UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO PROMOVIDOS POR EL CURRICULUM CHILENO DE MATEMÁTICA DE ENSEÑANZA MEDIA

Tesis de Magíster

NICOLE ALEJANDRA BÁEZ OYARZÚN

Director de tesis: Dr. Luis Roberto Pino-Fan

Osorno, enero 2022

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO PROMOVIDOS POR EL CURRICULUM CHILENO DE MATEMÁTICA DE ENSEÑANZA MEDIA

Tesis de Magíster presentada por Nicole Alejandra Baez Oyarzún para optar al grado de Magíster en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos, dirigida por el Dr. Luis R. Pino-Fan, académico del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos.

Nicole. B

Nicole Alejandra Báez Oyarzún

Luis R. Pino-Fan

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO PROMOVIDOS POR EL CURRICULUM CHILENO DE MATEMÁTICA DE ENSEÑANZA MEDIA

Esta Tesis de Magíster ha sido desarrollada al seno del Grupo de Investigación sobre Didáctica de la Matemática (GIDMAT-ULAGOS) del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos, en el marco del Proyecto de Investigación FONDECYT 1200005 titulado “Desarrollo de competencias profesionales clave para la práctica pedagógica de profesores de matemáticas de enseñanza media”, el cual es dirigido por el Dr. Luis R. Pino-Fan; y se inscribe en las líneas de investigación ‘Didáctica de los Diversos Marcos Matemáticos’ e ‘Historia, epistemología y aspectos socioculturales de las matemáticas’.

AGRADECIMIENTOS

A todas las personas que me apoyaron e hicieron posible que este trabajo se realice con éxito.

En especial a mi tutor Dr. Luis R. Pino-Fan por compartirme sus conocimientos, apoyarme cuando lo he pedido y comprender los procesos vividos. Gracias por la confianza ofrecida desde el inicio.

A cada integrante de mi familia padres, hermanos, sobrinos y cuñados por acompañarme en este proceso, quienes me han ayudado a superar todos los obstáculos, grandes y pequeños, y me han animado a persistir.

A mi compañero de vida por su paciencia, comprensión y solidaridad acompañándome en este proyecto, animándome a crecer como persona y como profesional.

El camino hacia la culminación de mi trabajo académico habría sido mucho más complicado sin el apoyo y la motivación de todos los individuos aquí nombrados.

RESUMEN

Este proyecto de investigación tiene como objetivo caracterizar el razonamiento algebraico que pretende promover el plan curricular nacional chileno en sus libros de textos y plan de estudios de matemática de enseñanza media (estudiantes entre 14 y18 años). Para lograr este objetivo central del proyecto se analizaron las prácticas matemáticas que emergen del curriculum nacional de matemática chileno, y los objetos y procesos movilizados en él. Para el desarrollo de esta investigación se adoptó como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemáticos (EOS), principalmente la herramienta teórica metodológica: niveles de razonamiento algebraico. La metodología a utilizar se inscribe dentro del enfoque cualitativo.

En particular, este trabajo se desarrolla en cuatro capítulos fundamentales donde se detallan:

- Capítulo 1. Se presentan los antecedentes y el área problemática en la cual se pretende investigar, fundamentando con base en la literatura nacional e internacional la importancia del objeto matemático estudiado.

- Capítulo 2. En este capítulo, se presenta el sustento teórico del problema abordado, dichos sustentos se apoyan en constructos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) y los niveles de razonamiento algebraico. Además, en cuanto a los aspectos metodológicos, se detalla la utilización de una metodología cualitativa.

- Capítulo 3: En este capítulo, se analizan los libros de texto y el plan de estudios de 1° a 4 medio, con un análisis descriptivo de las prácticas matemáticas de las respuestas esperadas y el nivel de razonamiento que promueven.

- Capítulo 4: En este capítulo se presentan las conclusiones como las características del razonamiento algebraico que promueve el curriculum nacional de matemática.

Palabras clave: razonamiento algebraico, libros de texto, plan curricular, niveles de algebrización.

ABSTRAC

This research project has as objective to characterize the algebraic reasoning that the Chilean national curriculum plan intends to promote in its textbooks and high school mathematics curriculum. To achieve this central objective of the project, the mathematical practices that emerge from the Chilean national mathematics curriculum, and the objects and processes mobilized in it, were analyzed. For the development of this research, the Ontosemiotic Approach of Mathematical Knowledge and Instruction (EOS) was adopted as a theoretical framework, mainly the methodological theoretical tool: levels of algebraic reasoning. The methodology to be used is part of the qualitative approach.

This research is developed in four fundamental chapters:

- Chapter 1. The background and the problematic area in which it is intended to investigate are presented, basing the importance of the mathematical object studied on the basis of national and international literature.

- Chapter 2. The theoretical support of the problem addressed is presented, these supports are backed-up by constructs of the Ontosemiotic Approach (EOS) and the levels of algebraic reasoning. In addition, about the methodological aspects, the use of a qualitative methodology is detailed.

- Chapter 3: The textbooks from high school are analyzed, with a descriptive analysis of the mathematical practices of the expected answers and the level of reasoning that they promote.

- Chapter 4: The conclusions are presented as the characteristics of algebraic reasoning promoted by the national mathematics curriculum.

Keywords: algebraic reasoning, textbooks, curricular plan, algebraization levels.

TABLA DE CONTENIDOS

INDICE TABLAS

INDICE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En este proyecto abordamos un problema característico de la investigación en didáctica de la matemática, entendida como disciplina tecno-científica (Godino, 2010), sobre un contenido matemático básico e instrumental como es el álgebra escolar, aplicando la perspectiva holística que proporciona el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012). Diversas perspectivas teóricas e investigaciones apoyan la importancia del álgebra a lo largo del sistema educacional y las diferentes formas de su implementación. Sin embargo, tal y como lo señalan Kaput y Blanton (2000), la diversidad es una de las razones por la que tales innovaciones han tenido dificultades para su implantación. Se reconoce que no se tiene una posición suficientemente explícita sobre la naturaleza del razonamiento algebraico.

Esta situación nos hace cuestionarnos sobre los rasgos característicos del razonamiento algebraico que permiten discriminar diversos niveles de algebrización, en particular distinguir las prácticas de índole algebraica de las que no lo son. Es por esto, que tras el estudio de la bibliografía correspondiente hemos considerado utilizar los Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar para analizar el curriculum nacional chileno en la unidad de álgebra en la enseñanza media.

Así, esta tesis se divide en cuatro capítulos, en los cuales se detallan: 1) El área problemática y los antecedentes que dan sustento a esta investigación; 2) marco teórico, problema de investigación y metodología empleados; 3) Estudio y análisis de los datos obtenidos a través de en el curriculum nacional; y finalmente, 4) conclusiones e implicaciones que fueron posibles de extraer a raíz de esta investigación.

CAPÍTULO 1

ÁREA PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES

1.1. Introducción

En este capítulo se presentan aspectos generales sobre algunas investigaciones desarrolladas en el campo de la Educación Matemática y centradas en el estudio del objeto matemático *razonamiento algebraico.* Dichos estudios han permitido orientar y enmarcar el rumbo de este proyecto, es decir, se ha logrado identificar una problemática y, por ende, establecer una serie de objetivos y preguntas de investigación con la finalidad de aportar una solución parcial a esta.

1.2. Las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra y la importancia del razonamiento algebraico

El uso y aprendizaje del álgebra a lo largo de la historia de la didáctica de las matemáticas, ha sido un objeto de estudio que ha apasionado a diversos investigadores y resultado de esto se han evidenciado diversas dificultades tanto en alumnos como en profesores. Como lo enuncian Godino y Font (2003), dentro de los establecimientos educacionales existe una concepción de la enseñanza del álgebra como una "aritmética generalizada". Esto se puede interpretar del hecho que el álgebra es usada como una combinación y manipulación de letras, que solo son vistas como una forma de representar números, lo que conlleva a una mala interpretación de la significancia del álgebra y su aprendizaje, pero que desafortunadamente es recurrente en el ámbito escolar.

Las investigaciones en esta área han tratado de detallar la problemática del aprendizaje del álgebra lo más minuciosamente posible, buscando el origen y causas de esta problemática incluyendo la búsqueda de soluciones. En la literatura se expresa que las dificultades se deben en gran parte, a la naturaleza misma del álgebra, los elementos que la componen, las reglas que la rigen y su lenguaje.

Además, se han reportado las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en la escuela secundaria (Wagner y Kieran, 1989, Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Filloy, Puig y Rojano, 2008), dificultades que se centran en la necesidad de manipular letras y dar significado, lo que supone un cambio notable en las convenciones usadas en la aritmética (Kieran, 1992). Los estudiantes tienen dificultades con la resolución de problemas algebraicos, dada su experiencia con los problemas aritméticos, por ejemplo, en la mayoría de los casos interpretan la expresión sólo como el procedimiento de añadir 3 a, mientras que en álgebra esta expresión, además de representar el procedimiento de añadir 3 *a* también es un objeto visto como en su "totalidad", los cuales pueden ser resueltos directamente, si es necesario con respuestas intermedias, mientras que, en los problemas algebraicos, por otro lado, necesitan ser traducidos y escritos en representaciones formales primero, para poder ser resueltos (Ameron, 2002). Dificultades como éstas quedan recogidas en diversas investigaciones (e.g., Kieran, 1992, 2004; Sfard, 1987) que manifiestan que los estudiantes tienen: a) una limitada interpretación del signo igual, b) errores sobre el significado de las letras, c) rechazo a aceptar una expresión como como respuesta a un problema, d) dificultad al resolver ecuaciones con variables en ambos lados del signo igual, y e) el hecho de que para cubrir su falta de comprensión, los estudiantes tienden a recurrir a la memorización de reglas y procedimientos y, eventualmente, llegan a creer que esta actividad es la esencia del álgebra.

Estas dificultades por parte de los ejecutores están relacionadas con la complejidad que se sospecha que presentan la abstracción y la generalización en las acciones que se realizan en álgebra, donde se enfatiza en la abstracción de las acciones que se solicitan como una de las razones que originan las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de este objeto (Breiteig y Grevholm, 2006).

Debido a esto, la generalización ha tomado un papel primordial, siendo un rasgo característico del razonamiento algebraico, ya que es un medio para expresar situaciones a través de incógnitas y ecuaciones por medio de un lenguaje específico (Cooper y Warren, 2008). Esta generalización se puede expresar inicialmente de manera gestual hasta que se consolide a través del lenguaje algebraico.

Es aquí donde toma un papel principal el razonamiento algebraico, ya que implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades, por lo mismo lo definen como "…una forma de pensar y actuar matemáticas, caracterizada esencialmente por la dialéctica entre procesos de generalización- particulación, y, en consecuencia, por la intervención y emergencia de los objetos intensivos de niveles progresivos de generalidad" (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012, p. 507). A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico. Este tipo de razonamiento está profundamente relacionado con el uso de los patrones y desde este uso se podría promover desde los primeros años de escolaridad. Por lo mismo es que diversas investigaciones proponen introducir ideas incipientes del álgebra en los primeros niveles de educación básica

(Godino y Font, 2003).

Un ejemplo de esto es el programa de investigación y desarrollo en que se basa “early álgebra” (Cai y Knuth, 2011), este se apoya en la concepción de que el álgebra reconoce los primeros pensamientos algebraicos en actividades matemáticas desde los primeros niveles educacionales. Además, este programa ha sido uno de los más destacados dentro de la didáctica de las matemáticas por fomentar el pensamiento algebraico inicial. Se desea que esta introducción del razonamiento algebraico en los primeros años de escolaridad sea accesible para todos los estudiantes, pero también se afirma que esta introducción puede traer dificultades si no se encuentra articulada de manera paulatina y coherente con la escolaridad anual que corresponde a cada nivel educacional (Kaput y Blanton, 2001).

Diversos investigadores han apoyado la inclusión temprana del álgebra en las escuelas desde primaria; por ejemplo, Butto y Rojano (2004) mencionan que introducir el razonamiento algebraico en temprana edad es factible, ya que parten de la suposición que ese desarrollo es un proceso paulatino. Al igual que Carraher, Schliemann y Schwartz (2007), quienes reconocen que el álgebra tiene lugar en los primeros grados escolares.

A partir de todo lo discutido aquí, es evidente que la implementación del álgebra desde los primeros años de escolaridad que se está efectuando en la actualidad fortalece y promueve el razonamiento algebraico elemental siendo un área de investigación importante en la educación matemática. Pero hay que destacar la importancia de la transición del razonamiento algebraico elemental que presenta al inicio del proceso escolar en enseñanza básica hacia el razonamiento algebraico presente en los primeros años de enseñanza media del currículum de matemáticas chileno. Por ello, no se debe dejar de lado lo que sucede con el álgebra en secundaria/bachillerato y el proceso que se ocurre en razonamiento algebraico de los estudiantes.

1.3. Razonamiento algebraico en la Enseñanza Media

Los estudios históricos sobre la evolución de la enseñanza del álgebra en el siglo XXI, muestran que el álgebra estudiada en la escuela secundaria no ha cambiado mucho con los años (Ameron, 2002). Esto se puede deber a la desconexión que existe entre el álgebra y las otras áreas de las matemáticas, y la total ausencia de significado que tienen los alumnos sobre el aprendizaje algebraico, lo que finalmente provoca que un número importante de estudiantes de secundaria fracasen en la algebrización (Kieran, 1992).

Además, los estudiantes tienen dificultades con la resolución de problemas algebraicos, ya que tienen experiencia resolviendo ejercicios aritméticos que se resuelven de forma directa e incluso de manera inmediata, lo que no ocurre con los problemas algebraicos ya que necesitan ser traducidos y escritos en representaciones para poder resolverlos (Ameron, 2002). Esta problemática y secuencia tradicional de la enseñanza del álgebra es ampliamente reconocida, ya que se requiere de hábitos mentales que se involucran con las actividades algebraicas de los estudiantes y lo que se busca es hacerla accesible a todos y una manera eficaz de enseñarla (Molina, 2007).

Dada la importancia del razonamiento algebraico durante todo el proceso escolar descrito y evidenciado anteriormente, es que el rol del profesor toma protagonismo tanto en su conocimiento como en sus competencias dentro del área, siendo ellos unos posibles agentes de cambio respecto a la promoción del razonamiento algebraico a través de su labor. Esta labor ha sido también parte de investigaciones, dando como resultado que los profesores no están preparados para reconocer el razonamiento algebraico que expresan los niños a la hora de resolver planteamientos (Kaput, 2000). Tampoco promueven el desarrollo del pensamiento algebraico como parte de sus instrucciones regulares de clases (Blanton y Kaput, 2003)

Es por esto que, si lo que se quiere es desarrollar el razonamiento algebraico en los estudiantes, el profesor deberá ser el protagonista, ya que no se desarrolla de manera natural, no es algo que aparezca de un día a otro, se desarrolla de forma paulatina a través de reflexión por periodos de tiempo que se relacionan con la escolaridad (Radford, 2011). Y durante el proceso es que debe estar el profesor apoyando y guiando a los estudiantes. Por lo mismo, es necesario que los profesores participen ampliamente del objeto algebraico proponiendo diversas experiencias didácticas, para promover las transformaciones de tareas matemáticas hacia el logro de niveles progresivos de algebrización (Aké, Godino y Castro, 2015); esto con el fin de que estén capacitados para identificar las características de las tareas que proponen y que se desarrollan en sus aulas de clase, y que fomenten progresivamente la algebrización.

Lo anterior, supone entonces un reto también en la formación de profesores, ya que su formación debe contemplar la visión ampliada del álgebra que se desea desarrollar, por lo que se les exige un cambio en su concepción acerca del álgebra para dar paso al desarrollo del razonamiento algebraico elemental, a través de tareas que permitan reconocer el nivel de razonamiento algebraico que producen los estudiantes en su actividad matemática (Aké, 2013).

Debido a la relevancia del rol del profesor, se destaca la importancia de los futuros profesores sus conocimientos y competencias sobre el razonamiento algebraico, y aunque se ha avanzado mucho en la caracterización del álgebra y su razonamiento, tanto en estudiantes como en profesores, el problema no está completamente resuelto, principalmente en la conexión del álgebra de primaria con el álgebra de secundaria.

En ese sentido se evidencian diferentes tipos de posicionamientos, por ejemplo, Kieran (2007), elabora un modelo que sintetiza las actividades del álgebra apoyándose en propuestas de diversos autores, los tres tipos son: generacional (donde se formulan expresiones y ecuaciones), transformacional (basado en reglas como el uso de términos semejantes, factorizaciones, entre otros), y global o de meta-nivel (procesos matemáticos generales, como, resolución de problemas, modelización)

Además, Godino (2012) considera que la distinción de niveles de razonamiento algebraico elemental puede ser útil en la formación didáctico-matemática de profesores que les permitirá generar el sentido algebraico. Con ello podrían reconocer rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales podrían intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos. Por lo que para que los alumnos vayan construyendo el sentido algebraico los profesores deben también tenerlo y saber cómo desarrollarlo.

Para Radford (2006) el pensamiento algebraico, es una forma particular de reflexionar matemáticamente, es caracterizado por tres elementos interrelacionados: 1) El sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro; opuesto a la determinancia numérica) 2) La analiticidad (como forma de trabajar los objetos indeterminados; reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos). 3) La designación simbólica de sus objetos (manera específica de nombrar o referir los objetos). Se reconoce que los objetos matemáticos son objetos «generales», y la actividad matemática es esencialmente simbólica, además, la necesidad de reflexionar explícitamente sobre la relación entre el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de generalización.

A partir de lo planteado anteriormente se genera, como exigencia para el profesor, la necesidad de tomar conciencia sobre requerimientos para posibilitar el desarrollo del pensamiento algebraico, a través del diseño e implementación de actividades, en diferentes contextos, para potenciar en los estudiantes formas diferenciadas de pensamiento algebraico.

1.4. El razonamiento algebraico en los libros de texto

Esta gran insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales que están involucrados en actividades algebraicas, y la preocupación por hacer del álgebra accesible a todos los estudiantes, han conducido a buscar una forma más efectiva de enseñarla (Molina, 2007). Por lo que se debe destacar la importancia del libro de texto, ya que él es un recurso primordial para las diferentes áreas de aprendizaje, por ser uno de los apoyos en la planificación de las clases para los profesores, por lo que a menudo, regulan las acciones de enseñanza y aprendizaje en el aula (Cordero y Flores, 2007). El estudio de estos permite tener en consideración los resultados de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), lo que en otras palabras, se puede observar los cambios que experimenta el conocimiento matemático al ser adaptado para su enseñanza. Estos textos adaptan los objetivos y contenidos definidos en las directrices curriculares y son un paso previo al currículo implementado en el aula (Herbel, 2007).
Los libros de texto están diseñados para presentar tareas matemáticas en diferentes contextos, lo que permite presentar al estudiante con las aplicaciones de la matemática, a la vez que permiten a los estudiantes explorar diferentes ideas y facilitan el aprendizaje (Reys, Reys y Chavez, 2004). Ortiz (2002), señala que son una fuente de datos, situaciones, actividades y contenidos para el aula y que resultan de un gran apoyo para la tarea docente, siendo la principal herramienta en la planificación y síntesis. Por esto mismo es fundamental realizar investigaciones que estudien las tareas que se proponen y si estas están cumpliendo con las acciones y objetivos que se describen. En este sentido, diversos estudios se han desarrollado en torno al razonamiento algebraico que se promueve con las prácticas sugeridas en los libros de texto de diversos países.

Siendo uno de esos estudios realizado por Castro, Martínez-Escobar, y Luis R. Pino-Fan (2017), en el cual se contrasta los niveles de algebrización del Enfoque Ontosemiótico en las tareas propuestas en cinco libros de texto, usados en la primaria en Colombia, con los desempeños de niños cuando resuelven tareas algebraicas propuestas en libros de texto. Los resultados obtenidos señalan que, si bien los niveles son útiles para asignar grados de algebrización a las tareas propuestas en la colección, y predicen cierta actividad algebraica desarrollada por los niños, la variedad de tareas en los textos y las prácticas que podrían realizar los niños son muy amplias y los criterios no dan cuenta de ellas.

