UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

EL QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES: UNA MIRADA HISTÓRICO-EPISTEMÓLOGICA DESDE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

POR

MERARDO ANDRÉS PINILLA OLIVA

Tesis presentada para optar al grado académico de Magíster en Educación Matemática

Director: Dra. Elizabeth Hernández Arredondo

Codirector: Mg. Rigoberto Medina Leyton

Osorno, sur de Chile. 2022

Merardo A. Pinilla Oliva: *El Quinto Postulado de Euclides: Una Mirada Historica Epistemológica Desde Los Modos de Pensamiento*

WEBSITE:

http://dremat.ulagos.cl/

E-MAIL:

merardo.pinilla@ulagos.cl

Tesis conducente al grado de Magíster en Educación Matemática

A mi familia, y a todo aquel que conciba un mundo imaginario.

Agradecimientos

A mis directores, por sus consejos y tiempo entregado en el desarrollo de este proyecto, muchas gracias por sus palabras de aliento, por compartir su experiencia, conocimiento y pasión por la ciencia.

Y por último, pero no menos importante, quiero agradecerme, por creer en mi, por no tener días libres, por no renunciar, por ser siempre alguien que da o trata de dar más de lo que recibe, por tratar de hacer más bien que mal, por ser siempre yo, y no abandonarme en el camino.

Esta investigación contó con el apoyo financiero de la Universidad de Los Lagos, por medio de la Beca Magíster en Educación Matemática, Concurso 2018.

Índice general

Resumen

El siguiente estudio, de carácter histórico documental, se desarrolla un análisis histórico epistemológico del quinto postulado de Euclides publicado en sus Elementos, y en la emergencia de las denominadas geometrías "no euclidianas", durante el periodo de Siglo III a.n.e, hasta la primera mitad del Siglo XIX d.n.e, en la que la matemática y en particular la Geometría, muta en una ciencia abstracta en el sentido de que ya no solo describe el mundo físico y concreto, sino que los objetos geométricos, considerados abstractos representan una generalidad con el único requisito de que tales objetos cumplan con ciertas condiciones establecidas en un conjunto de axiomas. Para tales efectos esta investigación descriptiva se sitúa en los modos de pensamiento de Sierpinska (Sierpinska, 2000) para reconstruir el desarrollo histórico en torno al quinto postulado de Euclides, identificando desde nuestra perspectiva los obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1938) emergentes durante el proceso de evolución histórica del quinto postulado. Tal articulación nos permite, una vez expuestos los referentes teóricos e investigaciones afines, destacar la atención hacia el hecho de la imposibilidad de demostrar el quinto postulado dentro de un sistema axiomático, lo que conduce a abandonar desde el punto de vista histórico la concepción del espacio geométrico, pero en particular abre el crisol de la geometría hacia resultados extraordinariamente interesantes derivados de la teoría de las paralelas. Originando Geometrías diferentes a la euclidiana, pero consistentes desde el punto de vista lógico. Estas conclusiones, fundamentan la urgencia en la falta de fundamentación histórica en el currículum nacional en geometría respecto al quinto postulado y abren la posibilidad de diseñar secuencias didácticas que estimulen el pensamiento geométrico abstracto.

Palabras claves: Obstáculo epistemológico, Quinto postulado Euclides, Modos de pensamiento.

Abstract

In the following study, of a historical documentary nature, an epistemological historical analysis of the fifth postulate of Euclid published in his Elements is developed, and in the emergence of the so-called "non-Euclidean" geometries, during the period of the 3rd century BC, until the first the middle of the 19th century AD, in which mathematics and in particular Geometry, mutates into an abstract science in the sense that it not only describes the physical and concrete world, but that geometric objects, considered abstract, represent a generality with the only requirement that such objects meet certain conditions established in a set of axioms. For such purposes, this descriptive research is situated in Siepinka's modes of thought to reconstruct the partial meanings around the fifth postulate of Euclid, identifying from our perspective the epistemological obstacles (Bachelard) emerging during the process of historical evolution of the fifth postulate. Such articulation allows us, once the theoretical references and related research have been exposed, to highlight the attention to the fact of the impossibility of demonstrating the fifth postulate within an axiomatic system, which leads us to abandon from the historical point of view the conception of the geometric space, but in particular it opens the crucible of geometry to extraordinarily interesting results derived from the theory of parallels. Originating Geometries different from the Euclidean, but consistent from the logical point of view. These conclusions base the urgency on the lack of historical foundation in the national curriculum in geometry regarding the fifth postulate and open the possibility of designing didactic sequences that stimulate abstract geometric thinking.

Key words: Epistemological obstacle, Fifth postulate of Euclid, concept three, modes of thought

Introducción

Que la suma de los ángulos interiores de un triángulo en el plano es igual a π radianes fue uno de los primeros hechos matemáticos establecido por los griegos. En 1603 Thomas Harriot (1560, Oxford – 2 de Julio de 1621, Londres) mostró que sobre una esfera de radio uno, el área de un triángulo esférico (es decir, un triángulo cuyos lados son parte de los meridianos y paralelos) con ángulos α, β, y γ está dada por:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Un hecho ya conocido por Carl Friedrich Gauss (30 Abril de 1777, Braunschweig–23 Febrero de 1855, Göttingen), quien lo publico en su trabajo fundamental *General Investigations of curved surfaces* (Gauss, 2011) anticipando la importancia que tendría para el desarrollo de la *geometría diferencial.*

Tales acontecimientos tienen un punto en común, a saber, el quinto postulado de Euclides. Este geómetra de alejandría, tal vez el más relevante matemático de la antigüedad, es conocido por su obra Los Elementos (el segundo libro más editado tras la Biblia), construye su argumentación sobre la geometría basándose en un conjunto de principios o propiedades que se admiten como ciertas por ser evidentes y a partir de los cuales se deduce todo lo demás, Euclides los llamó postulados.

El quinto postulado tiene un papel preponderante en la geometría, de el se deriva una revolución asociada a la comprensión del espacio geométrico, con implicanciones filosóficas y metodológicas en los fundamentos de la matemática. El estudio sobre la comprensión de este postulado y su rol en la geometría elemental abrio una puerta hacia otros modelos geometricos, denominados geometrías no euclidanas. Tales modelos impulsaron el desarrollo científico replanteando cuentionamientos como; ¿qué es geometría? o ¿cuál es la naturlaeza de los postulados?

Estas preguntas tiene una respuesta histórica en la evolución de la matemática, pero tienen un alcanse claro en el contexto de la educacion, y en particular sobre la enseñanza de la geometría. Esta disyuntiva se pone de manifiesto sobre la relación entre el saber sabio, entendido como el conjunto de conocimentos especializados y el saber enseñado, es decir, una articulación entre la teória y practica asociados al quinto postulado.

El objetivo de este estudio es construir una articulación compresiva del quinto postulado, identificando las causas de posibles estancamientos en el desarrollo del mismo, destacando su funcionalidad, representación y significado, que puedan permitir el diseño de orientaciones curriculares en miras hacia la estimulacion del pensamiento geométrico abstracto.

Sobre las bases de las consideraciones anteriores, se pretende describir la presente Tesis bajo una estructura dada por tres capítulos, tal que;

Capítulo 1. Este capítulo permitirá contextualizar la investigación, visualizando la problemática que existe en torno a una reconstrucción histórica epistemológica del quinto postulado de Euclides y su incidencia sobre las denominadas "geometrías no euclidianas".

Capítulo 2. Centraremos el estudio mediante la realización de un estudio histórico epistemológico en la cual se reconstruye la evolución del quinto postulado de Euclides destacando su origen, relación estructural en el contexto de los Elementos de Euclides y su desarrollo para la fundamentación de la geometría.

Capítulo 3. Para alcanzar los objetivos descritos en secciones posteriores, esta investigación se apoya en los modos de pensamiento de Sierpinska, como herramienta de análisis del pensamiento práctico y teórico, y la noción de Obstáculo Epistemológico acuñada por el filósofo francés Gastón Bachelard.

Capítulo 1

Antecedentes y Problemática

1.1. Introducción

1.2. Antecedentes y Área Problemática

Este capítulo permitirá contextualizar la investigación, visualizando la problemática que existe en torno a una reconstrucción histórica epistemológica del quinto postulado de Euclides y su incidencia sobre las denominadas "geometrías no euclidianas". Para este desarrollo se establecen tres dimensiones, a saber, el objeto matemático (quinto postulado de Euclides), los estudios históricos epistemológicos en educación matemática y el saber sabio en el marco de la transposición didáctica..

1.2.1. La naturaleza de los objetos matemáticos

El aprendizaje y comprensión de los objetos matemáticos son procesos relevados a un eje central en el desarrollo de la Educación Matemática, conocer la naturaleza, su sentido o razón de ser de los objetos matemáticos plantea que la comprensión de un objeto es más bien la captación de la funcionalidad que representa en un contexto determinado y que de dicha funcionalidad se derivan los aspectos de representación y significado, mientras que el aprendizaje se desarrolla como un recorrido distinto al proceso de creación del objeto, pues esto último, surge del descubrimiento de la funcionalidad. Cañón (Cañon, 2011) considera que los objetos matemáticos son "cosas" que satisfacen unas determinadas relaciones. Estas relaciones caracterizan un "estado de las cosas" y este estado sería el objeto matemático. A partir de esta interpretación, se considera que los objetos matemáticos son un estado, el cual se intenta caracterizar y distinguir el estado de ser objeto matemático del estado con el que también se podría calificar el ser un objeto material, un ser vivo, un lugar, un fenómeno, una cualidad, etc. Los objetos matemáticos surgen desde una cierta caracterización del mundo físico-sensible sujeto al conocimiento previo y el conocimiento del contexto. El objeto es o representa una función o funcionalidad que organiza o interpreta el contexto. Por lo tanto, los objetos tienen existencia real pero no material. Su descubrimiento no es una experiencia exclusivamente física o sensible, si no es necesario que intervenga la razón.

Por ejemplo, el hecho práctico de interpretar y simplificar la representación del mundo físico pudo motivar la abstracción (o conceptualización) de ciertas cualidades de este contexto y, asociados a la forma del contorno, a la superficie limitada, a la cardinalidad, etc, surgen objetos matemáticos diversos (formas geométricas, área, número natural, etc). La existencia funcional hace necesaria una representación externa o un signo que permita su expresión y reconocimiento. Los objetos matemáticos admiten representaciones diversas según la naturaleza de los signos que configuran el contexto desde el que se elabora la representación (Pecharroman, 2013). Cada representación debe remitir a la funcionalidad asociada al objeto matemático y debe mantener invariantes sus propiedades. Sin embargo, la forma en la que cada representación ofrece la información sobre el objeto es distinta, y se enfatizan ciertos aspectos en detrimento de otros, lo que hace que el tipo de actividad con el objeto predisponga el uso de una u otra representación. Es por esto que el lenguaje matemático surge asociado a la representación de los objetos matemáticos y a su dinámica o sintaxis representacional en y entre los registros semióticos.

Por otra parte, la variación de contexto, entendiéndose como la necesidad de interpretar, organizar y representar, hace necesario que se reinterprete el objeto inicial o se creen nuevos objetos asociados a esa funcionalidad pero desde un contexto distinto. Por ejemplo, al sustituir el quinto postulado de Euclides por su negación, se generan espacios no euclídeos en los que hay que reinterpretar objetos conocidos, como el caso del objeto de rectas paralelas, que representa a dos rectas que no se cortan (funcionalidad) y tiene expresión y propiedades diferentes en el contexto euclídeo y en el no euclídeo.

El significado de un objeto matemático se desarrolla desde la funcionalidad organizativa, por lo tanto, el contexto debe influencia en el acceso y significado. Indicando que el significado de un concepto se deriva del contexto en el que está implicado. Por ejemplo, una función representa una relación entre dos variables pero bajo el símbolo de integral definida representa el integrando o en una ecuación diferencial es la incógnita. Pecharroman establece;

desde un punto de vista general, es decir, sin considerar las experiencias con las que un individuo pueda percibir ciertos objetos matemáticos en el contexto del mundo sensible, el aprendizaje de los objetos matemáticos parte necesariamente de sus representaciones. Las representaciones del objeto permiten su expresión y deben ser el medio para llegar a observar la funcionalidad que representa el objeto. Considerando el contexto como medio que permite observar la funcionalidad que representa el objeto y, por tanto, que permite que la representación adecuada exprese al objeto.

Tal observación nos permite evidenciar la necesaria emergencia de la comprensión del quinto postulado de Euclides en sus dimensiones de funcionalidad, representación y significado en el contexto histórico del desarrollo de la geometría, que nos permitan la construcción de orientaciones didácticas situadas hacia el diseño de prácticas docentes en el aula.

1.2.2. La importancia del desarrollo de los estudios históricos para la enseñanza de la matemática

La interacción entre historia, educación y matemáticas como tres dimensiones diferentes pero complementarias, constituye lo que es potencialmente interesante, estimulante y beneficioso para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como asignatura. La historia apunta a la naturaleza no absoluta del conocimiento humano: lo que es aceptable ya que el conocimiento es "dependiente del tiempo" (la historicidad es una característica básica) y está potencialmente sujeto a cambios. La educación enfatiza el hecho de que los seres humanos son diferentes en varios aspectos. dependiendo de la edad, las condiciones sociales, la tradición cultural, las características individuales, etc., y de esta manera ayuda a comprender estas diferencias y ser más tolerantes.

Diferentes investigadores han señalado la importancia de explorar estudios históricos-epistemológicos en educación matemática (Smestad, B., Jankvist, U. T., Clark, K. (2014); Clark, K. M. (2012); Jankvist (2009); Tzanakis y Arcavi (2000); Bakker y Gravemeijer (2006)). Recientemente, en el ICME 2016 celebrado en Alemania se presentaron dos grupos de discusión, a saber, *History of the teaching and learning of mathematics y The role of history of mathematics in mathematics education*, estos discuten las aportaciones que hacen este tipo de investigaciones históricas y epistemológicas y su impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje permitiendo evidenciar ciertos problemas en la constitución de los conceptos matemáticos.

El estudio histórico-epistemológico atiende a la problemática fundamental de la enseñanza de la matemática como una disputa entre la obra matemática (en el sentido de Chevallard) y la matemática escolar, es en este sentido que no es trivial interpretar y reorganizar la obra matemática para precisar la reconstrucción de significados en los procesos y conceptos intervinientes junto con la identificación de los obstáculos epistemológicos que subyacen en el desarrollo del conocimiento matemático, esto desde el punto de vista de su origen, evolución y estructura.

El desarrollo histórico de las Geometrías No Euclidianas es no ostensivo y el papel del quinto postulado en la fundamentación axiomática de la Geometría es crucial para la matemática, lo anterior presenta una problemática para la matemática escolar pues en el aula no se reconocen los mecanismos de construcción que llevaron a los matemáticos a desarrollar sistemas axiomáticos compatibles y consistentes, es trabajo de la matemática educativa reorganizar y caracterizar los significados emergentes.

