UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

POSTGRADOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LA NOCIÓN DE PROBABILIDAD Y LOS SIGNIFICADOS PROMOVIDOS EN EL CURRÍCULO DE PRIMERO MEDIO EN CHILE

POR

YESENIA UICAB CAMPOS

Tesis presentada para optar al grado académico de Magíster en Educación Matemática

Profesora guía: Dra. Ismenia Guzmán Retamal

Osorno, sur de Chile. Diciembre de 2022

Para Sami, Juli y Luis.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, a quienes les dedico y con quienes comparto cada logro.

Juli y Sami, gracias por su paciencia y su apoyo, por sus silencios en las horas de clase y por ser parte de mis pruebas y experimentos; son las mejores hijas para esta despistada madre. Luis, gracias por animarme y motivarme siempre a ser mejor en cada aspecto, por respetar mis creencias y por alumbrarme y mostrarme la dirección cuando la luz se me apaga.

A mi mamá, quien en ningún momento ha dejado de creer en mí y en mis capacidades. Le aseguro que esa confianza ha sido suficiente cuando me ha faltado la propia.

A la Dra. Ismenia Guzmán, mi querida amiga y directora; trabajar con usted ha hecho que este avance profesional haya sido un paseo siempre agradable y ameno; me llevo sus conocimientos y pláticas siempre interesantes y productivas.

A todos mis profesores y compañeros del Magíster en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos; con sus aportes en cada discusión e intervención aprendí muchísimo.

A la Dra. María Gea y al Dr. Vicent Font; estoy muy agradecida por todo el apoyo que recibí de su parte.

A Dios, por la vida y la salud para poder realizar cada proyecto que me he propuesto.

Esta investigación contó con el apoyo financiero de la Universidad de Los Lagos, por medio de la Beca Parcial de postgrado para estudiantes del Programa Magíster en Educación Matemática, ingreso 2020, de acuerdo con el decreto universitario Nº 791. Además, fue realizado en el marco del Proyecto Fondecyt Regular 2020 Nº 1200005 titulado "Desarrollo de competencias profesionales clave para la práctica pedagógica de profesores de matemáticas de enseñanza media", y cuyo investigador responsable es el Dr. Luis Pino-Fan.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Esta investigación aborda el trato que se le confiere a la noción de probabilidad en el currículo de 1º medio en Chile, es decir, debido a la relevancia que la probabilidad tiene en la vida diaria, se ha planteado el siguiente problema de investigación: describir como se aproxima el concepto de probabilidad en el nivel de 1º medio, enfoque realizado desde su significado histórico-epistemológico. Lo anterior tiene como objetivo conocer si el desarrollo presentado en el currículo se asemeja a la evolución que ha tenido este concepto a lo largo de la Historia y que ha dado pie a la riqueza de sus significados, y también observar si existe coherencia entre los recursos curriculares propuestos para el desarrollo de una clase, del Programa de estudio y del libro de texto de ese nivel.

Para llevar a cabo lo anterior, por una parte se han tomado de la literatura los cinco significados de la probabilidad, y por otra se ha propuesto clasificar las tareas que se encuentran en el libro de texto y en el Programa de estudio; además, estas se han desglosado de tal manera que ha sido posible organizar los elementos que componen las prácticas matemáticas que en ellas se encuentran.

A través del análisis anteriormente mencionado, se ha logrado tener un panorama claro sobre las debilidades y fortalezas del currículo de Matemática de 1º medio. Se detectan diferencias entre el libro de texto y el Programa de estudio, por mencionar: el orden de aparición de la teoría de conjuntos y conceptos que son incluidos en el libro de texto y no en el Programa (por ejemplo, probabilidad condicional, campana de Gauss, probabilidad empírica). También se aporta una clasificación de los objetos emergentes de las prácticas matemáticas propuestas, las cuales pueden ser utilizadas o complementadas en estudios posteriores.

Finalmente, se realizan algunas observaciones que sería necesario tener en consideración al momento de dar la clase asociada a este tema, como lo es tener muy claro el tipo de lenguaje que se utilizará para no caer en errores, o bien, tener en cuenta ciertas tareas que podrían generar una actividad beneficiosa para los estudiantes.

Palabras claves: probabilidad, currículo, libros de texto.

ABSTRACT

This research addresses the treatment given to the notion of probability in the 1st grade curriculum in Chile, that is, due to the relevance that probability has in daily life, the following research problem has been raised: describe how the concept of probability is approached at the 1st grade level, an approach carried out from its historical-epistemological meaning. The above has as objective to know if the development presented in the curriculum is similar to the evolution that this concept has had throughout history and that has given rise to the richness of its meanings, and also to observe if there is coherence between the resources proposed curricula for the development of a class, the study program and the textbook of that level.

To carry out the above, on the one hand, the five meanings of probability have been taken from the literature, and on the other, it has been proposed to classify the tasks found in the textbook and in the study program; In addition, these have been broken down in such a way that it has been possible to organize the elements that make up the mathematical practices that are found in them.

Through the aforementioned analysis, it has been possible to have a clear picture of the weaknesses and strengths of the 1st grade Mathematics curriculum. Differences between the textbook and the study program are detected, to mention: the order of appearance of set theory and concepts that are included in the textbook and not in the program (for example, conditional probability, Gauss, empirical probability). A classification of the emerging objects of the proposed mathematical practices is also provided, which can be used or complemented in subsequent studies.

Finally, some observations are made that it would be necessary to take into consideration when giving the class associated with this topic, such as being very clear about the type of language that will be used to avoid falling into errors, or taking into account certain tasks. that could generate a beneficial activity for students.

Key words: probability, curriculum, textbook

INTRODUCCIÓN

Existen dos motivos que originan esta investigación. En primer lugar, la importancia que tiene la probabilidad en la vida diaria, ya que encontramos este objeto matemático no solo en la escuela, sino también en el trabajo, en la prensa e incluso como parte del lenguaje común. En segundo lugar, la probabilidad es un tema muchas veces dejado de lado en la educación escolar, ya que se puede recurrir a fórmulas para obtener resultados probabilísticos sin analizar por qué funcionan en determinados problemas, y cuando es mejor utilizar otros métodos.

A pesar de la relevancia de la probabilidad, no se está enfocando la labor de crear condiciones para que los alumnos desarrollen un razonamiento probabilístico que les permita tomar decisiones a partir de observaciones y de opiniones fundamentadas al respecto. Y los significados holísticos de la probabilidad tienen que ver en gran parte con esa reflexión, ya que cada elemento que compone a la probabilidad, desde el punto de vista histórico, tiene que ver con la forma en la que se resolvió un determinado problema en alguna época de la Historia y que dio paso al crecimiento mismo de la probabilidad.

Así, consideramos importante desarrollar un estudio donde se analice la forma en la que se aborda la probabilidad y sus significados en el nivel de primero medio en Chile, tanto en el Programa de estudio como el libro de texto actual que el Ministerio de Educación de este país ha autorizado para su uso desde el año 2020.

Esperamos que esta investigación aporte a los profesores e investigadores del área una mirada crítica acerca del enfoque de la probabilidad en el currículo chileno, de manera que se conozcan las fortalezas del mismo, pero también los puntos donde se pueden realizar mejoras, motivando de esta manera el desarrollo de nuevos trabajos.

CAPÍTULO 1

ÁREA PROBLEMÁTICA

1.1 La Importancia de la Probabilidad y sus Significados en la Historia

La probabilidad, como elemento frecuente en nuestra vida diaria, es un concepto cuyo significado actualmente se aproxima desde la educación inicial. Tal como resume Cañizares (1997), los trabajos de Fischbein y las diferentes réplicas de los experimentos de Piaget e Inhelder apuntan a que la intuición primaria del azar está presente en las decisiones de los niños pequeños y es través de la instrucción que éstos adquieren la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible.

Sin embargo, la Historia misma de la probabilidad se formó a través de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes; esto se debe tener en cuenta ya que el aprendizaje de los alumnos sobre este concepto se produce de manera similar, pues su conocimiento se debe forjar mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo, tal como se sortearon esos mismos obstáculos a través del tiempo (Batanero, 2005).

Tal como mencionan Rojas y Guzmán (2018), la probabilidad ha tenido diferentes definiciones y usos a través del tiempo, mismos que van relacionados desde una concepción divina hasta una formalización matemática que hace referencia a lo que hoy en día se enseña en el aula. Con relación a sus orígenes, actualmente existe evidencia de que los juegos de azar estaban presentes en culturas primitivas en diferentes partes del mundo; para esta época, la suerte y la fortuna se asociaban con la voluntad divina, pues no creían posible estimar sus resultados.

Es hasta el siglo XVI que surgieron diversas obras a través de las cuales se intentó dar una respuesta formal y fundamentada a los problemas de azar que ya se tenían, principalmente el problema acerca del reparto de apuestas; entre los trabajos que abordan esta temática destacan los escritos de matemáticos como Luca Pacioli (1445-1517), Niccolo Tartaglia (1499-1557) y Gerolamo Cardano (1501-1576). Sin embargo, fue en 1654, mediante la correspondencia entre los matemáticos Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665), que se considera el inicio de la teoría de las probabilidades, pues es en este punto donde el concepto de equiprobabilidad y el razonamiento combinatorio resultaron necesarios para resolver determinadas situaciones, además que da pie a trabajos que siguen complementando esta teoría, como la obra de Christian Huygens (1629-1695) de 1657 titulado "*De Ratiocinnis in ludo aleae*" , en la cual surge el concepto de esperanza matemática. Posteriormente, entre los siglos XVII y XIX se fue formalizando la teoría matemática de los juegos de azar gracias a diversos aportes: Pierre Nicole (1625-1695) comenzó a indagar la medida de la probabilidad, Jacob Bernoulli (1654-1705) contribuyó demostrando el cálculo de probabilidades en ensayos repetidos, Abraham De Moivre (1667-1754) considera la probabilidad en términos de una sola fracción e introduce la noción de probabilidad condicional, conceptos que posteriormente Laplace (1749-1827) y Thomas Bayes (1702-1761) consideran y formalizan en sus respectivas obras. De esta forma, las distintas obras de cada época fueron consolidando la probabilidad desde diversos puntos de vista y, posteriormente en el siglo XX, Andrei Kolmogorov (1903-1987) retoma las ideas de sus precursores y propone los axiomas que dan solidez a la teoría de la probabilidad en su trabajo de 1933, sumado a los aportes de Émile Borel (1871-1956), Henri Poincaré (1854-1912), entre otros (Batanero et al., 2005; Rojas y Guzmán, 2018; Méndez, 2019).

Así es como diferentes concepciones de la probabilidad nacieron a través de la Historia. Al respecto, Batanero et al. (2005) señalan lo siguiente:

> Epistemological problems play a fundamental role for mathematics educators, because analyzing the obstacles that have historically emerged in the formation of concepts can help us understand students' difficulties in learning mathematics. This is particularly important in the field of probability, where, in addition to the difficulty of understanding scientific knowledge as a theoretical interpretation of real phenomena, one has to deal with typical misconceptions and beliefs, and knowledge about future events that is often based on divinatory predictions that have arisen from a magical ancestral way of thinking. (p. 15)

1.2 El Valor de la Probabilidad en la Educación.

Actualmente, es común ver en televisión, periódicos e incluso en el área laboral, información resumida en tablas, gráficos estadísticos y probabilidades, por lo que es necesario que las personas conozcan y sepan interpretar los elementos básicos del contenido para su comprensión. En relación con estos conceptos, Burrill y Biehler (2011) proponen las ideas fundamentales que están relacionadas e implicadas en el conocimiento estadístico: datos, gráficos, variabilidad aleatoria, distribución, asociación y correlación, probabilidad, muestreo e inferencia. Entre los anteriores, la probabilidad es el objeto de nuestro estudio, mismo que cobra importancia para el desarrollo del pensamiento crítico (Gal, 2002; Gal, 2005; Watson, 2006), pues éste conlleva la habilidad para interpretar, comprender y evaluar críticamente la información estocástica presente en nuestro entorno, y la capacidad para cuestionar argumentos y comunicar opiniones propias relacionadas a dicha información.

Ahora bien, en los últimos años se han desarrollado diversos lineamientos que proponen la inclusión de la probabilidad en la educación desde los niveles iniciales (Gaise, 2016; NCTM, 2000). En Chile, el Ministerio de Educación incorporó desde el año 2009 entre sus Objetivos y

Contenidos Mínimos los ejes de Datos y Azar para educación básica, según decreto 256, y Probabilidad y Estadística para educación media, por decreto 254 (https://bcn.cl). El actual Programa de Matemática de 1º medio ha sido elaborado "por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación, de acuerdo a las definiciones establecidas en las Bases Curriculares de 2013 y 2015 (Decreto Supremo N° 614 y N° 369, respectivamente)" (Ministerio de Educación, 2016).

Sin embargo, el concepto de probabilidad que se promueve en el currículo de matemáticas no es uno solo. Como se resumió en el punto anterior, conforme se fueron desarrollando las primeras ideas de probabilidad, los investigadores de la época notaban que el avance conseguido respondía a determinadas preguntas, pero no solucionaba todos los problemas, por lo que fue necesario ampliar el conocimiento y no quedarse con una sola forma de ver y resolver los enigmas de la probabilidad. Como se puede apreciar, desde su nacimiento, la probabilidad ha tenido un doble sentido, tanto como grado de creencia y como evidencia aceptable para el científico, lo que implica tener diferentes definiciones de probabilidad (Hacking, 1975).

Godino (1996) señala:

El problema de la comprensión está, en consecuencia, estrechamente vinculado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza debe investigarse para poder elaborar una teoría útil y efectiva de lo que es comprender tales objetos. (p. 418)

Es decir, los significados que (a través de la Historia) construyen un objeto matemático, son de suma importancia para la comprensión del mismo. Y tal como menciona Skovsmose (2016), la propia concepción de significado no está siendo debidamente considerada en la educación matemática ni son trabajados concretamente en el aula de clases.

Tabla 1

Clasificación de los significados histórico-epistemológicos de la probabilidad

Significados de la probabilidad	**Descripción**
Intuitivo	Aunque no existe un registro exacto acerca del surgimiento de la noción de azar, sí se sabe que ha estado presente desde la antigüedad; estas primeras ideas surgen relacionadas con los juegos de azar y las apuestas. Actualmente, podemos notar que el concepto intuitivo está presente en opiniones tanto de niños como de adultos, como medio para expresar algún grado de creencia personal, sin que ésta sea necesariamente una afirmación confiable.
Clásico	El punto de partida de la teoría de la probabilidad se da con la correspondencia entre Pascal y Fermat alrededor del año 1654. Sin embargo, fueron De Moivre y -posteriormente- Laplace quienes formalizaron una definición de probabilidad que está relacionada con la conocida "regla de Laplace", misma que se enseña en la escuela. Aunque esta definición es bastante común, sabemos que su aplicación tiene limitaciones vinculadas a los eventos finitos y equiprobables.
Frecuencial	De manera póstuma, en 1713 se publica la demostración de Bernoulli de la Primera Ley de los Grandes Números, la cual indica que la frecuencia relativa de un suceso en un experimento repetido muchas veces en las mismas condiciones tiende a ser una constante. A pesar de que este enfoque es muy utilizado en diversos ámbitos sociales para hacer comparaciones y es usual en la sala de clases por su factibilidad en los ejemplos, su carácter infinito lo hace más una aproximación, no el valor exacto de la probabilidad. Además, muchas veces los experimentos son imposibles de replicar en las mismas condiciones.
Subjetivo	Thomas Bayes plantea un nuevo enfoque de probabilidad con la conocida "regla de Bayes", la cual fue publicada póstumamente en 1763, que permite transformar las probabilidades a priori de varias causas que han sido observadas inicialmente, en probabilidades a posteriori, que incorporan nueva información sobre los datos que han sido examinados. En la primera mitad del siglo XX, Ramsey y De Finetti complementaron la propuesta de Bayes y dedujeron una consistente teoría de decisión, que permite separar las creencias de las preferencias e inferir los valores de las probabilidades subjetivas.
Axiomático	Durante el siglo XX se dieron diferentes propuestas, como las de Borel y Kolmogorov, que contribuyeron a brindarle la formalidad matemática a la probabilidad a través de fundamentos ya conocidos para esa época (como la teoría de conjuntos y teoría de la medida); finalmente, la probabilidad es aplicada como un modelo matemático que nos sirve para inferir la ocurrencia de eventos y describir fenómenos presentes en las ciencias, la política y, en general en la actividad humana.

Nota. Clasificación tomada de Batanero (2005).

Al respecto, Batanero (2005) expone el desarrollo progresivo que la probabilidad ha tenido a lo largo de la humanidad, los problemas que se encontraron a través de la Historia y define, a raíz de dichas etapas, los distintos significados histórico-epistemológicos de la probabilidad que están presentes en la educación secundaria. Estos significados se resumen en la Tabla 1.

1.3 La Probabilidad en los Libros de Texto

El libro de texto tiene un papel importante en el aula escolar ya que constituyen un puente entre las directrices curriculares y lo que se implementa en la sala de clases (Herbel, 2007). Fan et al., (2013) complementan lo anterior, pues en su estudio revelan que los libros de texto son el principal transmisor del plan de estudios y que, más aún, los libros cobran mayor relevancia en la enseñanza de las matemáticas.

Debido a lo anterior, diversos investigadores a nivel internacional han tomado los libros de texto como material para sus estudios. Ortiz (2002, 2014) resume en sus obras algunos de esos trabajos realizados en educación matemática, en los cuales se ha identificado que los libros de texto pueden significar el éxito o fracaso del currículo, dependiendo de lo adecuado que éste sea, otorgando gran importancia a los problemas que ahí se plantean; es decir, que las tareas de probabilidad propuestas en los libros de texto deberían ser variadas, tanto en el nivel cognitivo, en representación, en contexto, etc., para ampliar la aplicabilidad de las herramientas probabilísticas y no limitar su comprensión (Vásquez et al., 2019). Además, “son una de las formas más utilizadas para transmitir los conocimientos en matemáticas. Por ello la investigación de tales textos puede contribuir a la adquisición de conocimiento y maestría de métodos matemáticos en los diferentes niveles de educación matemática” (Ortiz, 2002, p. 16).

Guernica Consultores S.A. (2016) realizó un estudio sobre la valoración de los textos escolares de enseñanza básica en Chile, encontrando que “el lugar del texto de matemática entregado como el MINEDUC en el proceso educativo –tanto a nivel de planificación general como de preparación de clases- aparece como relevante en el contexto del conjunto de instrumentos utilizado” (p. 208).