En este mismo sentido, Aké y Godino (2018) realizan una investigación sobre la naturaleza de las tareas planteadas en los libros de texto oficiales de primaria en México, queriendo determinar si las tareas del libro de texto de primero de primaria están orientadas a promover el desarrollo del pensamiento algebraico en niños de 6 a 7 años. Concluyen que las tareas presentadas en el libro de texto no están intencionalmente dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico en los niños de primero de primaria, pero se evidencia que es posible orientarlas hacia grados progresivos de algebrización.

Además, Alencar (2021) realiza una investigación en donde pretende identificar los tipos de tareas para enseñar secuencias y patrones de dos libros de texto de primer grado de primaria, de los cuales uno libro texto es colombiano y otro brasileño. En el identificaron que las tareas analizadas en el libro de texto colombiano mostraron más incentivos para el estudio de secuencias y patrones que el identificado en el libro de texto brasileño. Por lo que, la organización y propuesta del libro colombiano promueve una mayor reflexión y acceso a contenidos matemáticos.

Uno de los ultimas publicaciones en relación al estudio de libros de texto es realizado por Alsina y Pincheira (2021), en el cual analizaron las tareas de álgebra temprana en una colección de ocho libros de texto de Educación Primaria chilenos. En ella concluyen que es necesario brindar experiencias de formación al profesorado que les permita, por una parte, profundizar en el análisis de tareas matemáticas que promuevan el desarrollo del pensamiento algebraico temprano para alcanzar una adecuada selección e implementación de dichas tareas y, por otra parte, indagar en la actividad matemática que deben desarrollar los estudiantes para su resolución.

Finalmente es importante destacar que el estudio y análisis del libro de texto es uno de los objetivos que están en la contingencia actualmente en la didáctica de la matemática, como fue evidenciado en las investigaciones anteriormente mencionadas.

1.5. Aproximación al problema de investigación

Según todos los fundamentos y antecedentes mencionados en este apartado, se puede proporcionar una idea de la cantidad de trabajos de investigación realizados en torno al álgebra escolar. Aun así, las dificultades siguen persistiendo, por lo que hay que seguir indagando. La investigación puede ayudar a comprender cómo los alumnos construyen conceptos y aprenden procedimientos complejos. Puede sugerir actividades para el aula que fomenten las conexiones y que llevan a la comprensión de conceptos., lo que se traduciría en un aprendizaje más eficiente por los estudiantes. Por lo que, es evidente que uno de los retos presentes en la didáctica de las matemáticas sigue siendo desarrollar investigaciones donde se pueda caracterizar y comprender el razonamiento algebraico que se desea promover en la enseñanza media.

Todo esto considerando los factores expuestos en este capítulo como lo es la importancia del razonamiento algebraico en consideración a las investigaciones publicadas en área de la didáctica de la matemática, como también la aplicación del álgebra desde los primeros años educaciones, hacia una transición expedita y colaborativa a la enseñanza media y universitaria, siempre teniendo en consideración la importancia del curriculum de cada país en el eje de álgebra considerando sus planes y programas y sobre todo sus libros de texto.

Mediante el uso de las herramientas del Enfoque Ontosemiótico se han realizado investigaciones para evaluar las competencias iniciales de razonamiento algebraico elemental de futuros profesores de educación primaria, además de experiencias orientadas a promover el desarrollo de dichas competencias y análisis del libros de texto en el área del razonamiento algebraico, estos aportes son muy relevantes, y con ellos se abren aún más temas de investigación relacionadas con en el área del razonamiento algebraico que se presenta en enseñanza media/secundaria, teniendo una directa implicancia con la formación de profesores para la mejora del razonamiento algebraico en enseñanza media.

Finalmente, en este trabajo pretendemos precisar sobre el álgebra que permite, reconocer en las actividades matemáticas escolares, rasgos o componentes algebraicos desarrollados progresivamente en el curriculum nacional chileno. El problema de investigación se sitúa en el álgebra bajo la perspectiva de promover el razonamiento algebraico en los niveles en enseñanza media considerando las consecuencias negativas en la formación matemática de los estudiantes, que son derivadas de malas experiencias en su formación, por lo que se intentará identificar una de las condiciones que intervienen para proponer mejorar en el aprendizaje y enseñanza del álgebra escolar.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

2.1. Introducción

Este capítulo contiene aspectos relevantes sobre la presente investigación, en él se presentan los aspectos teóricos y metodológicos que sustentan a esta. El capítulo está divido en tres apartados, en el primero de ellos se presentan las "herramientas" y nociones teóricas de esta investigación, concretamente se presentan nociones desarrolladas en el contexto del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, así también los niveles de razonamiento algebraico En el segundo apartado, considerando las nociones teóricas y los aspectos metodológicos, se establecen las preguntas y objetivos de investigación, así mismo se describen para cada uno de ellos, distintas fases y tareas encaminadas a la consecución de cada uno de dichos objetivos. En el tercer apartado, se describe la metodología empleada para cada fase de la investigación.

2.2 Marco teórico

En este apartado se mostrarán los diversos elementos que compondrán el marco teórico de este proyecto que servirán para orientar esta investigación.

2.2.1 El enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

Este enfoque es un marco teórico que ha surgido al seno de didáctica de las matemáticas que ha sido desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994, 1998; Godino 2002, 2012; Godino, Batanero y Font, 2007), con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. El EOS se apoya y nutre de aportaciones de las diversas disciplinas y tecnologías interesadas en la cognición humana: epistemología, psicología, sociología, semiótica y ciencias de la educación (difusión y desarrollo del conocimiento en las instituciones educativas).

En esta investigación hemos optado por uso debido a que nos provee de diversas herramientas teóricas y metodológicas para poder analizar el curriculum nacional de matemática chileno (el plan de estudio y problemas que se presentan en los libros de texto).

Actualmente el conjunto de nociones teóricas que componen al EOS se clasifican en cinco grupos cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas (Godino, 2012):

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas; este nivel se basa en la descripción de la secuencia de las prácticas matemáticas, durante las cuales se activa un agente (institución o persona), que realiza la práctica y un medio donde se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.).

2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; su finalidad es describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en cuenta la diversidad de objetos y procesos.

3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas; este nivel se centra en las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico.

4. Identificación del sistema de normas y metanormas; en este nivel se considera que tanto las prácticas matemáticas como las interacciones están condicionadas y soportadas por un conjunto de normas y metanormas que regulan las acciones y que deben ser analizadas.

5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio; este nivel se ocupa del análisis de tipo valorativo, en el cual se evalúa la pertinencia del proceso de instrucción matemática y, además, se señalan pautas para la mejora del diseño e implementación de proceso de estudio.

Dados los objetivos que se persiguen con el trabajo de investigación, en este se utilizará el primer y segundo nivel de análisis propuesto dentro del EOS, el primero se orienta a describir las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado. El segundo es la interacción de objeto y de los procesos que se pretenden desarrollas en cada una de las situaciones a analizar.

Cabe señalar que, para precisar los objetivos de investigación, requerimos de algunas nociones teóricas, por lo que los presentaremos con detalle después de esta sección de marco teórico.

La realización de una práctica es algo complejo que moviliza diferentes elementos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etcétera). Puesto que el agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, es necesario considerar también, entre otros aspectos, fines, intenciones, valores, objetos y procesos matemáticos, sin embargo, estos últimos no serán analizados en este trabajo. El EOS considera práctica matemática “a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizar a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

Las prácticas se determinan desde dos perspectivas, las personales, es decir, idiosincrásicas de una persona, o bien, las compartidas en el seno de una institución, prácticas institucionales. Se entiende por institución al conjunto de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento.

Objeto matemático: Es cualquier entidad o cosa referida en el discurso matemático. El objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. (Godino, Batanero, Font, 2007).

Además de los elementos mencionados y descritos que serán utilizados en este estudio, el enfoque presenta una herramienta teórico metodológica relacionada con las prácticas, objetos y procesos en la actividad matemática que contempla el concepto de razonamiento algebraico, que se describe a continuación.

2.2.2 Niveles de razonamiento algebraico

En el EOS se delimitaron distintos niveles que se basan en los procesos y tipo de objeto matemático que se producen en la actividad matemática (Godino, Batanero y Font 2007). Para precisar se presentan niveles de algebrización en los cuales se asignan a la actividad matemática que realiza una persona la hora de responder a una tarea o problema matemático, no a las tareas en sí, ya que estas se pueden resolver de distintas formas.

Inicialmente el EOS en manos de Godino, (2014) propone categorías que permiten definir distintos niveles de algebrización elemental para primaria los cuales están definidos en función de objetos, significados y procesos que se requieren y surgen durante la solución de una tarea matemática; los cuales se describen a continuación.

Ausencia del razonamiento algebraico (Nivel 0)

Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.” (Godino et al., 2014, p. 9)

Nivel incipiente de algebrización (Nivel 1)

Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

Nivel intermedio de algebrización (Nivel 2)

En este nivel intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal, intervienen objetos intensivos comunes que están en concordancia con el lenguaje común. En situaciones planteadas donde intervienen las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En planteamiento existe generalidad, pero no se opera con las variables por lo que no se obtiene formas canónicas de expresión.

Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3)

Algebrización de la actividad matemática Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Los siguientes niveles comienzan en el nivel 4 en el que se reconoce la importancia del uso de parámetros como un registro numérico y para expresar familias de ecuaciones y funciones, el nivel 5 es el tratamiento de los parámetros donde se realizan cálculos analíticos que intervienen los parámetros y variables, finalmente el nivel 6 donde interviene la introducción de estructuras algebraicas y el álgebra de funciones. (Godino, Neto, Wilhelmi, Etchegaray, Lasa, 2015)

Cuarto nivel de algebrización: uso de parámetros

En este nivel se reconoce la introducción de los parámetros, estos pueden ser registrados como numéricos y para expresar familias de ecuaciones y funciones. Godino et al. (2014). Se realizan procesos que están relacionados "operar con la incógnita o con la variable". En esta aparecen los parámetros y variables, dejando atrás el uso números con relación a las expresiones algebraicas. Por lo que llamaremos a este nivel como uso de parámetros.

Quinto nivel de algebrización: tratamiento de parámetros

El quinto nivel algebrización se liga a la actividad matemática desarrollada cuando se realizan cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen uno o más parámetros, conjuntamente con otras variables, las soluciones se escriben en función de los coeficientes ligados a través de operaciones racionales y se puede utilizar un lenguaje metafórico referenciando el proceso. Por que en este nivel la intervención de los parámetros se realiza de manera comprensiva y no siguiendo un algoritmo entregado. Por que se pueden apreciar familias de ecuaciones y de funciones y tendrán un uso concreto de los parámetros realizando tratamientos intencionados.

Sexto nivel de algebrización

Este nivel es la introducción de algunas estructuras algebraicas que usualmente se relacionan con el estudio de conceptos más complejos, como espacio vectorial, o la estructura de grupo, estos temas que se inician en los primeros años universitarios o en algún plan de profundización relacionada con el algebra avanzada, en ella actúan objetos y procesos algebraicos de mayor grado de generalidad, donde las operaciones realizadas cumplen un sistema de propiedades específicas, además existen relaciones entre las propiedades de los elementos que se presentan en las tareas.

Hemos mencionado estos niveles de razonamiento algebraico permiten caracterizar las prácticas que realiza un individuo en problemas matemáticos. Por lo que se vincularán de los niveles de razonamiento algebraico con el curriculum de enseñanza medio de matemática nacional.

2.3 Pregunta, objetivos de investigación

Con base en lo expuesto anteriormente, en este proyecto se tratará de responder la siguiente pregunta:

¿Cuáles son las características del razonamiento algebraico promovido por el curriculum chileno de matemática de enseñanza media?

Para contestar esta pregunta se tendrá presente un objetivo general y algunos objetivos específicos.

Objetivo general

Caracterizar el razonamiento algebraico que pretende promover el plan curricular nacional chileno en sus libros de textos y plan de estudios de matemática de enseñanza media.

Objetivos específicos

Para lograr el objetivo general antes mencionado se proponen los siguientes objetivos específicos:

OE1: Determinar el tipo de razonamiento algebraico que, en la literatura científica, se sugiere promover en los estudiantes de enseñanza media.

OE2: Estudiar e identificar el tipo de situaciones (problemas, tareas, ejercicios, etc.) y sus soluciones, con los cuales el curriculum chileno de matemática de enseñanza media, considerado el plan de estudio y libros de texto, desarrolla razonamiento algebraico.

OE3: Analizar las prácticas matemáticas identificadas en OE2, y los objetos y procesos movilizados en ellas, asociándolas con algunos de los niveles de razonamientos algebraicos propuestos al seno del Enfoque Onto semiótico.

2.4 Metodología

Dados los objetivos pretendidos en este trabajo, se considera el método de investigación ligado a la metodología cualitativa (Creswell, 2009); el cual es un proceso que recolecta, analiza y vincula datos para responder las preguntas de investigación que se planteen.

Para la obtención de cada uno de los objetivos específicos de este proyecto, se proponen acciones investigativas que se presentan y describen en fases que serán parte de este trabajo de investigación.

Fase 1: En la primera etapa, se recogen de las diversas investigaciones leídas sobre del uso del razonamiento algebraico y sobre su introducción en los establecimientos educativos. A través de la literatura, sobre la caracterización del álgebra en el tiempo.

Fase 2: Se revisará el curriculum nacional chileno, considerando el plan curricular (objetivos de aprendizaje) los libros de texto de enseñanza media (1° a 4° medio), específicamente los problemas presentes en el eje temático de álgebra.

Fase 3: Se analizarán las prácticas matemáticas que se pretende desarrollar en el curriculum nacional chileno de enseñanza media, categorizando los resultados de manera cualitativa en el uso de los niveles de razonamiento algebraico.

2.4.1 Instrumentos recolección datos

Para el desarrollo del estudio consideramos básicamente dos instrumentos: 1) Plan de Estudios, propuestos por el ministerio de educación chilena para los niveles de enseñanza media 1º medio, 2 ° medio, 3° medio y 4° medio; y 2) Libros de texto, los cuales son sugeridos en los planes de estudio de los niveles correspondientes.

Plan de estudios: Es el programa del Ministerio de Educación que tienen las instituciones para asegurar el proceso de enseñanza - aprendizaje de la asignatura matemática. Analizaremos la secuencia de los objeticos de aprendizaje pretendidos en él, en el eje de álgebra y funciones.

Libro de texto: Se analizaron los libros de texto realizados por el ministerio de educación chileno 2021 de 1° a 4° medio, en el eje de algebra y funciones. Los libros de texto son el instrumento principal que promueve el currículo en Chile, además en una herramienta en la labor docente. El libro se compone por los contenidos, ejemplos de ejercicios y ejercicios para resolver.

2.4.2 Técnicas para análisis de datos

Para el análisis cualitativo de los datos obtenidos del análisis del plan curricular de matemática chileno hemos considerado la respuesta esperada (respuestas que según la interpretación del libro es lo que se busca que el estudiante pueda responder) y tipo de configuración epistémica (los objetos y procesos puestos en juego en las respuestas esperadas).

Respecto de esta última variable (tipo de configuración epistémica), se utilizó la técnica de análisis denominada análisis semiótico (Godino, 2002; Malaspina y Font, 2010; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011), la cual permite describir tanto la actividad matemática realizada en situaciones-problemas, como los objetos matemáticos primarios que intervienen en las prácticas que permiten la resolución de estas tareas (Godino, Batanero y Font, 2007), determinando de esta manera el nivel de razonamiento algebraico que se presenta.

CAPÍTULO 3

ANALISIS DEL CURRICULUM

3.1. Introducción

En este capítulo se realiza un análisis de ejercicios y problemas que presenta en el libro de texto de los estudiantes desde primero medio hasta cuarto medio de Chile, en la unidad de álgebra y funciones, para determinar el nivel de razonamiento algebraico que se desea movilizar en las tareas y actividades que se presentan. Esto se realizará por cada curso desde el primer nivel de enseñanza media, comenzando con el análisis de los objetivos de aprendizaje para categorizar de manera a priori el nivel de razonamiento algebraico que se desea movilizar en cada curso, para luego verificar si esto se condice con las tareas (ejercicios, problemas, etc.) y las prácticas que se presentan en la unidad.

3.2. Análisis del Plan de Estudios y Libro de Texto de Primero Medio

El libro de texto de primero medio contine 232 páginas, está dividido en cuatro ejes de curriculares (o temáticos) siendo de interés para esta investigación el eje de *álgebra y funciones*, donde se encuentran los contenidos productos notables (p. 42-48), sistema de ecuaciones lineales (p. 66 - 75) y relaciones de dos variables (p. 80 – 86).

Los objetivos de aprendizaje de este curso se presentan en la tabla 3.1, donde se detallan la división de la unidad de álgebra y funciones en sus tres temas y con una aproximación a priori del nivel de razonamiento que se pretende movilizar dado un preanálisis de las características del objetivo de aprendizaje.

Tabla 3.1. Objetivos primero medio

Temas	Objetivos de aprendizaje	Nivel a priori de razonamiento algebraico
Productos notables	Desarrollar los productos notables de manera concreta pictórica y simbólica	Tercer nivel

Sistema de ecuaciones lineales	Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas mediante representaciones gráficas y simbólicas de manera manual o con software.	Tercer nivel
Relación lineal entre dos variables.	Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x,y) = ax + by$, como un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel, prolongación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas	Tercer nivel

Como hemos visto, hemos identificado que los objetivos de aprendizaje propuestos en primero medio para el eje temático de álgebra estarían movilizando el nivel 3 de razonamiento algebraico, esto se debe a que en la propuesta de Godino (2014), en dicho nivel se contempla el estudio del tratamiento de las incógnitas y variables aplicando propiedades estructurales. De hecho, esto se corresponde con la sugerencia dada por Godino (2014), quien indica que el nivel 1 al 2 está establecido para los primeros años de enseñanza básica, los niveles 3, para la enseñanza en secundaria o primero medio en Chile

A continuación, vamos a identificar y analizar el tipo de situaciones problemas y tareas que presenta cada uno de los contenidos mencionados en el texto. Por lo que se realizará una descripción de lo que pretende movilizar este tipo de tarea revisando un ejemplo con la respuesta esperada, los objetos y procesos que se movilizan y se analizará el tipo de nivel algebraico que se promueve. Es importante mencionar que existe una gran cantidad de estas tareas presentes en el libro de texto y que dado la cantidad solo se mostrara un ejemplo de cada uno de ellos, finalizado el contenido se muestra una tabla resumen que identifica la cantidad de problemas con las mismas características del contenido.

3.2.1 Productos notables

Para facilitar y ordenar el contenido y el análisis posterior, pudimos clasificar las tareas propuestas en ocho subtipos, tomando en cuenta lo que pretenden movilizar cada una de ellas: *Cálculo del área dada una figura*, *Cálculo del producto notable*, *Cálculo de área*, *Problema contexto real*, *Actividad de profundización*, *Determinar el producto notable* y *Completar recuadro.* A continuación, analizamos cada tipología de tareas.

3.2.1.1 Cálculo del área dada una figura:

En este tipo de tareas se propone que el estudiante verifique a través de áreas de figuras conocidas con lados algebraicos los diferentes tipos de productos notables, ejemplo de esto se presentan en la Figura 3.1, que se presenta a continuación:

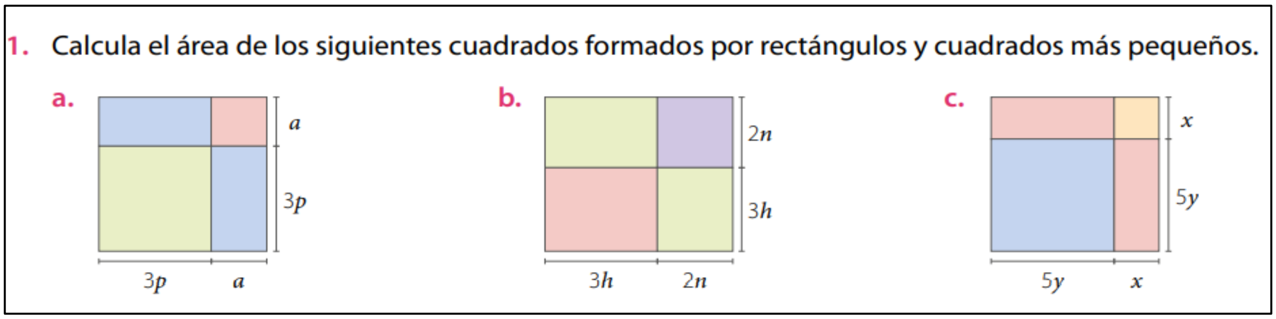


Figura 3.1. Cálculo de área dada una figura.

