto número de publicaciones, la realización congresos especializados y el incremento de la comunidad investigativa que se dedica a estudiar en esta área.

De acuerdo con Burrill y Biehler (2011), dos de las ideas estadísticas fundamentales que debería manejar un egresado de educación media (Salcedo, 2019) son la distribución y los modelos de probabilidad, las cuales cuentan con múltiples aristas para trabajar en los diferentes niveles educativos; tales como, los enfoques de la probabilidad, o bien, las distribuciones de probabilidad, tanto para variables continuas como discretas, donde destacan la distribución normal y binomial, respectivamente.

La distribución binomial es considerada como una de las distribuciones con gran relevancia en el campo de la probabilidad, ya que permite modelar fenómenos o situaciones aleatorias de diversas ciencias o áreas del conocimiento; cuya expresión matemática, en conjunto con su media (valor esperado), desviación típica y varianza, es una herramienta útil para calcular probabilidades y analizar dichas situaciones. Sin embargo, algunos estudios han detectado dificultades en la comprensión de este objeto matemático-probabilístico, tanto por estudiantes como por profesores, lo cual resulta preocupante dada la importancia que se le atribuye.

Determinar cuáles son los orígenes de estas dificultades podría ser considerada como una tarea difícil; por ejemplo, en las aulas de clase existen diversos factores (tipo de enseñanza, tipo de establecimiento, tipo de actividades, motivación de los estudiantes, entre otros) que influyen en esta problemática. No obstante, un elemento en común que se tiene en la educación formal es el libro de texto, así como los planes y programas de estudio propuestos por el ente educativo de cada país. En el caso de Chile, el Ministerio de Educación (MINEDUC) entrega gratuitamente el Texto del Estudiante y el Cuaderno de Actividades a gran parte de los alumnos, así como el Programa de Estudio y la Guía Didáctica del Docente a los profesores.

Por este motivo, consideramos prudente realizar un análisis crítico de los contenidos relacionados con la distribución binomial presentes en estos documentos; específicamente, un análisis de los significados de esta distribución que se promueven en el Programa de Estudio, Texto del Estudiante, Cuaderno de Actividades y Guía Didáctica del Docente de cuarto año medio, con el propósito de valorar su representatividad en el currículo chileno de dicho grado, en relación con su significado referencial.

El Capítulo 1 está enfocado en desarrollar el área problemática, así como el marco teórico que aporta las herramientas necesarias para realizar a la investigación. Además, se introduce el significado holístico de la binomial, surgido como resultado de un estudio histórico-epistemológico. Finalmente, se presenta la pregunta de investigación que guio el desarrollo del estudio y los objetivos que permiten dar respuesta a tal pregunta.

En el Capítulo 2 se presentan los antecedentes o investigaciones relacionadas tanto con la distribución binomial, como con el análisis de significados de otros objetos matemáticos presentes en libros de texto de diversos países y contextos educativos.

En el Capítulo 3 se entregan las herramientas metodológicas que se utilizaron para llevar a cabo el análisis, así como un panorama general de la estructura del currículo chileno de enseñanza media y las fases del estudio que permitieron cumplir con los objetivos planteados en el Capítulo 1.

El Capítulo 4 corresponde a los resultados obtenidos al efectuar el análisis de los documentos. Inicialmente, se presenta una visión general de la presencia de los elementos de los tres significados parciales de la binomial en el currículo chileno; posteriormente, se desarrolla cada una de las fases del estudio para entregar una valoración de la representatividad de los significados.

Finalmente, en el Capítulo 5 se resumen las conclusiones obtenidas a partir de los resultados, así como las principales aportaciones del estudio, sus limitaciones y líneas de investigación futuras.

Cabe señalar que este estudio se enmarca dentro la línea investigativa relacionada con la Didáctica de la Probabilidad y Estadística, y busca contribuir al desarrollo de esta área, así como al análisis de libros de texto; esto apoyado por las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

1. ÁREA PROBLEMÁTICA Y MARCO TEÓRICO

1.1 Introducción

En este capítulo se presenta el área problemática de nuestra investigación, abordando la importancia de la distribución binomial y el análisis de libros de texto en el campo de la didáctica de la matemática. Además, se introducen algunas herramientas de análisis del modelo teórico denominado Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, y se describe el significado holístico de la binomial, que será tomado como referente en esta investigación. Finalmente, se especifica la pregunta que dio origen y guía esta investigación, así como los objetivos, general y específicos, que permiten dar respuesta a dicha pregunta.

1.2 Área problemática

1.2.1 La distribución binomial y su importancia

El comportamiento de una variable aleatoria, tanto discreta como continua, puede ser descrito a través de una distribución de probabilidad. Por ello, de acuerdo con el tipo de variable, existen diversas distribuciones de probabilidad; entre ellas, podemos destacar la distribución normal como la más conocida y una de las más importantes distribuciones de probabilidad para una variable aleatoria continua (Sánchez et al., 2014). Si hablamos de distribuciones de probabilidad para variables discretas, muchos autores se refieren a la distribución binomial como una de las más importantes o, directamente, como la más importante (Landín y Sánchez, 2010; Mayén y Salazar, 2014; García-García et al., 2018). Sin embargo, a pesar de la relevancia que se le atribuye y su presencia en los programas de estudio de Educación Media de diversos países (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015; Ministerio de Educación [MINEDUC], 2019; Dirección General del Bachillerato, 2019; entre otros), García-García et al. (2014) indican que son escasos los trabajos referidos a ella en el campo de la investigación en Didáctica de la Matemática. En lo que sigue, indagaremos acerca de la binomial y los aspectos que, consideramos, le dan el estatus de una de las distribuciones de probabilidad más importantes para una variable aleatoria discreta.

Una situación binomial corresponde a un experimento aleatorio en el cual se obtiene uno de dos resultados posibles. Por ejemplo, al lanzar una moneda se puede obtener cara o sello; al fabricar cierto producto, este puede estar defectuoso o no; al disparar a un objetivo, se puede acertar o fallar; al rendir un examen, es posible aprobar o reprobar; etc. En Moore (2000, p. 359) se establece que una situación binomial posee las siguientes características:

1. Tenemos un determinado número n de observaciones.
2. Las n observaciones son todas independientes. Es decir, saber el resultado de una observación no te indica nada sobre las restantes observaciones.
3. Cada observación tiene dos resultados posibles, que por conveniencia llamaremos "éxito" y "fracaso".
4. La probabilidad de éxito, llamada p, es igual en todas las observaciones.

En las situaciones binomiales es posible establecer un modelo de probabilidad para el recuento de éxitos. En el ejemplo de fabricar n productos, cada producto puede estar defectuoso o no defectuoso. Conocer el resultado de un producto no nos dice nada acerca de los otros productos, por ello, los n productos son independientes. Si llamamos "éxito" a los defectuosos, la probabilidad p de obtener defectuoso se mantiene constante si no cambiamos las condiciones de fabricación o el proceso de manufacturación. El recuento del número de defectuosos es una variable aleatoria X.

Ahora bien, al cumplirse las cuatro condiciones señaladas anteriormente, podemos decir que X tiene una distribución binomial de probabilidad, con parámetros n y p. Esta situación a menudo se expresa simbólicamente como $X \to Binomial(n,p)$ o, abreviadamente, como $X \to B(n,p)$. Finalmente, si X tiene una distribución binomial con n observaciones y con una probabilidad de éxito p en cada observación, los posibles valores de X son $0, 1, 2, \ldots, n$, y si k es uno de estos valores, la probabilidad de obtener k éxitos está dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{1-k}$$

Adicionalmente, la media μ y la desviación típica σ de X se calculan, respectivamente, mediante las expresiones:

$$\mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

La distribución binomial, como objeto probabilístico-matemático, ocupa un lugar importante dentro de los contenidos de estocástica; esto se ve reflejado por su presencia en prácticamente cualquier curso introductorio de Probabilidad y Estadística (Landín y Sánchez, 2010; Landín, 2013; Mayén et al., 2013; Mayén y Salazar, 2014). En Chile, la distribución binomial, junto con la normal, se encuentra presente dentro de los Objetivos de Aprendizaje de cuarto año medio para Formación General (MINEDUC, 2019).

Existe una gran variedad de conceptos matemáticos-probabilísticos involucrados en el estudio de la binomial, ya sea como requerimiento previo para lograr su comprensión o incluidos directamente en su aplicación. En Landín y Sánchez (2010), García-García et al. (2014) y García-García (2017) se menciona la existencia de un sistema o red conceptual que compone a la binomial, es decir, un conjunto de conceptos asociados que constituyen su estudio, entre ellos, se indican algunos como probabilidad e independencia estocástica. Sánchez y Carrasco (2018) señalan la complejidad de realizar estudios acerca de la distribución binomial, precisamente porque su constitución conceptual involucra nociones interconectadas entre sí, que de manera independiente son complicadas de abordar. Algunos de los conceptos que forman parte de esta red conceptual son los siguientes: aleatoriedad, espacio muestral, experimento aleatorio, variable aleatoria, distribución de probabilidad, factorial de un número, combinación, combinatoria, parámetro, experimento Bernoulli, esperanza matemática, función de probabilidad, Ley de los Grandes Números, noción de probabilidad, en sus enfoques clásico y frecuencial (García-García et al., 2014; Vergara y Parraguez, 2016; Cid et al., 2017; Silvestre et al., 2017).

Sumado a lo anterior, parte de la importancia de la distribución binomial radica en su extenso campo de aplicación en diferentes ciencias o áreas del conocimiento, al ser utilizada frecuentemente como herramienta de modelación, además de involucrar una gran cantidad de problemas interesantes (García-García et al., 2014; Cid et al., 2017; Sánchez y Carrasco, 2018; García-García et al., 2020). En Wackerly et al., (2008) se refuerza esta idea, al mencionar que la distribución de probabilidad binomial tiene aplicaciones en, por ejemplo, la probabilidad de encontrar defectos en controles de calidad industrial, en la preferencia de los consumidores con respecto a un determinado producto, en la aprobación o rechazo hacia un candidato político y en diferentes situaciones físicas. Además, en algunos libros que tratan sobre estadística y probabilidad aplicada, mencionan usos de la binomial en situaciones de negocio y economía (Webster, 2001; Lind et al., 2012) o en ciencias de la salud (Moncho, 2015), entre otras.

Además de lo anterior, podemos mencionar algunos tipos de problemas binomiales que se han identificado en la revisión de literatura, tomando como referencia instrumentos utilizados en estudios que abordan este objeto probabilístico-matemático. Por ejemplo, en Landín y Sánchez (2010) y Mayén y Salazar (2014) se utilizan problemas sobre lanzamiento de monedas y sobre una situación deportiva de tiro al blanco; de manera similar, García-García et al. (2014) presentan una actividad llamada "¡A la suerte!" que consiste en lanzar dos monedas, cuyo resultado determina qué programa de televisión vería una familia cada noche; Zamorano y Muñoz (2016) utilizan dos problemas, uno en un contexto de apuestas con respecto a los resultados en un videojuego, y otro situado en un contexto deportivo, específicamente en baloncesto; en el cuestionario utilizado por García-García et al. (2020) se encuentra un problema titulado "¡Refresco gratis!", que consiste en calcular la probabilidad de obtener un "vale otro" al destapar una cierta cantidad de refrescos. Estos ejemplos dan cuenta de algunos problemas y contextos en los que hay detrás un fenómeno aleatorio de tipo binomial, es decir, en donde se utiliza la distribución binomial como herramienta de modelación, tanto en un ámbito personal (lanzamiento de monedas, ¡A la suerte!, apuestas en un videojuego y ¡Refresco gratis!) como en un ámbito deportivo (tiro en el blanco y encestar en baloncesto).

Otro aspecto que le da relevancia a la distribución binomial dentro de la estadística y probabilidad es su relación de convergencia con la distribución normal (Alvarado y Batanero, 2007; García-García y Sánchez, 2015; Sánchez y Carrasco, 2018; García-García et al., 2020). Esta relación es útil cuando el número de repeticiones aumenta, debido a que la fórmula binomial se hace cada vez más pesada y, en estos casos, la distribución se asemeja cada vez más a una normal. Consiste en lo siguiente: si $X \to B(n,p)$, cuando n es grande, la distribución X se aproxima a una distribución normal con parámetros $N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ (Moore, 2000). En esta línea, Alvarado y Batanero (2007) presentan un estudio donde analizan la comprensión teórica y práctica de la aproximación de la distribución normal a la binomial por parte de estudiantes de ingeniería. El interés en esta problemática radica en la gran cantidad de situaciones que es posible modelar con una distribución binomial donde el parámetro n toma valores grandes; además, estos autores mencionan que una posible dificultad en su comprensión se encuentra en el hecho de aceptar que una distribución discreta pueda aproximarse a una continua.

Por todo lo mencionado anteriormente, consideramos que la importancia atribuida a la distribución binomial es apropiada y aunque en Chile se presenta formalmente dentro de los Objetivos de Aprendizaje de cuarto año medio para Formación General, sí reconocemos que muchos de los conceptos necesarios para su correcta comprensión se abordan en los niveles anteriores, y de alguna manera estos convergen en el estudio de esta distribución. Concordamos con Cid et al. (2017), quienes argumentan que se justifica su presencia en el currículo chileno por la riqueza del sistema de conceptos relacionados, la gran cantidad de situaciones binomiales que aparecen en diversos contextos y su utilidad como herramienta de modelación.

1.2.2 La importancia del libro de texto y su análisis

Diversos autores (que mencionaremos en detalle a continuación) reconocen la importancia que tiene el libro de texto como herramienta didáctica; siendo este, muy probablemente, el recurso didáctico más utilizado y con mayor relevancia dentro de las aulas de clase (Salcedo et al., 2018). Gómez (2011) define, de manera general, el libro de texto como "una publicación especializada, reconocible por su contenido y porque está rotulado claramente indicando la materia que trata y, a menudo, indicando a quién va dirigido" (p. 51). Este autor menciona también el concepto de manuales escolares para referirse a aquellos libros de texto diseñados para ser utilizados en las escuelas y que cuentan con un diseño editorial y una estructura de organización, que podría ser, por ejemplo, mediante lecciones, temas, unidades y actividades. En nuestro trabajo, consideraremos como sinónimos el concepto de libro de texto y el de manual escolar, siendo el primero aquel que utilizaremos con mayor frecuencia.

La importancia del libro de texto reside en diferentes aspectos, siendo un aporte para el profesor y el estudiante debido a que, al ser un recurso tan utilizado, tiene una gran influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Gea et al., 2013); además, su uso puede ayudar a los profesores a favorecer un aprendizaje adecuado en los estudiantes (Ortiz et al., 2001). Adicionalmente, Cordero y Flores (2007) indican que el libro de texto regula prácticamente todas las acciones de enseñanza y aprendizaje, o al menos tiene gran influencia en ellas, y que, por tanto, juega un rol importante en el discurso matemático escolar. A pesar de que no compartimos totalmente lo señalado por ellos, ya que consideramos que no necesariamente el libro de texto normará todas las acciones del proceso de enseñanza y aprendizaje, sí destacamos sus palabras, puesto que es una muestra de la gran relevancia que algunos autores atribuyen a este recurso didáctico.

Glasnović (2014), tras realizar una revisión exhaustiva de la literatura, enumera cinco motivos por los cuales es importante realizar investigación acerca de los libros de texto:

> a) los libros de texto son artefactos y medios tangibles; b) los libros de texto contienen texto en una medida significativa; c) los libros de texto son ampliamente utilizados por estudiantes y profesores; d) los libros de texto están profundamente integrados en el plan de estudios; e) los libros de texto reflejan tradiciones culturales y educativas. (Traducción propia de Glasnović, 2014, p. 252)

Desde nuestra perspectiva, consideramos que, sobre todo los puntos c), d) y e), otorgan una gran relevancia al libro de texto como recurso didáctico, por lo que, en los siguientes párrafos, intentaremos complementar las ideas de Glasnović.

De acuerdo con Ortiz (2002), el libro de texto corresponde a un segundo nivel de transposición didáctica (Chevallard, 1991), siendo el primer nivel los currículos y programas de estudio oficiales. Escolano (2009) menciona que los libros de texto son soportes del currículo, utilizados como un vehículo para el conocimiento que desean transmitir las instituciones educativas. En Chile, los libros de texto son elaborados por diferentes editoriales, las cuales realizan una interpretación de los planes y programas establecidos por el MINEDUC, para diseñar y organizar sus contenidos y actividades a través de una estructura coherente.

El amplio uso que se da a los libros de texto, por parte de estudiantes y profesores, es algo que se ha mencionado por múltiples autores (Ortiz, 2002; Escolano, 2009; Valverde, 2017; entre otros). Esta situación podría explicarse a través de diversos motivos, por ejemplo, que dentro de los libros de texto hay una gran cantidad de actividades y ejemplos que facilitan la comprensión de los objetivos curriculares, además de presentar los contenidos de manera ordenada y secuenciada, y ayudar en la planificación de las clases (Ortiz, 2002). En el caso de Chile, el MINEDUC otorga de manera gratuita libros de texto de cada asignatura a todos los niveles educativos de educación parvularia, básica y media de establecimientos municipales y particulares subvencionados. Por tanto, estos libros de texto tienen presencia a lo largo Chile, llegando a gran parte de los estudiantes y profesores, lo cual promueve su uso dentro de las salas de clase; sin embargo, esto depende de la postura y decisión de cada docente o institución educativa.

Una de las características que debería tener el libro de texto de matemáticas es que este acerque dicha ciencia formal a los estudiantes y la relacione con su realidad. En esta línea, Escolano (2009) sostiene que los libros de texto son una representación del mundo y del entorno cultural donde se desarrollan. Adicionalmente, Picado y Rico (2012) complementan esta idea, al indicar que los libros de texto están vinculados directamente con intereses sociales, políticos, culturales, económicos y educativos; además de facilitar la educación estandarizada y aumentar su cobertura.

Luego de realizar una breve revisión de la literatura, podemos afirmar que el libro de texto posee una gran importancia en la Didáctica de la Matemática, especialmente dentro de las aulas de clase, al ser el recurso didáctico más utilizado y el más importante para profesores y estudiantes. Por estos motivos, consideramos que es un objeto de estudio que debe estar en permanente revisión y ser sometido constantemente a análisis crítico por parte de sus usuarios.

Con respecto al análisis de libros de texto, Alvarado y Segura (2012) valoran este proceso, ya que provee información valiosa a los profesores (por ejemplo, para confeccionar instrumentos de evaluación), proporciona ideas para mejorar la labor docente y ayuda a detectar dificultades que podrían presentar los estudiantes al estudiar un objeto matemático en estos libros (Alvarado y Batanero, 2008). Cobo y Batanero (2004) sostienen que los profesores deben mantener una constante vigilancia epistemológica hacia los libros de texto, debido a que, si aparece un significado sesgado en ellos, este podría ser asimilado por los estudiantes.

Con base en lo anterior, destacamos la relevancia del uso del libro de texto dentro de las salas de clase y la importancia de su análisis crítico, con miras hacia el mejoramiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje y su contribución en el desarrollo de la Didáctica de la Matemática.

1.2.3 Contextualización del problema de investigación

Pino-Fan et al. (2019) consideran que un criterio que permitiría valorar documentos curriculares, tales como libros de texto o programas de estudio, es la evaluación de la representatividad de los significados pretendidos para un determinado objeto matemático con respecto a su significado holístico de referencia. Adicionalmente, estos autores indican que la representatividad de los significados permite determinar la pertinencia epistemológica de los ajustes curriculares que se realizan periódicamente. En ese sentido, Pino-Fan et al. (2013) sostienen que esta representatividad es uno de los criterios que favorece la valoración de la instrucción matemática y se debe tomar en cuenta al planificar actividades matemáticas. A nuestro entendimiento, aquí se plantea la necesidad de realizar este tipo de estudios, y de esta manera, poder efectuar una valoración de la representatividad de los significados de un objeto matemático que se pretenden promover en el currículo escolar, es decir, en un determinado libro de texto y programa de estudio.

Por otro lado, como indicamos anteriormente, la distribución binomial tiene una gran importancia dentro de la probabilidad; no obstante, es considerada como un tema complicado por estudiantes y profesores. Lo anterior se evidencia en los resultados de diversos estudios que evalúan el nivel de razonamiento que poseen estudiantes y profesores acerca de este objeto matemático (véase sección 2.2). Con base en ello, de acuerdo con lo que mencionan Cid et al. (2017), para avanzar en una propuesta de enseñanza para la distribución binomial, es necesario determinar las dificultades en su comprensión y realizar un análisis sobre su presencia en los libros de texto. A su vez, Parra (2015) menciona que, para evaluar y diseñar ciclos de formación de profesores, es necesario reconstruir el significado pretendido por el currículo de matemática de un determinado objeto matemático, así como evaluar su representatividad respecto del significado holístico de referencia.

El primer acercamiento desarrollado al estado de la cuestión nos permite dilucidar que hay poca investigación acerca de la distribución binomial en Didáctica de la Matemática, así como su análisis en los currículos escolares, a pesar de la importancia que se le atribuye dentro del área de la probabilidad y las dificultades que se han expuesto en algunos estudios previos (véase apartado 2.2). Por todo lo anterior, consideramos relevante realizar el análisis de los significados parciales de la distribución binomial promovidos por el currículo chileno de cuarto año medio (programa de estudio, libro de texto, cuaderno de actividades y guía didáctica del docente) tomando como base su significado referencial; esto con miras a entregar orientaciones al profesor en servicio sobre los significados parciales; para planificar, reorganizar o diseñar propuestas didácticas que desarrollen la comprensión del estudiante acerca de la binomial, así como para el diseño de ciclos de formación de profesores de matemática de educación media.

1.3 Marco Teórico

Para la realización de este estudio se considerarán algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, el cual es un sistema teórico inclusivo desarrollado por Godino y colaboradores en diferentes trabajos desde 1994 (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino et al., 2009).

1.3.1 Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos

El Enfoque Ontosemiótico es un modelo teórico que considera aspectos del conocimiento matemático que puedan contribuir a la confrontación y articulación de diversos enfoques de investigación en Didáctica de la Matemática. Este modelo surgió por la necesidad de desarrollar un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática, y busca proporcionar herramientas teóricas que permitan analizar el pensamiento matemático y los factores que condicionan su desarrollo (Godino et al., 2009). Godino et al. (2009) enumeran ocho herramientas teóricas constituyentes del EOS, definiendo nociones importantes que permiten analizar los diversos elementos involucrados en la instrucción matemática:

1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas
2. Emergencia de los objetos matemáticos
3. Comprensión y conocimiento en el EOS
4. Recapitulación
5. Problemas, prácticas, procesos y objetos didácticos
6. Dimensión normativa

7. Criterios de idoneidad didáctica
8. Niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático

Desde nuestra perspectiva, estas herramientas constituyen un valioso insumo capaz de adaptarse a las necesidades de cada investigador, permitiendo analizar diferentes situaciones intervinientes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En nuestro caso, nos valdremos de herramientas provenientes de los dos primeros apartados para llevar a cabo nuestro análisis: *sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas* y *emergencia de los objetos matemáticos*.

1.3.2 Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas

Para el EOS, el *significado de un objeto matemático* corresponde al sistema de prácticas matemáticas que se realizan para resolver situaciones-problema donde se involucra dicho objeto (Godino et al., 2009). De acuerdo con Godino et al. (2009), una *práctica matemática* es "toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (p. 4). Además, estos autores agregan que estas prácticas "pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución" (p. 4). En ese sentido, es posible diferenciar dos tipos de significados: *significados personales* (sistema de prácticas que realiza una persona) y *significados institucionales* (compartidas en el seno de una institución); entendiendo *institución* como una *comunidad de prácticas* formada por personas que se encuentran involucradas en un mismo tipo de situaciones problemáticas.

En este estudio haremos uso de la noción de *significados institucionales*; con relación a estos, se proponen los siguientes cuatro tipos:

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta, este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto. (Godino et al., 2009, p. 5)

En concreto, nos centraremos en el análisis del significado institucional referencial de la distribución binomial promovido en el currículo chileno de matemática de cuarto año de Educación Media.

1.3.3 Emergencia de los objetos matemáticos

De acuerdo con Font et al. (2012), podemos entender como *objeto matemático* a "cualquier entidad que esté relacionada de alguna manera con la práctica o actividad matemática y que pueda separarse o individualizarse" (p. 13, traducción propia). El EOS considera que los objetos matemáticos surgen de las prácticas matemáticas, mediante un fenómeno complejo que abarca (al menos) dos niveles: en un primer nivel tenemos las *configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas*; mientras que, en el segundo nivel, se consideran los *atributos contextuales* (Godino et al., 2009). En nuestro caso, consideraremos el primer nivel.

En la realización de una práctica matemática se pone en funcionamiento conocimiento matemático. Este conocimiento se expresa en el uso de lenguajes (verbales, simbólicos o gráficos). Estos lenguajes derivados de las prácticas matemáticas son, a su vez, la expresión de conceptos, proposiciones y procedimientos, y con base en estos, se elaboran argumentos que dan cuenta de la validez de las acciones. En ese sentido, cuando se realiza o evalúa una práctica matemática emergen seis tipos de objetos matemáticos primarios (Font et al., 2007; Godino et al., 2009):

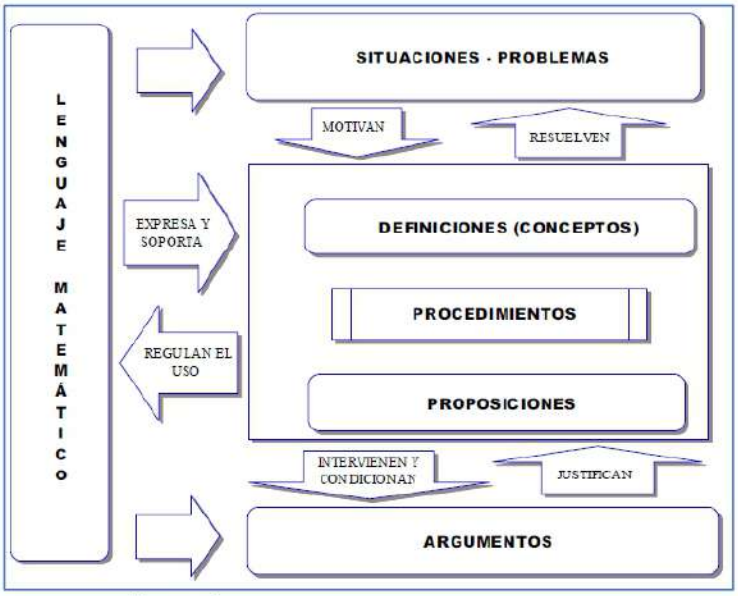
- Lenguaje: términos, expresiones, notaciones, gráficos u otras representaciones utilizadas para referirse al objeto.
- Situaciones-problema: actividades, tareas o ejercicios, ya sean extra-matemáticas o intra-matemáticas.

- Conceptos-definición: construcciones o elementos que son introducidos mediante definiciones o descripciones de un objeto.
- Proposiciones: enunciados o afirmaciones sobre los conceptos.
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, métodos de ejecutar determinadas acciones.
- Argumentos: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

Esta tipología de objetos matemáticos primarios, llamados como "elementos del significado", se articulan mediante una configuración representada en la Figura 1.1. Esta configuración, denominada ontosemiótica (Pino-Fan et al., 2015) puede ser epistémica o cognitiva, referida a objetos matemáticos y procesos institucionales o personales, respectivamente.

Figura 1.1

Configuración de objetos primarios



Fuente. Godino et al., 2009.

Para el análisis del significado de la distribución binomial promovido en el currículo chileno de matemática de cuarto año de Educación Media (tomando en cuenta el Programa de Estudio, el Texto del Estudiante, el Cuaderno de Actividades y la Guía Didáctica del Docente) se considerará la tipología de objetos matemáticos primarios para identificar la presencia de cada elemento del significado perteneciente al significado referencial de la binomial.

1.4 Significado holístico de la distribución binomial a partir de un estudio histórico-epistemológico

Además de las nociones teóricas del EOS, mencionadas anteriormente, se tomará como referencia parte del significado holístico de la distribución binomial determinado a partir de un estudio de tipo histórico-epistemológico, como parte de los resultados de un proyecto de investigación (Proyecto de Investigación Universidad de Los Lagos Regular R22/19), en el que se utilizaron algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) para su reconstrucción, específicamente las nociones de *práctica matemática*, *objeto matemático* y *significado*. Dichos resultados fueron reportados en García-García et al. (2022) y Fernández et al. (2022). A continuación, se presenta un resumen del estudio histórico-epistemológico (EHE) descrito en estos artículos y del significado holístico de la distribución binomial.

1.4.1 Estudio histórico-epistemológico de la distribución binomial

En el EHE se identificaron cinco periodos históricos en los que surgieron situaciones relacionadas con la distribución binomial (García-García et al., 2022; Fernández et al., 2022), lo cual permitió distinguir cuatro familias de problemas, que constituyen la base para el desarrollo del significado holístico: problemas binomiales de conteo de casos, situaciones binomiales particulares, situaciones binomiales generales o con varias variables y situaciones que van más allá de la simple aplicación de la distribución binomial (asociándola con otras nociones de la matemática o probabilidad). Estos periodos se describen a continuación:

1. *600 a.C. – Siglo XIV. El conteo de casos y los patrones numéricos informales.*

Durante este periodo, Porfirio (234 – 305) plantea la pregunta ¿de cuántas maneras pueden seleccionarse dos cosas de n cosas diferentes?, la cual ostenta una naturaleza combinatoria (Laudański, 2013, citado en García-García et al., 2022; Fernández et al., 2022). Su solución se presentó, en primera instancia, para un caso particular ($n = 5$) usando un razonamiento recursivo, es decir, que el primer elemento puede tener cuatro parejas, el segundo, tres y así, sucesivamente.