Este último razonamiento es compartido por Ruiz (Beth y Piaget, 1980), quien indica que el análisis histórico-epistemológico tendrá la intención no sólo de poner de manifiesto la diversidad de puntos de vista que se han manifestado, algunos de los cuales en su tiempo se han considerado correctos para después ser rechazados o modificados; sino también la de buscar elementos epistemológicos constitutivos del significado del objeto, su adaptación a la resolución de distintos problemas y la identificación de obstáculos ligados a su desarrollo. Desde su perspectiva, la importancia de generar un análisis del devenir histórico es entenderlo como una herramienta cognitiva, puesto que pretendemos encontrar en la historia elementos que ayuden a la comprensión del aprendizaje de un concepto matemático, cuyo fin último es transformar la información recopilada en fuente de hipótesis y elementos para el diseño de situaciones didácticas centradas en dicho objeto matemático, así como para la identificación de etapas de su construcción en los estudiantes.

Sanchez y Sigarreta (Sigarreta, 2004)) establecen que los estudios epistemológicos de la matemática permiten comprender algunos aspectos de la evolución del conocimiento matemático (cómo se origina, desarrolla y cómo está estructurado dicho conocimiento). Además, permiten identificar los obstáculos epistemológicos (OE) que surgen en el desarrollo del conocimiento en general.

Desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, los estudios epistemológicos pueden desempeñar una función de vigilancia. Esta consiste, por una parte, en la toma de conciencia de la diferencia que hay entre el desarrollo histórico del conocimiento matemático y la forma que éste circula en la escolaridad después de haberse sometido a un proceso de transposición didáctica. Por otra parte, en identificar los obstáculos epistemológicos relativos al desarrollo del conocimiento matemático que ha sido transpuesto como saber a enseñar; con el fin de diferenciar estos obstáculos de las otras dificultades (obstáculos cognitivos y obstáculos didácticos) que se pueden presentar en la enseñanza de las matemáticas.

Sierpinska (Sierpinska, 2000) identifica las siguientes categorías en los actos de comprensión en un contexto matemático:

- Identificación: Este acto consiste en la repentina percepción de objetos que corresponden a la denominación del concepto (relacionado con el concepto en cuestión) o a la identificación de un término como si tuviera estatus científico.
- Discriminación: Es la diferenciación entre dos objetos, propiedades o ideas que estaban anteriormente confundidas.
- Generalización: Consiste en darse cuenta de la no esencialidad de una presunción o de la posibilidad de extender el rango de las aplicaciones.
- Síntesis: Consiste en aprehender relaciones entre dos o más propiedades, hecho sus objetos y organizarlos en un todo consistente.

En cuanto a los obstáculos epistemológicos, Brousseau (1997) distingue tres tipos según su origen:

- Ontogénico, que tiene que ver con todo lo relacionado con las limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo.
- Didáctico, que se adquiere o aparece por el modo de enseñar o por la elección de un tema o una axiomática.
- Epistemológico, que son los obstáculos que un concepto tiene para ser aprendido, es propio del concepto.

En cuanto a los obstáculos epistemológicos, específicamente, Sierpinska (Sierpinska, Sierpinska, 2000) afirma: "Los obstáculos epistemológicos son formas de comprensión basados en algunos esquemas inconscientes de pensamiento que han sido adquiridos culturalmente y en creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas y acerca de las categorías fundamentales como número, espacio, causa, azar, infinito que son inadecuados con respecto a la teoría actual". Los argumentos planteados por Sierpinska, muestran que la comprensión puede medirse y lograrse mediante el número de obstáculos epistemológicos superados o mediante la identificación del número y calidad de los actos de comprensión logrados.

Para Bachelard (Bachelard, 1938), el obstáculo es un tipo de conocimiento ya disponible, a menudo instalado desde hace mucho tiempo en nuestra mente y que ya no percibimos como tal. Lejos de ser una dificultad mental, resulta de una facilidad intelectual que nos otorgamos, muy a menudo sin ser ya conscientes de ello. Y aunque la dificultad sea dolorosa, el obstáculo está confortablemente asentado, de tal forma que se vuelve a él constantemente.

En este contexto es en donde tal vez más pueden expandirse los alcances de los estudios histórico-epistemológicos, pero, así mismo, es en donde menos esclarecedoras se presentan las acciones desde y hacia la pedagogía. Extenso, en efecto, se presenta el camino por recorrer en la dirección de los nexos entre discurso matemático y sentido, entre simbolismo y significación al interior de la educación matemática.

1.2.3. El saber sabio en el contexto de la transposición didáctica

En el ámbito de la didáctica se ha asistido a una difusión muy importante del concepto de transposición didáctica en todas las didácticas de las disciplinas, después de su emergencia en el seno de la didáctica de las matemáticas. Investigadores en didáctica están de acuerdo en atribuir la paternidad del concepto de transposición didáctica a Michel Verret (1975, Gomez Mendoza, 2005).

Este autor sostiene en 1974, una tesis de doctorado en sociología que tuvo por objeto el estudio de la distribución temporal de las actividades de los estudiantes. En su capítulo III de esta obra, él define la didáctica como “la transmisión de aquellos que saben a aquellos que no saben. De aquellos que han aprendido a aquellos que aprenden”.

A partir de entonces, se plantea la pregunta de la caracterización del tipo de saber transmitido. No se puede enseñar un objeto sin transformación: “Toda práctica de enseñanza de un objeto presupone, en efecto; la transformación previa de su objeto en objeto de enseñanza”. Yves Chevallard (1982), en un artículo en colaboración con M. A Joshua, estudió cómo la noción de distancia geométrica fue introducida en los programas oficiales franceses de 1971 para las clases de séptimo, precisamente en el momento de la introducción de las matemáticas “modernas” en los colegios. No es hasta 1985 que Chevallard se interesa en el juego que se lleva a cabo entre un docente, los alumnos y un saber matemático.

Estos tres “lugares” forman lo que él llama un sistema didáctico y la relación ternaria, que existe entre estos tres polos, es calificada por su autor como relación didáctica. El autor insiste en la importancia de un término y de una relación a menudo olvidada en la didáctica: el saber y la relación con el saber. El concepto de transposición didáctica remite entonces al paso del saber sabio al saber enseñado y luego a la obligatoria distancia que los separa.

Hay de esta forma transposición didáctica (en el sentido restringido) cuando los elementos del saber pasan al saber enseñado. Chevallard indica en particular, que la transposición didáctica remite a la idea de una reconstrucción en las condiciones ecológicas del saber. Para ilustrar esta idea, él se vale de un ejemplo de transposición como el que sucede de una pieza musical del violín al piano: es la misma pieza, es la misma música, pero ella está escrita de manera diferente para poder ser interpretada con otro instrumento.

Según Chevallard, “el saber enseñado se vuelve viejo con relación a la sociedad; un aporte nuevo vuelve a estrechar la distancia con el saber sabio, aquel de los especialistas, y aleja de ese saber a los padres de familia de los alumnos. Aquí está el origen de los procesos de transposición didáctica “ (Y. Chevallard, 1985, p. 26, Gomez Mendoza, 2005). A comienzos de los años 90, Chevallard, desarrolla, una aproximación antropológica de los saberes, mostrando en especial que todo saber es una respuesta a una pregunta. También, precisa que para que se pueda hablar de sistema didáctico, es necesario no solamente que las preguntas tengan una respuesta sino que igualmente estas respuestas hayan sido aceptadas en la sociedad de la época. Piensa de esta manera la renovación de los saberes en la escuela, en tanto que el volver a examinar el currículo esté asociado al hecho de que hay a veces muchas “obras muertas” en ciertas disciplinas.

Uno de los elementos de la teoría de la transposición didáctica “renovada” en una óptica antropológica consiste entonces en preguntarse cuáles son las “buenas preguntas” sobre las cuales se debe trabajar en la escuela, para luego intentar construir las respuestas adaptadas a la enseñanza, que serán las transposiciones de las respuestas ya validadas en la sociedad.

Se puede concluir con J. Joshua que, aun sí se debe extender la transposición didáctica tomando en cuenta los saberes diferentes a aquellos provenientes exclusivamente de la esfera “sabia”, esta teoría toma en cuenta dos cuestiones decisivas: muestra de una parte, que “los saberes no viven de la misma manera según las instituciones donde ellas se enraízan”, y de otra parte, que la “intencionalidad de la enseñanza va a la par con la proclamación de una organización lineal de la enseñanza”. (Joshua, 1996, p. 64, Gomez Mendoza, 2005)

Continuando Joshua destaca que el concepto de transposición didáctica, tal como ha sido elaborado en la didáctica de las matemáticas puede entonces ser útil y servir de marco al estudio de los problemas que corresponden a otras disciplinas. Esto supone, de un lado, tener en cuenta de manera más sistemática las diferentes prácticas que pueden servir de punto de partida para una transposición, y de otra, considerar la noción de saber experto, "de esta manera, se puede dar cuenta de la innegable diversidad de estructuras de cada disciplina escolar, así como los límites comunes a los cuales están sometidas". (Gomez Mendoza, 2005).

En particular, y situándonos respecto del quinto postulado de Euclides, cabe mencionar la distancia existente entre el saber sabio y el saber enseñado en el currículum nacional en geometría, y la necesaria emergencia de articular tales saberes. Esta problemática se evidencia y desarrolla en secciones posteriores.

1.2.4. Aproximaciones a estudios de carácter histórico epistemológico

En la siguiente sección se expone una búsqueda de investigaciones que se enmarcan en el estudio histórico-epistemológico sobre conceptos matemáticos. Esta revisión estará centrada en el acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Análisis Histórico-Epistemológico en La Educación Matemática, según este, desarrollar un análisis histórico-epistemológico considera las circunstancias y los medios que posibilitaron el surgimiento de los conceptos y las nociones matemáticas, en tanto que permite:

- Proveer de historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual presenta como objetos universales.
- Proveer de historicidad a las nociones metamatemáticas y protomatemáticas, tales como el rigor, mostrando que no existe un rigor eterno y perfecto en matemáticas.
- Posibilita la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado demostrando que no es cierto que los objetos de enseñanza en la escuela son copias de los objetos de la ciencia.

En *Evolución de la Geometría desde una perspectiva histórica*, Sigarreta y Ruesga abordan el surgimiento y desarrollo de la Geometría (Sigarreta, 2004), a través de la evolución de las Geometrías No-Euclidianas, el papel de la práctica y de los factores internos y externos, objetivos y subjetivos en la estructuración de los conocimientos geométricos. Se destaca en una de sus conclusiones, desde el punto de vista metodológico, que los axiomas dejaron de ser resultados evidentes que no necesitan demostración, para convertirse en aquellas proposiciones de la teoría, las cuales, en una construcción determinada de la misma, se toman como punto de partida, independiente de que sean simples, evidentes o intuitivamente claros.

M. Anacona en *La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática*, reflexiona sobre la consideración de que en algunos estudios históricos acerca del desarrollo de un concepto se evidencian elementos lógicos y epistemológicos claves en el proceso de constitución teórica que posibilitan una mejor comprensión y revelan aspectos característicos de la actividad matemática (Anacona, 2003). Según M. Anacona, la complejidad de esta problemática expresa la necesidad de continuar en esta reflexión, a través de propuestas y prácticas educativas, programas de formación, diversas estrategias de difusión, y naturalmente a través de proyectos de investigación.

En *Estudio del Cuadrilátero de Saccheri como Pretexto para la Construcción de un Sistema Axiomático Local* Molina, Samper, Perry, Camargo y Echeverry describen un enfoque metodológico para la enseñanza de la geometría que propicia la participación de los estudiantes y muestra que, en el ámbito de los primeros cursos de nivel universitario, dicho enfoque permite gestionar el acercamiento al conocimiento matemático y el uso de las ideas que producen los estudiantes para construir, como comunidad, parte de un sistema axiomático para la geometría plana euclidiana (Molina, Samper, Perry, Camargo y Echeverrry, 2010). Concluyen, una vez aplicado su enfoque metodológico a dos grupos de estudiantes que los sistemas axiomáticos difieren en cuanto a la estructura de las relaciones deductivas que se establecen entre los enunciados que componen el sistema pues éstos se introducen en momentos diferentes y por razones distintas. Sin embargo, ambos sistemas axiomáticos tienen elementos comunes como el Postulado de la unicidad de la paralela, las definiciones de cuadrilátero y rectángulo y los teoremas básicos asociados a la relación de paralelismo. No obstante a diversidad entre los estudiantes, las propuestas que surgen, los profesores, los esquemas de los sistemas axiomáticos generados muestran que aun cuando ellos difieren, en ambos grupos se estudiaron las mismas temáticas y se presentó el mismo cuerpo de conocimientos.

Astorga y Parraguez en *Las cónicas en métricas no euclidianas: una mirada desde la teoría de los modos de pensamiento (Astorga, 2015)* realizan un estudio en didáctica de las matemáticas sobre las dificultades en la comprensión de las cónicas, dada la débil articulación de representaciones propias de los tipos de pensamientos teórico y práctico; ellos no conciben a las cónicas aisladas de la métrica usual. Dada la naturaleza cognitiva del problema se utiliza la teoría de los Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska y se propone como objetivo de investigación diseñar una secuencia de actividades didácticas que permita el tránsito entre los distintos modos de pensar las cónicas, estos últimos articulados por métricas no usuales, para que las representaciones gráficas de ellas no sean concebidas como definiciones, una de sus conclusiones a destacar es que la secuencia de actividades didácticas diseñada, articula los pensamientos práctico y teórico a través de los modos sintético-geométrico (pensamiento práctico), analítico-aritmético y analítico-estructural (pensamiento teórico) de pensar las cónicas, utilizando dos métricas, ambas no euclidianas. Los resultados obtenidos muestran que los y las estudiantes logran articular los pensamientos teórico y práctico, transitando entre los distintos modos de pensar las cónicas, generando comprensión del objeto matemático.

Del infinito potencial al actual: Un recorrido a través de la metáfora conceptual Díaz y Hernandez (2021, Diaz Chang y Arredondo, 2021) abordan el análisis histórico y epistemológico del infinito como concepto matemático, mirado bajo el lente de la metáfora conceptual, tratando de precisar los obstáculos que impidieron, por largos períodos de nuestra historia, la aceptación del infinito actual, permitiéndose solamente la existencia del infinito potencial. concluyendo que la reconstrucción histórico-epistemológica del infinito matemático bajo la mirada de la metáfora conceptual pudiera ser de gran utilidad para la comprensión de dificultades a las que se enfrentan estudiantes y profesores en los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con el infinito matemático, y debería ser un elemento a considerar en las agendas de investigación dentro de la didáctica de las matemáticas.

En este estudio nos situamos desde los modos de pensamiento de Sierpinska (Sierpinska, 2000), dada la débil articulación en el currículum chileno de representaciones propias de los tipos de pensamientos teórico y práctico asociados al quinto postulado de Euclides, cuestión que se evidencia en la siguiente sección.