Como se mencionó anteriormente, para educación media en Chile se cuenta con el eje temático de Probabilidad y Estadística dentro del Programa de estudio y, adoptando este lineamiento, los libros de texto de matemáticas proporcionados a los colegios subvencionados por el Ministerio de Educación (MINEDUC) presentan esa misma división.

1.4 Investigaciones Afines sobre la Enseñanza de la Probabilidad

Diversos autores han abordado la enseñanza de la probabilidad en diferentes niveles académicos con respecto a los significados que se emplean en la escuela. Carranza y Kuzniack (2009) encuentran que en la enseñanza francesa para 11º grado (16 años) se le da prioridad al enfoque frecuentista de la probabilidad sobre el bayesiano, no permitiendo tener una interpretación integral de ambos enfoques. Por su lado, León et al., (2020) concluyen que, en los dos libros de texto mexicanos mayormente utilizados en secundaria, existe un predominio del significado intuitivo y frecuencial, el significado clásico se muestra de manera superficial y el subjetivo no aparece. En cuanto a la educación primaria, el trabajo de Gómez (2014) revela la poca importancia que los libros españoles de ese nivel le confieren a los significados frecuencial y subjetivo.

En Chile, sobre este tema Vásquez y Alsina (2015) han realizado una investigación relacionada con los significados de la probabilidad enfocada en su presencia (o ausencia) en el currículo nacional, pero enfocada en el nivel básico. Estos resultados apuntan a que la enseñanza de la probabilidad a partir de los libros de texto, de primero a sexto básico, es realizada con una visión principalmente intuitiva, confiriéndole más importancia al uso de lenguaje cotidiano e informal, para luego avanzar hacia los significados frecuencial y laplaciano, con un leve acercamiento al significado subjetivo; de igual manera, señalan que "el trato que se da a la probabilidad en los libros de texto no está siempre en absoluta concordancia con las directrices curriculares" (pp. 229-230).

Aunado a esto, varias investigaciones (Batanero et al., 1994; Insunza y Guzmán, 2011; Rodríguez-Alveal et al., 2018) han abordado el problema de los sesgos que presentan profesores en formación y en activo de matemáticas en la comprensión de las diferentes concepciones de probabilidad y los errores que presentan los estudiantes que no han logrado interiorizar correctamente los significados.

Los estudios antes mencionados reflejan que, a pesar de que la probabilidad está presente en diversos campos de investigación e incluso podemos recibir información probabilística en la vida cotidiana, muchos estudiantes aún tienen problemas para comprenderlo. Esto nos lleva a plantear el siguiente problema de investigación: ¿cómo se aproxima el concepto de probabilidad en educación media? Es decir, si nos enfocamos en educación media y partimos analizando el primer nivel, ¿cómo se enseña el concepto de probabilidad en el currículo chileno de 1º medio?

De esta forma, se hace necesario realizar un estudio que nos permita conocer qué significados se espera enseñar en educación media, y si son más amplios con respecto a los encontrados por Vásquez y Alsina (2015), pues de esta manera podremos reflexionar sobre la complejidad y riqueza de los contenidos que el profesor implementará en el aula acerca de la noción de probabilidad.

1.5 Preguntas de Investigación

Los estudios que han surgido con relación al tema de la probabilidad y sus significados proponen a la vez nuevas interrogantes. Como punto de partida, será necesario atender lo relacionado a la enseñanza de la probabilidad en Chile, empezando con lo que concierne a primero medio, puesto que ya se han realizado anteriormente investigaciones enfocadas en el nivel de educación básica, además de un interés personal por el estudio de la educación matemática en la enseñanza media. De esta manera, si se dirige este análisis hacia el currículo que rige dicha etapa educativa, surge de manera casi inmediata la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son los significados (histórico-epistemológicos) de la probabilidad que se pretenden introducir en primero medio, de acuerdo con el currículo de matemáticas chileno?

En consecuencia con la pregunta inicial, se puede plantear también lo siguiente:

Los significados propuestos en el Programa de estudio de primero medio, ¿se corresponden con los significados abordados en el libro de texto entregado por el Ministerio de Educación en Chile?

1.6 Objetivos de la Investigación

Una vez formuladas las preguntas de investigación, planteamos el objetivo general de este estudio de la siguiente manera:

OG. Identificar los significados histórico-epistemológicos de la probabilidad que se promueven en el currículo chileno de primero medio mediante la exploración de los planes de estudio y libros de texto.

Lo anterior, se concretará a través de los siguientes objetivos específicos:

OE1. Registrar y clasificar las prácticas matemáticas que están presentes en el currículo chileno de primero medio para el estudio de la probabilidad y los elementos que la configuran.

OE2. Reconocer los significados histórico-epistemológicos de la probabilidad presentes en dichas prácticas matemáticas y verificar la congruencia de los significados pretendidos entre el Programa de estudio y el libro de texto de primero medio.

1.7 Resultados Esperados

Las hipótesis planteadas van de la mano con los resultados encontrados por Vásquez y Alsina (2015), pues esperamos encontrar los significados intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo de la probabilidad en el currículo de matemáticas de primero de educación media pero, además, suponemos que el significado axiomático estará también presente en el libro de texto debido a la necesidad de formalizar lo aprendido en los últimos ciclos de formación educativa básica.

Aunado a esto, otro aspecto importante en este trabajo será verificar si existen incongruencias entre el Programa de estudio y el libro de texto de primero medio chileno, algo que, como se comentó en la sección 1.4, se ha identificado en el currículo de otros países e incluso en el de educación básica de este país; por tanto, esperamos observar incongruencias entre ambos documentos, especialmente en lo que se refiere a los significados de la probabilidad.

CAPÍTULO 2

DISEÑO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

2.1 Marco Teórico

Este trabajo se apoya en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) para llevar a cabo el análisis de los significados histórico-epistemológicos de la probabilidad en el currículo de matemáticas, pues este nos otorga las herramientas precisas y adecuadas para realizar una correcta anatomía al currículo chileno de educación media (Font y Godino, 2006).

2.1.1 Enfoque Ontosemiótico

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática fue desarrollado a través de varios trabajos realizados por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007; Godino, 2022); en estos escritos se fue definiendo qué es un objeto matemático, las prácticas mediante las cuáles éstos emergen, los tipos de significados que surgen y se pueden interpretar de ellos, los elementos que operan en ellas, entre otras consideraciones teóricas.

Es importante enfatizar que, en el EOS, la situación-problema es considerada la médula de la actividad matemática, ya que ésta es clave para desencadenar las prácticas matemáticas, los significados y los objetos y la relación entre estos (Godino et al., 2007).

Cabe mencionar que, en este trabajo, se presentarán únicamente las herramientas que serán utilizadas para el análisis del currículo de probabilidad de primero medio, que es el tema a desarrollar .

2.1.2 Nociones Importantes desde la Perspectiva del Enfoque Ontosemiótico: las Prácticas Matemáticas, los Significados y los Objetos.

Godino y Batanero (1994) llaman práctica matemática "a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (p. 334).

Ahora bien, en el EOS se postula que para el estudio de las matemáticas no es de tanto interés una práctica en particular, sino los sistemas de prácticas involucrados en la resolución de los problemas. Además, se establece que dichos sistemas de prácticas pueden ser de carácter personal o pueden ser compartidos dentro de una misma institución para resolver un determinado campo de problemas.

Así, en el EOS se definen dos tipos de significados que dependen de la fuente que lo propone y entendidos en términos de los sistemas de prácticas en las que el objeto a estudiar es determinante para su realización; a saber, el significado institucional (compartido dentro de una institución) y el significado personal (adoptado y desarrollado por una persona) (Godino et al., 2007). Al ser nuestro foco de estudio el currículo, el significado institucional es el que examinaremos.

El significado institucional, a su vez, tiene en cuenta cuatro significados que lo componen (Godino et al., 2009, p. 5):

- Significado implementado: es el sistema de prácticas llevadas a cabo efectivamente por el docente en un proceso de estudio específico.
- Significado evaluado: es el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

- Significado pretendido: es el sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Significado referencial: es el sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. La determinación de dicho significado requiere realizar un estudio histórico–epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Como vemos, el significado institucional es el que impacta en la formación académica de los estudiantes y, posteriormente, será el que adopte y/o personalice cada uno de ellos. Así, el conjunto de contenidos matemáticos propuestos en el Plan de Estudios y llevado a cabo a través de los libros de texto (relacionados con los significados pretendidos y de referencia) debieran ser revisados y elegidos adecuadamente, de tal manera que no refleje un significado parcial del concepto que se quiere estudiar, pues de lo contrario "puede afectar la idoneidad del proceso de instrucción" (Pino-Fan et al., 2013, p.132).

El EOS establece que los objetos matemáticos resultan de las prácticas matemáticas, por lo tanto, los "objetos matemáticos no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática" (Godino et al., 2009, p. 11). La probabilidad entonces, al ser foco de estudio en el aula y en los textos, es un objeto matemático. Godino, et al. (2007) detallan que, si el sistema de prácticas es compartido dentro de una institución, los objetos emergentes se definen como "objetos institucionales", pero si estos sistemas corresponden a una persona se consideran como "objetos personales". Ahora bien, cuando se observa una práctica matemática, es posible visibilizar una serie de elementos que la componen y se conectan entre sí.

Esta tipología de los objetos primarios, propuesta en el EOS según los trabajos antes mencionados, se resume como sigue:

- Situaciones-problemas: Son las aplicaciones extra matemáticas, intra matemáticas, ejercicios, problemas, tareas, etc. que llevan a desarrollar una actividad matemática.
- Lenguaje y elementos lingüísticos: Son los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., empleados para enunciar o resolver problemas, sea de forma escrita, oral, gestual u otro.
- Conceptos y definiciones: Como tal, son todas las definiciones y conceptos vinculados a un objeto matemático, cuyo conocimiento se debe recordar y tener en cuenta en la resolución de un problema matemático.
- Proposiciones: Son enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos, mismos que deben ser utilizados para la resolución de problemas.
- Procedimientos: Son los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc., que los alumnos deben conocer y aplicar para la resolución de problemas.
- Argumentos: Es todo lo que se enuncia para validar o explicar las proposiciones, procedimientos y todo lo relacionado con la solución del problema.

Font y Godino (2006) señalan que cuando estos seis elementos se articulan entre sí forman configuraciones, específicamente configuraciones epistémicas en el estudio del currículo. Es decir, que la configuración epistémica permitirá analizar y describir los objetos matemáticos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas sobre la probabilidad, y los significados que conlleva, propuestas en el currículo (Pino-Fan et al., 2013).

Por tanto, tal como mencionan Font et al. (2013), a través de la configuración de los objetos matemáticos primarios podemos comprender mejor la práctica matemática, en este caso, la que nos compete sobre la enseñanza de la noción de probabilidad a través del currículo escolar.

2.2 Metodología

Para llevar a cabo los objetivos planteados, se hará uso del modelo cualitativo (Cohen et al., 2011), puesto que nos interesa analizar la práctica matemática presente tanto en el Programa de estudio como en el libro de texto. A través de los objetos primarios propuestos en el EOS, se realizará la técnica de análisis de contenido propuesto por López (2002), centrado en los métodos intensivos, los cuales plantean estudiar con detenimiento algunos documentos.

Pino-Fan et al. (2013), en su trabajo sobre el significado de la derivada, afirman que el análisis del Plan de Estudios en conjunto con los libros de texto, "permite estudiar tanto el tratamiento que se le da a la derivada como los significados pretendidos en el currículo de matemáticas de bachillerato" (p. 126), y que la metodología de análisis didáctico aplicada a dicho trabajo "se puede aplicar a otros contenidos y contextos" (p. 123).

Para nuestro estudio de los significados de la probabilidad que se esperan enseñar en educación media tomaremos como referencia lo anterior, por lo que a partir de ahora entenderemos el currículo como la dupla Programa de estudio-libro de texto.

El libro de texto que analizaremos, del nivel de primero medio, es entregado por el Ministerio de Educación (MINEDUC) de manera gratuita a todos los colegios subvencionados del país y corresponde a la editorial Santillana; en la portada de dicho texto se señala que es una edición especial para el Ministerio de Educación, además que, de acuerdo a la información presentada en la página de la Superintendencia de Educación (https://supereduc.cl/), en dicho libro se consideran todos los contenidos dispuestos según el currículo nacional. Además, que los beneficiados por este material educativo constituyen más de la tercera parte del total de estudiantes y docentes de educación media, según el último reporte del MINEDUC con datos del 2018 (Ministerio de Educación, 2019). Para este estudio no se tomará en cuenta el Cuaderno de Actividades debido a que se quiere ver el trato que se le da a la noción de probabilidad a través de las tareas realizadas en el texto, como se llega a la solución del mismo y los conceptos definidos en él.

Para efectuar el análisis tanto del libro de texto como del Programa, se tendrán dos archivos en Excel (dispuestos en la sección de Anexos), uno para cada documento analizado, y se numerarán todas las tareas, definiciones, procedimientos, proposiciones y explicaciones que se encuentren en ellos de la siguiente manera:

- El primer dígito corresponde al nivel de educación media del libro de texto, en este caso, será 1 pues analizaremos el currículo de 1º medio, seguido de un punto (.).
- Los siguientes dígitos corresponden a la página del libro de texto de donde fue tomado el problema, definición, proposición, etc., seguido de un punto (.).
- Para los elementos encontrados en el libro de texto, se incluye abreviación del tipo de contenido de acuerdo al siguiente glosario (este paso se omite para lo respectivo del Programa de estudio):

  Q: Pregunta abierta planteada en el libro de texto.

  ED: Evaluación diagnóstica.

  I: Problema de introducción del tema.

  D: Definición presente en el libro de texto.

  E: Ejemplo de tipos de problemas y su desarrollo esperado.

R: Recurso web proporcionado en el texto.

PC: Procedimiento mencionado en el libro de texto.

A: Actividades presentes en el libro de texto, a desarrollar por el alumno.

P: Proposición enunciada en el libro de texto.

S: Síntesis de la lección.

EL: Evaluación de la lección.

- Numeración según aparece en el libro, o (si no tiene número) según el orden en el que aparece en la página, seguido de un punto (.).
- Inciso del problema del libro de texto, cuando se requiere

2.2.1 Etapas de la investigación

Teniendo en cuenta que la revisión bibliográfica se realizará de manera transversal durante todo el trabajo, se define el diseño metodológico de la siguiente manera:

Fase 0. Análisis preliminar de la estructura y los contenidos del currículo de matemática de 1º medio.

- Conocer la organización y los objetivos del currículo de matemática de 1º medio.
- Determinar cuáles son los contenidos y objetivos vinculados a la probabilidad en el currículo de 1º medio.

Fase 1. Análisis de los significados (histórico-epistemológicos) de la probabilidad sugeridos en el libro de texto de 1º medio proporcionado por el MINEDUC.

- Identificar las prácticas matemáticas que se encuentran en el libro de texto de 1º medio, con la finalidad de hallar los problemas planteados en el mismo (y sus soluciones), los conceptos definidos en el tema, las proposiciones y procedimientos de las que se dispone, así como el tipo de lenguaje y argumentos que se emplean.

- Clasificar los elementos identificados en el paso previo, de manera que podamos visualizar los elementos de la configuración de los objetos primarios estipulados en el EOS (mencionados en la sección 2.1.2) presentes en ellos, caracterizando los elementos que son similares.
- Con base en los elementos obtenidos, asociar el(los) significado(s) histórico-epistemológico(s) al que hace referencia en cada práctica matemática, de acuerdo con los significados de referencia (ver Tabla 1).

Fase 2. Análisis de los significados (histórico-epistemológicos) de la probabilidad sugeridos en el Programa de estudio de 1º medio proporcionado por el MINEDUC.

- Identificar las prácticas matemáticas que se encuentran en el Programa de estudio de 1º medio, con la finalidad de hallar los problemas planteados en el mismo (y sus soluciones), los conceptos definidos en el tema, las proposiciones y procedimientos de las que se dispone, así como el tipo de lenguaje y argumentos que se emplean.
- Clasificar los elementos identificados en el paso previo, de manera que podamos visualizar los elementos de la configuración de los objetos primarios estipulados en el EOS, presentes en ellos, caracterizando los elementos que son similares.
- Con base en los elementos obtenidos, asociar el(los) significado(s) histórico-epistemológico(s) al que hace referencia en cada práctica matemática, de acuerdo a los significados de referencia (ver tabla 1).

Fase 3. Analizar la congruencia entre los significados pretendidos por el libro de texto y el Programa de estudio de 1º medio.

- Identificar similitudes y diferencias entre los tipos de prácticas que se emplean en el Programa de estudio y el libro de texto de 1º medio.
- Reconocer si existe coherencia entre los significados histórico-epistemológicos utilizados en el Programa de estudio y el libro de texto de 1º medio.
- Obtener conclusiones generales sobre los hallazgos.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DE LOS SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DE 1º MEDIO

En Chile, es bajo el seno del Ministerio de Educación del país que se elaboran los Programas de estudio correspondientes a cada nivel educativo y para cada asignatura. Éstos son elaboradas por la Unidad de Currículum y Evaluación y se rige por decretos que son aprobados a nivel nacional y que se especifican en cada documento. Específicamente, el actual Programa de estudio de Matemática para 1º medio fue elaborado en el año 2016 y empezó a regir a partir del año 2017.

3.1 Estructura del Currículo de Matemática de 1º Medio

Es en el Programa de estudio de Matemática de 1º medio que se definen los Objetivos de Aprendizaje (OA) y los Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT) que se desean promover para la asignatura de matemática, y está organizado en cuatro unidades.

Sobre los OA se señala lo siguiente:

> Los Objetivos de Aprendizaje definen los aprendizajes terminales esperables para cada año escolar. Se refieren a conocimientos, habilidades y actitudes que permiten a los y las estudiantes avanzar en su desarrollo integral, mediante la comprensión de su entorno y la generación de las herramientas necesarias para participar activa, responsable y críticamente en él. (Ministerio de Educación, 2016, p. 10)

En cuanto a los OAT, estos “aluden tanto al desarrollo personal y social de los y las estudiantes como al desarrollo relacionado con el ámbito del conocimiento y la cultura” (Ministerio de Educación, 2016, p. 13)

Además, siguiendo con la organización curricular, en el nivel escolar de primero medio “se desarrollan cuatro habilidades (resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar) que se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos, y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos”. (Ministerio de Educación, 2016, p. 40).