Papo de Alejandría (290 – 350) estudió un problema similar al anterior, pero enfocado en una situación geométrica, el cual consistía en averiguar la cantidad de intersecciones que se pueden generar con n líneas (rectas) intersecantes, cuya solución está dada por la expresión $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n - 1)$. Boecio (480 – 524) indica que tal solución era conocida por Euclides, junto con expresiones equivalentes al uso de combinatorias de la forma C_2^n.

Por otro lado, no hay evidencia de que en la Edad Media hubiera cálculo de probabilidades, sin embargo, sí existieron situaciones de análisis de la cantidad de casos posibles en juegos de azar, lo cual es aplicable al estudio de casos posibles, favorables y no favorables en fenómenos de carácter binomial, por ejemplo, el lanzamiento de monedas (Hald, 2005, citado en García-García, et al., 2022).

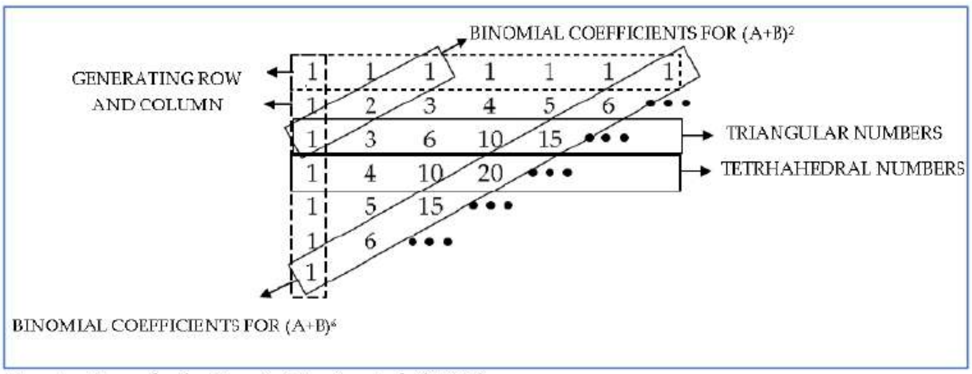
En la Divina Comedia de Dante aparecen las primeras señales de probabilidad, presentadas como proporciones y aplicadas en los casos posibles en lanzamientos de dados (Todhunter, 1865, citado en García-García et al., 2022; Fernández et al., 2022). Al relacionar esto con el fenómeno binomial, significa la introducción del enfoque clásico (Laplaciano) para el cálculo de probabilidad en forma de proporciones.

2. *Siglo XV – Siglo XVII. Formalización de patrones numéricos y la probabilidad.*

Se formalizan patrones matemáticos correspondientes a fenómenos binomiales, dando paso a la construcción del Triángulo de Pascal (ver Figura 1.2) y se estudia la probabilidad como proporción en juegos de azar.

Figura 1.2

Triángulo de Pascal



Fuente. Tomada de García-García et al. (2022).

En el Triángulo de Pascal se relacionan los números figurados, los coeficientes binomiales y la combinatoria, así como algunas demostraciones y propiedades que facilitan su uso para trabajar la probabilidad y el conteo de casos; por ejemplo, la ubicación de los términos, la suma de elementos en una fila, columna o diagonal específica, la existencia de simetría, entre otras.

Esto cobra relevancia en las salas de clase, donde, con frecuencia, en el estudio de un fenómeno binomial, los estudiantes utilizan como referente los coeficientes binomiales indicados en el Triángulo de Pascal o en el diagrama de árbol; sin embargo, muchas veces desconoce el origen de estos elementos y los procesos detrás de su demostración.

En 1662, Arnauld y Nicole, establecen la probabilidad como un valor numérico aplicable a otras situaciones, además de los juegos de azar. En el renacimiento, se consideraba a la probabilidad como un concepto no numérico, expresando el azar como proporción (Hald, 2005, citado en García-García et al., 2022; Fernández et al., 2022), evidenciándose así, en este periodo, una expansión de la probabilidad desde el estudio de juegos de azar hacia fenómenos que siguen comportamientos aleatorios, con apoyo de métodos aritméticos en la aplicación del azar y la probabilidad.

3. *Siglo XVII. La teoría de la probabilidad: El problema de puntos.*

En este periodo se hace presente el problema de puntos y la búsqueda de su solución. Este problema consiste en que dos jugadores, A y B, realizan una serie de juegos hasta que uno de ellos logre ganar una cantidad s de puntos; en cierto momento el juego debe detenerse, cuando A ha ganado s_1 juegos y B ha ganado s_2 (ambos menores que s), entonces, ¿cuál sería la manera más justa de repartirse el dinero?

El problema de puntos generó, durante el siglo XVI, los primeros intentos de dar solución a problemas probabilísticos mediante patrones numéricos y combinatoria con la consideración de la probabilidad como un valor entre 0 y 1, utilizable, por ejemplo, para asignar un valor a un fenómeno binomial. Así, en este siglo se busca la solución general de dicho problema, la cual sería otorgada por Pascal y Fermat un siglo más tarde.

En 1663 se publicaría *El Libro sobre Juegos de Azar*, fruto de una serie de manuscritos de Cardano, donde se evidenció la utilidad del análisis matemático en los juegos de azar, abordando temas como las condiciones de un juego, cuándo es favorable jugar y posibles fraudes. Muchas de sus conclusiones las obtuvo gracias al ensayo y error, lo que le permitió generar aportes a la probabilidad, tales como la regla de la multiplicación, el concepto de *dado honesto,* la probabilidad utilizando el conteo de casos y la permutación (Hald, 2005, citado en García-García et al., 2022; Fernández et al., 2022).

Por su parte, Samuel Pepys e Isaac Newton, estudiaban situaciones relacionadas con el fenómeno binomial, buscando el evento que tuviera la mayor probabilidad de ocurrencia (Laudański, 2013, citado en García-García, et al., 2022). Para resolver problemas de dados, Newton utilizó la enumeración de casos y los principios combinatorios de la probabilidad, sin hacer referencia explícita a la binomial. Por otro lado, Blaise Pascal y Pierre de Fermat aportaron los principios básicos de numeración, las reglas básicas de probabilidad, elementos de la teoría combinatoria e introdujeron el concepto de valor (de una probabilidad).

Durante este periodo, se puede evidenciar una aritmetización de los fenómenos probabilísticos, pudiéndose trabajar de una manera más abstracta, lo cual sería esencial para el desarrollo de la teoría de la probabilidad. Además, hay intentos de extender el estudio de fenómenos probabilísticos al infinito, aumentando el número de variables en las fórmulas relacionadas con el cálculo de probabilidades.

4. *Siglo XVII – Siglo XVIII. La distribución binomial informal: Modelación del caso* $p = ½$ *y el homorfismo del binomio.*

Se utiliza la generalización de expresiones para modelar situaciones binomiales que involucran una variable desconocida, por ejemplo, el número de lanzamiento de dados (n). Pascal desarrolla la binomial para $p = ½$, basándose en la combinatoria, el triángulo de Pascal, los principios asociados en el estudio de la esperanza y la resolución de situaciones similares al problema de puntos. Mediante el uso de métodos recursivos, Pascal ofrece soluciones del problema de puntos para diferentes valores (Hald, 2005, citado en García-García et al., 2022; Fernández et al., 2022), aunque no de manera general, referenciando a la distribución binomial para $p = ½$.

Mediante cartas, Fermat y Pascal realizaron una asociación entre el problema de puntos y la combinatoria, pudiendo determinar, de manera general, la cantidad máxima de juegos que faltan para terminar, a partir de la cantidad de juegos que le falta a cada jugador para ganar. Fermat entrega la respuesta general al problema de puntos, referenciando a la distribución binomial negativa, aunque no explícitamente (Hald, 2005, citado en García-García, et al., 2022).

Otro problema interesante abordado por Pascal y Fermat corresponde al problema de la ruina del apostador, el cual consiste en que dos jugadores, A y B, cuentan con 12 fichas y juegan con tres dados, en caso de que el lanzamiento de estos dados arroje 11 puntos, A le entrega una ficha a B y, en caso de obtener 14 puntos, B le entrega una ficha a A. Se sabe que hay 15 casos en que A gane una ficha y 27 casos en que el ganador sea B. Aunque el juego acaba cuando un jugador tenga todas las fichas, su solución comenzó a abordarse considerando que ganará el jugador que tenga dos fichas más que el otro. En este sentido, Christiaan Huygens entregó una solución mediante el uso de diagramas de árbol y luego generalizándolo mediante expresiones algebraicas (Hald, 2005, citado en García-García et al., 2022; Fernández et al., 2022). Otro aporte de Huygens es el uso de la esperanza matemática aplicada en el estudio de juegos de lotería y su probabilidad.

John Arburthnot también estudia el fenómeno binomial a través del lanzamiento de monedas, donde aborda la situación con cuatro lanzamientos ($n = 4$) y probabilidad $p = ½$ desde la expansion del binomio elevado a 4. En conclusión, en este periodo se puede identificar la modelización de fenómenos probabilísticos asociados directa e indirectamente con la binomial, si bien no de manera formal, presentándose el cálculo de la esperanza y otros valores que involucran el razonamiento binomial, utilizando principios matemáticos y probabilísticos.

5. *Siglo XVIII. La distribución binomial formal.*

Jacob Bernoulli, en su obra *Ars Conjectandi* de 1613, establece la expresión general de la distribución binomial para el análisis del valor esperado, presentando los principios aditivos y multiplicativos de la probabilidad que le permitieron la construcción de la expresión $\binom{n}{m}p^m q^{n-m}$. Además, Bernoulli, introduce la definición de dos tipos de probabilidad: *a priori* y *a posteriori*. La primera corresponde a una probabilidad teórica, mientras que la segunda está relacionada con frecuencias relativas y registros empíricos, y serian tomadas como base para demostrar la Ley de los Grandes Números (Hald, 2007, citado en García-García, et al., 2022).

Una vez construida formalmente la distribución binomial, se extendió su uso al estudio de otros objetos matemáticos, tales como la distribución normal, la Ley de los Grandes Números, la distribución de Poisson, la distribución multinomial, intervalos de confianza, etc., además de la incorporación de elementos probabilisticos de la propia binomial, como su representación gráfica, su media y su varianza (Laudanski, 2013; Hald, 2005 y 2007; citados en García-García et al., 2022; Fernández et al., 2022).

En conclusión, se considera que Bernoulli completó la construcción de la distribución binomial presentada para un caso particular por Pascal, permitiendo su extensión a otras áreas de la probabilidad y estadística, así como el estudio sobre la misma, asociándola a nociones como la media y varianza.

1.4.2 Significado holístico de la distribución binomial

A continuación, se presentan los cuatro significados parciales que conforman el significado holístico de la distribución binomial, identificados a partir de las familias de situaciones problemas surgidas en el EHE desarrollado en García-García et al. (2022) y Fernández et al. (2022).

- **Significado Parcial 1 (SP1):** *Sistema de prácticas para problemas binomiales de conteo de casos*

La familia de problemas de la que emergen las prácticas de este significado parcial consiste en el estudio de los casos que se pueden generar en un fenómeno binomial, es decir, el conteo de casos y la manera en que pueden ordenarse n elementos. Por esto, se pueden identificar objetos asociables a niveles básicos o informales de la probabilidad como los conceptos de azar y caso, el procedimiento del conteo directo, enlazándose los fenómenos empíricos con la matemática mediante las proposiciones y usándose la argumentación inductiva. Los elementos del significado ligados a este significado parcial se detallan en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1

Elementos del significado ligados al Significado Parcial 1

<table>
<tr><td rowspan="4">Lenguaje (L1)
L1.1: Lenguaje común
L1.2: Simbólico
L1.3: Tabular
L1.4: Gráfico (diagrama de árbol)</td><td colspan="4">Situaciones-problema (S1)
S1.1: Selección de dos cosas de X diferentes.
S1.2: Conteo de casos posibles, favorables o no favorables.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conceptos-definición (C1)</td><td>Procedimientos (P1)</td><td>Proposiciones (E1)</td></tr>
<tr><td>C1.1: Azar, experimento azaroso o conceptos afines
C1.2: Caso o suceso
C1.3: Suceso excluyente
C1.4: Suceso no excluyente
C1.5: Patrón numérico
C1.6: Potencia
C1.7: Desigualdad
C1.8: Incógnita
C1.9: Coeficiente binomial
C1.10: Combinatoria
C1.11: Valor de la variable
C1.12: Orden</td><td>C1.13: Permutación
C1.14: Variación
C1.15: Probabilidad como proporción
C1.16: Números figurados
C1.17: Triángulo de Pascal
C1.18: Repetición
C1.19: Espacio muestral
C1.20: Variable aleatoria discreta
C1.21: Factorial</td><td>P1.1: Conteo directo de casos
P1.2: Construcción del espacio muestral
P1.3: Reconocimiento de patrones
P1.4: Construcción y validación de algoritmos originados desde los patrones numéricos
P1.5: Búsqueda de propiedades
P1.6: Uso de representaciones gráficas</td><td>E1.1: Los juegos de azar y otros fenómenos pueden ser analizados desde distintas representaciones.
E1.2: Se puede obtener un grado de conocimiento del azar utilizando expresiones matemáticas.
E1.3: Sumando los casos posibles de dos o más sucesos se obtiene la cantidad de arreglos totales (principio aditivo para el conteo de casos).
E1.4: Multiplicando los casos posibles de dos o más sucesos se obtiene la cantidad de arreglos totales (principio multiplicativo para el conteo de casos).</td></tr>
<tr><td colspan="4">Argumentos (A1)
A1.1: Razonamiento inductivo
A1.2: Expresiones recursivas
A1.3: Uso de representaciones</td></tr>
</table>

Fuente. Elaboración propia.

- **Significado parcial 2 (SP2):** *Sistema de prácticas para situaciones binomiales particulares*

El segundo significado parcial se asocia con el fenómeno binomial utilizando el valor de probabilidad más conocido (o sencillo) ($p = 1/2$), lo cual genera una familia de problemas que utiliza la fórmula binomial en situaciones específicas y puede ser abordada desde principios multiplicativos y combinatorios y no solamente de la fórmula general. Por esto, es posible identificar objetos que permiten la relación entre la matemática y la probabilidad; por ejemplo, el concepto de la probabilidad como valor entre 0 y 1 y la construcción de modelos matemáticos como procedimientos para la búsqueda de soluciones a problemas probabilísticos. Los elementos del significado ligados a este significado parcial se detallan en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2

Elementos del significado ligados al Significado Parcial 2

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Lenguaje (L2)
L2.1: Lenguaje común
L2.2: Simbólico
L2.3: Tabular
L2.4: Gráfico</td>
<td colspan="3">Situaciones-problema (S2)
S2.1: Asignación de valor a un ensayo.
S2.2: Validación de aleatoriedad de fenómenos.
S2.3: Probabilidad de casos extremos.
S2.4: Probabilidad de una cantidad específica de aciertos en un fenómeno binomial.
S2.5 probabilidad de un intervalo de valores de la variable aleatoria (V.A.) de la distribución binomial (sin uso de la fórmula).
S2.6: Calcular la esperanza de una serie de fenómenos binomiales incompletos.</td>
</tr>
<tr>
<td>Conceptos-definición (C2)
C2.1: Valor numérico de la probabilidad entre 0 y 1
C2.2: Valor asociado a un experimento aleatorio
C2.3: Distribución de probabilidad
C2.4: Sumatoria
C2.5: Extensión del desarrollo del binomio</td>
<td>Procedimientos (P2)
P2.1: Identificar situaciones binomiales
P2.2: Generación, comprobación y/o corrección de modelos matemáticos de fenómenos de naturaleza binomial
P2.3: Cálculo del valor esperado al asignar valores a las probabilidades de un fenómeno</td>
<td>Proposiciones (E2)
E2.1: El valor esperado de un experimento binomial corresponde a la suma de los productos de cada valor de la variable por su respectiva probabilidad de ocurrencia.
E2.2: Se pueden obtener las probabilidades asociadas a un fenómeno binomial estudiando la expansión de la expresión $(p+q)^n$ en la que p y q son sus probabilidades y n la cantidad de repeticiones de los ensayos.
E2.3: La probabilidad sigue principios aditivos y multiplicativos, al estar directamente relacionada con el conteo de casos.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Argumentos (A1)
A2.1: Razonamiento deductivo
A2.2: Razonamiento inductivo
A2.3: Uso de representaciones</td>
</tr>
</table>

Fuente. Elaboración propia.

- **Significado parcial 3 (SP3):** *Sistema de prácticas para situaciones binomiales generales o con varias variables*

En este tercer significado parcial están incluidas aquellas situaciones-problema que abordan la binomial de manera general, prácticamente prescindiendo del uso de valores específicos, y cuyo desarrollo efectivo requiere del uso directo de la fórmula o la modelación con base en esta. Así, es posible identificar objetos que permiten la formalización de la distribución binomial como parte de la teoría de la probabilidad y de la matemática, como por ejemplo, los conceptos de la fórmula de la distribución y la función de probabilidad, procesos como el cálculo de los parámetros de una situación binomial y la argumentación con base en principios deductivos. Los elementos del significado ligados a este significado parcial se detallan en la Tabla 1.3.

Tabla 1.3

Elementos del significado ligados al Significado Parcial 3

<table>
<tr><td rowspan="2">Lenguaje (L3)
L3.1: Lenguaje común
L3.2: Simbólico
L3.3: Tabular
L3.4: Gráfico</td><td colspan="3">Situaciones-problema (S3)
S3.1: La probabilidad de cualquier fenómeno binomial.
S3.2: Esperanza de un fenómeno binomial variable.
S3.3: Cantidad más probable de aciertos.
S3.4: Dispersión número de aciertos.
S3.5: Probabilidad de una de las colas de la distribución binomial variable.
S3.6: Esperanza de fenómeno binomial incompleto.
S3.7: Cantidad favorable de ensayos.</td></tr>
<tr><td>Conceptos-definición (C3)
C3.1: situación/ fenómeno binomial (distribución binomial)
C3.2: probabilidad binomial (fórmula de la distribución binomial)
C3.3: Función de probabilidad
C3.4: Parámetro
C3.5: Inferencia probabilística
C3.6: Grado de conocimiento (probabilidad subjetiva)
C3.7: Media
C3.8: Varianza
C3.9: Valor esperado (esperanza)</td><td>Procedimientos (P3)
P3.1: Determinación de parámetros de la distribución binomial
P3.2: Comparar valores teóricos de un fenómeno binomial y las proporciones observadas.
P3.3: Variar parámetros en simulaciones
P3.4: Aproximación o cálculo de medidas como la media y varianza
P3.5: Cálculo de probabilidades aplicando la fórmula</td><td>Proposiciones (E3)
E3.1: En un fenómeno binomial existen n observaciones
E3.2: Las observaciones/ensayos en un fenómeno binomial son independientes
E3.3: Cada ensayo de un fenómeno binomial tiene solo dos posibles resultados (éxito y fracaso)
E3.4: Las probabilidades de éxito y fracaso son constantes
E3.5: En un ensayo binomial, la probabilidad de obtener m aciertos en n ensayos con una probabilidad p de éxito está dada por la fórmula binomial.
E3.6: El valor esperado en un fenómeno binomial está dado por su media.
E3.7: Considerando una alta serie de experimentos, si la proporción observada no concuerda con la probabilidad teórica, se sugiere que el fenómeno podría no ser binomial.</td></tr>
</table>

	Argumentos (A3)
	A3.1: Razonamiento deductivo A3.2: Uso de representaciones

Fuente. Elaboración propia.

- **Significado parcial 4:** *Sistema de prácticas para situaciones que van más allá de la simple aplicación de la distribución binomial*

Este cuarto significado parcial es considerado como el *significado extendido* de la distribución binomial, debido a que se enlaza con otros objetos matemáticos del área de la probabilidad y estadística, dando origen a una nueva familia de campo de problemas. Solo se presentan las situaciones-problema de este significado parcial, puesto que su resolución involucra los objetos descritos en los significados parciales anteriores y aquellos pertenecientes al significado de otras nociones matemáticas y probabilísticas. Las situaciones-problema ligadas a este significado parcial se detallan en la Tabla 1.4.

Tabla 1.4

Situaciones-problema ligadas al Significado Parcial 4

Situaciones-problema (S4)
S4.1: Ley de los Grandes Números (probabilidad). S4.2: Intervalo de confianza. S4.3: Extensión de la binomial a la normal. S4.4: Distribución multinomial. S4.5: Inferencia inductiva. S4.6: Distribución binomial negativa.

Fuente. Elaboración propia.

En conjunto, los elementos de los cuatro significados parciales, presentados en las tablas anteriores (Tablas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4), conforman el *significado holístico de referencia de la distribución binomial*. Cabe señalar que en este estudio consideraremos únicamente los objetos primarios asociados a cada uno de los primeros tres significados parciales de la distribución binomial (SP1, SP2 y SP3), lo que denominaremos *significado referencial*. Finalmente, se puede apreciar una estructura lineal con respecto a los cuatro significados parciales de la binomial, es decir, se va transitando y construyendo el significado holístico partiendo del SP1 y finalizando en el SP4; esto trae como consecuencia que algunos elementos introducidos en un significado parcial pueden reaparecer en los subsecuentes.

1.5 Pregunta y objetivos de investigación

1.5.1 Pregunta de investigación

De acuerdo con lo expuesto en los apartados anteriores, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación, la cual guio el desarrollo del presente estudio:

¿Cuáles son los significados parciales de la distribución binomial promovidos en el currículo de matemática (considerando el Programa de Estudio y el Material Didáctico) de cuarto año de Educación Media de Chile?

1.5.2 Objetivo general

Para dar respuesta a esta interrogante, nos planteamos el siguiente objetivo general:

OG: *Valorar la representatividad de los significados de la distribución binomial promovidos en el currículo de matemática de cuarto año de Educación Media de Chile, respecto de su significado referencial.*

1.5.3 Objetivos específicos

Para lograr nuestro objetivo general, planteamos los siguientes objetivos específicos:

OE1: *Determinar los significados de la distribución binomial promovidos en el Programa de Estudio de cuarto año medio de Chile.*

OE2: *Determinar los significados de la distribución binomial promovidos en el Material Didáctico (considerando el Texto del Estudiante, el Cuaderno de Actividades y la Guía Didáctica del Docente) de cuarto año medio de Chile.*

OE3: *Determinar los significados de la distribución binomial promovidos en el currículo chileno de matemática (considerando el Programa de Estudio y el Material Didáctico) de cuarto año de Educación Media.*

OE4: *Contrastar los significados de la distribución binomial promovidos en el currículo chileno de matemática (considerando el Programa de Estudio y el Material Didáctico) de cuarto año de Educación Media con respecto a su significado referencial.*

2. ANTECEDENTES

2.1 Introducción

El presente capítulo contiene una recopilación de algunos estudios previos en el ámbito de la Didáctica de la Matemática que guardan alguna relación con los elementos involucrados en este trabajo. En síntesis, se realiza un recorrido por estos estudios, permitiéndonos situar en un contexto más amplio nuestro problema de investigación, ya que, en conjunto, conforman un precedente para este trabajo.

Para organizar estos estudios, se clasificaron en dos grandes grupos: el primero, en aquellos enfocados en la distribución binomial dentro de la Didáctica de la Probabilidad y Estadística y, el segundo, en aquellos que analizan la presencia de objetos matemáticos en libros de texto desde la perspectiva del EOS.

2.2 Algunos estudios sobre la distribución binomial

A continuación, se describen algunas investigaciones que abordan la distribución binomial como objeto de estudio. Estos estudios han sido realizados durante los últimos años en diversos contextos educativos, tanto con estudiantes como con profesores.

En primera instancia, presentamos la investigación realizada por Alvarado y Batanero (2007), quienes analizan las dificultades en la comprensión de la aproximación de la distribución normal a la binomial por parte de 123 estudiantes segundo año de estudios de ingeniería de la Universidad Católica de la Santísima Concepción de Chile. La metodología consistió en un proceso de enseñanza donde el tema fue abordado mediante el uso de material concreto, simulaciones computacionales y procedimientos analíticos y algebraicos. Al finalizar, se realizó una evaluación con ítems variados (selección múltiple y verdadero y falso), donde los resultados indican que las propiedades más sencillas de comprender por parte de los estudiantes son la importancia del tamaño muestral, la corrección de continuidad, la sensibilidad de los parámetros, los valores en que la aproximación es mejor (centrales) y las condiciones en la precisión de la aproximación. Además, se propuso un problema abierto para evaluar el nivel de razonamiento que habían alcanzado los estudiantes. En este último, los resultados muestran que la mayoría logra tipificar la variable para pasar a la distribución normal; no obstante, menos de la mitad aplica correctamente las fórmulas de la media o la varianza, logrando establecer la aproximación a la normal de manera adecuada, y solo el 17% logra aplicar la corrección de continuidad.

Maxara y Biehler (2010) analizan la comprensión acerca del tamaño de la muestra y la Ley de los Grandes Números de 13 profesores en formación, quienes participaron en un curso de probabilidad y estadística. En el curso trataron diferentes temas, además del uso del software *Fathom* para analizar datos, realizar simulaciones y aplicar estadística inferencial. Al término del curso se realizó un examen final y posteriormente, algunos voluntarios respondieron entrevistas que consistían en 10 tareas donde debían analizar los resultados de una simulación. El estudio se centró el análisis las tareas-entrevistas. Las simulaciones hechas con el programa muestran resultados positivos en la resolución de tareas y en la comprensión de la Ley de los Grandes Números. Sin embargo, los estudiantes presentaron dificultades para transferir esa comprensión a contextos más probabilísticos; es decir, la correcta solución de una tarea dependerá, en gran parte, de su contexto.

En García-García et al. (2014) se indaga sobre la manera en que estudiantes de secundaria y bachillerato de Ciudad de México, resuelven una tarea relacionada con el concepto de distribución binomial. Entre sus resultados, mencionan que, en general, el desempeño de los estudiantes de bachillerato es mejor que el de los estudiantes de secundaria. Además, señalan que los estudiantes presentan dificultades para describir el recorrido de la variable o su espacio muestral y que, además, está presente en ellos el sesgo de equiprobabilidad, el cual se produce al no reconocer la relación de la variable con el espacio muestral. Finalmente, recomiendan evitar centrarse solo en el cálculo e invitan a privilegiar actividades en que los estudiantes realicen observaciones experimentales y reflexionen sobre ello.

Por su parte, Mayén y Salazar (2014) exploraron el razonamiento que estudiantes de secundaria y profesores en formación presentan al resolver dos problemas donde se debía aplicar la distribución binomial. La muestra estuvo compuesta por 77 estudiantes: Grupo A (31 estudiantes de bachillerato sin curso previo de probabilidad), Grupo B (28 estudiantes de bachillerato con curso previo de probabilidad) y Grupo C (18 profesores de secundaria en formación inicial). Se utilizó la taxonomía SOLO (Structure of Observed Learning Outcome) para proponer niveles de razonamiento y, con ellos, analizar las respuestas entregadas. Los resultados más bajos fueron obtenidos por el Grupo A, ya que la mayoría se encuentra en un nivel preestructural. En cuanto al Grupo B, poco más de la mitad se encuentra en un nivel uniestructural, mientras que el resto, está en un nivel preestructural. Finalmente, el Grupo 3 obtuvo mejores resultados, puesto que la mitad demostró estar en un nivel uniestructural y tres de ellos, en un nivel superior, ya sea en multiestructural o relacional. Una de las conclusiones que destacan las autoras es que el uso de diagramas de árbol, por parte de los estudiantes, fue un elemento clave para diferenciar respuestas y clasificarlas en los niveles preestructural y uniestructural.

Sumado a estos estudios, Cid et al. (2017) estudiaron el conocimiento sobre el modelo de probabilidad binomial que poseen 46 profesores (en ejercicio y en formación) de la Región del Biobío en Chile, quienes debían responder un cuestionario de tres ítems sobre construcción y aplicación del modelo binomial. En estos ítems se buscaba que los profesores reconocieran la variable aleatoria, además de calcular probabilidades a través del modelo binomial y aplicar la esperanza matemática. A pesar del uso de calculadora y del software *GeoGebra*, ambos grupos presentaron dificultades en tres aspectos: no identifican la variable aleatoria binomial, no consideran el número de ensayos Bernoulli, y no aplican adecuadamente la esperanza matemática.

Sánchez et al. (2018) analizaron las respuestas proporcionadas por 103 estudiantes de secundaria, divididos en dos grupos: el primero, integrado por 37 estudiantes, no tenía instrucción previa sobre estadística y probabilidad, mientras que el segundo, formado por 66 estudiantes, ya había tomado un curso anteriormente. En primera instancia, los alumnos debían responder dos preguntas (incluidas dentro de un cuestionario) asociadas a una situación binomial, posteriormente, realizaron simulaciones con elementos manipulativos y con uso de software y, finalmente, volvieron a responder el cuestionario. Los autores utilizaron los niveles de la taxonomía SOLO para evaluar la calidad de las respuestas, acompañado de un análisis conjunto de las respuestas a las preguntas 1 y 2. Los resultados apuntan a que las respuestas en el post-test son mejores que las del pre-test, es decir, las actividades de simulación permitieron una mejor comprensión del problema. Otro elemento por destacar es que la mayoría de los estudiantes presentó dificultades para incorporar la variabilidad en sus respuestas.

En el mismo orden de ideas, Sánchez y Carrasco (2018) estudiaron el razonamiento probabilístico que presentan estudiantes de bachillerato al realizar una tarea que contiene elementos que conducen a una distribución binomial. En el estudio participaron 34 estudiantes de educación media inscritos en la modalidad de bachillerato en la Universidad Nacional Autónoma de México. La metodología consistió en responder un cuestionario y realizar actividades de simulación (de manera física y virtual). Entre sus resultados mencionan que los estudiantes no logran relacionar adecuadamente la conexión entre las distribuciones empíricas (simulaciones) y las distribuciones teóricas. Debido a esto, concluyen que, para lograr una correcta integración entre los dos aspectos se necesita realizar un diseño instruccional más elaborado, tomando como base la simulación y las formas de razonar que presentan los participantes en su investigación.