Capítulo 2

Estudio histórico-epistemológico

Mediante la realización de un estudio histórico-epistemológico reconstruimos la evolución del quinto postulado de Euclides destacando su origen, relación estructural en el contexto de los Elementos de Euclides y su desarrollo para la fundamentación de la geometría.

2.0.1. Los Postulados de Euclides en el marco de sus Elementos

El origen de las ideas geométricas se remonta a épocas ulteriores. Las primeras constataciones de las mismas son tradicionalmente adjudicadas a las antiguas culturas de Babilonia y de Egipto. Ya en el siglo VII se da inicio al periodo del desarrollo de la geometría por parte de los matemáticos griegos. En los siglos VI y V se obtuvieron muchos de los resultados geométricos fundamentales, en el siglo III los griegos ya poseían conocimientos geométricos y disponían de métodos de demostraciones geométricas. En este periodo ya aparecen tentativas de reunir todo este material para disponerlo en un orden lógico y coherente.

Euclides, uno de los grandes geómetras de la antigüedad, vivió en un periodo que se extiende entre los años 330 al 225 antes de nuestra era, Según Proclo, (Constantinopla, 412-Atenas, 485), Euclides vivió durante el reinado de Ptolomeo I y puede ubicárselo temporalmente anterior a Eratóstenes (280-192 a.C.) posterior a Platón (428-348 a.C.); Algunos historiadores consideran que la existencia de Euclides es hipotética, atribuyendo su obra a una sociedad de matemáticos griegos que intentaron agrupar los conocimientos conocidos hasta ese momento en esta disciplina. Aunque a Euclides se le atribuyen varios tratados de geometría, el más importante es su "Stoikheîa" o "Elementos". Sus elementos, obra científica más conocida del mundo que recopila el conocimiento geométrico-aritmético impartido en el ámbito académico de entonces, fueron divididos en 13 libros, de los cuales el quinto, el séptimo, el octavo, el noveno y el décimo están dedicados a la teoría de las proporciones y a la aritmética (expuestas en forma geométrica), mientras que los restantes son netamente geométricos.

El primer libro contiene las condiciones de igualdad de triángulos, las relaciones entre los lados y ángulos, la teoría de las rectas paralelas y criterios de equivalencia de triángulos y polígonos. En el segundo libro se expone la transformación de un polígono en un cuadrado equivalente. El tercer libro está dedicado a la circunferencia. En el cuarto se consideran los polígonos inscritos y circunscritos. El sexto libro analiza la semejanza de polígonos. En los últimos tres se exponen los fundamentos de la estereometría (ver tabla 2.1, Euclides, 1991).

Los Elementos	
Composición	**Contenidos**
Libro I	Rectas Paralelas. Rectas Perpendiculares. Propiedades de los lados y angulos de los triángulos.
Libro II	Álgebra Geométrica
Libro III	Propiedades del círculo y de la circunferencia.
Libro IV	Polígonos Inscritos y Circunscritos.
Libro V	Teoría de las proporciones de Eudoxo.
Libro VI	Aplicación de las proporciones de Eudoxo a la semejanza de triángulos.
Libro VII-VIII-IX-X	Aritmética.
Libro XI	Perpendicularidad y Paralelismo de rectas y planos. Ángulos diedros y poliedros, etc.
Libro XII	Aplicación del método de Eudoxio a diversos problemas geométricos, como la equivalencia de pirámides y la semejanza de conos y cilindros.
Libro XIII	Poliedros regulares.

Cuadro 2.1: Estuctura y contenidos de los Elementos

Dado lo expuesto, los Elementos de Euclides (Euclides, 1991) contienen el material correspondiente a la geometría elemental de la época. Euclides comienza cada libro definiendo cada concepto que tendrá que trabajar en él. El primer libro está precedido de 23 definiciones e inicialmente después de las definiciones, Euclides expone los postulados y los axiomas, es decir, afirmaciones que se aceptan sin demostración, se transcriben las primeras Definiciones, Postulados y Axiomas :

Definiciones

- Def. I. El punto es aquello que no tiene partes.
- Def.II. La línea es longitud sin ancho.
- Def. III. Las fronteras de una línea son puntos.
- Def. IV. La recta es aquella línea que se halla igualmente dispuesta con respecto a todos sus puntos.
- Def. V. La superficie es lo que posee únicamente longitud y ancho.
- Def. VI. Las fronteras de una superficie son líneas.
- Def. VII. El plano es una superficie que se halla igualmente dispuesta con respecto a todas las rectas que se encuentran en ella.
- Def. VIII. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran y que están situadas en un mismo plano.

Postulados

- Pos. I. Se exige que a cada punto a cualquier otro se pueda trazar una línea recta.
- Pos. II. Y que cada recta pueda ser pueda ser continuada indefinidamente.
- Pos. III. Y que de cualquier centro se pueda trazar una circunferencia de radio arbitrario.
- Pos. IV. Y que todos los ángulos rectos sean iguales.
- Pos. V. Y que cada vez que una recta, al interceptar otras dos, forme a un mismo lado ángulos internos cuya suma sea menor que dos rectos , y dichas dos rectas se intersecten en aquel lado en el cual esta suma sea menor que dos rectos.

Axiomas

- Ax. I. Dos cosas iguales separadamente a una tercera son iguales entre sí.
- Ax. II. Si a iguales agregamos iguales, obtenemos iguales.

- Ax. III. Si de iguales quitamos iguales, obtenemos iguales.
- Ax. IV. Si a desiguales agregamos iguales, obtenemos desiguales.
- Ax. V. Si duplicamos iguales, obtenemos iguales.
- Ax. VI. Las mitades de iguales, son iguales entre sí.
- Ax. VII. Cosas que se pueden superponer son iguales.
- Ax. VIII. El todo es mayor que una parte.
- Ax. IX. Dos rectas no pueden encerrar espacio.

Históricamente los axiomas IV, V, VI y IX se atribuyen a Euclides. En otras ediciones de los Elementos los postulados IV y V se incluyen entre los axiomas; esto se debe a que el quinto postulado en ocasiones se menciona como el axioma XI.

A continuación de los axiomas Euclides expone los teoremas de la geometría disponiendolos en un orden lógico, de forma que cada proposición pueda demostrarse a base de las proposiciones, los postulados y axiomas precedentes.

En particular, Arquimides amplió la lista de los postulados geométricos, y completó la exposición de Euclides en la teoría de medición de longitudes, áreas y volúmenes. Después de Arquimides continuaron los intentos de precisar los postulados básicos de la geometría, no fue hasta finales del siglo XIX que se cristaliza definitivamente la idea de una construcción lógica exacta de la geometría, e indicado un sistema completo de axiomas de los cuales se deducen todos los teoremas sin apelación alguna a nuestra intuición en las representaciones espaciales.

Las obras relacionadas con los Elementos de Euclides proponian disminuir el número de afirmaciones geométricas que se asumian sin demostración, esto es más bien dictado por un deseo completamente natural de poner en claro bajo qué premisas mínimas puede ser desarrollado de modo lógico todo el material de la geometría. Es en esta dirección, que precisamente se observó que el IV postulado de Euclides es superfluo, pues la igualdad de los ángulos rectos puede ser demostrada con el mismo rigor que muchas otras proposiciones (Wolfe, 1945).

Estas obras dedicadas más bien a los fundamentos de la geometría se reducían a la tentativa de eliminar de la lista de suposiciones básicas el quinto postulado de Euclides (de ahora en mas, V postulado) que parecía ser demasiado complicado para vincularse lógicamente con los postulados. Los estudios relacionados con el V postulado de Euclides sólo fueron concluidos a fines del siglo XIX y condujeron a descubrimientos de gran relevancia.

2.0.2. El V postulado, la teoría de las paralelas y el el enfoque directo de demostración

El papel del V postulado en la geometría elemental es fundamental; pues de él se basa la teoría de las paralelas y todos los tópicos relacionados a este, tales como, la semejanza de figuras, la trigonometría, etc.

En los textos escolares, se introduce antes que todo, la comparación de figuras geométricas, segmentos, ángulos y triángulos, para dar paso a una sucesión de proposiciones (teoremas) de los cuales el V postulado es un insumo relevante para validar tales resultados. Teoremas tales como:

- Teoremas de semejanza de triángulos.
- Teorema: en un triángulo isósceles los ángulos adyacentes a la base son iguales.
- Teorema: el ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de los internos no adyacentes.
- Teorema: en un triángulo, a mayor lado le corresponde mayor ángulo opuesto.
- Teoremas sobre las rectas perpendiculares y oblicuas.
- Teorema: cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Es de particular importancia para la exposición histórica del V postulado el teorema sobre los ángulos internos y externos de un triángulo:

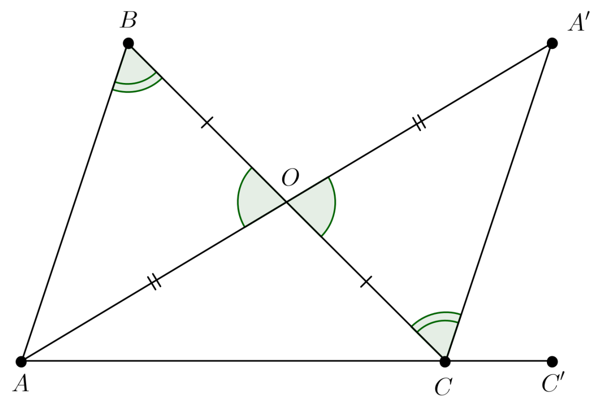

Figura 2.1: Ilustracion del teorema sobre angulos interno y externo.

Observemos su demostración: Sea el triángulo ABC (Figura 2.1), se debe demostrar que cada ángulo externo es mayor que cualquier interno no adyacente. Consideremos esto para el externo correspondiente al vértice C y para el interno en el vértice B.

Sea O el punto medio del lado BC; se construye el segmento $\overline{AO}$ y sobre su prolongación se determina el punto A' de tal forma que se cumpla que la medida de $\overline{AO}$ sea igual a la medida de $\overline{OA'}$, es decir, $\overline{AO} = \overline{OA'}$. Se hace notar el segmento $\overline{A'C}$ considerando los triángulos AOB y $A'OC$. Estos últimos triángulos son iguales, por contener ángulos iguales determinados por lados respectivamente iguales. De la igualdad de dichos triángulos se sigue que el $\angle ABC$ es igual al $\angle BCA'$. En conclusión se deduce el teorema dado que el $\angle BCA'$ es una parte del ángulo externo en cuestión.

El hecho de que el $\angle BCA'$ sea parte del $\angle BCC'$ se debe considerar con atención, pues se establece principalmente por la intuición geométrica derivada de la figura y posibilitado por la carencia de fundamentación en los axiomas de Euclides de conceptos tales como "entre", "dentro de", parte de , etc, es decir, el razonamiento expuesto se basa fuertemente en la intuición geométrica aplicada a la representación.

Es importante observar que deducciones de teoremas geométricos, tal como el teorema sobre los ángulos externo e interno de un triángulo no requieren el V postulado para ser demostrados.

Una vez enunciados estos resultados de la geometría de Euclides se establece la definición de rectas paralelas: *Dos rectas se dicen paralelas si no tienen ningún punto en común.*

Destacando propiedades (desde el punto de vista moderno) como:

- Existencia. Por un punto dado trazar una recta paralela a otra recta dada.
- Unicidad. Por cada punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella.
- Reflexividad. Toda recta es paralela a sí misma.
- Simetría. Si a es paralela a b, b es paralela a a.
- Transitividad. Las rectas paralelas a una misma son paralelas entre sí.

Es claro que tal definición debe mostrar la existencia y unicidad de las paralelas. Para el caso existencial se considera el teorema conocido: *dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí*, cuestión que se deduce directamente de la proposición sobre ángulos externo e interno de un triángulo.

En efecto, supongamos que las rectas a y b forman ángulos rectos con la recta c, en los puntos A y B (Figura 2.2). Supongamos que a y b no son paralelas, es decir tiene un punto en común, denotemos por C su punto en común, entonces el ángulo externo del triángulo ABC correspondiente al vértice A debe ser mayor que el interno del vértice B lo que contradice la hipótesis hecha con respecto a estos ángulos. Luego por reducción al absurdo se concluye la afirmación de la existencia.

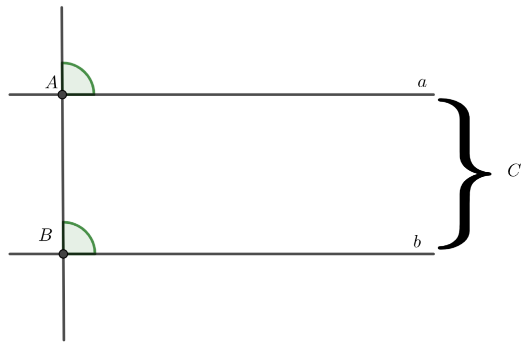

Figura 2.2: Ilustracion de la existencia.

Se sigue inmediatamente que por cada punto M se puede trazar una paralela a cualquier recta u que no pase por el (Figura 2.3). Para esto basta trazar por M la perpendicular MN a u, y construir la recta u', perpendicular a $\overline{MN}$ en el punto M. La recta u' será paralela a u, en virtud de lo mencionado anteriormente.

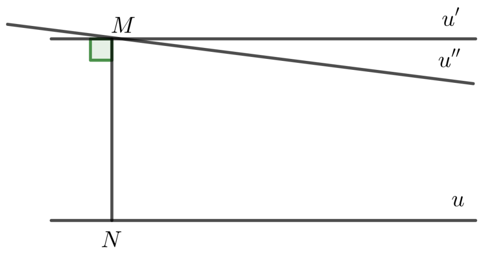

Figura 2.3: Ilustracion de la unicidad.

Es claro que una vez demostrada la existencia de paralelas, debe resolverse el siguiente cuestionamiento: *¿por cada punto del plano pasa una única recta paralela a una recta dada, o hay un conjunto de ellas?*

En el contexto de la geometría de los Elementos de Euclides se demuestra que por cada punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella.

En efecto sea u una recta arbitraria (Figura 2.3), y M algún punto que no pertenece a u; sea $\overline{MN}$ la perpendicular a u. Se denota por u' la recta perpendicular a $\overline{MN}$ en M, Dado que u' es paralela a u. Consideremos la recta arbitraria u'' que pase por M y no coincida con u'. Dado que u'' no coincide con u', debe formar un ángulo agudo con el segmento $\overline{MN}$ para alguno de los dos lados. Entonces, las rectas u y u'' forman con $\overline{MN}$ al intersectarla ángulos internos a un mismo lado de $\overline{MN}$, cuya suma es menor que dos rectos; de aquí se sigue, en virtud del quinto postulado, que u y u'' deben intersectarse.

Recíprocamente se debe advertir, que el V postulado puede ser demostrado, ya como teorema, si se considera que por cada punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella. Es así que el V postulado es equivalente a afirmar que existe una única recta paralela a una dada, que pase por un punto determinado (equivalencia de Playfair). De este modo, el V postulado o, como también se le denomina, el postulado sobre las paralelas, constituye la base de la mayoría de las proposiciones importantes de la geometría elemental.