Complementando lo anterior, se sugiere para cada OA una serie de Indicadores de Evaluación, cuyo objetivo es ser un apoyo para el profesor al momento de plantearse si los objetivos se lograron. Éstos serán enunciados más adelante.

Como se mencionó antes, dentro de la misma asignatura de Matemática están organizadas cuatro unidades que corresponde a cuatro ejes temáticos, a través de los cuales se fomentan objetivos y habilidades específicas, y que difieren un poco entre los propuestos para educación básica y los que corresponden a educación media. Estos ejes fueron propuestos mediante el decreto 254 del MINEDUC en el año 2009, y son: Números, Álgebra y funciones, Geometría y Probabilidad y estadística.

Para efectos de este trabajo, a continuación se analizarán los contenidos y objetivos del eje de Probabilidad y estadística, pues es el eje que involucra el concepto que es de nuestro interés y el cual queremos analizar. Se descartarán los demás ejes debido a que nos interesa conocer cómo se abordan los contenidos de probabilidad, concretamente cuando se utiliza la noción de probabilidad y el trato que se le da a este objeto matemático.

3.2 Contenidos y Objetivos del Eje de Probabilidad y Estadística para 1º Medio

De acuerdo a la organización curricular propuesta por el Ministerio de Educación (2016) para 1º medio, el eje de Probabilidad y Estadística está contemplado en la unidad 4 para ser impartida durante el segundo semestre del ciclo escolar y propone lo siguiente:

> Este eje responde a la necesidad de que todas las estudiantes y todos los estudiantes aprendan a efectuar análisis e inferencias y obtener información a partir de datos estadísticos. Se espera formar personas con capacidad crítica, que puedan usar la información para validar sus opiniones y decisiones y que sepan determinar situaciones conflictivas surgidas de interpretaciones erróneas de un gráfico, y posibles manipulaciones de los datos.
>
> En el área de la probabilidad, se busca que estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos; que determinen la probabilidad de ocurrencia de estos en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias. (p. 44)

En el mismo documento se señalan los conocimientos previos que serán requeridos en esta unidad, a saber: la operatoria con números racionales, muestreo, tablas de frecuencias absolutas y relativas, medidas de tendencia central y rango, probabilidades de eventos, medidas de posición, percentiles y cuartiles y el principio combinatorio.

Con respecto a los conocimientos que se espera los estudiantes adquieran dentro del uso y aplicación de las probabilidades, así como el vocabulario implicado para ello, se resumen en la Tabla 2 aquellos que están directamente relacionados con el estudio de la probabilidad. El propósito final de dichos conocimientos es que los estudiantes desarrollen las reglas de probabilidad, consoliden la noción de azar que han trabajado en los cursos anteriores y que, a través de la tabla de Galton, puedan visualizar un comportamiento aleatorio normal sin llegar a formalizar su definición.

Tabla 2

Conocimientos y palabras claves

Conocimientos	Palabras clave
Reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas.	Tablas de doble entrada. Diagrama de árbol. Regla aditiva.
Concepto de azar.	Regla multiplicativa. Noción de azar. Tabla de Galton.

Nota. Conocimientos y palabras claves declarados en el Programa de estudio de matemática de 1º medio (2016), eje de Probabilidad y Estadística (p. 160).

Son cuatro los Objetivos de Aprendizaje (OA) relacionados con el contenido de la Unidad 4 de Probabilidad y Estadística. Tal como se mencionó en la sección 3.1, los OA integran los conocimientos, habilidades y actitudes adecuados para cada nivel, de tal manera que represente un reto apropiado para los estudiantes. Los OA12 y OA13 están vinculados con la estadística y en ellos no se menciona ni se trabaja como tal el concepto de probabilidad. Sin embargo, en los objetivos OA14 y OA15 se expresa explícitamente que el estudio de la noción de probabilidad es la finalidad y, por lo tanto, son estos objetivos los que se tendrán como referencia dentro del análisis del Programa de Estudio de Matemática para 1º medio. Estos OA y sus Indicadores de Evaluación relacionados (que permiten visualizar el desempeño y avance de los estudiantes asociado a cada OA), se resumen en la tabla 3.

Tabla 3

Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación para el estudio de la probabilidad en 1º medio.

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA14: Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo, en el contexto de la resolución de problemas.	• Elaboran o completan diagramas de árboles con las posibilidades de experimentos aleatorios, para representar los eventos y determinar sus probabilidades. • Reconocen la regla multiplicativa de la probabilidad a lo largo de una “rama” que conduce de la partida al tramo exterior. • Reconocen la regla aditiva de la probabilidad en la unión de distintas “ramas”. • Aplican la combinación de la regla aditiva y de la regla multiplicativa para determinar probabilidades de eventos compuestos. • Calculan las probabilidades de eventos simples y compuestos. • Resuelven problemas de la vida diaria que involucran las reglas aditiva y multiplicativa.
OA15: Mostrar que comprenden el concepto de azar: • Experimentando con la tabla de Galton y con paseos aleatorios sencillos, de manera manual y/o con software educativo. • Realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas. • Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso. • Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	• Elaboran árboles o redes de caminos para marcar diferentes “paseos al azar”. • Verifican que una “rama” o “camino” lleva a una meta en el margen del árbol, mientras que varios caminos llevan a una meta central. • Reconocen una distribución de los datos (que se acumula en el centro) en repeticiones de experimentos aleatorios (tabla de Galton). • Analizan estadísticas basadas en el mismo objetivo, reconociendo que son distintas en el detalle, aunque muestran coherencias en general. • Resuelven problemas de la vida diaria que involucran estimaciones basadas en frecuencias relativas.

Nota. Fuente: Ministerio de Educación (2016*,* pp.161-162).

Con relación al libro de texto utilizado en primero medio, el Ministerio de Educación entrega de manera gratuita el eje de Probabilidad y Estadística, el cual se aborda en la Unidad 4, última sección del libro, tal como está considerado en el Programa de estudio de dicho nivel. Esta unidad, titulada Deportes, se divide en tres lecciones, de las cuáles dos tienen relación directa con la probabilidad, a saber, las lecciones 11 y 12. La lección 11, Reglas de la probabilidad aborda tres temas: Unión e intersección de eventos, Regla aditiva de la probabilidad y Regla multiplicativa de la probabilidad. La lección 12 tiene como título Comportamiento aleatorio y los dos temas que contiene son: Tabla de Galton y paseos aleatorios y Probabilidad en paseos aleatorios. Notar que los temas anteriores coinciden con los conocimientos y palabras claves determinados en el Programa de estudio (ver Tabla 2) y también están relacionados con los Objetivos de Aprendizaje propuestos en el mismo (ver Tabla 3).

3.3 Análisis de los Significados de la Probabilidad Pretendidos en el Currículo de Matemática de 1º Medio

Como ya se mencionó en el Capítulo 2, para llevar a cabo el análisis de los problemas propuestos tanto en el libro de texto como en el Programa de estudio de Matemática de 1º medio, se realizó una "descomposición" del mismo a través de la tipología de objetos primarios propuesta en el EOS. Además de lo anterior, también se agregó una caracterización por contexto, esto con el objetivo de observar la presencia y relevancia de los problemas sugeridos en la vida real (ver Anexos 1 y 2).

En el libro de texto se encontraron 180 tareas que tenían relación con probabilidad, las cuáles incluyen preguntas abiertas, ejercicios de evaluación diagnóstica, problemas de introducción al tema, ejemplos propuestos, actividades a desarrollar por el alumno, preguntas de reflexión y evaluaciones sugeridas.

En cuanto al Programa de estudio, fueron 84 las tareas planteadas, de los cuáles 38 están vinculados con el OA14 y 46 problemas están relacionados con el OA15.

3.3.1 Significados presentes

Antes de presentar los elementos obtenidos, es importante mencionar que los significados que consideramos (ver Tabla 1) están presentes en la mayoría de las tareas analizadas; los pocos casos en los cuales las tareas no se relacionaron con el significado intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo o axiomático, se catalogaron como "Sin significado" y se observó que esas tareas estaban enfocadas en aplicar alguna herramienta matemática que no consideraba en su pregunta -ni en su respuesta- el concepto de probabilidad. Además, es necesario señalar que se presentaron casos en los cuales no fue posible vincular una tarea con un solo significado de los propuestos por Batanero (2005); es decir, entre la pregunta y la respuesta estaban involucrados dos significados.

A continuación, se presenta la clasificación de los significados y los ejemplos encontrados tanto en el libro de texto como en el Programa de estudio; se acompaña de la notación que se estará utilizando para cada significado con la intención de resumir la información y se hará una pequeña comparación entre las tareas expuestas en ellos.

Significado intuitivo (I). Un problema clásico en probabilidad es "el problemas de las tres puertas", o "problema de Monty Hall", que refiere a la elección de la puerta ganadora entre tres disponibles, y tanto el libro de texto como el Programa de estudio incluyen esta actividad.

Figura 1

Ejemplo de tarea en el libro de texto con significado intuitivo

2. Junto con un compañero, analicen el siguiente problema conocido como el «Problema de *Monty Hall* o de las tres puertas».

- Una persona en un concurso debe escoger una de tres puertas. Detrás de dos de ellas no hay nada y, en la otra, un premio.
- El participante escoge una de las puertas al azar; seguidamente, el animador abre una de las puertas que no escogió el participante y en la que no se encuentra el premio.
- El animador le ofrece al participante la posibilidad de cambiar la puerta que escogió inicialmente por la otra que queda sin abrir.

¿Le conviene al participante cambiar la puerta en el sentido de aumentar sus probabilidades de ganar?

a. A partir de su intuición, ¿cuáles serían sus respuestas en esa situación?

Fuente. Fresno et al. (2020, p.186).

Figura 2

Ejemplo de tarea en el Programa de estudio con significado intuitivo

5. El o la docente plantea la siguiente situación: el triunfador o la triunfadora de un concurso de la televisión puede ganar un auto o un premio de consuelo, que es una cabra. Para ello, debe elegir entre tres puertas cerradas: detrás de una de ellas está el auto y detrás de las otras se encuentra una cabra. El moderador, quien sabe en cuál puerta está el auto, ayuda al ganador o a la ganadora y le abre una puerta. Aparece una cabra. Luego le ofrece la posibilidad de cambiar su decisión y elegir la otra puerta. Las alumnas y los alumnos responden qué sería favorable para el ganador o la ganadora.

a. Conjeturan acerca de la influencia que puede tener un cambio de la decisión tomada.
   - ¿Es aconsejable cambiar la puerta?
   - ¿Es aconsejable quedarse con la puerta?
   - ¿No importa si se cambia o si se mantiene la puerta?

Fuente. Ministerio de Educación (2016, p. 183).

En ambas tareas (Figuras 1 y 2) se puede relacionar el significado intuitivo, ya que refieren preguntas sobre si el alumno considera que es mejor cambiar la puerta que se elige primero, pero sin llegar a establecer un número en esta probabilidad. Sin embargo, existe una diferencia en la forma de realizar los cuestionamientos, pues en el caso del Programa de estudio es necesario interpretar lo que significa “la opción más favorable” y su relación con “mayor probabilidad”, algo que en el libro de texto es más explícito.

Significado clásico (C). Los problemas de azar con bolitas son usuales en temas de probabilidad, sobre todo para el significado clásico, debido a que éstos generalmente involucran eventos equiprobables; el currículo de 1º medio no es la excepción.

Figura 3

Ejemplo de tarea en el libro de texto con significado clásico

3. **De una bolsa que contiene tres bolitas rojas, dos bolitas amarillas y cuatro verdes se extrae una bolita al azar. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:**
   a. Obtener una bolita roja.

Fuente. Fresno et al. (2020, p.145).

Figura 4

Ejemplo de tarea en el Programa de estudio con significado clásico

1. En un recipiente hay 2 bolitas blancas, 3 bolitas negras y 5 bolitas rojas. Al azar, las alumnas y los alumnos sacan una de ellas y determinan las probabilidades de ocurrencia de los eventos que se señalan a continuación, mediante el modelo de Laplace:

   - Que sea una bolita negra.

Fuente. Ministerio de Educación (2016, p. 174).

Se puede notar una diferencia entre la tarea propuesta por el libro de texto (Figura 3) y la actividad sugerida por el Programa (Figura 4), pues este último especifica el uso de la regla de Laplace como procedimiento recomendado para resolver la tarea.

Cabe mencionar que este significado es el que más se encontró tanto en el libro de texto como el Programa de estudio, donde se abordaron diferentes situaciones-problemas y se notó una riqueza en el uso de procedimientos para su resolución.

Significado frecuencial (F). En este significado es común el empleo de registros (recordar que se basa en datos de poblaciones cuando no es posible conocer el total); de los ejemplos que se encontraron en el currículo relacionados con este significado, algunos incluían el uso de tablas (Figuras 5 y 6).

Figura 5

Ejemplo de tarea en el libro de texto con significado frecuencial

EJEMPLO 3

En la siguiente tabla se muestra la cantidad de automóviles de cada color que pasaron por una calle durante una hora.

¿Cuál es la probabilidad empírica de que pase por la calle un automóvil de color rojo en una hora?

Para obtener la probabilidad pedida, calcula la frecuencia relativa del evento de interés. En este caso, el evento es que pase un automóvil rojo, cuya frecuencia relativa es $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Luego, la probabilidad empírica de que pase un automóvil rojo en una hora es de $\frac{1}{5}$, que es igual a 0,2.

Colores de automóvil

Color	Frecuencia absoluta
Azul	6
Blanco	4
Negro	6
Rojo	6
Verde	8
Total	30

Fuente. Fresno et al., (2020, p.190).

Aquí es necesario señalar a los estudiantes que no todas las tablas refieren a un significado frecuencial, sino que son determinadas tablas que deben corresponder, por ejemplo, a tablas estadísticas que registren la frecuencia en que se repiten ciertos eventos. Del mismo modo, es importante distinguir las tablas de frecuencias de las tablas de datos cuyo objetivo es organizar información recopilada de forma clara (sin tener en consideración cuántas veces se repite algún dato de entre los obtenidos o esperados), las cuales también son utilizadas en probabilidad.

Figura 6

Ejemplo de tarea en el Programa de estudio con significado frecuencial

6. Los y las estudiantes resuelven los siguientes problemas:
La final de un campeonato de fútbol se define a penales. Cada equipo nombra cinco de sus mejores jugadores para hacer los lanzamientos. Los jugadores elegidos tienen una larga trayectoria en el tiro de penales, la que se registra en el porcentaje del éxito que se espera de ellos. El orden en el cual deben lanzar está anotado en la tabla siguiente, junto con el porcentaje estimado del éxito:

JUGADOR	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4	N° 5
equipo A	95 %	75 %	85 %	80 %	90 %
equipo B	90 %	85 %	70 %	75 %	95 %

a. ¿Cuál es el porcentaje estimado del equipo? Es decir, ¿cuál es el porcentaje probable de que todos los jugadores del equipo conviertan su lanzamiento en gol?

Nota. Fuente: Ministerio de Educación, 2016 (p.177).

Una diferencia sustancial entre el libro de texto de 1º medio y el Programa de estudio del mismo nivel es el uso del concepto “probabilidad empírica” en el primero, mismo que está íntimamente relacionado con el significado frecuencial.

Significado subjetivo (S). Entre las tareas relacionadas con este significado, se repite la que tiene que ver con la probabilidad de encontrar el semáforo en rojo o verde; como se puede observar, se parte confiriendo una estimación numérica a la ocurrencia del fenómeno estudiado, ya sea en forma porcentual (Figura 7) o fraccionaria (Figura 8). Ambas formas fueron utilizadas frecuentemente, tanto en el libro de texto como en el Programa de estudio; sin embargo, con respecto al contexto de los problemas cabe destacar que fueron, a excepción de una actividad hallada en el libro de texto, en su mayoría idealizados (es decir, situaciones no comunes que no son fáciles de encontrar en la vida cotidiana).

Figura 7

Ejemplo de tarea en el libro de texto con significado subjetivo

EJEMPLO 8

Dos semáforos en una vía están sincronizados, es decir, el estado del primero influye en el segundo. Una persona estima que el primer semáforo está en verde un 40 % del tiempo, y el segundo está en verde un 35 %. ¿Cuál es la probabilidad de que, al transitar, ambos estén en fase verde?

La probabilidad de no ser detenido por los semáforos es:

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2|V_1) = \frac{40}{100} \cdot \frac{35}{100} = \frac{1\,400}{10\,000} = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$$

Entonces, la probabilidad de no detenerse por encontrarse alguna luz roja en los semáforos es de $\frac{7}{50}$, equivalente al 14 %.

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 177).

Figura 8

Ejemplo de tarea en el Programa de estudio con significado subjetivo

2. A lo largo del recorrido de una ruta, se realizan tres controles de tránsito y se estima que cada décimo auto será controlado.

e. Determinan la probabilidad de ser controlado solamente en el segundo control.

Fuente. Ministerio de Educación (2016, p.180).

Nuevamente, es indispensable aclarar a los estudiantes que la esencia de este significado radica en que los valores asignados pueden cambiar de una persona a otra, o incluso una misma persona puede cambiarlos después de algún tiempo o de haber pasado por alguna experiencia relacionada.

Significado axiomático (A). Este significado solo fue encontrado en una actividad del libro de texto (igura 9), mismo que intenta introducir la función de una distribución de probabilidad. Los objetivos propuestos por el Ministerio de Educación (Tabla 3) no contemplan este concepto y, como se comentó en la sección 3.2, el objetivo de la tabla de Galton es visualizar la función normal, pero no describirlo ni ahondar en ella, por lo cual podría ser innecesario introducir conceptos formales para este nivel de aprendizaje.

Figura 9

Ejemplo de tarea en el libro de texto con significado axiomático

1. Averigua acerca de la campana de Gauss y luego comenta la información con tu curso.

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 184).

En ocasiones, en una misma situación-problema podemos encontrar más de uno de los significados intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático. Como se verá a continuación, sucede que a veces, para llegar a la solución, es necesario transitar por diferentes herramientas y conocimientos que pertenecen a significados distintos. El aporte de este tipo de tareas también consiste en poder reflexionar sobre lo que se pide y los conocimientos con los que se cuenta hasta ese momento, por lo que la guía del profesor es precisa para hacer de la actividad algo próspero.