Solución esperada: Para esta tarea se espera es que el estudiante reconozca las longitudes de cada cuadrado y rectángulo reconociendo las medidas correspondientes, en la Figura 3.1 la tarea del inciso a. se pretende que reconozca que hay un cuadrado rojo de lado *a*, dos rectángulos azules con lados *a* y *3p* y un cuadrado verde de lado *3p*. para encontrar el área de cada figura geométrica, para finalmente encontrar el área total sumando las áreas encontradas.

Cuadrado rojo: $a \cdot a = a^2$

Rectángulo azul: $a \cdot 3p = 3ap$

Cuadrado verde: $3p \cdot 3p = 9p^2$

Área total = $a^2 + 6ap + 9p^2$

Objetos y procesos: representaciones de medidas a variables numéricas, multiplicación y suma de variables. Desde una figura se exponen medidas relacionas con incógnitas, estas se deben relacionar con figuras geométricas conocidas y aplicar procesos conocidos como lo es el área de cuadrados y rectángulos con incógnitas aplicando propiedades de potencias. Uso de relaciones binarias.

Nivel de algebrización: Se pone en juego el tercer nivel de algebrización, ya que se movilizan variables con lenguaje simbólico- literal, y se realizan operaciones con las variables.

3.2.1.2 Cálculo producto notable:

En estos ejercicios se solicita que los estudiantes desarrollen los productos notables mencionados a través de la forma abreviada que se presenta el libro con anterioridad, como se muestra en la Figura 3.2.

Desarrolla los siguientes productos notables.

a. $(5a - b)^2$	**d.** $(p^3 + 7)^2$	**g.** $(b + 12)(b + 7)$
b. $(v + 8)(v - 8)$	**e.** $(2d^3 + m)^2$	**h.** $(c^2 + 15)(c^2 - 8)$
c. $\left(v + \frac{1}{7}\right)\left(v - \frac{1}{7}\right)$	**f.** $\left(\frac{1}{c} + 3\right)\left(\frac{1}{c} - 3\right)$	**i.** $\left(u + \frac{1}{4}\right)\left(u - \frac{3}{7}\right)$

Figura 3.2 Cálculo productos notables

Solución esperada: Para el inciso a. se espera que el estudiante reconozca un cuadrado de binomio determinando el primer término como *5a* y el segundo término de la expresión como b utilizando su forma: el cuadrado del primer término, menos el doble del producto de los términos, más el cuadrado del segundo término. $(5a - b)^2 = (5a)^2 - 2 \cdot (5a) \cdot (b) + (b)^2$

Luego aplicar las propiedades de las potencias, resultando $25a^2 - 10ab + b^2$

Objetos y procesos: Uso de productos notables a través de su forma, representación de términos literales, uso de las propiedades de potencias en el desarrollo de las expresiones obtenidas y operaciones con términos algebraicos reduciendo al máximo la expresión obtenida luego de ser realizada. Las expresiones dadas son objetos extensivos del cuadrado de binomio, lo cual es un proceso de generalización de estos objetos.

Nivel de algebrización: Se categoriza en el tercer nivel ya que se requiere de la intervención de objetos algebraicos con tratamiento que se basan en las propiedades algebraicas y con uso de símbolos.

3.2.1.3 Cálculo de área

Se pretende que el estudiante pueda asociar las expresiones de los productos notables desarrollando su forma abreviada en la construcción de un área solicitada. Ejemplo de esto es lo solicitado en la

Figura 3.3.

Calcula según corresponda.

a. El área de un cuadrado de lado $(3s - p^2)$ cm.

b. El área de un rectángulo de lados $(p + 10)$ m y $(p - 10)$ m.

c. El área de un rectángulo de lados $(a + 2)$ cm y $(a + 12)$ cm.

Figura 3.3 Cálculo de área

Solución esperada: En la tarea se presentan tres incisos asociados cada uno al área un producto notable. En el inciso a. se pretende que el estudiante se percate que el área de un cuadrado está asociada al cuadrado de binomio por lo que se pretende desarrollar $(3p - p^2)^2$, como ya se a desarrollo con anterioridad en el libro de texto, a través de ejemplo, se pretende expresar y resuelver con su expresión. $(3p - p^2)^2 = 9p^2 - 6p^3 + p^4$

Objetos y procesos: Reconocer el tipo de producto notable relacionado con la figura y la medida de los lados con términos algebraicos, uso de productos notables a través de su forma, representación de términos literales, uso de las propiedades de potencias para desarrollar las operaciones algebraicas y reducir al mínimo la expresión obtenida del producto notable.

Nivel de algebrización: Se categoriza en el tercer nivel ya que se requiere de la intervención de objetos algebraicos se realizan tratamientos en la forma simbólicas para construir una expresión y con uso de símbolos.

3.2.1.4 Actividad de profundización

En las actividades de profundización son tareas que se presentan al final de cada contenido para ahondar en el contenido y asociarlo con contenidos de otros ejes, a continuación, un ejemplo en productos notables en Figura 3.4.

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN **Analiza y resuelve.**

a. Si $n = a^3 + 2$, ¿cuál es el valor de $(n + 8)^2$?

b. Si $p = 4 + \frac{n}{2}$, ¿cuál es el valor de $(p - 3)^2$?

c. Si $t = a + 1$, ¿cuál es el valor de $(t^2 - 1)^2$?

Figura 3.4 Actividad de profundización.

Solución esperada: Se pretende que en el inciso a. dado un valor para *n*, este pueda ser reemplazado en el cuadrado de binomio expresado quedando $((a^3+2)+8)^2$, desarrollando la expresión queda como un cuadrado de binomio $(a^3+10)^2$, siendo ahora factible desarrollar su forma, utilizando las propiedades de potencias y de cálculo de expresiones algebraicas. $(a^3+10)^2 = a^6+20a^3+100$

Objetos y procesos: Reconocer el tipo de producto notable al relacionar con la forma que se pretende, uso de productos notables a través de su forma, representación de términos literales, uso de propiedades de potencias y operaciones algebraicas. Se presentan expresiones como ejemplares particulares, por lo tanto objetos extensivos, que deben hacer uso del cuadrado de binomio para realizar las trasformaciones asociadas.

Nivel de algebrización: Se categoriza en el tercer nivel ya que se presentan objetos intensivos de manera simbólica y se desea que se operen con ellos, realizando trasformaciones de las expresiones presentadas como productos notables reconociendo su origen y conservando su equivalencia.

3.2.1.5 Determinar el producto notable

Se desea que el estudiante, dado el desarrollo del producto notable, pueda reconocer el tipo de producto notable y la expresión algebraica asociada a un lado de una figura geométrica, como se puede ver en la Figura 3.5.

Determina el cuadrado de binomio cuyo desarrollo corresponde a cada trinomio.

a. $z^2+16z+64$ **b.** $4a^2+4ab+b^2$ **c.** a^4+6a^2+9 **d.** $p^2-14p+49$

Figura 3.5 Determinar el producto notable

Solución esperada: Se presentan diferentes trinomios que representan el desarrollo de un cuadrado de binomio por lo que se solicita determinar la expresión del producto notable. En el inciso a. se desea que se reconozcan los términos de la forma, cuando z^2 es el primer término al cuadrado, por lo que se reconoce que el primer término es z, luego *16z* es el doble del producto de los términos, por lo tanto $2 \cdot 8 \cdot z$, de lo anterior se puede determinar que el segundo termino es *z,* finalmente el cuadrado de binomio es $(z+8)^2$

Objetos y procesos: Se deben determinar los términos de las expresiones haciendo uso de la comprensión de productos notables desarrollados, reconocer propiedades de las potencias y trasformaciones de algunas propiedades de estructura algebraica. Los cuatro índices de la actividad son ejemplos particulares de cuadrados de binomios, por lo tanto son objetos extensivos.

Nivel de algebrización: Se movilizan variables con lenguaje simbólico, además se desea una generalización, pero no se opera con las variables simbólicas, por lo que se enmarca en el *segundo nivel de algebrización*.

3.2.1.6 Completar recuadro

En este tipo de ejercicios lo que se solita es que el estudiante complete el recuadro faltante teniendo en consideración el desarrollo de los productos notables conocidos y determinados en el libro de texto. Ver Figura 3.6

Determina el término $\boxed{}$ en cada suma por su diferencia.

a. $(3a + b)(3a - b) = \boxed{} - b^2$

b. $\left(\boxed{} + p\right)\left(\frac{1}{2} - p\right) = \frac{1}{4} - p^2$

c. $(n^4 + 8)(n^4 - 8) = n^8 - \boxed{}$

d. $\left(\boxed{} + n^3\right)\left(\boxed{} - n^3\right) = \frac{1}{9} - n^6$

Figura 3.6 Completar recuadro

Solución esperada: En el inciso a. se presenta una expresión que representa una suma por su diferencia en la cual se debe determinar el termino faltante, por lo que es estudiante debiese reconocer que la suma por su diferencia se resuelve como diferencia de cuadrados de los dos términos, siendo el primer término el faltante y dado que ya se presenta en el libro la expresión el primer término es *3a*, siendo el termino faltante $3a^2$

Objetos y procesos: Se movilizan prácticas de reconocer el producto notable trabajando con variables literales, uso de la forma de productos notables tales como suma por su diferencia, intervienen la unitarización del producto notable ya que se debe reconocer como objetos intensivo.

Nivel de algebrización: Se enmarca en el segundo nivel de algebrización ya que se reconoce el uso de la generalidad, pero no se opera con las variables para tener una forma de la expresión.

Luego de evidenciar y analizar el tipo de situaciones problemas y tareas que presentan asociadas a los productos notables, con la tabla 3.2.1 presentamos un resumen con los tipos de tareas identificados, la cantidad de ellas y el nivel de razonamiento algebraico que promueven.

Tabla 3.2.1. Resumen productos notables

CUADRO RESUMEN PRODUCTOS NOTABLES		
Tipo de problema	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Cálculo el área dada una figura	21	Tercer nivel
Cálculo producto notable	42	Tercer nivel
Cálculo de área	11	Tercer nivel
Actividad de profundización	6	Tercer nivel
Determinar el producto notable	27	Segundo nivel
Completar recuadro	16	Segundo nivel

3.2.2 Sistema de ecuaciones lineales

Continuando con la línea de la identificación es que este contenido también fue subdividido en cinco tipos de problemas: *Representación de ecuaciones*, *Uso de gráficos*, *Problemas contextualizados*, *Resolución de sistemas.* A continuación, analizamos cada tipología de problemas junto con las prácticas pretendidas.

3.2.2.1 Representación de ecuaciones

En este tipo de tareas se les presenta a los estudiantes ecuaciones con dos variables en las cuales deben representar lo solicitado de manera algebraica. A continuación, en la Figura 3.7 se puede visualizar el tipo de tarea.

Representa cada ecuación lineal con dos incógnitas en la forma $y = mx + n$.

a. $3x + y = 5$ **c.** $-4x - 2y = 6$ **e.** $x - \frac{2}{4}y = 8$

b. $-2x - y = 7$ **d.** $-3x - 9y = 0$ **f.** $1{,}2x + 0{,}5y = 1{,}2$

Figura 3.7 Representación de ecuaciones

Solución esperada: En el inciso *a* se presenta una expresión con variables *x* e *y*, se solicita que se trabaje con las variables despejando *y*, $3x + y = 5$,de esta manera se opera para llegar a lo solicitado $y = 5 - 3x$

Objetos y procesos: Propiedades de las operaciones aritméticas (elemento neutro de la suma, conmutativa, asociativa), así como el significado del signo igual como equivalencia, no como resultado de la operación, uso de ecuaciones de primer grado despejando variables para mantener la igualdad y comprendido el proceso. Pertenece a los objetos de las funciones, representando objetos extensivos que se apoyan en el objeto extensivo dado en el encabezado.

Nivel de algebrización: Se deben realizar trasformaciones en la forma simbólica de las expresiones dadas conservando la equivalencia por lo tanto se enmarca en el nivel tres de razonamiento algebraico.

3.2.2.2 Uso de gráficos

Las tareas asociadas al uso de gráficos presentan una representación del plano cartesiano de una recta o sistema de ecuación, para luego responder preguntas que se infieren o se pueden concluir de estas mismas.

Analiza el siguiente gráfico, y luego responde.

a. ¿En qué puntos la recta corta o interseca a los ejes *X* e *Y*?

b. ¿Cuál es la ecuación de la recta que se asocia a esta recta?

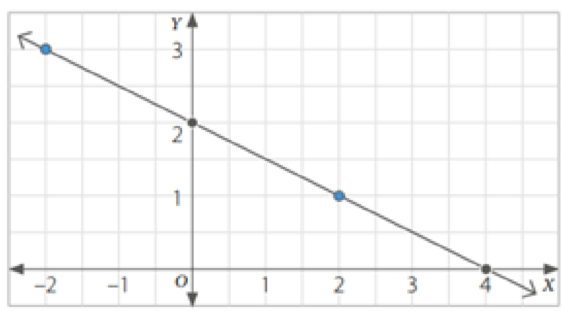


Figura 3.8 Uso de gráficos

Solución esperada: En la tarea de la Figura 3.8 en el inciso a. se deben identificar los puntos (4,0) y (0,2) ya que en ellos se corta la recta dada con los ejes X e Y respectivamente. El inciso b. se desarrolla dado los puntos solicitados anteriormente, como el (0,2) pertenece a la recta se tiene que $y = -\frac{a}{b}x + 2$ y como (4,0) también pertenece $0 = -\frac{a}{b}4 + 2$, realizando operaciones de ecuaciones, se obtiene $-\frac{1}{2} = -\frac{a}{b}$, finalmente la ecuación es $y = -\frac{1}{2}x + 2$

Objetos y procesos: Uso de ecuaciones, compresión del significado los puntos en el plano cartesiano, definiciones de ecuación de la recta, propiedades de las operaciones aritméticas, parámetro numérico, así como el significado del signo igual como equivalencia, no como resultado de la operación. Se busca la generalidad usando los objetos extensivos que vendrían siendo los puntos el plano cartesiano, mediante el uso la ecuación de la recta como objeto intensivo.

Nivel de algebrización: Tarea clasificada en el cuarto nivel de algebrización, ya que se requiere realizar un cambio conceptual del parámetro y los símbolos se usan para referirse a la información que se tiene el contexto.

3.2.2.3 Problemas contextualizados

Los problemas que se presentan en esta sección están orientados a la construcción y desarrollo de sistemas de ecuaciones de dos variables, Figura 3.9

Resuelve los siguientes problemas.

a. La diferencia de dos números es 85 y uno de ellos es 20 unidades mayor que el doble del otro. ¿Cuáles son los números?

b. Dafne tiene 14 monedas en su alcancía. En ella solo hay monedas de \$50 y de \$100. Si en total suman \$1 100, ¿cuántas monedas de \$50 y de \$100 hay?

Figura 3.9 Problemas contextualizados

Solución esperada: En el inciso a. se debe trasformar al lenguaje algebraico lo expresado, siendo la diferencia de dos números es 85, se representa como $x - y = 85$ y la expresión uno de ellos es 20 unidades mayor que el doble del otro se representa como $x - 20 = 2y$, para poder encontrar los números se puede usar cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, solo para términos de resolución sin tener mayor relevancia, se utilizará igualación, para determinar las prácticas que se promueven.

Teniendo en consideración ambas ecuaciones se despeja la incógnita *x* en ambas ecuaciones, dando como resultado las siguientes ecuaciones $x = 85 - y$, $x = 2y + 20$, luego igualamos ambas incógnitas para obtener la expresión $85 - y = 2y + 20$, realizando las operaciones asociadas con las ecuaciones obtenemos el valor de $y = 65$, para luego reemplazarlo en la primera ecuación obteniendo el valor de $x = 150$, finalmente los números son 65 y 150.

Objetos y procesos: Intervienen incógnitas que se deben interpretar desde el planteamiento, operaciones de ecuaciones provenientes del primer proceso descrito, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, uso del lenguaje algebraico para determinar lo solicitado y utilización de términos algebraicos operando con ellos. Se realiza una formalización y ostención, ya que se nombre a través de las expresiones algebraicas dadas en el planteamiento, interviniendo objetos intensivos de los sistemas de ecuaciones lineales.

Nivel de algebrización: Este tipo de tarea pertenece al tercer tipo de razonamiento algebraico, ya que presenta estructuras de la forma $Ax + B = Cx + D$ y se opera con las variables.

3.2.2.4 Resolución de sistemas

Las tareas que presenta el texto que solicitan resolver cada sistema de ecuación se especifica el método que se tiene que utilizar, dado ejemplos de cómo se resuelven paso a paso previamente, son la gran mayoría de las actividades que se realizan en este contenido, a continuación, un ejemplo en la Figura 3.10.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuacionesutilizando el método de reducción.

a. $\begin{matrix} 4x + 2y = 14 \\ 3x - y = 3 \end{matrix}$ **b.** $\begin{matrix} -\frac{1}{2}x + 2y = -8 \\ 2x + y = 5 \end{matrix}$ **c.** $\begin{matrix} 2x - y = 13 \\ x + y = -1 \end{matrix}$ **d.** $\begin{matrix} 2x + 2y = -2 \\ x - y = 3 \end{matrix}$

Figura 3.10 Resolución sistemas

Solución esperada: En el inciso c. se presenta el sistema de ecuaciones $\begin{matrix} 2x - y = 13 \\ x + y = -1 \end{matrix}$ el cual se debe resolver utilizando método de reducción por lo que se puede apreciar que puede reducir inmediatamente la variable *y*, luego realizando la suma de *x* y de los números, obtenemos la expresión $3x = 12$, despejando la incógnita se obtiene $x = 4$, la cual reemplazamos en la segunda ecuación $4 + y = -1$, obteniendo el valor de $y = -5$.

Objetos y procesos: Sistema de ecuaciones con dos incógnitas representadas simbólicamente, se opera con las incógnitas para obtener la cantidad desconocida, el uso del método reducción requiere de la intervención de ecuaciones de primer grado, dejando ecuaciones con coeficientes de igual valor para luego reducir y despejar variables determinado el valor de las incógnitas.

Nivel de algebrización: Deben realizar tratamientos a los objetos representados, se realizan trasformaciones simbólicas de las expresiones conservando la equivalencia por lo que se manifiesta un tercer nivel de razonamiento a algebraico

A continuación, la evidencia y análisis del tipo de situaciones problemas y tareas que presenta el libro de texto asociado a los sistemas de ecuaciones lineales, se sintetiza en un cuadro resumen con los tipos de tareas identificados, la cantidad de ellos y el nivel de razonamiento algebraico que promueven.

Tabla 3.2.2 Resumen sistemas de ecuaciones

CUADRO RESUMEN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES		
Tipo de problema	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Representación de ecuaciones	10	Tercer nivel
Uso de gráficos	4	Cuarto nivel
Problemas contextualizados	7	Tercer nivel
Resolución sistemas	40	Tercer nivel

3.2.3 Relación lineal entre dos variables

Este es último contenido asociado al eje de álgebra y funciones de primero medio y fue igualmente fraccionado según el tipo de problema que presenta en: *Valorizar expresiones*, *Determinar variables, Uso de tablas, Representación gráfica y Problemas.*

3.2.3.1 Valorizar expresiones:

En el tipo de tareas asociadas con la valorización de expresiones se pretende que a partir de una determinada expresión se pueda trabajar con incógnitas desarrollando ecuaciones. Ver Figura 3.11.