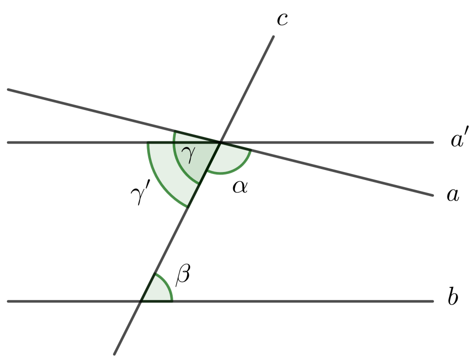

Figura 2.4: Ilustracion de la unicidad.

En efecto, consideremos que las rectas a y b (Figura 2.4) al ser intersectadas por la recta c forman un a un mismo lado ángulos internos cuya suma sea menor que dos rectos. Notemos que a y b tienen un punto en común hacia el mismo lado de la recta c. Sea α y β los ángulos que las rectas a y b forman con c y supongamos, de acuerdo con nuestra hipótesis, que

$$\alpha + \beta < 2d \tag{2.1}$$

Donde d representa angulo recto. Además, sea γ el ángulo adyacente a α. Tracemos una recta a' que pase por el punto de intersección de a y c, de modo que forme con c un ángulo $\gamma' = \beta$. Entonces, las rectas a' y b son paralelas, pues si se supone que se cortan, se llega a una contradicción con el teorema sobre los ángulos externo e interno de un triángulo.

Pero al tomar como postulado la unicidad de las paralelas, se concluye que la recta a (por ser diferente a a') no es paralela a b. Con este objetivo, observemos que $\alpha + \gamma = 2d$; se sigue de esto último y la desigualdad (2.1) que $\gamma > \beta$. En consecuencia, a y b no pueden cortarse del lado en el que está γ, pues en este caso γ será un ángulo interno del triángulo obtenido, y β, externo, resultando imposible la desigualdad $\gamma > \beta$.

Por lo tanto, el V postulado es equivalente a afirmar que existe una única recta paralela a una dada, que pase por un punto determinado. De aquí se sigue, toda la construcción de la geometría de Euclides, en particular que dos paralelas, al cortarse por una tercera recta, forman ángulos correspondientemente iguales, que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos, y otros tantos teoremas. De este modo, el V postulado de Euclides, constituye la base de la mayoría de las proposiciones de la Geometria Elemental.

Desde Euclides hasta finales del siglo XIX el problema de V postulado era uno de los más populares de la geometría, ya que el problema se fundamenta en liberar la teoría euclidiana de las paralelas de este postulado; no se trataba entonces, de sustituir el V postulado por otra afirmación, por evidente que está fuera, sino más bien de demostrarlo, iniciando de los restantes postulados (Wussing, 1998).

Proclo no solo presenta las controversias relacionadas con la naturaleza de la recta, la naturaleza de las rectas paralelas y el V postulado de Euclides, sino que tambien hace sus propias contribuciones a la tarea de demostrar dicho postulado. El por ejemplo, rehusa considerar al V postulado de Euclides entre los postulados observando que su reciproco es un teorema demostrado por el mismo Euclides, no pareciendole que una proposicion cuyo recıproco es demostrable no sea tambien demostrable.

Los arabes, sucesores de los griegos en la supremacıa de las Matematicas, se ocuparon tambien de la demostracion del V postulado, una de ellas referida en el comentario arabe de Al-Nirizi (siglo IX), llegada hasta nosotros a traves de la traduccion latina de Gerardo de Cremona (siglo XII), es atribuida a Aganis. Nasir-Eddın (1201-1274), aunque “demuestra” el V postulado de Euclides adaptandose al criterio seguido por Aganis, merece ser recordado por la idea original de demostrar explıcitamente el teorema sobre la suma de los angulos de un triangulo y por la forma acabada de su razonamiento (Boyer, 2015).

Las primeras versiones de los Elementos, hechas en los siglos XII y XIII sobre los textos arabes, ası como las sucesivas, redactadas sobre los textos griegos a fines del siglo XV y en la primera mitad del Siglo XVI, no llevan, en general, ninguna observacion crítica al V postulado de Euclides. J. Wallis (1616-1708). Da una “nueva demostracion” del V postulado de Euclides, fundamentándola en la nocion comun: De toda figura existe una semejante de magnitud arbitraria. Giordano Vitale (1633-1711), volviendo al concepto de equidistancia formulado por Posidonio e igual que Proclo, plantea la necesidad de rechazar que las paralelas de Euclides pueden comportarse de un modo asintotico. A este fin define las paralelas como dos rectas equidistantes.

Cabe destacar que las numerosas tentativas de demostrar el V postulado, a pesar de su fracaso, condujeron a varios resultados, en particular se estableció toda una serie de proposiciones equivalentes al postulado euclidiano sobre las paralelas.

Exponemos los siguientes ejemplos de afirmaciones equivalentes al V postulado:

- Por cada punto exterior a una recta pasa una única paralela.
- Dos rectas paralelas al intersectarse con una tercera forman ángulos correspondientes iguales.
- La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.
- Los puntos situados a un mismo lado de una recta dada, a una misma distancia de ésta, forman una recta.
- Dadas dos rectas paralelas, las distancias de los puntos de una de ellas a la segunda están acotadas.
- Existen triángulos arbitrariamente grandes.
- Existen triángulos semejantes.

Cada una de estas proposiciones puede ponerse como base de la teoría sobre las paralelas; en otras palabras si se acepta cualquiera de ellas como verdad por evidencia, se puede demostrar rigurosamente el V postulado, y luego todos los teoremas ulteriores.

2.0.3. Saccheri, Lambert, Legendre y el enfoque indirecto de demostración

De los múltiples trabajos dedicados al V postulado, cabe destacar los trabajos de Geralamo Saccheri (1667-1733) y Johann Heinrich Lambert (1728-1777), estos últimos dejaron una huella significativa en la evolución histórica de la teoría de las paralelas. Los trabajos de Saccheri fueron publicados en 1733, bajo el título “Euclides depurado de toda mácula, o la experiencia que establece los principios primordiales de la geometría universal ". En estos estudios Saccheri hace un intento de demostrar el V postulado por reducción al absurdo.

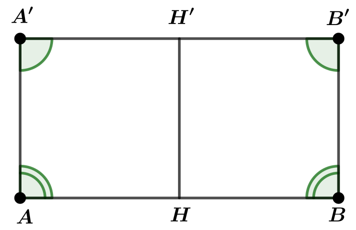

Figura 2.5: Cuadrilátero de Saccheri.

Los trabajos de Saccheri se fundamentan sobre el cuadrilátero $AA'BB'$ (Figura 2.5) con dos ángulos rectos en la base $\overline{AB}$ y dos lados iguales, $\overline{AA'}$ y $\overline{BB\prime}$. De la simetría de la figura con respecto a la perpendicular $\overline{HH'}$ en la mitad de la base $\overline{AB}$, se sigue que los ángulos en los vértices A' y B' son iguales entre sí. Si se considera válido el V postulado, y en consecuencia, la teoría euclidiana de las paralelas, se puede establecer que los ángulos A' y B' son rectos o bien obtusos, o bien agudos. Dado que la hipótesis del ángulo recto es equivalente al V postulado, a fin de demostrar este último hay que descartar las otras dos hipótesis. Con razonamientos rigurosos Saccheri llega, ante todo, a una contradicción con la hipótesis del ángulo obtuso. A continuación, adoptando la hipótesis del ángulo agudo deduce consecuencias elaboradas de tal premisa, a fin de obtener dos afirmaciones contradictorias. Saccheri construye un sistema geométrico complejo donde algunas de sus proposiciones son contradictorias respecto de la disposición de las rectas en el plano. Un ejemplo particular es la hipotesis del angulo agudo, Saccheri argumenta segun esto que; dos paralelas tienen o bien una única recta perpendicular común, a ambos lados de la cual éstas se alejan indefinidamente una de la otra, o bien no posee ninguna, en cuyo caso convergen asintóticamente en un sentido y divergen indefinidamente en el otro.

Saccheri concluye la falsedad de la hipótesis del ángulo agudo, basándose en que dos rectas que convergen asintóticamente deben tener una perpendicular común, situación que contradice la naturaleza de la recta. De este modo, las hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo agudo conducen a contradicciones, por lo tanto concluye, que la única hipótesis válida es la del ángulo recto, con lo que queda demostrado el V postulado.

Sin embargo, la "contradicción" que encontró no se encontraba libre de toda mácula y se refería más bien a la naturaleza de las rectas; es decir se refería a la idea sobre lo que una recta debía ser y no a una inconsistencia lógica (Kolmogorov, 1985).

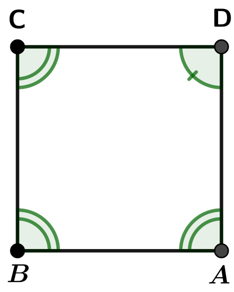

Figura 2.6: Cuadrilátero de Lambert.

Los trabajos de Lambert, desarrollados en 1766 en la obra "Teoría de las líneas paralelas" guardan relación con los trabajos de Saccheri. Lambert considera el cuadrilátero $ABCD$ con los tres ángulos en A, B y C rectos (Figura 2.6); con respecto al cuarto análogamente se consideran tres supuestos, a saber, o bien es agudo, o bien recto, o bien obtuso. Al igual que Saccheri, se establece la equivalencia de la hipótesis del ángulo recto con el V postulado y reduciendo a una contradicción la hipótesis del ángulo. Nuevamente al igual que Saccheri, Lambert construye un sistema geométrico complejo. Sin embargo, a pesar de que este sistema fue profundamente desarrollado, no fue posible hallar en él contradicción lógica alguna y llega a la conclusión que las restantes tentativas por demostrar el V postulado llevaran a la meta deseada.

Adriano María Legendre (1752-1833) concluye de sus trabajos la relación existente entre el V postulado y la proposición relacionada con la suma de los ángulos internos de un triángulo, en particular muestra que, recíprocamente, si se admite sin demostración que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos, entonces el V postulado puede ser demostrado como un teorema. Luego con el fin de obtener una demostración sin introducir otros nuevos. Legendre considera tres hipótesis excluyentes:

I. La suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que dos rectos.

II. La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

III. La suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que dos rectos.

La primera es reducida a una contradicción. Sin embargo, al efectuar la reducción de la tercera hipótesis a una contradicción, Legendre utiliza una de las proposiciones equivalentes al V postulado.

En el desarrollo de los trabajos de Legendre, se destacan las siguientes proposiciones:

- Proposición I. *Si la suma de los ángulos de cada triángulo es igual a dos rectos, entonces tiene lugar el V postulado.*

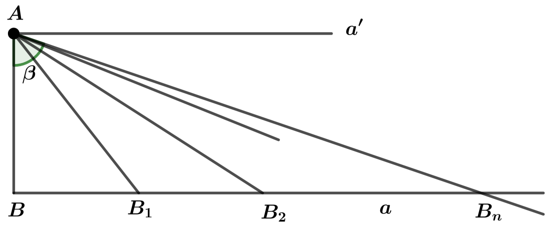

Figura 2.7: Primera Hipótesis de Legendre.

Para probarlo consideremos una recta arbitraria a y algún punto A que no le pertenece (Figura 2.7). Sea $\overline{AB}$ la perpendicular a la recta a que pasa por A. Notemos que la recta a' que pasa por A y es perpendicular al segmento $\overline{AB}$, no intersecta a a. Se demuestra que cualquier otra recta que pase por A corta a a.

En efecto, sea b una recta que pase por A, y β, el ángulo agudo que esta recta forma con el segmento AB. Se prueba que b corta a a del lado del ángulo agudo. Se determina sobre la recta b, del lado del ángulo agudo, un punto B_1 de forma que el segmento $\overline{BB_1}$ sea igual al $\overline{AB}$. Del mismo lado a partir de B_1, luego se establece el punto B_2 de manera que $\overline{B_1B_2}$ sea igual a $\overline{AB_1}$, etc. Generalizando, se determina el punto B_n de modo que $\overline{B_{n-1}B_n}$ sea igual al segmento $\overline{AB_{n-1}}$.

Consideremos los triángulos ABB_1, AB_1B_2,...$AB_{n-1}B_n$. Dado que se admite que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos, tendremos que en el triángulo isósceles ABB_1 los ángulos internos en los vértices A y B_1 son iguales a $\dfrac{\pi}{4}$.

Luego, el ángulo interno correspondiente a B_1 en el triángulo ABB_1 es externo con respecto al triángulo AB_1B_2, y como este último es asimismo isósceles, sus angulo internos no adyacentes a B_1 serán iguales entre sí. Pero de la hipótesis acerca de la suma de los ángulos internos de un triángulo se desprende que un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos internos no adyacentes a él; por esto último los ángulos internos del triangulo AB_1B_2 en los vértices A y B_2 son iguales a $\dfrac{\pi}{8}$ cada uno. Continuando con este proceso, se deduce que el ángulo interno correspondiente a B_n en el triángulo $AB_{n-1}B_n$ es igual a:

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

De aquí el ángulo

$$\angle BAB_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Como β es un ángulo agudo, se tiene

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \epsilon$$

Donde $\epsilon > 0$. Consideremos un n lo suficientemente grande como para que se cumpla

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2} < \epsilon$$

Entonces tendremos que $\beta < \angle BAB_n$

En este caso, la recta b pasa entre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AB_n}$ del triángulo BAB_n y, en consecuencia, tendrá un punto común con la recta a, situado entre los puntos B y B_n, lo que prueba la afirmación.

Legendre al establecer sus hipótesis mutuamente excluyentes, discute el problema sobre los valores posibles de la suma de los angulo interiores de un triángulo. Sea $S(\triangle)$ la suma de los ángulos internos de un triángulo, y por $D(\triangle)$, la diferencia entre los rectos y dicha suma. de tal manera que:

$$D(\triangle) = \pi - S(\triangle)$$

A continuación Legendre estudia:

- Proposición II. *En cada triángulo*

$$S(\triangle) \leq \pi$$

La demostración se basa en los lemas siguientes:

- Lema I. *En cada triángulo la suma de los ángulos interiores es menor que dos rectos.*
- Lema II. *Para cada triángulo es posible construir uno nuevo que tenga la misma suma de ángulos internos que el dado y con uno de sus ángulos al menos dos veces menor que algún prefijado del triángulo dado.*

El primer lema es consecuencia directa de la proposición que se refiere a los ángulos interno y externo de un triángulo. En efecto, sean α y β ángulos internos de cierto triángulo, y $'$ el ángulo externo de este triángulo que es adyacente a α. Entonces

$$\alpha + \alpha' = \pi$$

Pero dado que el ángulo externo de un triángulo es mayor que el interno no adyacente, es decir

$$\alpha' > \beta$$

y, por consiguiente,

$$\alpha + \beta < \pi$$

Legendre demuestra el segundo lema considerando algún triángulo ABC, donde es posible construir uno nuevo que tenga la misma suma de ángulos que el dado, y que posee un ángulo al menos dos veces menor que el ángulo del vértice A del triángulo dado.