Significado intuitivo/clásico (IC). En el ejemplo de la Figura 10 se puede observar la presencia del significado intuitivo debido a que se pide dar una estimación con términos coloquiales, es decir, si es igual de probable ir por un camino u otro. Sin embargo, también notamos que para justificar dicha estimación se puede recurrir a herramientas conocidas, como la regla de Laplace, pues involucra eventos equiprobables en la elección de cada camino, y que son sugeridos implícitamente. Por tanto, la idea de este tipo de tareas es realizar una progresión y evolución de conocimientos, esto es, no quedarse con una mera estimación y aplicar las herramientas conocidas para dar sustento a nuestras elecciones. En el Programa de estudio no se encontró ninguno con esas características.

Figura 10

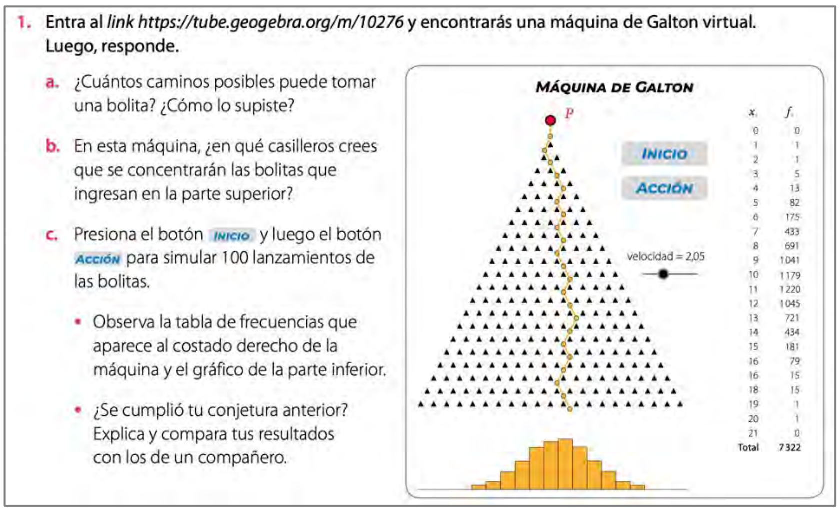
Ejemplo de tarea en el libro de texto con significado intuitivo/clásico

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 188).

Significado intuitivo/frecuencial (IF). De manera similar al caso anterior, los ejemplos que incluyen tanto el significado intuitivo como el significado frecuencial involucran, por una parte, una conjetura sobre un evento de manera que se exprese una creencia personal de manera coloquial (significado intuitivo), al mismo tiempo que se solicita repetir el experimento un número determinado de veces con la intención de observar la frecuencia de los resultados (significado frecuencial). Se debe tener en cuenta que mientras más veces se repita el experimento se puede dar una mejor estimación (ley de los grandes números), algo que está sumamente vinculado con la experiencia que influye sobre el significado intuitivo. Únicamente en el libro de texto se encontró la combinación de ambos significados en una tarea.

Figura 11

Ejemplo de tarea en el libro de texto con significado intuitivo/frecuencial



1. Entra al *link https://tube.geogebra.org/m/10276* y encontrarás una máquina de Galton virtual. Luego, responde.
   a. ¿Cuántos caminos posibles puede tomar una bolita? ¿Cómo lo supiste?
   b. En esta máquina, ¿en qué casilleros crees que se concentrarán las bolitas que ingresan en la parte superior?
   c. Presiona el botón INICIO y luego el botón ACCIÓN para simular 100 lanzamientos de las bolitas.
      - Observa la tabla de frecuencias que aparece al costado derecho de la máquina y el gráfico de la parte inferior.
      - ¿Se cumplió tu conjetura anterior? Explica y compara tus resultados con los de un compañero.

x_i	f_i
0	0
1	1
2	1
3	5
4	13
5	82
6	175
7	433
8	691
9	1041
10	1179
11	1220
12	1045
13	721
14	434
15	181
16	79
16	15
18	15
19	1
20	1
21	0
Total	7322

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 186).

Significado intuitivo/subjetivo (IS). De Finetti (2016) menciona la influencia del significado intuitivo en la teoría de la probabilidad; de manera consecuente, este significado también es un punto de partida para el significado subjetivo, como se aprecia en el ejemplo de la Figura 12. Una forma de responder esta tarea se inicia dando una opinión sobre dicha ocurrencia en términos coloquiales, pero dependiendo del grado de conocimiento personal sobre el tema también abre la oportunidad de explorar otros métodos para estimarla, incluso llegando a dar alguna aproximación numérica, sin alejarse de la observación particular de cada individuo. No se halló algo similar en el Programa de estudio.

Figura 12

Ejemplo de tarea en el libro de texto con significado intuitivo/subjetivo

> **Responde:**
> ¿Cómo puedes calcular la probabilidad que tiene tu equipo favorito de clasificar?

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 179).

Significado clásico/frecuencial (CF). La Figura 13 presenta una tarea en la cual se ve involucrado un experimento equiprobable (lanzar una moneda), cuyo resultado es un dato en una serie de experimentos que se pueden registrar para llegar a una solución; este tipo de actividades requiere de representaciones (tablas, diagrama de árbol) para su solución. Es importante señalar que el objetivo de esta tarea no es dar directamente una probabilidad, sin embargo es necesario obtener esa probabilidad para dar una respuesta. Esta tarea resulta interesante, pues es posible involucrar activamente a los estudiantes para dar con su solución; no obstante, no fue una actividad común pues no está contemplada en el libro de texto.

Figura 13

Ejemplo de tarea en el Programa de estudio con significado clásico/frecuencial

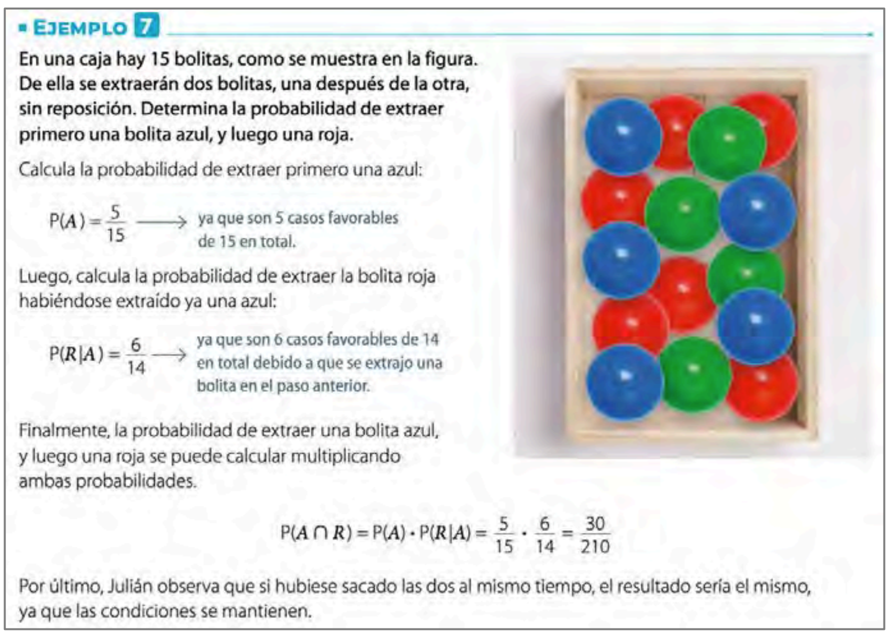
> 6. Todos los alumnos y todas las alumnas del curso se ponen de pie y lanzan una moneda. Si sale cara, pierden y se sientan. Si sale sello, siguen de pie.
>   b. Predicen la cantidad aproximada de lanzamientos, hasta que estén todos(as) sentados(as), para un curso de 30 a 40 estudiantes.

Fuente. Ministerio de Educación (2016, p.184).

Significado clásico/subjetivo (CS). Una diferencia relevante entre el libro de texto y el Programa de estudio fue la introducción del concepto de probabilidad condicional, y su respectiva notación, en el libro de texto; en el Programa de estudio no se presentó este concepto, pues de acuerdo con las bases curriculares, está previsto que las probabilidades condicionales (concepto, notación y herramientas) sean tratados en tercero medio. Sin embargo, diversos ejercicios del libro de texto involucraron la probabilidad condicional, y fue en ellos que se encontraron juntos tanto el significado clásico como el significado subjetivo. Por ejemplo, la Figura 14 es una tarea sobre juegos de azar en la que el cociente de los casos favorables entre los casos totales es la primera operación requerida, vinculando la tarea con el significado clásico; luego, se requiere complementar con el uso de la probabilidad condicional para resolver la actividad, es decir, que la probabilidad que resulta de aplicar la regla de Laplace es considerada posteriormente como una probabilidad subjetiva.

Figura 14

Ejemplo de tarea en el libro de texto con significado clásico/subjetivo



EJEMPLO 7

En una caja hay 15 bolitas, como se muestra en la figura. De ella se extraerán dos bolitas, una después de la otra, sin reposición. Determina la probabilidad de extraer primero una bolita azul, y luego una roja.

Calcula la probabilidad de extraer primero una azul:

$P(A) = \frac{5}{15} \longrightarrow$ ya que son 5 casos favorables de 15 en total.

Luego, calcula la probabilidad de extraer la bolita roja habiéndose extraído ya una azul:

$P(R|A) = \frac{6}{14} \longrightarrow$ ya que son 6 casos favorables de 14 en total debido a que se extrajo una bolita en el paso anterior.

Finalmente, la probabilidad de extraer una bolita azul, y luego una roja se puede calcular multiplicando ambas probabilidades.

$$P(A \cap R) = P(A) \cdot P(R|A) = \frac{5}{15} \cdot \frac{6}{14} = \frac{30}{210}$$

Por último, Julián observa que si hubiese sacado las dos al mismo tiempo, el resultado sería el mismo, ya que las condiciones se mantienen.

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 177).

Sin significado (N). Entre las tareas que no tuvieron un significado de la probabilidad vinculado se encuentra los ejemplos de las Figuras 15 y 16.

Figura 15

Ejemplo de tarea en el libro de texto sin significado

1. Representa en un diagrama de Venn los siguientes conjuntos.
   a. $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $B = \{1, 2, 5, 9, 10, 11\}$.
   b. $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{1, 5, 6, 8, 9, 11\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
   c. $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{1, 10, 20, 30\}$ y $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 12, 14\}$

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 166).

Figura 16

Ejemplo de tarea en el Programa de estudio sin significado

7. De cinco deportistas que participan en una maratón, se eligen tres al azar para someterse a un control de dopaje.

- Elaboran un árbol para determinar el total de posibilidades.

Fuente. Ministerio de Educación (2016, p.184).

En ellos se puede notar que el objetivo de estos era aplicar o interpretar las herramientas introducidas, además que tampoco incluían el concepto de probabilidad.

De la Tabla 4 podemos resumir que el significado clásico es el predominante tanto en el libro de texto como en el Programa de estudio, lo que denota la importancia que se le confiere al estudio de la regla de Laplace en este nivel. Los significados subjetivo y frecuencial también se encontraron en las tareas analizadas, aunque no con la misma participación. Se observa que el significado subjetivo viene en segundo lugar de uso después del significado clásico, porque su importancia se da en que hay elementos que emergen de la observación personal del alumno, incluyendo elementos probabilísticos, pues en este nivel el estudiante ha adquirido otros conocimientos que le ayudan en la toma de decisiones. El significado frecuencial sigue en importancia; su vínculo con el registro de distribuciones y las tablas estadísticas aprendidas en las lecciones de estadística correspondientes al mismo nivel es algo que se debía desarrollar en la parte de probabilidad.

Tabla 4

Significados de la probabilidad presentes en el currículo de Matemática de 1º medio.

Significados de la probabilidad	Libro de texto	Programa de estudio
Intuitivo (I)	9	2
Clásico (C)	79	30
Frecuencial (F)	17	7
Subjetivo (S)	19	19
Axiomático (A)	1	0
Intuitivo/Clásico (IC)	2	0
Intuitivo/Frecuencial (IF)	1	0
Intuitivo/Subjetivo (IS)	1	0
Clásico/Frecuencial (CF)	0	7
Clásico/Subjetivo (CS)	11	0
Sin Significado (N)	40	19
Total general	180	84

Como es de esperar, el significado intuitivo sigue presente pero sin tanta relevancia, ya que no es suficiente la intuición debido a que los estudiantes ya poseen conocimientos que han adquirido en niveles anteriores; este significado se encontró principalmente en preguntas de introducción y reflexión.

El significado axiomático no está contenido en las tareas del Programa de estudio de Matemática para primero medio; sin embargo, está presente en el libro de texto del nivel en una tarea, la cuál tenía como objetivo vincular lo aprendido en lecciones anteriores con la noción de distribución normal. A pesar de que sí se presentan los conjuntos y el espacio muestral, consideramos que no se logra hacer la conexión de estos elementos con la teoría de la probabilidad (conjunto universo-espacio muestral, subconjuntos-eventos, etc.), lo cual sería algo deseable e incluso recomendable; más bien, estas herramientas pertenecientes a la teoría de conjuntos son empleadas para organizar los elementos que se presentan en las tareas. Por lo anterior, no se vincularon con el significado axiomático.

3.3.2 Contexto

El contexto no forma parte de los objetos primarios identificados en el marco teórico del EOS; sin embargo, se ha considerado dentro de este estudio debido a que sitúa el problema, lo que afecta la comprensión del mismo. Es decir, el contexto promueve qué tan significativo será dicho problema para el estudiante y si éste logra darle sentido a la tarea y comprender los elementos que aborda. Cabe recordar que debido al impacto que tiene la probabilidad en la vida diaria, es necesario que el alumno tenga ejemplos de su uso y aplicación. Para realizar esta clasificación, se tuvo en consideración lo siguiente:

- la Unidad 4 del libro de texto tiene como título “Deportes”, por lo cual se identifica que éste es un tema recurrente en los problemas;
- la recomendación del Programa de estudio de trabajar con juegos de azar (que contempla los juegos con dados, cartas, monedas, sorteos, bolitas, etc.) para obtener un conocimiento matemático del juego;
- debido a que diversas tareas hacen referencia a “realidades” que no precisamente se presentan en nuestro día a día, se hace la distinción entre lo que aplica a lo cotidiano

(que son preguntas que cualquier persona podría plantearse por sí solo) y lo que es ficticio (situaciones que una persona o el propio alumno casi nunca se plantearía);

- se tiene en consideración que existen preguntas de reflexión en donde el alumno debe emitir un juicio sobre la utilidad de las herramientas aprendidas y su aprendizaje (contexto personal).

Atendiendo a lo anterior, los diversos contextos del eje de probabilidad que se abordan a lo largo del currículo de Matemática para 1º medio se presentan de la siguiente manera:

Tabla 5

Clasificación de los contextos presentes en las tareas de probabilidad del currículo de Matemática de 1º medio.

Contexto	Libro de texto	Programa de estudio	Ejemplos encontrados en el currículo
Científico/Exploratorio	8	4	¿Cuál es la probabilidad de que este sea adulto o tenga sobrepeso?
Deportivo	12	6	*¿Se puede calcular la probabilidad de clasificar al mundial de fútbol?*
Escolar	18	0	En la elección de presidente y de delegado del curso hay tres candidatos: Andrea, Benjamín y Camila. Antes de realizar las elecciones, se consulta por la intención de voto a 10 estudiantes y se obtienen las siguientes probabilidades:
Intramatemático	14	1	¿Qué condición crees que se debe cumplir para que la unión y la intersección de dos conjuntos den el mismo resultado?
Juegos de azar	77	53	En la tómbola que se muestra hay 3 bolas rojas, 2 celestes y 1 verde. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola verde o una roja?
Laboral	16	0	Una máquina fabrica cinco pernos defectuosos por cada 50. Si de un total de 100 pernos fabricados por dicha máquina se eligen tres al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los tres estén defectuosos?
Personal	11	0	Con respecto al trabajo en grupo, ¿cómo fue tu desempeño? ¿Y el de tus compañeros? ¿Qué mejorarías?
Real/cotidiano	3	0	¿Cuál es la probabilidad de que use en su hogar calefacción a gas o a parafina?
Real/idealizado	21	20	La probabilidad de que un día cualquiera Mariela coma papas fritas es de un 20% y la probabilidad de que tome un jugo es de un 40%. Si la probabilidad de que coma papas fritas o tome un jugo es de un 30%, ¿cuál es la probabilidad de que hoy coma papas fritas y tome un jugo?
Total general	180	84	

Se puede observar en la Tabla 5 que el contexto en juegos de azar predomina sobre los demás; esto concuerda con lo sugerido en el Programa de estudio con respecto al uso de distintos juegos de azar. Es responsabilidad del profesor velar que estos sean educativos.

De los elementos anteriores, el contexto personal no contempla ningún significado de la probabilidad, pues solo se concentra en el uso de las herramientas de la probabilidad, al igual que casi todos los problemas con contexto intramatemático; fuera de ellos, en la mayoría de las tareas asociadas a los otros contextos está relacionado con uno o dos significados de la probabilidad.

Por otro lado, cabe señalar que con excepción de dos problemas del contexto escolar y dos problemas cotidianos, todos los demás conllevan datos ficticios, algo que por la importancia de la probabilidad en la vida diaria no es tan deseable. Además, a pesar de que en el Programa de estudio se promueve el uso de software educativo a través de los OA14 y OA15 (ver Tabla 3), solo un problema del libro de texto lo contempla (una simulación en Geogebra).

3.3.3 Situación-Problema

Como se ha mencionado antes, a través de las situaciones-problema o tareas que se proponen a los estudiantes emergen herramientas, lenguajes y objetos matemáticos, tanto en el mismo planteamiento como en su solución. A diferencia del contexto, este apartado tiene como prioridad clasificar los problemas de acuerdo a la tarea solicitada.

En nuestro caso, en los apartados referentes a probabilidad se identificaron diversos ejercicios matemáticos que tienen que ver con el cálculo de probabilidades, por lo cual éstos se catalogaron de acuerdo a cómo se debía llevar a cabo el experimento aleatorio (con o sin repetición, con o sin devolución, simultáneos) y también según los tipos de datos involucrados en la tarea (si eran recolectados o si ya estaban establecidos).

Figura 17

Ejemplo de tarea con significado clásico que involucra cálculo de experimento aleatorio con repetición

7. Utilizando diagramas de árbol o tablas, responden:
   b. ¿Con qué probabilidad obtienen cara-sello-cara, lanzando tres veces una moneda?

Fuente. Ministerio de Educación (2016, p.178).

Figura 18

Ejemplo de tarea con significado subjetivo que involucra datos concretos o establecidos

2. **Resuelve** los siguientes problemas.
   c. La probabilidad de que un insecto te pique durante un día de campo es de un 20% y de que llueva es de un 30%. ¿Cuál es la probabilidad de que te pique un mosquito y llueva?