Valoriza las siguientes expresiones para x e y dados.

a. $f(x, y) = -x + 3y; x = 3, y = -1$

Figura 3.11 Valorizar expresiones

Solución esperada: Las incógnitas x e y dado su valor, deben ser reemplazados en la expresión de la función $f(x, y) = -x + 3y$, quedando como, $f(3, -1) = -(-3) + 3 \cdot (-1)$, luego realizando los cálculos pertinentes, la función $f(3, -1) = 0$

Objetos y procesos: Ecuaciones de primer grado, reemplazos de valores determinados, operaciones aritméticas aplicadas a números particulares. Solo uso de objetos extensivos de la función presente en el encabezado, sin realizar trasformaciones que busquen generalidad en el proceso.

Nivel de algebrización: Se opera con números particulares, existe algún tipo de lenguaje simbólico, pero se opera con lenguaje numérico, por lo que se encuentra en el segundo nivel de algebrización.

3.2.3.2 Determinar variables:

Cuando se presentan este tipo de problemas en el libro de texto se enuncian con el sentido de que dado un valor de una expresión, determinar variables asociadas a una determinada función de dos variables. Figura 3.12.

> **Determina la pendiente y el coeficiente de posición de la recta que representa cada una de las siguientes expresiones.**
>
> **a.** $f(x, y) = -x - y$, si $f(x, y) = 8$

Figura 3.12 Determinar variables

Solución esperada: Teniendo en consideración la función $f(x, y) = -x - y$, como también el valor de $f(x, y) = 8$, el estudiante debe igualar los valores de $f(x, y)$, obteniendo 8 =-x-y, además como lo solicitado es la pendiente y el coeficiente de posición se debe despejar y para determinar los valores solicitados, $y = -x - 8$, siendo -1 la pendiente y -8 el coeficiente de posición.

Objetos y procesos: Comprender el valor posicional de la pendiente de la recta en una ecuación, al igual que el coeficiente de posición, reemplazar valores determinados conociendo el concepto de función, operar como una ecuación de primer grado para determinar la pendiente y coeficiente de posición. Se presenta el objeto extensivo representado en la función, se realizan tratamientos sin intervención de objeto extensivo.

Nivel de algebrización: Se encuentra en segundo nivel de algebrización, ya que se presenta un lenguaje simbólico ligado al contexto del planteamiento, con tareas estructurales en ecuaciones del tipo $Ax + B = C$

3.2.3.3 Uso de tablas:

Las tablas presentes muestran valores para las incógnitas *x* e *y*, además de valores resultantes de la función lineal, buscando la relación existente en cada caso. Figura 3.13.

Determina la relación lineal de la forma $f(x, y) = ax + by$ que se representa en cada tabla.

a.

x	y	$f(x, y)$
1	–5	7
0	–3,5	7

Figura 3.13. Uso de tablas

Solución esperada: Con los datos expresados en la tabla se pueden desarrollar dos ecuaciones la primera $7 = a \cdot 1 + b(-5)$, y la segunda $7 = a \cdot 0 + b(-3{,}5)$, luego se igualan ambas expresiones $a \cdot 1 - 5b = -3{,}5b$, se despeja el valor de a, obteniendo $a = -1{,}5b$ reemplazando el valor en la segunda ecuación se obtiene el valor de $b = -2$, para finalmente obtener el valor a reemplazando el valor de b, $a = -3$

Objetos y procesos: Sistema de ecuaciones con dos incógnitas representadas simbólicamente, se opera con las incógnitas para obtener la cantidad desconocida, uso de tabulaciones y comprensión de ese tipo de representación. Se pretende la particularización de objetos extensivos que se identifican en tabla, para luego realizar trasformaciones y determinar la forma lineal de la expresión.

Nivel de algebrización: Este tipo de tarea pertenece al tercer tipo de razonamiento algebraico, ya que presenta estructuras de la forma $Ax + B = Cx + D$ y se opera con las variables.

3.2.3.4 Representación gráfica:

Las tareas que están asociadas a representaciones gráficas principalmente solicitan que a partir una expresión función se grafique en el plano cartesiano o de manera inversa que a partir un gráfico se determine la expresión algébrica. En la Figura 3.1.14 se ejemplificará la primera opción.

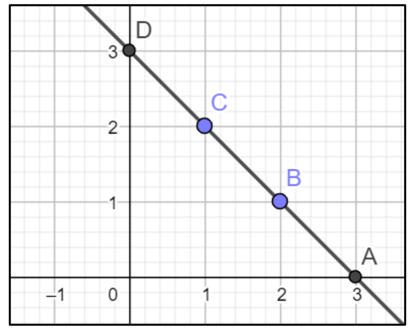
Representa cada gráfica en el plano cartesiano según la información entregada.

a. $f(x, y) = 3; f(x, y) = x + y$

Figura 3.14. Representación gráfica.

Solución esperada: Se espera que el estudiante reconozca la expresión como una función lineal $f(x, y) = x + y$, y a partir de $f(x, y) = 3$, la ecuación lineal que se relaciona con la expresión es $x + y = 3$. Además, $x + y = 3$ se puede escribir como $y = 3 - x$, y posteriormente construir una tabla de valores para luego graficarla.

x	$y = 3 - x$	(x, y)
3	$y = 3 - 3 = 0$	(3,0)
2	$y = 3 - 2 = 1$	(2,1)
1	$y = 3 - 1 = 2$	(1,2)
0	$y = 3 - 0 = 3$	(0,3)



Objetos y procesos: Ecuaciones lineales correspondientes a la de una recta, uso de tabulación de funciones que requiere comprender el proceso de encontrar puntos que luego ser representados gráficamente como una función, operaciones con cantidades determinadas. Los objetos intervinientes son extensivos de la ecuación de la recta y se pretende trasformaciones realizando cálculos sobre esos objetos.

Nivel de algebrización: Se deben realizar tratamientos en la forma simbólica de las expresiones dadas conservando la equivalencia por lo tanto se enmarca en el nivel tres de razonamiento algebraico.

3.2.3.5 Problemas:

Las tareas con problemáticas que se presenten en este contenido buscan tratar de contextualizar las temáticas trabajadas en la unidad con el contexto real de los estudiantes, por otro lado son la minoría considerando todas de las situaciones que se plantean. Figura 3.15

Resuelve los siguientes problemas.

a. El punto $A(2, 5)$ pertenece a la gráfica de la ecuación $2x + by = 5$. ¿Cuál es el valor de b?

Figura 3.15. Problemas

Solución esperada: Considerando la ecuación $2x + by = 5$, el estudiante debe reemplazar el punto *A (2,5)* reconociendo que el valor de *x=2* e *y =5*, obteniendo la expresión $2 \cdot 2 + b \cdot 5 = 5$, resolviendo la ecuación se obtiene el valor de $b = \frac{1}{5}$

Objetos y procesos: Reconocer variables asociadas con la función comprendiendo el significado de un punto que pertenezca a la ecuación, reemplazar incógnitas que se presentan en el punto, tratamiento de ecuaciones de primer grado para encontrar el valor solicitado. Uso de tratamiento de los objetos intervinientes realizando procesos de cálculo para encontrar la generalidad.

Nivel de algebrización: Problemáticas buscan que se represente un sistema de ecuaciones lineales por lo que intervendrán ecuaciones de la forma $Ax + B = Dx + C$, se realizarán tratamientos con ella para dar respuestas a las preguntas por lo que la actividad matemática realizada será de tercer nivel de razonamiento algebraico.

Luego de analizar el último contenido propuesto para enseñanza media, se presenta la correspondiente tabla resumen del contenido relación lineal de dos variables, con los tipos de tareas identificados, la cantidad de ellos y el nivel de razonamiento algebraico que promueven.

A continuación, el resumen relacionado con los sistemas de ecuaciones lineales.

Tabla 3.2.3. Resumen relación lineal de dos variables

CUADRO RESUMEN RELACIÓN LINEAL DE DOS VARIBLES		
Tipo de problema	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Valorizar expresiones	9	Segundo nivel
Determinar variables	9	Segundo nivel
Uso de tablas	6	Tercer nivel
Representación gráfica	3	Tercer nivel
Problemas	5	Tercer nivel

Finalizado el análisis de las prácticas matemáticas que se presentan en el libro de texto del estudiante de primero medio es que se confirma el análisis a priori de los objetivos de aprendizaje asociados con los problemas de ejercitación que se presentan a los estudiantes, por lo que se puede concluir que en primer año medio se promueve mayoritariamente el nivel tres de algebrización. A continuación, una tabla resumen de los contenidos, cantidad de tareas asociadas a cada uno de ellos y el nivel de razonamiento algebraico mayormente promovido.

Tabla 3 .1 .4 Resumen primero medio

CUADRO RESUMEN PRIMERO MEDIO		
Contendido	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Productos notables	123	Tercer nivel
Sistemas de ecuaciones lineales	61	Tercer nivel
Relaciones de dos variables	32	Tercer nivel

3.3 Análisis Del Plan Curricular y Texto de estudio de Segundo medio

El libro de texto de segundo medio contiene 200 páginas, está dividido en los cuatro ejes del curriculum y te tema de interés el eje de álgebra y funciones, donde se encuentran los contenidos: cambio porcentual (p. 43-47), ecuaciones de segundo grado (p. 51 - 59), funciones de segundo grado (p.63-72) y función inversa (p. 77 – 87).

Los objetivos de aprendizaje de este curso se presentan en la siguiente tabla detallando la división de la unidad de álgebra y funciones en cuatro temas y con una aproximación a priori del nivel de razonamiento que se pretende movilizar dado el objetivo de aprendizaje.

Tabla 3.3. Objetivos segundo medio

Temas	Objetivos de aprendizaje	Nivel a priori de razonamiento algebraico
Cambio porcentual	Comprender y analizar el cambio porcentual de una magnitud en el tiempo. Estudiar fenómenos de cambio porcentual en la vida cotidiana y otras asignaturas	Tercer nivel
Ecuaciones de segundo grado	Identificar una ecuación de segundo grado y sus componentes. Resolver ecuaciones cuadráticas mediante factorización Resolver ecuaciones cuadráticas mediante competición de cuadrados.	Cuarto Nivel

	Resolver ecuaciones cuadráticas mediante fórmula general.	
Funciones de segundo grado	Identificar la función cuadrática y sus componentes. Representar la función cuadrática en el plano cartesiano. Reconocer la forma canónica de una función cuadrática y la variación de parámetros. Modelar situaciones de cambio cuadrático de la vida cotidiana y las ciencias por medio de funciones cuadráticas.	Cuarto Nivel
Función inversa	Reconocer y representar simbólica y pictóricamente la inversa de una función. Representar gráficamente la inversa de una función. Determinar la inversa de la función lineal y afín en diversas situaciones. Determinar de forma gráfica y analítica la función inversa de una función cuadrática.	Cuarto nivel

Se identificó que los objetivos de aprendizaje propuestos para segundo medio para el eje temático de álgebra estarían movilizando el tercer y cuarto nivel de razonamiento algebraico, esto se debe a que en la propuesta de Godino (2014), en dichos niveles se contempla el estudio del tratamiento de las incógnitas y variables aplicando propiedades estructurales y la aparición de los parámetros como números. De hecho, esto se corresponde con la sugerencia dada por Godino (2016), quien indica que los niveles 3 y 4 están establecido para los primeros años de enseñanza media, siendo esto de manera previa acertado en el plan de estudios chileno.

A continuación, se analiza a través de ejemplo de los tipos de tareas que se presentan por cada contenido, de la misma forma que se realizó con el libro del texto del curso anterior.

3.3.1 Cambio porcentual

Continuando con el orden de nuestro análisis el primer contenido de segundo medio se ordenaron las tareas propuestas clasificándolas en tres tipos de tareas según lo que pretenden movilizar, estas son: *Análisis de situaciones, Análisis de gráficos, Problemas con contexto.*

3.3.1.1 Análisis de situaciones:

Las tareas que se enmarcan en este tipo corresponden a las que en su mayoría se plantea una situación que solicita que se analice teniendo en consideración el contenido "cambio porcentual", ya que este es explicado en el inicio del contenido con su forma y ejemplos detallados de su uso. Figura 3.16

Analiza el siguiente titular y responde.

El índice de variación del precio de los combustibles entre marzo y abril fue de 1,03.

a. ¿El valor de los combustibles aumentó o disminuyó? ¿En qué porcentaje?

b. En marzo el precio de un litro de combustible era de $780. ¿Cuánto costará en abril?

c. Supongamos que el índice de variación se mantiene constante en mayo. ¿Cuánto habrán aumentado los precios respecto de marzo?

Figura 3.16. Análisis situaciones

Solución esperada: Para el inciso *a.* la respuesta es que aumentó ya que el índice de variación es mayor a 1 y el porcentaje es 3%, para el inciso *b.* el estudiante debe utilizar la expresión que es dada en el libro siendo el índice de variación el coeficiente entre el valor actual y el valor anterior, por lo que la expresión es $1{,}03 = \frac{costo\ abril}{750}$ luego el resultado del costo de abril es $803,3%. El inciso *c*, como el índice de variación es constante sigue siendo de 1,03 por lo que el precio en mayo será de $827,5, lo que significa que aumentará el precio con respecto a marzo en $47,5.

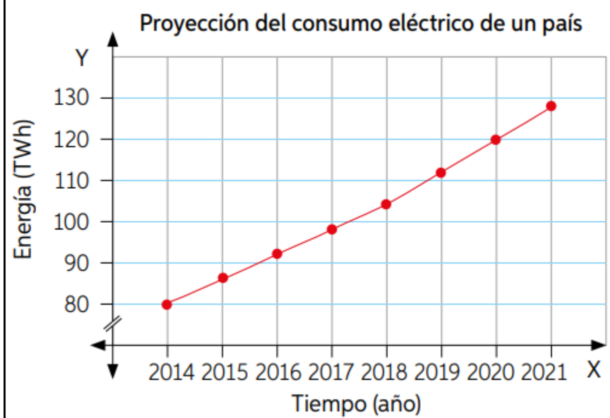
Objetos y procesos: Conceptos de variación porcentual, intervención de variables como expresiones, desarrollo de ecuaciones. Para contestar los incisos presentes en este tipo de tareas se debe realizar procesos relacionas con el tratamiento de los objetos extensivos propuestos como el valor del porcentaje y realizar la generalización a través del objeto intensivo de la variación porcentual.

Nivel de algebrización: Como intervienen ecuaciones y variables en lenguaje simbólico este tipo de tarea se clasifica en nivel tres de algebrización,

3.3.1.2 Análisis de gráficos

En el contenido de cambio porcentual se presentan tareas que hacen referencia a realizar un análisis a partir de un gráfico la evidencia de un gráfico, contestando diferentes preguntas asociadas a el mismo, siempre teniendo en consideración que los gráficos están en relación con el contenido, para evidencias estas tareas analizaremos la Figura 3.17

◆ Analiza el gráfico y responde. Considera constante el cambio porcentual entre los años 2014 y 2021.



Tiempo (año)	Energía (TWh)
2014	80
2015	85,6
2016	91,6

a. ¿Aumenta o disminuye el consumo de energía eléctrica en ese país? ¿En qué intervalo esperarías que se encuentre el índice de variación? Justifica.

b. Encuentra el índice de variación y la ecuación de cambio porcentual que describen la situación planteada. Luego, compáralo con tu respuesta anterior.

Figura 3.17Análisis de gráficos

Solución esperada: En el inciso *a*, el estudiante debe señalar que el consumo de energía aumenta debido a que la curva es ascendente en el gráfico, por lo mismo, indicar que el índice de variación debe ser mayor a 1, para el inciso *b*, se debe encontrar el índice de variación con los datos que se presentan en la tabla adjunta considerando la energía en dos años consecutivos

$Iv = \frac{85{,}6}{80}$, resolviendo el cálculo se obtiene $Iv = 1.07$

Objetos y procesos: Conceptos de variación porcentual, intervención de variables como expresiones, ejecución de ecuaciones de primer grado, reconocer información en gráficos asociados a la información entregada. Con base en el objeto intensivo que representa la forma del índice de variación se deben realizar pequeños tratamientos de los datos que son los objetos extensivos.

Nivel de algebrización: Como intervienen ecuaciones y variables en lenguaje simbólico este tipo de tarea se clasifica en nivel tres de algebrización.

Tabla 3.3.1 Resumen cambio porcentual

CUADRO RESUMEN CAMBIO PORCENTUAL		
Tipo de problema	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Análisis de situaciones	6	Tercer nivel
Análisis de gráficos	5	Tercer nivel

3.3.2 Ecuaciones de segundo grado

Este es el segundo contenido que presenta el libro de texto y se analizarán las tareas propuestas clasificándolas en tipos de tareas según lo que pretenden movilizar, estas son: *determinar una ecuación dada una figura, Analizar situaciones, Resolución de ecuaciones*

3.3.2.1 Determinar una ecuación dada una figura

Como dice el título de estas tareas lo que se busca es determinar la ecuación de segundo grado que representa cada una de las figuras encontrando el área representada, a continuación, un ejemplo en la Figura 3.18

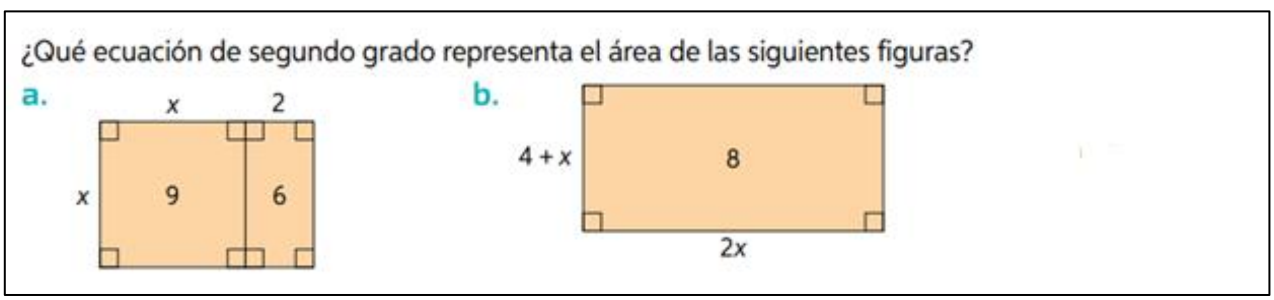


Figura 3.18 Determinar une ecuación dada una figura

Solución esperada: En *a* se aprecian una figura rectangular con lados *x* y de lados *x+2*, para encontrar el área se deben multiplicar los lados $x \cdot (x+2)$ lo que debe ser igual a la suma de *9+6* que gráficamente están representando el valor del área, finalmente resolviendo el producto se obtiene $x^2 + 2x = 15$, donde $x^2 + 2x - 15 = 0$ representa la ecuación de segundo grado.

En *b* se deben multiplicar los valores que representan el largo y ancho de la figura *4+x* y *2x* respectivamente, para luego sumar 8 el cual es el valor del área de la figura, obteniendo

$8x + 2x^2 = 8$, ordenando la ecuación de segundo grado es $2x^2 + 8x - 8 = 0$

Objetos y procesos: Saber reconocer la forma de una ecuación de segundo grado, ecuaciones de primer grado, conceptos de área de figuras tales como cuadrados y rectángulos. Los valores expresados en la representación son los objetos extensivos que, dado el debido tratamiento, realizando cálculos se obtiene una expresión que representa un objeto intensivo.

Nivel de algebrización: Se asigna a esta actividad un nivel tres de algebrización. Cuando el estudiante es capaz de realizar transformaciones sobre la expresión hallada, la figura a realizar tratamientos algebraicos para encontrar la ecuación solicitada, realizando trasformaciones en la forma simbólica de las expresiones.

3.3.2.2 Analizar situaciones

Las tareas que se plantean en esta clasificación muestran el contexto cotidiano en el que se pudiese realizar o desarrollar una ecuación de segundo plano, orientando el problema con varios incisos para finalmente tratar de llegar a una generalidad del planteamiento. Figura 3.19

◆ Analiza la siguiente información. Luego, responde.