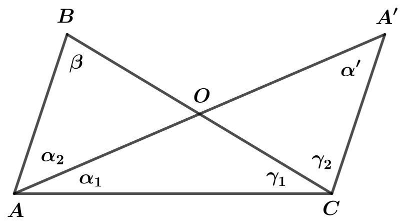

Figura 2.8: Iustracion de la proposición II.

Sea O el punto medio de BC (Figura 2.8), se une A con O y se prolonga el segmento $\overline{AO}$ hasta el punto A', de forma tal que $\overline{AO} = \overline{OA'}$. Entonces el triángulo $AA'C$ tendrá la propiedad requerida:

$$S(\triangle ABC) = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_1 \tag{2.2}$$

$$S(\triangle AA'C) = \alpha_1 + \alpha' + \gamma_1 + \gamma_2 \tag{2.3}$$

De la igualdad de los $\triangle ABO$ y $\triangle COA'$. Se deduce que

$$\alpha' = \alpha_2, \quad \gamma_2 = \beta$$

De aquí se desprende, ante todo, que los $\triangle ABC$ y $\triangle AA'C$ tienen igual suma de ángulos.

Se hace observar que, los ángulos internos del segundo triángulo correspondientes a los vértices A y A' forman sumandos, el ángulo al vértice A del primero. En consecuencia, según esto último, al menos alguno de ellos es dos veces menor que el ángulo prefijado en A del $\triangle ABC$, que es lo que se quería mostrar.

En retrospectiva respecto a la proposición II, sea algún triángulo Δ tal que la suma de ángulos internos sea mayor que dos rectos, de forma que

$$S(\Delta) = \pi + \epsilon$$

Donde $\epsilon > 0$.

Consideramos α algún ángulo interno de Δ, por el lema II, se puede construir un nuevo triángulo Δ_1, tal que uno de sus angulo internos sea α_1 sea al menos dos veces menor que α y $S(\Delta_1) = S(\Delta)$. Análogamente se construye un triángulo Δ_2 de manera que uno de sus ángulos internos α_2 sea al menos dos veces menor que α_1 y que $S(\Delta_2) = S(\Delta_1)$.

Generalizando, se construye un triángulo Δ_n tal que sus angulo internos α_n será al menos dos veces menor que α_{n-1}. De este modo

$$S(\Delta_n) = \pi + \epsilon \;\text{ y }\; \alpha_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

Se escoge un n lo suficientemente grande como para que $\dfrac{\alpha}{2^n} < \epsilon$ y, en consecuencia $\alpha_n < \epsilon$. Pero entonces la suma de los otros dos ángulos internos del triángulo Δ_n seria mayor que π, lo cual contradice el lema I, y con lo cual queda probada la proposición II.

Se afirma entonces que, sin basarse en el V postulado, que la suma de los angulo internos de un triángulo no supera dos rectos.

Para tales efectos, se establecen los siguientes lemas previos.

- Lema III. *Si el $\triangle ABC$ (Figura 2.9) se divide en dos por la transversal BP, entonces*

$$D(\triangle ABC) = D(\triangle ABP) + D(\triangle BPC)$$

.

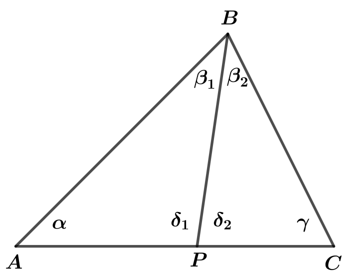

Figura 2.9: Ilustración Lema III.

En efecto, según la Figura 2.9;

$$\begin{aligned} D(\triangle ABP) &= \pi - (\alpha + \beta_1 + \delta_1) && (2.4) \\ D(\triangle BPC) &= \pi - (\beta_2 + \delta_2 + \gamma) && (2.5) \end{aligned}$$

De aquí se sigue;

$$\begin{aligned} D(\triangle ABP) + D(\triangle BPC) &= 2\pi - (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2 + \gamma) && (2.6) \\ &= \pi - (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma) && (2.7) \\ &= D(\triangle ABC) && (2.8) \end{aligned}$$

- Lema IV. *Sean dos triángulos ABC y AB_1C_1 con vértice común A y tales que los vértices B_1 y C_1 del segundo se encuentren respectivamente en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del primero. Entonces*

  $$D(\triangle AB_1C_1) \leq D(\triangle ABC)$$

  (Figura 2.10).

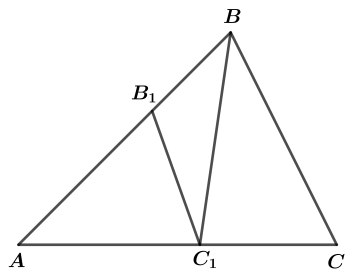

Figura 2.10: Ilustración Lema IV.

La demostración se sostiene basándose en la proposición II y el Lema precedente. Se considera el segmento BC_1, entonces según el lema anterior

$$D(\triangle ABC) = D(\triangle AB_1C_1) + D(\triangle B_1BC_1) + D(\triangle BC_1C)$$

Pero de la proposición II se sigue que la diferencia de entre dos rectos y la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es o bien un número positivo, o bien cero. de aquí y de lo anterior se tiene que

$$D(AB_1C_1) \leq D(ABC)$$

- Lema V. *Sean dos triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$, tales que los catetos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ del triángulo ABC son mayores que los catetos $\overline{A'C'}$ y $\overline{B'C'}$ respectivamente. Entonces, si la suma de los ángulos internos del triángulo ABC es igual a dos rectos, también lo será la suma de los ángulos internos de $\triangle A'B'C'$.*

Para probar esto, se traslada el triángulo $A'B'C'$ de tal manera que C' coincida con C, el cateto $\overline{A'C'}$ este sobre $\overline{AC}$, y el lado $\overline{B'C'}$, sobre el cateto $\overline{BC}$ del triá¸ngulo ABC. Entonces en virtud del lema anterior

$$D(\triangle A'B'C') \leq D(\triangle ABC) \tag{2.9}$$

Pero dado que $D(\triangle ABC) = 0$ y, por la proposición II,

$$D(\triangle A'B'C') \geq 0$$

De la desigualdad 2.9 se deduce $D(\triangle A'B'C') = 0$, lo cual se deseaba demostrar.

- Lema VI. *Si la suma de los ángulos internos de cierto triángulo rectángulo es igual a dos rectos, también lo será la de cualquier otro triángulo rectángulo.*

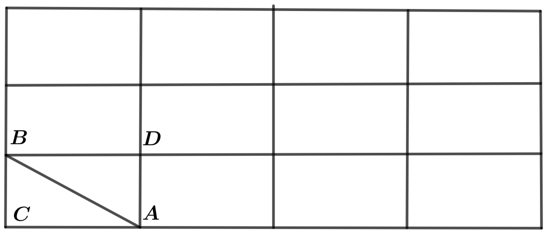

Figura 2.11: Ilustración Lema VI.

Para probar el lema se muestra que se puede construir un nuevo triángulo rectángulo cuya suma de los ángulos sea, como la de $\triangle ABC$, igual a dos rectos, y cuyos catetos sean arbitrariamente grandes.

Con este fin, se sobrepone al triángulo ABC otro igual a él, de forma que su hipotenusa coincida con la de $\triangle ABC$ y que en el cuadrilátero así obtenido los lados iguales resulten opuestos. Se denota por D el vértice del ángulo recto del nuevo triángulo (Figura. 11). Como la suma de los ángulos internos de cada uno de los triángulos rectángulos ABC y ABD es igual a dos rectos, resulta evidente que todos los ángulos internos del cuadrilátero $ACBD$ serán rectos.

Desplazando $ABCD$, podemos "solar" el plano con rectángulos iguales, tal como se muestra en la Figura 2.11. Resulta así posible construir un triángulo rectángulo cuya suma de ángulos sea de dos rectos, y cuyos catetos sean mayores que los del triángulo rectángulo. De aquí y del lema III se deduce que la suma de los ángulos del triángulo rectángulo arbitrario es igual a dos rectos.

Dado estas condiciones finalmente se puede establecer la siguiente proposición.

- Proposición III. *Si la suma de los ángulos de al menos un triángulo es igual a dos rectos, también lo será la de cualquier otro triángulo.*

Dados los triángulos ABC, $A'B'C'$, se sabe que la suma de los ángulos del $\triangle ABC$ es igual a dos rectos. Se muestra que la suma de las angulos del $\triangle A'B\prime C'$ también será de dos rectos.

Se consideran las alturas de los dos triángulos dados. Cada uno de ellos tendrá al menos un vértice tal que la altura trazada por el mismo caerá dentro del lado opuesto. Sin restricción de la generalidad, se puede suponer que tal vértice es A para el triángulo ABC y A' para el $\triangle A'B'C'$.

Sea P el pie de la altura del triángulo ABC correspondiente al vértice A, y P', el de la altura de $A'B'C'$ que corresponde a A'. Según el lema II,

$$D(\triangle ABP) \leq D(\triangle ABC)$$

Por hipótesis $D(\triangle ABC) = 0$, y en virtud de la proposición II, $D(\triangle ABP) \geq 0$, se concluye que

$$D(\triangle ABP) = 0$$

Es decir, la suma de los ángulos del triángulo rectángulo ABP es igual a dos rectos. Entonces, por el lema IV, cada triángulo rectángulo tendrá suma de ángulos igual a dos rectos. Pero según el lema I

$$D(\triangle A'B'C') = D(\triangle A'B'P') + D\triangle(B'P'C')$$

Como los triángulos $A'B'P'$ y $B'P'C'$ son rectángulos, de lo que se acaba de demostrar se desprende que $D(\triangle A'B'P') = 0$ y $D(\triangle B'P'C') = 0$.

En conclusión, $D(\triangle A'B'C') = 0$, es decir, la suma de los angulo internos del $\triangle A'B'C'$ es igual a dos rectos. La proposición queda así demostrada.

Una vez establecidas las proposiciones I-III por Legendre, se puede argumentar que existe al menos un triángulo cuya suma de ángulos internos es igual a dos rectos. Si esto fuera posible en virtud de la proposición III en cada triángulo la suma de sus ángulos internos serán iguales a dos rectos, y por la proposición I, se estableceria el V postulado.

Exponemos un ejemplo de una “seudo-demostración” de lo anterior:

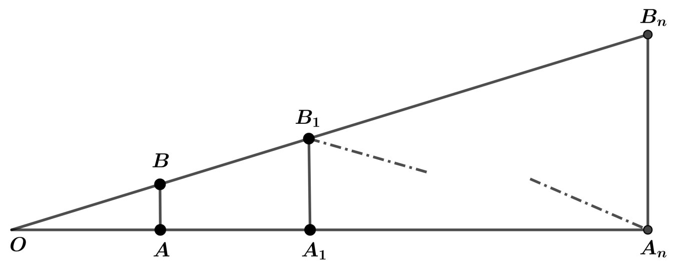

Figura 2.12: Seudo-demostración.

En efecto sea un ángulo agudo arbitrario con vértice en O (Figura 2.12). Sea B un punto en uno de sus lados. Se traza por él la perpendicular $\overline{BA}$ al otro lado, según la proposición II la suma de los ángulos del triángulo OAB no supera dos rectos, es decir $D(\triangle OAB) \geq 0$.

Consideremos $D(\triangle OAB) = \epsilon > 0$ y sea A_1 punto de $\overline{OA}$, tal que $\overline{OA} = \overline{AA_1}$. Se construye la perpendicular por A_1 a la recta OA, tal que B_1 sea el punto de intersección de esta perpendicular con la recta OB. En virtud del Lema I:

$$D(\triangle OA_1B_1) = D(\triangle OAB) + D(\triangle BAA_1) + D(\triangle BA_1B_1)$$

Luego el triángulo OAB es igual al triángulo BAA_1 (congruentes) y en consecuencia $D(\triangle OAB) = D(\triangle BAA_1) = \epsilon$

De aquí y de la igualdad precedente se tiene

$$D(\triangle OA_1B_1) \geq 2\epsilon$$

Análogamente sea A_2 un punto sobre OA, tal que $OA_1 = A_1A_2$, de modo que se construya una perpendicular por A_2 a OA y B_2 el punto de intersección de ésta con OB. Se concluye $D(\triangle OA_2B_2) \geq 4\epsilon$

Generalizando, se obtiene un triángulo OA_nB_m, tal que

$$D(\triangle OA_nB_n) \geq 2^n\epsilon$$

Considerando un n suficientemente grande, se satisface la desigualdad $2^n\epsilon > \pi$. Sin embargo esto es una contradicción pues no puede ser mayor que π. Entonces se establece que $D(\triangle OAB) = 0$, es decir la suma de los ángulos de este triángulo es igual a dos rectos y por lo tanto el quinto postulado.

Los argumentos expuestos por Legendre fueron más bien rechazados, precisamente por no establecer rigurosamente que las perpendiculares a la recta OA en los puntos A_1, A_2, etc, deben encontrar a la recta OA. Legendre utiliza los puntos B_1, B_2, etc, sin establecer su existencia, más bien confiado en la evidencia dada en la representación.

Un estudio más detallado de los trabajos de Legendre revelaron que no se puede realizar la demostración de la existencia de los puntos B_1, B_2, etc, sin referenciar al V postulado. De este modo el razonamiento solo descubre un nuevo equivalente del V postulado. A saber;

- Proposición: *Si existe un ángulo agudo tal que la perpendicular en cualquier punto de uno de sus lados intersecta al otro lado, entonces se verifica el V postulado.*

En efecto, la relación común entre los razonamientos de Legendre, Saccheri y Lambert es expuesta precisamente de las tres hipótesis de Legendre sobre los posibles valores de la suma de los ángulos de un triángulo que se corresponden con las hipótesis del ángulo obtuso, del recto y del agudo de Saccheri. Esto al aceptar la hipótesis del ángulo obtuso para algún cuadrilátero de Saccheri, entonces al dividirse por una diagonal, se obtienen dos triángulos de los cuales al menos uno tendrá la suma de sus ángulos mayor que dos rectos. Recíprocamente al aceptar que la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos, se tiene que aceptar la hipótesis de Saccheri sobre el ángulo obtuso.

A continuación, si se supone que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos, resulta que para cada cuadrilátero de Saccheri habrá que aceptar la hipótesis del ángulo agudo. Y recíprocamente, si se acepta la hipótesis del ángulo agudo al menos para algún cuadrilátero de Saccheri, entonces al dividirlo por una diagonal en dos triángulos, se tiene que al menos uno de ellos tiene la suma de sus ángulos menor que dos rectos. Pero entonces, cada triángulo tendrá la suma de sus ángulos menor que dos rectos y, consecuentemente, los ángulos de la base superior de cada cuadrilátero de Saccheri serán agudos.