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 178).

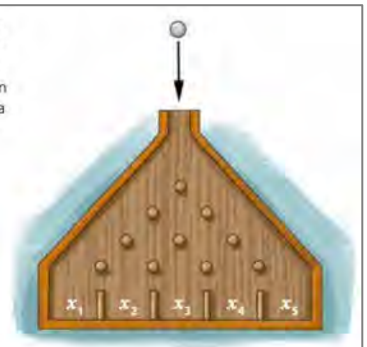
En la Figura 17 se expone un ejemplo de cálculo de probabilidad, según un experimento aleatorio con repetición, y en la Figura 18 con datos concretos o establecidos.

Figura 19

Ejemplo de tarea con significado intuitivo que involucra determinar posibilidad de ocurrencia con base en información general conocida y/o presentada

La **tabla de Galton** o máquina de Galton consta de un tablero vertical con varias filas de clavos. Se introducen bolitas en la parte superior para que caigan rebotando aleatoriamente y depositándose, a medida que caen, en los casilleros de la parte inferior. La imagen muestra una máquina de Galton con cuatro filas de clavos y cinco casilleros, x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5.

- ¿Crees que en todos los casilleros caerán aproximadamente la misma cantidad de bolitas? Justifica.
- Si en la pregunta anterior respondiste que no, ¿en qué casilleros caerán más bolitas? ¿En qué casilleros caerán menos bolitas?
- Si en la primera pregunta respondiste que sí, ¿por qué lo crees?



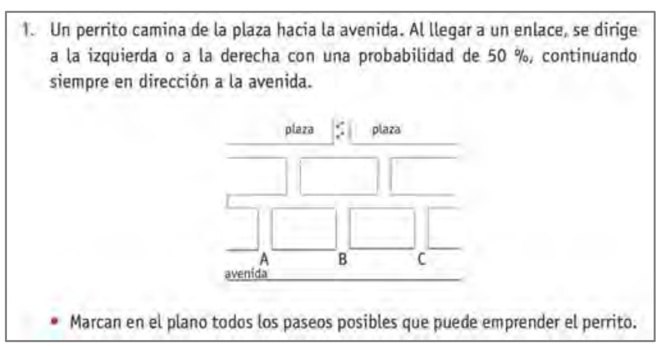
Fuente. Fresno et al. (2020, p. 183).

En otros casos, más que ejecutar un cálculo se pedía determinar la posibilidad de que algo ocurra, lo que evidentemente está muy relacionado con el significado intuitivo, ya que induce a generar una opinión sobre algún evento antes que dictar un número relacionado con su probabilidad de ocurrencia (ver Figura 19).

Además, se establecieron otras categorías en las cuáles no se involucraban cálculos directamente, sino que estaban más conectados con la búsqueda de argumentos y condiciones para llegar a un resultado, la representación de eventos o el uso de las herramientas aprendidas tales como el diagrama de Venn o la regla multiplicativa. En la Figura 20 se presenta un ejemplo de lo anterior; como se puede observar, por lo general este tipo de actividades refuerza el lenguaje, pero no involucra ningún significado explícitamente.

Figura 20

Ejemplo de tarea con significado subjetivo que involucra determinar y/o representar los eventos o conjuntos solicitados

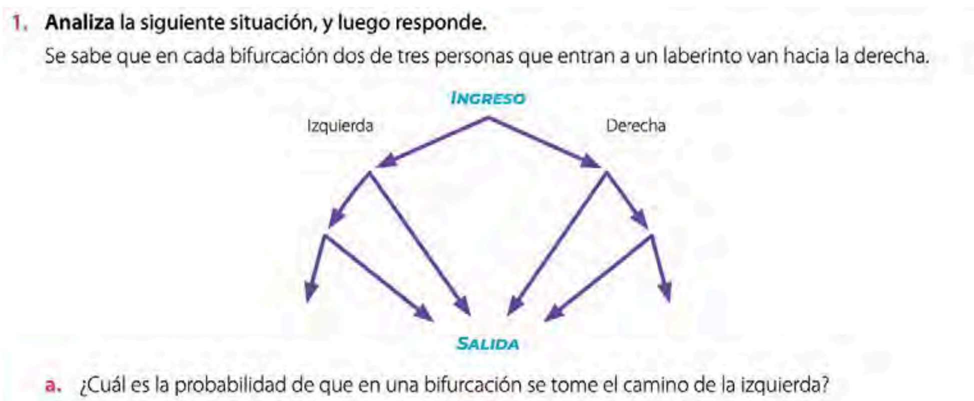


Fuente. Ministerio de Educación (2016, p.180).

En cuanto a los paseos aleatorios, este es parte de una lección que se incluye en el currículo y, por tanto, el cálculo de probabilidades con esta herramienta se hizo presente, tal como podemos ver en la Figura 21. Este tipo de situación-problema involucraba significados diferentes, que estaban más relacionadas con la forma en la que las decisiones eran tomadas. Por ejemplo, si era más probable ir hacia algún lado, si era igual de probable o si existía algún registro de que opciones eran las más frecuentes.

Figura 21

Ejemplo de tarea con significado frecuencial que involucra cálculo de probabilidades en paseos aleatorios



Fuente. Ministerio de Educación (2016, p.192).

En la Tabla 6 se puede apreciar la cantidad de tareas encontradas en cada situación; en ella se distingue el significado de la probabilidad relacionado, y según si se encontró en el Programa de estudio o el libro de texto. En ella también se observa que el significado clásico está presente en 11 de las 12 casillas de situaciones-problema; únicamente no se encontró en la casilla que está enfocada en el uso de las herramientas matemáticas. Los significados frecuencial y subjetivo están, en su mayoría, correspondidos con las tareas que tienen que ver con el cálculo de probabilidades en paseos aleatorios y los cálculos en los que se dan datos concretos.

Tabla 6

Clasificación de las situaciones-problemas presentes en las tareas de probabilidad del currículo de Matemática de 1º medio

Situación o problema	I		C		F		S		A		IC		IF		IS		CF		CS		N	
Cálculo de probabilidades a partir de datos recolectados			2																			
Cálculo de probabilidades de experimentos aleatorios con devolución			2	3																		
Cálculo de probabilidades de experimentos aleatorios con repeticiones			14	7	3		1											4	1			
Cálculo de probabilidades de experimentos aleatorios simultáneos			10	5																		
Cálculo de probabilidades de experimentos aleatorios sin repetición			7	7																		
Cálculo de probabilidades de experimentos aleatorios sin reposición			2	1															8			
Cálculo de probabilidades en paseos aleatorios			13	2	12			4										1				
Cálculo de probabilidades en situaciones con datos concretos			26		2	7	16	10											1			
Determinar condiciones para obtener un resultado	1	2		4			1	1							1				1		5	2
Determinar posibilidad de ocurrencia con base en información general conocida y/o presentada	8		3				1				2		1									
Determinar y/o representar los eventos o conjuntos solicitados				1				4										2			25	17
Utilidad de las herramientas matemáticas aprendidas									1												10	

Libro de texto

Programa de estudio

Tal como se evidenció en la Tabla 5, existen muchos ejercicios relacionados con el juego de azar; esa es la razón por la cual las situaciones-problema que tienen que ver con cálculo de probabilidades de experimentos aleatorios con repetición, sin repetición, con devolución, sin reposición y simultáneos son las que tienen en conjunto mayor presencia en la Tabla 6. Del mismo modo, se encuentran únicamente dos actividades en las que el alumno debe recolectar sus datos, lo que está vinculado con el contexto real/cotidiano.

El cálculo de probabilidades en situaciones con datos concretos es la categoría que tiene la mayor cantidad de ejercicios, tanto en el libro de texto como en el Programa de estudio. Es necesario que el docente preste atención al rol de los datos concretos, ya que en muchas ocasiones esos datos pueden ser modificados para otorgar mayor relevancia a la realidad de la clase, y así conferirle mayor representatividad a la actividad.

Entre las principales diferencias encontradas en el libro de texto y el Programa de estudio, está el hecho de que este último no contiene ejercicios relacionados con la utilidad de las herramientas tratadas; tampoco sugiere actividades en las cuales los alumnos generen sus propias preguntas ni recolecten los datos para sus cálculos, algo importante en el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), el cual se encuentra entre las recomendaciones del MINEDUC (https://www.curriculumnacional.cl/portal/ABP/Chile-Aprende-por-Proyectos/).

3.3.4 Conceptos y Definiciones

En primera instancia, resulta complejo delimitar en una tabla todos los conceptos que intervienen a lo largo de los diferentes problemas que son planteados en el currículo de 1º medio y que incluyen a nuestro objeto, que es la probabilidad.

Por lo tanto, para este trabajo se consideran como referencia las definiciones plasmadas en las lecciones 11 y 12 del libro de texto (ver ejemplo en la Figura 22) y las palabras claves de la unidad 4 especificadas en el Programa de estudio (Tabla 2).

Figura 22

Ejemplo de concepto/definición encontrado en el libro de texto

> • El diagrama usado para representar el espacio muestral y los eventos se llama **diagrama de Venn**.

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 163).

En la Tabla 7 se enlistan las definiciones y conceptos vinculados con probabilidad, de acuerdo con los criterios anteriores, y que fueron empleados en el 86% de las tareas analizadas del libro de texto y en el 83% de las actividades del Programa de estudio, por lo que se consideran representativos del primer nivel de enseñanza media para el estudio de la probabilidad.

Además de las definiciones y conceptos, en la misma tabla se incluyen los significados de la probabilidad relacionados con las tareas que los vinculan.

Como se mencionó antes, el concepto de probabilidad condicional se introduce únicamente en el libro de texto (Figura 14); lo mismo ocurre con la probabilidad empírica, la cual está conectada con el significado frecuencial. También se puede apreciar en la Tabla 7 que en el Programa de estudio no se presentan 9 de los 21 conceptos expuestos, es decir, las tareas sugeridas en el Programa de 1º medio no los contiene. Además, se observa que las actividades que tratan sobre conjuntos están vinculadas con el significado clásico; la disyunción, conjunción y los eventos disjuntos están relacionados con los significados clásico y subjetivo; el concepto de evento independiente es muy utilizado -tanto en la pregunta como en la solución del problema- en tareas que involucran los significados clásico, frecuencial y subjetivo. La tabla de Galton se asocia con los significados intuitivo, clásico y frecuencial, y los paseos aleatorios incluyen, además, el subjetivo; la tabla de doble entrada interviene en tareas con significado clásico y subjetivo, pero el diagrama de árbol abarca hasta el significado frecuencial. Finalmente, se puede notar que las reglas aditiva y multiplicativa están en las actividades que conllevan un significado clásico, frecuencial y subjetivo.

Tabla 7

Clasificación de los conceptos y definiciones presentes en las tareas de probabilidad del currículo de Matemática de 1º medio

	Significados	
Conceptos y definiciones	**Libro de texto**	**Programa de estudio**
Diagrama de Venn	C	C
Conjunto	C	C
Espacio muestral	C	C
Evento unión	C	/
Evento intersección	C	/
Conjunto universo	N	/
Conjunto vacío	N	/
Conjunción “y”	C, S, CS	/
Disyunción “o”	C, S, CS	/
Eventos disjuntos	C, S	C
Eventos independientes	C, F, S, CS	C, F, S, CF
Probabilidad condicional	S, CS	/
Tabla de Galton	I, C, IC, IF	C
Paseo aleatorio	I, C, F, S, IC, IF	C, S
Probabilidad empírica	F	/
Frecuencia relativa o absoluta	F	/
Tabla de doble entrada	C, CS	C
Diagrama de árbol	C, F, S, CS	C, S, CF
Regla aditiva	C, F, S, CS	C, F, S, CF
Regla multiplicativa	C, F, S, CS	C, F, S, CF
Noción de azar	C	C, F

Un concepto que también está presente en el currículo de matemática de 1º medio, pero que no se consideran en la tabla 7, es el plano cartesiano, el cual es un recurso que se utiliza en el tema de paseos aleatorios pero que se ha trabajado previamente en la unidad de geometría de este mismo nivel, al igual que en cursos anteriores. De manera similar, el valor porcentual es un tema que se introduce en 7º básico y se repasa en la unidad de números de 1º medio, para luego utilizarse en diversas actividades de probabilidad.

Los términos “eventos independientes” y “eventos disjuntos” son utilizados de manera explícita e implícita en diversas tareas del libro de texto; sin embargo, aunque son conceptos clave en el uso de la regla multiplicativa y la regla aditiva, no se le da suficiente relevancia en el Programa de estudio, pues únicamente aparece en el glosario anexo (en el Programa de estudio se usa “eventos mutuamente excluyentes” en lugar de “eventos disjuntos”). A pesar de lo anterior, en diversos ejercicios del Programa de estudio se requiere el uso y conocimiento de dichos conceptos para su resolución.

3.3.5 Elementos Lingüísticos o Representaciones

De manera transversal, los elementos lingüísticos están presentes durante toda la práctica matemática, desde el planteamiento hasta la solución del problema y, de acuerdo con el EOS, se observa a través de diversos tipos de representaciones, tablas, símbolos, diagramas, etc. Las tareas ponen en práctica distintos elementos lingüísticos necesarios para la comprensión de un problema probabilístico y, como veremos a lo largo de esta sección, el lenguaje es sumamente importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y más cuando se tratan nociones de probabilidad (Ortiz et al., 2001).

Para realizar esta categorización se tuvo en cuenta el lenguaje que es específico de cada disciplina y que no es utilizado en el lenguaje coloquial; de acuerdo con ello tenemos los siguientes lenguajes: natural (o coloquial), numérico, simbólico, algebraico, probabilístico y conjuntista. También se clasificaron las representaciones utilizadas de acuerdo a su estructura, dando las siguientes categorías: diagrama figural, tabular, registro gráfico y representación pictórica.

A continuación, se explican las diferentes categorías establecidas en este punto y su relación con los significados.

a) Lenguaje natural.

Es indispensable conocer la importancia que tiene el lenguaje natural o cotidiano en la probabilidad. Este no está vigente únicamente en el significado intuitivo, como se podría suponer, sino que influye en todos los significados. Como simple ejemplo, en el libro de texto se hace hincapié en el uso de la disyunción "o" y su relación con la unión de eventos, y la conjunción "y" y su conexión con la intersección de eventos, recurso que es utilizado ampliamente (Figura 23).

Figura 23

Ejemplo de tarea que involucra lenguaje natural

- ¿Cuál es la probabilidad de marcar un gol en los últimos dos minutos de un partido?
- ¿Has escuchado hablar de estadísticas en deporte? ¿En qué contextos?
- ¿Qué situación o tema de tu interés crees que se pueda relacionar con estadística o probabilidad y con lo que estudiarás en esta unidad? ¿Por qué?

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 144).

Por supuesto, los significados clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático, así como los combinados, incluyen más tipos de lenguaje además del natural; muchas veces estos diferentes lenguajes surgen de la traducción del lenguaje natural a lenguajes de la matemática. Esto podría suponer que la presencia del lenguaje natural tiene que ver con la conexión de la probabilidad con los hechos de la vida real, de ahí su relevancia.

La comprensión de cada tarea a través del lenguaje cotidiano es importante para seleccionar e interpretar las herramientas que se deben emplear para resolver una tarea; por lo mismo, es de suma importancia no caer en errores ni ambigüedades al momento de plantear una situación. Como ejemplo, podemos referirnos a la Figura 6, la cual enuncia dos preguntas cuya intención en el planteamiento es que sean equivalentes debido a que usa la expresión “es decir” y, sin embargo, resulta en dos cálculos distintos. La primera pregunta “¿Cuál es el porcentaje estimado del equipo?” corresponde a sacar un promedio, algo muy distinto a la siguiente pregunta “¿Cuál es el porcentaje probable de que todos los jugadores del equipo conviertan su lanzamiento en gol?”, la cual alude ya a un cálculo de probabilidades utilizando la regla multiplicativa de la probabilidad. Esto resultar incoherente y confuso al momento de resolverlo.

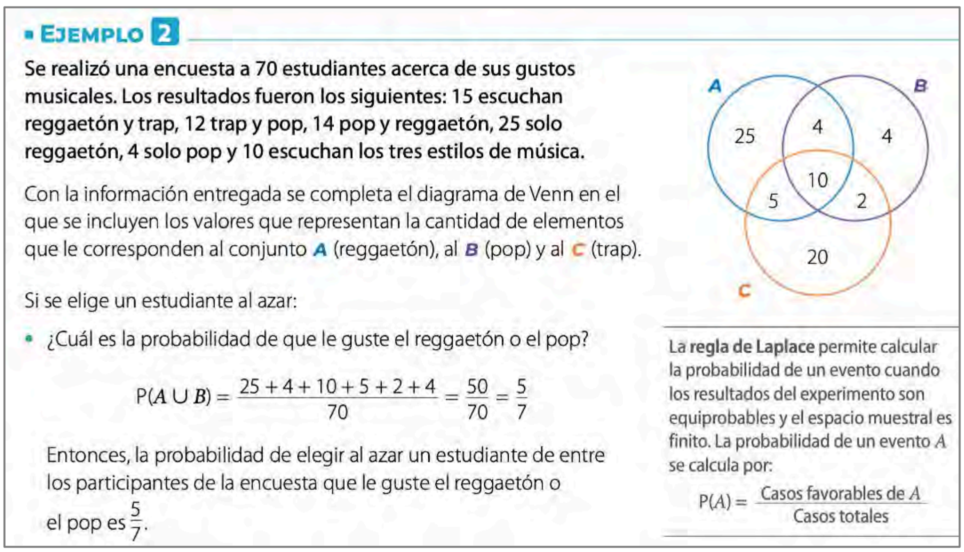
Dicho lo anterior, el lenguaje natural es tan relevante que marca una diferencia entre una pregunta y otra; su valor es tal que define el objetivo de una tarea, lo que se debe realizar. Aunado a ello, también provee información fundamental para conocer el significado histórico-epistemológico que la probabilidad conlleva en una situación determinada.

b) Lenguaje numérico

Evidentemente, en este nivel escolar el lenguaje numérico también está presente en la mayoría de las actividades debido a que tiene relación con las operaciones numéricas requeridas para aproximar una probabilidad numérica en los significados clásico, frecuencial y subjetivo (también se podría incluir el significado axiomático, pero en este nivel no existen suficientes tareas de este significado como para hacer una observación más precisa). Por ejemplo, en la Figura 24 se observa el uso del lenguaje numérico (además de otros lenguajes y representaciones).