En Toledo et al. (2019) se estudiaron los diferentes tipos de razonamiento acerca de la distribución binomial que tienen profesores de matemática en ejercicio. Se realizó un análisis de las respuestas de 63 profesores de establecimientos educacionales chilenos sobre dos problemas de probabilidad asociados a la distribución binomial; uno de ellos corresponde a una situación equiprobable [$X \sim B(5, ½)$], mientras que el otro, a una situación no equiprobable [$X \sim B(3, 5/8)$]. Entre sus observaciones, los autores mencionan que la mayoría de los profesores recurre al diagrama de árbol para dar solución a los problemas; además, entre sus debilidades más destacadas, indican que no se observa uso de lenguaje formal, no hay definición de eventos ni notación algebraica para los cálculos, y si bien, algunos docentes usaron la fórmula binomial, esta no se enuncia y tampoco se define la variable aleatoria correspondiente.

Recientemente, Begué et al. (2020) realizan un estudio enfocado en analizar la comprensión intuitiva de estudiantes acerca de la distribución binomial. Su muestra estuvo conformada por 127 estudiantes de bachillerato de diferentes centros escolares de Aragón, España. La tarea a la que fueron sometidos los participantes consistió en entregar cuatro valores probables de una situación binomial y justificar la razón de esos valores. Los resultados arrojan que la mayoría de los estudiantes (73%) entregó valores que se encuentran en un rango aceptable, mostrando un razonamiento distribucional. Sobre los argumentos acerca de la estimación de la probabilidad, los autores señalan que el 56,7% de los estudiantes basó sus respuestas bajo el enfoque frecuencial, mientras que el 40,2%, en la observación de la convergencia y variabilidad de la variable. Dentro de los argumentos incorrectos, se presentaron creencias erróneas sobre la aleatoriedad, así como el sesgo de equiprobabilidad.

En otra investigación, García-García et al. (2020) analizan el desarrollo del razonamiento probabilístico que poseen profesores de matemática al calcular probabilidades en problemas de tipo binomial. Siete profesores, que fueron objeto del estudio, comenzaron respondiendo un cuestionario, posteriormente realizaron una actividad de simulación computacional trabajando con el software *Fathom* y, finalmente, volvieron a responder el cuestionario. De esta manera, se pudo observar el razonamiento probabilístico de los profesores en cada una de las etapas. Los resultados obtenidos arrojaron que, antes de la actividad de simulación, seis de los siete participantes entregaron números enteros como probabilidades de eventos, mientras que solo uno de ellos proporcionó como respuestas valores entre 0 y 1, aunque de manera incorrecta. Después de la actividad de simulación, cuatro profesores modificaron su razonamiento probabilístico, logrando proporcionar los valores teóricos de la binomial.

La mayoría de los estudios presentados anteriormente cuentan con una estructura similar, ya que se han enfocado en utilizar niveles para evaluar el razonamiento que presentan los individuos acerca de la binomial. Específicamente, se escoge a un grupo de participantes, a los cuales se les pide responder un cuestionario que contiene situaciones-problema acerca de la distribución binomial, para finalmente determinar su nivel de razonamiento o las principales falencias que presentan. Un denominador común que hemos detectado en este tipo de investigaciones es la constante presencia de dificultades en el desarrollo de actividades, ocurriendo esto tanto en estudiantes como en profesores en formación y en ejercicio.

Además de los anteriores estudios, presentamos otros que tienen un enfoque diferente: el primero de ellos corresponde a una propuesta didáctica para abordar el estudio de la binomial y la descripción de su experimentación en el aula; mientras que en el segundo, se describe, grosso modo, el tratamiento que se le da a la distribución binomial en un libro de texto.

Zamorano y Muñoz (2016) presentan resultados de una experiencia en el aula sobre la enseñanza de la distribución binomial. La metodología utilizada se aplicó en estudiantes chilenos de tercero medio y contó con tres fases: análisis documental, donde se analiza el tratamiento que le da el Texto del Estudiante a la binomial; análisis exploratorio, el cual tenía por objetivo identificar los contenidos mínimos necesarios para el tratamiento de la binomial, desde el punto de vista de cuatro profesores de matemática; y, por último, el diseño e implementación de la clase. En el inicio de la clase, los estudiantes apostaban por el ganador en tres peleas de un videojuego y reflexionaban al respecto. Luego, en grupos, buscaban explicaciones sobre la frecuencia de los aciertos y nuevamente reflexionaban sobre qué pasaría si se aumenta el número de peleas; posteriormente, resolvieron otro problema en un contexto diferente (lanzamiento de tiros libres en baloncesto). Finalmente, cada grupo elaboró preguntas para sus demás compañeros, las cuales se revisan en la clase. Entre sus resultados, mencionan que se evidencia una construcción efectiva del concepto y aplicación de la binomial como método para calcular probabilidades, a través de desafíos y reflexiones grupales.

Por otra parte, Taufiq et al. (2020) realizan una descripción sobre el concepto de la distribución binomial en un libro de texto, el cual es el más usado en la escuela secundaria de Indonesia. Los autores argumentan que uno de los problemas es que los estudiantes no entienden qué es la distribución binomial, más allá de la fórmula. Algunos errores encontrados en su análisis corresponden a la falta de discusión relacionada, por ejemplo, con los estadísticos de la distribución binomial (media y varianza); además, mencionan que hay conceptos importantes que no se encuentran en el texto (como variable aleatoria discreta y distribución de probabilidad discreta). Entre sus conclusiones, mencionan que las falencias encontradas podrían provocar dificultades en la comprensión de la binomial por parte de los estudiantes.

En general, las investigaciones aquí abordadas estudian la distribución binomial en diferentes contextos y proporcionan información valiosa a profesores e investigadores que abordan este tema; en particular, para nuestro estudio, el bosquejo de estas nos permite tener un panorama sobre las principales dificultades y desafíos que existen para mejorar la comprensión de este objeto matemático por parte de los estudiantes.

2.3 Estudios sobre análisis de libros de texto desde el marco del EOS

2.3.1 Estudios en Estadística y Probabilidad

Enseguida, se resumen algunas investigaciones enfocadas en el análisis de la presencia de objetos matemáticos ligados a la estadística y probabilidad en libros de texto de diversos niveles educativos. Cabe señalar que nos enfocamos en aquellos estudios que consideran como marco de referencia el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, en concreto, los elementos del significado de los objetos matemáticos.

Uno de los primeros estudios acerca del análisis de un objeto matemático-estadístico en libros de texto, corresponde al realizado por Cobo y Batanero (2004). En dicho estudio se caracterizan los significados de la media presentes en 22 libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria de España. Para el análisis consideran como constituyentes del significado de la media las siguientes 'entidades primarias':

- *Situaciones problemas*. Predomina aquella que consiste en *obtener un elemento representativo de un conjunto de datos dados*, con distribución aproximadamente simétrica, puesto que aparece en todos los libros analizados.
- *Algoritmos y procedimientos*. En todos los textos aparecen algoritmos que consisten en *calcular la media de una variable discreta*, ya sea con datos aislados o presentados en tablas de frecuencias, o bien, de una variable continua con datos presentados en tablas de frecuencias agrupadas en clases.
- *Definiciones y propiedades*. En 18 de los 22 textos se utiliza la definición centrada en el algoritmo de cálculo de la media como *la suma ponderada de cada uno de los valores de la variable, multiplicado por su frecuencia*. En cuanto a las propiedades, se clasifican en tres grupos: numéricas, algebraicas y estadísticas. La propiedad que se presenta con mayor frecuencia corresponde a una de tipo estadística: *la media es un representante de un colectivo*.
- *Lenguaje, representaciones y argumentos*. Los términos y expresiones verbales (como *media*, *parámetro central*, *medida de centralización*), así como las tablas estadísticas, son los elementos lingüísticos y representaciones que se encuentran en

todos los libros analizados; mientras que el argumento más presente es la *comprobación de ejemplos y contraejemplos*, estando en 20 libros.

Entre sus conclusiones, las autoras indican que existe una gran diversidad de significados en la presentación de la media, además de la ausencia de elementos que podrían complementar dicho concepto, por ejemplo, los cálculos realizados a partir de gráficos, lo cual podría tener consecuencias negativas en los estudiantes.

Recientemente, García-García et al. (2021) realizan un estudio sobre el significado de las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) en libros de texto chilenos de séptimo básico, específicamente, en el Texto del Estudiante y el Cuaderno de Actividades de dicho nivel, proporcionados por el MINEDUC. Enseguida, se resumen de los resultados obtenidos para cada elemento del significado, abordando aquellos elementos que se presentan en los dos libros analizados:

- *Situaciones-problema*. Las situaciones que se identificaron en ambos documentos corresponden a *obtener un elemento representativo en distribuciones aproximadamente simétricas* (media); usar la media *para comparar dos distribuciones de datos con variables numéricas* (media) y *obtener el valor más frecuente de un conjunto de datos* (moda).
- *Procedimientos*. Se destacan los procedimientos de *cálculo de las medidas de tendencia central con datos aislados* (media, mediana y moda), *cálculo gráfico* (media y moda) y la *inversión del algoritmo del cálculo de la media*.
- *Conceptos-definición*. El único concepto presente tanto en el Texto del Estudiante, como en el Cuaderno de Actividades es referente a la mediana: *el valor de la variable estadística que divide en dos efectivos iguales*.
- *Propiedades*. Se destacan dos propiedades, ambas de carácter numérico: *la mediana y la media pueden no coincidir con ninguno de los valores de los datos, mientras que la moda siempre es uno de estos valores*, y *la moda y la mediana son, en ocasiones, invariantes si cambian algunos de los datos, mientras que la media sí se ve afectada por cualquier cambio en los datos*.
- *Elementos lingüísticos*. Se presentan los cuatro elementos en los libros: *términos*, *símbolos*, *tablas* y *gráficos*.

- *Argumentos*. Ninguno de los argumentos utilizados cuenta con presencia en los dos libros de texto. En el Texto del Estudiante se presentan dos: *comprobación de casos particulares y contraejemplos*, y *razonamiento verbal deductivo*; mientras que, en el Cuaderno de Actividades, no se utiliza ninguno.

Los autores señalan que existe una deficiencia en el tipo de situaciones-problema y en los conceptos-definición presentados en los documentos. Además, sostienen que no se promueve una comprensión adecuada de las medidas de tendencia central, puesto que solo los elementos lingüísticos cuentan con total presencia en ambos documentos.

En Alvarado y Batanero (2008) se analiza la presentación el teorema central del límite (TCL) en 16 libros de texto de estadística utilizados en la formación de ingenieros, principalmente en Chile. La metodología utilizada consistió en seleccionar los capítulos que traten el tema, determinar los elementos del significado del TCL a partir de un análisis epistémico, elaborar tablas comparativas, realizar un análisis comparativo de contenido y presentar conclusiones. Sus resultados se resumen a continuación:

- *Campo de problemas*. Los más frecuentes corresponden a la *aproximación del teorema mediante la distribución binomial*, la cual está presente en todos los textos, y la *distribución de la suma de variables aleatorias continuas*, presente en 15 de los 16 libros de texto analizados.
- *Lenguaje*. Las *notaciones simbólicas* (lenguaje simbólico) son las más frecuentes, al estar ausente solo en uno de los libros analizados.
- *Procedimientos*. El procedimiento descrito como *cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias* es el único que se presenta en todos los libros.
- *Enunciados*. El más común es el *enunciado del teorema para la suma de variables independientes idénticamente distribuidas*, estando presente en 14 libros de texto.
- *Propiedades*. Las propiedades relacionadas con la c*orrección de continuidad en las aplicaciones del teorema* son las más frecuentes, apareciendo en todos los textos.
- *Argumentos*. Los argumentos enfocados en la *comprobación de ejemplos y contraejemplos, sin pretensión de generalizar*, están presentes en 14 textos.

Estos autores mencionan que la información proporcionada por los libros analizados es valiosa, aunque limitada debido a que sólo proporciona una primera aproximación a la enseñanza del teorema. No obstante, señalan que su estudio presenta un significado de referencia del teorema central del límite, lo que permitiría el diseño de alguna propuesta didáctica de enseñanza.

En la misma línea, Alvarado y Segura (2012) analizan la presentación de las distribuciones muestrales en 22 libros de textos utilizados para la enseñanza de estadística en carreras de ingeniería en Chile. Los 'elementos del significado' analizados en este trabajo son los siguientes:

- *Situaciones problemas*. Los más comunes corresponden a la *estimación por intervalos de confianza* y *pruebas de hipótesis para muestras grandes*, apareciendo en 22 y 21 libros, respectivamente.
- *Lenguaje y representaciones*. Predominan los *términos y expresiones verbales*, ya que se presentan en todos los libros analizados; seguidos de las *notaciones y símbolos*, encontrados en 21 de los 22 libros.
- *Procedimientos*. El más frecuente corresponde al *cálculo de probabilidades en poblaciones distribuidas normalmente para obtener una muestra aleatoria adecuada*; este procedimiento se observa en 17 de los 22 libros de texto.
- *Proposiciones*. Las más típicas son las siguientes: *el valor esperado de la distribución de la media aritmética es la media de la población* y *la varianza de la distribución de la media aritmética es la varianza de la población sobre el tamaño de la muestra de variables aleatorias independientes*; ambas proposiciones se encuentran en 21 libros.
- *Argumentos*. Con respecto a los tipos de argumentos relacionados con las distribuciones muestrales, la *presentación de casos particulares de un resultado general* es el que mayoritariamente se encuentra en los libros analizados (19 de 22).

Sus resultados apuntan que los libros presentan ausencia de fundamentación de propiedades estadísticas, por ejemplo, en métodos de estimación puntual y en la varianza muestral; además, favorecen las expresiones de tipo simbólicas y descuidan las representaciones gráficas y las simulaciones. Finalmente, mencionan que la información extraída de los libros permitió establecer un significado de referencia de las distribuciones muestrales, lo que constituye un primer paso para diseñar una propuesta didáctica para su enseñanza.

Gea, Batanero y otros autores, a través de diversas publicaciones, realizan un análisis sobre la presentación de la correlación y la regresión lineal en libros de texto de bachillerato, los cuales fueron seleccionados por ser los más utilizados en la enseñanza pública en la Comunidad Autónoma de Andalucía, España. En un primer estudio, Gea et al. (2013) analizan las *justificaciones* utilizadas en 16 libros de texto, en los que encontraron que aquellas más utilizados (al estar presentes en todos los textos) fueron el *uso de ejemplos y contraejemplos*, las *representaciones gráficas* y los *razonamientos verbales deductivos*. Posteriormente, en Gea et al. (2014) se presentan los resultados del análisis del *lenguaje* utilizado en ocho libros de texto, encontrando los siguientes resultados:

- *Términos y expresiones verbales*. Se encontró una gran variedad y se clasificaron en dos grupos: por un lado, aquellos que no son específicos del tema (por ejemplo, *coeficiente de variación*, *bisectriz*, *área*) y, por otro lado, aquellos específicos ligados a correlación y regresión lineal (tales como *coeficiente de Pearson*, *método de mínimos cuadrados* o *coeficiente de regresión*).
- *Notación simbólica*. Algunos de los más frecuentes son, por ejemplo, la notación simbólica de la *media* ($\bar{x}$), la *desviación típica* (σ_x, S_x), la *varianza* (σ_x^2, S_x^2), el *coeficiente de correlación* (r_{xy}), entre otros.
- *Representación tabular y gráfica*. En cuanto a la representación tabular, la más frecuente corresponde a las *tablas bidimensionales simples*, ya que se encuentran en todos los textos. Por otra parte, la representación gráfica más utilizada es el *diagrama de dispersión*, también presente en todos los textos.

Complementando los resultados de los dos estudios anteriores, Batanero et al. (2015) analizan los campos de problemas, procedimientos, conceptos y propiedades ligadas a la regresión lineal en 16 libros de texto:

- *Campos de problemas*. Los problemas más frecuentes son aquellos que buscan *ajustar un modelo a los datos bivariantes*. En total, hay 622 problemas de este tipo en los 16 libros. Aproximadamente la mitad de los problemas, ejercicios y actividades están enfocados en *ajustar un modelo de regresión*, mientras que el resto, busca *realizar estimaciones con el modelo ajustado*.

- *Procedimientos*. En todos los libros están presentes los siguientes procedimientos: *ajuste de la recta de regresión*, *determinar una predicción* y *valorar la fiabilidad de la predicción*.
- *Conceptos*. El concepto asociado más frecuente es *rectas de regresión*, al ser el único que se encuentra en todos los libros, además de presentarse en tres formas de la definición: operacional, estructural y mediante ejemplo.
- *Propiedades*. De las once propiedades ligadas a la regresión, cuatro de ellas se presentan en la mayoría de los libros (14 de 16): 1) *la recta de regresión hace mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones de los puntos de la distribución bidimensional a la recta*, 2) *la recta de regresión permite estimar valores de la variable dependiente a partir de la independiente*, 3) *la recta de regresión pasa por el centro de gravedad de la distribución*, y 4) *las estimaciones con la recta de regresión son mejores en valores cercanos a la media de la variable independiente*.

Finalmente, con base en algunas carencias encontradas en su análisis, estos autores entregan algunas recomendaciones para mejorar la presentación de la regresión lineal y la correlación, por ejemplo, incluir procedimientos de cálculo del coeficiente de determinación, ampliar la cantidad de conceptos que aparecen en los textos, dar relevancia a la definición estructural de los conceptos, entre otros.

Gómez-Torres y colaboradores (Gómez-Torres, Ortiz y Gea, 2014; Gómez-Torres, Batanero y Contreras, 2014; Gómez-Torres et al., 2015) analizan la presentación de los significados de probabilidad en dos series de libros de texto de educación primaria de España, siendo un total de diez libros, distribuidos en tres ciclos. Para ello, consideran como referencia cuatro de los cinco significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo) proporcionados en Batanero (2005). Los resultados del análisis de los objetos matemáticos fueron:

- *Situaciones problema*. Las más comunes corresponden a *expresar los grados de creencia en la ocurrencia de sucesos* (significado intuitivo), estando presentes en ambas series durante todos los ciclos.

- *Lenguaje probabilístico.* Se observaron *expresiones verbales*, *numéricas* y *simbólicas, tabulares* y *gráficas*, presentes en todos los textos.
- *Conceptos*. Algunos de los más frecuentes son conceptos como *azar*, *variabilidad*, *suceso seguro*, *posible*, *imposible* (significado intuitivo), *juegos de azar* (significado clásico), *colectivo*, *atributos* (significado frecuencial), entre otros. Todos los anteriores están presentes en los tres ciclos de ambas series.
- *Propiedades*. Se mencionan diversas propiedades presentes en los libros de los tres ciclos de ambas series. Por ejemplo: 1) *impredecibilidad del resultado*, ligada al significado intuitivo; 2) *equiprobabilidad de sucesos elementales*, ligada al significado clásico; y 3) *atributos equiprobables o no equiprobables*, relacionados con el significado frecuencial.
- *Procedimientos*. Al igual que en el objeto matemático anterior, existen diversos procedimientos que están presentes a los tres ciclos de ambas series. En el significado intuitivo, podemos mencionar el *distinguir fenómenos aleatorios y deterministas*; en el clásico, *analizar juegos de azar*; mientras que, en el significado frecuencial, *representar distribución de frecuencias*.
- *Argumentos*. El *uso de ejemplos y contraejemplos* es el tipo de argumentación más frecuente en los textos analizados.

En resumen, estos autores señalan que en todos los ciclos se encuentra el significado intuitivo, por otro lado, los significados clásico y frecuencial están presentes en el segundo y tercer ciclo, mientras que el significado subjetivo cuenta con una baja presencia en ambas series.

Por su parte, Vásquez y Alsina (2015, 2017) entregan un modelo para analizar el tratamiento que se da a la probabilidad en el currículo chileno, incluyendo las orientaciones curriculares y los textos del estudiante (entregados por el MINEDUC) de los seis primeros niveles de educación básica. Cabe señalar que solo se analizaron los libros de texto de 2° a 5° básico, puesto que los de 1° y 6° no incluían contenidos de probabilidad. En su trabajo, al igual que en Gómez-Torres et al. (2015), toman como referencia los significados de probabilidad propuestos por Batanero (2005) y utilizan la tipología de objetos matemáticos primarios.

- *Situaciones-problemas*. En las orientaciones curriculares, las más frecuentes (incluidas en todos los niveles) consisten en *estimar y comparar la posibilidad de ocurrencia en juegos de azar con monedas y dados* (ligado al significado intuitivo). Sin embargo, en los libros de texto, estas situaciones-problemas solo aparecen en los cursos de 2° a 5° básico.
- *Elementos lingüísticos*. El *lenguaje común* y el *probabilístico*, correspondientes a los significados intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico, están presentes en las orientaciones curriculares de todos los niveles. A su vez, el uso de *tablas* y *gráficos* (en el significado frecuencial) también cuentan con presencia en todos los niveles. Mientras que, el *lenguaje común* es el más frecuente en los libros de texto de 2° a 5° básico.
- *Conceptos-definiciones*. Los conceptos de *suerte/azar* y *resultados posibles*, ambos dentro del significado intuitivo, son los más comunes y se encuentran en las orientaciones curriculares de 2° a 6° básico. Por otra parte, en los libros de 2° a 5° básico, se encuentran los conceptos de azar y *suceso seguro, posible e imposible.*
- *Proposiciones*. Dentro de las proposiciones mencionadas, el *grado de posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso* se presenta en las orientaciones curriculares de cuatro niveles (3° a 6°). En cuanto a los libros de texto, esta proposición se encuentra presente solo en tres de ellos (2°, 4° y 5°).
- *Procedimientos*. El único procedimiento presente en todas las orientaciones curriculares es la *manipulación de generadores de azar*, tales como dados, monedas o bolitas. En los libros, este procedimiento aparece en los niveles de 2° a 5° básico, junto con otros, tales como, *reconocer diferentes tipos de sucesos* y *valorar la posibilidad de ocurrencia de un suceso determinado*.
- *Argumentos*. En las orientaciones curriculares, la forma de argumento que predomina es la *convención social*; no obstante, en los libros de texto, solo aparece en dos niveles (4° y 5°). Por otro lado, el argumento que se presenta en todos los libros analizados (2° a 5°) es el *análisis de ejemplos*.

Además de lo anterior, los autores mencionan que, si bien es cierto que existe coherencia entre las situaciones-problemas identificadas en las orientaciones curriculares chilenas y los libros de texto, en general, el tratamiento dado a la probabilidad en los libros de texto no se encuentra siempre en concordancia con las directrices curriculares. Por este motivo, Vásquez y Alsina (2015, 2017) consideran necesario realizar un replanteamiento riguroso en los textos escolares chilenos para contribuir a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje en la enseñanza básica.

En Del Pino y Estepa (2017, 2019) se realizó una revisión de los 12 libros de texto más utilizados en educación pública de los niveles 3° y 4° (en este último se consideraron las modalidades A y B) de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). El objetivo de estos estudios es analizar la presentación de las medidas de dispersión en dichos textos. Para efectuar el análisis, revisaron la presencia de los objetos matemáticos primarios y para cada uno de ellos establecieron subcategorías, lo que facilitó su identificación en los libros.

- *Situaciones-problemas*. Hay un exceso de situaciones-problema vinculadas con el uso de la *desviación típica* en desmedro de las demás medidas de dispersión, las cuales están relegadas a un segundo plano. Por tanto, los autores manifiestan que es necesario equilibrar la cantidad de situaciones-problema para cada medida de dispersión.
- *Elementos lingüísticos*. Estos se presentan en forma de *expresiones verbales* (donde destacan términos como varianza y desviación estándar) y *simbólicas* (considerando *notaciones algebraicas* como $\sigma, \sigma^2, C.V.$, además del uso de fórmulas).
- *Conceptos*. Los más frecuentes son *desviación típica* y *coeficiente de variación*, al estar presentes en 11 libros de texto.
- *Procedimientos*. En todos los libros de texto está presente el procedimiento consistente en *calcular la varianza y la desviación típica*.
- *Propiedades*. Las más comunes, con base a su presencia en todos los libros, son: *a mayor/menor varianza, mayor/menor desviación típica*; y *todos los valores influyen en el cálculo de la varianza y la desviación típica*.
- *Argumentos*. Los argumentos que se presentan con mayor frecuencia son: 1) *argumentos con ejemplos, contraejemplos y comprobaciones*; y 2) *argumentos apoyados en ostensivos* (imágenes, tablas o gráficos).

Además, los autores señalan que existen algunos significados que no se presentan en la muestra de libros de texto analizada, a pesar de estar presente en el currículo de ESO; por ejemplo, algunos libros de 3° no consideran la interpretación, en conjunto, de la media y la desviación típica.

Un estudio que presenta diferencias con los mencionados anteriormente, al no centrar su análisis en la presencia o ausencia de los elementos del significado (objetos matemáticos primarios), es el realizado por Carrera (2020); ya que su objetivo se enfoca en caracterizar los significados de la 'variable aleatoria' pretendidos por el currículo chileno de séptimo básico a segundo medio. Para ello, en primera instancia, la autora determina el significado holístico de referencia; posteriormente, identifica las prácticas matemáticas y los objetos matemáticos presentes en los libros de texto y programas de estudio de 7° básico a 2° medio; y finalmente, determina la representatividad del significado promovido por el currículo, respecto al de referencia. Entre las falencias encontradas se señala que no se identificaron definiciones claras, o bien, se observa una marcada preferencia por las representaciones verbales. Por otro lado, se concluye que el significado pretendido por el currículo chileno está basado principalmente en el significado parcial 'variable aleatoria como variable de interés'.

La estructura de la mayoría de los trabajos expuestos en este apartado guarda una estrecha relación con nuestra investigación, puesto que buscan analizar los elementos del significado presentes o ausentes en libros de texto de un determinado objeto matemático. Estos trabajos conforman un valioso precedente y, de cierta manera, han servido de guía para el desarrollo de este trabajo de Tesis. Consideramos que parte de la importancia de estas investigaciones radica en la utilidad que pueden otorgar a los profesores en ejercicio, es decir, al conocer los elementos ausentes del significado de un cierto objeto matemático, el profesorado podría incluirlos en el aula de clase con el propósito de favorecer la compresión sobre dicho objeto.

2.3.2 Estudios en otras áreas de la Matemática

A continuación, se presentan algunas investigaciones sobre análisis de libros de texto y programas de estudio, centradas en objetos matemáticos de otras áreas externas a la estadística y probabilidad, considerando como marco de referencia el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

Pino-Fan et al. (2013) analizan el plan de estudios y los libros de texto del nivel de bachillerato de México, con el objetivo de caracterizar el significado pretendido por el currículo para la noción de 'derivada'. Para ello, toman en cuenta la reconstrucción del significado global de la derivada presentada en Pino-Fan et al. (2011), y realizan la comparación y valoración de la idoneidad epistémica del significado presente en el currículo. En concreto, se realiza un análisis detallado de los elementos del significado de la derivada en dos libros de texto, destacando:

- *Situaciones/problemas. Problemas introductorios*, *problemas de* refuerzo y ejemplificación, *problemas de aplicación*, y *demostraciones*.
- *Conceptos/definiciones*. Como previos se mencionan *función, límite* y *continuidad*; además, se introducen conceptos relacionados con la derivada como la *velocidad*.
- *Propiedades/proposiciones*. Destacan *teoremas o reglas para derivación*, *criterios de derivabilidad*, *análisis de gráficas* y *regla de la cadena*.
- *Procedimientos*. Algunos de los procedimientos que se mencionan son: *cálculo de magnitudes*, *cálculo de derivadas*, *graficación*, *derivadas mediante su definición como límite*, *cálculo de la derivada de segundo orden*, *análisis de gráficas*, *cálculo de tangentes*, *máximos y mínimos*, y *demostración de teoremas*.
- *Elementos lingüísticos*. Se evidencia el uso del *lenguaje verbal*, *simbólico* y *gráfico*, y se destaca la ausencia de *lenguaje tabular*.
- *Argumentos*. En ambos libros de textos aparecen justificaciones dadas a la *inclusión de conceptos o proposiciones*, *ejemplificación* y *explicaciones de técnicas a seguir*, así como *argumentaciones deductivas y gráfico-visuales*.

Finalmente, en sus resultados mencionan que el significado pretendido en el currículo de bachillerato mexicano acerca de la derivada es 'la derivada como límite del cociente de incrementos'.

En Aké y Godino (2018) se analizan las tareas en un libro de texto mexicano de primer grado de primaria, con el propósito de revelar si dichas tareas promueven desarrollo del pensamiento algebraico en niños de 6 a 7 años. Para efectuar el análisis, se utiliza el Modelo de Niveles de Algebrización (Aké, Godino, Gonzato y Wilhelmi, 2013; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; citados en Aké y Godino, 2018); en concreto, consideran cuatro criterios del modelo:

- *Tipo de objetos algebraicos*. Predomina la noción de *equivalencia, cantidades desconocidas, propiedades de las operaciones* y *sucesión*.
- *Tipo de notación o representaciones*. Se observa la presencia de *numéricas*, *icónicas* y *tabulares*.
- *Transformaciones o cálculo analítico*. No se da un tratamiento analítico a las cantidades desconocidas; en algunos bloques del texto no está presente o no se promueve la *analiticidad con las cantidades indeterminadas*.
- *Situaciones de modelización*. Se reflejan en *problemas de suma y resta*, donde el elemento desconocido corresponde al resultado.

Podemos mencionar que sus resultados apuntan a que las tareas del libro de texto no están dirigidas de manera intencional al desarrollo del pensamiento algebraico en los niños, sin embargo, los autores manifiestan que son factibles de reorientarse hacia niveles progresivos de algebrización.

En el contexto chileno, Monje et al. (2018) analizan los textos escolares y programas de estudio de 4° básico a 4° medio para determinar el tratamiento que se le da a la inecuación. Se centraron en las unidades y capítulos que tratan el tema de inecuación, realizando la lectura meticulosa y elaborando tablas comparativas de los elementos del significado presentes en los documentos. Dentro de sus conclusiones, las autoras mencionan que existe ausencia en el currículo de componentes que se consideran necesarios para una correcta enseñanza de la inecuación, como las *inecuaciones cuadráticas* y las *inecuaciones con valor absoluto*. Además de esto, señalan discontinuidad en la progresión de este objeto en los diferentes niveles, puesto que, en algunos de ellos, la inecuación no es tratada de manera explícita. Finalmente, mencionan que una limitante para la realización de este estudio es la escasa información existente que permitiría reconstruir el significado global de la inecuación.