Por lo tanto, se puede afirmar;

- Proposición: *Si se acepta la hipótesis del ángulo agudo para un cuadrilátero de Saccheri, será necesario aceptarlo para todo otro cuadrilátero de Saccheri.*

Se establece directamente que la hipótesis del ángulo recto de Saccheri y la suposición de Legendre sobre la existencia de un triángulo cuya suma de ángulos sea igual a dos rectos, son equivalentes al V postulado.

Legendre no logró demostrar que no existe ningún triángulo cuya suma de sus ángulos sea menor que dos rectos, así como Saccheri tampoco consiguió llevar a una contradicción la hipotesis del angulo agudo, con lo expuesto anteriormente, Saccheri y Lambert fueron mucho más lejos que Legendre.

2.0.4. La Geometría de N. I. Lobachevski

Hasta principios del siglo XIX, ningún intento por demostrar el V postulado fue coronado por el éxito. A pesar de los esfuerzos dedicados por los geómetras durante más de veinte siglos, el problema de la fundamentación de la teoría de las paralelas se hallaba, en esencia, en el mismo nivel que en los tiempos de Euclides.

La resolución de este famoso problema pertenece al profesor de la Universidad de Kazan, Nikolai lvanovich Lobachevski (1793-1856). En su informe a la Facultad de Fisica y Matematicas de la Universidad de Kazán (del 11 de febrero de 1826, según el calendario juliano vigente entonces en Rusia) y en las obras publicadas a partir de 1829, por primera vez fue formulada de manera precisa y confirmada la idea de que el V postulado no puede ser deducido de los restantes postulados de la geometría. A fin de probar esto, Lobachevski, conservando las premisas básicas de Euclides, a excepción del postulado del paralelismo, admite que dicho postulado no tiene lugar, y construye un sistema lógico cuyas proposiciones son consecuencias de las premisas aceptadas.

Muchos de los resultados obtenidos por Lobachevski se encontraban en los trabajos de Saccheri y Lambert que desarrollan la hipótesis del ángulo agudo. Esto es comprensible, pues la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri y las premisas básicas de Lobachevski son equivalentes. Pero mientras Saccheri se propuso mostrar que la hipótesis del ángulo agudo conduce a una contradicción y debe ser descartada por inadmisible desde el punto de vista lógico, Lobachevski. al desarrollar el sistema de sus teoremas, establece que este representa una nueva geometría (la denomino Imaginaria), la cual, como la euclidiana, no contiene contradicciones lógicas.

La demostración de la consistencia de la geometría de Lobachevski a un nivel moderno de rigor fue hecha en el siglo XIX, después de establecidos los principios generales de la fundamentación lógica de la geometría.

Los resultados de las investigaciones de Lobachevski pueden resumirse como sigue:

- El V postulado no es consecuencia necesaria de los restantes postulados de la geometría (no depende lógicamente de ellos).

- El V postulado no se desprende de los demás, precisamente porque conjuntamente con la geometría de Euclides, en la cual dicho postulado se acepta como verdadero, es posible otra geometría, imaginaria, en la cual el V postulado no tiene lugar.

Las ideas de Lobachevski parecen paradójicas a los geómetras de su época, y fueron recibidas con ironía. Muy pocos estaban en condiciones de comprender y apreciar sus trabajos; entre estos, deben ser destacados C. F. Gauss y J. Bolyai, que trabajaban en la teoría de las paralelas en forma independiente entre sí y con respecto a Lobachevski. Gauss tenía clara la idea de una nueva geometría; sin embargo, no la desarrolló suficientemente, dejando solo esbozos de algunos teoremas más elementales. No llegó a publicar sus puntos de vista sobre los fundamentos de la geometría, por temor a ser incomprendido. J. Bolyai editó su trabajo tres años después de la primera publicación de Lobachevski (ignorando su existencia). En él, J. Bolyai expuso la misma teoría que Lobachevski, pero en forma menos desarrollada (Sigarreta, 2004).

2.0.5. Sobre la fundamentación de la Geometría y la concepción del espacio geométrico

Los dos siglos siguientes, el XVII y particularmente el XVIII, se distinguieron por un trabajo muy intenso del pensamiento matemático y por la formación de teorías matemáticas nuevas. En esta época fueron creados los cálculos diferencial e integral, la invención de la geometría analítica abrió el camino a la aplicación de álgebra y el análisis a la resolución de problemas geométricos, así como también de numerosos problemas de la mecánica y la astronomía. Sin embargo, los enfoques del espacio geométrico y de los conceptos que forman la base de la geometría, se encontraban esencialmente iguales que en la época de Euclides. Solo como resultado de los notables progresos del siglo XIX se alcanzó la claridad y, con ella, la amplitud de la concepción de la geometría y de los objetos geométricos, que caracterizan a la matemática moderna y la diferencian radicalmente de la matemática de los tiempos antiguos.

Los fundamentos de la geometría tiene dos objetivos principales:

- La construcción lógica de la geometría a base de algunas pocas premisas, llamadas axiomas;

- El estudio de la interdependencia lógica entre distintas proposiciones geométricas.

Como ya sabemos, estos problemas parten de Euclides, cuya famosa obra es la primera que conocemos dedicada a los fundamentos de la geometría.

Las investigaciones dedicadas a la demostración del V postulado también deben ser referidas a los fundamentos de la geometría, pues tenían por finalidad establecer la dependencia del V postulado con respecto a otros postulados geométricos. Lobachevski, al establecer la independencia del V postulado, propuso el primer resultado fundamental en este campo. Es más, al construir un sistema geométrico diferente del euclidiano, Lobachevski logró ampliar la comprensión del propio significado de la geometría y, por ende, de los problemas de su fundamentación.

Un importante resultado en esta dirección fue obtenido luego por B. Riemann, quien en su trabajo Sobre las hipótesis que se hallan en la base de la geometría (1854), al desarrollar los principios analíticos de la geometría obtuvo, en particular, un sistema geométrico que difería tanto del euclidiano como del de Lobachevski. En la geometría de Riemann, una recta se determina por dos puntos; un plano, por tres; dos planos se intersecan según una recta,etc., pero por un punto dado no se puede trazar ninguna paralela a una recta dada. En particular, en esta geometría se verifica el teorema: la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos. Ya sabemos que si se conservan todas las premisas de Euclides, a excepción del postulado sobre las paralelas, las dos últimas afirmaciones deben rechazarse por contradictorias. En consecuencia, Riemann, al desarrollar su sistema, debió alterar la axiomática euclidiana aún más que Lobachevski.

A fines del siglo XIX se publicaron varios trabajos sobre este problema, pertenecientes a matemáticos de primera línea. La más famosa fue la obra de D. Hilbert *Fundamentos de la geometría*, publicada en 1899, y que obtuvo en 1903 el premio internacional N. I. Lobachevski. Hilbert enuncia un sistema completo de axiomas de la geometría euclidiana, es decir, una lista de premisas básicas de las cuales se pueden obtener todos los demás resultados de esta geometría, por medio de deducciones lógicas, establece, asimismo, la independencia de los axiomas más importantes de su sistema, con respecto a los restantes, contenidos en este.

A diferencia de los Elementos de Euclides, en las listas modernas de axiomas de la geometría euclidiana no hay descripciones de los objetos geométricos. Se supone únicamente que existen tres grupos de objetos, llamados puntos, rectas y planos, con respecto a los cuales se verifican ciertas condiciones muy precisas.

Tales condiciones como:

- Entre los objetos denominados puntos, rectas y planos, así como también entre algunos conjuntos de estos objetos (segmentos, ángulos) deben existir determinadas relaciones, que se denotan por los términos pertenece a, entre, congruentes.
- Las relaciones indicadas deben satisfacer las condiciones enumeradas en los axiomas.

Los objetos a que se refieren los axiomas no deben, forzosamente, ser de alguna naturaleza especial, tampoco, poseer algún aspecto exterior determinado. Las relaciones entre estos objetos no están obligadas a tener algún carácter especial. Tanto unos como otras pueden ser escogidas de manera arbitraria, siempre que se verifiquen las condiciones impuestas por los axiomas. Tai enfoque de la geometría y sus objetos obedece a dos circunstancias:

- La geometría opera con conceptos que surgen de la experiencia, como resultado de una determinada abstracción de objetos del mundo real, en la cual se toman en consideración sólo algunas propiedades de estos objetos reales; en los razonamientos rigurosamente lógicos efectuados al demostrar los teoremas, hay que tratar únicamente con estas propiedades de los objetos las cuales son precisamente aquellas que deben ser destacadas en los axiomas y definiciones; las demás propiedades que se establecen sobre puntos, recta, plano, no desempeñan ningún papel en la construcción lógica de la geometría y no deben ser mencionadas en las premisas básicas de esta ciencia.
- Además de la geometría euclidiana, cuyos teoremas corresponden a nuestra idea intuitiva de las propiedades de las imágenes geométricas, existen otros sistemas geométricos (el de Lobachevski, el de Riemann), que contradicen la intuición espacial directa. Por esto, en un planteo suficientemente general del problema de fundamentación de la geometría, el propio concepto de objetos geométricos debe ser tan general que pueda ser aplicado a todos los casos necesarios.

De acuerdo con lo que se acaba de exponer, se pucde decir que el espacio geométrico determinado por un sistema dado de axiomas, es el conjunto de objetos llamados elementos geométricos, cuyas relaciones mutuas satisfacen las condiciones enunciadas en los axiomas del sistema dado. Así, podemos hablar del espacio de Euclides, entendiendo por esto una colección de elementos sujetos a las condiciones indicadas en los axiomas de la geometría de Euclides, o bien pensar en el espacio de Lobachevski como una colección de elementos sometidos a los axiomas de la geometría de Lobachevski.

La consolidación de las ideas modernas del espacio geométrico fue determinada en gran medida por el desarrollo de la geometría diferencial. En la memoria de Gauss, *Investigaciones generales sobre las superficies curvas*, (Gauss, 1827) se destacan algunas propiedades particulares de una superficie, que constituyen su geometría interna. Se trata de aquellas propiedades que pueden ser establecidas por medio de mediciones que se efectúan dentro de la propia superficie (la fuente práctica de las ideas de la geometría interna fue la geodesia).

En 1868 la obra de Beltrami, *Experiencia de la interpretación de la geometría no euclidiana*, en la cual el autor muestra que la geometría de Lobachevski puede considerarse, bajo ciertas restricciones, como la geometría interna de una cierta superficie. Con esto, la geometría no euclidiana, conjuntamente con la de Euclides, quedaron incluidas en un dominio totalmente concreto de la teoría de superficies.

En la década del 70, F. Klein propuso una interpretación general de los sistemas geométricos de Euclides, Lobachevski y Riemann, basada en la geometría proyectiva. Esta investigación de Klein se halla en estrecha conexión con su concepción de la geometría como la teoría de los invariantes de un cierto grupo de transformaciones. Este enfoque de teoría de grupos de la esencia de la geometría, enunciado por Klein en su disertación Reseña comparativa de las más recientes investigaciones geométricas, que figura en la historia de la ciencia bajo el nombre: de Programa de Erlangen (1872), permitió establecer una determinada clasificación de los sistemas geométricos más importantes y las variedades que estos estudian.

2.0.6. El papel del quinto postulado en el currículo escolar Chileno

Si para la ciencia el surgimiento de nuevas geometrías es un hito revolucionario que resignificó la noción de Geometría, no es trivial, preguntarse respecto a la emergencia de tal compresión en la matemática escolar. Para tales efectos, observamos que se establece en el marco curricular chileno para geometría.

En el año 1998, se firma el decreto 220, en el que se establecen claramente los Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) tanto para la Educación General Básica como para la Educación Media. Además el año 2010 entra en vigencia de manera paulatina un nuevo ajuste curricular. Los aprendizajes y el conocimiento matemático que conforman los OF y CMO del sector fueron organizados, de acuerdo con una progresión ordenada, en cuatro ejes que articulan la experiencia formativa de alumnas y alumnos a lo largo de los años escolares, todo esto según el último ajuste curricular.

Los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios (actualizados al 2009, decreto $n°$ 256) de la Educación Básica y Media han sido formulados por el Ministerio de Educación respondiendo a los siguientes requerimientos:

- Las necesidades de actualización, reorientación y enriquecimiento curriculares que se derivan de cambios acelerados en el conocimiento y en la sociedad, y del propósito de ofrecer a alumnos y alumnas conocimientos, habilidades y actitudes, relevantes para su vida como personas, ciudadanos y trabajadores, así como para el desarrollo económico, social y político del país.

- La necesidad de ofrecer una base cultural común a todo el país que favorezca la cohesión e integración social y que admita ser complementada para acoger la diversidad cultural del país.

- La necesidad de mejorar la articulación de los niveles educativos de Parvularia, básica y media, para asegurar una trayectoria escolar fluida y una calidad homogénea entre niveles, resguardando la particularidad de cada uno de ellos.

En Geometría, este eje se orienta, inicialmente, al desarrollo de la imaginación espacial, al conocimiento de objetos geométricos básicos y algunas de sus propiedades. En particular propone relacionar formas geométricas en dos y tres dimensiones, la construcción de figuras y de transformaciones de figuras. Se introduce la noción de medición en figuras planas. Progresivamente se introduce el concepto de demostración y se amplía la base epistemológica de la geometría, mediante las transformaciones rígidas en el plano, los vectores y la geometría cartesiana. De este modo se dan diferentes enfoques para el tratamiento de problemas en los que interviene la forma, el tamaño y la posición. El eje se relaciona con el de números, a partir de la medición y la representación, en el plano cartesiano, de puntos y figuras; con el de álgebra y datos y azar, la relación se establece mediante el uso de fórmulas y luego la representación gráfica de funciones y de distribución de datos.

El ministerio de educación además de poner a disposición planes y programas, para cada uno de los niveles, también elaboró un conjunto de Mapas de Progreso del Aprendizaje, que describen la secuencia típica en que éste se desarrolla en determinadas áreas o dominios que se consideran fundamentales en la formación de cada estudiante, en los distintos sectores curriculares. El Mapa de Progreso del Aprendizaje de geometría es el siguiente:

Nivel 7: Resuelve problemas geométricos estableciendo relaciones entre conceptos, técnicas y procedimientos de distintas áreas de la matemática. Selecciona entre varios procedimientos para resolver problemas en diferentes contextos geométricos, acorde a las características del problema. Conjetura sobre la base de exploraciones realizadas 14 con herramientas tecnológicas y verifica proposiciones geométricas mediante axiomas y demostraciones directas e indirectas.

Nivel 6: Relaciona la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen. Caracteriza puntos, rectas y planos en el espacio, describe cuerpos generados por traslaciones y rotaciones de figuras planas. Determina el módulo de un vector en dos o tres dimensiones y el área y volumen de cuerpos generados por traslaciones y rotaciones. Describe la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar. Formula conjeturas en relación a la forma de los cuerpos generados a partir de rotaciones y traslaciones de figuras planas en el espacio. Resuelve problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando métodos analíticos y gráficos.