Para conocer la altura h a la cual se encuentra un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba, despreciando el roce con el aire, se emplea la siguiente expresión:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

h_0: Altura inicial

v_0: Rapidez inicial

t: Tiempo transcurrido

g: Aceleración debida a la gravedad

$\longrightarrow$: Considera g como $10 m/s^2$

Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial 50 m/s desde una altura de 5 metros.

a. ¿Cuál es la ecuación que representa su altura?

b. ¿A qué altura se encuentra el cuerpo al cabo de 3 segundos? ¿Y a los 7 segundos?

c. ¿En cuántos segundos vuelve a tener la altura inicial?

d. Compara la expresión anterior con la forma de la ecuación de segundo grado. ¿Cuáles son los valores de los coeficientes a, b y c?

Figura 3.19 Analizar situaciones

Solución esperada: Inciso a, teniendo en consideración la información y la ecuación que se plantea, el estudiante debe remplazar los valores que se entregan en la ecuación de la altura obteniendo $h = 5 + 50t - 5t^2$.

Con el inciso b se debe tener en consideración la ecuación realizada en el inciso anterior, reemplazando el valor de *t =3* obtenido $h = 5 + 50 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2$ lo que resulta $h =$110, luego repetir el proceso con *t=7*, resultando igualmente $h =$110.

En el inciso c el estudiante debe en su fórmula inicial dar el 5 a la altura $5 = 5 + 50t - 5t^2$, de esta forma debe despegar el valor de obtenido $0 = 50t - 5t^2$, factorizando por t se obtiene $t = 0$ y $0 = 50 - 5t$, de esta última se obtiene *t=10.*

Finalmente, en el inciso d se debe comparar la ecuación del inciso a con la ecuación de segundo grado o sea $h = 5 + 50t - 5t^2$ con $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a = -5, b = 50$ y $c = 5$

Objetos y procesos: Ecuación de segundo grado, uso de incógnitas, factorización, procesos de comprensión de fórmulas. Los tratamientos requeridos en estas situaciones presentan objetos extensivos una expresión dada en el planteamiento, los objetos intensivos representan la expresión de una ecuación de segundo grado, además esos objetos interfieren a lo largo de la realización del tratamiento, como en el proceso de factorización.

Nivel de algebrización: Primer acercamiento al uso de parámetros como registro numérico, con símbolos que pueden tomar cualquier valor, por ende, se presenta en el cuarto nivel de razonamiento algebraico.

3.3.2.3 Resolución de ecuaciones segundo grado

Cuando las tareas solicitan la resolución de una ecuación de segundo grado en el libro de texto, lo solicitan mediante diferentes tipos de factorizaciones Figura 3.20 la formula general o completación de cuadrado Figura 3.21

Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización. **a.** $3x^2 - 27 = 0$

Figura 3.20 Resolución factorizando

Solución esperada: Esta situación se resuelve despejando la incógnita $3x^2 = 27$, luego $x^2 = 9$, aplicando raíz cuadrada se obtiene que $x = \mp 3$

Objetos y procesos: Desarrollo de ecuaciones, raíz cuadrada, ecuaciones de segundo grado, factorización de expresiones algebraicas. Los objetos extensivos están representados por los coeficientes numéricos de la expresión entregada, siendo la ecuación cuadrática el objeto intensivo, solo se deben realizar tratamientos con los objetos extensivos entregados para determinar la respuesta.

Nivel de algebrización: Cuando el estudiante es capaz de resolver un ejercicio que está en términos cuadráticos está en el tercer nivel de razonamiento algebraico

Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones mediante la completación de cuadrados:

a. $3x^2 + 3x - 6 = 0$

Figura 3.21Resolución completación de cuadrados

Solución esperada: Dada la ecuación $3x^2 + 3x - 6 = 0$, se debe despejar el término libre de la ecuación $3x^2 + 3x = 6$, luego despejar el coeficiente del término cuadrático $x^2 + x = 2$ completar el cuadrado de binomio sumando a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x para luego factorizarlo $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ encontrar las soluciones de la ecuación mediante la factorización $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, considerando el cuadrado de binomio como uno de los términos $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$ resolviendo finalmente se obtiene $x_1 = -2$ y $x_1 = 1$

Objetos y procesos: Ecuaciones de segundo grado, productos notables, comprensión de métodos de factorización. Al igual que la actividad anterior los objetos intensivos y extensivos son representados de igual forma, solo que los tratamientos en este planteamiento requieren cálculos utilizando el objeto intensivo.

Nivel de algebrización: Se asigna a esta actividad un nivel cuatro de algebrización, ya que el estudiante debe trabajar con familias de ecuaciones, con coeficientes de las funciones que son utilizadas como parámetro siendo registros numéricos.

Tabla 3.3.2 Resumen ecuaciones de segundo grado

CUADRO RESUMEN ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO		
Tipo de problema	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Determinar una ecuación dada una figura	9	Tercer nivel
Analizar situaciones	6	Cuarto nivel
Resolución de ecuaciones segundo grado	53	Cuarto nivel

3.3.3 Funciones de segundo grado

Continuando con los contenidos que presenta el libro de texto de segundo medio, se analizaran las tareas propuestas sobre funciones de segundo grado clasificándolas en tipos de tareas según lo que pretenden movilizar, estas son: *Uso de tablas, Cálculo de valores, Problemáticas, Uso de gráficas.*

3.3.3.1 Uso de tablas

Cuando se utilizan las tablas en este contenido son una forma de dar a conocer los valores de los coeficientes de las funciones o un apoyo a la hora de realizar algún el cálculo para finalmente hacer representaciones de las funciones. Figura 3.22

Considera las funciones y sus coeficientes para completar la siguiente tabla en tu cuaderno.

Función	a	b	c
$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$			
	2	5	16
$t(x) = (4x - 1)(2x + 3)$			

Figura 3.22 Uso de tablas

Solución esperada: Para completar la tabla se deben identificar los coeficientes numéricos que acompañan a las variables para la primera función el valor de $a = 2, b = 3$ y $c = -1$, luego se debe escribir cual es la ecuación dada los coeficientes por lo tanto la función es $f(x) = 2x^2 + 5x + 16$, para finalizar la última función de la tabla, primero se debe realizar un tratamiento algebraico para determinar los coeficientes

$f(x) = (4x) \cdot (2x) + (4x) \cdot (3) - (1) \cdot (2x) - (1) \cdot (3)$, lo que realizando las operaciones $f(x) = 8x^2 + 12x - 2x - 3$, luego de reducen términos semejantes $a = 8, b = 12$ y $c = -3$

Objetos y procesos: Conocer la forma de una ecuación general, operaciones algebraicas, propiedades de las potencias. Se pretende que el estudiante realice tratamientos con las incógnitas entre objetos extensivos representadas por los coeficientes números que acompañan a las incógnitas.

Nivel de algebrización: Se asigna a esta actividad un nivel 3 de algebrización, ya que, aunque se realizan tratamiento con las variables no representan una familia de funciones.

3.3.3.2 Calculo de valores

Al igual que en otros contenidos del libro de texto cuando se refieren a este tipo de tareas presentan en este caso diferentes funciones cuadráticas en las cuales solicitan calcular una incógnita en específico dando los valores de una variable. Figura 3.23

En cada una de las funciones, calcula la imagen para $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$ y $x = -1$.

a. $f(x) = 12x^2 - 3x - 1$

Recuerda que:
– preimagen: valor de x.
– imagen: valor de y.

Figura 3.23 cálculo de valores

Solución esperada: Teniendo en consideración la función $f(x) = 12x^2 - 3x - 1$, se debe reemplazar los valores de x asignados, para $x = 1$, resulta $f(1) = 12 \cdot (1)^2 - 3 \cdot (1) - 1$, dando como imagen $f(1) = 8$, para $x = \frac{1}{2}$ resulta $f\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1$, dando como imagen $f(1) = \frac{1}{2}$, finalmente para $x = -1$,resulta $f(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 1$ dando como imagen $f(-1) = 14$.

Objetos y procesos: Ecuaciones de primer grado, reemplazos de valores determinados, operaciones aritméticas aplicadas a números particulares. Para estos planteamientos se reconocen los objetos extensivos que están representados en los valores de la incógnita y la función plateada en el objeto intensivo, siendo los tratamientos en base a las particularidades numéricas presentes.

Nivel de algebrización: Se opera con números particulares, existe lenguaje simbólico, pero se opera con lenguaje numérico, por lo que se encuentra en el segundo nivel de algebrización.

3.3.3.3 Problemas

Al igual que en la ecuación de segundo grado se plantean tareas en la que esta clasificación muestran el contexto cotidiano en el que se pudiese realizar o desarrollar una función cuadrática, orientando el problema con varios incisos para finalmente tratar de llegar a una generalidad del planteamiento. Figura 3.24

La altura de una pelota que encesta en el aro de básquetbol es modelada por la ecuación:

$h(t) = -10t^2 + 10t + 1{,}5$; donde t es el tiempo.

a. Construye una tabla de valores y grafica los datos en un plano cartesiano.

b. ¿Cuál fue la mayor altura que alcanzó la pelota?

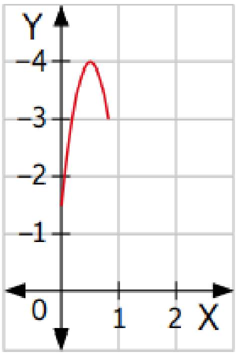
c. ¿En qué punto(s) interseca(n) la función en el eje X? ¿y en el eje Y?

d. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola?

Puedes ayudarte ingresando la función en GeoGebra u otro software.

Figura 3.24Problemas

Solución esperada: Como se expresa en el libro se puede realizar el inciso a utilizando la herramienta GeoGebra, lo que se puede evidenciar en la figura 3.2.9.1 que se presenta a continuación, mostrando la curva de en el plano cartesiano.



Para el inciso b, se debe percatar que el balón se lanzó a 1,5 metros y la altura máxima que alcanzo fue de 4 metros según la gráfica. Para el inciso c la función entregada debe ser igualar a cero para obtener la intersección con el eje x, $-10t^2 + 10t - 1{,}5 = 0$, utilizando a la fórmula de la ecuación de segundo grado se obtiene que $x = \frac{5+\sqrt{10}}{10}$ y $x = \frac{5-\sqrt{10}}{10}$. Luego $\frac{5+\sqrt{10}}{10}$ segundo es vértice de la parábola.

Objetos y procesos: Ecuaciones de segundo grado, formula de ecuación cuadrática, reconocer coeficientes de la ecuación y realizar tratamientos con ellos, uso de software graficador GeoGebra. Intervienen procesos de generalización del planteamiento, ya que desde el objeto extensivo que representa la ecuación presentada, se realizan tratamientos para generar el objeto intensivo de la ecuación cuadrática, interviniendo parámetros para dar respuesta a los valores solicitados.

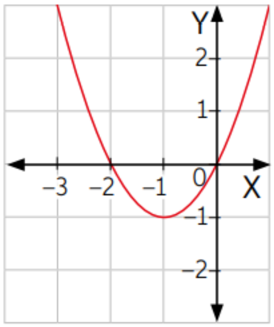
Nivel de algebrización: Tarea enmarcada en el nivel 4 de algebrización, ya que debe realizar un uso de parámetros numéricos en funciones a través de los coeficientes que se presentan.

3.3.3.4 Uso de gráficos

En estas tareas se refieren a hacer un análisis desde la evidencia de un gráfico, contestando diferentes preguntas asociadas a el mismo, siempre teniendo en consideración que los gráficos están en relación con el contenido, para evidencias estas tareas analizaremos la Figura 3.25

Analiza las siguientes gráficas:

I. $f(x) = x^2 + 2x$



a. Construye una tabla para cada una de las funciones. Identifica al menos 4 puntos que pertenezcan a la función.

b. ¿En qué puntos intersecan el eje X?, ¿y el eje Y?

c. Reemplaza en las ecuaciones el valor $x = 0$ y obtén los puntos $(0, f(0))$, $(0, g(0))$ y $(0, h(0))$. ¿A qué corresponden gráficamente?

d. Obtén los discriminantes de las ecuaciones $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ y $h(x) = 0$. ¿Cómo se relacionan sus discriminantes con la cantidad de puntos en que las funciones intersecan el eje X?

Figura 3.25. Uso de gráficos.

Solución esperada: Para inciso *a*, se pueden identificar a primera vista puntos que pertenecen a la función como por ejemplo (-2,0), (-1,-1), (0,0) y (0,0), lo que se puede expresar en la siguiente tabla.

x	-2	-1	0	3
f(x)	0	-1	0	1
puntos	(-2,0)	(-1,-1)	(0,0)	(0,0)

Luego para b, f(x) interseca al eje X en (–2, 0) y (0, 0) y al eje Y en (0, 0). Se obtiene el coeficiente c, gráficamente es la intersección del eje Y. finalmente para d. f(x) tiene discriminante mayor a 0, Se relaciona con cuantas veces interseca al eje X.

Objetos y procesos: Conocimiento de los conceptos de una función cuadrática, identificación de puntos en el plano cartesiano, uso de recursos tales como la tabulación de datos representados. Se requiere de conocimientos sobre los objetos trabajados, sin realizar trasformaciones significativas con ellos.

Nivel de algebrización: La actividad matemática que se realiza en cada una de las resoluciones de los incisos no requiere poner en juego conocimientos algebraicos, representación icónica y conteo aritmético (nivel 0 de pensamiento proto algebraico).

Tabla 3 .3.3 Resumen función de segundo grado

CUADRO RESUMEN FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO		
Tipo de problema	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Uso de tablas	10	Nivel 3
Cálculo de valores	26	Nivel 2
Problemáticas	11	Nivel 4
Uso de gráficos	3	Nivel 0

3.3.4 Función inversa

El último contenido de segundo medio relacionado con el eje de álgebra y funciones al igual que los otros contenidos clasificaron las tareas en sub temas dado lo que pretenden movilizar, estas son: *Uso de representaciones, Uso de tablas, Planteamientos*

3.3.4.1 Uso de representaciones

El contenido función inversa en libro de texto está muy asociado a las representaciones de estas como lo son el uso de diagramas sagitales, gráficos, creándolos o respondiendo preguntas asociadas a esas representaciones.

Si $t(x)$ es una función tal que duplica y luego le suma una unidad a cada elemento del conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} .

a. Determina una expresión algebraica para $t(x)$.

b. Determina el recorrido de $t(x)$.

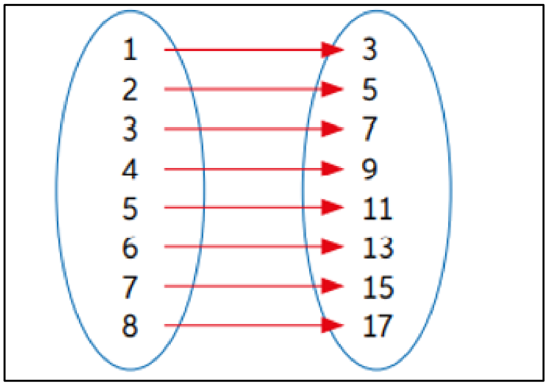
c. Realiza un diagrama sagital para $t(x)$.

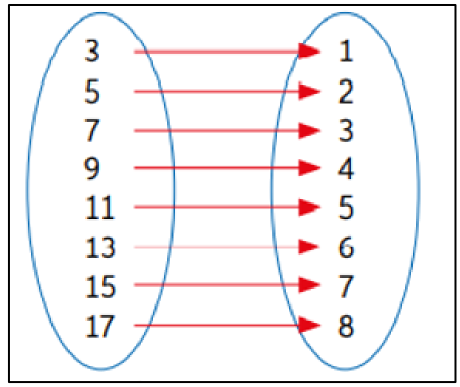
d. Realiza un diagrama sagital para $t^{-1}(x)$.

e. Determina una expresión algebraica para $t^{-1}(x)$.

Figura 3. 26 Uso de diagrama sagital.

Solución esperada: Teniendo en consideración el encabezado que se presenta en la tarea, la función que se plantea es $t(x) = 2x + 1$, el recorrido son todos los valores que puede tomar t(x), reemplazando los valores de x en la función se obtienen los valores (3,5,7,9,13,15,17). Luego el diagrama sagital para la función $t(x)$ y el diagrama de la función $t^{-1}(x)$. Finalmente, la expresión algebraica de la función $t^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$.





Objetos y procesos: Uso y comprensión de funciones lineales y función inversa con sus respectivas formas, comprensión y realización de representaciones del tipo diagrama sagital, tratamientos con valores numéricos. Los objetos extensivos son las expresiones que se determinan según lo planteado, se deben realizar tratamientos con los registros de parámetros de los objetos intensivos.

Nivel de algebrización: Cuando el estudiante es capaz de resolver un ejercicio que está en términos algebraicos, utilizando parámetros con registros numéricos, dado que se opera con la incógnita se encuentra en nivel 4 de algebrización.

3.3.4.2 Uso de tablas

Las tablas, especialmente en el contenido de funciones, son un recurso que se usa ampliamente en los ejemplos, tareas, planteamientos que se presentan en el libro de texto, como un recurso que ayuda a valorizar las expresiones de las funciones inversas en este caso.

◆ Analiza el siguiente contexto. Luego, realiza las actividades.

El siguiente esquema representa el funcionamiento de una máquina de Carnot. Esta es una máquina térmica ideal de máxima eficiencia. Funciona entre dos fuentes de calor: una a mayor temperatura (en rojo) y otra a menor temperatura (en azul).

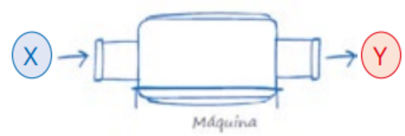
Función principal $f(x) = x + 3$

3 Joules de calor se transforman en energía mecánica.

El calor se transfiere de X a Y, lo cual genera energía mecánica.

Función inversa $f^{-1}(x)$

3 Joules de energía mecánica se utilizan para producir calor.



Al aplicar energía mecánica a la máquina, se transfiere el calor de Y a X.

a. Construye una tabla de valores de f para $x = \{1, 2, 3, 4\}$.

b. Determina una expresión algebraica para $f^{-1}(x)$.

c. Construye una tabla de valores de f^{-1} para $x = \{4, 5, 6 \text{ y } 7\}$.

d. ¿Cómo se relacionan ambas tablas de valores?

Figura 3.2.7 Uso de tablas

Solución esperada: Siendo la función $f(x) = x + 3$, para realizar la tabla para los valores asignados se deben reemplazar los valores en la función como se presenta a continuación.

x	1	2	3	4
$f(x)$	4	5	6	7

Para determinar $f^{-1}(x)$, el estudiante inicia con la función original $f(x) = x + 3$, se debe reemplazar $f(x)$ por y, resultando $y = x + 3$, despejar x lo que da como resultado la ecuación $x = y - 3$, para luego $x = f^{-1}(x)$ finalmente $f^{-1}(x) = x - 3$.

Luego la tabla de valores para $x = (4{,}5{,}6 \text{ y } 7)$ de la función inversa $f^{-1}(x) = x - 3$ es

x	4	5	6	7
$f^{-1}(x)$	1	2	3	4

Finalmente, el estudiante debe mencionar que la primera fila es la segunda de la otra tabla y viceversa, por lo tanto, las tablas están invertidas

Objetos y procesos: Comprensión y uso de tabulaciones, funciones lineales e inversas, tratamientos con expresiones algebraicas. El objeto extensivo en la función lineal y el intensivo la función inversa que se desarrolla tras la generalización del proceso en la tabulación del objeto extensivo.

Nivel de algebrización: Uso de parámetros como registros numéricos con términos algebraicos y registros numéricos, dado que se opera con la incógnita se encuentra en nivel 4 de algebrización.