Finalmente, Pino-Fan et al. (2019) analizan la representatividad de los significados de la función presentes en el currículo chileno de matemática, a través de una reconstrucción de su significado holístico de referencia y un análisis de su presencia en el currículo chileno (entendido como la dupla libros de texto – programas de estudio). En su análisis, determinan la configuración ontosemiótica epistémica del objeto *función* presente en el currículo chileno, a través de los elementos del significado. Sus resultados indican que los significados presentados por el currículo chileno no son representativos respecto del significado holístico de referencia. De acuerdo con los autores, lo anterior debería ser considerado como una señal de alerta para los docentes a la hora de presentar este objeto matemático en el aula, ya que los contenidos presentados en los libros podrían afectar la comprensión del concepto por parte de los estudiantes.

A pesar de que los estudios presentados en esta sección provienen de otras ramas de la matemática, algunos de estos objetos matemáticos tienen relación con la estadística y probabilidad (función de probabilidad), por lo que su importancia no está ajena a este trabajo.

2.4 Conclusiones sobre el estudio de antecedentes

A través de la exploración de diversos estudios (véase apartados 2.2, 2.3 y 2.4), que guardan alguna relación o similitud con nuestro proyecto de tesis, pudimos visualizar los avances que se han realizado en los últimos años con respecto al estudio de la binomial y el análisis de libros de textos, en los cuales encontramos resultados y conclusiones que pueden ser de gran utilidad para profesores e investigadores.

En cuanto a la distribución binomial, se detectaron algunas dificultades presentes tanto en profesores como estudiantes, sobre su comprensión y razonamiento; entre ellas podemos mencionar las siguientes: uso de lenguaje formal y notación algebraica, identificación de la variable aleatoria binomial, descripción del recorrido de la variable, sesgo de equiprobabilidad, no consideración del número de ensayos Bernoulli, problemas al aplicar la esperanza matemática, entre otras. Esto nos resulta preocupante, puesto que muchos estudiantes no logran apropiarse correctamente de los contenidos que involucran a la binomial, a pesar de la importancia que se le ostenta (Landín y Sánchez, 2010; García-García et al., 2014; Mayén y Salazar, 2014) y, por otra parte, si los profesores presentan dificultades en su comprensión, es posible que transmitan dichas dificultades a sus estudiantes. Lo anterior nos lleva a cuestionarnos, por un lado, sobre ¿cuál o cuáles son los principales factores que afectan el razonamiento y la comprensión sobre la distribución binomial? y, por otro lado, ¿qué elementos son necesarios considerar para el diseño de secuencias didácticas que favorezcan la comprensión de este objeto matemático?

Por otra parte, en el análisis de la presentación de un objeto matemático en libros de texto, es común para los autores encontrar deficiencias en los significados promovidos en tales recursos didácticos, los cuales podrían generar dificultades o conflictos en los estudiantes. Como muestra de lo anterior, tres de los estudios resumidos en el presente capítulo abordan el análisis y representatividad de un objeto matemático en el currículo chileno (Monje et al., 2018; Pino-Fan et al., 2019; Carrera, 2020) y, en todos ellos, se llegó a la conclusión de que el significado promovido no es representativo del significado de referencia utilizado, por lo que podríamos extender esta situación y planteamos la siguiente pregunta: ¿qué resultados se encontrarían si se analizan los significados de otros objetos matemáticos presentes en el currículo chileno? En este sentido, centrando la mirada en nuestro objeto probabilístico-matemático, ¿qué tan representativo es el significado de la distribución binomial presente en el currículo chileno de educación media respecto del significado referencial?

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Introducción

En el presente capítulo presentamos los aspectos metodológicos que se utilizaron para llevar a cabo nuestro estudio. Partiremos explicando el tipo de metodología, luego describiremos cada una de las fases del estudio, haremos un recorrido por el currículo chileno de educación media y su organización, y finalizaremos con la descripción de las técnicas de análisis. Nuestro diseño metodológico fue construido tomando en cuenta aspectos que, consideramos, nos permitirían realizar un análisis detallado y óptimo sobre la presencia de la distribución binomial en el currículo chileno de cuarto medio.

3.2 Tipo de metodología

La metodología que utilizaremos en nuestro estudio está basada en un *enfoque cualitativo* de investigación, el cual, de acuerdo con Hernández et al. (2014) puede entenderse como "un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo 'visible', lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos" (p. 9). Además de lo anterior, en este enfoque, el investigador recolecta datos expresados a través de un lenguaje verbal y/o visual, mediante observaciones, entrevistas, revisión de documentos, entre otros, y no busca generalizar sus resultados de manera probabilística. Otra característica relevante del enfoque cualitativo, según estos autores, es que "se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones" (p. 9), es decir, se busca 'reconstruir' la realidad, a través de la interpretación de los datos obtenidos.

Consideramos que el enfoque cualitativo, por los rasgos mencionados en el párrafo anterior, es adecuado para la metodología a seguir en nuestra investigación, puesto que los datos son obtenidos a partir de la revisión de documentos curriculares, para luego ser analizados mediante las herramientas teóricas descritas en el apartado 1.3, y con ello, dar una perspectiva interpretativa centrada en el estudio detallado de la distribución binomial en el currículo chileno de cuarto medio, considerando el Material Didáctico y el Programa de Estudio de este nivel, y determinando así, los significados parciales y los elementos del significado presentes en estos documentos.

3.3 Fases del estudio

Para lograr los objetivos de la presente investigación, proponemos un diseño metodológico que consta de cuatro fases, además de una breve descripción de las actividades a realizar. Estas fases surgen a partir de una articulación realizada entre las metodologías descritas en Parra (2015) y Vásquez y Alsina (2015, 2017).

Fase 1: determinar los significados promovidos por el Programa de Estudio de cuarto año medio sobre la distribución binomial.

- Se revisará el Programa de Estudio de Matemática de cuarto año medio para Formación General, proporcionado por el Ministerio de Educación de Chile, con el propósito de identificar e individualizar en unidades de análisis las actividades y contenidos propuestos para el estudio de la distribución binomial.
- Se analizará la presencia o ausencia, en cada unidad de análisis, de los objetos matemáticos primarios de cada significado parcial de la distribución binomial, de acuerdo con el significado referencial descrito en el apartado 1.4.2. A partir de esto, se determinarán los significados de la binomial promovidos por el Programa de Estudio.

Fase 2: determinar los significados promovidos en el Material Didáctico (Texto del Estudiante, Cuaderno de Actividades y Guía Didáctica del Docente) de cuarto año medio sobre la distribución binomial.

- Se revisarán los tres componentes del Material Didáctico para cuarto año medio (Texto del Estudiante, Cuaderno de Actividades y Guía Didáctica del Docente) proporcionado por el Ministerio de Educación de Chile, con el propósito de identificar e individualizar en unidades de análisis las actividades y contenidos propuestos para el estudio de la distribución binomial.
- Se analizará la presencia o ausencia, en cada unidad de análisis, de los objetos matemáticos primarios de cada significado parcial de la distribución binomial, de acuerdo con el significado referencial descrito en el apartado 1.4.2. A partir de esto, se determinarán los significados de la binomial promovidos por el Material Didáctico.

Fase 3: contrastar los resultados de los significados promovidos de la distribución binomial por el Programa de Estudio y el Material Didáctico.

- Se contrastarán los significados promovidos por el Programa de Estudio (resultados de la Fase 1) con los significados promovidos por el Material Didáctico (resultados de la Fase 2), identificando similitudes y diferencias entre ambos componentes. A partir de esto se determinarán los significados de la distribución binomial promovidos por el currículo chileno de cuarto año de Educación Media.

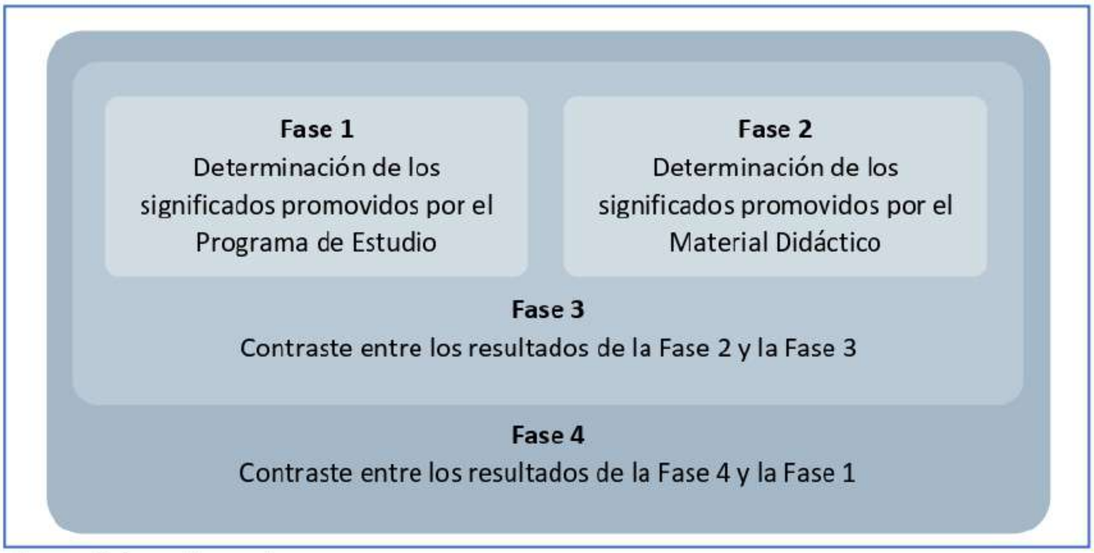
Fase 4: contrastar los significados promovidos por el currículo chileno de la distribución binomial con el significado referencial.

- Se contrastarán los significados promovidos por el currículo chileno (resultado de la Fase 3) respecto del significado referencial de la distribución binomial (descrito en la sección 1.4.2), identificando los elementos presentes y ausentes.
- Se determinará la representatividad de los significados de la distribución binomial a través de un valor porcentual y su interpretación.

Las cuatro fases descritas pueden organizarse, de manera resumida, mediante el diagrama presentado en la Figura 3.1.

Figura 3.1

Fases del estudio



Fuente. Elaboración propia.

3.4 El currículo de Educación Media: datos y contexto

Antes de indicar en qué curso de Educación Media se aborda la distribución binomial, es necesario comprender la organización del tiempo escolar en los niveles de 1° a 4° medio, el cual es descrito detalladamente en las Bases Curriculares establecidas por el MINEDUC (2015, 2019). Estas bases constituyen el documento principal del currículo chileno, de acuerdo con lo establecido en la Ley General de Educación (LGE), y organizan (de manera general) los aprendizajes de las diferentes asignaturas, estableciendo los lineamientos que deben seguir los demás documentos curriculares; por ejemplo, los programas de estudio de cada asignatura, puesto que basan su estructura en lo señalado en las Bases Curriculares y podrían considerarse como su extensión.

En el sistema escolar actual se reconocen doce niveles de educación obligatoria, ocho en Educación Básica y cuatro en Educación Media, sin embargo, en la Ley General de Educación de 2009 (Ley N° 20.370) se considera que la Educación Media tendrá una duración de seis años, abarcando desde 7° básico hasta 4° medio. Asimismo, estos seis años se subdividen en dos ciclos: un primer ciclo de formación general común, que incluye los cuatro primeros niveles (7° básico a 2° medio) y un último ciclo de formación diferenciada, que abarca los dos niveles restantes (3° y 4° medio).

En ese sentido, la formación en los niveles de 7° básico a 2° medio, promovida por las Bases Curriculares, es común para todos los establecimientos del país y, por consiguiente, las asignaturas impartidas de manera obligatoria también lo son (Lengua y Literatura; Matemática; Ciencias Naturales; Historia, Geografía y Ciencias Sociales; Idioma Extranjero: Inglés; Educación Física y Salud; Música; Artes Visuales; Orientación; Tecnología; y Religión). Por otro lado, en el ciclo de 3° y 4° medio se contemplan tres posibles modalidades o formaciones diferenciadas: Humanístico-Científica, Artística y Técnico-Profesional, donde cada establecimiento puede adoptar por una o más de estas modalidades. En cada una de ellas, el tiempo de clases se distribuye en tres ámbitos: Formación General, Formación Diferenciada y tiempo de libre disposición.

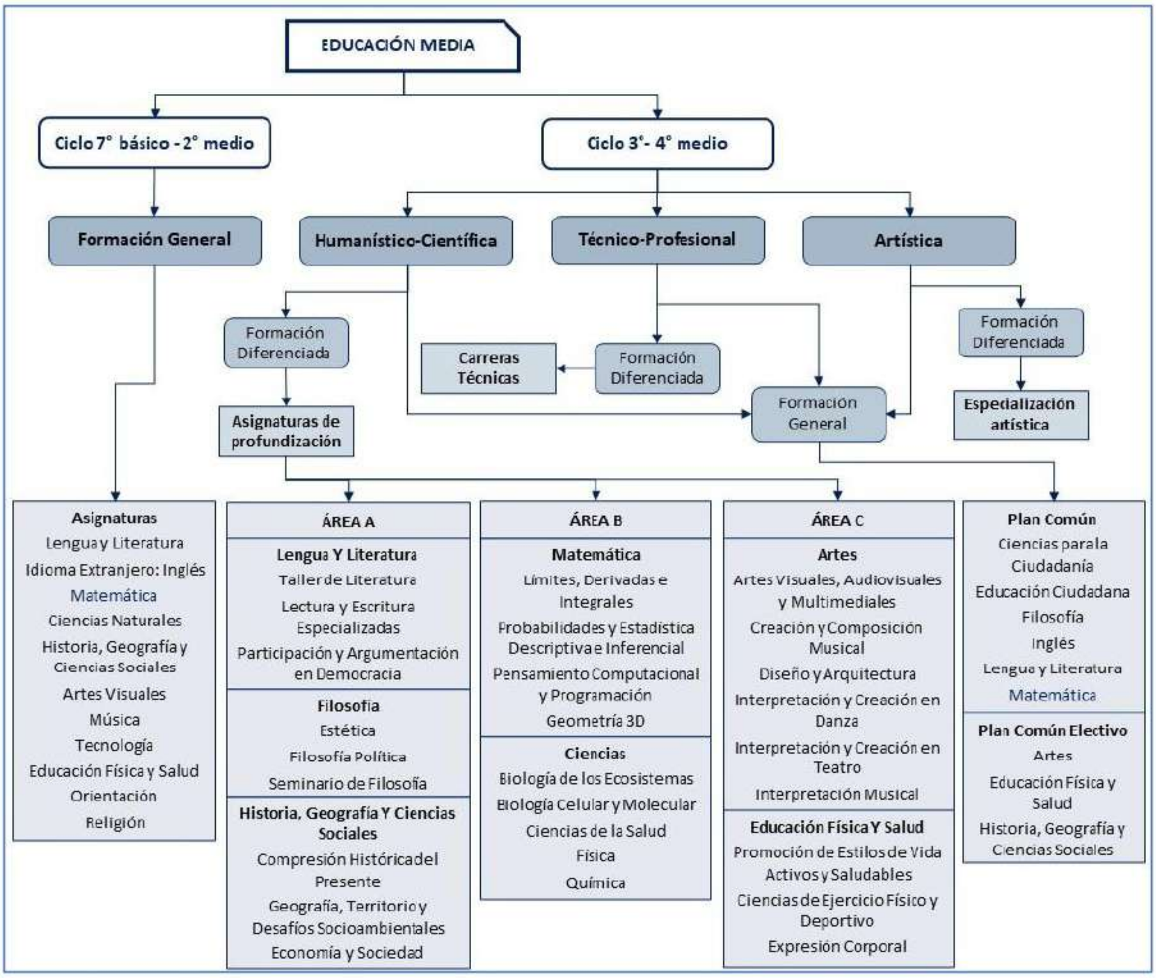
La Formación General está destinada a todos los establecimientos, considerando un Plan Común (donde se encuentran las asignaturas de Ciencias para la Ciudadanía; Educación Ciudadana; Filosofía; Inglés; Lengua y Literatura; y Matemática) y un Plan Común Electivo (donde cada estudiante puede elegir entre Artes; Educación Física y Salud; o Historia, Geografía y Ciencias Sociales). Cada formación diferenciada tiene diferente orientación: 1) Técnico-Profesional, está orientada a la formación en una especialidad técnica en diferentes sectores económicos; 2) Artística, se orienta a la formación especializada en diferentes áreas artísticas; y 3) Humanístico-Científica, se destina para la profundización en áreas de interés para los estudiantes: Área A (que contempla tres sub-áreas: Lengua y Literatura; Filosofía; Historia, Geografía y Ciencias Sociales), Área B (subdividida en dos sub-áreas: Matemática; Ciencias) y Área C (que abarca dos sub-áreas: Artes; Educación Física y Salud). Finalmente, el tiempo de libre disposición es aquel que los establecimientos destinan a profundizar en diferentes ámbitos, basándose en sus proyectos educativos y/o en los intereses de sus alumnos.

Para comprender de mejor manera lo descrito en los párrafos anteriores, presentamos la Figura 3.2, donde se aprecia la estructura de organización de las modalidades y asignaturas disponibles en Educación Media.

Hasta 2019, la distribución binomial estaba incorporada explícitamente dentro de los contenidos de 3° medio, y su aproximación a la distribución normal, en 4° medio; en ambos casos para Formación General. Esta situación cambió con la publicación de las últimas Bases Curriculares a finales de 2019, las cuales entraron en vigor entre los años 2020 y 2021, y donde la introducción formal de la binomial (y también de la normal) se realiza en el nivel de 4° medio. De acuerdo con estas nuevas bases (MINEDUC, 2019) la asignatura de Matemática para Formación General en 3° y 4° medio, cuenta con cuatro unidades, cada una ligada con un Objetivo de Aprendizaje (OA) de *conocimiento y comprensión*, que se profundizan en el Programa de Estudio.

Figura 3.2

Organización de los ciclos de Educación Media



Fuente. Elaboración propia.

La distribución binomial se presenta formalmente en el Programa de 4° Medio para Formación General, dentro de la Unidad 1: "La toma de decisiones en situaciones de incerteza"; ligada con el Objetivo de Aprendizaje 2 (OA2): "Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal" (p. 29). En este documento se proporcionan diversas herramientas que el docente puede utilizar en sus clases, tales como, indicadores de evaluación, sugerencias de actividades, orientaciones didácticas, recursos didácticos, propuestas de evaluación y proyectos interdisciplinarios.

Adicionalmente, el Material Didáctico para 3° y 4° medio, proporcionado por el MINEDUC, fue elaborado por la editorial SM y cuenta con tres componentes. A los estudiantes se les hace entrega del Texto del Estudiante propiamente tal, que incluye los contenidos de ambos niveles, además del Cuaderno de Actividades dividido en dos tomos (1 y 2), que contiene ejercicios complementarios para 3° y 4° medio, respectivamente. Por otro lado, a los profesores se les proporciona la Guía Didáctica del Docente, también dividida en dos tomos (1 y 2) para 3° y 4° medio, respectivamente. Esta guía, además de traer incorporadas las páginas del Texto del Estudiante y el Cuaderno de Actividades, incluye diversas ideas, sugerencias o ayudas para abordar el trabajo con los alumnos, tales como errores frecuentes, trabajos colaborativos, preguntas de calidad, herramientas digitales, entre otros; y su vez, proporciona actividades complementarias y propuestas de evaluación.

De estos cinco documentos, tres de ellos incluyen los contenidos de 4° medio (Texto del Estudiante, Cuaderno de Actividades Tomo 2 y Guía Didáctica del Docente Tomo 2). La tríada de estos documentos, como propuesta editorial, es lo que, para fines de este estudio, consideramos como Material Didáctico de matemática de 4° medio. Ahora bien, la estructura del Programa de Estudio descrita anteriormente (donde se aborda la distribución binomial), se plasma en cada componente del Material Didáctico dentro de la Unidad 3: "La toma de decisiones en situaciones de incerteza", Lección 5: "Toma de decisiones analizando la distribución binomial". Adicionalmente, dentro de la misma unidad, en la Lección 6: "Toma de decisiones analizando la distribución normal", se encuentra incorporada la aproximación normal a la binomial.

Por otro lado, la distribución binomial cuenta con presencia en el Plan de Formación Diferenciada Humanístico-Científica de 3° y 4° medio, en el Área B, sub-área de Matemática, en la asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial (MINEDUC, 2021), dentro de la Unidad 3: "Situaciones o fenómenos que se modelan por medio de las distribuciones binomial y normal", ligada al Objetivo de Aprendizaje 3 (OA3): "Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal" (p. 28). Para este trabajo, no se está considerado el análisis de este documento, puesto que, al ser una asignatura de carácter electivo de formación diferenciada, solo algunos estudiantes de establecimientos Humanístico-Científico pueden acceder a ella, dependiendo esto, principalmente, de dos factores: que el establecimiento educacional decida ofrecerla como alternativa y de la elección personal que tomen los propios estudiantes de estas instituciones.

En concreto, en este estudio nos enfocaremos en identificar los significados parciales de la distribución binomial que privilegia el actual currículo chileno de cuarto año de Educación Media, y de esta manera, valorar su representatividad con respecto al significado referencial.

Los documentos que se analizan en este estudio corresponden a los otorgados por el MINEDUC, editados recientemente. La forma de selección de los documentos fue mediante un muestreo dirigido, es decir, se seleccionan de acuerdo con las características que interesan en este trabajo (Hernández et al., 2014). En la Tabla 3.1 se muestran los documentos que forman parte de nuestro estudio.

Tabla 3.1

Documentos que se analizan en este estudio

Documento	Código	Título	Autores	Editorial	Año
Programa de Estudio	PE	Programa de Estudio Matemática 4° Medio para Formación General	Unidad de Currículum y Evaluación	MINEDUC	2021
Texto del Estudiante	TE	Texto del Estudiante de Matemática 3° y 4° medio	Osorio et al.	SM	2019
Cuaderno de Actividades	CA	Cuaderno de Actividades de Matemática 3° y 4° medio Tomo 2	Norambuena et al.	SM	2019
Guía Didáctica del Docente	GDD	Guía Didáctica del Docente de Matemática 3° y 4° medio Tomo 2	Morales et al.	SM	2019

Fuente. elaboración propia.

3.5 Método para el análisis de los datos

De acuerdo con Andréu (2002, p. 2), el análisis de contenido:

es una técnica de interpretación de textos, ya sean escritos, grabados, pintados, filmados..., u otra forma diferente donde puedan existir toda clase de registros de datos, trascripción de entrevistas, discursos, protocolos de observación, documentos, videos, ... el denominador común de todos estos materiales es su capacidad para albergar un contenido que leído e interpretado adecuadamente nos abre las puertas al conocimiento de diversos aspectos y fenómenos de la vida social. (Andréu, 2002, p. 2)

Bajo esta perspectiva, en este trabajo vamos a entender el análisis de contenido como una técnica de interpretación de textos que utiliza la lectura como instrumento para recabar información, buscando explicar y sistematizar el contenido de manera objetiva y con fundamento científico.

Para efectuar el análisis de contenido en cada uno de los documentos seleccionados para este estudio (ver Tabla 3.1), consideraremos algunas técnicas propuestas en Cobo (2003). Allí se menciona que "la segmentación de los datos en unidades relevantes y significativas es considerada como una de las prácticas más características del análisis de datos cualitativos" (p. 28). Con base en lo anterior, y con el propósito de facilitar el análisis, se comenzará examinando el Programa de Estudio (PE) y el Material Didáctico (MD) de cuarto medio, esto con el propósito de identificar los capítulos o secciones que incluyan elementos relacionados con alguno de los significados parciales de la binomial; las secciones identificadas se considerarán *unidades de análisis primarias*. Posteriormente, cada unidad de análisis primaria se segmentará en *unidades de análisis secundarias*, correspondientes a párrafos que cumplan con al menos una de las siguientes condiciones: 1) contener de manera explícita elementos relacionados con el objeto matemático, o bien, 2) requerir el uso implícito o explícito del objeto matemático. Finalmente, en cada una de las unidades de análisis secundarias, se identificará la presencia de los elementos del significado relacionados con la distribución binomial, los cuales fueron descritos dentro del apartado 1.4.2. Cabe señalar que, en caso de encontrar alguno nuevo, este se describirá en el Capítulo 4 (Análisis y resultados).

Sumado a lo anterior, con la finalidad de complementar las técnicas tomadas de Cobo (2003), incorporaremos en nuestro método de análisis los cinco criterios propuestos en Pino-Fan et al. (2013), los cuales permiten analizar y caracterizar los significados de un objeto matemático en un determinado currículo, y de esta manera, valorar su representatividad con respecto a su significado holístico de referencia. Estos criterios, adaptados a nuestro objeto probabilístico-matemático, son:

- *Representatividad de las situaciones-problema propuestas.*

  Es importante que las situaciones-problema propuestas a los estudiantes provengan de un amplio sector que involucre, en lo posible, todos o la mayoría de los campos de problemas ligados al objeto matemático. Esto con el fin de presentar a los alumnos significados del objeto que sean representativos del significado referencial y, de esta manera, promover aprendizajes significativos en ellos.

- *Tipo de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas.*

  En el análisis se deben considerar las diferentes formas de lenguajes (elementos lingüísticos) que se utilizan para representar a los objetos matemáticos involucrados, además de los tratamientos y conversiones que se realicen entre ellos.

- *Representatividad de los elementos regulativos y argumentativos.*

  Tomando en cuenta los elementos lingüísticos identificados mediante el criterio anterior, es posible identificar los demás elementos del significado: definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos presentes en cada una de las unidades de análisis. Posteriormente, a través de una comparación con los respectivos elementos ligados al significado referencial de la distribución binomial, se podrá valorar la representatividad de su presencia en los documentos a analizar.

- *Conocimientos previos a la introducción de la distribución binomial.*

  Se considera la presentación de los conocimientos previos, y su relación entre ellos, de la binomial. Para efectuar el análisis, en primer lugar, se enumeran los conocimientos previos que sean mencionados de manera textual en los documentos; en segundo lugar, tomando como referencia los resultados del estudio histórico-epistemológico y el uso posterior que se le dé en los documentos respectivos, se emitirá una valoración sobre la pertinencia de dichos conocimientos previos.

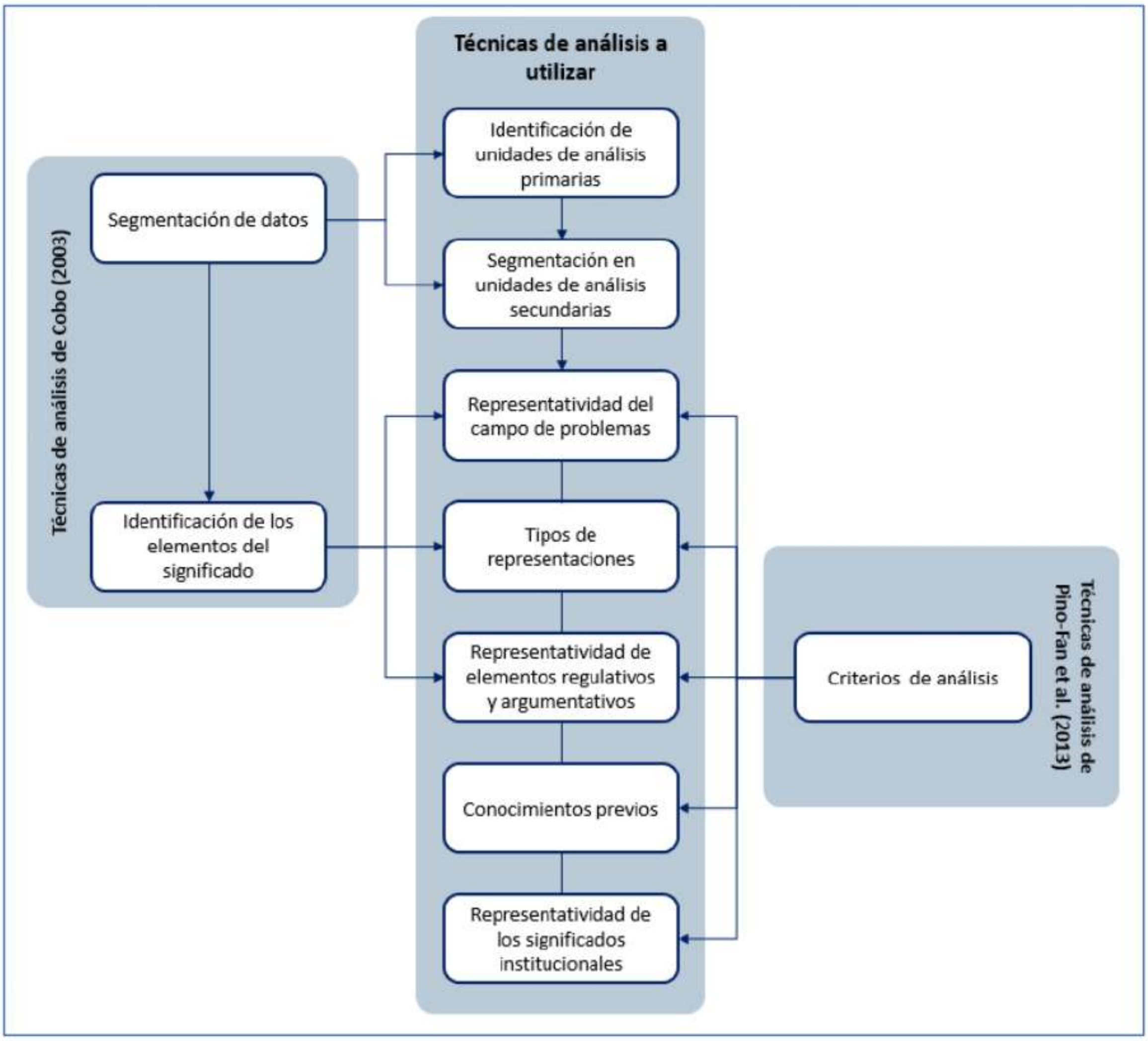
- *Representatividad de los significados institucionales propuestos respecto del significado referencial.*

  La instrucción impartida por los docentes en sus clases de matemática debe ser epistémicamente idónea; para esto, los contenidos propuestos en el currículo (Programa de Estudio – Material Didáctico) que conforman los significados institucionales, deben ser representativos del significado referencial del objeto matemático. Privilegiar prominentemente algunos significados parciales por sobre otros, o directamente omitir algunos, podría influir negativamente en la comprensión del objeto matemático por parte de los estudiantes, afectando así, el proceso de instrucción.