Nivel 5: Caracteriza ángulos entre elementos lineales asociados a la circunferencia, comprende los conceptos de congruencia y semejanza, conoce los teoremas respectivos y los aplica como criterios para determinar congruencia y semejanza de figuras planas. Calcula la medida de ángulos en la circunferencia y de segmentos de figuras planas. Comprende el concepto de transformación en el plano cartesiano, y utiliza la representación vectorial para describir traslaciones y homotecias de figuras geométricas en el plano. Formula y verifica conjeturas en relación a los efectos de la aplicación de una transformación a una figura en el plano cartesiano. Demuestra teoremas relativos a relaciones entre trazos en triángulos y en la circunferencia y a trazos y ángulos en ella, y los aplica en la resolución de problemas.

Nivel 4: Reconoce la circunferencia y el círculo como lugares geométricos identificando sus elementos, y caracteriza elementos secundarios de triángulos. Comprende el teorema de Pitágoras y el concepto de volumen. Calcula longitudes de figuras bi y tridimensionales, el área del círculo y obtiene el volumen de distintos cuerpos geométricos. Construye ángulos, triángulos y sus elementos secundarios, y polígonos regulares. Comprende el concepto de transformación isométrica y aplica estas 15 transformaciones a figuras planas. Formula conjeturas relativas a cambios en el perímetro de polígonos y al volumen de cuerpos geométricos al variar elementos lineales y resuelve problemas relacionados con estas variaciones.

Nivel 3: Caracteriza la relación entre ángulos que se forman en rectas coplanares que se cortan. Mide ángulos expresando sus resultados en unidades sexagesimales y determina áreas en triángulos y paralelogramos. Formula conjeturas relativas a medidas de ángulos en polígonos y a cambios en el área de paralelogramos al variar uno o más de sus elementos. Resuelve problemas que implican la elaboración de procedimientos para calcular ángulos en polígonos regulares y calcular áreas de triángulos, paralelogramos y formas que puedan descomponerse en estas figuras, y argumenta sobre la validez de sus procedimientos.

Nivel 2: Caracteriza cilindros, conos y pirámides en términos de las superficies y líneas que los delimitan e identifica las redes que permiten construirlos y las representaciones en el plano de sus vistas. Comprende los conceptos de perímetro y área, y emplea cuadrículas para estimar y medir áreas de superficies que se pueden descomponer en rectángulos. Formula y verifica conjeturas relativas a la posibilidad de construir cuerpos a partir de distintas redes. Resuelve problemas relacionados con el cálculo de áreas y perímetros de figuras que pueden ser descompuestas en rectángulos.

El plan curricular para Geometría a pesar de declarar aspectos epistemológicos no establece marcos procedimentales para su tratamiento. Los contenidos mínimos obligatorios no exponen temas relacionados a los fundamentos de la Geometría ni la relevancia del quinto postulado para la axiomática euclidiana y no euclidiana. La importancia de realizar estos estudios responde a la problemática de la consideración de los conceptos sin una contextualización histórica. Sin embargo encontramos CMO y OF relacionados con nuestro trabajo a lo largo de todos los niveles de enseñanza, como por ejemplo:

CMO y OF Relacionados	
Nivel Educativo	**OF y CMO por nivel**
Segundo Básico	OF. Identificar ángulos y posiciones relativas entre dos rectas en el plano, caracterizar triángulos y cuadriláteros y anticipar formas que se generan a partir de la formación y transformación de figuras planas y cuerpos geométricos. CMO. Identificación de ángulos menores, mayores e iguales al ángulo recto, así como también de rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas.
Tercero Básico	OF. Caracterizar cuerpos geométricos, asociarlos a sus redes, formular y verificar conjeturas, en casos particulares, acerca de la posibilidad de construirlos a partir de ellas. CMO. Formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de la posibilidad de armar cuerpos a partir de distintas redes y resolución de problemas referidos al cálculo de perímetros en situaciones significativas.

Cuadro 2.2: OF Y CMO

CMO y OF Relacionados	
Nivel Educativo	**OF y CMO por nivel**
Cuarto Básico	OF. Relacionar representaciones bi y tridimensionales de cuerpos, a partir de la posición desde la que se observa. CMO. Representación en el plano de la elevación, perfil y planta de cuerpos geométricos, y recíprocamente trazado de la representación de dichos cuerpos geométricos en el plano a partir de sus vistas.
Sexto Básico	OF. Emplear procedimientos para medir ángulos y establecer relaciones entre la medida de ángulos que se forman en rectas paralelas cortadas por una transversal. CMO. Identificación de ángulos opuestos por el vértice en rectas que se cortan en el plano, de los ángulos que se forman al cortar rectas paralelas por una transversal y verificación de las igualdades de medida que se dan en estos casos.
Séptimo Básico	OF. Construir triángulos a partir de la medida de sus lados y ángulos, caracterizar sus elementos lineales y comprobar que algunas de sus propiedades son válidas para casos particulares, en forma manual y usando procesadores geométricos. CMO. Transporte de segmentos y ángulos, construcción de ángulos y bisectrices de ángulos, construcción de rectas paralelas y perpendiculares, mediante regla y compás o un procesador geométrico.
Octavo Básico	OF. Caracterizar y efectuar transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, reconocer algunas de sus propiedades e identificar situaciones en contextos diversos que corresponden a aplicaciones de dichas transformaciones. CMO. Realización de traslaciones, reflexiones y rotaciones de figuras geométricas planas a través de construcciones con regla y compás y empleando un procesador geométrico, discusión acerca de las invariantes que se generan al realizar estas transformaciones.

Cuadro 2.3: OF y CMO

CMO y OF Relacionados	
Nivel Educativo	**OF y CMO por nivel**
Primero Medio	OF. Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas. CMO. Identificación del plano cartesiano y su uso para representar puntos y figuras geométricas manualmente, haciendo uso de un procesador geométrico.
Segundo Medio	OF. Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala. CMO. Aplicación de la noción de semejanza a la demostración de relaciones entre segmentos en cuerdas y secantes en una circunferencia y a la homotecia de figuras planas.
Tecero Medio	OF. Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos relaciones entre figuras geométricas. CMO. Deducción de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano y su aplicación al cálculo de magnitudes lineales en figuras planas.
Cuarto Medio	OF. Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio. CMO. Identificación y descripción de puntos, rectas y planos en el espacio; deducción de la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana.

Cuadro 2.4: OF y CMO

La exposición anterior muestra la evidencia de falta de articulación histórica asociada al quinto postulado y al nulo desarrollo de la concepción de espacio geométrico a través de las geometrías no euclidianas. Se establece la necesidad de construir una compresión del quinto postulado en términos de su funcionalidad, representación y significados históricos.

Capítulo 3

Marco Teórico, Problema de Investigación y Resultados

Para alcanzar los objetivos descritos en secciones posteriores, esta investigación se apoya en los modos de pensamiento de Sierpinska, como herramienta de análisis del pensamiento práctico y teórico, y la noción de Obstáculo Epistemológico acuñada por el filósofo francés Gastón Bachelard.

3.0.1. Modos de Pensamiento de Sierpinska

Anna Sierpinska (Sierpinska, 2000) plantea que la distinción entre el pensamiento teórico y el práctico es una distinción metodológica, no una distinción entre los procesos reales de pensamiento, que parecen tener siempre un componente práctico y uno teórico. Esto conlleva a que la mayoría de las veces los científicos piensen de manera "práctica", entendida no como la práctica de la vida cotidiana, sino como su práctica como científicos que trabajan en un paradigma en particular; luego, pasar de ahí hacia el pensamiento teórico generalmente desafía su sentido matemático común.

Es por ello que Sierpinska considera que el pensamiento práctico puede considerarse una necesidad desde el punto de vista epistemológico si se supone que el pensamiento teórico trata de algo distinto de sí mismo. Es el pensamiento práctico el que lleva a la identificación de los problemas. Éstos pueden entonces enmarcarse y formularse dentro de una teoría y resolverse o comprenderse sobre la base de sus instrumentos técnicos y analíticos. Pero el pensamiento práctico puede llevar a confusión y errores, no sólo en nosotros, sino que también en los científicos, como es el conocido ejemplo de los psicólogos investigadores que tendían a pensar en la probabilidad como una medida de "confianza" y que "depositaban una mayor confianza en los resultados experimentales con un gran tamaño de muestra que con un tamaño de muestra pequeño cuando el valor de probabilidad de rechazar la hipótesis nula se mantenía constante". Así pues, el pensamiento práctico funciona como un obstáculo epistemológico en el sentido clásico, es decir, como una forma de pensamiento que es útil o incluso necesaria para el desarrollo del conocimiento científico, pero que tiene un dominio de validez limitado.

Para Sierpinska, el pensamiento teórico "se caracteriza por una reflexión consciente sobre los medios semióticos de representación del conocimiento y por sistemas de conceptos (sistemas conceptuales) en vez de agregados de ideas", es decir que está basado en conexiones lógicas y relaciones de conceptos con otros más generales. En contraste, el pensamiento práctico enfatiza en la manipulación y aplicación de operaciones y signos sobre elementos matemáticos, y se relaciona con el pensamiento analítico. Para la autora, el pensamiento teórico y pensamiento práctico están determinados por tres modos de pensamiento, a saber, sintético-geométrico (pensamiento práctico); analítico-aritmético y analítico-estructural; estos dos últimos tienen que ver con el pensamiento teórico. En el modo de pensamiento analítico-aritmético, Sierpinska señala que los objetos matemáticos son dados por relaciones, operaciones y procedimientos con números y variables.

En el caso del modo sintético-geométrico, los objetos matemáticos se definen por características geométricas a partir de funciones, coordenadas, vectores, entre otras, y son representados por medio de imágenes. En el analítico-estructural, los objetos matemáticos se explican a partir de propiedades, características, axiomas o definiciones más generales. Otra diferencia entre el modo sintético y analítico (aritmético y estructural) es que en el modo sintético los objetos son dados, en cierto modo, directamente a la mente que luego trata de describirlos; mientras que, en el modo analítico se les da indirectamente, de hecho, sólo son construidos por la definición de las propiedades de sus elementos (Sierpinska, 2000). Una manera de favorecer la comprensión de un objeto o concepto matemático es mediante la promoción de transiciones e interacciones entre estos tres tipos de pensamiento.

3.0.2. La Noción de Obstáculo Epistemológico de Bachelard

Bachelard (Bachelard, 1938) establece que un Obstáculo Epistemológico es un conocimiento previo que se identifica como causa de estancamientos, regresiones o inercias en el desarrollo del conocimiento científico. Según el autor, se debe plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos.

Los obstáculos epistemológicos no se refieren a los elementos externos que intervienen en el proceso del conocimiento científico, como podría ser la complejidad o la dificultad para captar el nuevo fenómeno al modo cartesiano, en el que la causa fundamental para no poder acceder al conocimiento radica en la mínima capacidad que tienen los sentidos para captar la realidad, sino a las condiciones psicológicas que impiden evolucionar al espíritu científico en formación. Bachelard identifica diez Obstáculos epistemológicos, a saber, la experiencia básica, obstáculo realista, verbal, conocimiento unitario y pragmático, obstáculo sustancialista, obstáculo animista, el mito de la digestión, libido y conocimiento objetivo y conocimiento cuantitativo.

El obstáculo de la experiencia primera, está conformada de informaciones que se perciben y se alojan en el espíritu generalmente en los primeros años de la vida intelectual esas informaciones no se pudieron someter a crítica alguna, pues el espíritu se encontraba desarmado y altamente voluble dado que se encontraba sumergido en la inconsciencia del ignorar; al no sufrir crítica alguna estas experiencias primeras pasan sin tamizar a convertirse en verdades primarias frente a las que es imposible crear nuevos conocimientos que vayan en contra de las mismas. Este obstáculo se ve reforzado por el aparente capricho de la naturaleza, que nos muestra una realidad inmediata que nada tiene que ver con el fenómeno verdadero.

El obstáculo realista, consiste en tomar la noción de sustancia como una realidad, que no se discute y de la que parte toda una serie de conocimientos que tiene relación directa e indiscutible con la naturaleza de la sustancia misma, como no se puede explicar se la toma como causa fundamental o como una síntesis general del fenómeno natural al que se le asigna.

El tercer obstáculo se ubica en los hábitos verbales utilizados cotidianamente los que se convierten en obstáculos más efectivos cuanto mayor sea su capacidad explicativa, es así como un término que aparezca claro y diáfano al entendimiento pasa a ser tratado como un axioma al que no es necesario explicar, deja de ser una palabra y pasa a ser una categoría empírica para el que lo utiliza.

El conocimiento unitario y pragmático es identificado como el cuarto obstáculo epistemológica que se presenta en toda comunidad pre-científica ya que el concepto de unidad permite simplificar el estudio de cualquier realidad, al poderse explicar el todo también se ha de poder automáticamente explicar sus partes, la unificación explica toda la realidad.

El quinto obstáculo epistemológico consiste en la unión que se hace de la sustancia y sus cualidades, Bachelard distingue un sustancialismo de lo oculto, de la intimo y de la cualidad evidente.

El sexto obstáculo es el realista en el que el entendimiento queda deslumbrado con la presencia de lo real, hasta tal punto que se considera que no debe ser estudiado ni enseñado, lo real se adorna con imágenes que llevan consigo las marcas de las impresiones personales del sujeto que investiga.

El séptimo obstáculo epistemológico es el animista, según este cualquier sujeto presta mayor atención y por tanto da una más grande valoración al concepto que conlleve a la vida, que contenga vida o que se relacione con ella.

El mito de la digestión es identificado como el octavo obstáculo, según este todo fenómeno que tenga relación con la digestión o la cocción (se considera al estómago como una gran caldera) pasará a obtener una mayor valoración explicativa.

El noveno obstáculo epistemológico, Bachelard lo identifica como la libido, a la que se interpreta desde el punto de vista de la voluntad de poder o la voluntad de dominio hacia otros presentada en el individuo que investiga y que no puede dejar de reflejar en sus experimentos o en sus intentos de dar explicación coherente ante un fenómeno nuevo.

El último obstáculo es identificado por Bachelard como el del conocimiento cuantitativo, ya que se considera todo conocimiento cuantitativo como libre de errores, saltando de lo cuantitativo a lo objetivo, todo lo que se pueda contar tiene una mayor validez frente a lo que no permita este proceso lo que no se pueda contar o que no tenga gran influencia sobre la cuantificación final se puede despreciar permitiendo el error típico que sucede cuando no se tiene en cuenta las escalas de los problemas llevando los mismos juicios y raciocinios experimentales de lo muy grande a lo muy pequeño.

Todas las anteriores nociones se constituyen en elementos que dificultan el paso de un espíritu pre-científico a un espíritu verdaderamente científico. Estas nociones no sólo son propias del pensamiento científico contemporáneo pues Bachelard muestra que se presentan también de manera muy evidente en la antigüedad y en la época medieval, con lo que se pone de manifiesto que los obstáculos epistemológicos no son propios de una comunidad científica en especial o de una etapa de la historia del conocimiento, sino que están presentes en los sujetos que han pretendido hacer ciencia a lo largo de todos los tiempos.