3.3.4.3 Planteamientos

Las tareas con problemáticas que se presenten en este contenido buscan contextualizar las temáticas trabajadas en la unidad con el contexto real de los estudiantes, además son la minoría considerando todas de las situaciones que se plantean. Figura 3.28

Para arrendar una bicicleta se cobra una cuota básica de $4000 más $1000 por hora utilizada. Si *x* corresponde al número de horas de arriendo:

a. ¿Qué función *f* modela el cobro por el uso de la bicicleta en función de la cantidad de horas que se arrienda?

b. ◆¿Cuál es la función inversa de *f*? ¿Qué representa?

Figura 3.28. Planteamientos

Solución esperada: La función que representa la ecuación, se presenta un valor fijo $4000 y una variable independiente x, por lo que la función es $f(x) = 4000 + 1000x$. Luego la función inversa de f el estudiante desde la función original $f(x) = 4000 + 1000x$, se debe reemplazar $f(x)$ por y, resultando $y = 4000 + 1000x$, luego despejar x lo que da como resultado la ecuación $x = \frac{y-4000}{1000}$, para luego $x = f^{-1}(x)$ finalmente $f^{-1}(x) = \frac{x-4000}{1000}$, que representa las horas en función del precio de arriendo.

Objetos y procesos: Conocer la definición y conceptos intervinientes en las funciones lineales y función inversa, operaciones algebraicas con variables determinadas. Uso de tratamiento del objeto intensivo función inversa determinando una generalización en el proceso de realización de la situación planteada.

Nivel de algebrización: Desde una situación de la vida cotidiana se solicita plantear una ecuación, por lo que se desea llegar a la generalización haciendo uso de las variables, operando con ellas y haciendo tratamientos con las incógnitas. Por lo que se desarrolla en el cuarto nivel de algebrización.

Tabla 3.3.4 Resumen función inversa

CUADRO RESUMEN FUNCIÓN INVERSA		
Tipo de problema	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Uso de representaciones	22	Nivel 4
Uso de tablas	3	Nivel 4
Planteamientos	12	Nivel 4

A continuación, una tabla que resume el curso segundo medio dado los contenidos, cantidad de tareas y nivel algebraico que movilizan.

Tabla 3.3.5 Resumen segundo medio

CUADRO RESUMEN SEGUNDO MEDIO		
Contenido	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Cambio porcentual	11	Tercer nivel
Ecuaciones de segundo medio	68	Tercer/cuarto nivel
Funciones de segundo medio	50	Segundo/tercer/cuarto nivel
Función inversa	37	Cuarto nivel

3.4 Análisis del plan curricular y libro de texto de Tercero medio

Es importante mencionar que en tercero y cuarto medio el plan curricular de chile presenta profundizaciones según los gustos y habilidades que prefieren los estudiantes, por lo que la asignatura de matemática tiene menos horas semanales asignadas que las que se hacen en los años anteriores, por lo que los contenidos también son reducidos en el plan común de matemática.

Según lo anterior analizaremos el libro de texto de tercero medio del plan común el cual tiene la particularidad que también es el libro de cuarto medio, siendo las primeras 104 páginas de este curso, al igual que todos los libros administrados por el estado está dividido en los cuatro ejes del curriculum siendo el de nuestro interés el eje de algebra y funciones, donde se encuentran solo dos contenidos por la reducción de horas: Modelamientos de fenómenos con la función exponencial (p. 35- 43), y Modelamientos de fenómenos con la función logarítmica (p. 44 - 49)

Los objetivos de aprendizaje de este curso se presentan en la siguiente tabla detallando la división de la unidad de álgebra y funciones de los dos contenidos anteriormente mencionados y con una aproximación a priori del nivel de razonamiento que se pretende movilizar dado el objetivo de aprendizaje.

Tabla 3.4 Objetivos tercero medio

Temas	**Objetivos de aprendizaje**	**Nivel a priori de razonamiento algebraico**
Modelamiento de fenómenos con la función exponencial	Describir modelos y representar gráficamente las funciones exponenciales. Aplicar modelos matemáticos que describen situaciones de crecimiento y decrecimiento exponencial.	Cuarto Nivel
Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica	Aplicar modelos matemáticos de funciones logarítmicas y también representar gráficamente dichas funciones Comprender la relación que existe entre las funciones exponencial y logarítmica.	Cuarto Nivel

Dado los objetivos de aprendizaje propuestos en el plan curricular para el eje temático de álgebra en tercero medio, estos estarían movilizando el nivel cuarto nivel de razonamiento algebraico, esto se debe a que en la propuesta de Godino (2014), en dicho nivel el uso de parámetros como registro numérico y para expresar familias de ecuaciones y funciones De hecho, esto se corresponde con la sugerencia dada por Godino (2016), quien indica que el nivel 4 está establecido para secundaria siendo esta la enseñanza media en Chile.

A continuación, se analiza a través de ejemplo de los tipos de tareas que se presentan por cada contenido, de la misma forma que se realizó con el libro del texto del curso anterior.

3.4.1 Modelamiento de fenómenos con la función exponencial

Al igual que los otros cursos, el primer contenido de tercero medio se ordenó las tareas propuestas clasificándolas en tres tipos de tareas según lo que pretenden movilizar, estas son: *Representaciones plano cartesiano, Representaciones de situaciones, Planteamientos.*

3.4.1.1 Representaciones plano cartesiano

En estas tareas a partir de la realización de la gráfica o desde una gráfica dada, se pretende responder preguntas asociadas a los elementos de una función, para luego modelar la función exponencial. Figura 3.29

Representa en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones.

$f(x) = 3^x$	$g(x) = 5^x$	$p(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	$q(x) = (2{,}5)^{-x}$

A partir de las gráficas, responde:

a. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de las funciones?
b. ¿Qué punto en común tienen las gráficas?
c. ¿Intersecan las gráficas el eje X?
d. ¿Qué sucede con la gráfica respecto del eje X? Explica.
e. ¿Qué ocurre con la gráfica de **f** y **g** a medida que *x* aumenta?, ¿y con la gráfica de **p** y **q**?

*Para **graficar** una **función exponencial** puedes:*

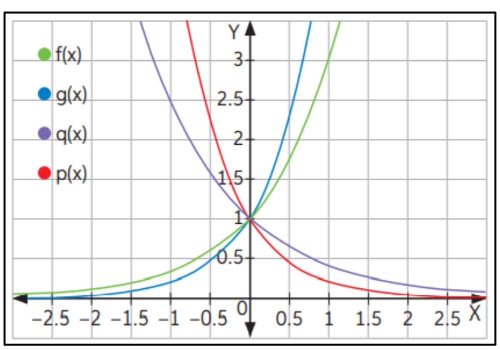
Dar valores para x y determinar su correspondiente en f(x).

– Ubicar los puntos en el plano cartesiano.

– Trazar la gráfica uniendo los puntos.

Figura 3.29 Representaciones plano cartesiano

Solución esperada: Como lo menciona la tarea para graficar se asignar valores a la variable *x* para obtener *f(x),* a continuación, un ejemplo para $f(x) = 3^x$ con los valores para $x = (-1{,}0{,}1{,}2)$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}, 1{,}3{,}9\right)$, lo mismo debe ocurrir con $g(x), p(x)\ y\ q(x)$, obteniendo como resultado las representaciones que se ven a continuación



Desde la representación el alumno se debe percatar que el dominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $\mathbb{R}^+$, el punto que tienen en común las funciones es el (0,1), además se acercan mucho al eje X, pero no intersecan al eje X, esto se debe a que no existe ningún número que elevado a $x \in \mathbb{R}$, resulte cero.

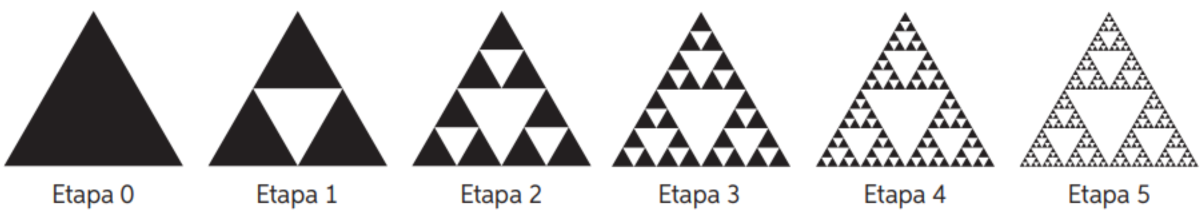
Objetos y procesos: Representaciones en plano cartesiano, conocimientos sobre la función exponencial, uso de propiedades de potencias. Los objetos intensivos representados por las funciones en el plano cartesiano, se debe tener conocimiento sobre familias de funciones para contestar las preguntas de los incisos.

Nivel de algebrización: Tarea en nivel 3 de algebrización, en esta tarea el estudiante debe realizar tratamientos con la incógnita, operando con la variable en lenguaje simbólico,

3.4.1.2 Representación de situaciones

Se presentan planteamientos que son representados a través de imágenes que dan contexto a la descripción del enunciado ayudando a los estudiantes a realizar un análisis de la situación, para luego responder incisos que derivan de las representaciones, teniendo en consideración el contenido que se está ejercitando. figura 3.30

El **triángulo de Sierpinski** es una figura que se construye a partir de un triángulo equilátero (etapa 0), sobre el cual se trazan las medianas y se retira el triángulo central (etapa 1). Para las siguientes etapas, esto se repite en cada uno de los triángulos restantes. En rigor, el triángulo de Sierpinski es la figura obtenida después de infinitas etapas.



a. ¿Cuántos triángulos negros hay en cada etapa? Escríbelo como potencia.

b. ¿Qué función permite modelar la cantidad de triángulos negros $C(n)$ que habrá en la etapa n?

Figura 3.30 Representación situaciones.

Solución esperada: Teniendo en consideración la descripción de lo que ocurre en los triángulos los estudiantes deben inicialmente contar intuitivamente la cantidad de triángulos negros, lo que se pude expresar en una tabla, como se muestra a continuación.

Etapa	Cantidad de triángulos
0	$1 = 3^0$
1	$3 = 3^1$
2	$9 = 3^2$
3	$27 = 3^3$
4	$81 = 3^4$

5	$243 = 3^5$

Deduciendo en ella una relación con la potencia de 3, de esa manera se puede realizar la modelación de la situación en una función donde la incógnita está en el valor del exponente como se muestra a continuación $C(n) = 3^n$

Objetos y procesos: Propiedades de potencias y triángulos, concepto función, se debe encontrar una regla general para hallar el número de triángulos, expresada con lenguaje numérico a un lenguaje simbólico-literal. Se busca la generalidad de las representaciones funcionando como objeto intensivo, para determinarlo se realizan tratamientos con los objetos extensivos que se aprecian en la construcción de los parámetros números que se determinan a través de la el proceso de generaliazación.

Nivel de algebrización: Dada una sucesión representada en figuras se desea modelar la función exponencial, para llegar a ella se deben movilizar el uso de parámetros como registro numérico y el tratamiento de ellos a través de operaciones de variables, por lo que este ejercicio presenta un cuarto nivel de algebrización.

3.4.1.3 Planteamientos

Situaciones que buscan acercar el contenido con el contexto del estudiante llevando el contenido a expresiones fuera de la matemática misma, para incentivar al estudiante a realizar y comprender el uso del contenido.

Resuelve cada situación

Un bosque tiene 28 000 m^3 de madera y aumenta 3,5 % cada año. Si sigue creciendo en las mismas condiciones, ¿cuánta madera tendrá al cabo de 15 años? ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la cantidad de madera?

Figura 3.31 Planteamientos.

Solución esperada: Para contestar las preguntas asociadas primero se debe encontrar una función que modele la situación, como el estudiante ya conoce la forma del crecimiento exponencial y el interés compuesto que son previamente presentadas y explicadas en el libro de texto debe comprender los datos entregados en la situación. Por lo tanto, el crecimiento del bosque esáa dado por la función $M(t) = 28000 \cdot (1 + 0{,}035)^t$, donde M(t) indica la madera, m^3, que tendrá al cabo de t años. Entonces, para t=15, se obtiene $M(15) = 28000 \cdot (1 + 0{,}035)^{15}$, que es aproximadamente $46910\ m^3$.

Para duplicar la cantidad de madera, se debe duplicar la cantidad original 28.000, o sea los $28.000 \cdot 2 = 56.000$ para luego reemplazar los valores en la expresión original encontrada. $56000 = 28000 \cdot (1 + 0{,}035)^t$, operando como ecuación se obtiene la expresión $2 = (1{,}035)^t$, se aplican logaritmos en ambos lados de la igualdad resultando la expresión $log2 = t \cdot log1{,}035$, luego, $t = \frac{log2}{log1{,}035}$ finalmente por propiedades de logaritmo obtenemos $t \approx 20$ años.

Objetos y procesos: Manejo de resolución de ecuaciones, conceptos de crecimiento exponencial e interés compuesto, uso de propiedades de logaritmos. Objetos intervinientes intensivo la función logarítmica solicitada, que se construye a través de los incisos teniendo en consideración conceptos previos para desarrollar la tarea, como lo es el interés compuesto que vendría siendo el objeto extensivo.

Nivel de algebrización: Se le asigna a la actividad matemática nivel 4, ya que requiere del uso de parámetros como registros numéricos, intervienen tratamiento de los objetos intensivos dado que se producen operaciones con las incógnitas.

Tabla 3.4.1 Resumen modelamiento de fenómenos con la función exponencial

CUADRO RESUMEN MODELAMIENTO DE FENÓMENOS CON LA FUNCIÓN EXPONENCIAL		
Tipo de problema	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Representaciones plano cartesiano	5	Nivel 3
Representación de situaciones	2	Nivel 4
Planteamientos	6	Nivel 4

3.4.2 Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

El segundo contenido de tercero medio se ordenaron las tareas propuestas clasificándolas en dos tipos de tareas según lo que pretenden movilizar, estas son: *Representaciones*, *Análisis de situaciones*.

3.4.2.1 Representaciones

En estas tareas a partir de la realización de la gráfica o desde una gráfica dada, se pretende responder preguntas asociadas a los elementos de una función, para luego modelar la función logarítmica ver figura 3.32

Representa la función $f(x) = \log_2 x$. Para ello, realiza lo pedido.

a. Elabora una tabla de valores y grafica la función en el plano cartesiano.

b. A partir de la gráfica, responde:

- ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función?
- ¿En qué punto la gráfica se interseca con el eje X?
- ¿La gráfica interseca el eje Y?
- ¿Qué ocurre con los valores de la función cuando aumenta el valor de x? ¿Es una función creciente o decreciente?

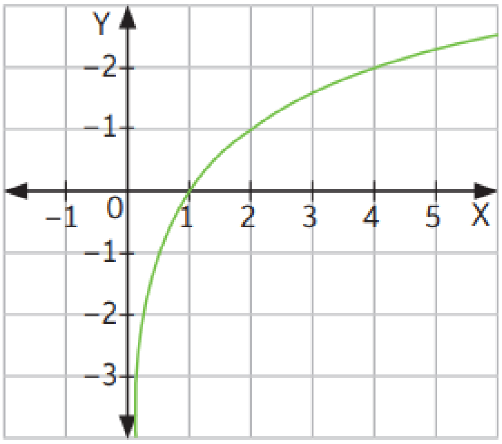
Recuerda que, para una potencia $y = a^x$, se define el logaritmo $x = \log_a y$. Por ejemplo:

$$2^4 = 16 \Leftrightarrow 4 = \log_2 16$$

Figura 3.32 Representaciones.

Solución esperada: Se pueden identificar a primera vista puntos que pertenecen a la función, lo que se puede expresar en la siguiente tabla, luego se puede graficar como la Figura 3.3.4.1.

x	1	2	4
$f(x) = log_2 x$	$f(1) = log_2 1$ $2^y = 1 \rightarrow y = 0$	$f(2) = log_2 2$ $2^y = 2 \rightarrow y = 1$	$f(3) = log_2 3$ $2^y = 4 \rightarrow y = 2$
Punto (x, y)	(1,0)	(2,1)	(4,2)



Luego el dominio es $\mathbb{R}+$ y el recorrido es $\mathbb{R}$., la gráfica interseca al eje X en el (1, 0) y esta se acerca al eje Y, pero no interseca al eje Y. Cuando los valores de x aumentan, los valores de f también aumentan, por lo tanto, es una función creciente.

Objetos y procesos: Representaciones en plano cartesiano, conocimientos sobre la función logarítmica, uso de propiedades de potencias. Intervienen tratamientos con los objetos extensivos que se representan en la función logarítmica dada en el encabezado del planteamiento, haciendo uso de representaciones se determinan las respuestas asociadas, teniendo en consideración la compresión de los objetos descritos.

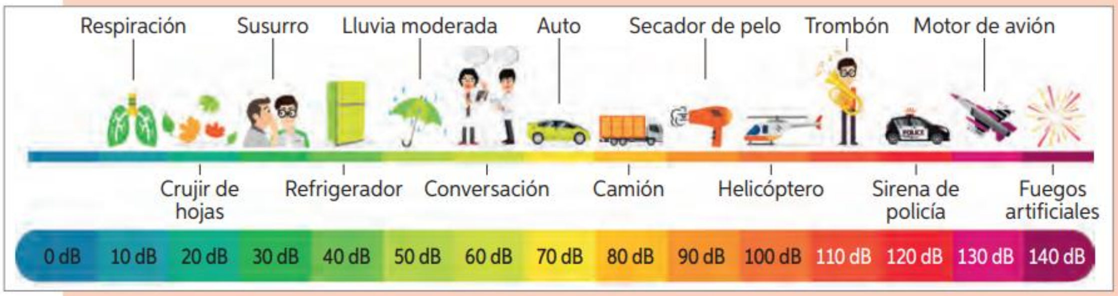
Nivel de algebrización: Tarea en nivel 3 de algebrización, en esta tarea el estudiante debe realizar tratamientos con la incógnita, operando con la variable en lenguaje simbólico.

3.4.2.2 Análisis de situaciones

Situaciones que buscan acercar el contenido con el contexto del estudiante llevando el contenido a expresiones fuera de la matemática misma, para incentivar al estudiante a realizar y comprender el uso del contenido.

Lee la siguiente información. Luego, responde.

La intensidad del sonido se mide en vatios por metro cuadrado (W/m²). La menor intensidad que puede captar el oído humano, llamado **umbral de audición,** es 10^{-12} W/m². A partir de 1 W/m², comienza el **umbral del dolor** en el oído. Para comparar un sonido cualquiera con la menor intensidad audible, se utiliza la siguiente función: $\beta(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde β es el nivel de intensidad sonora medido en decibeles (dB), I es la intensidad del sonido en W/m² e I_0 es el umbral de audición (10^{-12} W/m²).



a. Calcula el nivel de intensidad sonora (en decibeles) del umbral del dolor.

b. Escoge 3 situaciones de las que aparezcan en la imagen y calcula la intensidad de sonido (W/m²) de cada una.

c. En general, se recomienda que, al usar audífonos, no se superen los 80 dB. Sin embargo, muchas personas los utilizan cerca de los 100 dB.

- ¿Cuál es la intensidad del sonido de estas magnitudes?
- ¿Cuántas veces mayor es la intensidad de los 100 dB que la recomendada?

Figura 3.33 Análisis de situaciones.

Solución esperada: Teniendo en consideración la información entrega y la expresión que se entrega, la función $\beta(I) = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, el termino I debe ser reemplazo por el umbral de dolor $1\ W/m^2$ quedando así la expresión $\beta(1) = 10log\left(\frac{1}{10^{-12}}\right)$ de este modo se debe desarrollar la expresión con las propiedades de logaritmos $\beta(1) = 10(log1 - \ log10^{-12})$ continuando con las propiedades de logaritmos obtenemos $\beta(1) = 10(log1 - 12log10)$, luego se tiene la expresión $\beta(1) = 10(0 + 12)$, finalizando con operaciones aritméticas $\beta(1) = 120$. Se pude concluir entonces que el nivel de intensidad del umbral de dolor es de 120.