La articulación entre las técnicas de análisis de datos mencionadas anteriormente se puede resumir en el diagrama de la Figura 3.3.

Figura 3.3

Articulación entre las técnicas de análisis



Fuente. Elaboración propia.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

4.1 Introducción

En el presente capítulo se presentan los resultados obtenidos al efectuar el análisis de contenido en cada uno de los documentos que forman parte del currículo chileno de cuarto medio. En primera instancia, se muestran los resultados del análisis de la presencia de cada uno de los objetos matemáticos primarios de los significados parciales de la distribución binomial, acompañados de figuras (imágenes extraídas de los documentos) y una breve descripción; posteriormente, se exhiben los resultados de las fases del estudio descritas en el diseño metodológico (véase apartado 3.3), desde el análisis de cada documento hasta la valoración de la representatividad de los significados de la binomial promovidos en el currículo chileno, esto con respecto a su significado referencial.

4.2 Análisis de los elementos del significado de la distribución binomial

4.2.1 Análisis de las situaciones-problema

Como se mencionó anteriormente, de acuerdo con el EOS, las situaciones-problema corresponden a actividades o tareas inmersas en contextos tanto intra como extra matemáticos y generan la intervención de los demás elementos del significado, los cuales son utilizados para darle solución. Es por este motivo que son el primer elemento en ser analizado. A continuación, se presenta el tratamiento que se le da a las situaciones-problema ligadas a cada significado parcial en el currículo chileno de cuarto medio.

- *Situaciones-problema relacionadas con el significado parcial 1*

En este significado parcial se consideran situaciones-problema previas al uso de la distribución binomial para el cálculo de probabilidades, por ejemplo, el conteo de casos mediante el uso de diferentes técnicas o representaciones. Adicionalmente, se comienza a construir parte de la fórmula, específicamente, el coeficiente binomial, así como su relación con el triángulo de pascal y el uso de factoriales.

En ninguno de los documentos revisados se detectaron situaciones-problema del tipo S1.1: *selección de dos cosas de X diferentes*, aunque sí se encontraron algunas del tipo S1.2: *determinación de casos posibles, favorables o no favorables*, principalmente en el programa de estudio, aunque también apareció en la evaluación diagnóstica propuesta por la Guía

Didáctica del Docente. Como ejemplo, presentamos las Figuras 4.1 y 4.2; la primera está relacionada con el conteo directo de casos y se apoya con el uso de representaciones (diagrama de árbol) para determinar la cantidad de casos posibles para diferentes sucesos, y la segunda se enfoca en buscar patrones en el conteo de casos, introduciendo la generación de números combinatorios y su relación con el Triángulo de Pascal.

Figura 4.1

Situación-problema S1.2 (lanzamiento de dos monedas)

6. ¿Cuántas formas tienen de combinar los éxitos y los fracasos? Observen el diagrama y respondan:
    a. ¿De cuántas maneras se puede combinar dos fracasos o cero éxitos?
    b. ¿De cuántas maneras se puede combinar un éxito y un fracaso?
    c. ¿De cuántas maneras se puede combinar dos éxitos?

Fuente. Programa de Estudio, p. 36

Otro tipo de situación-problema vinculada a este significado parcial corresponde a la S1.3: *determinación de la variable aleatoria (discreta) y/o sus valores*, la cual fue introducida a partir del análisis de los documentos pertenecientes al currículo chileno de cuarto medio; en concreto, se presentan situaciones-problema en las que solicita describir la variable aleatoria o enumerar sus valores. La S1.3 está directamente relacionada con los casos posibles en un experimento aleatorio, por ello, fue incorporada en el SP1, y fue detectada en todos los documentos, salvo el Cuaderno de Actividades; un ejemplo se observa en el inciso *a)* de la Figura 4.3, donde se solicita al estudiante definir la variable aleatoria de un experimento dado. Cabe señalar que la S1.3 es recurrente en los tres componentes del Material Didáctico y en el programa de estudio.

Figura 4.2

Situación-problema S1.2 (lanzamiento de cuatro monedas)

1. Considera que la variable aleatoria es $X = k$ (sellos). Las siguientes representaciones muestran que hay solamente 1 camino para los extremos $X = 0$ y $X = 4$. Para $X = 1$ y $X = 3$ hay 4 caminos y para $X = 2$ hay 6 caminos.

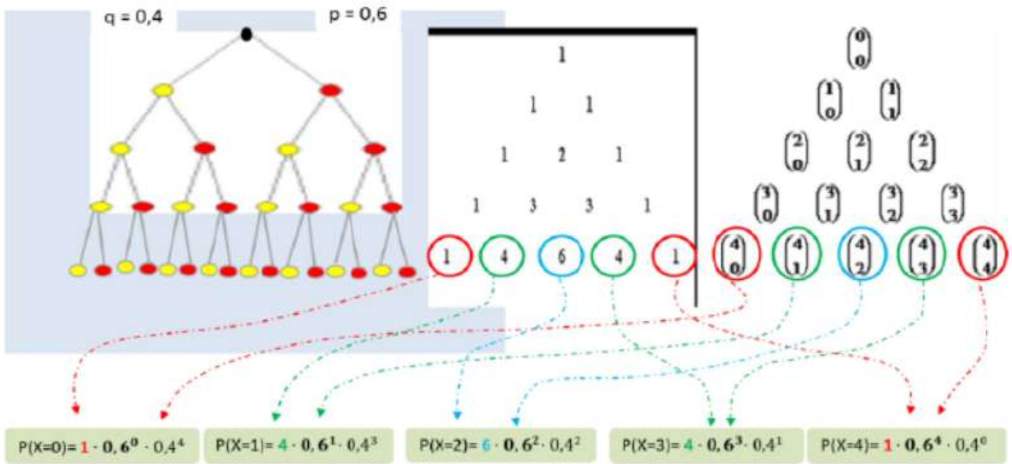


Fig. 1: Representaciones de una situación binomial con paseo al azar, triángulo de Pascal y coeficientes binomiales.

En general, las situaciones que se representa son con n repeticiones y se elige k, que puede ser caras - sellos, derecha -izquierda, éxitos-fracasos, sí-no u otras posibilidades binomiales.

a. Determina el número de caminos en los tres casos.
b. Identifica similitudes y diferencias en la forma de escribir las representaciones.

Fuente. Programa de Estudio, p. 54

Figura 4.3

Situación-problema S1.3

1. Analiza la siguiente situación y responde.

Una tienda vende mensualmente dos modelos de zapatos en las cantidades indicadas.

La probabilidad de que un zapato venga con una falla de fábrica es de 0,05 y se quiere determinar cuántas unidades debe haber en stock para remplazarlos.

7 tacones rojos.

37 zapatos formales.

a. Define la variable aleatoria X asociada a dicho experimento.
b. ¿Es una variable de Bernoulli? Justifica tu respuesta.
c. ¿Cuántos zapatos de cada modelo se deben fabricar para remplazarlos?

Fuente. Texto del Estudiante, p. 171

- *Situaciones-problema relacionadas con el significado parcial 2*

En el significado parcial 2 se comienzan a calcular probabilidades de sucesos inscritos en un fenómeno binomial, aunque sin llegar a utilizar explícitamente la fórmula. Podría considerarse como un significado de transición o de construcción para establecer la fórmula de la distribución binomial.

Solo se encontró un ejercicio del tipo S2.1: *asignación de valor a un ensayo*, el cual corresponde a relacionar una situación binomial con cantidades en un determinado contexto, por ejemplo, con valores monetarios, como es el caso de la situación-problema de la Figura 4.4.

Figura 4.4

Situación-problema S2.1

e. Si por cada respuesta acertada se ganan de $100 000 y por cada pregunta errada se pierden $10 000. ¿Cuál es el premio final esperado?

Fuente. Cuaderno de Actividades, p. 34

En el Programa de Estudio se visualizan de manera recurrente situaciones-problema del tipo S2.4: *probabilidad de una cantidad específica de aciertos en un fenómeno binomial*, el cual se aplica posteriormente al conteo de casos y al uso de representaciones (diagrama de árbol). Por ejemplo, en la actividad de la Figura 4.5 se pide calcular probabilidades específicas para cada suceso posible al utilizar un aparato de Galton con cinco filas; esta se realiza antes de construir la fórmula binomial, por lo que los estudiantes deben resolverla mediante el conteo de casos y la regla de Laplace.

Figura 4.5

Situación-problema S2.4

10. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha llegue a una casilla en específico?
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha llegue a la casilla 0, $P(X = 0)$?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha llegue a la casilla 1, $P(X = 1)$?
    c. Repite la pregunta anterior hasta llegar a la casilla 5, $P(X = 5)$.

Fuente. Programa de Estudio, p. 35

En relación con S2.5: *probabilidad de un intervalo de valores de la variable aleatoria (V.A.) de la distribución binomial (sin uso de la fórmula)*, solo se encontró en el Programa de Estudio. En la actividad de la Figura 4.6 se pide calcular probabilidades con la ayuda de representaciones gráficas: el primer inciso se relaciona con S2.1, mientras que el segundo con S2.5, ya que se solicita calcular la probabilidad para los valores de la V.A. menores o iguales a 2.

Figura 4.6

Situación-problema S2.5

c. Construye esquemas que te permitan responder las siguientes preguntas:
- ¿Cuál es la probabilidad de encontrar valores tales que $X = 4$?
- ¿Cuál es la probabilidad de encontrar valores tales que $X \leq 2$?

Fuente. Programa de Estudio, p. 57

En cuanto a las situaciones-problema S2.2: *validación de aleatoriedad de fenómenos*, S2.3: *probabilidad de casos extremos* y S2.6: *calcular la esperanza de una serie de fenómenos binomiales incompletos*; estas no fueron detectadas en ninguno de los documentos analizados.

- *Situaciones-problema relacionadas con el significado parcial 3*

En este significado parcial se presentan situaciones relacionadas con la distribución binomial de manera formal, es decir, aplicando la fórmula, calculando sus estadísticos o haciendo uso de sus representaciones.

La situación-problema S3.1: *la probabilidad de cualquier fenómeno binomial (usando la fórmula)* cuenta con presencia en todos los documentos, puesto que consiste en hacer uso directo de la fórmula binomial para el cálculo de probabilidades, por ejemplo, en la Figura 4.7 se debe calcular la probabilidad para $X = 0$ y $X = 1$, de manera independiente.

Figura 4.7

Situación-problema S3.1

1. Se realiza un estudio para conocer la eficiencia de cierto medicamento para perros, y se determinó que este presenta una probabilidad de reacción negativa de 0,15. Si consideráramos una muestra de 30 perros, determina:
   a. Probabilidad de las siguientes situaciones:
      - Ningún perro tenga reacción negativa.
      - Un perro tenga reacción negativa.

Fuente. Texto del Estudiante, p. 190

En cuanto a las situaciones-problema relacionadas con medidas estadísticas de la binomial, podemos mencionar tres: S3.2, S3.3 y S3.4. La primera, S3.2: *esperanza (valor esperado) de un fenómeno binomial variable*, puede visualizarse en la Figura 4.8, donde se pide al estudiantado (explícitamente) calcular la esperanza de situaciones binomiales descritas previamente.

Figura 4.8

Situación-problema S3.2

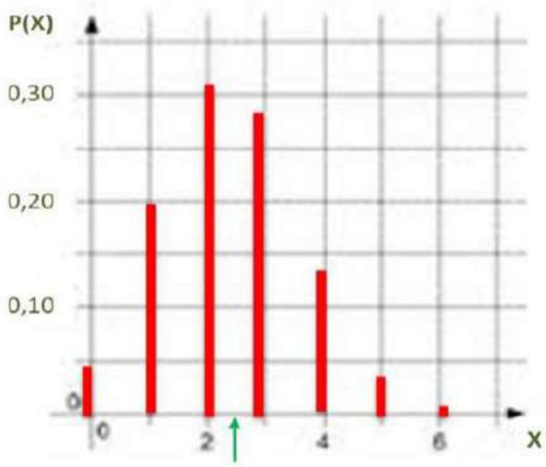
3. Determina la varianza y la esperanza de las distribuciones binomiales anteriores.

Fuente. Guía Didáctica del Docente, p. 329

La situación-problema S3.3: *cantidad más probable de aciertos, interpretación de la media*, se muestra, por ejemplo, en la Figura 4.9, donde se solicita dar una interpretación del significado del valor de la media representada en un gráfico.

Figura 4.9

Situación-problema S3.3



b. Ubica en la flecha verde el valor que corresponde, ¿te imaginas que es una balanza? ¿Qué significa esa flecha/valor para los resultados?

Fuente. Programa de Estudio, pp. 56-57

También es frecuente que se solicite el cálculo de la varianza de una situación binomial, lo cual está ligado con S3.4: *dispersión del número de aciertos, interpretación de la varianza o la desviación estándar*. Un ejemplo de esto de observa en la Figura 4.8, donde se pide obtener la varianza (junto con la esperanza). Cabe señalar que, en la mayoría de los casos, solo se solicita calcular el valor numérico sin dar una interpretación del mismo.

En la Figura 4.10 es posible observar la situación-problema S3.5: *probabilidad de un intervalo de valores de la V.A. de la distribución binomial,* específicamente en los incisos *b)* y *d)*, donde se debe aplicar la fórmula de la binomial para obtener la probabilidad de un conjunto de valores de *X*, para luego sumarlos y así obtener la respuesta.

Figura 4.20

Situación-problema S3.5

2. Se define la siguiente variable X: número de caras obtenidas que son divisores de 6, en 20 lanzamientos de una moneda cargada. Se sabe, además, que $\mu = 16$ y $\sigma = 0{,}4$.
   a. Determina el valor de p y q.
   b. Calcula la probabilidad de obtener al menos 10 caras en los 20 lanzamientos de la moneda.
   c. Se define la variable Y: número de sellos obtenidos en 15 lanzamientos de dicha moneda cargada. Determina el valor de los parámetros de la distribución binomial.
   d. Calcula la probabilidad de obtener al menos 5 sellos en los 15 lanzamientos.

Fuente. Guía Didáctica del Docente, p. 335

La situación S3.8: *determinar si un fenómeno probabilístico cumple con un comportamiento binomial* fue incorporada en el análisis de contenido, al ser detectada en el Texto del Estudiante, y engloba aquellas situaciones en las que se solicita verificar si una situación cumple con las condiciones necesarias para ser modelada mediante una distribución binomial. Un ejemplo de esto se presenta en la Figura 4.11, inciso *b)*, donde se solicita analizar las características del experimento para establecer si corresponde o no a un fenómeno binomial.

Figura 4.13

Situación-problema S3.8

3. Analiza el siguiente experimento y responde:

Se lanza doce veces un dado de seis caras y se define la variable aleatoria X: número de caras obtenidas que son múltiplos de 3.

a. Determina el valor de los parámetros p, q y n.

b. ¿Reúne las condiciones para ser modelado mediante la distribución binomial? Justifica tu respuesta.

Fuente. Texto del Estudiante, p. 169

También en la Figura 4.10, en los incisos *a)* y *c)*, está presente la situación-problema S3.9: *determinar los parámetros de un experimento binomial*. Esta situación se fue detectada con frecuencia en los tres componentes del Material Didáctico y fue introducida a partir del análisis de contenido; se presenta cuando se solicita determinar o identificar los parámetros p, q, o n en un fenómeno binomial dado. Otro ejemplo de esta situación se puede apreciar en la Figura 4.11, inciso *a)*.

Por su parte, la situación-problema S3.10: *construir el gráfico de la distribución binomial*, también fue introducida en el análisis de contenido y se presenta cuando, dados los parámetros de una situación binomial, se solicita construir el gráfico de esta. Cuenta con presencia en todos los documentos analizados, exceptuando la Guía Didáctica del Docente. Un ejemplo se aprecia en la Figura 4.12, en el inciso *c)*, donde se pide explícitamente representar gráficamente una situación binomial específica. Finalmente, las situaciones-problema S3.6: e*speranza de fenómeno binomial incompleto* y S3.7: *cantidad favorable de ensayos*, no fueron identificadas en ninguno de los documentos.

Figura 4.42

Situación-problema S3.10

3. Analiza el siguiente contexto y responde.

La probabilidad de que un concursante responda incorrectamente una pregunta cualquiera de cierto concurso de televisión es de 0,1.

Si el concurso consta de 10 preguntas:

a. Identifica los parámetros asociados a la distribución binomial.

$n =$ ________ $\mu =$ ________ $\sigma^2 =$ ________

b. ¿Cuál es la distribución binomial asociada?

c. Realiza el gráfico de la distribución binomial.

Fuente. Cuaderno de Actividades, p. 34

A continuación, presentamos la Tabla 4.1 que resume la presencia de las situaciones-problema de la distribución binomial detectadas en los documentos constituyentes del currículo chileno de cuarto año medio. Se puede observar que las situaciones S3.1, S3.2, S3.3 y S3.4 (correspondientes al significado parcial 3) son las únicas que aparecen en todos los documentos. En contraparte, existen algunas situaciones que no aparecen en ninguno de los documentos (por ejemplo, S1.1, S2.2, S3.6, entre otros). Por otro lado, el libro de texto es el documento que presenta mayor variedad en cuanto a la presencia de situaciones-problema, ya que se detectaron diez diferentes.

Tabla 4.1

Situaciones-problema en el currículo chileno de cuarto medio

		Programa de Estudio	Material Didáctico		
			Texto del Estudiante	Cuaderno de Actividades	Guía Didáctica del Docente
SP1	S1.1				
	S1.2	X			X
	S1.3	X	X		X
SP2	S2.1			X	
	S2.2				
	S2.3				
	S2.4	X	X		
	S2.5	X			
	S2.6				
SP3	S3.1	X	X	X	X
	S3.2	X	X	X	X
	S3.3	X	X	X	X
	S3.4	X	X	X	X
	S3.5		X		X

	S3.6				
	S3.7				
	S3.8		X		
	S3.9		X	X	X
	S3.10	X	X	X	

Fuente. Elaboración propia.

4.2.2 Análisis de los conceptos-definición

En este apartado se analizan los conceptos-definición que están presentes, implícita o explícitamente, en las situaciones-problema, además de los ejemplos, párrafos o cuadros de texto utilizados para complementar los contenidos. Debido a la cantidad considerable de conceptos-definición ligados al significado de la distribución binomial, expuestos en el Capítulo 1 (véase sección 1.4.2), es posible que en una misma figura se presenten dos o más de ellos.

- *Conceptos-definición relacionados con el significado parcial 1*

En la Figura 4.2 (véase sección 4.2.1) se hace uso de algunos conceptos-definición vinculados al SP1, tales como: C1.1: *azar,* C1.2: *suceso,* C1.6: *potencia,* C1.9: *coeficiente binomial,* C1.10: *combinatoria,* C1.17: *triángulo de Pascal,* C1.18: *repetición y* C1.20: *variable aleatoria* (todos de manera explícita), y son utilizados para plantear el contexto de las situaciones-problema.

En la Figura 4.13 se hace referencia al concepto C1.3: *sucesos excluyentes*. Este concepto, a pesar de ser importante en la construcción de la binomial, se menciona con muy poca frecuencia en los documentos.

Figura 4.13

Concepto-definición C1.3

Llamaremos experimento "de Bernoulli" a aquel que tiene solo dos posibles resultados excluyentes. Si la probabilidad es favorable, la designaremos con la letra es p, y si no, la designaremos con la letra q. Por lo tanto $p + q = 1$.

Fuente. Texto del Estudiante, p. 167

Otro concepto importante relacionado con la binomial es el de C1.7: *desigualdad.* Este aparece de manera implícita en diversos problemas, generalmente cuando se debe calcular la probabilidad de un intervalo de valores. Por ejemplo, en la Figura 4.10 (véase sección 4.2.1), en el inciso *b)* se pide calcular la probabilidad de una desigualdad $[P(X \geq$

10)], aunque no se utiliza la notación algebraica ni tampoco se menciona la palabra desigualdad.

El concepto C1.11: *valor de la variable* se menciona de manera explícita en la situación-problema de la Figura 4.14 (primera pregunta), donde los estudiantes deben determinar con qué cantidad de respuestas correctas José reprobaría el examen (en el contexto del problema serían menos de 9 correctas). Adicionalmente, en la segunda pregunta se pide calcular la probabilidad de reprobar el examen, es decir, calcular la probabilidad para cada cantidad diferente de respuestas correctas con las que se reprobaría el examen ($X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$) y posteriormente sumarlas. De acuerdo con nuestra interpretación, aquí aparece de manera implícita el concepto C1.15: *probabilidad como proporción*, ya que la forma más directa de desarrollar el problema es mediante el uso de esta.

Figura 4.14

Concepto-definición C1.11

e. Si se quisiera determinar la probabilidad de que José repruebe su examen: ¿cuáles son los valores de la variable aleatoria que cumplen esa condición?, ¿cuál es la probabilidad de que suceda?

Fuente. Texto del Estudiante, p. 168

En la Figura 4.15 se puede observar el uso del concepto C1.19: *espacio muestral*, relacionado con un experimento de naturaleza binomial.

Figura 4.15

Concepto-definición C1.19

3. Considera el siguiente experimento aleatorio: "lanzar 4 monedas".
   a. ¿Cuántos elementos contiene el espacio muestral del experimento aleatorio?

Fuente. Guía Didáctica del Docente, p. 334

El concepto C1.21: *factorial* está presente de manera implícita cada vez que se hace uso de números combinatorios, ya sea para el conteo de casos o para el cálculo de probabilidades. También se menciona explícitamente en la Guía Didáctica del Docente (Figura 4.16), en el apartado de *Conceptos especiales* que debe tener en cuenta el profesorado al trabajar con la distribución binomial.

Figura 4.16

Concepto-definición C1.21

> **Conceptos especiales**
>
> Al trabajar con la distribución binomial, se hará presente el cálculo de combinaciones y, por ende, factoriales, y la simplificación de los mismos.

Fuente. Guía Didáctica del Docente, p. 304

Finalmente, no se encontraron los conceptos-definición C1.4: *suceso no excluyente*, C1.5: *patrón numérico*, C1.8: *incógnita*, C1.12: *orden*, C1.13: *permutación*, C1.14: *variación* y C1.16: *números figurados*.

- *Conceptos-definición relacionados con el significado parcial 2*

En uno de los primeros recuadros de contenido presentados en el Texto del Estudiante (Figura 4.17) se mencionan algunos conceptos-definición relacionados con el segundo significado parcial de la distribución binomial, tales como: C2.1: *probabilidad como valor entre 0 y 1*, C2.6: *éxito y fracaso,* y C2.7: *Independencia*. Cabe señalar que los conceptos-definición C2.6 y C2.7 fueron incluidos a partir del análisis de los documentos; el primero hace referencia a los dos resultados posibles en un ensayo Bernoulli, mientras que el segundo se refiere a que la ocurrencia de un resultado no afecta a las demás repeticiones en un fenómeno binomial.

Figura 4.17

Conceptos-definición C2.1, C2.6 y C2.7

Sea un experimento aleatorio de Bernoulli con las siguientes características:

- El experimento se puede realizar tantas veces como se quiera.
- Cada repetición es independiente de las anteriores.
- La probabilidad de éxito (p) y de fracaso (q) se mantiene constante en cada ensayo.

Los parámetros p y q denotan éxito y fracaso con respecto a nuestro suceso de interés.

Si consiste en n pruebas de Bernoulli, entonces diremos que sigue el modelo de la distribución binomial. La variable que expresa el número de éxitos obtenidos en cada prueba la denotaremos como:

$$X \rightarrow B(n, p)$$

Siendo n y p los parámetros de dicha distribución.

Fuente. Texto del Estudiante, p. 167

El concepto C2.2: *valor asociado a un experimento aleatorio* puede referirse, por ejemplo, a un valor monetario ligado a los resultados de un experimento aleatorio, como se muestra en la Figura 4.4.

En el Programa de Estudio se introduce el concepto C2.3: *distribución de probabilidad*, a través de simulaciones con la tabla de Galton (Figura 4.18). Por otra parte, en el glosario de las páginas finales del Texto del Estudiante se menciona C2.3 para entregar una definición formal de distribución binomial (Figura 4.19).

Figura 4.18

Concepto-definición C2.3 (distribución de probabilidad en una situación-problema)

11. ¿Cuál es la distribución de las fichas en las distintas casillas? ¿Cómo es la distribución de probabilidad de las fichas en este experimento aleatorio?

Fuente. Programa de Estudio, p. 35

Figura 4.19

Concepto-definición C2.3 (distribución de probabilidad en el glosario)

Distribución binomial: distribución de probabilidad discreta que describe el número de éxitos al realizar *n* experimentos independientes entre sí acerca de una variable aleatoria.

Fuente. Texto del Estudiante, p. 238

Al igual que el concepto de desigualdad, mencionado anteriormente, el concepto C2.4: *sumatoria* se utiliza implícitamente cada vez que se requiere calcular la probabilidad de un intervalo de valores de X. Por ejemplo, en la situación-problema de la Figura 4.10 (véase sección 4.2.1), en sus incisos *b)* y *d)* se solicita calcular la suma de probabilidades de un conjunto de valores de la variable aleatoria binomial.

El concepto C2.8: *sucesos equiprobables y no equiprobables*, al igual que C2.6 y C2.7, fue introducido en el análisis de contenido y se menciona dentro de la sección *Orientaciones para el Docente* del Programa de Estudio (Figura 4.20), destacándolo como un concepto importante para el estudio de la distribución binomial. Este concepto-definición se utiliza para diferenciar experimentos en los cuales todos sus resultados posibles tienen la misma probabilidad de ocurrencia de aquellos que no presentan esta característica.

Por último, el concepto C2.5: *extensión del desarrollo del binomio* no fue identificado en el currículo chileno de cuarto medio.

Figura 4.20

Concepto-definición C2.8

1. La distribución de probabilidad binomial aporta con un nuevo modelo predictivo de probabilidad que permite estudiar problemas que el modelo de Laplace no puede modelar; por este motivo, es importante que los alumnos diferencien entre los sucesos elementales equiprobables y los que no lo son.

Fuente. Programa de Estudio, p. 39

- *Conceptos-definición relacionados con el significado parcial 3*

El concepto C3.1: *situación/fenómeno binomial (distribución binomial)* se introduce en el Texto del estudiante a través del recuadro de la Figura 4.17, entregando sus características y la notación $X \to B(n,p)$. Se complementa su definición en el glosario, tal como se muestra en la Figura 4.20. Adicionalmente, en el recuadro referenciado (Figura 4.17) se mencionan otros conceptos como C3.4: *parámetros* y C3.10: e*nsayo de Bernoulli*. Este último (C3.10) fue incluido a partir del análisis de los documentos y, en el Texto del Estudiante, es introducido en otro recuadro, como se muestra en la Figura 4.13, además de contar con su definición en el glosario (Figura 4.21).

Figura 4.21

Concepto-definición C3.10

Experimento de Bernoulli: experimento aleatorio que tiene resultados dicotómicos, es decir, solo dos posibilidades de ocurrencia (éxito y fracaso).

Fuente. Texto del Estudiante, p. 238

En la Figura 4.22 se muestra el concepto C3.2: *probabilidad binomial (fórmula de la distribución binomial)*, el cual es introducido en el Texto del Estudiante sin ningún tipo de construcción previa. También es mencionado, en la misma figura, el concepto C3.3: *función de probabilidad*, el cual cuenta con una definición formal en el glosario (Figura 4.23).

Figura 4.22

Concepto-definición C3.2

La función de probabilidad para una variable X que se distribuye de forma binomial con parámetros n y p está dada por la expresión:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

Fuente. Texto del Estudiante, p. 168

Figura 4.23

Concepto-definición C3.3

Función de probabilidad: función que relaciona cada valor de una variable aleatoria con su probabilidad.

Fuente. Texto del Estudiante, p. 238

En el Programa de Estudio se hace uso del concepto C3.5: *inferencia probabilística*, de manera implícita. Un ejemplo de esto se muestra en el inciso *b)* de la situación-problema de la Figura 4.24, donde se solicita al estudiante realizar inferencias sobre los resultados de una tabla de Galton, sin llegar a utilizar el cálculo de probabilidades.

Figura 4.24

Concepto-definición C3.5

1. Construye un aparato de Galton o utiliza una versión digital para realizar el experimento aleatorio.
   a. ¿Cuál es el camino recorrido por uno de los objetos?
   b. ¿Cómo será la distribución de los datos en experimentos de este tipo?

Fuente. Programa de Estudio, p. 33

Los estadísticos de la distribución binomial son introducidos en un recuadro de contenido en el Texto del Estudiante, sin ningún tipo de construcción previa. En la Figura

4.25 se muestran los conceptos C3.7: *media* y C3.8: *varianza/desviación estándar*. En el glosario se complementan con las definiciones de C3.9: *valor esperado* (Figura 4.26) y la mencionada C3.8: *varianza* (Figura 4.27). Finalmente, el concepto C3.6: *grado de conocimiento* no se presenta en ninguno de los documentos analizados.