Figura 24

Ejemplo de tarea que involucra lenguaje natural, conjuntista, probabilístico, numérico y diagrama figural



EJEMPLO 2

Se realizó una encuesta a 70 estudiantes acerca de sus gustos musicales. Los resultados fueron los siguientes: 15 escuchan reggaetón y trap, 12 trap y pop, 14 pop y reggaetón, 25 solo reggaetón, 4 solo pop y 10 escuchan los tres estilos de música.

Con la información entregada se completa el diagrama de Venn en el que se incluyen los valores que representan la cantidad de elementos que le corresponden al conjunto ***A*** (reggaetón), al ***B*** (pop) y al ***C*** (trap).

Si se elige un estudiante al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el reggaetón o el pop?

$$P(A \cup B) = \frac{25+4+10+5+2+4}{70} = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}$$

Entonces, la probabilidad de elegir al azar un estudiante de entre los participantes de la encuesta que le guste el reggaetón o el pop es $\frac{5}{7}$.

La **regla de Laplace** permite calcular la probabilidad de un evento cuando los resultados del experimento son equiprobables y el espacio muestral es finito. La probabilidad de un evento A se calcula por:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables de } A}{\text{Casos totales}}$$

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 164).

Cabe señalar que el lenguaje numérico está presente naturalmente en todo el currículo de primero medio, en cuatro diferentes versiones: como número entero, decimal, fraccionario y porcentual.

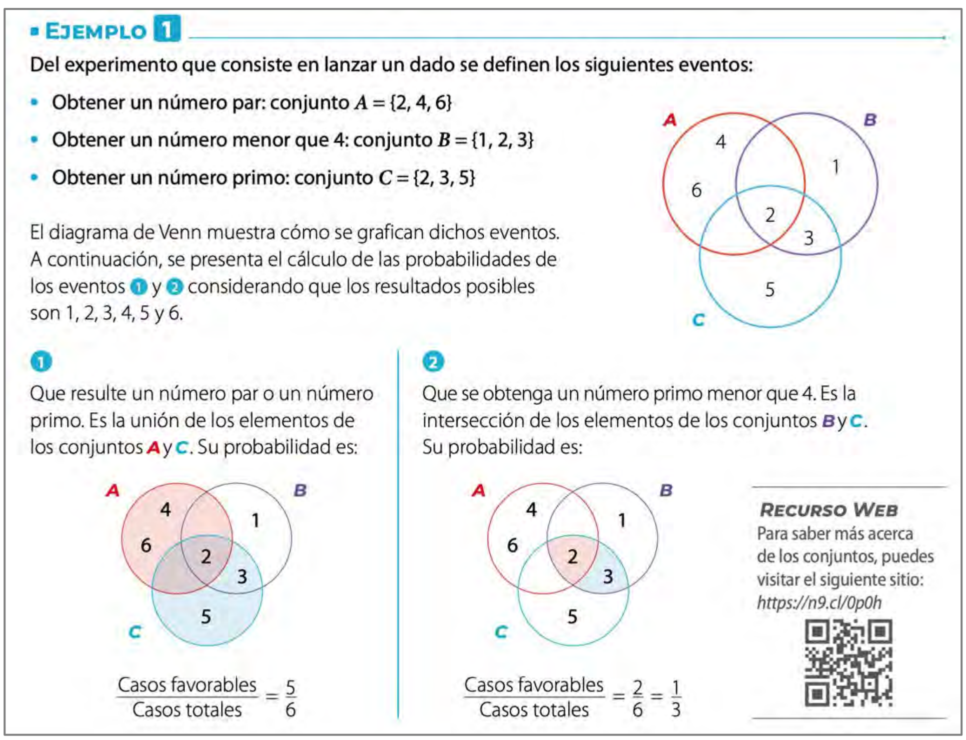
c) Lenguaje simbólico

El lenguaje simbólico requiere de cierta comprensión del problema, teniendo en cuenta el contexto y los datos. Por ejemplo, si observamos la Figura 24 se puede notar que dentro del

Diagrama de Venn se hace uso de un lenguaje numérico para exponer el total de personas que gustan de cada género musical; por otra parte, la Figura 25 contiene en el diagrama de Venn símbolos que representan los números de un dado. Es decir, al momento de contar los casos favorables para resolver la actividad de la Figura 25, no hay que considerar el valor que está en el diagrama de Venn, sino que hay que tener en cuenta que el “6” es un símbolo y cuenta como 1 caso, y del mismo modo para cada número.

Figura 25

Ejemplo de tarea que involucra lenguaje natural, conjuntista, probabilístico, numérico, simbólico y diagrama figural



Fuente. Fresno et al. (2020, p. 163).

Lo anterior podría resultar confuso para los estudiantes, por lo cual es importante señalar la existencia del lenguaje simbólico y la importancia de favorecer la comprensión de lo que se pide en cada actividad.

Cabe mencionar que este lenguaje no es usual, pues se ubicaron solo dos tareas en el libro de texto (vinculadas con el significado clásico), pero en el Programa de estudio no se encontró alguna tarea que lo incluya. Debido a la formalidad propia del nivel educativo se sugiere diseñar otras tareas, además de las ya mencionadas, que incluyan el lenguaje simbólico, para ir gradualmente introduciendo al estudiante en este tipo de lenguaje en el estudio del tema.

d) Lenguaje algebraico

En el libro de texto se encontraron cuatro tareas en las que se introduce el lenguaje algebraico, una de las cuales se muestra en la Figura 26, a diferencia del Programa de estudio que no contiene sugerencias con este lenguaje.

Figura 26

Ejemplo de tarea que involucra lenguaje natural, numérico, algebraico y probabilístico

EJEMPLO 7

La probabilidad de que Matías salga con su hermana es 0,75 y de salir con su primo es de 0,5. Si la probabilidad de que salga con su hermana o su primo es 0,85, ¿cuál es la probabilidad de que salga con ambos a la vez?

Sean los eventos:

- A: Salir con la hermana.
- B: Salir con el primo.

Entonces, $P(A) = 0{,}75$ y $P(B) = 0{,}5$; además, se conoce que $P(A \cup B) = 0{,}85$. Con estos datos puedes aplicar la regla aditiva para calcular $P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0{,}85 = 0{,}75 + 0{,}5 - P(A \cap B) \longrightarrow \text{Se sustituyen los valores.}$$
$$0{,}85 = 1{,}25 - P(A \cap B) \longrightarrow \text{Se resuelve.}$$
$$P(A \cap B) = 1{,}25 - 0{,}85 \longrightarrow \text{Se calcula el valor buscado.}$$
$$P(A \cap B) = 0{,}4$$

Luego, la probabilidad de que salga con ambos a la vez es de 0,4, o bien de un 40%.

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 171).

Las tareas con lenguaje algebraico halladas en el libro de texto están relacionadas con el significado subjetivo, pues dan datos precisos sobre diversos eventos, aunque es posible que cambiando el origen de los datos también se pueda presentar el significado frecuencial en este lenguaje.

Se puede advertir que el lenguaje algebraico involucra ecuaciones y requiere de fórmulas, por lo que el objetivo de utilizar este lenguaje en una tarea de probabilidad es reforzar los conceptos empleados y las propiedades de los eventos.

e) Lenguaje probabilístico

El lenguaje propio de la probabilidad (es decir, las expresiones que adoptan un sentido específico en el campo de la probabilidad y que al verlas evoca un concepto, propiedad, o algún aprendizaje relacionado con este campo) está presente en este nivel con conceptos como experimento aleatorio, eventos, probabilidades, equiprobabilidad, entre los más usuales, además de la respectiva notación de la probabilidad y sus operaciones, siendo este último un tema nuevo para el alumno, pues trabaja con uniones e intersecciones de eventos. Las Figuras 24, 25 y 26 son ejemplos que contienen lenguaje y notación probabilística.

El lenguaje probabilístico está presente en el libro de texto y Programa de estudio, además que abarca casi todos los significados de la probabilidad: en el significado clásico tiene una estrecha relación con la equiprobabilidad; el significado frecuencial va de la mano con la probabilidad empírica; el significado subjetivo está vinculado con las probabilidades que surgen de experiencias personales; y el significado axiomático se inicia al relacionar la probabilidad con funciones específicas del área, tal como la campana de Gauss. El significado intuitivo no contempla lenguaje probabilístico en las tareas analizadas, lo cual es de esperar ya que por el nivel cognitivo que abarca está más vinculado con lenguaje no específico.

f) Lenguaje conjuntista

Como se mencionó anteriormente, conceptos como conjuntos, espacio muestral, unión e intersección de conjuntos y sus respectivas notaciones están presentes en el currículo de 1º medio (Figura 24). Se utilizó en tareas tanto del libro de texto como del Programa de estudio, con la notable diferencia de que en el libro de texto la lección 11 sobre reglas de la probabilidad se comienza introduciendo este lenguaje, mientras que en el Programa de estudio se finaliza esta lección con los conjuntos y el diagrama de Venn.

Esta diferencia es un punto de discusión y reflexión importante; desde nuestro punto de vista, se sugiere seguir con el orden que presenta el libro de texto: comenzar con el lenguaje conjuntista para luego evolucionar al lenguaje probabilístico. El motivo de esta recomendación es para seguir el desarrollo histórico de la probabilidad, puesto que la probabilidad como área de la matemática surge de la teoría de conjuntos, además de otras disciplinas que le dan sustento. De esta manera, los conceptos probabilísticos surgirían como consecuencia de los conceptos conjuntistas y la necesidad de denominar los eventos propios de la actividad humana que se quieren analizar.

Como se comentó anteriormente, otro aspecto que se debe tener en cuanta es que nunca se hace el vínculo entre algunos conceptos conjuntistas y los correspondientes probabilísticos (por ejemplo, la relación entre el conjunto universo y el espacio muestral) y, sin embargo, en ocasiones, se transita de un lenguaje a otro sin distinción (Figura 25).

El lenguaje conjuntista se relacionó únicamente con el significado clásico en este nivel; lo anterior se debe a que, en el nivel escolar de 1º medio, la finalidad de este lenguaje es organizar los datos que se dan en las tareas, de tal manera que esta herramienta facilite encontrar la cantidad de casos favorables y casos totales.

g) Diagrama figural

Tal como se observa en las tareas de las Figuras 24 y 25, el diagrama de Venn, considerado un diagrama figural, fue utilizado en el libro de texto como herramienta para ordenar los datos y ejecutar la regla de Laplace, lo cual forma parte del significado clásico. En el Programa de estudio se le dio menos relevancia como herramienta útil para trabajar las probabilidades, pues solo se utilizó para hacer operaciones entre conjuntos, pero sí se señala que la intersección de conjuntos es equivalente a la conjunción "y" de proposiciones, y que la unión corresponde a la disyunción "o".

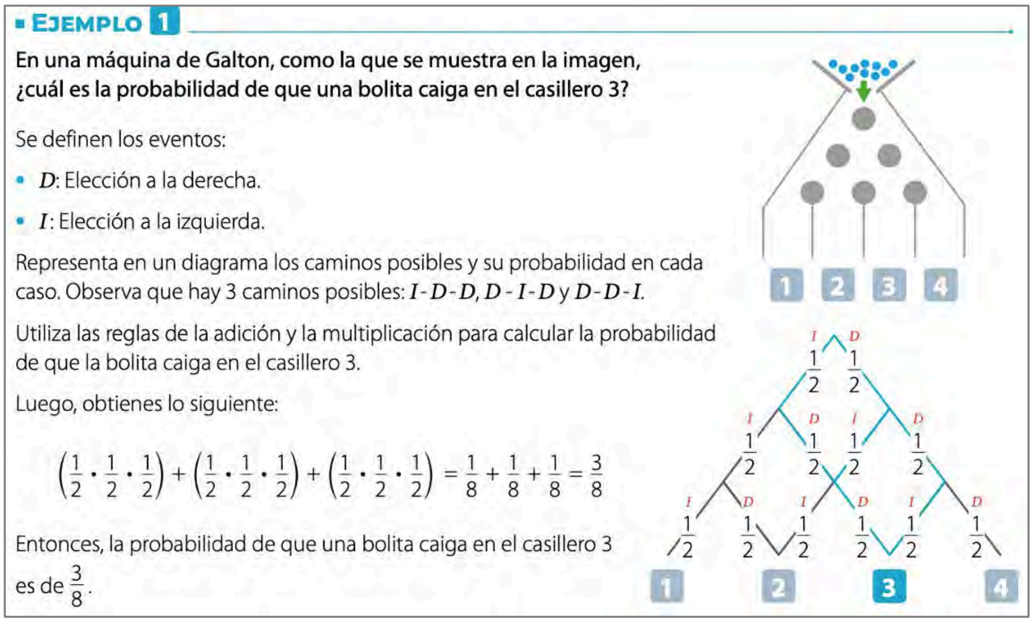
Otro diagrama que es muy utilizado en el currículo de probabilidad de 1º medio es el diagrama de árbol, el cual es más conocido por los estudiantes, ya que se ha empleado en cursos anteriores. Esta otra herramienta es muy utilizada para representar y resolver tareas que implican el cálculo de probabilidades de experimentos aleatorios con/sin devolución, con repetición, simultáneos y en paseos aleatorios; además, dichas tareas estuvieron vinculadas con el significado clásico, frecuencial y subjetivo.

Observar que el diagrama de Venn y el diagrama de árbol, al ser considerados ambos como herramientas, resultan ser parte clave en el procedimiento y posterior solución de las tareas que lo contemplan, ya sea que se utilicen porque la tarea lo especifique o no, de lo cual hablaremos más adelante.

Finalmente, también se encontraron otros tipos de diagramas cuyo objetivo era ser una representación visual de la tarea o del experimento aleatorio, pero sin llegar a ser una herramienta como tal; la máquina de Galton es un ejemplo claro de esto (ver Figura 27). Todos los diagramas mencionados fueron utilizados en tareas tanto del libro de texto como del Programa de estudio.

Figura 27

Ejemplo de tarea que involucra lenguaje natural, numérico, probabilístico y diagrama figural



Ejemplo 1

En una máquina de Galton, como la que se muestra en la imagen, ¿cuál es la probabilidad de que una bolita caiga en el casillero 3?

Se definen los eventos:

- D: Elección a la derecha.
- I: Elección a la izquierda.

Representa en un diagrama los caminos posibles y su probabilidad en cada caso. Observa que hay 3 caminos posibles: I-D-D, D-I-D y D-D-I.

Utiliza las reglas de la adición y la multiplicación para calcular la probabilidad de que la bolita caiga en el casillero 3.

Luego, obtienes lo siguiente:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

Entonces, la probabilidad de que una bolita caiga en el casillero 3 es de $\frac{3}{8}$.

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 183).

h) Diagrama tabular

Las tablas fueron recursos utilizados para presentar, de manera clara, datos bien organizados dentro de las tareas, tanto en el libro de texto como en el Programa de estudio. Las tareas que involucraban diagramas tabulares tenían conexión con los significados clásico, frecuencial y subjetivo.

Sin embargo, en el libro de texto se presentaron tablas que, además de organizar datos, también tenían otros aspectos a considerar. Por ejemplo, la tabla de frecuencias está íntimamente vinculada con el significado frecuencial; la tabla de doble entrada fue presentada como un método para el cálculo de probabilidades aplicando la regla de Laplace (significado clásico) debido a la facilidad de hallar los casos favorables y los casos totales en ella (Figura 28).

Figura 28

Ejemplo de tarea que involucra lenguaje natural, numérico, probabilístico y diagrama tabular

Ejemplo 3

En la siguiente tabla se muestra el total de candidatos a un puesto de trabajo según género y años de experiencia:

	Género		
Experiencia (años)	Femenino	Masculino	Total
De 0 a 5	6	10	16
Más de 5	14	12	26
Total	20	22	42

Al elegir un candidato al azar, calcula:

- La probabilidad de que sea mujer o que tenga de 0 a 5 años de experiencia.
- La probabilidad de que sea hombre y que tenga más de 5 años de experiencia.

1º Para determinar la probabilidad pedida, se calcula el cociente entre la cantidad de casos favorables y el número de casos totales.

	Género		
Experiencia (años)	Femenino	Masculino	Total
De 0 a 5	6	10	16
Más de 5	14	12	26
Total	20	22	42

Casos favorables: $6 + 14 + 10 = 30$ Casos totales

Entonces, la probabilidad de que el postulante sea mujer o que tenga de 0 a 5 años de experiencia es $\frac{30}{42} = \frac{5}{7}$.

2º Luego, la probabilidad de que el candidato sea hombre y que tenga más de 5 años de experiencia está dada por:

	Género		
Experiencia (años)	Femenino	Masculino	Total
De 0 a 5	6	10	16
Más de 5	14	12	26
Total	20	22	42

Casos favorables Casos totales

Entonces la probabilidad de que el postulante tenga ambas características es $\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 165).

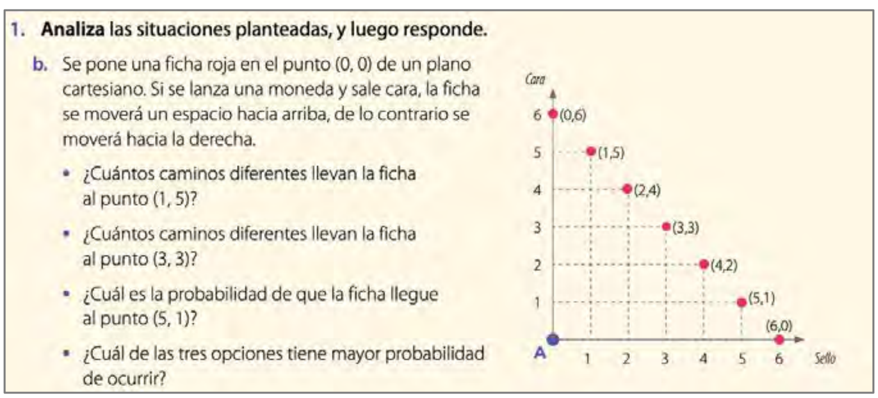
De esta manera, se puede notar que la riqueza de la representación en tablas deja ver elementos lingüísticos que facilitan el desarrollo y la comprensión de las actividades, e incluso, en ocasiones, proveen métodos para resolverlas pues, debido a que facilitan el cálculo de probabilidades, pueden considerarse parte del método.

i) Registro gráfico

El plano cartesiano es considerado un registro gráfico en este trabajo (y no un diagrama figural) debido a que está determinado por 2 ejes perpendiculares que definen los puntos del plano a través de pares ordenados que constituyen las coordenadas; los alumnos están familiarizados con su uso desde cursos anteriores, y en ese nivel también se ha vuelto a estudiar en el eje de geometría.