Objetos y procesos: Funciones y propiedades de logaritmos, operaciones aritméticas, comprensión de situaciones para desarrollar expresiones. La función logarítmica representa los objetos intensivos y los valores con lo que se realizan los tratamientos de calculo son los objetos extensivos que facilitan la transición y generalización de los parámetros existentes en la situación algebraica.

Nivel de algebrización: Acercamiento al uso de parámetros como expresiones numéricas, además de uso de familias de funciones, lenguaje simbólico- literal. Tareas en nivel 4 de algebrización.

Tabla 3.4.2. Resumen modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

CUADRO RESUMEN MODELAMIENTO DE FENÓMENOS CON LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA		
Tipo de problema	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Representaciones	7	Nivel 4
Análisis de situaciones	5	Nivel 4

A continuación, tabla de resumen del curso tercero medio dado sus contenidos, cantidad de tareas que se presentan en el libro de texto y el nivel de razonamiento algebraico promovido que se detectó.

Tabla 3.4.3 Resumen tercero medio

CUADRO RESUMEN TERCERO MEDIO		
Contendido	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Modelamiento de fenómenos con la función exponencial	13	Tercer/cuarto nivel
Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica	12	Cuarto nivel

3.5 Análisis de plan de estudio y libro de texto de Cuarto medio

Como se mencionó anteriormente el libro de texto de cuarto medio es compartido entre los dos últimos años de educación media, correspondiéndole la segunda mitad a este curso, específicamente entre las páginas 106 – 218. Al igual que el resto de los libros estudios, está dividido en los cuatro ejes del curriculum nacional, siendo de interés de este proyecto el eje de álgebra y funciones que lleva por nombre “modelamiento matemático para describir y predecir”, los contenidos que presenta son: Construcción de modelos con la función potencia (p. 139 - 148) y Construcción de modelos con la función seno y coseno (p. 148 - 157).

Los objetivos de aprendizaje de este curso se presentan en la siguiente tabla detallando la división de la unidad de álgebra y funciones en los dos temas expuestos anteriormente y con una aproximación a priori del nivel de razonamiento que se pretende movilizar dado el objetivo de aprendizaje.

Tabla 3.5 Objetivos cuarto medio

Temas	Objetivos de aprendizaje	Nivel a priori de razonamiento algebraico
Construcción de modelos con la función potencia	Reconocer y analizar crecimiento y decrecimiento de la función potencia Modelar situaciones mediante la función potencia para exponente positivo. Analizar el comportamiento de la función potencia de exponente negativo.	Cuarto/ quinto Nivel
Construcción de modelos con las funciones seno y coseno	Analizar el comportamiento gráfico de las relaciones trigonométricas seno y coseno Comprender el comportamiento de las funciones seno y coseno Modelar situaciones mediante la función seno	Cuarto/ quinto Nivel

Los objetivos de aprendizaje identificados del plan curricular propuestos para cuarto medio en el eje temático de álgebra, estarían movilizando el cuarto y quinto nivel de razonamiento algebraico, esto se debe a que en la propuesta de Godino (2016), en dichos niveles se contempla el estudio del tratamiento de las incógnitas y variables aplicando propiedades estructurales y la aparición de los parámetros como números, además respectivamente, un nivel superior de algebrización ligado a la actividad matemática desplegada cuando se realizan cálculos analíticos en los que intervienen uno o más parámetros, conjuntamente con otras variables De hecho, esto se corresponde con la sugerencia dada por Godino (2016), quien indica que los niveles 4 y 5 están establecidos para los últimos años de enseñanza media, siendo esto de manera previa acertado en el plan de estudios chileno.

3.5.1 Construcción de modelos con la función potencia

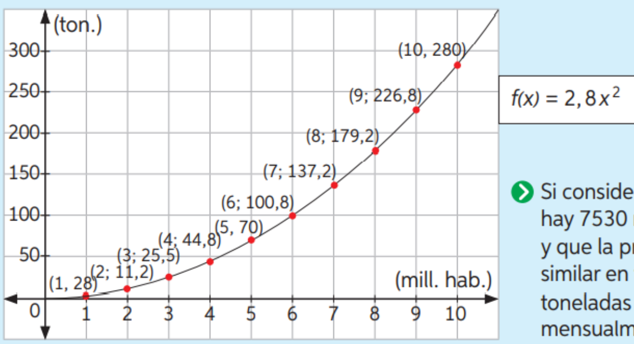
El primer contenido de cuarto medio en el eje de álgebra y funciones, se clasificaron las tareas propuestas según lo que pretenden movilizar en tres tipos de tareas, estas son: *Uno de gráficos, modelamiento*, *Análisis de situaciones.*

3.5.1.1 Uso de gráficos

Las tareas usualmente recuren a el uso de grafico en el plano en planteamientos que el contenido en su mayoría funciones pueda ser visualiza y un apoyo en la comprensión para los estudiantes, eso lo podemos ejemplificar en la Figura 3.34

Analiza la siguiente información. Luego, respondan en parejas.

La cantidad de basura en toneladas que se genera mensualmente por cada millón de habitantes en cierto país está representada en el siguiente gráfico:



Si consideramos que en el mundo hay 7530 millones de habitantes y que la producción de basura es similar en todas partes, ¿cuántas toneladas de basura se generan mensualmente en el planeta?

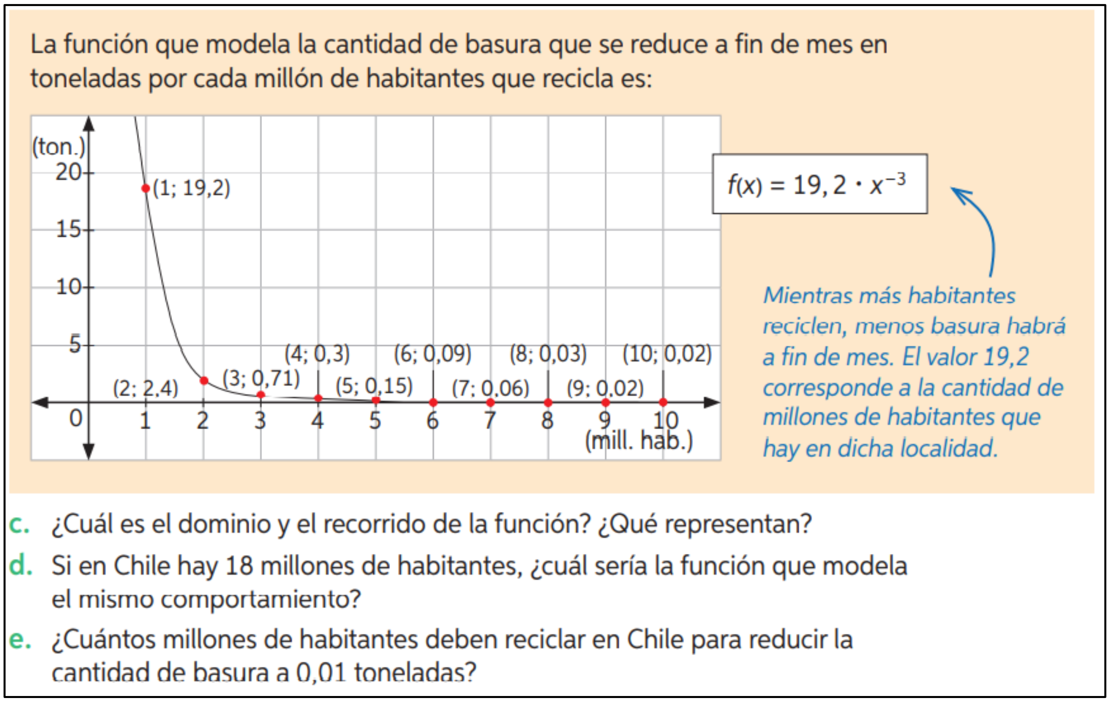
a. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? ¿Qué representa cada variable?

b. Si en ese país hay aproximadamente 19,2 millones de habitantes, ¿cuántas toneladas de basura se generan mensualmente?

Figura 3.34 Uso de gráficos.

Solución esperada: Inicialmente se debe contestar la pregunta que se encuentra a un lado del gráfico, para eso se debe reemplazar el valor que representa a los habitantes del mundo, en la función que modela la situación quedando $f(7530) = 2{,}8 \cdot (7530)^2$, siendo entonces aproximadamente 158 billones de toneladas. Para el inciso a, el estudiante se debe percatar que Dom: $\mathbb{R}+ \cup \{0\}$; Rec: $\mathbb{R}+ \cup \{0\}$; x representa la cantidad de habitantes y *f(x)* la producción de basura. Para el inciso b, se debe realizar el mismo proceso de la pregunta inicial siendo ahora $x = 19{,}2$, lo que significa $f(19{,}2) = 2{,}8 \cdot (19{,}2)^2$, realizando las operaciones correspondientes se tiene son 1032 millones de toneladas.

Luego la tarea presenta una segunda parte que se muestra en la figura 3.4.2.


La función que modela la cantidad de basura que se reduce a fin de mes en toneladas por cada millón de habitantes que recicla es:

c. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? ¿Qué representan?

d. Si en Chile hay 18 millones de habitantes, ¿cuál sería la función que modela el mismo comportamiento?

e. ¿Cuántos millones de habitantes deben reciclar en Chile para reducir la cantidad de basura a 0,01 toneladas?

Figura 3.35 Uso de gráficos II

Solución esperada: Para inciso c, Dom: ℝ+; Rec: ℝ+, x representa los millones de habitantes y $f(x)$ la cantidad de basura reciclada. Para el inciso d, se debe reemplazar el valor 19,2 que se presenta en el grafico en la función, por 18 ya que esa es la cantidad de habitantes $f(x) = 18(x)^{-3}$

Objetos y procesos: Función potencia, reemplazar valores en expresiones dadas, comprensión de planos cartesianos y análisis de situaciones. Los tratamientos que se realizan están asociados a los objetos que emergen de la situación planteada, teniendo en consideración que inicialmente el planteamiento requiere de conocimientos asociados remplazar valores en una ecuación dada siendo este el objeto extensivo, para luego en los incisos de la Figura 3.35 desarrollar tratamientos con el objeto.

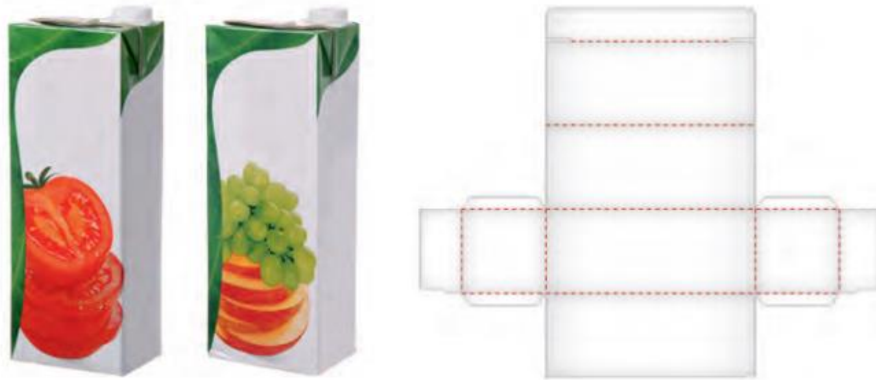
Nivel de algebrización: Tarea en nivel 3 de algebrización, en esta tarea el estudiante debe realizar tratamientos con la incógnita, operando con la variable en lenguaje simbólico.

3.5.1.2 Análisis de situaciones

Se presentan en el libro de texto de cuarto medio al igual que en otros libros analizados situaciones que desde un planteamiento con contexto que puede ser conocido o de interés para los estudiantes se relaciona con el contenido a trabajar, eso lo podemos ejemplificar en la Figura 3.36

Analiza la siguiente información y realiza las actividades.

Una empresa de jugos diseña el siguiente envase:



a. ¿Cuál es el volumen de la caja en cm^3 si la x mide 2 cm, 3 cm o 4 cm?

b. ¿Cuál es la superficie de la caja en cm^2 si la x mide 2 cm, 3 cm o 4 cm?

c. ¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar el área y el volumen de la caja?

d. ¿Cuál es el recorrido de las funciones anteriores?

e. Compara los crecimientos de ambas funciones. ¿Cuál crece más rápido?

f. Si la compañía de jugos quiere gastar menos de 350 cm^2 y envasar más de 370 cm^3 utilizando su envase, ¿qué valor recomendarían para la arista? Discútanlo en parejas.

Figura 3.36 Análisis de situaciones

Solución esperada: Para inciso a él volumen para $x = 2$ se debe multiplicar $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24\ cm^3$, $x = 3$ se debe multiplicar $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81\ cm^3$, finalmente para $x = 4$ se debe multiplicar $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 192\ cm^3$. Para b $x = 2$ se debe multiplicar $4 \cdot \big(2 \cdot (3 \cdot 2)\big) + 2 \cdot (2 \cdot 2) = 56\ cm^2$, para $x = 3$ se debe multiplicar $4 \cdot \big(3 \cdot (3 \cdot 3)\big) + 2 \cdot (3 \cdot 3) = 126\ cm^2$, luego para $x = 4$ se debe multiplicar $4 \cdot \big(4 \cdot (3 \cdot 4)\big) + 2 \cdot (4 \cdot 4) = 224\ cm^2$. Para modelar el volumen se puede expresar como $x \cdot x \cdot 3x$ lo que resulta $3x^3$, luego en la superficie $4 \cdot \big(x \cdot (3x)\big) + 2 \cdot (x \cdot x)$, que finalmente es la expresión $14x^2$.el recorrido es $\mathbb{R}$+, la función de la superficie crece más rápido. Para 350 cm^2 la arista debe ser menor a 5 y para 370 cm^3 debe ser 18.

Objetos y procesos: Superficie y volumen de cuerpos geométricos, modelación de fenómenos, función potencia, crecimiento y decrecimiento de funciones. Todos los incisos que presenta esta situación emergen en la necesitad que encontrar la generalidad del volumen de la figura representada y luego realizar tratamientos con la expresión encontrada. Se identifican los objetos extensivos como los lados de la representación y el objeto intensivo con la expresión encontrada dado los tratamientos realizados.

Nivel de algebrización: Como se debe razonar en términos de un parámetro que pertenece a la función potencia, por lo que pertenece a una familia de funciones, se le asigna el cuarto nivel de razonamiento algebraico.

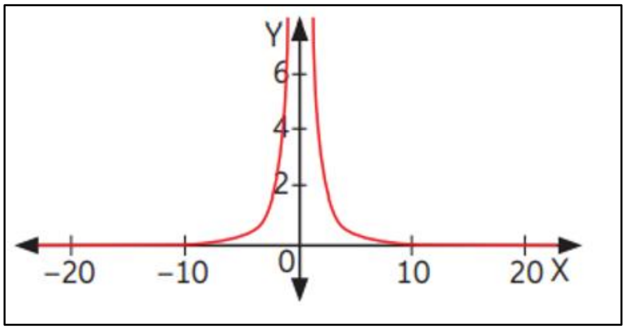
Analiza la siguiente información.

El tiempo de vaciado (en minutos) de una barrica es inversamente proporcional al flujo de líquido que se deja salir.

a. Plantea la función que modela el tiempo en función del radio del agujero.
b. ¿Cuáles son los coeficientes *a* y *n* de la función potencia?
c. ¿Cuál es dominio de la función? Compara tu respuesta con un compañero.
d. ¿Es posible determinar el recorrido de la función? Justifica tu respuesta.
e. En tu cuaderno, construye el gráfico de la función.

Figura 3.37 Análisis de situaciones II.

Solución esperada: La función que modela el tiempo en función del radio del agujero queda representada por $T(r) = \frac{10}{\pi r^2}$. Siendo el coeficiente $n = -2$ y $a = \frac{10}{\pi}$ de la función potencia. El dominio de la función $Dom:]0,50]$ ya que la función depende de r y no puede superar el radio máximo. El recorrido es $Rec:]0, \infty[$, finalmente el grafico de la función queda representado en la Figura 3.4.4.1.



Objetos y procesos: Desde un objeto físico cotidiano se pretende realizar la modelización de la función potencia, utilizando conceptos de geometría, funciones y planos cartesianos. Emergen objetos extensivos e intensivos tales como la expresión dada y la expresión desarrollada respectivamente, se busca llegar a la particulación de la expresión haciendo uso de cálculos y representaciones de los objetos mencionados.

Nivel de algebrización: El estudiante debe hacer uso a procesos de operación con incógnitas y realizar cálculos analíticos donde intervienen parámetros, por lo que se clásica en el cuarto/quinto nivel de razonamiento algebraico

Tabla 3.5.1 Resumen construcción de modelos con la función potencia

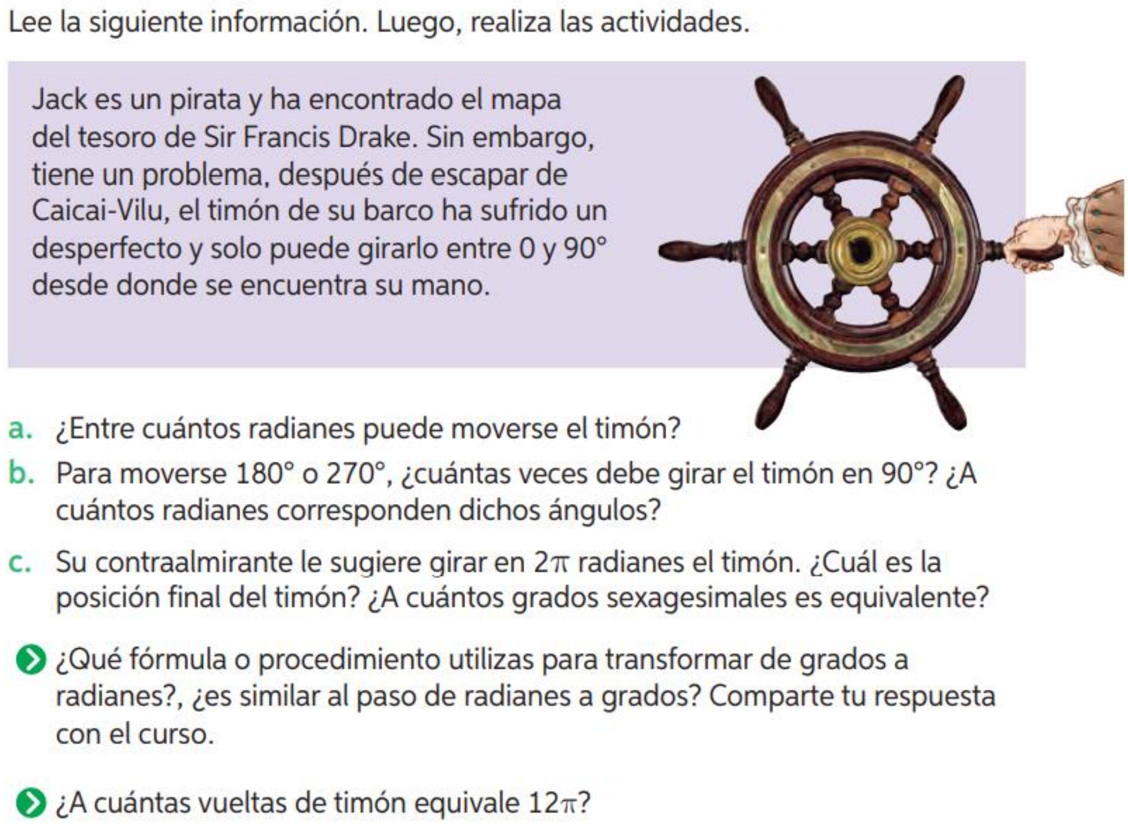
CUADRO RESUMEN CONSTRUCCIÓN DE MODELOS CON LA FUNCIÓN POTENCIA		
Tipo de problema	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Uso de gráficos	7	Nivel 4
Análisis de situaciones	4	Nivel 4 y 5

3.5.2 Construcción de modelos con las funciones seno y coseno

En el segundo contenido de cuarto medio se ordenaron las tareas propuestas clasificándolas en tres tipos de tareas según lo que pretenden movilizar, estas son: *Uso de gráficos y Análisis de situaciones.*

3.5.2.1 Análisis de situaciones

Este tipo de tareas está asociada a la realización de ejercicios que plantean la intervención de alguna situación que resulte atractiva al estudiante en la cual pueda comprender y sociabilizar el contenido que se desea explorar, a continuación, un ejemplo de este tipo de tarea en la Figura 3.38



Lee la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Jack es un pirata y ha encontrado el mapa del tesoro de Sir Francis Drake. Sin embargo, tiene un problema, después de escapar de Caicai-Vilu, el timón de su barco ha sufrido un desperfecto y solo puede girarlo entre 0 y 90° desde donde se encuentra su mano.

a. ¿Entre cuántos radianes puede moverse el timón?

b. Para moverse 180° o 270°, ¿cuántas veces debe girar el timón en 90°? ¿A cuántos radianes corresponden dichos ángulos?

c. Su contraalmirante le sugiere girar en 2π radianes el timón. ¿Cuál es la posición final del timón? ¿A cuántos grados sexagesimales es equivalente?