Figura 4.25

Conceptos-definición C3.7 y C3.8

> Los estadísticos de la función binomial son:
>
> Media: $\mu = n \cdot p$ Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$

Fuente. Texto del Estudiante, p. 168

Figura 4.26

Concepto-definición C3.9

> **Valor esperado**: en una variable aleatoria discreta, corresponde a la suma de los productos entre cada elemento del recorrido de la variable aleatoria *X* y su probabilidad respectiva.

Fuente. Texto del Estudiante, p. 239

Figura 4.27

Concepto-definición C3.8

> **Varianza:** medida de dispersión que corresponde al promedio entre los cuadrados de las diferencias de cada dato con el promedio de ellos.

Fuente. Texto del Estudiante, p. 239

La Tabla 4.2 resume la presencia de conceptos-definición encontrados en el currículo chileno de cuarto medio. Se puede observar que la mayoría de ellos se encuentran presentes en todos, o casi todos, los documentos. También se muestra que algunos conceptos no se presentan en ninguno de los documentos analizados, por ejemplo, C2.5: *extensión del desarrollo del binomio*, el cual consideramos importante para la construcción de la fórmula de la binomial.

Tabla 4.2

Conceptos-definición en el currículo chileno de cuarto medio

		Programa de Estudio	Material Didáctico		
			Texto del Estudiante	Cuaderno de Actividades	Guía Didáctica del Docente
SP1	C1.1	X	X	X	X
	C1.2	X	X	X	X
	C1.3		X		X
	C1.4				
	C1.5				
	C1.6	X	X	X	X
	C1.7	X	X		X
	C1.8				
	C1.9	X	X	X	X
	C1.10	X	X	X	X
	C1.11	X	X		
	C1.12				
	C1.13				
	C1.14				
	C1.15	X	X	X	X
	C1.16				
	C1.17	X			
	C1.18	X	X	X	X
	C1.19	X			X
	C1.20	X	X	X	X
	C1.21	X	X	X	X
SP2	C2.1	X	X	X	X
	C2.2	X	X	X	
	C2.3	X	X		
	C2.4		X		X
	C2.5				
	C2.6	X	X	X	X
	C2.7	X	X	X	X
	C2.8	X			
SP3	C3.1	X	X	X	X
	C3.2	X	X	X	X
	C3.3	X	X	X	X
	C3.4	X	X	X	X
	C3.5	X			
	C3.6				
	C3.7	X	X	X	X
	C3.8	X	X	X	X
	C3.9	X	X	X	X
	C3.10	X	X	X	X

Fuente. Elaboración propia.

4.2.3 Análisis de los procedimientos

A continuación, se presentan los resultados del análisis de los procedimientos presentes en los documentos analizados, los cuales corresponden a las acciones (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, entre otras) que se realizan en las diversas situaciones-problema.

- *Procedimientos relacionados con el significado parcial 1*

En la Figura 4.2 (véase sección 4.2.1) se pueden observar casi todos los procedimientos ligados a este significado parcial (exceptuando P1.2), ya que están presentes: P1.1: *conteo directo de casos*, para contar la cantidad de sellos; P1.3: *reconocimiento de patrones*, como la cantidad de "caminos" en cada caso; P1.4: *construcción y validación de algoritmos originados desde los patrones numéricos*, para la construcción del triángulo de Pascal; P1.5: *búsqueda de propiedades*, para generar expresiones matemáticas que permitan calcular probabilidades; y por último, P1.6: *uso de representaciones gráficas*, utilizadas como técnica para conteo de casos. Por otra parte, para realizar la situación-problema del inciso *b)* de la Figura 4.28, se utiliza el procedimiento P1.2: *construcción del espacio muestral*.

Figura 4.28

Procedimiento P1.2

3. Considera el siguiente experimento aleatorio: "lanzar 4 monedas".
   a. ¿Cuántos elementos contiene el espacio muestral del experimento aleatorio?
   b. Anota los elementos del espacio muestral.
   c. Se define la siguiente variable *X*: número de caras obtenidas en el lanzamiento de cuatro monedas. ¿Cuál es el recorrido de la variable?
   d. Determina la función de probabilidad asociada a la variable X.

Fuente. Guía Didáctica del Docente, p. 334

- *Procedimientos relacionados con el significado parcial 2*

Para la situación-problema del inciso *b)* de la Figura 4.11 (véase sección 4.2.1), se requiere efectuar el procedimiento P2.1: *identificación de las características del fenómeno probabilístico*; en concreto, determinar si la situación planteada cumple con lo necesario para considerarse como un fenómeno binomial.

En algunas situaciones-problema incluidas en el Programa de Estudio se solicita generar diferentes modelos para situaciones binomiales con datos específicos y así construir, poco a poco, la fórmula binomial. Por ejemplo, en la Figura 4.29, los estudiantes deben encontrar un modelo para calcular probabilidades de k, para el caso particular de $n = 2$. Esto está directamente relacionado con el procedimiento P2.2: *generación, comprobación y/o corrección de modelos matemáticos de fenómenos de naturaleza binomial*.

Figura 4.29

Procedimiento P2.2

7. Usando las combinaciones anteriores y las probabilidades escritas como potencia, busquen un modo de expresar la probabilidad de responder k preguntas correctas $P(X = k)$, si se responde 2 preguntas al azar.

Fuente. Programa de Estudio, p. 37

El procedimiento P2.3: *cálculo del valor esperado al asignar valores a las probabilidades de un fenómeno* está relacionado con la situación-problema presentada en la Figura 4.30, donde se debe calcular el valor esperado relacionado con la cantidad de estudiantes que aprueban una determinada materia.

Figura 4.30

Procedimiento P2.3

c. En el curso, ¿cuál es el valor esperado para la distribución binomial que modela la cantidad de estudiantes que aprueban Matemáticas?

Fuente. Texto del Estudiante, p. 170

- *Procedimientos relacionados con el significado parcial 3*

Dentro de la sección de *Profundización y variaciones* de la Guía Didáctica del Docente (Figura 4.31) se promueve la aplicación de actividades que involucran algunos procedimientos ligados a este significado parcial. De esta manera, los procedimientos P3.1: *determinación de parámetros de la distribución binomial*, P3.4: *aproximación o cálculo de medidas como la media y varianza*, y P3.5: *cálculo de probabilidades aplicando la fórmula*, están vinculados con los puntos enmarcados en rojo, verde y azul, respectivamente. Cabe señalar que el uso de estos procedimientos se presenta frecuentemente dentro de los diferentes documentos analizados.

Figura 4.31

Procedimientos P3.1, P3.4 y P3.5

Profundización y variaciones

Invite a sus estudiantes a determinar las probabilidades de éxito y fracaso en diferentes experimentos relacionados con su realidad cotidiana. Siguiendo la misma lógica de los ejercicios trabajados, se puede trabajar, por ejemplo:

- Seleccionar una prueba de alternativas, y determinar cuál es la probabilidad de éxito y fracaso para cada pregunta.
- Determinar el número de preguntas.
- Establecer cuáles son los parámetros *n* y *p*.
- Determinar la cantidad de preguntas con la cual se aprueba en la evaluación.
- Calcular la probabilidad de aprobar el examen.
- Calcular la probabilidad asociada al valor medio.
- Comparar ambas probabilidades.
- Determinar si es conveniente, por ejemplo, contestar una prueba al azar

Fuente. Guía Didáctica del Docente, p. 304

Por otra parte, el procedimiento P3.2: *comparar valores teóricos de un fenómeno binomial y las proporciones observadas* es solicitado en la situación-problema de la Figura 4.32, en donde se solicita al estudiante simular el lanzamiento de una ficha al menos 500 veces y observar cómo se relaciona la probabilidad empírica con la probabilidad teórica.

Figura 4.32

Procedimiento P3.2

d. Si estás usando el recurso digital, simula el lanzamiento de la ficha al menos 500 veces y compara la probabilidad experimental con la probabilidad teórica que obtuviste recién.

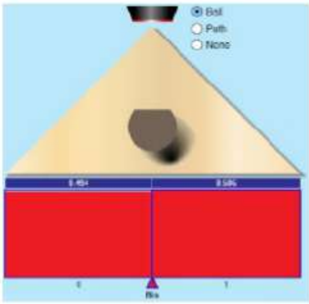
Fuente. Programa de Estudio, p. 35

Finalmente, el procedimiento P3.3: *variar parámetros en simulaciones*, aparece dentro del Programa de Estudio, como se muestra en la Figura 4.33. En el inciso *c)* se solicita simular una tabla de Galton con una fila ($n = 1$) y, posteriormente, en el inciso *e)* se debe aumentar a dos filas ($n = 2$), variando así el parámetro n en la simulación.

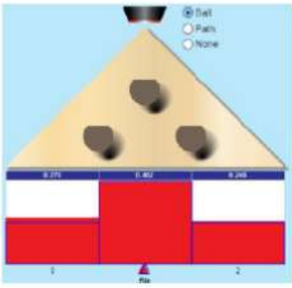
Figura 4.33

Procedimiento P3.3

c. Marca la opción que muestra la distribución ideal y compárala con la anterior. Completa el diagrama de árbol con las probabilidades teóricas.



e. Ahora considera que la familia planifica tener dos hijos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean mujeres o que ambos sean hombres? ¿O que sea un hombre y una mujer (no importa el orden)?



Fuente. Programa de Estudio, p. 38

En la Tabla 4.3 se observa un resumen de los procedimientos vinculados a la distribución binomial que se incluyen, explícita o implícitamente, en los documentos analizados del currículo chileno de cuarto medio. Se puede observar que hay un gran déficit de aquellos ligados al significado parcial 1 en los componentes del Material Didáctico, donde solo aparecen dos de ellos en la Guía Didáctica del Docente; en contraparte, cuentan con gran presencia en el Programa de Estudio. Por otro lado, la mayoría de los procedimientos de los significados parciales 2 y 3 se insertan en los diversos documentos. Se destaca la ausencia de P3.3 en los componentes del Material Didáctico; consideramos que este es un procedimiento importante (variar parámetros en simulaciones) para que el estudiante comprenda el comportamiento de la binomial desde una perspectiva diferente (visual).

Tabla 4.3

Procedimientos en el currículo chileno de cuarto medio

		Programa de Estudio	Material Didáctico		
			Texto del Estudiante	Cuaderno de Actividades	Guía Didáctica del Docente
SP1	P1.1	X			X
	P1.2	X			X
	P1.3	X			
	P1.4	X			
	P1.5	X			
	P1.6	X			
SP2	P2.1	X	X		X
	P2.2	X	X		X
	P2.3		X	X	
SP3	P3.1		X	X	X
	P3.2	X	X		
	P3.3	X			
	P3.4	X	X	X	X
	P3.5		X		X

Fuente. Elaboración propia.

4.2.4 Análisis de las proposiciones

A continuación, presentamos las proposiciones ligadas a cada significado parcial de la distribución binomial, las cuales corresponden a enunciados derivados de los conceptos que contribuyen a dar solución a una situación-problema.

- *Proposiciones relacionadas con el significado parcial 1*

Dentro de la Figura 4.2 (véase sección 4.2.1) se identificaron dos proposiciones relacionadas con el primer significado parcial: E1.1: *los juegos de azar y otros fenómenos pueden ser analizados desde distintas representaciones* y E1.2: *se puede obtener un grado de conocimiento del azar utilizando expresiones matemáticas.*

En la Figura 4.34 se muestra una indicación para el docente en el Programa de Estudio, donde se sugiere, implícitamente, hacer uso de las proposiciones E1.3: *sumando los* *casos posibles de dos o más sucesos se obtiene la cantidad de arreglos totales*, y E1.4: *multiplicando los casos posibles de dos o más sucesos se obtiene la cantidad de arreglos totales*.

Figura 4.34

Proposiciones E1.3 y E1.4

4. Se sugiere usar el diagrama de árbol para determinar las probabilidades y para que definan los sucesos de estudio. Utilícelo para analizar cómo el hecho de que los sucesos sean independientes permite calcular sumas y productos de forma simple, usando las ramas del árbol.

Fuente. Programa de Estudio, p. 39

- *Proposiciones relacionadas con el significado parcial 2*

La proposición E2.1: *el valor esperado de un experimento binomial corresponde a la suma de los productos de cada valor de la variable por su respectiva probabilidad de ocurrencia*, se debe tomar en cuenta para resolver el inciso *d)* de la situación-problema mostrada en la Figura 4.35, es decir, para determinar el valor esperado. Además, en la segunda pregunta del inciso *a)* es necesario considerar la proposición E2.4: *la suma de las probabilidades de 'éxito' y 'fracaso' de un fenómeno aleatorio es igual a 1* para obtener los parámetros p y q. Esta última (E2.4) fue incluida a partir del análisis de documentos y consideramos que es necesario tenerla en cuenta, sobre todo cuando se solicita hacer uso del parámetro q.

Por otra parte, en el Programa de Estudio se presenta la E2.3: *la probabilidad sigue principios aditivos y multiplicativos, al estar directamente relacionada con el conteo de casos*; en concreto, en la situación-problema de la Figura 4.2 (véase sección 4.2.1) se hace uso, implícitamente, de esta proposición.

La proposición E2.5: *la suma total de las probabilidades de cada valor de la V.A. es igual a 1* fue introducida durante el análisis de contenido y se hace presente, de manera implícita, en el inciso *d)* de la Figura 4.36. En esta situación-problema se abordan, a través de dos preguntas complementarias entre sí, la probabilidad de todos los posibles resultados del experimento binomial, con lo que se puede observar que la suma total de las probabilidades es igual a 1.

Figura 4.35

Proposiciones E2.1 y E2.4

1. Lee la siguiente información y responde:

Se aplica un examen de Matemática a tercero medio, el cual contempla 22 preguntas, todas independientes entre sí, de 5 alternativas, de las cuales solo una es correcta. Gonzalo comenta que no estudió y que elegirá sus respuestas al azar. A partir de la información, responde lo siguiente:

a. ¿Cuál es la variable de Bernoulli asociada?, ¿cuáles son sus parámetros?

b. Determina la función binomial asociada.

c. ¿Crees que Gonzalo contestará correctamente al menos 5 preguntas?

d. ¿Cuántas preguntas esperarías que contestara correctamente?

Fuente. Texto del Estudiante, p. 189

Figura 4.36

Proposición E2.5

3. Analiza el siguiente experimento y responde:

Se lanza doce veces un dado de seis caras y se define la variable aleatoria X: número de caras obtenidas que son múltiplos de 3.

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 5 éxitos? ¿Cómo se relaciona con la probabilidad de obtener a lo más 4 éxitos?

Fuente. Texto del Estudiante, p. 169

Finalmente, la proposición E2.2: *se pueden obtener las probabilidades asociadas a un fenómeno binomial estudiando la expansión de la expresión* $(p+q)^n$ *en la que* p *y* q *son sus probabilidades y* n *la cantidad de repeticiones de los ensayos* no se encontró en ninguno de los documentos analizados.

- *Proposiciones relacionadas con el significado parcial 3*

En general, las proposiciones ligadas al significado parcial 3 están más presentes que las anteriores en los documentos analizados. Con frecuencia, estas proposiciones se presentan de manera implícita en las diferentes situaciones-problema planteadas para los estudiantes, aunque también aparecen de manera explícita en el Texto del Estudiante, tal y como se muestra en la Figura 4.17 (véase sección 4.2.2). En este recuadro se utilizan, para introducir la distribución binomial, las siguientes proposiciones: E3.1: *en un fenómeno binomial existen n observaciones*, E3.2: *las observaciones/ensayos en un fenómeno binomial son* *independientes*, E3.3: *cada ensayo de un fenómeno binomial tiene solo dos resultados posibles (éxito y fracaso)* y E3.4: *las probabilidades de éxito y fracaso son constantes.* Además, en el recuadro de la Figura 4.22 (véase sección 4.2.2) aparece la proposición E3.5: *en un ensayo binomial, la probabilidad de obtener m aciertos en n ensayos con una probabilidad p de éxito está dada por la fórmula binomial.*

La proposición E3.6: *el valor esperado en un fenómeno binomial está dado por su media* se presenta en la Figura 4.37, donde la media y el valor esperado son tratados como sinónimos. También, E3.6 está presente en la Figura 4.25 (véase sección 4.2.2) donde se muestra el modo de calcular la media en una situación binomial.

Figura 4.37

Proposición E3.6

Una variable aleatoria X, cuya función de probabilidad es $p(x)$ de dominio $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tendrá una media o valor esperado (μ) dado por:

$$\mu = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \ldots + x_n \cdot p(x_n)$$

Fuente. Texto del Estudiante, p. 165

Como mencionamos anteriormente, estas seis proposiciones también se presentan implícitamente en las diversas situaciones-problema a lo largo de los documentos analizados. Como ejemplo se muestra la Figura 4.38, donde se utiliza la binomial en un contexto de compras de supermercado.

Adicionalmente, a partir del análisis de documentos pertenecientes al currículo chileno de cuarto medio se introdujeron las proposiciones E3.8, E3.9, E3.10 y E3.11, las cuales se mencionan a continuación.

Para resolver la situación-problema de la Figura 4.38 se hace uso de la proposición E3.8: *la probabilidad de un conjunto de valores de la V.A. de un fenómeno binomial está dado por la sumatoria de las probabilidades de cada uno*, específicamente en los incisos *b)* y *c);* esta proposición es necesaria para calcular probabilidades que estén dadas por desigualdades en una situación binomial. En las *Orientaciones para el Docente* del Programa de Estudio se presentan algunas proposiciones que no se encontraron en los demás documentos: en la Figura 4.21 (véase sección 4.2.2) se observa E3.9: *la binomial permite modelar problemas que el modelo Laplace no puede* (ya que las probabilidades para cada valor de la variable no son equiprobables); en la Figura 4.39 se menciona a E3.10: *existencia de simetría en la distribución binomial cuando* $p = 0{,}5$ (esta proposición es útil para introducir el modelo binomial a través de un caso particular en que el experimento Bernoulli es equiprobable); y, en la Figura 4.40 se destaca la importancia de E3.11: *fórmula binomial para el caso particular de* $p = 0{,}5$ (al igual que E3.10, es útil para visualizar este caso particular).

Figura 4.38

Proposiciones E3.1, E3.2, E3.3, E3.4, E3.5 y E3.6

4. Analiza la siguiente situación y responde:

En un supermercado, se tienen las siguientes filas:

En la caja rápida, la probabilidad de esperar 5 o más minutos en la fila es de 0,15.

En la caja normal, la probabilidad de esperar 5 o más minutos en la fila es de 0,35.

Se define la variable aleatoria *X*: cantidad de personas de que durante un día cualquiera tenga que esperar 5 o más minutos en la fila. Responde:

a. Determina el valor de *q* y el parámetro *p* para cada caso.
b. Si 4 personas deciden ir a las cajas normales del supermercado, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellas tengan que esperar 5 o más minutos para ser atendidas?
c. Si 4 personas deciden ir a la caja rápida del supermercado, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellas tengan que esperar 5 o más minutos para ser atendidas?
d. ¿Cuál es el valor de la esperanza para cada caso con 4 personas? ¿Qué significado tiene la esperanza en este experimento?
e. Si ingresan a la caja normal 4 personas un día, ¿cuántas personas deben ingresar aproximadamente en la caja rápida para que ambas cajas tengan el mismo valor esperado de esperar 5 o más minutos?

Fuente. Texto del Estudiante, p. 169

Figura 4.39

Proposición E3.10

2. Se sugiere iniciar modelando un experimento aleatorio, dicotómico, con probabilidad 0,5. Esto permite comprender por qué, a medida que aumentan las repeticiones del experimento, no se puede usar el modelo de Laplace; por ejemplo: notan que cada casilla en la que pueden caer las fichas tendrá probabilidades distintas a medida que haya más filas. También es interesante que perciban la simetría que hay en las probabilidades de las casillas.

Fuente. Programa de Estudio, p. 39

Figura 4.40

Proposición E3.11

5. Cabe notar que la fórmula $P(X = k) = \binom{n}{k} p^n$ se aplica solamente para el caso especial de $p = q = 0{,}5$. Para el caso general, se utiliza $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Fuente. Programa de Estudio, p. 39

Se puede observar, en la tabla resumen, que las proposiciones relacionadas con SP3, desde E3.1 hasta E3.6, están presentes en todos los documentos analizados (además, con bastante frecuencia en cada uno de ellos); esto se debe a que están directamente relacionados con los elementos básicos de una distribución binomial formal. Por otra parte, las proposiciones relacionadas con SP1 y SP2 aparecen con poca frecuencia en el currículo chileno de cuarto medio, debido a que estos significados se abordan con profundidad en niveles escolares anteriores; por ejemplo, en el nivel de segundo medio, se estudian las combinatorias y otras técnicas de conteo.

Tabla 4.4

Proposiciones en el currículo chileno de cuarto medio

		Programa de Estudio	Material Didáctico		
			Texto del Estudiante	Cuaderno de Actividades	Guía Didáctica del Docente
SP1	E1.1	X			
	E1.2	X			
	E1.3	X			
	E1.4	X			
SP2	E2.1		X		
	E2.2				
	E2.3	X			
	E2.4	X	X		X
	E2.5		X		X
SP3	E3.1	X	X	X	X
	E3.2	X	X	X	X
	E3.3	X	X	X	X
	E3.4	X	X	X	X
	E3.5	X	X	X	X
	E3.6	X	X	X	X
	E3.7				
	E3.8		X		X
	E3.9	X			
	E3.10	X			
	E3.11	X			

Fuente. Elaboración propia.

4.2.5 Análisis de los argumentos

En este apartado presentamos algunos ejemplos de argumentos relacionados con los significados de la distribución binomial incluidos en los documentos constituyentes del currículo chileno de cuarto medio.

- *Argumentos relacionados con el significado parcial 1*

El argumento A1.3: *uso de representaciones* es utilizado en el Programa de Estudio. En la Figura 4.2 (véase sección 4.2.1) se hace uso de un diagrama de árbol para argumentar que solamente hay un camino en $X = 0$ y $X = 4$. Cabe señalar que los argumentos A1.1: *razonamiento inductivo* y A1.2: *expresiones recursivas* no se presentan en los documentos analizados.

- *Argumentos relacionados con el significado parcial 2*

Para resolver la situación-problema del inciso *b)* de la Figura 4.11 (véase sección 4.2.1) se hace uso del argumento A2.1: *razonamiento deductivo* para efectuar la justificación solicitada; puesto que en el Texto del Estudiante se presentan, inicialmente, las condiciones necesarias para que un fenómeno sea considerado binomial y, posteriormente, dicha situación-problema. Por tanto, se debe verificar que las características del problema se ajustan a las condiciones de un experimento binomial.

En la situación-problema de la Figura 4.41 se solicita argumentar sobre la equiprobabilidad en los diferentes "caminos" de un tablero de Galton. Esta argumentación se podría efectuar a través de A2.2: *razonamiento inductivo* o A2.3: *uso de representaciones.* Para el primer caso, ya se calcularon previamente las probabilidades de que la ficha siga cada uno de los caminos, por lo tanto, a partir de ahí se podría negar la existencia de equiprobabilidad. En el segundo caso se podría recurrir a la representación propia de la tabla de Galton y trazar los caminos posibles para luego contarlos, o bien, podría hacerse mediante un diagrama de árbol para visualizar los posibles resultados y sus probabilidades respectivas.

Figura 4.41

Argumentos A2.2 y A2.3

9. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha siga un camino específico? Argumenta si los sucesos asociados a seguir un camino son o no equiprobables.

Fuente. Programa de Estudio, p. 35

- *Argumentos relacionados con el significado parcial 3*

En la Figura 4.42 se aprecian los dos argumentos ligados a este significado parcial. Se puede aplicar el argumento A3.1: *razonamiento deductivo* al analizar cada uno de los gráficos y observar si sus características se ajustan a las que debería tener la distribución binomial con los parámetros indicados. En concreto, como se sabe que $p = 0{,}5$ la distribución será simétrica, además como $n = 5$, el valor de la variable abarca desde $X = 0$ hasta $X = 5$, es decir, seis valores; por lo tanto, para el caso del primer gráfico (el de barras rojas) se podría argumentar que no corresponde, ya que no cuenta con una barra para el caso de $n = 5$, quedando descartado; luego, se haría una revisión similar con los demás gráficos hasta determinar el que cumpla con las características. Adicionalmente, se podría recurrir al argumento A3.2: *uso de representaciones*; en este caso, primero se construiría el gráfico de la binomial con los parámetros solicitados, y luego se busca cuál de las alternativas es igual al gráfico construido.

Figura 4.42

Argumentos A3.1 y A3.2

4. Discute con tus compañeros sobre las siguientes alternativas para la pregunta: ¿Cuál de los cinco histogramas corresponde a una distribución binomial con $n = 5$ y $p = 0{,}5$?

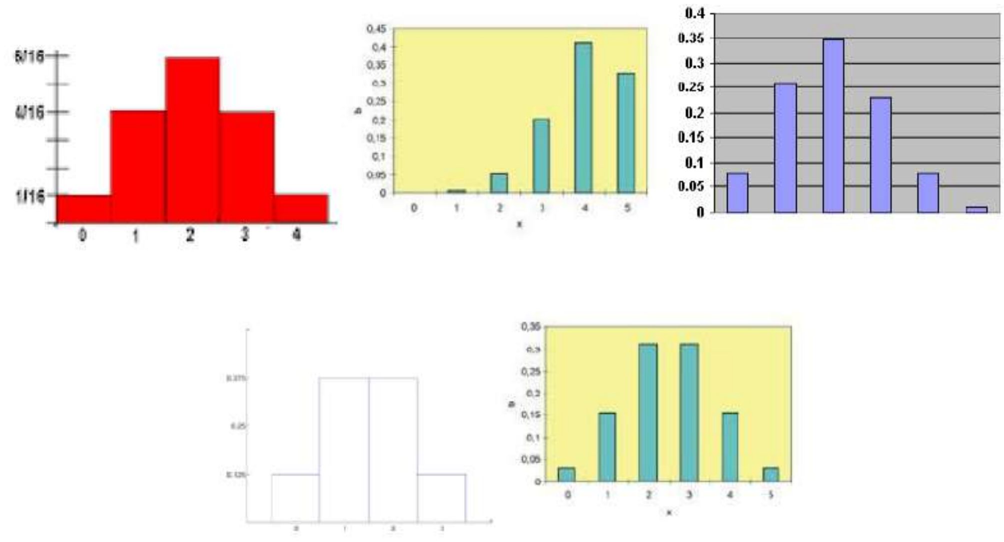


Fig. 3: Histogramas de distribuciones binomiales.

Fuente. Programa de Estudio, p. 36

Como se muestra en la Tabla 4.5, hay escasa presencia de los argumentos ligados a SP1, puesto que solo aparece A1.3 en el Programa de Estudio. Por otro lado, los argumentos pertenecientes a SP2 y SP3 están presentes, en su totalidad, en el Programa de Estudio y parcialmente en los componentes del Material Didáctico.

Tabla 4.5

Argumentos en el currículo chileno de cuarto medio

		Programa de Estudio	Material Didáctico		
			Texto del Estudiante	Cuaderno de Actividades	Guía Didáctica del Docente
SP1	A1.1				
	A1.2				
	A1.3	X			
SP2	A2.1	X	X		
	A2.2	X	X		
	A2.3	X			
SP3	A3.1	X	X	X	
	A3.2	X			

Fuente. Elaboración propia.

4.2.6 Análisis del lenguaje

El lenguaje o los elementos lingüísticos de la distribución binomial son similares en los tres significados parciales, al contar todos con lenguaje común, simbólico, tabular y gráfico; sin embargo, en cada uno de ellos se presentan de manera diferente.

- *Lenguaje relacionado con el significado parcial 1*

El elemento lingüístico L1.1: *lenguaje común* corresponde a las expresiones verbales utilizadas para generar los enunciados de los problemas, introducir conceptos o desarrollar ejemplos, por lo tanto, su uso es muy frecuente en los documentos analizados. Por ejemplo, es utilizado para mencionar conceptos ligados a SP1, como *triángulo de Pascal* o *números combinatorios* (Figura 4.2, véase sección 4.2.1). Asimismo, L1.2: *lenguaje simbólico* es utilizado en los documentos analizados para representar situaciones relacionadas con SP1; por ejemplo, en la Figura 4.43 se utiliza X para referirse a una variable aleatoria discreta.

Figura 4.43

Lenguaje L1.2

8. Si numeras las casillas donde caen las fichas desde $X = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5, de izquierda a derecha, con 5 filas:
   a. ¿De cuántas maneras se puede llegar a $X = 0$?
   b. ¿De cuántas maneras se puede llegar a $X = 1$?

Fuente. Programa de Estudio, p. 35

El elemento lingüístico L1.4: *lenguaje gráfico*, en este significado, está relacionado con representaciones como el triángulo de Pascal o el diagrama de árbol, ambos presentes en la Figura 4.2 (véase sección 4.2.1). Con respecto a L1.3: *lenguaje tabular*, este no fue detectado en los documentos analizados.

- *Lenguaje relacionado con el significado parcial 2*

El elemento lingüístico L2.1: *lenguaje verbal* es utilizado, por ejemplo, para mencionar conceptos como *éxito y fracaso* (Figura 4.17, sección 4.2.2) o *sucesos equiprobables y no equiprobables* (Figura 4.21, sección 4.2.2). Sumado a esto, L2.1: *lenguaje simbólico*, es utilizado en algunas situaciones-problema, como en la Figura 4.5 (véase sección 4.2.1), donde se simbolizan probabilidades de algunos valores de la variable discreta. Finalmente, no se observa la presencia de L2.3: *lenguaje tabular* ni L2.4: *lenguaje gráfico* para este significado parcial.

- *Lenguaje relacionado con el significado parcial 3*

Algunos conceptos son mencionados constantemente en los documentos a través del uso de L3.1: *lenguaje común*, tales como: distribución binomial, parámetros, valor esperado, varianza, entre otros (Figuras 4.8, 4.11, 4.24, 4.32, etc.; ver secciones anteriores). También se utiliza para introducir algunas proposiciones relacionadas con la binomial (Figura 4.17, sección 4.2.2).