Figura 29

Ejemplo de tarea que involucra lenguaje natural, numérico, probabilístico y registro gráfico



Fuente. Fresno et al. (2020, p. 194).

Las actividades que involucran este tipo de lenguaje en el currículo de Matemática de 1º medio están muy relacionadas con paseos aleatorios y presenta una herramienta visual para su resolución. En el libro de texto fue más evidente este vínculo (Figura 29), y se asoció con el significado clásico; en cambio, en el Programa de estudio, por el tipo de actividad sugerida no se vinculó con ningún significado.

j) Representación pictórica

Se considera una representación pictórica a los dibujos y las fotografías que representan un elemento de la tarea; este elemento lingüístico no tiene relación directa con el tipo de significado a usar, pues su aporte está más relacionado con darle contexto al ejercicio planteado, es decir, crea un apoyo visual. Ejemplos de esto se encontraron tanto en el libro de texto como el Programa de estudio; la Figura 30 presenta ejemplos de representaciones pictóricas.

Figura 30

Ejemplo de tarea que involucra lenguaje natural, numérico, probabilístico, diagrama figural y representación pictórica

Fuente. Fresno et al. (2020, p. 178).

3.3.6 Proposiciones

Otros elementos que están involucrados en las tareas, de acuerdo al EOS, son las proposiciones y propiedades. El libro de texto de primero medio presenta y enfatiza algunas relaciones entre los objetos matemáticos a estudiar, como se aprecia en la siguiente figura:

Figura 31

Ejemplo de proposición/propiedad encontrado en el libro de texto

- Si los eventos son **disjuntos**, entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Nota. Fuente: Fresno et al., 2020 (p. 168).

Por su parte, el Programa de estudio señala a modo general las propiedades que se deben estudiar a través de los Objetivos de Aprendizaje (ver Tabla 3); además, las tareas sugeridas en el Programa de estudio están vinculadas con cada una de las OA: OA14 tareas de la página 174 a la 179 y actividad evaluativa de la página 189, y OA15 tareas de la página 180 a la 186 y actividad evaluativa de la página 190. En dichas tareas podemos observar de mejor manera las propiedades y proposiciones que se esperan sean trabajadas.

Es importante mencionar que, para este nivel, aún no se considera como objetivo en ninguna actividad tener que demostrar las proposiciones y propiedades que se enuncian.

Los resultados relacionados con las proposiciones y propiedades encontradas en las tareas del currículo chileno de primero medio se resumen en la Tabla 8. De ella, se desprende que en el libro de texto se abarcan más propiedades que en el Programa de estudio, lo cual es comprensible debido a la extensión del primero.

Por otro lado, ambos recursos contienen tareas con propiedades conjuntistas, pero en el Programa de estudio dichas actividades no están relacionadas con algún significado, sino únicamente se presentaron como herramientas. Además, las propiedades de tipo algebraico tampoco aparecen en problemas planteados en el Programa de estudio.

Tabla 8

Clasificación de las propiedades y proposiciones presentes en las tareas de probabilidad del currículo de Matemática de 1º medio

	Significados	
Propiedades y proposiciones	**Libro de texto**	**Programa de estudio**
Intuitivas (en acto)	I, S, IC, IF	I
Operaciones aritméticas	C, CS	C, S, CF
Conjuntistas	C	/
Estadísticas	I, C, F, IF	F
Probabilísticas	I, C, F, S, A, IC, IF, IS, CS	I, C, F, S, CF
Regla de Laplace	C, F, CS	C, F, S, CF
Regla aditiva	C, F, S, CS	C, F, S, CF
Regla multiplicativa	C, F, S, CS	C, F, S, CF
Probabilidad evento complementario	F, S	S
Propiedades de la igualdad	S	/
Porcentajes (proporcionalidad)	F, S, CS	S, CF

Entre las propiedades mencionadas se encuentran las "propiedades probabilísticas", que abarca todas las demás propiedades del campo de la probabilidad (que muchas veces están implícitas, como que la probabilidad debe estar entre 0 y 1, la equiprobabilidad de eventos, entre otros) que no tienen que ver con la regla de Laplace, reglas aditivas y multiplicativas y probabilidad del evento complementario; estás últimas no se incluyeron dentro de las propiedades probabilísticas debido a su importancia en las lecciones y la cantidad de veces que se repitieron en las tareas.

También se observa lo siguiente con respecto a los significados presentes, tanto en las tareas del libro de texto como las del Programa de estudio:

- El significado intuitivo está relacionado con el tipo de propiedades espontáneas (en acto), probabilísticas y estadísticas. Del mismo modo, los significados intuitivo/clásico, intuitivo/frecuencial e intuitivo/subjetivo hacen uso de esas mismas propiedades en las tareas respectivas.

- Las tareas vinculadas con el significado clásico utilizan más propiedades en su resolución; la regla de Laplace, regla multiplicativa, regla aditiva, propiedades probabilísticas, estadísticas, conjuntistas y aritméticas son las propiedades más usadas en dichas actividades. Los significados clásico/frecuencial y clásico/subjetivo también emplearon propiedades del mismo tipo, además de las propiedades de porcentajes.
- El significado frecuencial acota las propiedades usadas en el punto anterior pues, a diferencia del significado clásico, ya no tuvo propiedades aritméticas ni conjuntistas, pero siguió utilizando la regla de Laplace, regla aditiva, regla multiplicativa, propiedades probabilísticas y estadísticas; además, incluye propiedades diferentes, como la proporcionalidad (que tiene que ver con el cambio de porcentaje a número decimal) y la probabilidad del evento complementario. Esta última propiedad no está enunciada explícitamente en ningún recurso curricular (libro de texto y Programa de estudio), por lo que es importante que el profesor tome la iniciativa para su explicación.
- Para el significado subjetivo son muy variadas las propiedades que se relacionan con sus tareas, pues se encontraron propiedades intuitivas, probabilísticas, aritméticas, regla de Laplace, regla aditiva, regla multiplicativa, probabilidad del evento complementario, propiedades de la igualdad y proporcionalidad.
- En cuanto al significado axiomático, al ser un único problema, solo se pudo vincular con propiedades de tipo probabilísticas; en niveles más avanzados se podrían encontrar otras tareas que puedan proveer de más información.

Cabe mencionar que existen otras propiedades que no fueron contempladas en la Tabla 8, como las relacionadas con el sistema de coordenadas y el elemento neutro; el motivo de por qué no se incluyeron es debido a que fueron utilizadas en tareas que no tenían ningún significado relacionado con los del estudio, esto es, que el cálculo de probabilidades no fue un objetivo para estas tareas, sino que estaban más relacionadas con el uso del plano cartesiano como herramienta para organizar e interpretar datos.

3.3.7 Procedimientos

Aunque existen diversos modos de resolución para llegar a la solución de una tarea, este análisis se ha realizado teniendo en cuenta la información y los ejemplos proporcionados en el libro de texto, y las indicaciones del programa de estudio que se encontraron dentro de la misma tarea como las marcadas en los indicadores de evaluación (ver Tabla 3).

Figura 32

Ejemplo de procedimiento "Usar el valor porcentual" encontrado en el libro de texto

El valor porcentual se puede expresar como un decimal que corresponde al valor porcentual dividido en 100. Por ejemplo, 15 % = 0,15.

Fuente Fresno et al. (2020, p. 170).

Figura 33

Ejemplo de procedimiento "Cálculo de probabilidades con apoyo del diagrama de árbol" encontrado en el Programa de estudio

Elaboran o completan diagramas de árboles con las posibilidades de experimentos aleatorios, para representar los eventos y determinar sus probabilidades.

Fuente. Ministerio de Educación, (2016, p.189).

Las Figuras 32 y 33 ejemplifican algunas técnicas para el desarrollo de los ejercicios encontrados en ambos recursos.

En la Tabla 9 se han numerado los procedimientos, y de ella se desprende lo siguiente:

- Los procedimientos 14 y 15 se encontraron en el Programa de estudio únicamente; por el contrario, los procedimientos 16, 17 (ver Figura 5), 18 (ver Figura 26) y 19 se observaron solamente en el texto. Se desarrollaron diversos significados en las tareas que contenían dichos procedimientos, es decir, un tipo de procedimiento puede ser utilizado en tareas con distinto significado.
- En cuanto a la presencia de los significados en los procedimientos, se constata que el significado intuitivo utiliza en mayor medida los tipos de procedimiento 1 (ver Figura 1) y 2, pero también se pudo observar en el 16.
- El significado clásico (y sus variantes intuitivo/clásico, clásico/frecuencial y clásico/subjetivo) se manifiesta en casi todos los procedimientos (por ejemplo, en la Figura 3 se puede apreciar el procedimiento 4 en una tarea con significado clásico), excepto en los procedimientos 12, 14, 16, 17 y 18.
- El significado frecuencial se presenta en algunas tareas que incluye los procedimientos 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10 y 13 en el Programa de estudio; el texto considera los procedimientos 4, 5, 6, 7, 12 (ver Figura 21), 16 y 17. De lo anterior se observa que, para el significado frecuencial, los procedimientos 4, 5, 6 y 7 coinciden tanto en el Programa de estudio como en el libro de texto.
- Los procedimientos 2, 3, 5, 6, 7, 10, 13 y 18 son utilizados en las tareas vinculadas con el significado subjetivo en el texto; de manera análoga, los procedimientos 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13 y 14 son utilizados en el Programa de estudio.

Tabla 9

Clasificación de los procedimientos presentes en las tareas de probabilidad del currículo de Matemática de 1º medio

Procedimientos	**Significados**	
	Libro de texto	**Programa de estudio**
1. Adivinar-valorar	I, C, IC	I, CF
2. Valorar la utilidad de las herramientas aprendidas (aplicación)	I, S, A, IC, IS	I, F, CF
3. Buscar un resultado general a partir de un caso particular (razonamiento inductivo)	S, CS	C
4. Calcular probabilidades aplicando Regla de Laplace (conteo de casos)	C, F, IC, CS	C, F, CF
5. Calcular probabilidades aplicando Regla aditiva	C, F, S, CS	C, F, S
6. Calcular probabilidades aplicando Regla multiplicativa	C, F, S, CS	C, F, S
7. Calcular probabilidades con apoyo del Diagrama de árbol y la Regla de Laplace/Regla aditiva/Regla multiplicativa	C, F, S	C, S, CF
8. Calcular probabilidades con apoyo del Diagrama de Venn y la Regla de Laplace/Regla aditiva	C	C
9. Calcular probabilidades con ayuda de una tabla de doble entrada y de la Regla de Laplace/Regla aditiva/Regla multiplicativa	C	C
10. Usar el valor porcentual y calcular probabilidades usando la Regla aditiva/Regla multiplicativa	S, CS	F, S
11. Expresar el espacio muestral	C	S
12. Calcular la probabilidad del evento complementario	F	S
13. Interpretar el Diagrama de árbol para reconocer datos solicitados	S	C, S, CF
14. Multiplicar fracciones para hallar el total de elementos en cada bifurcación	/	S
15. Desarrollar instrucciones básicas	/	C
16. Elaborar y hacer uso de diagrama de barras	I, IF	/
17. Calcular probabilidades usando la frecuencia relativa de un evento	F	/
18. Sustituir valores y calcular probabilidades usando la Regla aditiva/Regla multiplicativa	S	/
19. Recolectar datos, organizarlos con ayuda de un diagrama de Venn o tabla de doble entrada, analizar la información	C	/

- Finalmente, la única tarea con significado axiomático tuvo relación con el procedimiento 2, aunque es de esperar que en otras tareas vinculadas con este significado se puedan encontrar más procedimientos (por ejemplo, en cursos más avanzados).

3.3.8 Argumentación y Explicaciones

Parte importante en la resolución de una tarea es la argumentación. Para el caso del currículo que se está analizando, se han tomado en cuenta los ejercicios resueltos del libro de texto (ver Figura 25), además de las observaciones que se encontraron en el Programa de estudio (ver Figura 34). Es importante aclarar que la argumentación en ambos documentos es un tanto superficial, muchas veces se confunde con las descripciones.

Figura 34

Ejemplo argumento/explicación encontrado en el Programa de estudio

> La actividad representa un "paseo al azar", que significa que la toma de decisiones de una persona en las bifurcaciones es totalmente aleatoria. Se sabe solamente que la mitad de las personas decide ir a la izquierda y la otra mitad va a la derecha. Por lo tanto, se puede calcular con la probabilidad de $\frac{1}{2}$ para cada decisión.

Fuente. Ministerio de Educación (2016, p.186).

Por ejemplo, en la Tabla 5, al ejemplo correspondiente al contexto intramatemático se le asocia el argumento "Casos particulares y contraejemplos". Por otro lado, la Figura 28 argumenta en la resolución del problema "Uso de representación y Razonamiento en lenguaje numérico y probabilístico", pues para resolverlo se ha utilizado una tabla para organizar la información y se han utilizado argumentos probabilísticos y resultados numéricos.

Tabla 10

Clasificación de los argumentos/explicaciones presentes en las tareas de probabilidad del currículo de Matemática de 1º medio

Argumento	I		C		F		S		A		IC		IF		IS		CF		CS		N	
Casos particulares y contraejemplos	1						1												1		1	
Identificar tipo de evento según la definición			1	2																	1	
Razonamiento en lenguaje numérico																						1
Razonamiento en lenguaje probabilístico	5		1				1		1		1										10	
Razonamiento en lenguaje algebraico y probabilístico							3															
Razonamiento en lenguaje numérico y probabilístico	2		24	8	1		11	4							1			1	9		6	1
Uso de representación y Razonamiento en lenguaje numérico																					3	
Uso de representación y Razonamiento en lenguaje conjuntista																					7	
Uso de representación y Razonamiento en lenguaje probabilístico			2																		4	1
Uso de representación y Razonamiento en lenguaje numérico y conjuntista				2																	1	4
Uso de representación y Razonamiento en lenguaje numérico y probabilístico		2	51	18	16	7	3	15			1							6	1		6	12
Uso de herramienta virtual y Razonamiento en lenguaje numérico y probabilístico	1												1								1	

Libro de texto

Programa de estudio

Como resultado del análisis anterior se obtuvo la Tabla 10, la cual caracteriza los argumentos de acuerdo a si hace uso de representaciones o herramientas virtuales para la explicación, además que considera el tipo de lenguaje con el que se dan dichas explicaciones.

Aquí se tiene en cuenta que el lenguaje natural es básico para cualquier razonamiento, por lo cual se omite en esta clasificación. Por otro lado, se precisa cuando se utilizaron casos específicos y contraejemplos en el argumento, y cuando se utilizó la propia definición para justificar una respuesta.

De la Tabla 10 se observa que el razonamiento que incluye lenguaje numérico, lenguaje probabilístico y muchas veces con apoyo de una representación, es la justificación más usual.

Se valora que en el libro de texto se incluyen tareas que implican encontrar casos particulares, contraejemplos y herramientas virtuales para su resolución, pues diversifica el tipo de razonamiento que el estudiante debe emplear para llegar a la respuesta.

Por último, se aconseja que el profesor invierta tiempo para complementar las argumentaciones que se encuentran en el libro de texto y el Programa de estudio, además de fomentar la argumentación entre los alumnos.

3.4 Coherencia Entre el Programa de Estudio y el Libro de Texto de 1º Medio

Como se pudo observar en el análisis de los significados de la probabilidad que están presentes en el currículo de 1º medio, el significado que más se pretende aplicar en este nivel es el significado clásico, a través de la regla de Laplace y el conteo de casos; esto, como se mencionó anteriormente en la sección 3.3.1, se da tanto en el libro de texto como en el Programa de estudio. Sin embargo, con relación a este significado, en el libro de texto se enseña una herramienta más que puede ser útil para el conteo de casos: la tabla de doble entrada. Este recurso aparece dentro de los objetivos del Programa de estudio, y también se encontró en un ejercicio del mismo Programa, pero su aplicación era diferente, siendo más un recurso informativo (presentar datos), lo cual deriva en que el significado para esa tarea no correspondía al significado clásico, sino al significado frecuencial.

El significado subjetivo continúa en importancia y presencia en las tareas del libro de texto y del Programa de estudio, pero aquí encontramos una diferencia relevante entre ambos documentos, pues el texto involucra el concepto de "probabilidad condicional" y presenta varios ejercicios relacionados con ello, algo que de acuerdo al currículo nacional, se pretende enseñar hasta 3º medio (Ministerio de Educación, 2021).

El significado intuitivo está menos presente, pues los alumnos ya han adquirido previamente conocimientos probabilísticos (regla de Laplace, tabla de frecuencias, etc.), y no se encontraron diferencias entre ambos documentos.

Para el significado frecuencial sí se halló una diferencia notoria entre el libro de texto y el Programa de estudio, pues el primero expone la noción de "probabilidad empírica" y provee un procedimiento de cálculo que deriva en el significado frecuencial, lo que no se encuentra entre los objetivos del Programa.

El significado axiomático está presente solamente en una tarea en el libro de texto a través del concepto de campana de Gauss, pero en el Programa se especifica que todo lo relacionado con la distribución normal se presentará solo de manera visual, por lo que no contempla el uso de dicho concepto.

Con relación al tipo de tareas, existen algunas que abarcan lenguajes y procedimientos distintos en ambos documentos. Por ejemplo, el libro de texto privilegia las representaciones conjuntistas como introducción a la noción de la probabilidad y sus operaciones. En cambio, en el

Programa de estudio las representaciones conjuntistas están al final de la presentación de otras representaciones, entonces aparece como una herramienta más. Esto es importante, pues cabe señalar que el origen de la noción de probabilidad se fundamenta en la teoría de conjuntos, por lo cual, como se expresó en la sección 3.3.5, dicho vínculo es necesario al inicio del estudio de las probabilidades.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

4.1 Resultados Sobre los Objetivos

El estudio de los significados de la probabilidad en el currículo de 1º medio chileno nos ha presentado la oportunidad de analizar cómo se aborda la noción de probabilidad en este nivel escolar. Por otro lado, el Enfoque Ontosemiótico nos permitió realizar un análisis a profundidad de los elementos que intervienen en las tareas que involucran este objeto matemático, teniendo como resultado observaciones relevantes que se deben tener en cuenta para su enseñanza, por ejemplo la continuidad entre el lenguaje conjuntista y el lenguaje probabilístico, la presencia del teorema de Bayes en algunos ejercicios, entre otros.