- ¿Qué fórmula o procedimiento utilizas para transformar de grados a radianes?, ¿es similar al paso de radianes a grados? Comparte tu respuesta con el curso.

- ¿A cuántas vueltas de timón equivale 12π?

Figura 3.38 análisis de situaciones.

Solución esperada: Para el inciso a. se debe realizar la proporcionalidad que presentan los radianes $\pi rad = 180°$, por lo tanto, como se puede mover entre 0° y 90° proporcionalmente se puede mover entre $0\ rad$ y $\frac{\pi}{2} rad$. Para moverse 180° debe girar dos veces el timón y para moverse 270° debe girar tres veces, las corresponden a π y $\frac{3\pi}{2}$ radianes respectivamente. En el inciso c el timón vuelve a la posición inicial, es equivalente a 360° como sabemos que un πrad equivale a 180°, entonces $x = \frac{\pi \cdot (\text{grados})}{180°}$. Finalmente, reemplazando los 12π en la expresión recién encontrada el timón da 6 vueltas.

Objetos y procesos: Compresión de la función seno, conceptos de radianes, uso de proporcionalidad directa, comprensión del signo igual y de situaciones en contexto no puramente matemático. Los objetos presenten son intensivos dado el tratamiento para determinar la generalidad que predomina en la comprensión de los radianes y el tratamiento de estos con relación al contexto involucrado, siendo estos los objetos extensivos.

Nivel de algebrización: Desde una descripción de una situación contextualizada se desea contestar preguntas asociadas a la situación es por ello que se movilizaran procesos reflexivos y de compresión del contenido, utilizando los parámetros como registros numéricos por lo que esta tarea se asocia al nivel 4 de razonamiento algebraico.

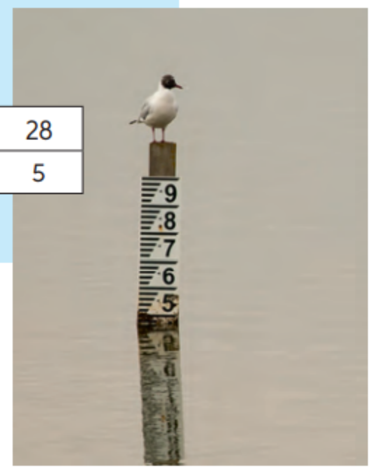
3.5.2.2 Uso de representaciones

Cuando se utilizan representaciones nos referimos a las tablas o gráficos en el plano en este contenido son una forma de dar a conocer los valores de las variables que conformarán una función en apoyo para realizar algún cálculo que finalmente conteste las preguntas asociadas. Figura 3.4.6

Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

En una bahía se tomaron los siguientes datos de la variación de la altura en pulgadas del agua sobre una vara marcada.

Días	0	3	7	10	14	18	21	25	28
Altura	5	7,5	9	8	5	1,8	1	2,5	5



Se quiere modelar la altura en función de los días:

a. ¿Cuál es el periodo y la amplitud de la función?

b. ¿Cuánto se debe trasladar horizontalmente?

c. ¿Cuánto se debe trasladar verticalmente si se modela mediante la función seno?

d. Plantea la función seno para modelar los datos.

e. ¿Es un buen modelo? Elabora una tabla para contrastar el modelo con los datos obtenidos.

f. ¿Cada cuántos días se debe esperar marea alta?, ¿cuántos días después habrá marea baja?

g. ¿Qué modificación hay que realizar en la función para medir la altura en centímetros? (1 pie = 2,54 cm)

Figura 3.39 Uso de representaciones.

Solución esperada: La amplitud equivale a la mitad entre la diferencia de los valores máximo y mínimo del recorrido de la función, por tanto, la altura máxima menos la menor dividido en dos, esto es $9 - 1 = 8 : 2 = 4$, el periodo es de 28 días. No hay traslado horizontal, se debe trasladas verticalmente 5 unidades. La función que modela los datos es $f(x) = 4sen\left(\frac{\pi}{14}x\right) + 5$, cada 28 días habrá marea baja y marea alta. Para medir la altura en centímetros hay que tener en consideración $1pie = 2{,}54\ cm$ luego

$$f(x) = 10{,}16sen\left(\frac{\pi}{14}x\right) + 5$$

Objetos y procesos: Compresión de las características y uso de la función seno, modelamiento matemático de situaciones, conceptos de amplitud y periodo. Se trabajan procesos con los parámetros expresados en los objetos intensivos intervinientes, estos se determinar analizando la representación tabular que trae la tarea y concluyendo en la generalización del objeto intensivo en la función seno.

Nivel de algebrización: Usos de cálculos analíticos de parámetros con variables, se ponen en juego sistemas de prácticas de los objetos algebraicos por lo que se encuentra en quinto nivel de algebrización.

Tabla 3.5.2 Resumen construcción de modelos con las funciones seno y coseno

CUADRO RESUMEN CONSTRUCCIÓN DE MODELOS CON LAS FUNCIONES SENO Y COSENO		
Tipo de problema	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Uso de representaciones	5	Quinto nivel
Análisis de situaciones	2	Cuarto nivel

A continuación, tabla de resumen cuarto medio dado los contenidos que fueron expuestos en el libro de texto, incluyendo la cantidad de tareas por contenido y finalmente el nivel de razonamiento algebraico que se promueve en el nivel académico.

Tabla 3.5.3 Resumen cuarto medio

CUADRO RESUMEN CUARTO MEDIO		
Contendido	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Construcción de modelos con la función potencia	11	Cuarto/quinto nivel

Construcción de modelos con las funciones seno y coseno	7	Cuarto/quinto nivel

A continuación, se presenta la tabla 3.6 a modo de facilitar al lector todo lo expuesto en el análisis realizado, este pretende resumir por curso de enseñanza media desde primero a cuarto medio, la cantidad de tareas presentes en el libro de texto y el nivel de razonamiento algebraicos pretendidos que se promueve en cada uno de los cursos analizados.

Como es evidente la cantidad de tareas que se presentan en la unidad de álgebra va en disminución a medida que los cursos van en aumentando, eso se puede deber al curriculum nacional chileno en primero y segundo medio el plan curricular es igual para todos los estudiantes con 6 horas semanales, en cambio en tercero y cuarto medio, el plan común, en donde se utiliza el texto es reducido a 3 horas semanales, para que los estudiantes puedan optar por planes diferenciados, en el cual los estudiantes eligen profundizaciones de diferentes áreas que no necesariamente son matemáticas.

Tabla 3.6 Resumen enseñanza media

CUADRO RESUMEN ENSEÑANZA MEDIA		
Curso	**Cantidad de tareas**	**Nivel razonamiento algebraico**
Primero medio	216	Tercer nivel
Segundo medio	166	Segundo/tercero/cuarto nivel
Tercero medio	25	Tercer/cuarto nivel
Cuarto medio	18	Cuarto/quinto nivel

Es importante destacar que los cursos de enseñanza media en su mayoría no se enmarcan en la promoción de un solo nivel de razonamiento algebraico, ya que existen diferentes propuestas de planteamientos, actividades, tareas en los libros realizados por el ministerio de educación chileno. Por lo mismo existen tareas que se encuentras difusas entre niveles, debido a que presentan características de un nivel, pero indicios del próximo nivel asociado, siendo estas tareas complejas de encasillar en un solo nivel.

Finalizando en capítulo, es importante recordar que el nivel de razonamiento algebraico está asociado a la actividad matemática realizada cuando se resuelve una tarea, no a la tarea en si, por lo que este estudio pretende caracterizar los niveles de razonamiento algebraico que se promueven en curriculum chileno, teniendo en consideración que los estudiantes pueden resolver las tareas de diferentes formas.

CAPÍTULO 4
CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

4.1 Introducción

En este capítulo presentaremos los resultados más relevantes que se han obtenido durante el desarrollo de cada uno de los capítulos que conforman esta investigación. Dado que el objetivo general planteado en esta investigación buscaba caracterizar el razonamiento algebraico que pretende promover el plan curricular nacional chileno en sus libros de textos y plan de estudios de matemática de enseñanza media, para lograr dicho objetivo, fue necesario plantearse algunos objetivos específicos en los cuales se propusieron una serie de acciones metodológicas que se detallan a continuación, las cuales servirán para determinar en qué medida se ha respondido la pregunta de investigación planteada.

4.2 Acciones metodológicas

OE1. Determinar el tipo de razonamiento algebraico que, en la literatura científica, se sugiere promover en la enseñanza media.

- Para ello fue necesario realizar un estudio de la literatura internacional y nacional en el área, en estos se pudo observar la relevancia que cobra el objeto matemático razonamiento algebraico, dado que se presenta una actividad matemática compleja de desarrollar y que es necesaria para la compresión del álgebra.

OE2. Estudiar e identificar el tipo de situaciones (problemas, tareas, ejercicios, etc.) y sus soluciones, con los cuales el curriculum chileno de matemática de enseñanza media, considerado plan de estudio y libros de texto, desarrolla razonamiento algebraico.

- Se estudiaron los objetivos de aprendizaje que se proponen para los cursos de enseñanza media chilena, que se presentan en el plan de estudio realizado por el ministerio de educación.
- Se identificaron las situaciones que plantean los libros de texto de enseñanza media (1°, 2°, 3° y 4° medio) en la unidad de álgebra y funciones, de estos se pudieron estudiar los contenidos que se presentan en la unidad, los ejemplos y situaciones o problemas asociados con el objeto matemático.

- Se resolvieron las situaciones plateadas en los libros de texto de enseñanza media chilena relacionadas con el álgebra, según lo que se propone en el mismo texto, a través, de los ejemplos que se presentan al inicio de la gran mayoría de actividades y tareas que se presentan.

OE3. Analizar las prácticas matemáticas identificadas en OE2, y los objetos y procesos movilizados en ellas, asociándolas con algunos de los niveles de razonamientos algebraicos propuestos al seno del enfoque onto semiótico.

- Para ello se agruparon las situaciones según el tipo de actividad matemática que se moviliza en las respuestas que denominamos como respuestas esperadas, identificando las prácticas, los objetos y procesos. Se destaca en esta acción metodológica lo repetitivo de las tareas que presenta el libro de texto, se consideran tareas que se desarrollan de la misma manera una y otra vez lo que permitió agruparlas sin mucha dificultad.
- Dada la acción metodológica anterior se clasificaron las respuestas esperadas según el nivel de razonamiento algebraico que se identifica en las actividades matemáticas que intervienen al momento de resolver las situaciones que presenta el libro de texto de cada curso de enseñanza media chilena.
- Con un total de 425 tareas propuestas en los libros de texto se puede concluir que el curriculum chileno de matemática promueve predominantemente en enseñanza media desde 1ero a 4to medio los niveles 3 y 4 de razonamiento algebraico. Además, existen tareas que promueven los niveles 1, 2 donde la minoría, por otro lado, también hay tareas que son aritméticas, por lo tanto, no promueven la algebrización.
- Es importante destacar que el quinto nivel de razonamiento algebraico no fue detectado en su plenitud en las tareas planteadas en el curriculum, se detectaron algunos indicios de este nivel, pero no completamente, siendo un déficit en el curriculum chileno ya que la literatura propone el quinto nivel en secundaria, situación que no pudo ser detectada en esta investigación.
- Es necesario hacer mención que las fronteras entre los niveles pueden a veces ser difusas y que dentro de cada nivel es posible hacer distinciones que podrían llevar a proponer nuevos niveles o subniveles, ya que existen tratamientos que pueden encontrarse en más de un nivel.

4.3 Aportaciones y cuestiones abiertas

A continuación, presentamos las principales aportaciones de nuestra investigación en la educación matemática y posibles líneas de investigación que quedan abiertas para nuevas investigaciones en didáctica de la matemática.

Dentro de las aportaciones de esta investigación, se destaca la importancia de la caracterización del razonamiento algebraico en el curriculum chileno, considerando los niveles de algebrización que se han evidenciado en esta investigación, siendo un aporte para el profesorado de matemática a la hora de planificar la unidad de álgebra, los problemas y situaciones que puede proponer para reforzar los contenidos y niveles que se desean alcanzar desde el ministerio de educación chileno.

Además, los niveles de algebrización promovidos que se hallaron en el proyecto se pueden tomar como indicador del contenido básico que debe saber un profesor, considerando este un conocimiento común para los docentes en ejercicio y más aún para que las instituciones que imparten carreras de futuros profesores de matemática lo tengan en consideración en las asignaturas asociadas al álgebra en sus mayas curriculares.

Siendo conscientes que esta investigación abarcó el plan común de matemática en el curriculum nacional es importante destacar que en Chile, en los últimos dos años de enseñanza media correspondientes a los cursos de 3ero y 4to medio se reducen sus contenidos en el plan común, ya que por elección deben optar por profundizaciones en las cuales se encuentran contenidos asociados a la asignatura de matemática, donde quizás se promueven los niveles 5 y 6 de razonamiento algebraico que no se detectaron en el plan común del curriculum chileno, siendo esta una línea abierta de investigación y profundización de este proyecto.

Además, aún quedan cuestiones abiertas que pueden dar pie a investigaciones que podrían ser la continuidad de nuestro estudio como, por ejemplo, caracterizar las prácticas matemáticas que realizan los profesores, tomando los niveles de razonamiento promovido en curriculum como el conocimiento común del profesor de matemática, el conocimiento ampliado los niveles 5 y 6 de razonamiento algebraico y conocimiento especifico referido a la faceta epistémica del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) del profesor (Pino-Fan y Godino, 2015)

REFERENCIAS

Alencar, E. S., Urrutia, M. C. M., & Soares, M. R. (2021). PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN LIBROS DE TEXTO DEL PRIMER AÑO DE PRIMARIA. *Imagens da Educação*, *11*(3), 17-40.

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* (Tesis Doctorado). Universidad de Granada, España.

Aké, L., Castro, W., y Godino, J. (2015) Niveles de razonamiento algebraico en la actividad matemática de maestros en formación: Análisis de una tarea estructural. *El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación*, 4,1524-1532.

Aké, L., Godino, J. (2018) Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática,* vol. 30, núm. 2,

Alsina, A., y Pincheira, N. (2021) El álgebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria: implicaciones para la formación docente. Bolema, Rio Claro (SP), v. 35, n. 71, p. 1316-1337, dez. 2

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). Approaches to Algebra. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. L., y Kaput, J.J (2003). Developing elemetay teachers´ "algebra eyes and ears: Understanding Characteristics of Professional Development that Promote Generative and Self-Sustaining Change in Theacher Practice". *Teaching Children Mathematics*, 10, 70-77.

Breiteig, T. y Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: to reason, explain, argue, generalize and justify. En Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 225-232). PME: Prague.

Butto, C., y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: Abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16(1), 113-148.

Cai, J., y Knuth, E (2011). *Early algebraization. A gloval dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer- Verlag.

Carraher, D. W., Schliemann, A.D., Brizuela, B. M., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87.

Castro, W. F., y Godino, J. D.(2008). Evaluación del razonamiento algebraico elemental en futuros maestros; Un estudio exploraratorio. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L Blanco (Eds), *Investigación en educación Matemática*. XII Simposio de la SEIEM (pp.273-282). Badajoz

Castro, W.F.,Martinez-Escobar, J.D., y Pino-Fan, L. R. (2017) Niveles de Algebrización de la Actividad Matemática Escolar: Análisis de Libros de Texto y Dificultades de los Estudiantes REDIMAT, Vol. 6 No. 2 , pp. 164-191

Carraher, D.W., Schliemann, A.D. & Schwartz, J. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades. Mahwah, NJ, Erlbaum, pp. 235-272.

Cooper, T. J., y Warren, E. (2008) Generalising mathematical structure in Years 3-4: A case study of equivalence of expression. In Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano, T. y Sepulveda, A., (Eds) *Proceedings of the 32th Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, (pp.369-376). Morelia, Mexico.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 10(1), 7-38

Creswell, J. W. (2009). Research Design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches (3.a ed.). Londres: Sage

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Educaction Journal, 14,* 1-35.

Font, V., y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educacao Matematica Pesquis*a, 8(1), 67-98.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T (2008). Educational algebra. A theorical and empirical approach. New York: Springer.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 22(2/3), pp. 237-284.

Garrido, V. (2010). Introducción a la cinemática. *Revista Texas Instruments.* Recuperado de https://education.ti.com/-/media/B1E8AD5183724688AC67B7F772EB0

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias, 32.1, 199-219. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.96

Godino, J.D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherche en Didactique des Mathématiques, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education, 39 (1), 127-135.

Godino, J. D; Castro, W; Aké, L., y Wilhelmi, M.D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.

Godino, J. & Font, V. (2000). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros. Universidad de Granada. Recuperado de: http://ddm.ugr.es/personal/jdgodino/ manual/ralgebraico.pdf.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2009). Systems of practices and configurations of objects and processes as tools for the semiotic analysis in mathematics education. Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education - 3rd Meeting. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17.

Godino, J.D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017) Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, 31, 90-113.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M.D., Etchegaray, S., y Lasa, A. (2015) Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas Ontosemiótico y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8, 117-142.*

Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the" voice" of a mathematics textbook. Journal for Research in Mathematics Education, 38(4), 344-369.

Kaput, J.J. (2000) *Trasforming algebra from a engine of inquity fo an engine of methematicaal power by"algebrafying" the K-12 curriculum*: National Center of Im proving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA). Dartmounth, MA.

Kaput, J.; Blanton, M. L. (2001) Algebrafying the elementary mathematics experience ICMI STUDY CONFERENCE, University of Melbourne. 2001, v. 1, p. 344 - 350. (H. Chick, K. Stacey, J. Vicent., y J. Vicent (Eds). Artículo presentado en The Future of the Teaching and Learning of Algebra).

Kieran, C. (1992). The learning and taching of school algebra. En D. Grouws (ED), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (390-490). New York: Macmillan

MINEDUC. Bases Curriculares 2016: Educación Media Matemática. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación, 2016.

MINEDUC (2020). Texto del estudiante 1° medio. Santillana del Pacífico S. A. de Ediciones. Andrés Bello 2299 Piso 10, oficinas 1001 y 1002, Providencia, Santiago (Chile).

MINEDUC (2020). Texto del estudiante 2° medio. Santillana del Pacífico S. A. de Ediciones. SM S.A. Coyancura 2283 piso 2. Providencia, Santiago (Chile).

MINEDUC (2020). Texto del estudiante 3° y 4° medio. Santillana del Pacífico S. A. de Ediciones. SM S.A. Coyancura 2283 piso 2. Providencia, Santiago (Chile).

Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores P. Bolea (Eds.). Investigación en Educación Matemática XII, 53-69. SEIEM. La Laguna.

Ortiz, J. J. (2002). La probabilidad en los libros de texto. Universidad de Granada

Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective, PME-NA, Vol. 1, 2-21.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students´ Non- Symbolic Algebraic Thinking. En, J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Eary algebraizacion. Advances in mathematics education*. (pp.303-320). Berlin: Springer-Verlag.

Reys, B. J., Reys, R. E. y Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61-66

Wagner, S., y Kieran, C. (1989). Research issues in the learning and teaching of algebra. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: ErlbaumKieran