Por otra parte, es frecuente el uso de L3.2: *lenguaje simbólico*, con expresiones tales como: $X \rightarrow B(n,p)$, μ, σ, σ^2 y la fórmula binomial $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{1-k}$. Esta simbología se puede observar en secciones anteriores del presente capítulo, por ejemplo, en las Figuras 4.10, 4.12, 4.17, 4.24, 4.27, 4.42, entre otras.

El elemento lingüístico L3.4: *lenguaje gráfico* se presenta como representaciones gráficas de situaciones binomiales, conocidos sus parámetros, como se muestra en las Figuras 4.9 o 4.44 de las secciones anteriores. Finalmente, no se detectó la presencia de L3.3: *lenguaje tabular* en los documentos analizados.

Como se observa en la Tabla 4.6, el *lenguaje común* está presente para los tres significados parciales en todos los documentos analizados. Asimismo, el *lenguaje simbólico* cuenta con presencia en la mayoría de los documentos. Por otra parte, el *lenguaje gráfico* ligado a SP3 está presente en el Programa de Estudio y en el Texto del Estudiante, mientras que para el SP1 solo aparece en el Programa de Estudio y para el SP2 no aparece en ninguno de los documentos. Finalmente, se destaca la ausencia de *lenguaje tabular* para los tres significados parciales en todos los documentos analizados del currículo chileno de cuarto medio; consideramos que esta representación es muy útil para la comprensión de los significados de la binomial, por ejemplo, podría favorecer la transición del cálculo de probabilidades binomiales a la representación gráfica de esta.

Tabla 4.6

Lenguaje en el currículo chileno de cuarto medio

		Programa de Estudio	Material Didáctico		
			Texto del Estudiante	Cuaderno de Actividades	Guía Didáctica del Docente
SP1	L1.1	X	X	X	X
	L1.2	X	X		X
	L1.3				
	L1.4	X			
SP2	L2.1	X	X	X	X
	L2.2	X	X		
	L2.3				
	L2.4				
SP3	L3.1	X	X	X	X
	L3.2	X	X	X	X
	L3.3				
	L3.4	X	X		

Fuente. Elaboración propia.

4.3 Significados promovidos en el Programa de Estudio

En el Programa de Estudio se presenta una serie actividades sugeridas que permiten construir progresivamente la fórmula de la distribución binomial. En estas actividades es posible identificar algunos objetos matemáticos primarios ligados a cada uno de los significados parciales de la binomial descritos en la sección 1.4.2.

En el Significado Parcial 1 (SP1) se identificaron dos de las tres (2/3) situaciones-problema vinculadas a este, involucrando el conteo de casos posibles y la determinación de la variable aleatoria discreta. Con respecto a los demás objetos matemáticos primarios, estos se presentan en diferentes proporciones: conceptos-definición (13/21), procedimientos (6/6), proposiciones (4/4), argumentos (1/3) y lenguaje (3/4). Se puede apreciar que los procedimientos y proposiciones del SP1 están presentes en su totalidad; sobre los conceptos-definición, no se incluyen algunos como sucesos excluyentes y no excluyentes; en los argumentos solo aparece el uso de representaciones; y en cuanto al lenguaje, no se identificó la representación tabular. Consideramos que la ausencia de algunos de estos objetos matemáticos primarios podría dificultar la comprensión del SP1; sin embargo, se debe considerar que algunos de los elementos de este significado parcial se abordan en niveles anteriores a cuarto medio, por lo que es posible que tengan una mayor presencia en los respectivos documentos de esos niveles.

En relación con el Significado Parcial 2 (SP2), se presentan dos de seis (2/6) tipos de situaciones-problema en el Programa de Estudio, por lo que dicho objeto matemático primario no es representativo en este documento por su limitada presencia. Se destacan aquellos problemas en los que se solicita calcular probabilidades en situaciones binomiales sin utilizar la fórmula; consideramos que esto favorece la comprensión la construcción de esta. Los demás objetos matemáticos primarios cuentan con mayor presencia: conceptos-definición (6/8), procedimientos (2/3), proposiciones (2/5), argumentos (3/3) y lenguaje (2/4). Algunos de los elementos ausentes son: el concepto-definición de sumatoria (esto podría deberse a la ausencia de situaciones-problema que soliciten calcular probabilidades de un intervalo); la expansión del desarrollo del binomio $(p+q)^n$ y sus probabilidades asociadas (como concepto y como proposición); y el uso de representaciones tabulares y gráficas.

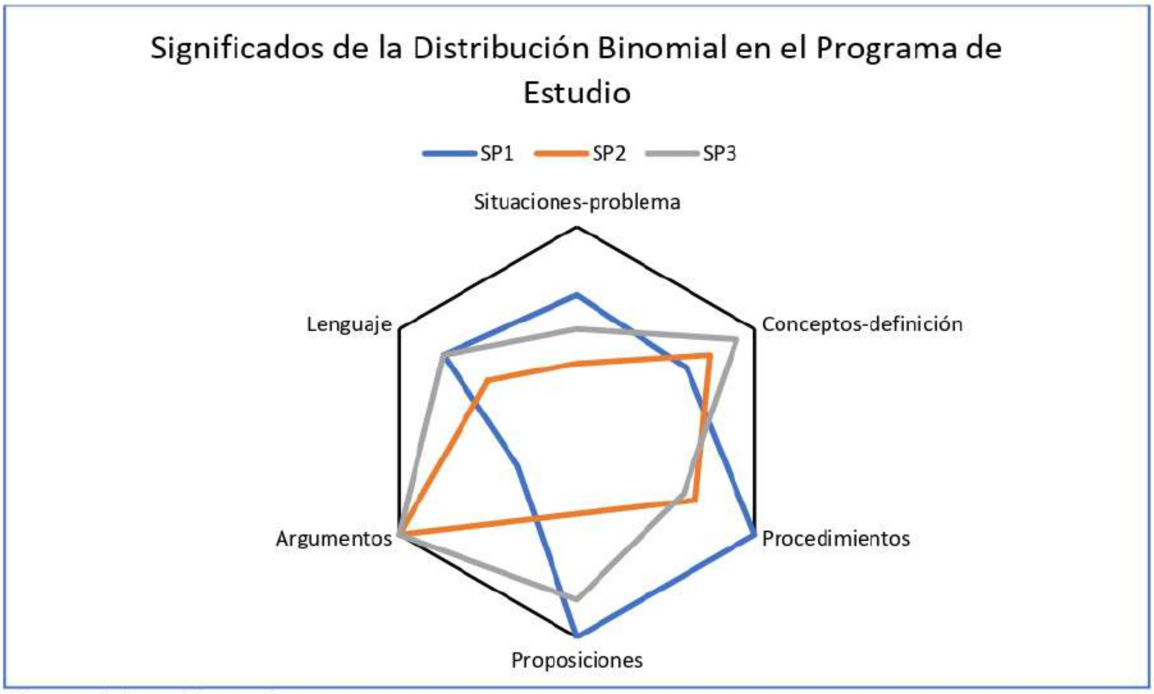
Finalmente, con respecto al Significado Parcial 3 (SP3), en el Programa de Estudio se presentan cinco de las diez (5/10) situaciones-problema vinculadas a este significado; entre las ausentes podemos mencionar: calcular la probabilidad de un intervalo de valores y determinar si una situación cumple con las características para ser considerada un fenómeno binomial. La presencia de los demás objetos matemáticos primarios es la siguiente: nueve de diez (9/10) conceptos-definición, tres de cinco (3/5) procedimientos, nueve de once (9/11) proposiciones, dos de dos (2/2) argumentos y tres de cuatro (3/4) tipos de lenguaje. Dentro de las ausencias destacables podemos señalar los procedimientos vinculados con determinar parámetros en una situación binomial y aplicar la fórmula para calcular probabilidades; así como el lenguaje correspondiente a la representación tabular, la cual, desde nuestro punto de vista, favorece la comprensión de la forma de la distribución binomial, que puede ser simétrica o asimétrica dependiendo del valor del parámetro p.

En el gráfico radial de la Figura 4.44 se muestra la cobertura de la presencia de los objetos matemáticos primarios ligados a los tres significados parciales de la distribución binomial en el Programa de Estudio. El hexágono regular (línea negra) representa el significado ideal apoyado en la presencia de todos los componentes para cada objeto matemático. Los hexágonos irregulares (líneas azul, anaranjado y gris) corresponden a la proporción del total de componentes para cada objeto matemático ligado al SP1, SP2 y SP3, respectivamente, encontrada en el Programa de Estudio.

Como se puede evidenciar con esta representación, los objetos matemáticos primarios del SP3 cuentan con mayor presencia en este documento; mientras que los referentes al SP2 son los que tienen menor presencia. Además, se observa que el elemento del significado que cuenta con mayor cobertura (considerando los tres significados parciales) es el de argumentos, mientras que se observa una escasez con respecto al tipo de situaciones-problema. En concreto, podemos mencionar que se promueven los tres significados parciales de la binomial en el Programa de Estudio; sin embargo, estos no se promueven en su totalidad debido a la ausencia de algunos componentes de los objetos matemáticos primarios.

Figura 4.44

Presencia de significados parciales de la binomial en el Programa de Estudio de cuarto medio



Fuente: elaboración propia

4.4 Significados promovidos por el Material Didáctico

En este apartado se consideran los tres componentes del Material Didáctico (Texto del Estudiante, Cuaderno de Actividades y Guía Didáctica del Docente) como uno solo. En ese sentido, se unifica la presencia de los objetos matemáticos primarios de cada uno de ellos y se analizan sus resultados en conjunto.

En relación con el Significado Parcial 1 (SP1), en estos documentos se presentan dos de las tres (2/3) situaciones-problema vinculadas a este, en concreto, aquellas donde se solicita determinar los casos posibles y la variable aleatoria discreta. En cuanto a los demás objetos matemáticos primarios, estos se presentan en las siguientes proporciones: conceptos-definición (13/21), procedimientos (2/6), proposiciones (0/4), argumentos (0/3) y lenguaje (2/4). Consideramos este significado parcial como un contenido previo a la distribución binomial y, por lo tanto, los objetos matemáticos primarios no cuentan con gran presencia en los componentes del Material Didáctico, donde incluso, hay elementos totalmente ausentes (proposiciones y argumentos).

Con respecto al Significado Parcial 2 (SP2), se detectaron dos de seis (2/6) situaciones-problema, una consiste en calcular probabilidades de fenómenos binomiales sin recurrir a la fórmula y otra en asignar valores a un ensayo binomial. Los demás elementos del significado SP2 se encuentran con mayor presencia en relación con los del SP1: conceptos-definición (6/8), procedimientos (3/3), proposiciones (3/5), argumentos (2/3) y lenguaje (2/4). Dentro de las ausencias destacables se encuentran los conceptos-definición de sucesos equiprobables y no equiprobables, y la proposición que hace mención al principio aditivo y al multiplicativo en el cálculo de probabilidades.

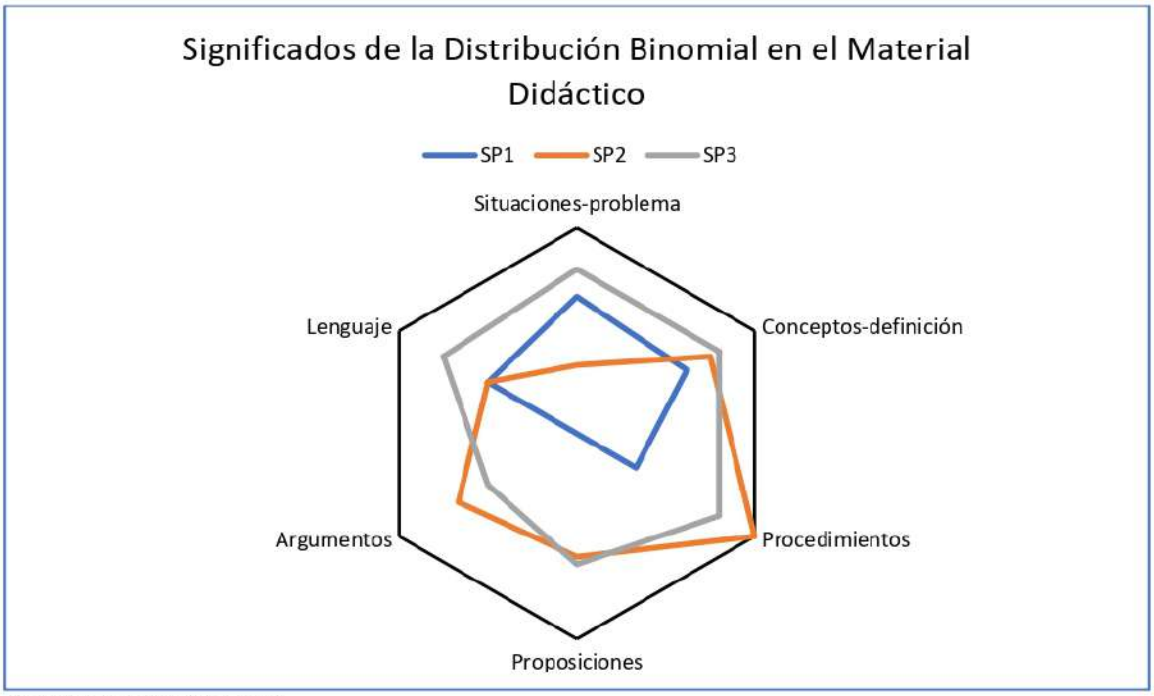
Por otra parte, del Significado Parcial 3 (SP3) se presentan ocho de las diez (8/10) situaciones-problema descritas anteriormente, por lo que, aunque no ese presentan en su totalidad, sí se muestra una mayor variedad con respecto al Programa de Estudio. No obstante, en general, las actividades propuestas siguen una estructura similar entre sí; se presenta un contexto que involucra un fenómeno binomial, se solicita determinar sus parámetros, calcular algunas probabilidades y determinar media y varianza. Esto, desde nuestro punto de vista, es algo repetitivo, por lo que consideramos que habría sido más enriquecedor reemplazar algunas actividades por otras donde se construya, poco a poco, la fórmula de la binomial. La presencia del resto de objetos matemáticos primarios ligados a SP3 se resume de la siguiente forma: conceptos-definición (8/10), procedimientos (4/5), proposiciones (7/11), argumentos (1/2) y lenguaje (3/4). Destacamos la ausencia de algunos elementos, tales como: inferencia probabilística (concepto-definición), variación de parámetros en simulaciones computacionales (procedimiento) y características del caso particular para $n = 5$ (proposición).

Cabe señalar que en estos documentos no se construye progresivamente la fórmula binomial, sino que se introduce de manera directa y, posteriormente, se debe aplicar en el cálculo de probabilidades en diferentes contextos. Desde nuestro punto de vista, esto podría dificultar la comprensión de la binomial y, además, contradice lo expuesto en el Programa de Estudio, donde se menciona que se espera que el docente "favorezca que los jóvenes interpreten los resultados más que repetir o mecanizar algoritmos, fórmulas y definiciones" (p. 24).

El gráfico de la Figura 4.45 muestra un resumen de la presencia de los objetos matemáticos primarios de cada significado parcial en el Material Didáctico. El hexágono regular (línea negra) muestra el significado ideal, mientras que los hexágonos irregulares de colores azul, naranja y gris, representan a los significados parciales de la binomial (SP1, SP2 y SP3, respectivamente). Se observa que los elementos ligados al SP3 se encuentran con mayor presencia, seguido de los correspondientes al SP2 y SP1, respectivamente; esto nos indica que el SP3 de la binomial se promueve en mayor medida en el Material Didáctico. En cuanto al objeto matemático primario que se encuentra con mayor presencia, este corresponde a conceptos-definición, considerando todos los significados parciales; mientras que los argumentos son los que están menos presentes.

Figura 4.45

Presencia de significados parciales de la binomial en el Material Didáctico de cuarto medio



Fuente: elaboración propia

4.5 Significados promovidos por el currículo chileno de cuarto medio

En este apartado se describe un contraste entre los significados promovidos por el Programa de Estudio (PE) y por el Material Didáctico (MD), determinado así, el significado de la distribución binomial promovido por el currículo chileno de cuarto medio. Esta comparación expone un resumen de los elementos que se encuentran en común en ambos componentes y la cantidad total de elementos presentes.

En primer lugar, el Significado Parcial 1, a través de sus objetos matemáticos primarios, presenta los siguientes resultados: en ambos componentes del currículo se presentan dos de las tres situaciones-problema descritas, coincidiendo en ambas, al excluir la S1.1; sobre los conceptos-definición, estos tienen doce elementos en común y en total suman catorce, ya que en el PE se incluye C1.11, mientras que en el MD se menciona a C1.3; en los procedimientos se detectaron dos elementos en común (P1.1 y P1.2) y, adicionalmente, el PE incluye los tres restantes (P1.3, P1.4 y P1.5); las proposiciones son cubiertas en su totalidad (desde E1.1 hasta E1.4) por el PE, mientras que en el MD no se considera ninguna de ellas; con respecto a los argumentos, se presenta uno de los tres en el PE (A1.3) y en el MD no aparece ninguno; finalmente, acerca del lenguaje, aparecen en común L1.1 y L1.2 y, además, en el PE se incluye a L1.4.

La presencia de los objetos matemáticos primarios ligados al Significado Parcial 2 en el currículo chileno de cuarto medio se resume a continuación: en total se hace uso de tres situaciones-problema, una de las cuales aparece solo en el PE (S2.5), otra solo en el MD (S2.1) y una en ambos (S2.4); los conceptos-definición detectados fueron siete de un total de ocho, cinco de los cuales están presentes en los dos componentes del currículo, mientras que los otros dos solo aparecen en uno de ellos (C2.4 en el MD y C2.8 en el PE); en cuanto a los procedimientos, dos de ellos (P2.1 y P2.2) se utilizan en ambos componentes, y de manera adicional, el MD incluye un tercero (P2.3); en total hay cuatro proposiciones consideradas en el currículo chileno de cuarto medio (E2.1, E2.3, E2.4 y E2.5), aunque solo una de ellas (E2.4) está incluida en sus dos componentes; con relación a los argumentos, se detectaron tres de ellos, dos aparecen en ambos componentes (PE y MD) y uno (A2.3) solo se presenta en el PE; por último, dos elementos relacionados con el lenguaje (L2.1 y L2.2) fueron detectados tanto en el PE como en el MD.

El Significado Parcial 3 en el currículo chileno de cuarto medio se presenta de la siguiente manera: los tipos de situaciones-problema que aparecen son ocho, de los cuales, cinco son en común y los otros tres aparecen exclusivamente en el MD (S3.5, S3.8 y S3.9); los conceptos-definición que fueron detectados suman ocho en total, estando siete presentes en ambos componentes (MD y PE) y uno (C3.5) solamente en el PE; en cuanto a los procedimientos, se detectaron cinco en total: dos en común (P3.2 y P3.4), uno solo en el PE (P3.3) y dos solo en el MD (P3.1 y P3.5); de las diez proposiciones que fueron detectadas, seis están presentes en ambos componentes (MD y PE), una (E3.8) solo aparece en el MD y tres únicamente se presentan en el PE (E3.8, E3.9 y E3.10); sobre los tipos de argumentos, uno aparece en el MD y en el PE (A3.1), y otro solo se encuentra en este último (A3.2); finalmente, se detectaron tres tipos de lenguaje utilizados en el currículo chileno, dos (L3.1 y L3.2) tanto en el PE como en el MD, y uno (L3.4) solo en el PE.

Otro aspecto que podemos destacar es que, en general, la presencia de un determinado elemento en el TE, el CA o la GDD podría ser equivalente; es decir, para un profesor que utilice estos tres documentos en la planificación y desarrollo de sus clases, sería indiferente que un elemento específico estuviera en uno u otro. Esto se debe a que los mencionados componentes del MD fueron diseñados por el mismo equipo académico y se complementan entre sí, teniendo la misma estructura en la unidad de aprendizaje y contando con actividades similares. La diferencia radica en que, tanto el TE como el CA llegan directamente a las manos de los estudiantes, por lo que ellos tienen a su disposición en todo momento los contenidos acerca de la distribución binomial y sus significados presentes en estos documentos; en cambio, la GDD solo se entrega a los profesores, por lo que depende de ellos el tipo de actividades que pondrán a disposición de sus estudiantes. Por otra parte, el PE no busca desarrollar una unidad didáctica como un libro de texto, sino que se centra en proponer actividades de carácter sugerido, susceptibles de modificación dependiendo del docente y el contexto educativo. Debido a la naturaleza de los dos componentes del currículo chileno de cuarto medio (PE y MD) en lo referente a la distribución binomial, es posible que la presencia de un mismo elemento se exhiba de manera diferente en ambos, aunque para determinar esto requeriría un análisis más exhaustivo.

Otra observación que podemos mencionar es que, algunas coincidencias entre los dos componentes del currículo chileno de cuarto medio corresponden al título de las unidades y los Objetivos de Aprendizaje. Sin embargo, al menos en lo referente a la distribución binomial, las actividades propuestas en el MD no están influenciadas por el PE, ya que están planteadas de manera distinta.

4.6 Representatividad de los significados de la binomial promovidos por el currículo chileno de cuarto medio

Para la valoración de la representatividad de los significados de la binomial promovidos por el currículo chileno de cuarto medio, con respecto a su significado referencial, proponemos una escala cualitativa-cuantitativa (véase Tabla 4.7).

Dicha escala permite valorar la representatividad de cada objeto matemático primario mediante niveles, considerando el porcentaje de presencia de cada uno de ellos en el currículo chileno. Para ello, se definen siete niveles, los cuales fueron establecidos a partir de fraccionar el 100% en cinco regiones, emulando el uso de los quintiles. Cabe señalar que, para calcular los porcentajes totales de los significados parciales, se consideró que cada elemento del significado tiene la misma importancia, por lo que su ponderación es la misma;

bajo nuestra perspectiva, los seis elementos del significado (objetos matemáticos primarios) tiene su propia esencia y un rol especifico. Aunque se pudieran considerar que hay elementos del significado más importantes que otros y, con ello deberían tener más peso que el resto en el cálculo de la representatividad total, esto sería muy difícil de cuantificar, o bien, subjetivo para cada persona.

Tabla 4.7

Escala de representatividad

Nivel de representatividad	%
Global	100
Alto	(80 – 100)
Medio alto	(60 – 80]
Medio	(40 – 60]
Medio bajo	(20 – 40]
Bajo	(0 – 20]
Nulo	0

Fuente. Elaboración propia.

Los niveles de representatividad que alcanzan los objetos matemáticos primarios relacionados con el Significado Parcial 1 se resumen a continuación: las situaciones-problema cuentan con una presencia del 66,7% en el currículo chileno, por lo que su nivel de representatividad es *medio-alto*; el mismo porcentaje tienen los conceptos-definición, por lo que se clasifican en el mismo nivel; los procedimientos y proposiciones cuentan con un 100% de presencia, por ello, ambos tienen un nivel *global*; la presencia de los argumentos es de un 33,3%, por lo que se categoriza en el nivel *medio-bajo*; y en cuanto al lenguaje, tiene una presencia del 75%, lo que se traduce en un nivel *medio-alto*. En promedio, el SP1 está presente en un 73,6% y, por lo tanto, su nivel de representatividad es *medio-alto*.

En el Significado Parcial 2, la representatividad para cada uno de los elementos del significados se detallan a continuación: las situaciones-problema se presentan en un 50%, valorándolas en un nivel *medio*; los conceptos-definición tienen un 87,5% de presencia, por lo que su nivel es *alto*; los procedimientos están cubiertos en un 100% en el currículo chileno, por lo tanto su nivel es *global*; las proposiciones se presentan en un 80%, por lo que su representatividad es *media-alta*; en cuanto a los argumentos, su nivel es *global*, ya que están presentes la totalidad de ellos; y el lenguaje se presenta en un 50%, lo que se valora en un nivel *medio*. En promedio, los elementos de este significado parcial se presentan en un 77,9%, por lo tanto, SP2 está categorizado en un nivel *medio-alto* de representatividad.

En cuanto a la representatividad de los objetos matemáticos primarios ligados al Significado Parcial 3, se tiene lo siguiente: las situaciones-problema cuentan con una presencia del 80%, por lo que su nivel es *medio-alto*; los conceptos-definición están presentes en un 90%, por tanto, su nivel es *alto*; los procedimientos se presentan en un 100%, teniendo un nivel *global*; las proposiciones también cuentan un nivel *alto*, ya que están presentes en un 90,3%; los argumentos cuentan con un 100% de presencia, lo que se traduce en un nivel *global*; y los tipos de lenguaje se presentan en un 75%, que corresponde a un nivel *medio-alto*. Los objetos matemáticos primarios ligados a SP3 se presentan, en promedio, en un 89,3%, por lo que se consideran en un nivel *alto;* por lo anterior, podemos señalar que la representatividad de SP3 es superior a los otros significados parciales.

Finalmente, al promediar el porcentaje de la presencia de todos los objetos matemáticos primarios de cada significado parcial, se obtiene un 80,3% (véase tabla 4.8). En ese sentido, podemos señalar que el significado de la distribución binomial que se promueve en currículo chileno de cuarto año medio se valora con un nivel de representatividad *alto*.

Tabla 4.8

Presencia de los objetos matemáticos primarios en el currículo chileno de cuarto medio

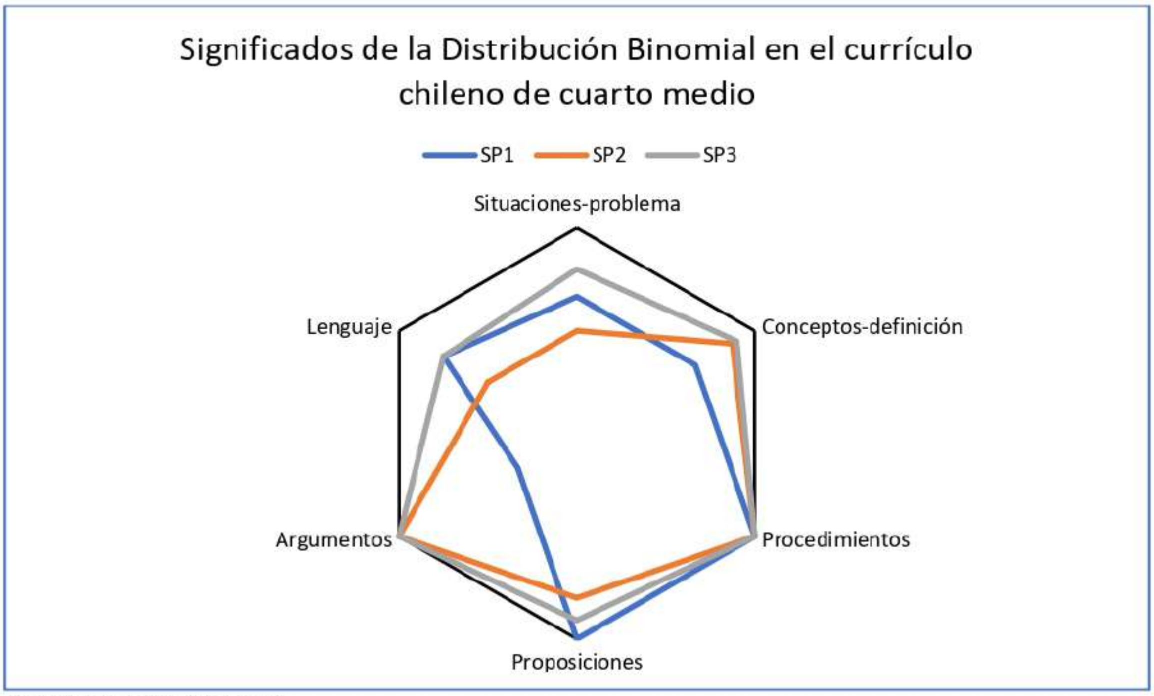
Elementos del significado	% de presencia			
	SP1	SP2	SP3	$\bar{x}$
Situaciones-problema	66,7	50,0	80,0	65,6
Conceptos-definición	66,7	87,5	90,0	81,4
Procedimientos	100,0	100,0	100,0	100,0
Proposiciones	100,0	80,0	90,9	90,3
Argumentos	33,3	100,0	100,0	77,8
Lenguaje	75,0	50,0	75,0	66,7
$\bar{x}$	73,6	77,9	89,3	80,3

Fuente. Elaboración propia.

Por otro lado, en la Figura 4.46 se resume la presencia de cada elemento del significado en el currículo chileno, donde se puede observar que los procedimientos corresponden al elemento con mayor presencia, ya que está presente en su totalidad; en contraparte, las situaciones-problema y el lenguaje, son los elementos que cuentan con menor presencia en el currículo chileno de cuarto medio.

Figura 4.46

Presencia de los significados parciales de la binomial en el currículo chileno de cuarto medio



Fuente: elaboración propia

5. CONCLUSIONES

5.1 Introducción

A continuación, se exponen las conclusiones que dan cierre a los resultados de la presente investigación. En primera instancia, se presentan algunas conclusiones generales del trabajo, luego se da respuesta a la pregunta de investigación y, posteriormente, se comentan las principales aportaciones generadas, así como las limitaciones del estudio y posibles líneas futuras de investigación.

5.2 Conclusiones generales

La distribución binomial es considerada como una de las distribuciones de variable discreta más importantes en estocástica, dada su aplicación en situaciones aleatorias como juegos de azar y en fenómenos que comparten su comportamiento; frecuentemente, su estudio se presenta en cualquier curso introductorio a la Probabilidad y Estadística.

En Chile, la distribución binomial se introduce formalmente en el nivel de cuarto año de educación media; en ese sentido, es importante que los documentos oficiales que apoyan su estudio en las aulas de clase aporten los contenidos adecuados para lograr su comprensión en los estudiantes. En relación con lo anterior, el Programa de Estudio y los componentes del Material Didáctico (Texto del Estudiante, Cuaderno de Actividades y Guía Didáctica del Docente) cumplen un rol fundamental, por lo que es necesario analizarlos críticamente antes de utilizarlos para la planificación de una clase. Siguiendo esta línea, consideramos necesario analizar los significados parciales de la binomial promovidos en el currículo chileno, de cuarto año medio, con respecto a su significado referencial y, con ello, establecer una valoración de la representatividad de los mismos.