En esta investigación se propuso el siguiente Objetivo General: “Identificar los significados histórico-epistemológicos de la probabilidad que se promueven en el currículo chileno de primero medio mediante la exploración de los planes de estudio y libros de texto”. Este objetivo se ha logrado a través de objetivos específicos, los cuales se enuncian a continuación.

Clasificar las prácticas matemáticas que están presentes en el currículo chileno de primero medio para el estudio de la probabilidad y los elementos que la configuran (OE1). En referencia las prácticas mencionadas, en el análisis del libro de texto y el Programa de estudio de primero medio se identificaron y numeraron las tareas que se seleccionaron para el estudio de la probabilidad; lo anterior permitió delimitar el análisis a la lecciones 11 y 12, correspondiente a los objetivos OA14 y OA15 del eje de probabilidad y estadística (Anexos 1 y 2). De acuerdo al Enfoque Ontosemiótico y los elementos claves presentes en todas las tareas y propuestas tanto del libro de texto como del Programa de estudio, permitió establecer conexiones entre cada uno de ellas (secciones 3.3.2 a 3.3.7). Además, aunque no está contemplado en el EOS, se ha agregado el contexto (sección 3.3.1) al nivel de los elementos claves por considerarlo relevante para situar la tarea y favorecer la comprensión del enunciado de la actividad.

De este objetivo podemos resumir los resultados en la Tabla 11.

Tabla 11

Resumen de la clasificación de las prácticas matemáticas presentes en las tareas de probabilidad del currículo de Matemática de 1º medio

Clasificación	Resumen del análisis
Contexto	Predominan las tareas que involucran juegos de azar (con dados, cartas, monedas, sorteos, bolitas, etc.), pero no existen muchas tareas que involucren los juegos con material concreto ni con material digital, siendo que existen muchos recursos de ese tipo en los juegos de azar. Los datos ficticios abundan en las actividades analizadas, por lo que es deseable existan instancias para que el alumno trabaje con datos reales e incluso los pueda conseguir él mismo.
Situación-problema	El cálculo de probabilidades en situaciones con datos concretos es el tipo de situación-problema que tiene la mayor cantidad de ejercicios. Sin embargo, al ser datos específicos no están adaptados al aula, por lo que se sugiere adaptarlos de modo que la actividad represente la experiencia del alumno. Se observó, además, que las situaciones-problema que tienen que ver con cálculo de probabilidades de experimentos aleatorios (ya sea con repetición, sin repetición, con devolución, sin reposición y simultáneos) predominan debido a su conexión con los juegos de azar que, como se comentó antes, es un contexto recurrente en este nivel.
Conceptos y definiciones	La noción de conjuntos es algo que se ha utilizado en un nivel anterior y, sin embargo, no se ha profundizado; por tanto, considerando que en el Programa de 1º medio se incluye su estudio, es importante abarcar los eventos unión e intersección antes de introducir las reglas de adición y multiplicación, para así poder desarrollar los contenidos de manera gradual. La probabilidad condicional es un concepto complejo que, de acuerdo con los contenidos declarados en el Programa de estudio, se estudiará hasta 3º medio. Es por ello que su introducción no corresponde al nivel de 1º medio por no ser congruente tanto por los conceptos preliminares como los posteriores. Por el contrario, la probabilidad frecuencial (empírica) se recomienda su introducción en este nivel debido a que el alumno está bastante familiarizado con la frecuencia relativa, además de que el uso de tablas es un recurso frecuente que se aplica para el cálculo de probabilidades.

Clasificación	Resumen del análisis
Elementos lingüísticos y representaciones	La presencia del lenguaje natural tiene que ver con la conexión de la probabilidad con los hechos de la vida real. Es importante señalar la existencia del lenguaje simbólico y la importancia de favorecer la comprensión de lo que se pide en cada actividad. Se sugiere seguir con el orden que presenta el libro de texto, comenzando con el lenguaje conjuntista (diagramas de Venn) para luego evolucionar al lenguaje probabilístico. Se puede notar que la riqueza de los diagramas y la representación en tablas dejan ver elementos lingüísticos que facilitan el desarrollo y la comprensión de las actividades, e incluso, en ocasiones, aparece como estrategias para la resolución de problemas.
Propiedades y proposiciones	Se observa un uso menor de las propiedades intuitivas y, por el contrario, se enfatiza el uso de propiedades probabilísticas, como la regla de Laplace, regla aditiva y regla multiplicativa.
Procedimientos	Se destaca el uso de diversas herramientas para el cálculo de probabilidades, como el diagrama de árbol, diagrama de Venn y tabla de doble entrada, lo que facilita el conteo de casos.
Argumentos	El uso del lenguaje numérico y/o probabilístico para argumentar es de lo más usual en las tareas realizadas, muchas veces junto con el apoyo de representaciones.

Determinar los significados histórico-epistemológicos de la probabilidad presentes en dichas prácticas matemáticas y verificar la congruencia de los significados pretendidos entre los planes de estudio y los libros de texto de primero medio. (OE2). Con relación al segundo objetivo específico, en los documentos analizados se han encontrado todos los significados propuestos por Batanero (2005) en el libro de texto, pero en el Programa de estudio no se encontró alguna tarea que conlleve al significado axiomático.

Además, se recalca que entre las prácticas propuestas en el currículo, se encontraron algunas con un solo significado, tareas que involucraron más de un significado (estos últimos a través de actividades que involucraban en el planteamiento y/o en el desarrollo de la actividad dos significados histórico-epistemológicos) y una cantidad considerable de tareas a las cuales no se les asocia ningún significado. Con respecto a esta última categoría (sin significado), cabe destacar que el objetivo de las tareas era la comprensión y manejo de las herramientas presentadas y que son de utilidad en el cálculo de probabilidades, por lo que la reflexión dentro del aula es importante para evitar procesos repetitivos y, sobre todo, lograr un conocimiento sólido.

Al respecto de todo lo anterior, podemos resumir lo siguiente:

- En el libro de texto se hallaron los significados intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático. Además, en algunas tareas se encontraron significados que combinaban dos de los significados anteriores; a saber, intuitivo/clásico, intuitivo/frecuencial, intuitivo/subjetivo y clásico/subjetivo.
- Por otro lado, el Programa de estudio incluye tareas con los significados intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y clásico/frecuencial.

De acuerdo con lo anterior, se aprecia una diferencia entre los significados encontrados en el libro de texto y en el Programa de estudio, siendo que el primero comprende más significados que el segundo y también contiene más combinaciones de significados que en el Programa de estudio. Sin embargo, y a pesar de que el texto contiene el doble de actividades que el programa de estudio, también se encontraron tareas muy interesantes, diferentes y con mucho contenido en el Programa, lo que culminó en que se tuviera una combinación de significados única y que no se encontró en el texto.

Ahora bien, con toda la información obtenida, ya podemos responder a la pregunta de investigación planteada en la sección 1.5: ¿Cuales son los significados (histórico-epistemológicos) de la probabilidad que se pretenden introducir en primero medio, de acuerdo con el currículo de matemáticas chileno? Como ya se ha explicado, aunque se han introducido conceptos como conjuntos, probabilidad condicional e incluso campana de Gauss, estos no han sido desarrollados con profundidad, por lo que podemos declarar que los significados de la probabilidad que se pretenden introducir en el primer nivel de educación media son: intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo. El axiomático no está entre los significados que se desean trabajar en 1º medio.

4.2 Aportes y Limitaciones del Estudio

Entre las contribuciones de este trabajo podemos mencionar que el análisis del currículo de 1º medio es base para los estudios posteriores de probabilidad en educación media, pues no se tenía un estudio de este nivel en Chile.

Por otro lado, las diversas observaciones realizadas a lo largo de la tesis que tienen que ver con la conveniencia y/o adecuación de ciertas tareas, son de utilidad para cualquier profesor que requiera conocer las debilidades y fortalezas del currículo.

También debemos mencionar que hemos hecho propuestas que quedan a debate para la comunidad didáctica sobre importantes cuestionamientos, tales como la pertinencia de introducir determinados conceptos (como probabilidad condicional) en tareas para estudiantes de 14 a 15 años, la no inclusión del significado axiomático o la aproximación a la probabilidad partiendo por una introducción a la teoría de conjuntos.

En cuanto a las limitaciones, aunque la decisión de no incluir el Cuaderno del estudiante, libro que incluye más actividades y es complemento del libro de texto, fue debido a que en él no es posible apreciar definiciones, proposiciones o argumentos, el no haberlo analizado puede considerarse una limitación debido a que existe la posibilidad de que hubiéramos encontrado tareas diferentes a las del texto, lo cual implicaría posiblemente trabajar otros significados.

Otra limitación es que solo consideramos los documentos oficiales del Ministerio de Educación Programa de estudio y libro de texto), y no se consideraron en el análisis otros textos escolares vigentes en el país.

Por otro lado, debido a la pandemia no se pudo recurrir a la observación directa de clase, lo cual podría haber aportado otra mirada sobre la gestión de la clase de probabilidad, por ejemplo, la relación con las interacciones.

4.3 Prolongaciones de la Investigación

Entre las eventuales prolongaciones de esta investigación consideramos:

- Un estudio más completo sobre la probabilidad sería comparar el Programa de estudio chileno con el Programa de otro país latinoamericano para investigar los significados de la probabilidad que se promueven en ese Programa y en el mismo nivel.
- Comparar con otro texto chileno del mismo nivel (de los libros de texto más utilizados en el país) o realizar la misma comparación con libros de texto de otro país.
- Analizar el eje de probabilidades en toda la enseñanza media en Chile (1º a 4º medio).
- La observación directa de clases que permitirían el diseño de tareas pertinentes para favorecer el aprendizaje.
- Rediseño de las tareas propuestas sobre los significados de la probabilidad en el libro de texto chileno de 1º medio.

4.4 Comparación de los resultados obtenidos con estudios anteriores

Como hemos mencionado, existen trabajos previos que han tratado el estudio de los significados de la probabilidad a través del currículo en diversos países, incluido Chile.

Del mismo modo que en Vásquez y Alsina (2015), quienes estudiaron los significados de la probabilidad presentes de 1º a 6º básico, los significados intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo son trabajados en el currículo de 1º medio.

En cuanto al significado axiomático, Ortiz (2002) menciona que para alumnos de 14 a 15 años no se debería introducir aún la concepción formal, lo que coincide con lo propuesto en el Programa de estudio. Gómez (2014) señala al respecto que el significado axiomático puede acercarse desde lo intuitivo, lo que coincide en cierta manera con la única tarea propuesta en el libro de texto, ya que esta viene a ser más una extensión de la máquina de Galton, es decir, una investigación sugerida pero en la que no se tiene la intención de profundizar, sino más bien es conocer que existen más herramientas y conocimientos vinculados.

En cuanto a los significados combinados (intuitivo/clásico, intuitivo/frecuencial, intuitivo/subjetivo, clásico/frecuencial, clásico/subjetivo), en Gómez (2014) también se presentan algunas de estas combinaciones, pero se explica que la dualidad se da porque el alumno podría responder con un significado diferente al que se espera. Coincidimos con lo expresado en dicha investigación pero, además, consideramos que también se puede ver en muchas tareas la necesidad de transitar por varios significados, como en el ejemplo de la figura 14: primero se hace una división de casos favorables entre casos totales (clásico) y posteriormente se aplica la probabilidad condicional (subjetivo).

4.5 Reflexiones Finales

Esta investigación abre varios puntos para la discusión, como la presencia y coherencia de los significados, que es el objetivo de la tesis, pero también da paso a observaciones transversales como la adecuación de tareas y el uso de conceptos que, desde nuestra perspectiva, no eran necesarios para el nivel o, por el contrario, debieron profundizarse más.

Por ejemplo, la frecuencia relativa es un tema que se enseña desde 7º básico, e incluso su estudio está previsto en el Programa de estudio de 1º medio, pero en este Programa no se encontró tarea vinculada a este concepto. En cambio, en el texto sí se consideraron tareas que incluían el cálculo de probabilidades utilizando la frecuencia relativa, además que se introdujo la noción de probabilidad empírica para definir este tipo de cálculo, lo que cual es positivo pues favorece en este caso la progresión de los aprendizajes.

También está el tema de la probabilidad condicional, la cual está presente en el texto pero no está contenido en el Programa de 1º medio. En este punto consideramos que el teorema de Bayes es un tema que requiere más tiempo y profundidad, además que no va en consecuencia con las lecciones que se han demarcado (confrontar tabla 2 y tabla 3) y, por tanto, no es pertinente su introducción en este nivel escolar.

Con respecto a los significados, se ha mencionado que el significado clásico de la probabilidad es el más frecuente en el estudio de la probabilidad en el currículo chileno de 1º medio y, por el contrario, el significado axiomático es el menos referido. Debido a lo anterior se esperaría que en los próximos cursos otros significados cobren mayor relevancia, como el frecuencial o el subjetivo, y que en los últimos niveles de educación media se puedan encontrar más formalidades.

En el caso de los elementos lingüísticos, se ha destacado el papel que tiene el profesor en el sentido que debe cuidar la precisión para evitar que los alumnos comentan errores debido a la ambigüedad y a los distintos lenguajes que se utilizan. El lenguaje natural siempre es muy importante debido a que la probabilidad pretende dar solución a cuestionamientos y problemas que son propios de la actividad humana, por lo que esta transposición de una pregunta en lenguaje coloquial a una resolución del mismo en lenguaje más específico es indispensable. El uso inadecuado de este lenguaje puede acarrear incongruencias y problemas al momento de comprender que es lo que se pide (la figura 6 fue un claro ejemplo de ello).

En cuanto a los problemas contenidos en el Programa de estudio, se puede mencionar que notamos una debilidad en la organización progresiva en cuanto a las tareas que demanda la teoría de conjuntos, la cual es base en la teoría de probabilidades pero se trata al final de las reglas aditivas y multiplicativas. En el texto, las nociones de conjunto y de evento se usan de manera indistinta y no se precisa la vinculación entre esos dos conceptos y sus teorías.

Y respecto de las clasificaciones que se han aportado para cada elemento presente en las prácticas matemáticas sugeridas en los problemas (de acuerdo al marco teórico del EOS), se espera que ellas puedan servir de referencia para futuras investigaciones.

ANEXOS

Anexo 1

Clasificación de los problemas Libro de texto 1º Medio

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1SXvw93IO-b6oFkEu0O_-MPRQ7j4nVhxT/edit?usp=sharing&ouid=111705235086600263893&rtpof=true&sd=true

Anexo 2

Clasificación de los problemas Programa de estudio 1º Medio

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1XMzDSzjpdRdrer60dbuwmmk05NOnotkp/edit?usp=sharing&ouid=111705235086600263893&rtpof=true&sd=true

REFERENCIAS

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 247- 263.

Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *25*(4), 527-547.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15–37). New York: Springer.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in trainingteachers. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* - *A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht: Springer.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].

Carranza, P. y Kuzniak, A. (2009). Enfoque bayesiano “oculto” y enfoque frecuentista “ambiguo” en los manuales franceses de Première S y ES. En P. Orús, L. Zamora, & P. Gregori (Eds.), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo*. *Primera aproximación en lengua hispana* (pp. 447-460). Universitat Jaume I de Castellón.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*. Londres: Routledge.

Fan, L., Zhu, Y. and Miao, Z.J.Z. (2013) Textbook Research in Mathematics Education: development status and directions. *ZDM*, *45*(5), 633-646.

Finetti, B. de. (2016). Sobre el significado subjetivo de la probabilidad. *Revista De Filosofía, 58*, pp. 171–198. Recuperado a partir de https://revistafilosofia.uchile.cl/index.php/RDF/article/view/44080

Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97-124.

Fresno, C., Torres, C. y Ávila, J. (2020). *Texto del estudiante. Matemática 1º medio*. Chile: Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones.

GAISE, (2016). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education. College report*. Alexandria: American Statistical Association.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities*. International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Gal, I. (2005), Towards 'probability literacy' for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: challenges for teaching and learning,* (pp. 39-63). Springer Springer Science+BusinessMedia, Inc.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, pp. 417-424). Universidad de Valencia, España.

Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 2*(2), 1-24.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1- 2), 127-135

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática*. Universidad de Granada.

Gómez, T. E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de Educación Primaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].

Guernica Consultores S.A. (2016). *Estudio de Uso y Valoración de Textos Escolares: Informe final*. Encargado por MINEDUC y Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe (UNESCO). Santiago, Chile: María Pía Olivera Vidal.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(4), 344-369.

Inzunsa, S. y Guzmán, M. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación Matemática, 23*(1), 63-95.

León, J., López, J. y Carrillo, C. (2020). Significados de la probabilidad presentes en libros de texto de primer año de secundaria en México. En Balda, Paola; Parra, Mónica; Sostenes, Horacio; Serna, Luis (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 78-88). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

López Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación, 4*, 167-180.

Méndez, T. E. (2019). *Nociones intuitivas de probabilidad en educación básica: estudio psicogenético en el marco de la teoría de situaciones didácticas.* [Tesis doctoral, Universidad de Los Lagos].

Ministerio de Educación, Centro de Estudios (2019). *Estadísticas de la Educación 2018*, Publicación diciembre 2019. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación (2016). *Programa de Estudio Matemática Primero Medio*. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación (2021). *Programa de Estudio Matemática Tercero Medio*. Santiago, Chile.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503-511). Salamanca: SEIEM.

Ortiz, J. J., Batanero, C., Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma, 38*, 5-14.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma, 34*(2), 123-150.

Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D., y Vásquez, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios pedagógicos (Valdivia), 44*(1), 135-156.

Rojas, A., Guzmán, I. (2018). Probabilidad, desde lo coloquial a lo formal. En Sema, Luis; Pagés, Daniela (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1157-1163). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Skovsmose, O. (2016). An intentionality interpretation of meaning in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 92*(3), 411-424.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). Análisis de la probabilidad y sus significados en el currículo escolar y en libros de texto de educación básica. En Vásquez, Claudia; Rivas, Hernán; Pincheira, Nataly; Rojas, Francisco; Solar, Horacio; Chandia, Eugenio; Parraguez, Marcela(Eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX* (pp. 223-230). Villarrica, Chile: SOCHIEM.

Vásquez, C., Pincheira, N. y Díaz-Levicoy, D. (2019). Tareas matemáticas presentes en los libros de texto chilenos para promover el aprendizaje de la estadística y la probabilidad en la educación primaria. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E.

Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.