3.0.3. Pregunta y Objetivos de Investigación

Una vez de expuesta toda una revisión sobre resultados históricos-epistemológicos y referentes teóricos para situar nuestra problemática, ha quedado en evidencia la emergencia y relevancia que tiene presentar un análisis sobre el desarrollo histórico del quinto postulado de Euclides identificando los obstáculos en su evolución y cómo estas se vinculan con el currículum escolar chileno. En esta misma línea, se presentan los objetivos y pregunta de investigación:

Objetivo General

OG. Exponer una reconstrucción histórica-epistemológica del quinto postulado de Euclides.

Objetivos específicos

OE1. Estudiar los modos de pensamiento asociados al problema de las paralelas.

OE2. Identificar los obstáculos epistemológicos en la evolución histórica del quinto postulado de Euclides.

Preguntas de Investigación

PI. ¿Cuáles son los modos de pensamiento presentes en el desarrollo histórico del quinto postulado?

3.0.4. Marco Metodológico

La siguiente investigación se apoya en una metodología histórico documental con el fin de desarrollar un análisis histórico epistemológico del quinto postulado de Euclides y la emergencia de las geometrías no euclidianas. Este tipo de metodología se caracteriza por trabajar con documentos y textos de manera directa o indirecta.

Los principios en los que se apoya este estudio:

1. Recolecta, selecciona, analiza y presenta los documentos para presentar los resultados de la investigación.
2. Fundamenta el redescubrimiento de datos para generar nuevas preguntas y formas de investigación.
3. Usa formas de procesamiento que se apoyan en cualquier campo de la investigación como lo son los lógicos y los mentales.

4. La investigación se desarrolla de forma ordenada y con objetivos precisos, con la finalidad de ser base de la construcción de conocimientos.

Para tales efectos y el propósito de la investigación, se exploraron prácticas histórico matemáticas que permitieron la emergencia y evolución de las geometrías no euclidianas enfocadas en la disyuntiva histórica de la negación del quinto postulado de Euclides.

3.0.5. Modos de Pensamiento y obstáculos epistemológicos del quinto postulado de Euclides

Para acotar la distancia entre el saber sabio y el saber enseñando asociado al quinto postulado de Euclides es que nos apoyamos en la articulación entre el estudio histórico epistemológico del objeto, identificando los obstáculos epistemológicos, y el marco teórico que entrega los modos de pensamiento. En esta se indican los aspectos clave observados en el desarrollo histórico de la comprensión del postulado de Euclides asociados a los modos de pensamiento.

Modo de pensamiento Sintético Geométrico (SG): La definicion de paralelismo euclidiano, siempre fue cuestionada en lo que respecta a las nociones prolongar indefinidamente y no se encuentran. Por esto, con el fin de remplazar la definicion negativa de rectas paralelas por otra equivalente que no presentara dicha forma, Proclo (410-485) en su comentario al libro I de los Elementos de Euclides presenta aspectos significativos acerca de ciertas tentativas hechas con este proposito.

Debido al hecho de que los griegos sólo concebían el infinito como algo sin fin (infinito potencial), y a pesar de que contaban con un procedimiento que mostraba que dos rectas paralelas euclidianas no se cortaban para cualquier prolongación finita, siempre quedaba la duda sobre lo que podía pasar con las rectas cuando se prolongan indefinidamente.

Con esta controversia sobre el paralelismo, la noción de recta tambien provocó otra dificultad. Mientras que Euclides y posidonio la conciben como aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella, Gemino se refiere a la recta como una línea y, en este sentido, la noción de recta de Gemino es más amplia que la de Euclides.

Se pueden identificar los siguientes efectos derivadas de la definición de Euclides:

- La controversia respecto de la naturaleza de la recta.
- La controversia respecto de la naturaleza de las rectas paralelas. Equidistantes o

asintóticas.

Consideremos los siguientes obstáculos epistemológicos ligados a las causas de los efectos anteriores:

- Concepción de la recta euclidiana como objeto de la realidad.
- El infinito potencial.
- Concepción predominante de que las rectas paralelas son equidistantes.

Modo de Pensamiento aritmético-analítico: Las primeras versiones de los Elementos, hechas en los siglos XII y XIII sobre los textos árabes, así como las sucesivas, redactadas sobre los textos griegos a fines del siglo XV y en la primera mitad del Siglo XVI, no llevan, en general, ninguna observación crítica al V postulado de Euclides. J. Wallis (1616-1708). Da una "nueva demostración" del postulado de Euclides, fundamentándola en la nocion común: De toda figura existe una semejante de magnitud arbitraria. Giordano Vitale (1633-1711), volviendo al concepto de equidistancia formulado por Posidonio e igual que Proclo, plantea la necesidad de rechazar que las paralelas de Euclides pueden comportarse de un modo asintótico. A este fin define las paralelas como dos rectas equidistantes.

Se pueden identificar los siguientes efectos:

- Concepción del V postulado como un teorema.
- No dar cabida a la idea de rectas asintóticas.
- La situación de volver a las equidistancias de las paralelas.

Consideremos los siguientes obstáculos epistemológicos ligados a las causas de los efectos anteriores:

- Considerar la asintoticidad de las rectas como objetos desapegados de la realidad.
- La redacción original del quinto V postulado.
- Utilización de formas equivalentes para el intento de demostración del postulado.

Modo de pensamiento Analítico-Estructural: A pesar de todos los intentos frustrados para la demostracion del V postulado de Euclides, hasta principios del Siglo XVIII, dos resultados fundamentales:

- El postulado de las paralelas es equivalente a otras proposiciones matematicas.

- El recíproco del postulado de las paralelas (V postulado de Euclides) es demostrable: La suma de dos angulos de un triangulo es menor que dos angulos rectos.

Estas dos ideas condujeron hacia un cambio de enfoque metodológico. En lugar de tratar de probar el V postulado por metodos directos, como se hizo hasta el Siglo XVII. En el Siglo XVIII y principios del XIX se intentó la demostración de manera indirecta a través del método de demostración por Reducción al Absurdo; es decir, si el V postulado es verdadero, entonces cuando se suponga su negación necesariamente debe llegarse a una contradicción. Como se muestra en los trabajos de Saccheri, Lambert y Legendre.

Según nuestro estudio, se identifican los siguientes efectos:

- Considerar al V postulado de Euclides como un teorema.
- Asumir el método de reducción al absurdo como un método demostrativo.
- El hecho de que se conoce que varias proposiciones y su recíproco son demostrables, lo cual no implica contradicciones.

Consideremos los siguientes obstáculos epistemológicos ligados a las causas de los efectos anteriores:

- La representación visual de las rectas paralelas.
- La contradicción entre la posibilidad lógica y la representación visual.

Estas características mencionadas anteriormente fundamentan un replanteamiento sobre la teoría de las paralelas. En tal replanteamiento, Gauss concibe una geometría en la que no se cumple el V postulado de Euclides, pero no publica su descubrimiento. Lobachevsky, de manera independiente publica una geometrıa distinta en la que no se verifica tampoco el V postulado, planteando que existen al menos dos rectas paralelas que pasan por un punto exterior a una recta dada y Riemann planteó un postulado contrario al quinto de Euclides en el que acepta que por un punto exterior a una recta dada, no pasa ninguna paralela a ella. Lo relevante es que estos modelos geométricos no son contradictorios, o por lo menos no se tenía evidencia de tal situación. Esto último permite concluir:

- El V postulado es independiente de los otros cuatro, es decir, no puede deducirse de los otros cuatro.
- Existen modelos del espacio en los que, en contra de toda intuición, por un punto que no este en una cierta recta no pasa una unica recta paralela a la dada.

Replanteando la teoría de las paralelas de la siguiente manera:

- Definicion de Paralelas: Existe una recta a y un punto A que no le pertenece, tal que por A pasa al menos una recta que no corta a a y esta en un mismo plano con ella.
- Postulado alterno al de Euclides: Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna o al menos una paralela.

El enunciado de Playfair resalta las dos cualidades inherentes del paralelismo euclidiano: la existencia de una paralela a una recta dada por un punto exterior a ella, y la unicidad de dicha paralela. Entonces es claro que hay dos formas de negar el Axioma de Playfair (y por lo tanto, el postulado de las paralelas de Euclides):

- Negando la existencia. Por un punto exterior a una recta no existe paralela alguna. Es el caso de la geometría elíptica de Riemann.
- Negando la unicidad. Por un punto exterior a una recta existe al menos una paralela:
  - Si existe una y solo una paralela se tiene el caso de la geometría parabolica de Euclides.
  - Si existen al menos dos rectas paralelas se tiene el caso de la geometría hiperbolica de Lobachevsky.

3.0.6. Conclusiones

Para entender las consecuencias epistemológicas del hecho científico asociado al quinto postulado de Euclides se debe abandonar históricamente la concepción de la geometría como descripción del espacio físico, lo cual conduce a replantearse cuestionamientos tales como; los postulados de la geometría y su funcionalidad para la misma, este cuestionamiento está situado sobre la concepción de los postulados, a saber, si estos últimos se conciben como verdades experimentales y esta experiencia se deriva del trabajo hecho sobre las relaciones con rectas, puntos y planos formados por conceptos ideales. Según nuestro estudio, los axiomas geométricos no son ni juicios sintéticos, ni hechos experimentales. Son más bien convenciones guiadas por hechos experimentales y solo responden a la necesidad de evitar toda contradicción.

El descubrimiento de las geometrías no euclidianas junto con un conjuntos de tensiones teoricas, como la emergencia de las paradojas y la discusión respecto a la fundamentación de las matemáticas, son elementos que dieron lugar a un estudio mas profundo y a un refinamiento del Metodo Axiomatico que, a partir de la Axiomatica Griega produjo por evolución, la Axiomática Formal Moderna. Ası, la independencia real del V postulado de Euclides de los demás postulados de la geometría euclidiana no fue incuestionablemente establecida sino hasta que fueron proporcionadas las demostraciones de consistencia de las hipótesis del angulo agudo y obtuso. Esto es, de la geometrıa de Lobachevski y de Riemann respectivamente.

En el contexto de la Educación Matemática situada en el currículum nacional se evidencia la clara necesidad de un tratamiento histórico del V postulado, pues este se fundamenta más bien, en el trabajo experimental de los resultados internos de la geometría de Euclides que tienen debidas consecuencias en la concepción de espacio geométrico, es decir, según lo analizado, se puede argumentar que existe una clara distancia entre el saber sabio relacionado al V postulado y al saber enseñado. Proyecciones futuras pueden derivar en la construcción de diseños orientadores que puedan dar tratamiento histórico-matemático al objeto, en miras hacia las denominadas geometrías no euclidianas.

En el ambito de la formación inicial docente se hace necesaria una politica curricular que de cuenta de esta distancia entre el saber sabio y el saber enseñado. La evidencia muestra con respecto a la educación matemática, y en específico en la enseñanza de la geometría un vacío epistemólogico que guarda relación con los obstaculos identificados en este trabajo que pueden explicar el nulo desarrollo del espacio geométrico abstracto. Esto establece un desafío no trival para propiciar el desarrollo de la fundamentación de la geometría, un camino a seguir esta en el diseño curricular para una enseñaza de las denominadas geometrías no euclidianas que permitan la evolución del espacio geométrico desde el punto de vista historico pero con rigor matemático.

En síntesis, el valor de este trabajo radica en la caracterización histórica de la evolución del quinto postulado de Euclides, como origen de la fundamentación de la geometría, y a su vez de la matemática, y que da cuenta de la comprensión sobre la nula articulación entre el saber sabio, entendido como el conjunto de conocimientos sobre el objeto matemático y el saber enseñado, entendiendose este último como el saber transformado para el proceso educativo.

Bibliografía

Anacona, M. (2003). *La historia de las matemáticas en la Educación Matemática*. Revista EMA. Recuperado desde http://funes.uniandes.edu.co/1516/1/94_Anacona2003La_RevEMA.pdf

Astorga, M. (2015). *Comprension de las cónicas desde la perspectiva de la teoría de los Modos de Pensamiento*. Tesis de Maestría. Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Bachelard, G. (1938). Formación del espíritu científico. *Presses Universitaires*.

Beth, E. & Piaget, J. (1980). *Epistemología Matemática y Psicología*. Barcelona, España: Editorial Crítica.

Bonola, R. (1955). *Non-Euclidean Geometry*. Dover.

Boyer, C. (2015). *Historia de la matemática*. España: Alianza editorial.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et Methodes de la Didactique des Mathematiques*. Recherches en Didactique des Mathematiques.

Cañon, C. (2011). *La matemática creación y descubrimento*. Madrid: UPCO.

Cifuentes, W. & Villa-Ochoa, J. (2018). *Características de los modos de pensamiento matemático en profesores de matemáticas*. Features of mathematical Thinking of Mathematics Teachers.

Diaz Chang, T. & Arredondo, E. H. (2021). *Del Infinito Potencial al Actual: Un recorrido Historico a través de la metafora conceptual*. Paradigma. Recuperado desde http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/992

Euclides. (1991). *Los Elementos*. Traducida por Maria Luisa Puertas Castano. Editorial Gredos.

Gauss, K. (2011). *General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825*. The Project Gutenberg. Recuperado desde http://www.gutenberg.org/files/36856/36856-pdf.pdf

Gomez Mendoza, V. (2005). *La transposición Didactica: Historia de un concepto*. Colombia: Revista Latinoamericana de estudios educativos. Recuperado desde https://www.redalyc.org/pdf/1341/134116845006.pdf

Hilbert, D. (1962). *Foundations on Geometry.* open Court Publishing Co.

Kolmogorov, A. N. (1985). *La matemática: su contenido, su método y significado*. España: Alianza Universidad.

Lakatos, I. (1978). *Matematicas, ciencia y epistemologia.* España: Alianza Universidad.

Molina, O., Samper, C., Perry, P., Camargo, L. & Echeverrry, A. (2010). *Estudio del cuadrilátero de Saccheri como pretexto para la construcción de un sistema axiomático local.* UNIÓN. Revista iberoamericana de educación matemática. Recuperado desde http://funes.uniandes.edu.co/1154/1/2010-Molina%26Estudio.pdf

Nagel, E. (1994). *El teorema de Godel.* España: Tecnos, S. A.

O'Neill, B. (1972). *Elementos de Geometría Diferencial.* México: Limusa-Wiley.

Pecharroman, C. (2013). *Naturaleza de los objetos matemáticos: Representación y signficado*. Revista de Investigación y experiencias didácticas.

Sierpinska, A. (2000). *One Some Aspects of Students Thinking in Linear Algebra*. España: Springer.

Sigarreta, J. M. (2004). *The evolution of geometry from a historical perspective.* Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana.

Spivak, M. (1999). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Houston (Texas): Publish or Penish.

Wolfe, H. E. (1945). *Introducction to Non.Euclidean Geometry.* Holt, Reinhert y Winston.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de la Matematica.* España: España Editores, S. A.