En el Significado Parcial 1 se abordan dos de las tres situaciones-problema; no obstante, consideramos que la tipología ausente no representa un obstáculo para la comprensión de la binomial, puesto que está incluida dentro de las otras dos; además, al igual que otros elementos de este significado parcial, se encuentra presente en niveles anteriores a cuarto medio. Por otra parte, las proposiciones y procedimientos están completamente presentes en el currículo chileno de cuarto año medio, por lo que es bastante probable que estos elementos sean cubiertos en su totalidad durante las clases de matemática. En cuanto al lenguaje, está ausente la representación tabular, la cual podría ser promovida por los profesores de cuarto medio en el aula. Con respecto a los conceptos-definición y los argumentos, las tipologías detectadas corresponden a catorce de veintiuna y una de tres, respectivamente, por lo que sería prudente que los profesores en servicio consideren las ausentes e incorporen en sus planificaciones, esto para favorecer la comprensión de la binomial de los estudiantes.

Sobre el Significado Parcial 2, hay algunas situaciones-problema que no se consideran en el currículo chileno de cuarto medio, por ejemplo, el calcular la esperanza de una serie de fenómenos binomiales incompletos. Esta situación-problema tiene su origen en el juego de puntos y su interrupción (mencionado en el apartado 1.4.1); consideramos que sería interesante incluir este tipo de problemas en las aulas de clases, puesto que ayudaría a comprender el desarrollo histórico de la binomial, lo que a su vez, de acuerdo con Dalcín y Olave (2007), permite:

> reconocer que la matemática, en su desarrollo, ha acumulado un enorme conjunto de hechos que permiten ver que los conceptos que la sustentan, tienen su origen en la abstracción de la realidad objetiva y que existen relaciones importantes entre el desarrollo matemático y el desarrollo de la sociedad (p.150).

En cuanto a los conceptos-definición, se detectaron siete de ocho, y de las proposiciones, cuatro de cinco; en ambos casos, la tipología ausente se relaciona con la extensión del desarrollo del binomio, lo cual podría ser incluido para favorecer la comprensión del desarrollo 'aritmético-algebraico' que sustenta la fórmula de la binomial. Los procedimientos y argumentos se encuentran presentes en su totalidad (tres de tres, en ambos casos) y, en relación con el lenguaje, no se detectó presencia de representaciones tabulares ni gráficas.

En relación con el Significado Parcial 3, se detectaron ocho de un total de diez situaciones-problema, una de las cuales corresponde a determinar la cantidad favorable de ensayos que son necesarios en una situación binomial para tener una cierta cantidad de éxitos. El resto de los elementos del significado también cuentan con una alta representatividad: se presentan nueve de diez conceptos-definición, cinco de cinco procedimientos, diez de once proposiciones y dos de dos argumentos; esto nos indica que, si un profesor hace uso de todo el contenido relacionado con la binomial presente en el Programa de Estudio, en conjunto con el Material Didáctico, durante el desarrollo de sus clases, estaría casi abordando de manera global el Significado Parcial 3. Finalmente, el caso de la representación tabular en el lenguaje, al igual que en los significados anteriores, también puede ser incorporada por los profesores; en este caso, podría ayudar a la transición (paso intermedio) entre el cálculo de probabilidades de un fenómeno binomial (probabilidad de cada valor de la variable aleatoria discreta) y su representación gráfica.

En resumen, los tres significados parciales de la binomial, así como sus respectivos elementos, fueron analizados y detectados en diferentes proporciones en el currículo chileno de cuarto año medio, siendo el SP3, en general, el más presente. Esto se debe a que este significado parcial se relaciona directamente con el formalismo de la distribución binomial y el uso de su fórmula para calcular probabilidades. Los otros dos significados parciales se encuentran presentes en menor medida; no obstante, algunos de sus elementos se abordan en niveles anteriores a cuarto medio.

Aunque un profesor utilice en la planificación y en el desarrollo de sus clases tanto el PE como el MD, es posible que la ausencia de algunos elementos pertenecientes a los significados de la distribución binomial dificulte la comprensión del estudiantado, parcial o totalmente, sobre este objeto probabilístico-matemático. Por tanto, consideramos que es necesario complementar con actividades que permitan abordar los elementos que no aparecen en el currículo chileno de cuarto medio, ya sea con material externo o con aquel diseñado por cada profesor.

Una diferencia importante entre el Programa de Estudio y el Material Didáctico es que en el primero se construye la fórmula binomial mediante actividades guiadas, haciendo una transición progresiva desde el SP1 al SP3; esto no ocurre en el MD, donde se introduce directamente la distribución binomial y su fórmula, sin ningún tipo de construcción previa. Otra diferencia, es que las actividades propuestas en el Material Didáctico tienden a ser repetitivas, ya que, en diversas ocasiones, dada una situación binomial, se solicita determinar sus parámetros, aplicar la fórmula y calcular la media y la varianza; esto no ocurre en el Programa de Estudio, donde, al construirse la fórmula de manera progresiva, las actividades propuestas son más variadas entre sí.

Además, hubo algunas diferencias en los elementos del significado presentes en los dos componentes del currículo chileno de cuarto medio, aunque se presentaron múltiples elementos en común. Dentro de las diferencias, podemos mencionar conceptos como el de sumatoria, el cual se utiliza directamente en el cálculo de probabilidades de un intervalo, siendo este tipo de actividades aquellas que solo se presentan en el MD; también destacamos el uso de diagramas de árbol, cuyo uso solo se exhibe en el Programa de Estudio.

5.3 Respuesta a la pregunta de investigación

Después del análisis de los documentos pertenecientes al currículo chileno de cuarto medio, identificando cuáles son los elementos presentes y ausentes relacionados con la distribución binomial, es posible dar respuesta a la pregunta de investigación planteada en la sección 1.5.1: *¿Cuáles son los significados parciales de la distribución binomial promovidos en el currículo de matemática (considerando el programa de estudio y el Material Didáctico) de cuarto año de Educación Media de Chile?*

En el currículo chileno de cuarto año medio se promueven los tres significados parciales de la distribución binomial, aunque en diferentes proporciones debido a la presencia de los objetos matemáticos primarios de cada uno de ellos.

No es posible afirmar que alguno de estos significados esté completamente presente en los documentos analizados. Específicamente, para SP1, SP2 y SP3, se detectó el 73,6%, 77,9% y 89,3% de los elementos, respectivamente. Por lo tanto, la valoración de la representatividad de los dos primeros significados parciales se categoriza como *media-alta*, mientras que para el tercer significado parcial, se considera *alta*. Al promediar el valor de representatividad de los tres significados parciales se obtiene un 80,3%, por lo que, en general, podemos afirmar que la representatividad de los significados parciales de la distribución binomial en el currículo chileno de cuarto medio es *alta*.

Cabe señalar que el currículo chileno de cuarto medio también se aborda la *aproximación de la distribución normal a la binomial*, lo que está incluido dentro del Significado Parcial 4 (SP4) descrito en el apartado 1.4.2; sin embargo, el análisis de este contenido no fue considerado en esta investigación, dado a que corresponde a la extensión de la binomial hacia otras ideas afines a la probabilidad y estadística, por ejemplo, la ley de grandes números (que involucra ideas como el límite) y la distribución normal (que involucra variables continua); es decir, el SP4 no es exclusivo de la binomial, sino que corresponde a un precedente para otros objetos matemáticos-probabilísticos.

5.4 Principales aportaciones del trabajo

Este trabajo está inscrito en la línea de investigación "Didáctica de los diversos marcos matemáticos" declarada en el Programa de Magíster en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos. En concreto, se inserta dentro de las investigaciones de análisis de libros de texto en el campo de la Estadística y Probabilidad, así como en el estudio de la distribución binomial y su proceso de enseñanza-aprendizaje.

En ese sentido, consideramos que el principal aporte de esta investigación consiste en otorgar a los profesores de matemática de Chile una visión amplia de cómo se presenta la distribución binomial en los documentos oficiales entregados por el MINEDUC. Esto les permitirá planificar sus clases teniendo en cuenta la presencia y la ausencia de los elementos de los significados parciales de la binomial; en relación con eso, podrían diseñar actividades que contemplen los elementos faltantes y, con ello, favorecer la comprensión de dicha distribución discreta en los estudiantes.

Sumado a lo anterior, parte de este estudio ayuda a complementar los elementos del significado holístico de la distribución binomial, presentado en Fernández et al. (2022), aportando con nuevos componentes de los objetos matemáticos primarios, que fueron detectados durante el análisis de contenido de los documentos; los cuales se presentan, en letra cursiva, en la tabla del Anexo A.

Otro aporte que consideramos es la propuesta de valoración de representatividad de los significados que se muestra en la Tabla 4.7 (véase sección 4.6). Esta escala permite establecer una valoración cualitativa ordinal basándose en el porcentaje de elementos presentes en un determinado documento, con respecto a la cantidad total de elementos del significado referencial. Dicha escala podría ser utilizada en otras investigaciones que compartan un objetivo similar al planteado en este trabajo. Adicionalmente, consideramos que este trabajo contribuye a dar una valoración general de cada uno de los componentes del currículo chileno de cuarto año medio.

5.5 Limitaciones del estudio y futuras líneas de investigación

Dentro de las limitaciones de este estudio, podemos señalar la baja cantidad de libros analizados, esto debido a que, a diferencia de países como México o España, en Chile se entrega gratuitamente un único libro de texto de matemática por nivel a todos los estudiantes de establecimientos municipales o particulares subvencionados y, por este motivo, no existe un conjunto de libros de texto de los que se pueda establecer comparaciones entre sus contenidos. Asimismo, podría ser un desafío para investigadores extranjeros analizar los significados de la distribución binomial en los libros de texto o programas de estudio de sus respectivos países y así, establecer comparaciones entre los contenidos de los currículos de diversos lugares.

Sumado de lo anterior, no se consideraron los documentos curriculares de los niveles anteriores a cuarto medio, puesto que no se trabaja con la distribución binomial de manera directa; sin embargo, existen elementos relacionados con la binomial que se abordan en esos cursos, por lo que se podría analizar a futuro los demás documentos curriculares de enseñanza media y, de esta manera, entregar una visión completa de los significados parciales de la binomial en el currículo chileno. Asimismo, se podría extender una investigación similar que abarque libros de texto utilizados en la educación superior.

Adicionalmente, el Programa de Estudio de la asignatura electiva de Probabilidad y Estadística Descriptiva e Inferencial tampoco fue considerado para este estudio, ya que este carece de un libro de texto que lo apoye y, además, la cantidad de estudiantes que cursa esta asignatura es presumiblemente baja, debido a los filtros que limitan el acceso de los alumnos a la misma. Esto es, solo los establecimientos cuya enseñanza es de tipo Humanista-Científico están habilitados para ofrecer dicha asignatura, lo que supone una primera barrera; luego, está el hecho de que dichos establecimientos decidan ofrecerla como alternativa, lo cual no es obligatorio; y finalmente, en aquellos establecimientos en los que esté disponible el curso, solo algunos estudiantes deciden optar por cursarla. Esto hace suponer que la cantidad de estudiantes que cursan esta asignatura es bastante baja en comparación con la cantidad de estudiantes chilenos de enseñanza media; aun así, consideramos que sería interesante analizar dicho documento oficial (electivo) con el propósito de establecer una comparación entre las actividades sugeridas por ambos programas.

Por otra parte, los resultados expuestos en este proyecto de tesis se limitan a verificar la presencia o ausencia de los elementos del significado de la binomial en el currículo chileno de cuarto medio, mas no se realiza una revisión exhaustiva de la frecuencia con que se presenta cada uno, por lo tanto, esto podría ser abordado en una próxima investigación.

Otra de las limitaciones es que, si bien es cierto, el Programa de Estudio y los componentes del Material Didáctico proporcionan una primera aproximación de lo que se realiza dentro de las aulas de clase, existen muchos otros factores que interfieren en este proceso, haciendo que, aunque se utilice el mismo libro de texto, dos clases puedan ser radicalmente opuestas; estos factores (por ejemplo, el uso que le dé cada docente a los documentos curriculares) no son considerados dentro de los objetivos del presente trabajo y por lo tanto, podrían investigarse a futuro.

Otra línea de investigación que se abre a partir del presente trabajo de tesis, podría ser el diseño de secuencias didácticas para el estudio de la binomial en las aulas de clase de cuarto año medio, rediseñando las actividades propuestas por los documentos curriculares, o diseñando nuevas que ayuden a complementar las mismas, para favorecer la comprensión de este objeto matemático.

Adicionalmente, cabe preguntarse si los profesores en ejercicio cuentan con los conocimientos necesarios para subsanar las falencias detectadas en el currículo chileno de cuarto medio respecto de los significados de la distribución binomial. En caso de que la respuesta sea negativa, es necesario que los profesores, tanto en ejercicio como en formación, adquieran los conocimientos probabilístico-matemáticos necesarios para abordar esta problemática.

5.6 Publicaciones o presentaciones relacionadas la investigación

Algunas de las publicaciones o presentaciones relacionadas con la presente investigación son las siguientes:

Araya, I. y García-García, J. I. (2020). Significados de la distribución binomial: una mirada en el currículo chileno de educación media. *VII Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación (TEMBI7) en alianza con la Comunidad GeoGebra Latinoamericana* (pp. 63-64). Benemérita Universidad

Autónoma de Puebla, México. https://www.fcfm.buap.mx/TEMBI/EP/2020/Programa2020.pdf

Araya-Naveas, I. y García-García, J. I. (2021). Distribución binomial: análisis de sus significados en el currículo chileno de cuarto medio. *XXIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, SOCHIEM* (pp. 281-286). Universidad Católica Silva Henríquez, Santiago de Chile. https://www.sochiem.cl/wp-content/uploads/actas-jnem-2021-santiago-xxiv-ucsh.pdf

Araya, I. y García-García, J. I. (2021). La distribución binomial en el currículo chileno de educación media para formación general. *V Simposio Internacional de Matemática Educativa (V SIME)* (pp. 30-31). Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica. https://sime.ucr.ac.cr/images/SIME/Documentos/Programas/Libro_final_SIME2.pdf

Fernández, N. A., García-García, J. I., Arredondo, E. H., y Araya, I. A. (2022). Epistemic Configurations and Holistic Meaning of Binomial Distribution. *Mathematics, 10*, 1748. https://doi.org/10.3390/math10101748

REFERENCIAS

Aké, L., y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática, 30*(2), 171-201.

Alvarado, H., y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números, 67*.

Alvarado, H., y Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios Pedagógicos, 34*(2), 7-28.

Alvarado, H., y Segura, N. (2012). Significado de las distribuciones muestrales en textos universitarios de estadística. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 7*(2), 54-71.

Andréu, J. (2002). Las técnicas de análisis de contenido: Una revisión actualizada. *Fundación Centro de Estudios Andaluces,* 1-34.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-263.

Batanero, C., Gea, M. M., Díaz-Levicoy, D., y Cañadas, G. (2015). Objetos matemáticos ligados a la regresión en los textos españoles de bachillerato. *Educación Matemática, 27*(2), 9-35.

Begué, N., Batanero, C., Gea, M. M., y Díaz-Levicoy, D. (2020). Razonamiento de estudiantes de bachillerato ante una situación binomial. *Tangram, 3*(2), 27-50.

Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in trainingteachers. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Springer.

Carrera, B. (2020). *Prácticas sobre la variable aleatoria propuestas en el currículo chileno de educación media* [Tesis de Magíster, Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile]. http://dremat.ulagos.cl/tesis/.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée sauvage.

Cid, N., Retamal, L., y Alvarado, H. (2017). Un estudio inicial sobre conocimientos de probabilidad binomial en profesores de matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Granada, España]. https://www.ugr.es/~batanero/pages/librostesis.html#Tesis

Cobo, B., y Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(1), 5–18.

Cordero, F., y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Dalcín, M., y Olave, M. (2007). Ecuaciones de segundo grado: su historia. En C. R. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 150-155). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Del Pino, J., y Estepa, A. (2017). Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º curso de la Educación Secundaria Obligatoria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Del Pino, J., y Estepa, A. (2019). Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 16*, 86-102.

Dirección General del Bachillerato. (2019). *Probabilidad y Estadística, Programa de Estudios, Quinto Semestre*. Dirección General del Bachillerato.

Escolano, A. (2009). El manual escolar y la cultura profesional de los docentes. *Tendencias Pedagógicas, 14*, 169-180.

Fernández, N. A., García-García, J. I., Arredondo, E. H., y Araya, I. A. (2022). Epistemic Configurations and Holistic Meaning of Binomial Distribution. *Mathematics, 10,* 1748.

Font, V., Godino, J. D., y D'Amore, B. (2007). Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. [Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 2-7.]

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2012). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

García-García, J. I., Fernández, N. A., Arredondo, E. H., e Imilpán, I. (2022). The binomial distribution: historical origin and evolution of its problem-situations. *Mathematics, 10,* 2680.

García-García, J. I, Fernández, N., e Imilpán, A. (2020). Desarrollo del razonamiento probabilístico en profesores de matemáticas mediante simulación computacional. *Revista Paradigma, 41*(2), 404-426.

García-García, J. I. (2017). *Razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre la noción de la distribución binomial* [Tesis Doctoral no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

García-García, J. I., Arredondo, E. H., y Márquez, M. (2018). Desarrollo de la noción de distribución binomial en estudiantes de bachillerato con apoyo de tecnología. *Revista Paradigma, 39*(2), 92-106.

García-García, J. I., Medina, M., y Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 6*, 5-23.

García-García, J. I., y Sánchez, E. (2015). *El desarrollo del razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre la noción de la distribución binomial* [Ponencia de investigación]. 3er Coloquio de Doctorado Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

García-García, J. I., Urrutia, I., Vásquez, S., y Arredondo, E. H. (2021). Significado de la media, mediana y moda en textos escolares de séptimo básico. *Revista Chilena de Educación Matemática, 13*(4), 186-199.

Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P., Cañadas, G., y Contreras, J. M. (2014). Análisis del lenguaje sobre la correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. *Suma, 76*, 37-45.

Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P., y Cañadas, G. (2013). Justificaciones en el tema de correlación y regresión en textos españoles de Bachillerato. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 4*(2).

Glasnović, D. (2014). What can textbook research tell us about National Mathematics Education? Experiences from Croatia. En Jones, K., Bokhove, C., Howson, G., y Fan, L. (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014)* (pp. 251-256). University of Southampton.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Didactique des Mathematiques, 22*(2-3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2009). Un Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. [Versión ampliada en español de Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.]

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA, 5*(2), 49-65.

Gómez, E., Contreras, J. M., y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para educación primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 69-72). SEIEM.

Gómez-Torres, E., Batanero, C., y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Epsilon, 31*(2), 25-42.

Gómez-Torres, E., Ortiz, J. J., y Gea. M. M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5*, 49-71.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6.ª ed.). McGraw Hill.

Landín, P. (2013). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre problemas binomiales. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 425-431). Universidad de Granada.

Landín, P., y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa, 12*(3), 598-618.

Lind, D., Marchal, W., y Wathen, S. (2012). *Estadística aplicada a los negocios y la economía* (15.ª ed.). McGraw Hill.

Maxara, C., y Biehler, R. (2010). Students' understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics.* International Statistical Institute.

Mayén, S., Salazar, A., y Sánchez, E. (2013). Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 409-416). Universidad de Granada.

Mayén, S., y Salazar, A. (2014). Niveles de razonamiento en la resolución de tareas de tipo binomial. *En L. Andrade (Ed.), Memorias I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 88-97). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015, 3 de enero). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín Oficial del Estado, Núm. 3. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

MINEDUC. (2009, 12 de septiembre). *Ley 20.370. Establece la Ley General de Educación*. Ministerio de Educación. http://bcn.cl/2aomk

MINEDUC. (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Ministerio de Educación.

MINEDUC. (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. Ministerio de Educación.

MINEDUC. (2021). *Programa de Estudio, Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial para Formación Diferenciada*. Ministerio de Educación.

Moncho, J. (2015). *Estadística aplicada a las ciencias de la salud*. Elsevier.

Monje, Y., Seckel, M. J., y Breda, A. (2018). Tratamiento de la inecuación en el currículum y textos escolares chilenos. *Bolema, 32*(61), 480-502.

Moore, D. (2000). *Estadística aplicada básica* (2.ª ed.). Antony Bosch.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Batanero, C., y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma, 38*, 5-13.

Parra, Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función* [Tesis de Magíster, Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile]. http://dremat.ulagos.cl/tesis/

Picado, M., y Rico, L. (2012). La introducción del sistema métrico decimal y los libros de texto en España. *Suma, 71*, 9-18.

Pino-Fan, L., Castro, W., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma, 34*(2), 123-150.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema, 29*(51), 60-89.

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y., y Castro-Gordillo, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220.

Salcedo, A. (2019). Las ideas fundamentales de la estadística en textos escolares de matemáticas. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística.* www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Salcedo, A., Ramírez, T., y Uzcátegui, R. A. (2018). Los libros de texto de matemáticas como objeto de investigación. El caso de la colección Bicentenario. *Revista Plumilla Educativa, 21*(1), 81-97.

Sánchez, E., García-García, J. I., y Mercado, M. (2018). Determinism and empirical commitment in the probabilistic reasoning of high school students. En C. Batanero, y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp. 223-239). Springer. http://www.springer.com/series/15585

Sánchez, E., Inzunsa, S., y Ramírez, G. (2014). *Probabilidad y Estadística II.* Grupo Editorial Patria.

Sánchez, E., y Carrasco, G. (2018). El razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato en actividades de distribución binomial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 535-543). SEIEM.

Silvestre, E., Gea, M. M. y Sánchez, E. (2017). Actividades sobre distribuciones muestrales en el bachillerato mexicano. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 424-434). FESPM.

Taufiq, I., Sulistyowati, F., y Usman, A. (2020). Binomial distribution at high school: An analysis based on learning trajectory. *Journal of Physics: Conference Series, 1521*(3).

Toledo, Á., Montenegro, D., y Vicencio, I. (2019). Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales. *Brazilian Journal of Development, 5*(6), 5399-5410.

Valverde, M. (2017). *Un estudio de la presentación de la distribución normal en los textos de bachillerato* [Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada, Granada, España]. https://masteres.ugr.es/didacticamatematica/pages/investigacion/fin_master

Vásquez, C., y Alsina, A. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado, 19*(2), 441-462.

Vásquez, C., y Alsina, A. (2017). Proposiciones, procedimientos y argumentos sobre probabilidad en libros de texto chilenos de educación primaria. *Profesorado, 21*(1), 433-457.

Vergara, A., y Parraguez, M. (2016). Construcción cognitiva de la distribución binomial; una mirada desde la teoría APOE. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 29* (pp. 481-489). CLAME.

Wackerly, D., Mendenhall, W., y Scheaffer, R. (2008). *Estadística matemática con aplicaciones* (7.ª ed.). Cengage Learning.

Webster, A. (2001). *Estadística aplicada a los negocios y la economía* (3.ª ed.). McGraw Hill.

Zamorano, C., y Muñoz, M. (2016). Una experiencia de aula para la enseñanza de la distribución binomial. En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, y D. Zakaryan (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 151-155). SOCHIEM.

ANEXO A

Elementos del significado referencial de la distribución binomial

	Significado Parcial 1	**Significado Parcial 2**	**Significado Parcial 3**
Situaciones-problema	S1.1: Selección de dos cosas de X diferentes. S1.2: Determinación de casos posibles, favorables o no favorables *S1.3: Determinación de la variable aleatoria (discreta) y/o sus valores*	S2.1: Asignación de valor a un ensayo. S2.2: Validación de aleatoriedad de fenómenos. S2.3: Probabilidad de casos extremos. S2.4: Probabilidad de una cantidad especifica de aciertos en un fenómeno binomial (sin uso de la fórmula) S2.5: Probabilidad de un intervalo de valores de la variable aleatoria (V.A.) de la distribución binomial (sin uso de la fórmula) S2.6: Calcular la esperanza de una serie de fenómenos binomiales incompletos.	S3.1: La probabilidad de cualquier fenómeno binomial (usando la fórmula). S3.2: Esperanza (valor esperado) de un fenómeno binomial variable. S3.3: Cantidad más probable de aciertos. Calculo e interpretación de la media. S3.4: Dispersión del número de aciertos. Interpretación de la varianza o la desviación estándar S3.5: Probabilidad de un intervalo de valores de la V.A. de la distribución binomial (usando la fórmula) S3.6: Esperanza de fenómeno binomial incompleto. S3.7: Cantidad favorable de ensayos. *S3.8: Determinar si un fenómeno probabilístico cumple con un comportamiento binomial* *S3.9: Determinar los parámetros de un experimento binomial* *S3.10: Construir el gráfico de la distribución binomial*
Conceptos-definiciones	C1.1: Azar (experimento azaroso) C1.2: Caso o suceso C1.3: Suceso excluyente C1.4: Suceso no excluyente C1.5: Patrón numérico C1.6: Potencia C1.7: Desigualdad C1.8: Incógnita C1.9: Coeficiente binomial C1.10: Combinatoria C1.11: Valor de la variable C1.12: Orden C1.13: Permutación C1.14: Variación C1.15: Probabilidad como proporción C1.16: Números figurados C1.17: Triángulo de Pascal C1.18: Repetición C1.19: Espacio muestral C1.20: Variable aleatoria discreta C1.21: Factorial	C2.1: Probabilidad como valor entre 0 y 1 C2.2: Valor asociado a un experimento aleatorio C2.3: Distribución de probabilidad C2.4: Sumatoria C2.5: Extensión del desarrollo del binomio *C2.6: Éxito y fracaso* *C2.7: Independencia* *C2.8: Sucesos equiprobables y no equiprobables*	C3.1: Situación/ fenómeno binomial (distribución binomial) C3.2: Probabilidad binomial (fórmula de la distribución binomial) C3.3: Función de probabilidad C3.4: Parámetro C3.5: Inferencia probabilística C3.6: Grado de conocimiento (probabilidad subjetiva) C3.7: Media C3.8: Varianza/ D. Estándar C3.9: Valor esperado (esperanza) *C3.10: Ensayo de Bernoulli*
Procedimientos	P1.1: Conteo directo de casos P1.2: Construcción del espacio muestral P1.3: Reconocimiento de patrones P1.4: Construcción y validación de algoritmos originados desde los patrones numéricos P1.5: Búsqueda de propiedades P1.6: Uso de representaciones gráficas	P2.1: Identificación de las características del fenómeno probabilístico P2.2: Generación, comprobación y/o corrección de modelos matemáticos de fenómenos de naturaleza binomial P2.3: Cálculo del valor esperado al asignar valores a las probabilidades de un fenómeno	P3.1: Determinación de parámetros de la distribución binomial P3.2: Comparar valores teóricos de un fenómeno binomial y las proporciones observadas. P3.3: Variar parámetros en simulaciones P3.4: Aproximación o cálculo de medidas como la media y varianza P3.5. Cálculo de probabilidades aplicando la fórmula

Proposiciones	E1.1: Los juegos de azar y otros fenómenos pueden ser analizados desde distintas representaciones. E1.2: Se puede obtener un grado de conocimiento del azar utilizando expresiones matemáticas. E1.3: Sumando los casos posibles de dos o más sucesos se obtiene la cantidad de arreglos totales (principio aditivo para el conteo de casos). E1.4: Multiplicando los casos posibles de dos o más sucesos se obtiene la cantidad de arreglos totales (principio multiplicativo para el conteo de casos).	E2.1: El valor esperado de un experimento binomial corresponde a la suma de los productos de cada valor de la variable por su respectiva probabilidad de ocurrencia. E2.2: Se pueden obtener las probabilidades asociadas a un fenómeno binomial estudiando la expansión de la expresión $(p+q)^n$ en la que p y q son sus probabilidades y n la cantidad de repeticiones de los ensayos. E2.3: La probabilidad sigue principios aditivos y multiplicativos, al estar directamente relacionada con el conteo de casos. *E2.4: La suma de las probabilidades de 'éxito' y 'fracaso' de un fenómeno aleatorio es igual a 1* *E2.5: La suma total de las probabilidades de cada valor de la V.A. es igual a 1*	E3.1: En un fenómeno binomial existen n observaciones E3.2: Las observaciones/ensayos en un fenómeno binomial son independientes E3.3: Cada ensayo de un fenómeno binomial tiene solo dos resultados posibles (éxito y fracaso) E3.4: Las probabilidades de éxito y fracaso son constantes E3.5: En un ensayo binomial, la probabilidad de obtener m aciertos en n ensayos con una probabilidad p de éxito está dada por la fórmula binomial. E3.6: El valor esperado en un fenómeno binomial está dado por su media. E3.7: Considerando una alta serie de experimentos, si la proporción observada no concuerda con la probabilidad teórica, se sugiere que el fenómeno podría no ser binomial. *E3.8: La probabilidad de un conjunto de valores de la V.A. de un fenómeno binomial está dado por la sumatoria de las probabilidades de cada uno.* *E3.9: La binomial permite modelar problemas que el modelo Laplace no puede* *E3.10: Existencia de simetría en la distribución binomial cuando* $p = 0{,}5$ *E3.11: Fórmula binomial para el caso particular de* $p = 0{,}5$
Argumentos	A1.1: Razonamiento inductivo A1.2: Expresiones recursivas A1.3: Uso de representaciones	A2.1: Razonamiento deductivo A2.2: Razonamiento inductivo A2.3: Uso de representaciones	A3.1: Razonamiento deductivo A3.2: Uso de representaciones
Lenguaje	L1.1: Lenguaje común L1.2: Simbólico L1.3: Tabular L1.4: Gráfico (diagrama de árbol)	L2.1: Lenguaje común L2.2: Simbólico L2.3: Tabular L2.4: Gráfico	L3.1: Lenguaje común L3.2: Simbólico L3.3: Tabular L3.4: Gráfico